G. YAYLALI UMUL MATEMATİK ANABİLİM DALI DOKTORA TEZİ MUĞLA 2019

T.C.

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FONKSİYON UZAYLARINDA ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

GÖZDE YAYLALI UMUL

OCAK 2019

MUĞLA

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FONKSİYON UZAYLARINDA ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

GÖZDE YAYLALI UMUL

OCAK 2019
MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

GÖZDE YAYLALI UMUL tarafından hazırlanan **FONKSİYON UZAYLARINDA ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 18/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı' nda Doktora derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Adnan MELEKOĞLU (**Jüri Başkanı**) İmza

Matematik Anabilim Dalı ,
Aydın Adnan Menderes Üniversitesi, Aydın

Doç. Dr. Bekir TANAY (**Danışman**) İmza

Matematik Anabilim Dalı ,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Erdal EKİCİ (**Üye**) İmza

Matematik Anabilim Dalı ,
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Çanakkale

Doç. Dr. Ummahan ACAR (**Üye**) İmza

Matematik Anabilim Dalı ,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Tarkan ÖNER (**Üye**) İmza

Matematik Anabilim Dalı ,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU İmza

Matematik Anabilim Dalı Başkanı ,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Bekir TANAY İmza

Danışman, Matematik Anabilim Dalı ,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 18/01/2019

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Gözde Yaylalı Umul
18/01/2019

ÖZET

FONKSİYON UZAYLARINDA ESNEK TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

Gözde YAYLALI UMUL

Doktora Tezi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Bekir TANAY
Ocak 2019, 74 sayfa

Bu tez çalışmasında esnek kümeler üzerindeki sırasal ve topolojik yapılar detaylı bir şekilde incelenerek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bunların yanı sıra, esnek topolojik yapılar üzerinde sürekli fonksiyonlar çalışılarak esnek Scott sürekli fonksiyonlar ve özellikleri elde edilmiştir. Bunların sonucu olarak, esnek fonksiyon uzayları oluşturularak Esnek Scott topoloji yardımı ile esnek fonksiyonlar uzayı üzerinde esnek Isbell topoloji ve esnek kompakt-açık topolojisi elde edilmiştir. Ayrıca, oluşturulan esnek topolojik yapıların fonksiyon uzayları üzerindeki sağlayacakları özellikler incelenmiştir. Öte yandan esnek Scott topolojisinin dualitesi yardımı ile esnek Lawson topolojisi tanımlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyon Uzayı, Esnek Küme, Esnek Küme Bağıntısı, Esnek Küme Fonksiyonu, Scott Topoloji, Isbell Topoloji, Esnek Topoloji, Esnek Scott Topoloji, Esnek Isbell Topoloji

ABSTRACT

ON SOFT TOPOLOGICAL STRUCTURES ON FUNCTION SPACES

Gözde YAYLALI UMUL

Doctorate (PhD.)
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Associate Professor Dr. Bekir TANAY

January 2019 , 74 pages

In this thesis, some results were obtained by examining the ordering and topological structures on soft sets in detail. In addition, Soft Scott continuous functions and some results were obtained by studying continuous functions on soft sets. As a result of these, by constructing soft continuous function spaces, with the help of soft Scott topology, soft Isbell topology and soft compact-open topology were obtained on soft continuous function spaces. Moreover, the properties of these topological structures on the soft function spaces were investigated. On the other hand, soft Lawson topology was defined with the help of the dual soft Scott topology.

Keywords: Function Spaces, Soft Set, Soft Set Relation, Soft Set Function, Scott Topology, Isbell Topology, Soft Topology, Soft Scott Topology, Soft Isbell Topology

Sevgili aileme

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında ve hazırlanmasında bana yol gösteren, bilgisini, tecrübesini, ilgisini ve desteğini benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Bekir TANAY' a, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi bölümündeki değerli hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, hayatımın her döneminde yanımda olup beni hep destekleyen annem Serpil Yaylalı, babam Ali Yaylalı, ablam Tanem Erdoğan yeğenlerim Ali Emre Erdoğan ile Ayşenur Beyza Erdoğan ve eşim Deniz Umul'a teşekkürlerimi bir borç bilirim. Bu tez, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 16/073 kod numaralı, "Fonksiyon Uzaylarında Esnek Topolojik Yapılar" başlıklı proje ile desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

$\varnothing$	Boş küme
Φ	Boş esnek küme
$\cap$	Kesişim
$\widetilde{\cap}$	Esnek kümelerde kesişim
$\widetilde{\cup}$	Esnek kümelerde birleşim
$\cup$	Birleşim
$\subseteq$	Alt küme
$\widetilde{\subseteq}$	Esnek alt küme
$A \times B$	A kartezyen çarpım B
τ	Topolojik yapı
$\widetilde{\tau}$	Esnek Topolojik yapı
(X,τ)	Topolojik uzay
$(F,A,\widetilde{\tau})$	Esnek topolojik uzay
$\sigma(F,A)$	(F,A) esnek kümesi üzerinde esnek Scott topoloji
$(X,\leq)$	Kısmi sıralı küme
$(F,A,\leq)$	Kısmi sıralı esnek küme
$\uparrow U$	$\downarrow U = \{y \in L : y \leq u, u \in U\}$
$\downarrow U$	$\uparrow U = \{y \in L : u \leq y, u \in U\}$
$\twoheaddownarrow U$	$\twoheaddownarrow U = \{y \in L : y \ll u, u \in U\}$
$\twoheaduparrow U$	$\twoheaduparrow U = \{y \in L : u \ll y, u \in U\}$
TOP	T_0-uzayları ve tüm sürekli fonksiyonlar kategorisi
$\mathcal{O}(X)$	X topolojik uzayının açık alt kümeleri ailesi
$\omega(F,A)$	(F,A) esnek kümesi üzerinde esnek alt topoloji
$\lambda(F,A)$	(F,A) esnek kümesi üzerinde esnek Lawson Topoloji
dcpo	Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme
sup	Supremum
inf	Infimum

$\ll$	Way below bağıntısı
$\prec$	Yardımcı (auxilary) bağıntısı
$\downarrow F(a)$	$\downarrow F(a) = \{(b, F(b)) \mid b \in A, F(b) \le F(a)\}$
$\uparrow F(a)$	$\uparrow F(a) = \{(b, F(b)) \mid b \in A, F(a) \le F(b)\}$
$\twoheaddownarrow F(a)$	$\twoheaddownarrow F(a) = \{(b, F(b)) \mid b \in A, F(b) \ll F(a)\}$
$\twoheaduparrow F(a)$	$\twoheaduparrow F(a) = \{(b, F(b)) \mid b \in A, F(a) \ll F(b)\}$
$Aux(F,A)$	(F,A) üzerindeki tüm yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntıları
$Low(F,A)$	Kısmi sıralı esnek küme (F,A) nın tüm aşağı esnek kümelerinin kümesi
$App(F,A)$	(F,A) nın bütün yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntılarının esnek kümesini
$(F,B)^o$	(F,B) nin esnek içi
$\overline{(F,B)}$	(F,B) nin esnek kapanışı
$\Omega(F,A)$	Özelleştirilmiş (specialization) esnek sıra ile T_0 esnek topolojik uzay (F,A) dan elde edilen kısmi sıralı esnek küme
$STOP((F,A),(G,B))$	(F,A) ile (G,B), T_0 esnek topolojik uzaylar arasındaki bütün sürekli esnek fonksiyonlar
$[(F,A),(G,B)]$	Esnek Isbell topoloji ile donatılmış $STOP((F,A),(G,B))$
R^{op}	Ters bağıntı
$\Lambda((F,A))$	Esnek Lawson topolojik uzay
$OFilt((F,A))$	(F,A) nın filtrelenmiş Scott açık esnek kümelerinin kümesi

1. GİRİŞ

1.1. Amaç Kapsam

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına giden fonksiyonlar uzayı C(X,Y) üzerinde pek çok topolojik yapı oluşturulmakta ve çalışılmaktadır. Örneğin kompakt-açık topoloji ve Isbell topoloji fonksiyon uzayları üzerinde tanımlanmış ve sahip oldukları özellikler yoğun bir şekilde çalışılmakta olan topolojik yapılardır. Gierz vd. (1993)., Isbell topolojiyi tanımlamak için X topolojik uzayının açık alt kümeleri üzerindeki, teorik bilgisayar bilimleri ve topolojik latis teorisinde iyi bilinen Scott topolojiyi kullanmışlardır.

Bulanık küme teorisinin genelleştirmesi olan ve Molodtsov (1999) tarafından tanımlanan esnek küme teorisi son yıllarda pek çok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Esnek kümeler üzerinde pek çok tanımlamalar yapılarak esnek topolojik, esnek cebirsel yapılar gibi yapılar oluşturulmuştur ve çalışılmaya devam edilmektedir.

Bu tez çalışmasında Scott ve Isbell topolojilerin özellikleri araştırılmış olup esnek Scott topolojinin olası topolojik sonuçları da incelenmiştir. Bununla birlikte esnek kümeler üzerindeki sırasal yapılar detaylı bir şekilde incelenerek meet süreklilik, sürekli kısmi sıralı esnek kümeler ve esnek domain gibi kavramların tanımlanmasının yanında topolojik yapılar da incelenmiş olup, esnek topolojik yapılar üzerinde T_0 uzayları gibi bazı konularda sonuçlar elde edilmiştir. Bunlarla birlikte esnek sırasal yapılarda way-below ve auxilary esnek bağıntıları gibi bazı özel esnek bağıntılar tanımlanarak esnek Scott topoloji ile ilişkileri incelenmiştir. Bunların yanı sıra, esnek topolojik yapılar üzerinde sürekli fonksiyonlar çalışılarak esnek Scott sürekli fonksiyonlar ve özellikleri elde edilmiştir. Bunların sonucu olarak ise, esnek fonksiyon uzayları oluşturularak Esnek Scott topoloji yardımı ile esnek fonksiyonlar uzayı üzerinde esnek Isbell topolojisi ve esnek kompakt-açık topolojisi elde edilmiştir. Ayrıca, oluşturulan esnek topolojik yapıların fonksiyon uzayları üzerinde sağlayacakları özellikler incelenmiştir. Öte yandan, esnek Scott topolojisinin dualitesi yardımı ile esnek Lawson topolojisi tanımlanmıştır.

1.2. Kaynak Özetleri

Yönlendirilmiş kümeler kavramı Moore ve Smith (1922)' in yönlendirilmiş kümeleri ve ağları topoloji belirtmede kullandıkları çalışmaya kadar dayanmaktadır. Bu teori ile ilgili incelemeler Kelley (1995)' in çalışmasında bulunmaktadır. Bu yaklaşımlarla latisler üzerindeki Scott yada Lawson gibi topolojiler değerlendirilmektedir.

Literatürde, meet sürekli latislere (Birkhoff, 1967) bazen yukarı sürekli latis (Gratzer, 1978) yada yukarı istikrarlı join (Hermes, 1967) ile meet ve join sürekli olan latislere sürekli (Hermes, 1967) denilmektedir. Bu tez çalışmamızda geniş kabul görmüş olanı kullanacağız. Meet sürekli latislerin literatürde oynadığı rol açık olmamasına rağmen bazı bilgiler (Isbell, 1975a) tarafından sağlanmıstır.

Bu tez çalışmasında kullandığımız pek çok topolojik kavram oldukça standart olmakla birlikte bu kavramlara Bourbaki (1966), Kelley (1995), Munkres (2000), Yüksel (2006), Mucuk (2010) gibi ders kitaplarından ulaşılabilir. Ayrıca sıralama ve topolojiyi birleştiren Johnstone (1982), Vickers (1989) ve Gierz vd. (1993) gibi kaynaklar mevcuttur.

Sürekli latisler, 1969 sonbaharında, cebirsel latislerin genelleştirilmesini keşfeden Dana Scott tarafından tanıtılmıştır. 1971 yılında Dalhouse Kategori Konferansında sunularak (Scott, 1972)' da yayınlanmıştır ve bu sürekli latisler üzerine ilk ulaşılabilir kaynak olmuştur. Daha sonra Scott açıklayıcı bir makele olarak (Scott, 1973) yayınlamıştır. Bunların yanı sıra, sürekli latis kavramının, diğer alanlarda çalışmakta olanlar tarafından da bağımsız bir şekilde bulunması dikkate değerdir.

Gierz vd. (1993) 'deki way-below bağıntısı Scott'un topolojiden türetilen yardımcı (auxiliary) bağıntısı değildir ancak tam latisler üzerinde $x \prec y \Rightarrow x \ll y$ olduğu Scott' un tanımından direkt olarak görülmektedir ve sürekli latisler üzerinde Scott' un bağıntısı ve way-below bağıntısı çakışmaktadır. Genellikle tam latislerde bunlar farklıdırlar.

Way-below bağıntısı kapalı bir şekilde Hofmann ve Stralka (1976) tarafından "x, y altında relatifli kompakttır ancak ve ancak $x \ll y$" şeklinde tanıtılmıştır ve böylelikle $\ll$ notasyonu tanıtılmıştır. Isbell (1975a) ise çalışmasında, meet sürekli latisler üzerinde "x, y de kompakttır" terminolojisini kullanmıştır.

Sürekli yarılatisler kavramı, Continuous Lattices and Domain (Gierz vd. , 1993) kitabında incelenmiş olan duality teorisi, Lawson' dan gelmektedir. Ayrıca sürekli kısmi sıralı kümeler, Markowsky (1976) ve Hoffmann (1979)'ın çalışmalarında da tartışılmıştır. Bunların yanı sıra tüm sürekli latislerin meet sürekli olduğu esas olarak Isbell’ in belirttiği gibi (Isbell, 1975a), Scott’ un çalışmasında (Scott, 1972) bilinmektedir.

Sürekli latisler, teorik bilgisayar bilimindeki uygulamalara yönelik bir bakış açısı ile Dana Scott tarafından tanıtılan domainlerin bir sınıfıdır. Ancak bu alandaki araştırmacıların daha genel domain sınıflarına ihtiyacı olduğu görülmüş ve domain sınıflarını genişletmek ve daha ulaşılabilir yapmak içinde Scott (1982), ideal completions (tamamlama), sınırlı tam cebirsel domainleri (tam cebirsel yarı-latis) veren yapılar olan "bilgi sistemlerini" tanıtmıştır. Sınırlı tam cebirsel domainler, sıklıkla litaratürde "Scott domain" olarak adlandırılmışlardır.

Domain teorisinin, programlama dilinin, bu dillerden gelen ifadelerin anlamını açıklayan matematik objelerini kurmasıyla, anlamlarının biçimlendirilmesine yönelik bir yaklaşım olan Denotasyonel Semantik belirlemede özel olarak, fonksiyonel programlama dilleri için, bilgisayar bilimlerinde önemli uygulamaları vardır. Dana Scott tarafından 1960’ların sonunda başlatılan domainlerin çalışılması ile ilgili ilk motivasyon, Lamda calculusun denotasyonel semantik için yapılan araştırmasıdır.

Yönlendirilmiş kısmi sıralı küme L üzerindeki Scott topoloji, topolojik uzayın açık kümelerinin latisi $L = \mathcal{O}(X)$ için ilk olarak Day ve Kelley (1970) tarafından tanıtılmıştır. Fakat D. Scott’ un "Continuous Lattices" makalesinde (Scott, 1972) bu topolojiyi tüm genellemesiyle tanıtmış olması ve sürekli latisler üzerinde kullanışlılığını göstermiş olması oldukça değerlidir. Scott topoloji ismi ilk olarak Isbell (1975a,b) tarafından kullanılmıştır.

Lawson topolojinin tarihini vurgularken iki bakış açısını ayırt etmek gerekir: topolojik cebir ve latis teorisi. Topolojik cebirde, topoloji ile donatılmış işlemlerinin sürekli olduğu grup, halka ve yarı grup gibi cebirsel yapılar çalışılır. Bu bağlamda, kompakt topolojik yarı latisler 1950’lerden beri A.D. Wallace tarafından çalışılmıştır ve pek çok matematikçi onun izini takip etmiştir. Diğer yandan, latis teorisinde, latisler göz önünde bulundurulur ve verilen sıralama yapısı ile doğal olarak tanımlanan topolojilere bakılır, bunlara tipik örnekler $\sigma(L)$ Scott, $\omega(L)$ aşağı ve $\delta(L)$ Lawson topolojileridir, tabikide başka topolojilerde vardır. Topolojik cebir bakışının ve latis teorik bakış açısının harmanlanması, sürekli latislerin ilgilenilmesi kadarıyla, Hofmann ve Stralka (1976) tarafından yapılmıştır.

$\delta(L)$ topolojisinin (Gierz vd. , 1993) de verilen tanımı 1976 dan beri geliştirilmiş, Lawson topoloji adı Tulane’de 1977’ deki Birinci Sürekli Latisler Çalıştayında seçilmiştir. Ancak, Lawson topoloji 1961 gibi erken bir tarihte, Fell (1962) tarafından, X yerel kompakt uzay olduğunda düşünülmüştür.

Ekonomi, mühendislik, çevre bilimi gibi alanlardaki bazı problemler içerdikleri çeşitli belirsizliklerden dolayı klasik yöntemler ile çözülemezler. Klasik matematikte, matematiksel model inşa edilir ve bu model için tam sonuç elde edilmeye çalışılır. Tam sonuç elde edilemediği durumlarda ise yaklaşık çözüm elde edilmeye çalışılır. Molodtsov (1999) bu belirsizlikler ile başa çıkmak için esnek kümeler teorisini oluşturmuştur. Bu teoride başlangıçta tanımlanan nesnelerin yaklaşımsal bir doğası vardır. Temelleri hızlı bir şekilde oluşan esnek kümelerde, Maji vd. (2003) esnek kümeler teorisinin temel yapılarını oluşturmuşlardır. Daha sonra Babitha ve Sunil (2010) esnek kümeler üzerinde esnek bağıntı, esnek kısmi sıralama bağıntısı gibi yapıları tanımlamışlardır. Roy ve Samanta (2011), Çağman vd. (2011)' nun tanımlamış oldukları esnek topolojiyi geliştirerek tekrar tanımlamışlardır. Bunların ardından Wardorwski (2013) esnek eleman, esnek fonksiyon ve esnek sürekli fonksiyon tanımlarını vermiştir. Tanay ve Yaylalı (2014) esnek Scott topolojiyi tanımlamışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak topoloji, kategori, sırasal yapılar ve esnek kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremler özet olarak verilmektedir. Bu bölümdeki topoloji, kategori ile ilgili tanım ve teoremler için (Kelley, 1995; Alizade ve Pancar, 1999; Munkres, 2000; Yüksel, 2006; Mucuk, 2010) kullanılmıştır.

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme ve τ, X in kuvvet kümesi $\wp(X)$ in bir alt kolleksiyonu olsun.

1. $X \in \tau$ ve $\varnothing \in \tau$,
2. I herhangi bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,
3. I sonlu bir indis kümesi ve $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcap_{i \in I} U_i \in \tau$

Özellikleri sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine *topolojik uzay* denir.

Örnek 2.1.2.
1. X boş olmayan bir küme olsun. $\tau = \{X, \varnothing\}$ topolojisine *kaba topoloji* denir.
2. $X \neq \varnothing$, $\tau = \wp(X)$ koleksiyonu X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye *ayrık topoloji* denir.

Tanım 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1) $U \subseteq X$ için

- $U \in \tau$ ise U ya *açık küme* denir.
- $X/U \in \tau$ ise U ya *kapalı küme* denir.

2) $A \subseteq X$ olsun. A yı içeren herhangi bir açığı içeren X in herhangi bir alt kümesine A nın *komşuluğu* denir.

3) $A \subseteq X$ alt kümesi x in komşuluğu ise x e A nın *iç noktası* denir. İç noktaların oluşturduğu kümeyede A nın *içi* denir; A^o ile gösterilir.

4) $A \subseteq X$ alt kümesini içeren en küçük kapalı kümeye A nın *kapanışı* denir; $\overline{A} = cl(A)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının her komsuluğunda, A kümesinin en az bir elemanı varsa, x noktasına A kümesinin *kapanış noktası (değme noktası)* denir.

Tanım 2.1.5. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. $\mathcal{B}$ ailesine ait kümelerin herhangi bir bileşimine eşit olan bütün kümelerin oluşturduğu aileye, $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği aile denir ve

$$\mathcal{B}^* = \{A \subset X \,|\, A = \bigcup_{B \in \Psi} B,\ \Psi \subset \mathcal{B}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{B}^* = \tau$ ise, $\mathcal{B}$ ailesine τ topolojisinin *tabanı* denir.

Tanım 2.1.7. (X, τ) topolojik uzayı ve $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{S}$ ailesinin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu aile, τ topolojisini üretiyor ise $\mathcal{S}$ ailesine τ topolojisinin *alt tabanı* denir.

Tanım 2.1.8. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer her $i \in I$ için, A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise, $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *açık örtüsü* denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $\{A_i\}_{i \in J}$ örtüsüne, X kümesinin *sonlu örtüsü* denir. Eğer $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye, X kümesinin bir *alt örtüsü* denir.

Tanım 2.1.9. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, τ) topolojik uzayına *kompakt* denir.

Tanım 2.1.10. Eğer bir küme açık kümelerin kesişimi ise o kümeye *doymuş (saturated) küme* denir.

Tanım 2.1.11. (X, τ_x), (Y, τ_y) topolojik uzaylar olsun.

i) $f : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$ bir fonksiyon olsun. Her $V \in \tau_y$ için $f^{-1}(V) \in \tau_x$ ise, f ye *sürekli fonksiyon* denir.

ii) $f : (X, \tau_x) \to (Y, \tau_y)$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f fonksiyonunun tersi $f^{-1} : (Y, \tau_y) \to (X, \tau_x)$ sürekli ise, f ye *homeomorfizma* denir.

Tanım 2.1.12. X kümesinin altkümelerinden oluşan $\mathfrak{F}$ kümesi, aşağıdaki özellikleri sağlarsa *filtre* denir;

1. $\mathfrak{F}$ nin bir elemanını içeren X in altkümesi $\mathfrak{F}$ nin elemanıdır.

2. $\mathfrak{F}$ bütün sonlu kesişimleri yine $\mathfrak{F}$ nin elemanıdır.

3. $\varnothing \notin \mathfrak{F}$

Örnek 2.1.13. (Dolecki, 2009) Eğer $A \subset X$ ise $(A)_\circ = \{B \subset X : card(A \backslash B) < \infty\}$ ailesi bir filtre olur; bu filtreye, A' nın *sonlu tümleyenler filtresi* denir.

Tanım 2.1.14. (Dolecki, 2009) ξ, X üzerindeki $\mathcal{F}$ filtreleri ve $x \in X$' ler arasında bir bağıntı olsun. $(x, \mathcal{F}) \in \xi$ ise $x \in \lim_\xi \mathcal{F}$ yazılır ve $\mathcal{F}$ filtresi, ξ bağıntısına göre x' e *yakınsar* denilir (başka bir deyişle, x, $\mathcal{F}$' nin ξ' ye göre *limitidir*).

Tanım 2.1.15. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x \neq y$ iken birini içeren fakat diğerini içermeyen bir açık küme var ise bu uzaya T_0 uzayı denir.

2.2. Kategori

Tanım 2.2.16. Bir $\mathcal{K}$ kategorisi

1) $Ob(\mathcal{K})$ nesneler sınıfı

2) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için, $Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ morfizmalar kümesinden (farklı (A, B) ve (C, D) çiftleri için

$$Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{K}}(C, D) = \varnothing$$

olmak üzere);

3) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$ olmak üzere her (g, f) çiftine bunların bileşkesi olan $g \circ f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ morfizmasını karşı getiren $Mor_{\mathcal{K}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ fonksiyonlarından oluşur, öyle ki:

a) Her A, B, C nesneleri ve $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C)$, $h \in Mor_{\mathcal{K}}(C,D)$ morfizmalar için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır (birleşme kuralı).

b) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,A)$ için $f \circ 1_A = f$, $1_A \circ g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $1_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A,A)$ birim morfizması vardır.

Örnek 2.2.17. 1. *Set* kategorisinin nesneleri tüm kümelerdir. $Mor_{Set}(A,B)$, A kümesinden B kümesine olan tüm fonksiyolardan oluşur ve morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir.

2. *Top* kategorisinin nesneleri tüm topolojik uzaylar, morfizmaları sürekli fonksiyonlar ve bileşkeleri alışılmış bileşkelerdir.

3. *Grup* kategorisinin nesneleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmaları ve bileşkeleri homomorfizmlerin bileşkelerdir.

2.3. Sırasal Yapılar

Bu bölümde, Continuous Lattices and Domains (Gierz vd. , 1993) kitabından yararlanılarak Scott topoloji elde etmek için kullanılacak genel tanımlara yer verilmektedir.

Tanım 2.3.18. X ve Y boş olmayan kümeler olsun. $X \times Y$' nin herhangi bir alt kümesine X' den Y' ye bir *bağıntı* denir.

Tanım 2.3.19. $\leq$, X' den X' e bir bağıntı olsun. Eğer her $x \in X$ için $x \leq x$ ise $\leq$ *yansıyan*; $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ olması $x = y$ olmasını gerektiriyorsa $\leq$ *ters simetrik* ve $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ olması $x \leq z$ olmasını gerektiriyorsa $\leq$ *geçişmeli* bağıntı denir.

Tanım 2.3.20. i) Eğer X kümesi üzerindeki $\leq$ bağıntısı yansıma ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısı ile X kümesine *yarı-sıralı küm*e denir.

ii) Eğer X kümesi üzerindeki $\leq$ bağıntısı yansıma, ters simetrik ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\leq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve X kümesine *kısmi sıralı küme* denir.

iii) Eğer X kısmi sıralı kümesinin elemanları karşılaştırılabilir (yani, her $x, y \in X$ için $x \leq y$ yada $y \leq x$) ise X' e *zincir* denir.

Tanım 2.3.21. $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $a \leq x$ ise a'ya A'nın *alt sınırı* denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in A$ için $x \leq a$ ise a'ya A'nın *üst sınırı* denir. A'nın alt sınırları kümesinin en büyük elemanına A kümesinin *e.b.a.s*' ı (inf) denir.Benzer şekilde A'nın üst sınırları kümesinin en küçük elemanına A kümesinin *e.k.ü.s.*' ü (sup) denir.

Tanım 2.3.22. L yarı-sıralı küme ve $D \subseteq L$ olsun. Eğer D'nin her sonlu alt kümesinin D içinde üst sınırı varsa D kümesine *yönlendirilmiş (directed)* küme denir.

Örnek 2.3.23. $(0,1)$ açık aralığı $\mathbb{R}$ üzerinde yönlendirilmiş bir kümedir.

Tanım 2.3.24. L yarı-sıralı bir küme ve $F \subseteq L$ olsun. Boştan farklı olan F kümesinin her sonlu alt kümesinin F de alt sınırı var ise F kümesine *filtrelenmiş küme* denir.

Tanım 2.3.25. $(L, \leq)$ yarı sıralı bir küme, $U \subseteq L$ ve $x \in L$ olsun.

1. $\downarrow U = \{y \in L : y \leq u, u \in U\}$
2. $\uparrow U = \{y \in L : u \leq y, u \in U\}$
3. $\downarrow x = \downarrow \{x\}$
4. $\uparrow x = \uparrow \{x\}$
5. U kümesinin *aşağı küme* olması için gerek ve yeter koşul $U = \downarrow U$ olmasıdır.
6. U kümesinin *yukarı küme* olması için gerek ve yeter koşul $U = \uparrow U$ olmasıdır.
7. U kümesinin *ideal* olması için gerek ve yeter koşul yönlendirilmiş aşağı küme olmasıdır.
8. U kümesi filtrelenmiş yukarı küme ise U kümesine *filtre* denir.

Tanım 2.3.26. Bir S kısmi sıralı kümesinde her $a, b \in S$ için $\{a, b\}$ kümesinin en büyük alt sınırı varsa, S'ye *alt-yarılatis* denir, her $a, b \in S$ için $\{a, b\}$ kümesinin en küçük üst sınırı varsa, S'ye *üst-yarılatis* denir. S hem alt-yarılatis hemde üst-yarılatis ise S'ye *latis* denir.

Not 2.3.27. Bu tezde alt-yarılatis yerine kısaca yarılatis kullanılacaktır.

Tanım 2.3.28. $R \subseteq L \times L$, L üzerinde ikili bir bağıntı olsun. Her $x, y \in L$ için R^{op} ters bağıntısı, $xR^{op}y \Leftrightarrow yRx$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.3.29. X kısmi sıralı kümesinin her yönlendirilmiş alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa X kümesine *yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme* (**dcpo**; directed complete partially ordered) denir.

X kısmi sıralı kümesi yarı latis ve yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme ise X'e *yönlendirilmiş tam yarılatis* denir.

X kısmi sıralı kümesinin her alt kümesinin alt sınırlarının en büyük elemanı ve üst sınırlarının en küçük elemanı varsa, X'e *tam latis* denir.

Tanım 2.3.30. D yönlendirilmiş bir küme ve X herhangi bir küme olsun. Herhangi bir $x : D \to X$ fonksiyonuna X de bir *ağ* denir. $\alpha \in D$ için $x(\alpha) = x_\alpha$ ise x ağı $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ veya (x_α) ile gösterilir.

Eğer $i \leq j$ olması $x_i \leq x_j$ olmasını gerektiriyorsa, (x_j) ağına *artan* denir.

Örnek 2.3.31. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri bilinen "$\leq$" bağıntısına göre birer yönlendirilmiş kümedir. Böylece her dizi bir ağdır.

Tanım 2.3.32. X kümesi, D yönlendirilmiş kümesi ve $G = \{x_n | n \in D\} \subseteq X$ ağı ve P özelliği verilsin. Eğer her $n \geq n_0$ için $P(x_n)$ doğru olacak şeilde $n_0 \in D$ varsa P özelliği G ağında *neredeyse sağlanır* denir.

2.4. Scott Topoloji

Bu bölümde, Continuous Lattices and Domains (Gierz vd. , 1993) kitabında anlatılan Scott topolojiyi ile ilgili kavramlar ve oluşturulan uygulamalar verilmektedir.

Tanım 2.4.33. L tam yarı latis olsun. Her $(x_j)_{j \in J}$ ağı için

$$\underline{\lim}_j x_j = \sup_j \inf_{i \geq j} x_i, \tag{2.1}$$

ve $\underline{\lim}_j x_j$ ye ağın *alt limiti* yada *liminfi* denir. $\mathcal{S}$, $x \leq \underline{\lim}_j x_j$ olacak şekildeki $((x_j)_{j \in J}, x)$ ikililerin sınıfını belirtsin, yani $\mathcal{S} = \{((x_j)_{j \in J}, x) : x \leq \underline{\lim}_j x_j\}$ olsun. Böyle her ikili için x, $(x_j)_{j \in J}$ nin $\mathcal{S} - limit$idir ve kısaca $x \equiv_{\mathcal{S}} \lim x_j$ şeklinde gösterilir.

Daha genel olarak, L yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme olsun. Eğer her $j \geq k$ için $y \leq x_j$ olacak şekilde $k \in J$ varsa $y \in L$ noktası, $(x_j)_{j \in J}$ ağının *neredeyse alt sınırıdır*. D, $(x_j)_{j \in J}$ ağının *neredeyse alt sınırlarının* yönlendirilmiş kümesi ve $\mathcal{S}$, $x \leq \sup D$ olacak şekildeki $((x_j)_{j \in J}, x)$ ikililerin sınıfını (yani, $\mathcal{S} = \{((x_j)_{j \in J}, x) : x \leq \sup D; D, (x_j)_{j \in J}$

ağının *neredeyse alt sınırlarının* bazı yönlendirilmiş kümesi$\}$) olsun. Yine böyle her ikili için x, $(x_j)_{j\in J}$ nin $\mathcal{S}-limitidir$ ve $x \equiv_{\mathcal{S}} \lim x_j$ şeklinde gösterilir.

Eğer $(x_j)_{j\in J}$ nin tüm *neredeyse alt sınırlarının* kümelesinin, bazı alt kümelerinin yönlendirilmiş supremumuda (yani, $(x_j)_{j\in J}$ nin $\mathcal{S}-limiti$) olan, supremumu varsa, bu supremuma ağın alt limiti yada liminfi denir, $\underline{\lim}_j x_j$ ile gösterilir.

$\mathcal{S}$ nin ve liminfin yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme (**dcpo**) için olan ikinci tanımı tam yarılatislere uygulandığında $\mathcal{S}$ nin ve liminfin tam yarılatis için olan birinci tanımı ile çakışır. Gerçektende, her $j \in J$ için $\inf_{i\geq j} x_i$ varsa, $y_j = \inf_{i\geq j} x_i$ yazılır. Buradan da $Y = \{y_j : y_j = \inf_{i\geq j} x_i\}$ kümesi yönlendirilmiş ve *neredeyse alt sınırları* kümesi $\downarrow Y$ ye eşit olur. Böylece, $\sup Y = \underline{\lim}_j x_j$ olur. Bunlardan başka, $((x_j)_{j\in J}, x) \in \mathcal{S}$ olması için gerek ve yeter koşul $x \leq \underline{\lim}_j x_j$ olmasıdır.

x değeri ile (neredeyse) sabit olan her x_j ağı için $x = \underline{\lim} x_j$ olduğu ve genel olarak $x = \underline{\lim} x_j$ olan her ağ için eğer neredeyse $x_j \leq y$ ise, $x \leq y$ olur. Artan ağlarda liminf sadece *e.k.ü.s.* olur. Bu tanımla $\mathcal{S}$-limitin tek olmadığı görülmüştür. Eğer liminf varsa $\mathcal{S}-$limitlerin en büyüğüdür ve $\mathcal{S}$-limitler liminfin aşağı kümeleri olur.

Tanım 2.4.34. (X,τ) bir topolojik uzay ve $(x_j)_{j\in J}$, X de bir ağ olsun. $x \in U$ olan her $U \in \tau$ için $(x_j)_{j\in J}$ ağı neredeyse U da ise $(x_j)_{j\in J}$ ağına $x \in X$ noktasına *yakınsıyor* denir. Bu durumda $(x_j)_{j\in J}$ ağına *yakınsak*, x noktasınada $(x_j)_{j\in J}$ *ağının limiti* denir ve genellikle $x_j \to x$ veya $\lim_{j\in J} = x$ ile gösterilir.

Örnek 2.4.35. (x_j) ağı neredeyse sabit ise, yani $j_0 \leq j$ olan her $j \in J$ için, $x_j = x \in X$ olacak şekilde $j_0 \in J$ var ise $x_j \to x$.

Not 2.4.36. Herhangi bir L kümesi üzerinde

$$\mathcal{L} = \{((x_j)_{j\in J}, x) : (x_j)_{j\in J}, L \text{ üzerinde ağ ve } x \in L\}$$

kümesi verilsin. Buradan;

$$\mathcal{O}(\mathcal{L}) = \{U \subseteq L : ((x_j)_{j\in J}, x) \in \mathcal{L} \text{ ve } x \in U \Rightarrow \text{ neredeyse } x_j \in U\}$$

olmak üzere, $\varnothing$ ve $L \in \mathcal{O}(\mathcal{L})$ ve $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ birleşme ve sonlu kesişim altında kapalı olduğundan $\mathcal{O}(\mathcal{L})$ ailesi, L üzerinde bir topoloji oluşturur.

$\mathcal{O}(\mathcal{L})$ topolojisinin tanımına göre $((x_j)_{j\in J}, x) \in \mathcal{L}$ için x_j ağının limiti x olur. Gierz vd. (1993)' de $\mathcal{O}(\mathcal{L})$' deki $\mathcal{L}$ kümesi özel olarak Tanım 2.4.33' de verilen $\mathcal{S}$ ile gösterilen küme olarak alınmış ve bir çok sonuca yer verilmiştir.

Lemma 2.4.37. L yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme (**dcpo**) ve $U \subseteq L$ olsun. Buradan, $U \in \mathcal{O}(\mathcal{S}) = \{U \subseteq L : ((x_j)_{j\in J}, x) \in \mathcal{S}$ ve $x \in U \Rightarrow$ neredeyse $x_j \in U\}$ olması için gerek ve yeter koşul

i) $U = \uparrow U$;

ii) Her yönlendirilmiş küme $D \subseteq L$ için $\sup D \in U \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$.

((ii)' de yönlendirilmiş küme, ideal ile değiştirilebilir.)

Kanıt. $(\Rightarrow)$: $U \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ olsun. (**i**)' i göstermek için $U = \uparrow U$ eşitliğini göstermeliyiz. $U \subseteq \uparrow U$ Tanım 2.3.25' den gelmektedir. $\uparrow U \subseteq U$ göstermek için $x \in \uparrow U$ alalım. Buradan $u \leq x$ olacak şekilde $u \in U$ vardır. Değeri x olacak şekilde (x) sabit ağı için $u \leq x = \underline{\lim} x$ olur. $u \in U \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ olduğundan, (x) ağı neredeyse U' da kalır. Yani $x \in U$ olur. Böylece $U = \uparrow U$ olduğunu göstermiş olduk.

Şimdide (**ii**)' yi gösterelim. D kümesi, L' de yönlendirilmiş bir küme ve $\sup D \in U$ olsun. $x_d = d$ olacak şekilde $(x_d)_{d\in D}$ ağını ele alalım. $\inf_{c\geq d} x_c = d$ olur ve bundan da, $\underline{\lim} x_d = \sup D \in U \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ olur. $((x_d)_{d\in D}, \sup D) \in \mathcal{S}$ olduğundan, neredeyse $d = x_d \in U$ elde edilir. Buda $D \cap U \neq \emptyset$ olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: U kümesi (**i**) ve (**ii**) koşullarını sağlasın. $x \in U$ olacak şekilde $((x_j)_{j\in J}, x) \in \mathcal{S}$ alalım, neredeyse $x_j \in U$ olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{S}$' nin tanımından, $(x_j)_{j\in J}$ ağının neredeyse alt sınırlarının bazı yönlendirilmiş kümesi D için $x \leq \sup D$ olur. (**i**)' den $x \in U$ olması $\sup D \in U$ olmasını gerektirir. (**ii**)' den bazı $d \in D$ için $d \in U$ olur. Tanım 2.4.33 dan, her $i \geq j$ için $d \leq x_i$ olacak şekilde $j \in J$ vardır. Yine (**i**)' den, her $i \geq j$ için $x_i \in U$ olur. Buradan $U \in \mathcal{O}(\mathcal{S})$ çıkar.

((**i**) koşulunun varlığından dolayı (**ii**) koşulunda yönlendirilmiş küme yerine ideal yazılabilir.) □

Tanım 2.4.38. L yönlendirilmiş tam kısmi sıralı kümesinin U alt kümesinin *Scott açık* olması için gerek ve yeter koşul Lemma 2.4.37' deki koşulların sağlanmasıdır. Scott açık kümenin tümleyenine *Scott kapalı küme* denir. L kümesinin Scott açık alt kümeleri koleksiyonuna Scott Topoloji denir ve $\sigma(L)$ ile gösterilir.

L yönlendirilmiş tam kısmi sıralı kümesinin X alt kümesi eğer aşağıda verilen koşulu sağlarsa *(S) özelliği* vardır denir:
(S) Eğer her yönlendirilmiş D kümesi için $\sup D \in X$ oluyorsa, $x \geq y$ olan her $x \in D$ için $x \in X$ olacak şekilde $y \in D$ vardır.

Teorem 2.4.39. Her yönlendirilmiş tam L kümesinde aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

i) Bir kümenin Scott kapalı olması için gerek ve yeter koşul yönlendirilmiş supremumlar altında kapalı aşağı küme olmasıdır.

ii) L daki her x için $\downarrow x = \overline{\{x\}}$ olur.

iii) $\sigma(L)$, T_0 olur.

iv) Her yukarı küme Scott açıkların kesişimidir.

v) Bir kümenin Scott açık olması için gerek ve yeter koşul **S** koşulunu sağlayan yukarı küme olmasıdır.

vi) Her aşağı küme **S** koşulunu sağlar.

vii) **S** koşulunu sağlayan tüm kümeler koleksiyonu bir topoloji olur.

Kanıt. i) $D \subseteq L$'nin aşağı küme olması için gerek ve yeter şart $L - D$'nin yukarı küme olmasıdır ve $L - D$ Lemma 2.4.37 (2) sağlaması için gerek ve yeter koşul D'nin yönlendirilmiş supremumlar altında kapalı olmasıdır.

ii) $\downarrow x$, x yı içeren en küçük aşağı kümedir ve yönlendirilmiş supremumlar altında kapalıdır.

iii) $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ ise $\downarrow x = \downarrow y$ olur. Buradan da $x = y$ elde edilir. Sonuç olarakta $\sigma(L)$ topolojik uzayı T_0 olur.

iv) Her yukarı küme U, $x \in L - U$ olacak şekilde $L - \downarrow x$ kümelerinin kesişimleridir. Bunlarında açık küme olduğu **(ii)** ile görülür.

v) U nin Scott açık olması için gerek ve yeter koşul $\uparrow U = U$ olması ve **S** koşulunu sağlamasıdır.

vi) İspat açıktır.

vii) **S** koşulunu sağlayan iki kümenin kesişimide **S** koşulunu sağlar ve **S** koşulunu sağlayan kümelerin keyfi birleşimleride **S** koşulunu sağlar. $\varnothing$ ve L de **S** koşulunu sağlar. Sonuç olarak **S** koşulunu sağlayan tüm kümeler koleksiyonu bir topoloji olur.

$\square$

Örnek 2.4.40. 1. L yönlendirilmiş tam kısmi sıralı küme (**dcpo**) olsun. L sonlu ise Scott açık kümeler sadece yukarı kümelerdir. Gerçektende eğer $U \subseteq L$ Scott açık küme ise Tanım 2.4.38' dan $U = \uparrow U$ olur. Diğer taraftan $U \subseteq L$ yukarı küme olsun, yani $U = \uparrow U$ olsun. $\sup D \in U$ olacak şekilde herhangi bir yönlendirilmiş $D \subseteq L$ alalım. D kümesi, yönlendirilmiş ve sonlu olduğundan $\sup D \in D$ olur. Buradan da $U \cap D \neq \varnothing$ çıkar.

2. $L = \mathbb{R}^-$ alırsak, Scott açık kümeler $r \in \mathbb{R}^-$ iken $(r, 0]$ şeklinde kümeler olur.

3. $2 = \{0, 1\}$ zincirini alalım. $\sigma(2) = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$ olur. 2 uzayı bu topoloji ile birlikte Sierpiński uzayı olarak tanınmaktadır.

Lemma 2.4.41. X, bir T_0 uzayı olsun. Eğer $K \subseteq X$ kompakt küme ise

$$F_K = \{U \in \mathcal{O}(X) : K \subseteq U\} \tag{2.2}$$

ailesi bir Scott açık filtre olur.

2.5. Isbell Topoloji

Bu bölümde Continuous Lattices and Domains (Gierz vd. , 1993) kitabında yer alan Kompakt Açık ve Isbell topoloji tanımlarına ve oluşturulan uygulamalara yer verilmektedir.

$TOP(X, Z)$, T_0 olan X topolojik uzayından, T_0 olan Z topolojik uzayına tüm sürekli fonksiyonlar kümesi olsun.

Tanım 2.5.42. $TOP(X, Z)$ üzerinde, K, X topolojik uzayının kompakt alt kümesi, V, Z topolojik uzayının açık alt kümesi olsun. Buradan $TOP(X, Z)$ üzerinde, alt taban elemanları,

$$N(K \to V) := \{f \in TOP(X, Z) : f(K) \subseteq V\} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan topolojiye *kompakt-açık topoloji* denir.

Örnek 2.5.43. $e : C(X, Y) \times X \to Y$, $(f, x) \mapsto f(x)$ şeklinde tanımlanan $C(X, Y)$ üzerinde e' yi sürekli yapan en ince topoloji kompakt açık topolojidir.

Not 2.5.44. $f(K) \subseteq V \Leftrightarrow K \subseteq f^{-1}(V)$ ve sağ tarafın doğru olması için gerek ve yeter koşul K nin saturasyonunu (yani K yi içeren tüm açık kümelerin kesişimi) $f^{-1}(V)$

nin içinde düşer. Böylece, her kompakt doymuş (saturated) küme için K yi içeren açık kümelerin koleksiyonu F_K bir Scott açık filtredir. Lemma 2.4.41 ve $f \in N(K \to V) \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in F_K$ olduğu gözlemlenir. Böylece, eğer

$$N(F_K \leftarrow V) := \{f \in TOP(X,Z) : f^{-1}(V) \in F_K\} \tag{2.4}$$

olarak tanımlanırsa, $N(F_K \leftarrow V) = N(K \to V)$ olur.

Tanım 2.5.45. X ve Y uzayları için H, $\mathcal{O}(X)$ tam latisinin Scott açık alt kümelerinden ve V, Y nin açık alt kümelerinden olsun. Buradan, $H \in \sigma(\mathcal{O}(X))$ ve $V \in \mathcal{O}(Y)$ iken $TOP(X,Y)$ üzerinde alt taban elemanları

$$N(H \leftarrow V) = \{f \in TOP(X,Y) : f^{-1}(V) \in H\} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanan topolojiye *Isbell topoloji* denir.

Örnek 2.5.46. $X = \{a,b,c\}$ ve $Y = \{0,1\}$ kümeleri verilsin. X üzerinde $\tau_X = \{\varnothing, X, \{a,b\}, \{b\}\}$ ve Y üzerinde $\tau_Y = \{\varnothing, Y, \{1\}\}$ topolojileri tanımlansın.

$$f_1(a) = 1, f_1(b) = 1, f_1(c) = 1;$$
$$f_2(a) = 0, f_2(b) = 0, f_2(c) = 0;$$
$$f_3(a) = 1, f_3(b) = 0, f_3(c) = 0;$$
$$f_4(a) = 1, f_4(b) = 1, f_4(c) = 0;$$
$$f_5(a) = 0, f_5(b) = 1, f_5(c) = 0;$$
$$f_6(a) = 1, f_6(b) = 0, f_6(c) = 1;$$
$$f_7(a) = 0, f_7(b) = 1, f_7(c) = 1;$$
$$f_8(a) = 0, f_8(b) = 0, f_8(c) = 1;$$

fonksiyonları X kümesinden Y kümesine tanımlanan fonksiyonlardır. Buradan $TOP(X,Y) = \{f_1, f_2, f_4, f_5\}$ olur.

$TOP(X,Y)$ üzerinde Isbell topoloji oluşturulmak istendiğinde, Tanım 2.5.45 gereğince, $\mathcal{O}(X)$ tam lattisi üzerindeki Scott açık alt kümeler bulunmalıdır. Tanım 2.4.38 kullanıldığında, $\sigma(\mathcal{O}(X)) = \{\varnothing, \mathcal{O}(X), \{X\}, \{\{a,b\}, X\}, \{\{a,b\}, \{b\}, X\}\}$ şeklinde elde edilir. $\sigma(\mathcal{O}(X))$ kümesinin elemanları sırası ile H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 olarak yazılırsa, Tanım 2.5.45 gereğince, H, $\mathcal{O}(X)$' in Scott açıklarından ve V, Y kümesinin açık alt kümesi iken $N(H \leftarrow V)$ kümeleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$N(H_1 \leftarrow \{1\}) = \varnothing; N(H_1 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_1 \leftarrow Y) = \varnothing;$$

$N(H_2 \leftarrow \{1\}) = TOP(X,Y); N(H_2 \leftarrow \varnothing) = TOP(X,Y); N(H_2 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$

$N(H_3 \leftarrow \{1\}) = \{f_1\}; N(H_3 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_3 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$

$N(H_4 \leftarrow \{1\}) = \{f_1, f_4\}; N(H_4 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_4 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$

$N(H_5 \leftarrow \{1\}) = \{f_1, f_4, f_5\}; N(H_5 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_5 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$

Böylece, $TOP(X,Y)$ üzerindeki Isbell topoloji $N(H \leftarrow V)$ kümelerinin sonlu kesişimleri ile üretilen topoloji olur; yani alt bazı; $\{\varnothing, TOP(X,Y), \{f_1\}, \{f_1, f_4\}, \{f_1, f_4, f_5\}\}$ olur. Sonuç olarak Isbell topolojisi $\{\varnothing, TOP(X,Y), \{f_1\}, \{f_1, f_4\}, \{f_1, f_4, f_5\}\}$ olarak elde edilir.

Örnek 2.5.47. $X = \{0,1\}$ ve $Y = \{a,b,c\}$ kümeleri verilsin. X üzerinde, $\tau_X = \{\varnothing, X, \{1\}\}$ ve Y üzerinde, $\tau_Y = \{\varnothing, Y, \{a,b\}, \{b\}\}$ topolojileri tanımlansın.

$$f_1(1) = a, f_1(0) = a;$$
$$f_2(1) = b, f_2(0) = b;$$
$$f_3(1) = c, f_3(0) = c;$$
$$f_4(1) = a, f_4(0) = b;$$
$$f_5(1) = b, f_5(0) = a;$$
$$f_6(1) = b, f_6(0) = c;$$
$$f_7(1) = c, f_7(0) = b;$$
$$f_8(1) = a, f_8(0) = c;$$
$$f_9(1) = c, f_9(0) = a;$$

fonksiyonları X kümesinden Y kümesine tanımlanan fonksiyonlardır. Buradan $TOP(X,Y) = \{f_1, f_2, f_3, f_5, f_6, f_8\}$ olur.

$TOP(X,Y)$ üzerinde Isbell topoloji oluşturulmak istendiğinde, Tanım 2.5.45 gereğince, $\mathcal{O}(X)$ tam latisi üzerindeki Scott açık alt kümeler bulunmalıdır. Tanım 2.4.38 kullanıldığında, $\sigma(\mathcal{O}(X)) = \{\varnothing, \mathcal{O}(X), \{X\}, \{\{1\}, X\}\}$ şeklinde elde edilir. $\sigma(\mathcal{O}(X))$ kümesinin elemanları sırası ile H_1, H_2, H_3, H_4 olarak yazalırsa, Tanım 2.5.45 gereğince, H, $\mathcal{O}(X)$' in Scott açıklarından ve V, Y kümesinin açık alt kümelerinden iken $N(H \leftarrow V)$ kümeleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$N(H_1 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_1 \leftarrow Y) = \varnothing; N(H_1 \leftarrow \{a,b\}) = \varnothing; N(H_1 \leftarrow \{b\}) = \varnothing;$

$N(H_2 \leftarrow \varnothing) = TOP(X,Y); N(H_2 \leftarrow Y) = TOP(X,Y); N(H_2 \leftarrow \{a,b\}) = TOP(X,Y);$

$N(H_2 \leftarrow \{b\}) = TOP(X,Y);$
$N(H_3 \leftarrow \varnothing) = TOP(X,Y); N(H_3 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$
$N(H_3 \leftarrow \{a,b\}) = \{f_1, f_2, f_5\}; N(H_3 \leftarrow \{b\}) = \{f_2\}$
$N(H_4 \leftarrow \varnothing) = \varnothing; N(H_4 \leftarrow Y) = TOP(X,Y);$
$N(H_4 \leftarrow \{a,b\}) = \{f_1, f_2, f_5, f_6, f_8\};\ \ N(H_4 \leftarrow \{b\}) = \{f_2, f_5, f_6\}$

Böylece, $TOP(X,Y)$ üzerindeki Isbell topoloji $N(H \leftarrow V)$ kümelerinin sonlu kesişimleri ile üretilen topoloji olur; yani alt bazı; $\{\varnothing, TOP(X,Y), \{f_2\}, \{f_1, f_2, f_5\}, \{f_1, f_2, f_5, f_6, f_8\}, \{f_2, f_5, f_6\}\}$ olur. Buradan bazı; $\{\varnothing, TOP(X,Y), \{f_2\}, \{f_1, f_2, f_5\}, \{f_1, f_2, f_5, f_6, f_8\}, \{f_2, f_5, f_6\}, \{f_2, f_5\}\}$ olur. Sonuç olarak Isbell topolojisi $\{\varnothing, TOP(X,Y), \{f_2\}, \{f_1, f_2, f_5\}, \{f_1, f_2, f_5, f_6, f_8\}, \{f_2, f_5, f_6\}\{f_2, f_5\}\}$ olarak elde edilir.

2.6. Lawson Topoloji

Bu bölümde Continuous Lattices and Domains (Gierz vd. , 1993) kitabında Lawson topoloji kısmında yer alan tanımlara ve elde edilen sonuçlara yer verilmektedir.

Scott topoloji pek çok yönden domain teorisine uygundur. Bununla birlikte, sıralamayla elde edilen topolojiler arasında kaba olması topolojinin klasik kavramlarının çoğunun kullanımını sınırlandırmaktadır. Scott topolojiyi etkili düzenleme yollarından bir tanesi dual topolojilere, yani verilen sıralamanın tersi ile elde edilen topolojilere, göre göz önüne almaktır.

Tanım 2.6.48. L bir kısmi sıralı küme olsun. Esas filtrelerin tümleyenleri, $L - \uparrow x$, tarafından üretilen topolojiye aşağı (lower) topoloji denir ve $\omega(L)$ ile gösterilir.

Teorem 2.6.49. L kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x \in L$ için $\uparrow x$, $\omega(L)$ de kapalıdır.

Kanıt. $U = L - \uparrow x$ ise U, $\omega(L)$ de açık küme olur. Buradan da $\omega(L)$ de $\uparrow x$ kapalı küme olur. □

Teorem 2.6.50. L kısmi sıralı bir küme olsun. Sonlu bir K kümesi için, $\uparrow K$, $\omega(L)$ de kapalı olur.

Kanıt. Kapalı kümelerin sonlu birleşimleri kapalı olduğundan $\uparrow K$, $\omega(L)$da kapalıdır. □

Not. R, L kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer L kümesi R^{op} ters bağıntısı ile göz önüne alınırsa bu durumda L^{op} ile gösterilecek.

Tanım 2.6.51. $\sigma(L)^{op}$ üzerindeki Scott topolojiye dual Scott topoloji denir.

Dual Scott topoloji aşağıdaki özellikleri sağlayan U alt kümelerinden oluşmaktadır.
i) L de $U = \downarrow U$ olduğundan L^{op} da $U = \uparrow U$ olur.
ii) Her filtrelenmiş $D \subseteq L$ kümesi için $infD \in U$ olması $D \cap U \neq \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden, her yönlendirilmiş $D \subseteq L^{op}$ kümesi için $supD \in U$ olması $D \cap U \neq \emptyset$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.6.52. Yönlentirilmiş tam kısmi sıralı küme üzerindeki aşağı topoloji $\omega(L)$ genellikle $\sigma(L)^{op}$ den kabadır.

Kanıt. $\uparrow x$ esas filtreleri dual Scott topoloji için kapalı olduğundan. □

Tanım 2.6.53. L yönlentirilmiş tam kısmi sıralı küme olsun. Scott topoloji ve aşağı topolojinin $\sigma(L) \vee \omega(L)$ ortak inceltilmişine (common refinement) Lawson topoloji denir ve $\lambda(L)$ ile gösterilir. $(L, \lambda(L))$ Lawson topolojik uzayı $\Lambda(L)$ ile gösterilir.
Başka bir değişle, Lawson topoloji, $U \in \sigma(L)$ olan U kümeleri ile birlikte $x \in L$ için $L - \uparrow x$ kümelerinden oluşan alt baza sahiptir. $U \in \sigma(L)$ ve F, L nın sonlu alt kümesi iken $U - \uparrow F$ kümesi, $\lambda(L)$ için baz oluşturur.

Dikkat edilirse, U ve $L - \uparrow F$, **(S)** özelliğini sağlar. Dolayısıyla, her $L - \uparrow F$ ve her Lawson açık küme Teorem 2.4.39 den **(S)** özelliğini sağlar.

Teorem 2.6.54. L yönlentirilmiş tam kısmi sıralı küme olsun.
i) U yukarı kümesinin Lawson açık küme olması için gerek ve yeter şart Scott açık küme olmasıdır.
ii) Aşağı kümenin Lawson kapalı olması için gerek ve yeter şart yönlentirilmiş kümelerin supremumları altında kapalı olmasıdır.
iii) Eğer A, L de Scott kapalı küme ise sırasıyla A da relatif aşağı topoloji, relatif Lawson topoloji A da aşağı ve Lawson topoloji olurlar.

Kanıt. i) $\sigma(L) \subseteq \lambda(L)$ olduğundan, Scott açık küme Lawson açık küme olur. Şimdi Lawson açık yukarı kümenin Scott açık küme olduğunu göstermeliyiz. Yukarı küme U Lawson açık küme olsun. Buradan **(S)** özelliğini sağlar. Daha sonra Teorem 2.4.39 (v) den Scott açık küme olur.
ii) Teorem 2.4.39 (i) den açıktır.
iii) A nın aşağı topolojisi ve L den relatif aşağı topolojisi aynı kapalı alt baz kümelerine

sahiptir. A nin A de Scott kapalı alt kümesi L de Scott kapalı kümedir ve sonuç olarak L de relatif Scott topoloji, L de Scott topoloji ile çakışır. Lawson topoloji için ispat bu ikisinden gelir. □

2.7. Esnek Kümeler

Bu bölümde esnek kümelerle ilgili, bu tezde kullanılacak temel tanımlar verilmektedir.

Tanım 2.7.55. (Molodtsov, 1999) U bir başlangıç evreni, E parametrelerin kümesi olsun. $\mathcal{P}(U)$, U' nun tüm alt kümeleri ailesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F : A \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ küme değerli fonksiyon iken, (F,A) ikilisine U üzerinde *esnek küme* denir.

Bazı çalışmalarda (F,A) esnek kümesi $(F,A) = \{(a,F(a))|a \in A\}$ şeklinde gösterilirken, bazı çalışmalarda $(a,F(a))$ yerine kısaca notasyon olarak $F(a)$ kullanılmaktadır. Bu tez çalışmamızda, farkını göstermemiz gereken yerler dışında $F(a)$ notasyonunu kullanacağız.

Örnek 2.7.56. (Maji vd. , 2003) $U = \{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ evler kümesi ve parametreler kümesi E = {pahalı, güzel, ahşap, ucuz, yeşilikli, modern, iyi durumda, kötü durumda} olsun.

(F,A) esnek kümesi e_1 pahalı; e_2 güzel; e_3 ahşap; e_4 ucuz; e_5 yeşillikli olmak üzere $A = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$, $F(e_1) = \{h_2,h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1,h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3,h_4,h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1,h_3,h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$ olsun.

Yani (F,A) esnek kümesi, U kümesinin $\{F(e_i), i = 1,2,3,4,5\}$ alt kümelerinin bir parametrize ailesi olur.

Tanım 2.7.57. (Maji vd. , 2003) Eğer her $e \in A$ için, $F(e) = \varnothing$ oluyorsa, U üzerindeki (F,A) esnek kümesine *boş (null)* esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 2.7.58. (Maji vd. , 2003) U evreni üzerinde (F,A) ve (G,B) iki esnek küme olsun. Eğer

i) $A \subseteq B$ ve,

ii) $\forall e \in A$, için $F(e)$ ve $G(e)$ özdeş yaklaşımlar

ise (F,A), (G,B) nin *esnek alt kümesidir* denir ve $(F,A)\tilde{\subset}(G,B)$ ile gösterilir.

Örnek 2.7.59. $A = \{e_1, e_2, e_5\}$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ olsun. Buradan $A \subset B$ olduğu görülmektedir. (F,A) ve (G,B), U evreninde aşağıdaki gibi tanımlanan iki esnek küme olsunlar.

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$ ve $G(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $G(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $G(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $G(e_5) = \{h_1\}$

Buradan $(F,A)\tilde{\subseteq}(G,B)$ olduğu görülmektedir.

Tanım 2.7.60. (Maji vd. , 2003) U evreni üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin *birleşimi*, $C = A \cup B$ iken, (H,C) esnek kümesi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır; her $e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & e \in A - B \\ G(e) & e \in B - A \\ F(e) \cup G(e) & e \in A \cap B \end{cases}$$

$(F,A)\tilde{\cup}(G,B) = (H,C)$ olarak yazılır.

Tanım 2.7.61. (Maji vd. , 2003) U evreni üzerinde (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin *kesişimi* (H,C) esnek kümesi $C = A \cap B \neq \varnothing$ iken, her $e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ olacak şekilde tanımlanır ve $(F,A)\tilde{\cap}(G,B) = (H,C)$ olarak yazılır.

Tanım 2.7.62. (Ali vd. , 2009) Bir (F,A) esnek kümesinin tümleyeni $(F,A)^c = (F^c, A)$, $F^c : A \to P(U)$ küme değerli fonksiyonu her $x \in A$ için $F^c(x) = U - F(x)$ olacak şekilde tanımlanır ve $(F,A)^c$ ile gösterilir.

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME

3.1. Esnek Sırasal Yapılar

Bu bölümde esnek kümeler üzerindeki sıralama ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (Babitha ve Sunil, 2010) (F,A) ve (G,B), U evreni üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin karteyzen çarpımı $(F,A)\times(G,B) = (H,A\times B)$, $(a,b)\in A\times B$ iken, $H: A\times B\to\mathcal{P}(U\times U)$ ve $H(a,b)=F(a)\times G(b)$ şeklinde tanımlanır. Yani,

$$H(a,b)=\{(h_i,h_j)|h_i\in F(a),h_j\in G(b)\} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.2. Örnek 2.7.59' deki esnek kümelerin, $(F,A)\times(G,B)$ katezyen çarpımı; $(H,A\times B)$ esnek kümesi olur, öyle ki; $(a,b)\in A\times B$ iken, $H(a,b)=\{(h_i,h_j)|h_i\in F(a),h_j\in G(b)\}$ olur. Yani

$(H,A\times B)=\{F(e_1)\times G(e_1),F(e_1)\times G(e_2),F(e_1)\times G(e_3),F(e_1)\times G(e_5),$
$F(e_2)\times G(e_1),F(e_2)\times G(e_2),F(e_2)\times G(e_3),F(e_2)\times G(e_5),F(e_5)\times G(e_1),F(e_5)\times$
$G(e_2),F(e_5)\times G(e_3),F(e_5)\times G(e_5)\}$
olur.

Tanım 3.1.3. (Babitha ve Sunil, 2010) (F,A) ve (G,B), U evreni üzerinde iki esnek küme olsunlar. $(F,A)\times(G,B)$ kartezyen çarpımının bir R esnek alt kümesine, (F,A) dan (G,B) ye bir *esnek bağıntı* denir.
Başka bir deyişle, (F,A) dan (G,B) ye bir R bağıntısı, $(H,A\times B)=(F,A)\times(G,B)$ iken $S\subset A\times B$ ve her $(a,b)\in S$ için $H_1(a,b)=H(a,b)$ olacak şekilde $R=(H_1,S)$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.4. Örnek 3.1.2' deki kartezyen çarpımının esnek alt kümeleri, (F,A), (G,B) esnek kümeleri üzerinde bir bağıntı olur. Örneğin;

$R = \{F(e_1) \times G(e_1), F(e_1) \times G(e_2), F(e_2) \times G(e_3), F(e_2) \times G(e_5), F(e_5) \times G(e_2), F(e_5) \times G(e_3), F(e_5) \times G(e_5)\}$
(F,A) dan (G,B) ye bir esnek bağıntı olur.

Tanım 3.1.5. (Babitha ve Sunil, 2010) R, (F,A) dan (G,B) ye bir esnek bağıntı olsun. $A_1 = \{a \in A : H(a,b) \in R, b \in B\}$ ve her $a_1 \in A$ için $D(a_1) = F(a_1)$ olacak şekilde (D,A_1), R esnek bağıntısının tanım kümesi olarak tanımlanır.

$B_1 \subseteq B$ ve $B_1 = \{b \in B : H(a,b) \in R, a \in A\}$ olacak şekilde her $b_1 \in B_1$ için $RG(b_1) = G(b_1)$ şeklinde tanımlanan (RG, B_1) esnek kümesine R bağıntısının görüntüsü denir ve *ranR* ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. (Babitha ve Sunil, 2010) R, (F,A) üzerinde bir bağıntı olsun.

1. Her $a \in A$ için $H_1(a,a) \in R$ ise R *yansımalıdır*.
2. $H_1(a,b) \in R \Rightarrow H_1(b,a) \in R$ ise R *simetriktir*.
3. Her $a,b,c \in A$ için $H_1(a,b) \in R$, $H_1(b,c) \in R \Rightarrow H_1(a,c) \in R$ ise R *geçişmelidir*.

Tanım 3.1.7. (Babitha ve Sunil, 2011) R, (F,A) üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $F(a), F(b) \in (F,A)$ için $F(a) \times F(b) \in R$ ve $F(b) \times F(a) \in R$, $F(a) = G(b)$ olmasını gerektiriyorsa, R bir *antisimetrik* bağıntıdır denir.

Tanım 3.1.8. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) esnek kümesi üzerinde yansımalı, geçişli $\leq$ bağıntısına yarı-sıralı bağıntı, (F,A) esnek kümesine *yarı-sıralı esnek küme* denir.

Tanım 3.1.9. (Babitha ve Sunil, 2011) $\leq$, (F,A) üzerinde yansımalı, antisimetrik, geçişmeli bir esnek bağıntı ise *kısmi sıralı* denir. $(F,A,\leq)$ üçlüsüne *kısmi sıralı esnek küme* denir.

Tanım 3.1.10. (Babitha ve Sunil, 2011) $\leq$, (F,A) esnek kümesinde bir sıralama ve $F(a)$ ve $F(b)$, (F,A) esnek kümesinin herhangi iki elemanı olsun. Eğer $F(a) \leq F(b)$ yada $F(b) \leq F(a)$ oluyor ise $F(a)$ ve $F(b)$ *kıyaslanabilir* denir.

Tanım 3.1.11. (Babitha ve Sunil, 2011) $\leq$, (F,A) esnek kümesi üzerinde bir kısmi sıralı esnek küme bağıntısı olsun. Eğer (F,A) nın her elemanı kıyaslanabilir ise $\leq$ bağıntısına *tam sıralı* denir.

Tanım 3.1.12. (Yaylalı vd. , 2017) $\leq$, (F,A) da esnek bağıntı olsun. $\leq$ in (G,B) esnek alt kümesine kısıtlanışı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G(a) \leq_{(G,B)} G(b) :\Leftrightarrow F(a) \leq F(b),\ \forall a,b \in B.$$

Tanım 3.1.13. (Wardorwski, 2013) $s(U)$, U üzerindeki bütün esnek kümeler ailesi olmak üzere $(F,A) \in S(U)$ olsun. Eğer $p \in E$ ve $u \in F(p)$ ise $\alpha = (p,\{u\})$, (F,A) nin boştan farklı esnek elemanıdır denir. $p \in E$ iken $(p,\varnothing)$ ikilisine (F,A) nin boş esnek elemanıdır denir. (F,A) nin boştan farklı ve boş esnek elemanlarına (F,A) nin esnek elemanları denir. (F,A) nin α esnek elemanı $\alpha\widetilde{\in}(F,A)$ olarak gösterilir.

Not: (F,A) esnek kümesindeki bir esnek eleman $\alpha = (p,\{u\})$, U üzerinde $B = \{p\} \subseteq E$ ve $H_u(p) = \{u\} \subseteq U$ iken bir (H_u,B) esnek kümesi olarak düşünülebilir. Böylece, $(F,A) = \{(p,F(p))|\, p \in A\}$ esnek kümesinde $p \in A$ iken $F(p)$

$$\{(p,F(p))\} = \widetilde{\bigcup}_{u \in F(p)}(p,\{u\})$$

şeklinde elde edilir. Gerçektende, $C = \bigcup\{p\}$ ve $K(p) = \bigcup_{u \in F(p)}\{u\} = F(p)$ iken $\widetilde{\bigcup}_{u \in F(p)}(p,\{u\}) = (K,C)$ olur.

Tanım 3.1.14. (F,A) esnek küme ve $\leq$, (F,A) üzerinde bir esnek bağıntı olsun. (G,B), $B \subseteq A$ ve her $x \in B$ için $G(x) \subseteq F(x)$ olacak şekildeki başka bir esnek küme ise (G,B) üzerinde $\leq$ esnek bağıntısından elde edilen $\leq_{G \to F}$ esnek bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(p,\{u\})\widetilde{\in} \leq_{G \to F} :\Leftrightarrow (p,\{u\})\widetilde{\in} \leq \; ve\, (p,\{u\})\widetilde{\in}(G,B) \times (G,B)$$

Örnek 3.1.15. $U = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ evrensel küme ve $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b\}$ parametre kümeleri olsun. $F(a) = \{u_1,u_3,u_5\}$, $F(b) = \{u_2,u_4\}$, $F(c) = \{u_2,u_3,u_4\}$ ve $G(a) = \{u_1,u_3\}$, $G(b) = \{u_2\}$ olacak şekilde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri tanımlansın. (F,A) üzerindeki $\leq$ esnek bağıntısı aşağıdaki gibi olsun:

$$\begin{aligned} \leq \;&=\; \{F(a) \times F(a), F(b) \times F(b), F(c) \times F(c), F(a) \times F(b)\} \\ &=\; \big\{\{((a,a),(u_1,u_1)),((a,a),(u_1,u_3)),((a,a),(u_1,u_5)),((a,a),(u_3,u_1)), \\ &\quad ((a,a),(u_3,u_3)),((a,a),(u_3,u_5)),((a,a),(u_5,u_1)),((a,a),(u_5,u_3)), \\ &\quad ((a,a),(u_5,u_5))\},\{((b,b),(u_2,u_2)),((b,b),(u_2,u_4)),((b,b),(u_4,u_4)), \\ &\quad ((b,b),(u_4,u_2))\},\{((a,b),(u_1,u_2)),((a,b),(u_1,u_4)),((a,b),(u_3,u_2)), \\ &\quad ((a,b),(u_3,u_4)),((a,b),(u_5,u_2)),((a,b),(u_5,u_4))\}\big\} \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} (G,B) \times (G,B) \;&=\; \big\{\{((a,a),(u_1,u_1)),((a,a),(u_1,u_3)),((a,a),(u_3,u_1)), \\ &\quad ((a,a),(u_3,u_3))\},\{((b,b),(u_2,u_2))\},\{((a,b),(u_1,u_2)), \\ &\quad ((a,b),(u_3,u_2))\},\{((b,a),(u_1,u_2)),((b,a),(u_3,u_2))\}\big\} \end{aligned}$$

olduğundan, (G,B) üzerinde $\leq$ esnek bağıntısından elde edilen esnek bağıntı

$$\begin{aligned}\leq_{G\to F} &= \{\{((a,a),(u_1,u_1)),((a,a),(u_1,u_3)),((a,a),(u_3,u_1)),((a,a),(u_3,u_3))\},\\ &\{((b,b),(u_2,u_2))\},\{((a,b),(u_1,u_2)),((a,b),(u_3,u_2))\}\}\\ &= \{G(a)\times G(a),G(b)\times G(b),G(a)\times G(b)\}\end{aligned}$$

olur.

Tanım 3.1.16. (Babitha ve Sunil, 2011) $(G,B,\leq)$ kısmi sıralı bir esnek küme olsun. Buradan

a) $b\in B$ ve her $x\in B$ için $G(b)\leq G(x)$ oluyor ise, $G(b)$ ye, (G,B) esnek kümesinin '$\leq$' sıralamasına göre en küçük elemanıdır denir.

b) $b\in B$ için $G(x)\leq G(b)$ ve $G(x)\neq G(b)$ olacak şekilde $x\in B$ yoksa, $G(b)$'ye (G,B) esnek kümesinde '$\leq$' sıralamasına göre küçükçe eleman denir.

a') $b\in B$ ve her $x\in B$ için $G(x)\leq G(b)$ oluyor ise, $G(b)$ ye, (G,B) esnek kümesinin '$\leq$' sıralamasına göre en büyük elemanıdır denir.

b') $b\in B$ için, $G(b)\leq G(x)$ ve $G(x)\neq G(b)$ olacak şekilde $x\in B$ yoksa, $G(b)$'ye (G,B) esnek kümesinde '$\leq$' sıralamasına göre büyükçe eleman denir.

Tanım 3.1.17. (Tanay ve Yaylalı, 2014) $\leq$, (F,A) esnek kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun ve $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ olduğunu varsayalım.

- $a\in A$ iken, her $x\in B$ için $F(a)\leq G(x)$ oluyorsa, $F(a)$' ya, (G,B) esnek kümesinin $(F,A,\leq)$ sıralı esnek kümesinde *alt sınırıdır* denir.
- $a\in A$ iken, $F(a)$, (G,B) esnek kümesinin $(F,A,\leq)$ içinde alt sınırlarının en büyüğü ise (G,B) esnek kümesinin *e.b.a.s.*' ı (infimum) denir.

Benzer şekilde,

- $a\in A$ iken, her $x\in B$ için $G(x)\leq F(a)$ oluyorsa, $F(a)$' ya, (G,B) esnek kümesinin $(F,A,\leq)$ sıralı esnek kümesinde *üst sınırıdır* denir.
- $a\in A$ iken, $F(a)$, (G,B) esnek kümesinin $(F,A,\leq)$ içinde üst sınırlarının en küçüğü ise (G,B) esnek kümesinin *e.k.ü.s.*' ü (supremum) denir.

Tanım 3.1.18. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) esnek küme olsun. (F,A) sonlu parametre kümesine sahipse, (F,A) ya sonlu esnek küme denir.

Tanım 3.1.19. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) yarı-sıralı esnek bir küme ve $(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (G,B) boş olmayan esnek kümesinin her sonlu esnek alt kümesinin (G,B) de üst sınırı var ise (G,B) esnek kümesine *yönlendirilmiş esnek küme* denir.

Örnek 3.1.20. (Tanay ve Yaylalı, 2014) $U = \{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$, $A = \{a_1,a_1,a_3\}$ iken

$$F(a_1) = \{c_1,c_2\},\ F(a_2) = \{c_2\},\ F(a_3) = \{c_4,c_5,c_6\}$$

olacak şekilde bir (F,A) esnek kümesi dikkate alınsın. (F,A) esnek kümesi üzerinde

$$\leq = \{F(a_1)\times F(a_1), F(a_2)\times F(a_2), F(a_3)\times F(a_3), F(a_1)\times F(a_2), F(a_2)\times F(a_3),\ F(a_1)\times F(a_3)\}$$

esnek bağıntı tanımlansın. (F,A) esnek kümesi $\leq$ bağıntısına göre yönlendirilmiş esnek küme olur.

Tanım 3.1.21. (Yaylalı ve Tanay, 2015) (F,A) yarı-sıralı esnek bir küme ve $(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (G,B) boş olmayan esnek kümesinin her sonlu esnek alt kümesinin (G,B) de alt sınırı var ise (G,B) esnek kümesine *filtrelenmiş esnek küme* denir.

Tanım 3.1.22. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A), $\leq$ esnek küme bağıntısı ile yarı-sıralanmış bir esnek küme olsun. $(G,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ için;

i) $C = \{a \in A : F(a) \leq G(b), b \in B\}$ ve $H = F|_C$ olmak üzere, (H,C) esnek kümesi $\downarrow (G,B)$ şeklinde gösterilir.

ii) $D = \{a \in A : G(b) \leq F(a), b \in B\}$ ve $K = F|_D$ olmak üzere, (K,D) esnek kümesi $\uparrow (G,B)$ şeklinde gösterilir.
Ayrıca,

iii) Eğer $(G,B) = \downarrow (G,B)$ olursa, (G,B) esnek kümesine *aşağı esnek küme* denir.

iv) Eğer $(G,B) = \uparrow (G,B)$ olursa, (G,B) esnek kümesine *yukarı esnek küme* denir.

v) Eğer (G,B) esnek kümesi yönlendirilmiş aşağı esnek küme ise (G,B) esnek kümesine *ideal* denir.

vi) (Yaylalı ve Tanay, 2015) Eğer (G,B) esnek kümesi filtrelenmiş yukarı esnek küme ise (G,B) esnek kümesine *filtre* denir.

vii) (Yaylalı ve Tanay, 2015) Maksimum elemanı olan esnek ideale esas esnek ideal denir.

viii) (Yaylalı ve Tanay, 2015) Minimum elemanı olan esnek filtreye esas esnek filtre denir

Tanım 3.1.23. (Yaylalı ve Tanay, 2015)

i) $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek kümesinin her $a,b \in A$ olacak şekilde $F(a),F(b)$ elemanlarının en büyük alt sınırı varsa, $(F,A,\leq)$ esnek kümesine *esnek-inf yarı-latis* denir.

ii) $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek kümesinin her $a,b \in A$ olacak şekilde $F(a),F(b)$ elemanlarının en küçük üst sınırı varsa, $(F,A,\leq)$ esnek kümesine *esnek-sup yarı-latis* denir.

iii) $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek kümesi hem esnek-inf yarı-latis hemde esnek-sup yarı-latis ise $(F,A,\leq)$ esnek kümesine, *esnek latis* denir.

Bu tez çalışmasında, esnek-inf yarı-latis yerine yarı latis kullanılacaktır.

Tanım 3.1.24. (Tanay ve Yaylalı, 2014) Bir kısmi sıralı esnek kümenin her yönlendirilmiş esnek alt kümesinin en küçük üst sınırı varsa, o esnek kümeye *yönlendirilmiş tam esnek küme* denir.

Tanım 3.1.25. (Yaylalı ve Tanay, 2015) Esnek-inf yarı-latis ve yönlendirilmiş tam olan esnek kümeye, yönlendirilmiş tam esnek-inf yarı-latis denir.

(F,A) kısmi sıralı esnek kümesinin her esnek alt kümesinin alt sınırlarının en büyük elemanı ve üst sınırlarının en küçük elemanı varsa, (F,A)' ya *tam esnek latis* denir.

Teorem 3.1.26. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun ve $\uparrow(G_1,B_2) = (G_1,B_1)$, $\uparrow(G_2,B_2) = (G_2,B_2)$ olacak şekilde $(G_1,B_1)\widetilde{\subseteq}(F,A)$, $(G_2,B_2)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ ve I indis kümesindeki her i için $(G_i,B_i)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. Buradan

i) $\uparrow((G_1,B_1)\widetilde{\cap}(G_2,B_2)) = \uparrow(G_1,B_1)\widetilde{\cap}\uparrow(G_2,B_2)$.

ii) $\uparrow\left(\widetilde{\bigcup_{i\in I}}(G_i,B_i)\right) = \widetilde{\bigcup_{i\in I}}\uparrow(G_i,B_i)$.

olur.

Kanıt. i) Tanım 2.7.61 dan $B = B_1 \cap B_2$ iken $\uparrow\big((G_1,B_1)\widetilde{\cap}(G_2,B_2)\big) = \uparrow (G,B) = (K,D)$ olur. $K(d) \in (K,D)$ olsun. Buradan, $G(b) = G_1(b) \cap G_2(b) = F(b)$ iken $G(b) \leq K(d)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Tanım 2.7.58 dan ve $b \in B_1$ ve $b \in B_2$ olmasından, $G_1(b) \leq K(d)$ ve $G_2(b) \leq K(d)$ elde edilir. Sonuç olarak, $K(d) \in\uparrow (G_1,B_1) = (K_1,D_1)$ ve $K(d) \in\uparrow (G_2,B_2) = (K_2,D_2)$ olur. Böylece $d \in D_1 \cap D_2$ ve $K_1(d) \cap K_2(d) = F(d) \cap F(d) = F(d) = K(d)$ olduğundan, $K(d) \in\uparrow (G_1,B_1)\widetilde{\cap} \uparrow (G_2,B_2)$ olur.

Tersine, $K(d) \in\uparrow (G_1,B_1)\widetilde{\cap} \uparrow (G_2,B_2)$ olsun. Buradan $\uparrow (G_1,B_1) = (G_1,B_1)$ ve $\uparrow (G_2,B_2) = (G_2,B_2)$ olduğundan, $K(d) \in (G_1,B_1)\widetilde{\cap}(G_2,B_2)$ elde ederiz. Böylece $K(d) \in\uparrow \big((G_1,B_1)\widetilde{\cap}(G_2,B_2)\big)$ olur.

ii) i' e benzer şekilde ispatlanır.

□

Tanım 3.1.27. (Wardorwski, 2013) (F,A) ve (G,B), U evrensel kümesi üzerinde esnek kümeler olsun . Aşağıdaki koşulları sağlayan $T\widetilde{\subseteq}(F,A)\widetilde{\times}(G,B)$ esnek bağıntısına esnek fonksiyon denir $T : (F,A)\widetilde{\rightarrow}(G,B)$ ile gösterilir.

(SM1) her $\alpha\widetilde{\in}(F,A)$ esnek elemanı için $\alpha T \beta$ olacak şekilde sadece bir $\beta\widetilde{\in}(G,B)$ esnek elemanı vardır, $T(\alpha) = \beta$ ile gösterilir;

(SM2) her $\alpha\widetilde{\in}(F,A)$ boş esnek elemanı için $T(\alpha)$, (G,B) de boş esnek eleman olur.

Not:

$$T(\widetilde{\bigcup}_{\alpha\widetilde{\in}(F,A)}\alpha) = \widetilde{\bigcup}_{\alpha\widetilde{\in}(F,A)} T(\alpha) = \widetilde{\bigcup}_{p\in A} T((p,F(p)))$$

eşitlikleri kolaylıkla kontrol edilebilir.

Tanım 3.1.28. (Babitha ve Sunil, 2010) Bir (F,A) dan (G,B) ye T esnek fonksiyonuna eğer $F(a) \neq F(b)$ olması $T(F(a)) \neq T(F(b))$ olmasını gerektirise, injektif (birebir) denir .

Bir (F,A) dan (G,B) ye T esnek fonksiyonuna eğer $ranT = (G,B)$ ise, örten denir .

Bir esnek fonksiyon hem birebir hem örtense bijektif denir.

Tanım 3.1.29. (Wardorwski, 2013) $T\widetilde{\subseteq}(F,A)\widetilde{\times}(G,B)$ bir esnek fonksiyon olsun. $(D,C)\widetilde{\subseteq}(G,B)$ nin T altındaki tersi $T^{-1}((D,C))$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T^{-1}((D,C)) = \widetilde{\bigcup}\big\{\{\alpha\} : \alpha\widetilde{\in}(F,A), T(\alpha)\widetilde{\in}(D,C)\big\}$$

Tanım 3.1.30. (Yaylalı ve Tanay, 2015) Kısmi sıralı esnek kümeler arasında tanımlanan $f:(F,A,\leq_A)\to(G,B,\leq_B)$ esnek fonksiyonuna sıra korur yada monoton denmesi için gerek ve yeter koşul (F,A) daki her $F(a),F(b)$ için $F(a)\leq_A F(b)\Rightarrow f(F(a))\leq_B f(F(b))$ olmasıdır.

Bir injektif f fonksiyonunda f ve f^{-1} monoton ise f ye izomorfizma denir.

Eğer $(F,A,\leq_A)$ ile $(G,B,\leq_B)$ arasında izomorfizma bulunabilirse bunlara izomorf denir.

3.1.1. Esnek way-below bağıntısı

Gösterim kolaylığı için $\inf\{F(a),G(b)\}$ yerine gerektiğinde $F(a)G(b)$ ve $F(x)(G,B)=inf\{F(x),G(b):b\in B\}$ kullanılacaktır.

Tanım 3.1.31. Yönlendirilmiş tam esnek küme olan ve her $x\in A$ ile her yönlendirilmiş esnek alt küme $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ için

$$F(x)sup(G,B)=sup(F(x)(G,B)) \tag{3.7}$$

sağlayan (F,A) esnek-inf yarı-latisine esnek meet sürekli denir.

Örnek 3.1.32. $U=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$ ve $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ olacak şekilde U üzerinde (F,A) esnek kümesi $F(a_1)=\{c_1,c_2\}$, $F(a_2)=\{c_2\}$, $F(a_3)=\{c_4,c_5,c_6\}$ şeklinde ve ensek bağıntı
$\leq=\{F(a_1)\times F(a_1),F(a_2)\times F(a_2),F(a_3)\times F(a_3),F(a_1)\times F(a_2),F(a_2)\times F(a_3),F(a_1)\times F(a_3)\}$
şeklinde tanımlansın. (F,A) nın esnek inf-yarı latis ve yönlendirilmiş tam esnek küme olduğu görülmektedir. Şimdi (F,A) nın esnek meet sürekli olduğunu gösterelim. Her $x\in A$ ve (F,A) nın yönlendirilmiş her esnek alt kümesi (G,B), bu örnek için (F,A) nın tüm esnek alt kümeleri, için $F(x)sup(G,B)=sup(F(x)(G,B))$ olduğunu göstermeliyiz.

$\{F(a_2)\}$ yönlendirilmiş esnek alt kümesi ve $F(a_1)$ için $F(a_1)sup\{F(a_2)\}=inf(F(a_1),F(a_2))=F(a_1)=sup\{infF(a_1),F(a_2)\}$ olur.

$\{F(a_2),F(a_3)\}$ yönlendirilmiş esnek alt kümesi ve $F(a_1)$ için $F(a_1)sup\{F(a_2),F(a_3)\}=inf\{F(a_1),F(a_3)\}=F(a_1)$ ve $sup(F(a_1)\{F(a_2),F(a_3)\})=sup\{inf\{F(a_1),F(a_2)\},inf\{F(a_1),F(a_3)\}\}=sup\{F(a_1),F(a_1)\}=F(a_1)$ olur. Böylece $F(a_1)sup\{F(a_2),F(a_3)\}=$

$sup(F(a_1)\{F(a_2),F(a_3)\})$ elde ederiz.

Diğer durumlarda benzer şekilde elde edilir.

Her $x \in A$ ve (F,A) nın her yönlendirilmiş esnek alt kümesi (G,B) için $F(x)sup(G,B) = sup(F(x)(G,B))$ sağlandığından, (F,A) esnek meet süreklidir.

Teorem 3.1.33. Yönlendirilmiş tam esnek yarı latis (F,A) da aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

1 (F,A) esnek meet süreklidir.

2 her yönlendirilmiş esnek küme (D,C) ve her $F(a) \leq \sup(D,C)$ için $F(a) \leq \sup(F(a)(D,C))$ olur (bundan dolayı $F(a) = \sup(F(a)(D,C))$ dir).

Kanıt. **1⇒2** (D,C) yönlendirilmiş esnek küme ve $F(a) \leq \sup(D,C)$ olsun. Buradan $F(a) \leq F(a)\sup(D,C) = \sup(F(a)(D,C))$ olur.

2 ⇒ 1 (D,C) yönlendirilmiş esnek küme ve $F(a) \leq \sup(D,C)$ olsun. Buradan $F(a) = F(a)\sup(D,C)$, (2) den $F(a) = F(a)\sup(D,C) = \sup(F(a)(D,C))$ elde edilir.

□

Tanım 3.1.34. $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek küme olsun. $F(a)$ way-below $F(b)$ olması için gerek ve yeter koşul (F,A) da $sup(G,B)$ nin var olduğu her yönlendirilmiş esnek altkümesi (G,B) için $F(b) \leq sup(G,B)$ olması her zaman $F(a) \leq G(d)$ olacak şekilde (G,B) esnek kümesinde bir $G(d)$ nin var olmasını gerektirmesidir. $F(a)$ way-below $F(b)$, $F(a) \ll F(b)$ ile gösterilir.

Bu tanım, Sayed (Sayed, 2014) tarafından "(F,A) kısmi sıralı esnek küme olsun. Her $F(x),F(y) \in (F,A)$ için eğer $sup(G,B)$ var ve $F(y) \leq sup(G,B)$ olan her yönlendirilmiş esnek alt küme $(G,B)\tilde{\subseteq}(F,A)$ için $F(x) \leq G(z)$ olacak şekilde $G(z) \in (G,B)$ varsa, $F(x)$ approximate $F(y)$ denir ve $F(x) \ll F(y)$ şeklinde gösterilir." şeklinde eş zamanlı olarak ifade edilmiştir.

Örnek 3.1.35. Örnek 3.1.32 deki kısmi sıralı $(F,A,\leq)$ esnek kümesini göz önüne alalım. Şimdi $F(a_1) \ll F(a_3)$ olduğunu gösterelim. Tanım 3.1.34 dan, (F,A) nın $F(a_3) \leq sup(D,B)$ özelliğini sağlayan her yönlendirilmiş esnek alt kümesi (D,C) için $F(a_1) \leq D(b)$ olacak şekilde (D,C) de $D(b)$ nin var olduğunu göstermeliyiz.

- $B_1 = \{a_1, a_3\}$ olacak şekilde $(D_1, B_1)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ için, $sup(D_1, B_1) = F(a_3)$ ve $F(a_3) \leq sup(D_1, B_1)$ olur ve $F(a_1) \leq F(a_3)$ bulunur.
- $B_2 = \{a_2, a_3\}$ olacak şekilde $(D_2, B_2)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ için, $sup(D_2, B_2) = F(a_3)$ ve $F(a_3) \leq sup(D_2, B_2)$ olur ve $F(a_1) \leq F(a_2)$ bulunur.
- $B_3 = \{a_3\}$ olacak şekilde $(D_3, B_3)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ için, $sup(D_3, B_3) = F(a_3)$ ve $F(a_3) \leq sup(D_3, B_3)$ olur ve $F(a_1) \leq F(a_3)$ bulunur.
- $(F,A)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ için, $sup(F,A) = F(a_3)$ ve $F(a_3) \leq sup(F,A)$ olur ve $F(a_1) \leq F(a_2)$ bulunur.

Bu örnek için esnek way-below bağıntısını

$\ll = \{F(a_1) \times F(a_1), F(a_2) \times F(a_2), F(a_3) \times F(a_3), F(a_1) \times F(a_2), F(a_2) \times F(a_3), F(a_1) \times F(a_3)\}$

şeklinde elde ederiz.

Teorem 3.1.36. Bir kısmi sıralı esnek küme (F,A)' daki her $F(a), F(b), F(c), F(u), F(v)$ elemanları için aşağıdakiler gerçeklenir.

i $F(a) \ll F(b) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$;

ii $F(u) \leq F(a) \ll F(b) \leq F(v) \Rightarrow F(u) \ll F(v)$;

iii $\{F(a), F(b)\}$'nin en küçük üst sınırı var olduğunda $F(a) \ll F(c)$ ve $F(b) \ll F(c) \Rightarrow sup\{F(a), F(b)\} \ll F(c)$ olur;

iv (F,A) en küçük eleman $F(0)$' a sahipse; $F(0) \ll F(a)$ olur.

Kanıt. **i** $F(a) \ll F(b)$ olduğunu varsayalım. $\sup(G,B)$ nin var olduğu ve $F(b) = \sup(G,B)$ olan (F,A) nın yönlendirilmiş esnek alt kümesi (G,B) yi alalım. Buradan, $F(a) \ll F(b)$ olduğundan, $F(a) \leq G(d)$ olacak şekilde (G,B) de $G(d)$ vardır ve $G(d) \leq \sup(G,B)$ olduğunu bildiğimizden, $F(a) \leq F(b)$ elde ederiz.

ii $\sup(G,B)$ nin var olduğu her yönlendirilmiş esnek küme (G,B) için $F(b) \leq \sup(G,B)$ olduğundan $F(a) \leq G(c)$ olacak şekilde $c \in B$ vardır. Şimdi $F(v) \leq \sup(H,C)$ olacak şekilde supremuma sahip olan yönlendirilmiş esnek küme (H,C) yi alalım. Bu $F(b) \leq \sup(H,C)$ olmasını gerektirir, burada tanımdan $F(a) \leq F(d)$ olacak şekilde $d \in C$ vardır. Buda, $F(u) \leq F(d)$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $F(u) \ll F(v)$ olduğunu elde ederiz.

iii $F(c) \leq \sup(G,B)$ olacak şekilde yönlendirilmiş esnek küme (G,B) alalım. Buradan $F(a) \leq G(d_1)$ ve $F(b) \leq G(d_2)$ olacak şekilde (G,B) de $G(d_1)$ ve $G(d_2)$ vardır. $\sup\{F(a),F(b)\} \leq \sup\{G(d_1),G(d_2)\}$ olduğundan ve (G,B) yönlendirilmiş esnek küme olduğundan $\sup\{G(d_1),G(d_2)\} \in (G,B)$ olur. Böylece $F(a) \vee F(b) \ll F(c)$ elde edilir.

iv (F,A) nın $F(a) \leq \sup(G,B)$ olacak şekilde yönlendirilmiş esnek alt kümesi (G,B) yi alalım. $F(0)$ en küçük eleman olduğundan her $x \in B$ için $F(0) \leq F(x)$ olur. Böylece $F(0) \leq G(b)$ olacak şekilde $b \in B$ vardır. Buradan $F(0) \ll F(a)$ olur.

□

Not:

$\twoheaddownarrow F(a) = \{(b,F(b))|b \in A, F(b) \ll F(a)\}$

$\twoheaduparrow F(a) = \{(b,F(b))|b \in A, F(a) \ll F(b)\}$

Not: Esnek tam yarı latis (F,A) da her $F(x)$ için $\twoheaddownarrow F(x)$ esnek kümesi $\downarrow F(x)$ tarafından içerilen bir ideal olur.
Eğer $F(x) \leq F(y)$ ise $\twoheaddownarrow F(x) \widetilde{\subseteq} \twoheaddownarrow F(y)$ olur.

Kanıt. İlk olarak $\twoheaddownarrow F(x)$ in esnek ideal (yönlendirilmiş aşağı esnek küme) olduğunu gösterelim. $\twoheaddownarrow F(x) = \{F(a)|a \in A, F(a) \ll F(x)\}$ olduğunu biliyoruz. $\twoheaddownarrow F(x)$ den $F(a)$ ve $F(b)$ yi alalım. 3.1.36 teoreminden $\sup\{F(a),F(b)\} \ll F(x)$ olur, buradan da $\sup\{F(a),F(b)\} \in \twoheaddownarrow F(x)$ elde ederiz. Böylece $\twoheaddownarrow F(x)$ yönlendirilmiş esnek küme olur.

$\twoheaddownarrow F(x) \widetilde{\subseteq} \downarrow (\twoheaddownarrow F(x))$. Şimdi $\downarrow (\twoheaddownarrow F(x)) \widetilde{\subseteq} \twoheaddownarrow F(x)$ olduğunu göstermeliyiz. $F(u) \in \downarrow (\twoheaddownarrow F(x))$ alalım. Buradan bazı $F(v) \in \twoheaddownarrow F(x)$ için $F(u) \leq F(v)$ olur, bundan da $F(v) \ll F(x)$ olur. (F,A) nın $F(x) \leq \sup(G,D)$ olacak şekilde yönlendirilmiş esnek alt kümesi (G,D) yi alalım. Buradan $F(v) \leq F(d)$ olan $d \in D$ vardır. O halde $F(u) \leq F(v) \leq F(d)$ elde edilir. Bu $F(u) \ll F(x)$ olmasını gerektirir. Öyleyse $F(u) \in \twoheaddownarrow F(x)$ olur. Böylece $\downarrow (\twoheaddownarrow F(x)) \widetilde{\subseteq} \twoheaddownarrow F(x)$ elde edilir. Bu nedenlede $\twoheaddownarrow F(x)$ aşağı esnek küme olur.

$F(x) \leq F(y)$ olsun. $F(u) \in \twoheaddownarrow F(x)$ alalım. Buradan $F(u) \ll F(x)$ olur. Şimdi, (F,A) nın $F(y) \leq \sup(G,D)$ olacak şekilde yönlendirilmiş ensek alt kümesini (G,D) yi alalım, buradan $F(x) \leq \sup(G,D)$ elde edilir. O halde $F(u) \leq F(d)$ olacak şekilde $d \in D$ vardır. Buda $F(u) \ll F(y)$ olmasını gerektirir. Böylece $F(u) \in \twoheaddownarrow F(y)$ olur.

□

Teorem 3.1.37. **i** Kısmi sıralı esnek küme (F,A) için aşağıdakiler birbirine denktir:

1 $F(a) \ll F(b)$,

2 (F,A)'da $F(b) \leq \sup(I,B)$ olacak şekilde her esnek ideal (I,B) için $F(a) \in (I,B)$ olur.

(F,A) meet sürekli esnek yarılatice ise **(1)** ve **(2)** aşağıdakine denktir.

3 (F,A)'da $F(b) = \sup(I,B)$ olacak şekilde her esnek ideal (I,B) için $F(a) \in (I,B)$ olur.

ii $\sup(D,C) = F(a)$ olacak şekilde yönlendirilmiş esnek küme $(D,C)\widetilde{\subseteq} \twoheaddownarrow F(a)$ olduğunu kabul edelim. Kısmi sıralı esnek küme $\downarrow F(a)$'da $F(b) \ll F(a)$ ise (F,A) da $F(b) \ll F(a)$ olur.

Kanıt. **i** $(1) \Rightarrow (2)$: (F,A) nın bir esnek ideali (I,B) için $F(b) \leq \sup(I,B)$, $F(a) \ll F(b)$ olsun. Buradan $F(a) \leq I(b')$ olacak şekilde (I,B) de $I(b')$ vardır. (I,B) esnek ideal olduğundan, $\downarrow I(b')\widetilde{\subseteq}(I,B)$ olur. O halde $F(a) \in \downarrow I(b')\widetilde{\subseteq}(I,B)$ elde edilir.

$(2) \Rightarrow (1)$: **(2)** kabul edelim ve (I,B), $F(b) \leq \sup(I,B)$ olacak şekilde bir yönlendirilmiş esnek küme olsun. **(2)** den $F(a)$, (I,B) de olur yani, $F(a) \leq I(b)$ olacak şekilde (I,B) de $I(b)$ vardır. Bundan dolayı $F(a) \ll F(b)$ olur.

(3) için sadece meet sürekli latislerde $F(b) \leq \sup(I,B)$ nin $F(b) = F(b)\sup(I,B) = \sup F(b)(I,B)$ ye denk olur.

ii $F(b) \ll F(a)$, $F(c) \ll F(a)$ olsun. Buradan (D,C) deki bazı $D(b'),D(c')$ için $F(b) \leq D(b')$ ve $F(c) \leq D(c')$ olur. (D,C) den $D(b') \leq D(e)$ ve $D(c') \leq D(e)$ olacak şekilde $D(e)$ alalım. Bundan da $F(b) \leq D(e)$, $F(c) \leq D(e)$ ve $D(e) \ll F(a)$ elde edilir. Böylece $\twoheaddownarrow F(a)$ yönlendirilmiş esnek küme olur. Eğer $\downarrow F(a)$ da $F(b) \ll F(a)$ ise (D,C) deki bazı $D(e)$ için $F(b) \leq D(e) \ll F(a)$ elde edilir. Sonuç olarak (F,A) da $F(b) \ll F(a)$ olur.

□

Tanım 3.1.38. **i** Kısmi sıralı esnek küme $(F,A,\leq)$ de

$$(F,A) \text{ daki her } F(a) \text{ için } F(a) = \bigvee{}^{\uparrow} \twoheaddownarrow F(a)$$

yaklaşım aksiyomu (axiom of approximation) sağlanırsa $(F,A,\leq)$ e esnek sürekli denir.

ii Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme, esnek sürekli ise esnek domain denir.

iii Tam esnek latis olan esnek domaine, sürekli esnek latis denir.

iv Esnek domain olan tam esnek yarılatise tam sürekli esnek latis alternatif olarakta sınırlı tam esnek domain denir.

v (F,A) esnek domainde her $x \in A$ için, her esnek esas ideal $\Downarrow F(x)$ tam esnek latis ise (F,A) esnek kümesine (F,A)-esnek domain denir.

Teorem 3.1.39. Her sürekli esnek yarılatis, böylece her sürekli esnek latis meet sürekli esnek küme olur.

Kanıt. (F,A) esnek sürekli yarı latis olsun. Yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için, $F(a) \leq sup(D,C)$ olsun. $\Downarrow F(a) \widetilde{\subseteq} \downarrow F(a)(D,C)$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $F(b) \ll F(a)$ ise (D,C) deki bazı $D(c)$ için $F(b) \leq F(a)$ ve $F(b) \leq D(c)$ olur. $F(b) \leq F(a)D(c) \in F(a)(D,C)$ olduğundan $F(b) \leq \sup F(a)(D,C)$ elde edilir. Buradan $F(a) \leq \sup F(a)(D,C)$ elde edilir. Buda Teorem 3.1.33 den (F,A) nın meet sürekli olmasını gerektirir. □

Aşağıdaki teorem, esnek sürekli domainler üzerindeki way-below bağıntısının önemli bir özelliği olan aradeğer özelliğini gösterir.

Teorem 3.1.40. **i** Sürekli kısmi sıralı esnek küme (F,A)'da her yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $F(a) \ll F(c)$ ve $F(c) \leq \sup(D,C)$ ise bazı $D(e) \in (D,C)$ için $F(a) \ll D(e)$ olur.

ii (Sayed, 2014) Sürekli kısmi sıralı esnek küme (F,A)'da

$$F(a) \ll F(c) \Rightarrow (\exists F(b))F(a) \ll F(b) \ll F(c) \quad \text{(SINT)}$$

sağlanır.

Kanıt. **i** (D,C), $F(c) \leq \sup(D,C)$ olan yönlendirilmiş esnek küme olsun ve $(I,B) = \widetilde{\bigcup}\{\Downarrow D(e) | e \in C\}$ olsun. Süreklilikten, $\sup(I,B) = \sup(D,C)$ olur ve yönlendirilmiş esnek ideallerin esnek birleşimi olmasından, (I,B) esnek idealdir. Bundan dolayı, eğer $F(a) \ll F(c)$ ise Teorem 3.1.37 den $F(a)$, (I,B) dedir buda (D,C) deki bazı $D(e)$ için $F(a) \ll D(e)$ olması anlamına gelir.

ii **(i)** den $(D,C) = \downarrow F(c)$ seçersek ve (F,A) nın sürekliliğinden $F(c) = \sup \downarrow F(c)$ elde edilir.

□

3.1.2. Yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı

Tanım 3.1.41. $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek kümesi üzerinde, $\prec$ esnek bağıntısı her $a,b,c,d \in A$ için aşağıdaki özellikleri sağlarsa, yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı denir.

i) $F(a) \prec F(b)$ ise $F(a) \leq F(b)$;

ii) $F(c) \leq F(a) \prec F(b) \leq F(d)$ ise $F(c) \prec F(d)$;

iii) Eğer en küçük eleman $F(0)$ varsa, $F(0) \prec F(a)$.

(F,A) üzerindeki tüm yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntılarını $Aux(F,A)$ ile gösterelim.

Örnek 3.1.42. Örnek 3.1.32 i göz önüne aldığımızda Örnek 3.1.35 teki gibi esnek way-below bağıntısı $\ll$ elde edilir. Bu bağıntı Tanım 3.1.41 daki özellikleri sağlar bu yüzden $\ll$ ayrıca yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı olur.

Teorem 3.1.43. Her yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı geçişmelidir.

Kanıt. Tanım 3.1.41 (i) ve (ii) den açıktır. □

Teorem 3.1.44. Esnek way-below bağıntısı, yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntı olur.

Kanıt. Teorem 3.1.36 den elde ederiz. □

Bu teorem ile, yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntına, esnek way-below bağıntısının bir genelleştirmesidir diyebiliriz.

Not: $(F,A,\leq)$ kısmi sıralı esnek küme olsun. $Aux(F,A)$ nın elemanlarının, $(F,A) \times (F,A)$ nın esnek alt kümesi olduğunu biliyoruz. $Aux(F,A)$, içerme bağıntına göre kısmi sıralı olur. En büyük elemanı, $\leq$ esnek küme bağıntısının kendisi olur ve eğer (F,A) en küçük eleman $F(0)$ a sahipse $Aux(F,A)$ nın en küçük elemanı $F(a) \circ F(b)$ $\Leftrightarrow$

$F(a) = F(0)$ şeklinde tanımlanan esnek küme bağıntısı $\circ$ olur. $Aux(F,A)$ keyfi esnek kesişimler altında kapalı olduğundan tam esnek latis olur.

Kısmi sıralı esnek küme (F,A) nın tüm aşağı esnek kümelerinin kümesini $Low(F,A)$ ile gösterelim. Eğer (F,A) en küçük elemana sahipse $Low(F,A)$ da en küçük elemanı içermelidir.

Teorem 3.1.45. $(F,A,\leq)$ bir kısmi sıralı esnek küme ve **M**, (F,A) daki her $F(a)$ için $s(F(a))\tilde{\subseteq} \downarrow F(a)$ yı sağlayan tüm $s:(F,A)\to Aux(F,A)$ monoton esnek küme fonksiyonlarının kümesi olsun (her $a\in A$ için $s\leq t \Leftrightarrow s(F(a))\tilde{\subseteq} t(F(a))$, sıralamasına göre kısmi sıralı esnek küme gibi düşünülebilir). Buradan

$$\prec \longmapsto s_{\prec} = (F(a) \longmapsto \{F(b) : F(b) \prec F(a)\})$$

eşleşmesi, $Aux(F,A)$ dan **M** ye, tersi her bir esnek fonksiyon $s\in\mathbf{M}$ yi $F(a)\prec_s F(b) \Leftrightarrow F(a)\in s(F(b))$ şeklinde tanımlanan esnek küme bağıntısı $\prec_s$ ye eşleyen, iyi tanımlı bir izomorfizmadır.

Kanıt. $\prec$ bir auxiliary (yardımcı) esnek küme bağıntısı olsun. $s_{\prec}(F(a))$, Tanım 3.1.41 (i) den $\downarrow\{F(a)\}$ içeren ve Tanım 3.1.41 (iii) den (F,A) en küçük eleman $F(0)$ a sahipse $F(0)$ ı içeren,Tanım 3.1.41 (ii) den bir aşağı esnek kümedir. Eğer $F(a)\leq F(b)$ ise Tanım 3.1.41 (ii) den $s_{\prec}(F(a))\tilde{\subseteq} s_{\prec}(F(b))$ olur. Böylece, $s_{\prec}$, **M** dedir ve $\prec \longmapsto s_{\prec}$ eşlemesi sıra korur olur.

Tersine, eğer $s\in\mathbf{M}$ ise, $s(F(a))\tilde{\subseteq} \downarrow\{F(a)\}$ olur ve buda $\prec_s$ in Tanım 3.1.41 (i) i sağlamasını gerektirir. s monoton olduğundan $F(c)\leq F(a)\prec_s F(b)\leq F(d)$ esnek küme bağıntısı, $F(c)\leq F(a)$ ve $F(a)\in s(F(b))\tilde{\subseteq} s(F(d))$ olmasını gerektirir. $s(F(d))$ aşağı küme olduğundan, $F(c)\in s(F(d))$, bu nedenle $F(c)\prec_s F(d)$ olur. Buradan, Tanım 3.1.41 (iii) doğrudan elde edilir. Böylece, $\prec \longmapsto s_{\prec} : \mathbf{M}\to Aux(F,A)$ eşleşmesi iyi tanımlı esnek fonksiyon ve sıra korur olur. □

Bu teoremden, auxiliary (yardımcı) esnek küme bağıntısı, monoton esnek küme fonksiyonunu, her $a\in A$ için $F(a)$ ile sınırlandırılmış aşağı esnek kümeye eşleştirmek ile aynı şeydir.

M deki en büyük eleman $F(a)\to\downarrow\{F(a)\}$ olur. Eğer (F,A) nın $F(0)$ en küçük elemanı varsa, **M** de en küçük eleman $F(a)\to\{F(0)\}$ a sahiptir. **M** nin her esnek alt kümesinin supremum ve infimumu olduğundan, **M** esnek tam latis olur.

Not. Teorem 3.1.37 den

$$\downarrow F(a) = \widetilde{\bigcap}\{(G,B) \in Id(F,A) : F(a) \leq \sup(G,B)\}$$

olduğunu biliyoruz.

(F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun ve keyfi esnek ideal $(G,B) \in Id(F,A)$ için $m_{(G,B)} : (F,A) \to Low(F,A)$ esnek küme fonksiyonu

$$m_{(G,B)}(F(a)) = \begin{cases} \downarrow\{F(a)\}\widetilde{\cap}(G,B) = F(a)(G,B), & F(a) \leq \sup(G,B), \\ \downarrow\{F(a)\}, & \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan, $m_{(G,B)}(F(a))$, $\downarrow\{F(a)\}$ tarafından içerilen, aşağı esnek küme olur ve $F(a) \longmapsto m_{(G,B)}(F(a))$ monoton olur, yani $m_{(G,B)} \in \mathbf{M}$.

Şimdi, $\inf\{m_{(G,B)} : (G,B) \in Id(F,A)\}$ yı $\mathbf{M}$ de hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
(\inf_{(G,B)\in Id(F,A)} m_{(G,B)})(F(a)) &= \widetilde{\bigcap}_{(G,B)\in Id(F,A)} m_{(G,B)}(F(a)) \\
&= \widetilde{\bigcap}_{F(a)\leq \sup(G,B)} m_{(G,B)}(F(a)) \widetilde{\cap} \widetilde{\bigcap}_{F(a)\nleq \sup(G,B)} m_{(G,B)}(F(a)) \\
&= \widetilde{\bigcap}_{F(a)\leq \sup(G,B)} (\downarrow\{F(a)\}\widetilde{\cap}(G,B)) \widetilde{\bigcap} \downarrow\{F(a)\} \\
&= \widetilde{\bigcap}\{(G,B) \in Id(F,A) : F(a) \leq \sup(G,B)\} \\
&= \downarrow\{F(a)\}
\end{aligned}$$

3.1.3. Yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısı

Tanım 3.1.46. Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme (F,A) da, bir auxiliary esnek küme bağıntısı $\prec$ e (ve bununla bağdaştırılmış esnek küme fonksiyonu $s_{\prec} : (F,A) \to Low(F,A)$) yaklaşımsal (approximating) denmesi için gerek ve yeter koşul $C = \{c \in A : F(c) \prec F(a)\}$ ve $H = F_C$ iken $(H,C) = s_{\prec}$ esnek kümesinin (Bunu $s_{\prec} = \{F(c) : F(c) \prec F(a)\}$ şeklide göstereceğiz) yönlendirilmiş olması (yani esnek ideal olması) ve her $a \in A$ için

$$F(a) = \sup\{F(c) : F(c) \prec F(a)\} = \sup s_{\prec}(F(a))$$

olmasıdır.

Bütün yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntılarının esnek kümesini $App(F,A)$ ile göstereceğiz.

Not. $\leq$ esnek küme bağıntısı yaklaşımsal (approximating) dir ve sürekli kısmi sıralı esnek kümede, Tanım 3.1.38 dan, $\ll$ way-below esnek küme bağıntısı yaklaşımsal (approximating) olur.

Teorem 3.1.47. Meet sürekli esnek yarılatis (F,A) da, $Id(G,B)$ deki (G,B) için $m_{(G,B)}$ esnek küme fonksiyonlarına ait her esnek küme bağıntısı yaklaşımsal (approximating) olur. Bu sürekli esnek yarılatisler meet sürekli olduğundan ((Teorem 3.1.39) den) sürekli esnek yarılatisler içinde sağlanır.

Kanıt. $F(a) \in (F,A)$ olsun. Eğer $F(a) \leq \sup(G,B)$ ise $\sup m_{(G,B)}(F(a)) = \sup F(a)(G,B) = F(a)\sup(G,B) = F(a)$ olur. Eğer $F(a) \neq \sup(G,B)$ ise $\sup m_{(G,B)}(F(a)) = \sup \downarrow \{F(a)\} = F(a)$ olur. □

Teorem 3.1.48. Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme (F,A) da, $\ll$ way-below esnek küme bağıntısı, tüm yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntılarında bulunur ve eğer (F,A) bir meet sürekli esnek yarılatis ise $\ll$ way-below esnek küme bağıntısı, bunların esnek kesişimlerine eşittir.

Kanıt. $F(b) \ll F(a)$ olduğunu ve $\prec$ in yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısı olduğunu kabul edelim. Buradan $C = \{c : H(c) \prec F(a)\}$ ve $H = F|_C$ iken (H,C) bir yönlendirilmiş esnek küme olur ve supremumu $F(a)$ olur. Buda bazı $c \in C$ için $F(b) \leq H(c) \prec F(a)$ olmasını gerektirir ve böylece $F(b) \prec F(a)$ olur. Sonuç olarak $\ll$, $\prec$ tarafından içerilir.

Diğer yandan, meet sürekli (F,A) esnek kümesi için, Teorem 3.1.47 den

$$\twoheaddownarrow \{F(a)\} = \widetilde{\bigcap}\{m_{(G,B)}(F(a)) : (G,B) \in Id(F,A)\} \widetilde{\supseteq} \{s_{\prec}(F(a)) : \prec \in App(L)\}$$

elde ederiz. □

Teorem 3.1.49. (F,A) yönledirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun ve aşağıdaki koşulları göz önüne alalım:
1) (F,A) esnek süreklidir yani esnek domaindir;
2) Esnek küme bağıntısı $\ll$, (F,A) daki en küçük yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısıdır;
3) (F,A) da en küçük yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısı vardır.

Bu durumda $(1) \Leftrightarrow (2) \Rightarrow (3)$ olur. Ayrıca, eğer (F,A) meet sürekli esnek yarılatis ise, tüm bu üç koşul denktir.

Kanıt. $(1) \Leftrightarrow (2)$: Tanımdan (F,A) nın esnek domain olması için gerek ve yeter koşul $\ll$ nın yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısı olmasıdır. Böylece (1) ve (2) nin denkliği Teorem 3.1.48 in ilk kısmından gelir.

$(2) \Rightarrow (3)$:Açıktır.

$(3) \Rightarrow (1)$: (F,A) meet sürekli esnek yarılatis olsun. Buradan $\ll$, Teorem 3.1.48 den tüm yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntılarının esnek kesişimi olur. Böylece, eğer yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısının en küçük elemanı varsa, bu $\ll$ olmak zorundadır ve (3) ün (1) i gerektirdiğini görürüz. □

Tanım 3.1.50. (F,A) kısmi sıralı esnek kümesinde $\prec$ yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı, (F,A) daki her $F(a), F(b)$ için

$(SSI)\, F(a) \prec F(c)\, ve F(a) \neq F(c) \Rightarrow (\exists F(b))(F(a) \prec F(b) \prec F(c)\, ve F(a) \neq F(b)).$

koşulunu sağlarsa, güçlü ara değer özelliğini sağladığı söylenir.

Bununla birlikte, $\prec$ nın ara değer özelliğini sağladını söylemek için gerek ve yeter şart (F,A) daki her $F(a), F(b)$ için

$(SINT)\, F(a) \prec F(c) \Rightarrow (\exists F(b))(F(a) \prec F(b) \prec F(c)).$

şeklindeki daha zayıf koşulun sağlanmasıdır.

3.2. Esnek Topolojik Uzaylarda Bazı Sonuçlar

Tanım 3.2.51. (Roy ve Samanta, 2011) (F,A) esnek kümesi üzerinde $\widetilde{\tau}$ koleksiyonu

i) Φ, $(F,A) \in \widetilde{\tau}$;

ii) (G,B), $(H,C) \in \widetilde{\tau}$ ise $(G,B) \widetilde{\cap} (H,C) \in \widetilde{\tau}$;

iii) Λ indeks kümesi ve her $\alpha \in \Lambda$ için $(F,A_\alpha) \in \widetilde{\tau}$ ise $\widetilde{\bigcup}_{\alpha\in\Lambda}(F,A_\alpha) \in \widetilde{\tau}$

koşullarını sağlıyor ise $\widetilde{\tau}$ koleksiyonuna *esnek topoloji* ve $(F,A,\widetilde{\tau})$ ya *esnek topolojik uzay* denir.

Tanım 3.2.52. (Roy ve Samanta, 2011) $\widetilde{\tau}$, (F,A) üzerinde esnek topoloji olsun. $\widetilde{\tau}$ nun elemanlarına açık esnek kümeler denir.

Tanım 3.2.53. (Çağman vd. , 2011) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(G,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ olsun. Eğer $(G,B)^c$ esnek açık ise (G,B) ye esnek kapalı küme denir.

Tanım 3.2.54. (Çağman vd. , 2011) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (F,B) nin esnek içi, (F,B) nin tüm esnek açık alt kümelerinin birleşmi olur. $(F,B)^o$ yada $int(F,B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.55. (Çağman vd. , 2011) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $(F,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. (F,B) nin esnek kapanışı (F,B) yi içeren esnek kapalı kümelerin esnek kesişimleridir, $\overline{(F,B)}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.56. (Çağman vd. , 2011) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. Aşağıdaki koşullar elde edilir.

i. Esnek kapalı kümelerin keyfi esnek kesişimleri yine esnek kapalı olur.

ii. Esnek kapalı kümelerin sonlu birleşimleri esnek kapalı olur.

Tanım 3.2.57. (Roy ve Samanta, 2011) (F,A) nın bazı esnek alt kümelerinin koleksiyonu $\widetilde{\beta}$ aşağıdaki koşulları sağlarsa, (F,A) daki esnek topolojinin esnek açık bazı denir.

i) $\Phi \in \widetilde{\beta}$

ii) $\widetilde{\bigcup}\widetilde{\beta} = (F,A)$ yani her $e \in A$ ve $x \in F(e)$, için $B \subseteq A$ iken $x \in G(e)$ olacak şekilde $(G,B) \in \widetilde{\beta}$ vardır.

iii) Eğer $(G,B),(H,C) \in \widetilde{\beta}$ ise her $e \in B \cap C$ ve $x \in G(e) \cap H(e)$ için $D \subseteq B \cap C$ iken $(I,D)\widetilde{\subseteq}(G,B)\widetilde{\cap}(H,C)$ ve $x \in I(e)$ olacak şekilde $(I,D)\widetilde{\subseteq}\widetilde{\beta}$ vardır.

Tanım 3.2.58. (Yaylalı vd. , 2017) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay ve $\widetilde{\mathcal{S}}$, (F,A) nın nulldan farklı esnek açık kümelerinin bir koleksiyonu olsun. $\widetilde{\mathcal{S}}$ nin elemanlarının sonlu kesişimleri $\widetilde{\tau}$ için bir esnek baz oluşturuyor ise $\widetilde{\mathcal{S}}$ ye altbaz denilir.

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\widetilde{\mathcal{S}}} = \{\widetilde{\bigcap}_{j \in J}(S_j,A_j) | J\, sonlu\, ve\, her\; j \in J, (S_j,A_j) \in \widetilde{\mathcal{S}}\}.$$

Tanım 3.2.59. (Yaylalı ve Tanay, 2017) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzayında, her $\alpha,\beta\widetilde{\in}(F,A)$ için $\alpha\widetilde{\in}(G,B)$ ve $\beta\widetilde{\notin}(G,B)$ yada $\beta\widetilde{\in}(G,B)$ ve $\alpha\widetilde{\notin}(G,B)$ olacak şekilde (G,B) esnek açığı varsa, $(F,A,\widetilde{\tau})$ ya T_0 esnek topolojik uzay denir.

Örnek 3.2.60. Başlangıç evreni $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ve parametre kümesi $A = \{p_1, p_2\}$ olsun. Ensek küme $(F,A) = \{(p_1, \{u_2\}), (p_2, \{u_1\})\}$ ve (F,A) üzerinde esnek topoloji $\widetilde{\tau} = \{\Phi, (F,A), \{(p_2, \{u_1\})\}\}$ şeklinde tanımlansın. Burada iki tane $\alpha_1 = (p_1, \{u_2\})$ ve $\alpha_2 = (p_2, \{u_1\})$ esnek eleman vardır. $\alpha_2 \in \{(p_2, \{u_1\})\}$ fakat $\alpha_1 \notin \{(p_2, \{u_1\})\}$ olduğundan $(F,A,\widetilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzayıdır.

Teorem 3.2.61. $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzay olsun. $(F,A,\widetilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzay ise her $a \in A$ için $F(a) \subseteq U$ sadece tek elemana sahiptir.

Kanıt. $(F,A,\widetilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzay olsun. F(a) nın birden fazla elemanı olduğunu varsayalım, bunlarada u_1, u_2 diyelim. Eğer $\alpha_1 = (a, \{u_1\})$ ve $\alpha_2 = (a, \{u_2\})$ olarak alınırsa $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olur. $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek T_0 topolojik uzay olduğundan $\alpha_1 \widetilde{\in} (G,B)$ ve $\alpha_2 \widetilde{\notin} (G,B)$ olacak şekilde $(G,B) \in \widetilde{\tau}$ vardır. $\alpha_1 \widetilde{\in} (G,B)$ olduğundan $a \in B$ olur. $(G,B) \widetilde{\subseteq} (F,A)$ olduğundan $G(a) = F(a)$ elde edilir. Burada $\alpha_2 \widetilde{\in} F(a) = G(a)$ buda (G,B) de olduğundan çelişki elde edilir. □

Sonuç 3.2.62. $(F,A,\widetilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(F,A,\widetilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzay ise her $F(a) \neq F(b)$ için $F(a) \in (G,B)$ ve $F(b) \notin (G,B)$ yada $F(b) \in (G,B)$ ve $F(a) \notin (G,B)$ olacak şekilde $(G,B) \in \widetilde{\tau}$ vardır.

Kanıt. Tanım 3.2.59 ve Teorem 3.2.61 in direkt sonucu olarak elde edilir. □

Tanım 3.2.63. (Zorlutuna vd. , 2012) Eğer $(F,A) \widetilde{\subseteq} \widetilde{\bigcup}_{(F_i,A) \in \Psi} (F_i, A)$ ise Ψ esnek kümeler ailesine (F,A) esnek kümesinin bir örtüsü denir.
Ψ nin elemanları esnek açık kümeler ise buna esnek açık örtü denir.
Ψ nin (F,A) esnek kümesini örten bir alt ailesine alt örtü denir.

Tanım 3.2.64. (Zorlutuna vd. , 2012) Her esnek açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü olan $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına kompakt denir.

Tanım 3.2.65. $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının boştan farklı esnek alt kümesi (G,B) ye, (H,C) ve (I,D) kapalı esnek kümeleri için $(G,B) \widetilde{\subseteq} (H,C) \widetilde{\cup} (I,D)$ olması $(G,B) \widetilde{\subseteq} (H,C)$ yada $(G,B) \widetilde{\subseteq} (I,D)$ olmasını gerektiriyor ise esnek indirgenemez (irreducible) denir.

Teorem 3.2.66. $(F,A,\widetilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzayında $F(a) \leq F(b)$ olması için gerek ve yeter şartın $F(a) \in \overline{\{F(b)\}}$ olması şeklinde tanımlanan esnek bağıntı kısmi sıralı esnek bağıntıdır.

Kanıt. **i)** $F(a) \in \overline{\{F(a)\}}$ olması $F(a) \leq F(a)$ olmasını gerektirir.

ii) $F(a) \le F(b)$ ve $F(b) \le F(a)$ olsun. $F(a) \ne F(b)$ olduğunu varsayalım. $(F,A,\tilde{\tau})$, T_0 esnek topolojik uzay olduğundan $F(a) \in (G,B)$ ve $F(b) \notin (G,B)$ yada $F(b) \in (H,C)$ ve $F(a) \notin (H,C)$ olacak şekilde (G,B), (H,C) esnek açık kümeleri vardır. Fakat $F(a) \le F(b)$ olduğundan $F(a) \in \overline{\{F(b)\}}$ olur. Buradan, $F(a)$ yı içeren her esnek açık küme (G,B), $F(b)$ yi de içerir. Benzer şekilde $F(b) \le F(a)$ içinde uygulanır. Buradan da çelişki elde edilir. Böylece $F(a) = F(b)$ olur.

iii) $F(a) \le F(b)$ ve $F(b) \le F(c)$ olsun. Buradan $F(a) \in \overline{\{F(b)\}}$ ve $F(b) \in \overline{\{F(c)\}}$ olur. $F(a)$ yı içeren her (G,B) esnek açık kümesinin $F(b)$ yide içermesini bu ise $(G,B)\tilde{\cap}\overline{\{F(c)\}} \ne \Phi$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak, $F(a) \in \overline{\{F(c)\}}$ buradan da $F(a) \le F(c)$ elde edilir.

□

Tanım 3.2.67. T_0 esnek topolojik uzay (F,A) üzerinde $F(a) \le F(b)$ olması için gerek ve yeter şartın $F(a) \in \overline{\{F(b)\}}$ olması şeklinde tanımlanan $\le$ kısmi sıralı esnek bağıntısına özelleştirilmiş (specialization) esnek sıralama bağıntısı denir. Özelleştirilmiş (specialization) esnek sıra ile T_0 esnek topolojik uzay (F,A) dan elde edilen kısmi sıralı esnek küme $\Omega(F,A) = (F,A,\le)$ ile gösterilir.

Alternatif olarak; $F(a) \le F(b)$ olması için gerek ve yeter koşul $F(a)$ yı içeren her esnek açık kümenin $F(b)$ yi de içermesidir.

Tanım 3.2.68. Bir esnek küme, açık esnek kümelerin esnek kesişimleri oluyorsa bu esnek kümeye doymuş (saturated) denir. (F,A) esnek kümesinin saturasyonu $sat(F,A)$, (F,A) yı içeren en küçük doymuş (saturated) esnek kümedir.

Teorem 3.2.69. Eğer bir esnek küme özelleştirilmiş esnek sıralama bağıntısına göre yukarı esnek küme ise saturated esnek küme olur.

Kanıt. Yukarı esnek kümeler her zaman, esnek tümleyenleri kapalı esnek kümelerin esnek birleşimi olduğundan açık esnek kümelerin kesişimi olurlar. Gerçekten de, $(G,B) = \uparrow (G,B)$ olsun. Buradan $(G,B)^c = (\uparrow (G,B))^c = \{F(a) \mid \exists b \in B, G(b) \le F(a)\}^c$ $= \{F(a) \mid \forall b \in B, F(a) \le G(b)\} = \tilde{\bigcap}_{b\in B} \downarrow \{G(b)\} = \tilde{\bigcap}_{b\in B} \overline{\{G(b)\}}$ olur. □

Tanım 3.2.70. Bir $(F,A,\tilde{\tau})$ esnek topolojik uzaya, her (H,C) indirgenemez (irreducible) kapalı esnek kümesi için $\overline{\{F(a)\}} = (H,C)$ olacak şekilde (F,A) da tek bir $F(a)$ varsa, esnek sade (sober) denir.

3.2.1. Esnek Scott topoloji

Tanım 3.2.71. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) yönlendirilmiş tam esnek küme ve $(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. Bu takdirde,

i) $(G,B) = \uparrow (G,B)$;

ii) $\sup(D,C) \in (G,B)$ koşulunu sağlayan her yönlendirilmiş (D,C) esnek kümesi için $(D,C)\widetilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ olur.

koşulları sağlanırsa (G,B)'ye (F,A)'nın bir *esnek Scott açık kümesidir* denir.

Teorem 3.2.72. (Tanay ve Yaylalı, 2014) (F,A) nın tüm esnek Scott açık kümelerinin kolleksiyonu esnek topoloji olur.

Kanıt. $\widetilde{\tau}$, (F,A) nın tüm esnek Scott açık kümelerinin kolleksiyonu olsun.

i) Tanım 3.2.71 daki iki koşulu da sağladıklarından $\Phi, (F,A) \in \widetilde{\tau}$ olur.

ii) $(G_1,B_1),(G_2,B_2) \in \widetilde{\tau}$ olsun. $(G,B) = (G_1,B_1)\widetilde{\cap}(G_2,B_2)$ olsun. $\uparrow (G_1,B_1) = (G_1,B_1)$ ve $\uparrow (G_2,B_2) = (G_2,B_2)$ olduğundan $\uparrow (G,B) = (G,B)$ olur. Yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $\sup(D,C) \in (G,B)$ olduğunu kabul edelim, buradan $\sup(D,C) \in (G_1,B_1)$ ve $\sup(D,C) \in (G_2,B_2)$ olur, buradan da $D(c_1),D(c_2)$, (D,C) nin elemanlarıyken (G_1,B_1) de $D(c_1)$ ve (G_2,B_2) de $D(c_2)$ vardır. (D,C) yönlendirilmiş esnek küme olduğundan $\sup\{D(c_1),D(c_2)\} = D(c)$, (D,C) dedir. Tanım 3.2.71 daki koşul (ii) den $D(c)$, (G_1,B_1) ve (G_2,B_2) dedir. Böylece $(D,C)\widetilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ olur.

iii) λ indis kümesi ve $i \in \lambda$ için $(F_i,A_i) \in \widetilde{\tau}$ olsun. Her $e \in A_j \setminus \bigcup_{i\neq j} A_i$ için $F_j(e) = F(e)$, her $e \in \bigcap_{i\in\lambda} A_i$ için $F_i(e) = F(e)$ ve her $i \in \lambda$ için $(F_i,A_i) \in \widetilde{\tau}$ olduğundan, $\widetilde{\bigcup}_{i\in\lambda}(F_i,A_i) = \uparrow \left(\widetilde{\bigcup}_{i\in\lambda}(F_i,A_i)\right)$ olur. Yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $\sup(D,C) \in \widetilde{\bigcup}_{i\in\lambda}(F_i,A_i)$ olduğunu varsayalım. Buradan bazı $i \in \lambda$ için $\sup(D,C) \in (F_i,A_i)$ olur. Her $i \in \lambda$ için (F_i,A_i), Tanım 3.2.71 daki koşul (ii) yi sağladığından, $(D,C)\widetilde{\cap}(F_i,A_i) \neq \Phi$ olur, buradan da $(D,C)\widetilde{\cap}\left(\widetilde{\bigcup}_{i\in\lambda}(F_i,A_i)\right) \neq \Phi$ olur. Sonuç olarak $\widetilde{\bigcup}_{i\in\lambda}(F_i,A_i) \in \widetilde{\tau}$ elde edilir.

Böylece $\widetilde{\tau}$ esnek topoloji olur.

□

Tanım 3.2.73. (Tanay ve Yaylalı, 2014) Esnek Scott açıkların tümünün oluşturduğu aileye *Esnek Scott topoloji* denir.

Esnek Scott topolojiyi $\sigma(F,A)$ ile gösterelim.

Tanım 3.2.74. (Tanay ve Yaylalı, 2014) $(F,A,\widetilde{\tau})$ esnek Scott topoloji ve $(G,B)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ olsun. Eğer $(G,B)^c$ ni Scott açık esnek küme ise (G,B) ye Scott kapalı esnek küme denir.

Not 3.2.75. (Tanay ve Yaylalı, 2014) Aşağıdaki koşulu sağlayan yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme (F,A) nın esnek alt kümesi (G,B) ye **S** özelliğini sağlar denir:

(S) Eğer her yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $\sup(D,C) \in (G,B)$ ise $D(c) \leq D(e)$ olan her $D(e) \in (D,C)$ için $D(e) \in (G,B)$ olacak şekilde $D(c) \in (D,C)$ vardır.

(F,A) nın filtrelenmiş Scott açık esnek kümelerinin kümesi $OFilt((F,A))$ ile gösterilecektir. Bunlara kısaca açık esnek filtreler diyeceğiz.

Not 3.2.76. Yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme (F,A) da azalan $... \ll F(a_n) \ll ... \ll F(a_2) \ll F(a_1)$ dizi için $\widetilde{\cup}_{n=1}^{\infty} \uparrow F(a_n)(= (G,B))$ in esnek açık filtre olduğunu gösterelim.

Kanıt. (G,B), esas esnek filtrelerin esnek birleşimleri olduğundan, filtrelenmiş esnek kümesidir. (D,C) nin, $sup(D,C) \in (G,B)$ olacak şekilde (F,A) nın yönlendirilmiş esnek altkümesi olduğunu kabul edelim. Buradan $F(a_n) \leq sup(D,C)$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. $F(a_{n+1}) \ll F(a_n)$ olduğundan, $F(a_{n+1}) \leq D(c)$ olacak şekilde (D,C) de $D(c)$ bulunur. Buradan $D(c), \uparrow F(a_{n+1})\widetilde{\subseteq}(G,B)$ de olur. Sonuç olarak, (G,B) esnek açık küme olur. □

Örnek 3.2.77. (F,A), T_0 esnek uzay olsun. $(H,C)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ kompakt ise $F_{(H,C)} = \{(G,B) \in \mathcal{O}(F,A) | (H,C)\widetilde{\subseteq}(G,B)\}$ bir açık esnek filtredir.

Teorem 3.2.78. (F,A) esnek domaininde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $F(a) \ll F(b)$ ise $F(b) \in (G,B)\widetilde{\subseteq} \Uparrow F(a)$ olacak şekilde (G,B) esnek açık filtresi vardır.

ii) $F(b) \nleq F(c)$ ise $F(b)$ yi içeren fakat $F(c)$ yi içermeyen (G,B) esnek açık filtresi vardır.

Kanıt. **i)** Ara değer özelliği ve tümevarım ile azalan $F(a_n)$ dizisinin elemanları

$$F(a) \ll ... \ll F(a_n) \ll F(a_{n-1}) \ll ... \ll F(a_1) \ll F(b)$$

yi oluşturalım. $(G,B) = \widetilde{\bigcup}_{n=1}^{\infty} \uparrow F(a_n)$ olsun. Buradan $F(b)$, (G,B) de ve $(G,B) \widetilde{\subseteq} \Uparrow F(a)$ olur. Not 3.2.76 dan (G,B) esnek açık filtredir.

ii) $F(b) \nleq F(c)$ olsun. Buradan $F(a) \ll F(b)$, fakat $F(a) \nleq F(c)$ olacak şekilde $F(a)$ vardır. Esnek açık filtreyi **(i)** deki gibi seçersek, istenen özelliği sağlar.

□

Teorem 3.2.79. (Yaylalı ve Tanay, 2017) Her yönlendirilmiş tam esnek küme (F,A)'da aşağıdakı sonuçları elde ederiz:

i) Bir esnek kümenin esnek Scott kapalı olması için gerek ve yeter koşul yönlendirilmiş supremumlar altında kapalı aşağı esnek küme olmasıdır.

ii) (F,A) daki her $F(a)$ için $\downarrow F(a) = \overline{\{F(a)\}}$ olur.

iii) Her yukarı esnek küme esnek Scott açıkların esnek kesişimidir.

iv) (Tanay ve Yaylalı, 2014) Bir esnek kümenin esnek Scott açık olması için gerek ve yeter koşul **S** koşulunu sağlayan yukarı esnek küme olmasıdır.

Kanıt. i) $(D,C) \widetilde{\subseteq} (F,A)$'nin aşağı esnek küme olması için gerek ve yeter şart $(F,A) - (D,C)$'nin yukarı esnek küme olmasıdır ve $(F,A) - (D,C)$ Tanım 3.2.71 (2) sağlaması için gerek ve yeter koşul (D,C)'nin yönlendirilmiş supremumlar altında kapalı olmasıdır.

ii) $\downarrow F(a)$, $F(a)$ yı içeren en küçük aşağı esnek kümedir ve yönlendirilmiş supremumlar altında kapalıdır.

iii) Her (G,B) yukarı esnek kümesi $F(a)$, $(F,A) - (G,B)$ de iken $(F,A) - \downarrow F(a)$ ların esnek kesişimleridir. Bunlarda **(ii)** ile esnek açıktır.

iv) $(\Rightarrow:)$ (G,B) esnek Scott açık olsun. $\uparrow (G,B) = (G,B)$ ve her yönlendirilmiş (D,C) için $sup(D,C) \in (G,B)$ ise $(D,C) \widetilde{\cap} (G,B) \neq \Phi$ olur. Buradan $D(c) = D(c) \cap G(c)$ olan $c \in C \cap B$ vardır, öyle ki, $\uparrow (G,B) = (G,B)$ olduğundan $D(c) \leq D(e)$ olan her $e \in C$ için $D(e)$, (G,B) de olur. Böylece (G,B), **S** koşulunu sağlar

$(\Leftarrow:)$ $\uparrow (G,B) = (G,B)$ ve **S** koşulunu sağlasın. Buradan Tanım 3.2.71 nin birinci koşulu sağlanmış olur. İkinci koşulu için $sup(D,C) \in (G,B)$ olacak şekilde yönlendirilmiş (D,C) esnek kümesini alalım. Buradan ise $D(c) \leq D(e)$ olan her $e \in C$ için $e \in B$ ve $D(e) = G(e)$ olacak şekilde $c \in C$ vardır. Yani $(D,C)\widetilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ olur. Sonuç olarak (G,B) esnek Scott açık kümedir.

□

Klasik Scott Topoloji T_0-uzay olmasına karşın esnek Scott Topoloji T_0-uzay değildir. Aşağıdaki örnekle bunu inceleyelim.

Örnek 3.2.80. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel küme ve $E = \{p_1, p_2, p_3\}$ parametre kümesi olsun. (F,A) esnek kümesi $A = \{p_2, p_3\}$ iken $F(p_2) = \{u_1\}$, $F(p_3) = \{u_1, u_3\}$ olacak şekilde ve esnek küme bağıntısı $\leq = \{F(p_3) \times F(p_3), F_2(p_3) \times F(p_2), F(p_2) \times F(p_2)\}$ olacak şeklinde tanımlansın. Buradan, esnek Scott Topoloji $\widetilde{\tau} = \{\Phi, (F,A), \{F(p_2)\}\}$ şeklinde elde edilir. Burada, $\alpha = (p_3, \{u_1\})$ ve $\beta = (p_3, \{u_3\})$ birbirinden farklı esnek elemanları için $\alpha \widetilde{\in} (G,B)$ ve $\beta \widetilde{\notin} (G,B)$ yada $\beta \widetilde{\in} (G,B)$ ve $\alpha \widetilde{\notin} (G,B)$ olacak şekilde bir (G,B) esnek açık kümesi bulunamadığından, $\widetilde{\tau}$, T_0 esnek topolojik uzay olmaz.

Teorem 3.2.81. (Yaylalı ve Tanay, 2017) (F,A) esnek domain ise (F,A) daki her $F(a)$ için $\Uparrow F(a)$ Scott açık esnek kümedir. Tersine, eğer (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme ve $F(b) \in int(\uparrow F(a))$ ise $F(a) \ll F(b)$ olur.

Kanıt. (D,C), $sup(D,C) \in \Uparrow F(a)$ olacak şekilde yönlendirilmiş esnek küme olsun. $F(a) \ll sup(D,C)$ olduğundan, Teorem 3.1.40 ile $F(a) \ll D(c)$ olacak şekilde $D(c) \in (D,C)$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak Tanım 3.2.71'dan $\Uparrow F(a)$ Scott açık esnek küme olur.
(F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme ve $F(b) \in int(\uparrow F(a))$ olduğunu kabul edelim. Eğer (D,C), $F(b) \leq sup(D,C)$ olacak şekilde bir esnek yönlendirilmiş küme ise $sup(D,C) \in int(\uparrow F(a))$ olur ve böylece (D,C) deki bazı $D(c)$ ler için $D(c) \in int(\uparrow F(a))$ olur. Sonuç olarak $F(a) \leq D(c)$ olacak şekilde $c \in C$ bulunabildiğinden $F(a) \ll F(b)$ elde edilir. □

Teorem 3.2.82. (Yaylalı ve Tanay, 2017) (F,A) esnek domain olsun.

i) (G,B) yukarı esnek kümesinin Scott açık esnek küme olması için gerek ve yeter şart her $G(b) \in (G,B)$ için $G(b') \ll G(b)$ olacak şekilde $G(b') \in (G,B)$ olmasıdır.

ii) $F(a) \in (F,A)$ için $\Uparrow F(a)$ formundaki esnek kümeler esnek Scott topoloji için bir esnek baz oluşturur.

iii) $\sigma(F,A)$ ya göre, $int \uparrow F(a) = \Uparrow F(a)$ olur.

Kanıt. i) (G,B) Scott açık esnek küme ve $G(b) \in (G,B)$ olsun. Esnek domainde $\downarrow\!\!\!\downarrow G(b)$ yönlendirilmiş esnek küme ve $G(b) = sup \downarrow\!\!\!\downarrow G(b)$ olduğundan Tanım 3.2.71'dan $G(b') \ll G(b)$ olacak şekilde $G(b') \in (G,B)$ vardır.
Tersi için, her $G(b) \in (G,B)$ için $G(b') \ll G(b)$ olacak şekilde $b' \in B$ vardır. Buradan da (G,B), $\uparrow\!\!\!\uparrow G(b')$lerin esnek birleşimi olur. Sonuç olarak Teorem 3.2.81'den (G,B) Scott açık esnek kümedir.

ii) **(i)** in direkt sonucudur.

iii) Eğer $G(b)$, $int \uparrow F(a)$ da ise **(i)**den $G(c) \ll G(b)$ olacak şekilde $\uparrow F(a)$ da $G(c)$ vardır. Buradan da $G(b)$, $\uparrow\!\!\!\uparrow F(a)$ da olur. Yani $int \uparrow F(a) \widetilde{\subseteq} \uparrow\!\!\!\uparrow F(a)$ elde edilir.

$G(b) \in \uparrow\!\!\!\uparrow F(a) = (G,B)$ olsun. Buradan $F(a) \ll G(b)$ olur. Daha sonra (F,A) esnek domain olduğundan $F(a) \ll G(c)$ olacak şekilde $c \in A$ vardır ve $F(a) \leq G(b)$ olduğundan da $G(b) \in int \uparrow F(a)$ olur. Sonuç olarak, $\uparrow\!\!\!\uparrow F(a) \widetilde{\subseteq} int \uparrow F(a)$ elde ederiz.

□

Teorem 3.2.83. Herhangi bir yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme (F,A) da, aşağıdaki sonuçları elde ederiz.
i) Her aşağı esnek küme **(S)** özelliğine sahiptir.
ii) **(S)** özelliğine sahip bütün esnek alt kümeler koleksiyonu bir esnek topolojidir.

Kanıt. **i)** (G,B), yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme (F,A) da aşağı esnek küme olsun. Buradan $(G,B) = \downarrow (G,B)$ olur. Yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $\sup(D,C) \in (G,B)$ olsun. Buradan $\downarrow \sup(D,C) \widetilde{\subseteq} (G,B)$ elde edilir. Böylece $(D,C) \widetilde{\subseteq} (G,B)$ olur. Bundan da $\sup(D,C) \in (G,B)$ şeklindeki her yönlendrilmiş esnek küme (D,C) için, $D(c) \leq D(e)$ olan her $D(e) \in (D,C)$ için $D(e) \in (G,B)$ olacak şekilde $D(c) \in (D,C)$ vardır. Sonuç olarak yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme (F,A) da her aşağı esnek küme **(S)** özelliğini sağlar.

ii) (F,A) yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme ve $\widetilde{\tau} = \{(G,B) \widetilde{\subseteq} (F,A) | (G,B)\,\textbf{(S)}\,\text{özelliğini sağlar}\}$ olsun.

Φ, (F,A) **(S)** özelliğini sağlar.

$(G,B),(H,C) \in \widetilde{\tau}$ ve (K,D), $\sup(K,D) \in (G,B) \widetilde{\cap} (H,C)$ olacak şekilde bir yönlendirilmiş esnek küme olsun, buradan $\sup(K,D) \in (G,B)$ ve $\sup(K,D) \in (H,C)$ olur. (G,B) ve (H,C) **(S)** özelliğini sağladıklarından, $K(a_1) \leq K(b_1)$ olan her $b_1 \in D$ ve $K(a_2) \leq K(b_2)$ olan her $b_2 \in D$ için $K(b_1) \in (G,B)$ ve $K(b_2) \in (H,C)$

olacak şekilde $K(a_1), K(a_2) \in (K,D)$ vardır. $K(a)$, $K(a_1)$ ve $K(a_2)$ nin üst sınırı olsun, buradan $K(a) \leq K(b)$ olan her $K(b) \in (K,D)$ için $K(b) \in (G,B)\widetilde{\cap}(H,C)$ yi sağlar. Böylece $(G,B)\widetilde{\cap}(H,C)$ **(S)** özelliğini sağlar.

Keyfi bir indeks kümesi I için $i \in I$, $(F_i,A_i) \in \widetilde{\tau}$ olsun ve bir yönlendirilmiş esnek küme (D,C) için $\sup(D,C) \in \widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$ olsun. Buradan $\sup(D,C) \in (F_{i_0},A_{i_0})$ olacak şekilde $i_0 \in I$ vardır. Buradan da $D(a) \leq D(b)$ olan her $b \in C$ için $D(b) \in (F_{i_0},A_{i_0})$ olacak şekilde $D(a) \in (D,C)$ vardır. Böylece $D(b) \in \widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$ olur. Sonuç olarak $\widetilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,A_i)$, **(S)** özelliğini sağlar.

Sonuç olarak $\widetilde{\tau}$ bir esnek topolojidir.

□

Teorem 3.2.84. Her yönlendirilmiş kısmi sıralı esnek küme (F,A) için, aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

1) (F,A) esnek domaindir.

2) Her $\Uparrow F(a)$ esnek açık kümedir ve eğer $(G,B) \in \sigma((F,A))$ ise $(G,B) = \bigcup\{\Uparrow F(a) : F(a) \in (G,B)\}$ olur.

3) $OFilt((F,A))$, $\sigma((F,A))$ nın bir esnek bazıdır ve $\sigma((F,A))$ sürekli esnek latistir.

Kanıt. $(1 \Rightarrow 2)$ Teorem 3.2.81 ve Teorem 3.2.82 den açıktır.

$(2 \Rightarrow 1)$ $F(a)$, (F,A) da olsun. Eğer $F(b) \ll F(a)$, $F(c) \ll F(a)$ ise hipotezden, $\Uparrow F(b)\widetilde{\cap} \Uparrow F(c)$ de $F(a)$ nın $\Uparrow F(d)$ de olduğu $F(d)$ vardır. Böylece, $\Downarrow F(a)$ yönlendirilmiş esnek küme olur. $F(a') = sup \Downarrow F(a) \leq F(a)$ olsun. Eğer $F(a') \neq F(a)$ ise $(F,A) - \downarrow F(a')$, $F(a)$ nın Scott esnek açık komşuluğu olur; **(2)**' den bu $F(a)$ nın $F(e) \in (F,A) - \downarrow F(a')$ olan $\Uparrow F(e)$ esnek açık komşuluğunu içerir. Fakat buradan $F(e) \ll F(a)$ olur, böylece $F(e) \leq sup \Downarrow F(a) = F(a')$ elde edilir, böylelikle çekişki elde ederiz.

$(2 \Rightarrow 3)$ **(2)**' den, $F(a)$, $F(d) \ll F(a)$ olan $\Uparrow F(d)$ formunda keyfi komşuluğa sahiptir. Teorem 3.2.82 ve Teorem 3.2.78' den, $F(a)$, esnek filtre olan Scott esnek açık komşuluklara sahiptir. $\sigma((F,A))$ nın sürekliliğini göstermektense, (G,B) Scott açık esnek küme olsun. (G,B) deki her $F(a)$ için **(2)**' den $F(d) \ll F(a)$ olan (G,B) de $F(d)$ buluruz. Buradan, $F(a) \in \Uparrow F(d) \in \sigma((F,A))$ olur. $\Uparrow F(d) \ll (G,B)$ olduğunu iddia edelim. Gerçekten de, eğer $\mathcal{D}$, (G,B) yi örten Scott açık esnek kümelerin yönlendirilmiş ailesi olursa elemanlarından biri $F(d)$ yi içerir ve bunun sonucu olarak $\uparrow F(d)$ yi içerir. Scott açık esnek kümeler yukarı esnek küme olduklarından, $\Uparrow F(d)$ yi içerir. Böylece, $(G,B) = \widetilde{\bigcup}\{(H,C) : (H,C) \ll (G,B)\}$ olduğunu gösterdik.

$(3 \Rightarrow 1)$ $F(a) \in (G,B) \in \sigma((F,A))$ olsun. $\sigma((F,A))$ esnek sürekli olduğundan, $F(a) \in (H,C) \ll (G,B)$ olacak şekilde $(H,C) \in \sigma((F,A))$ vardır. $F(a) \in (D,E) \widetilde{\subseteq} (H,C)$ olacak şekilde açık filtrelenmiş esnek küme (D,E) alalım. (G,B) deki her $F(b)$ için $(D,E) \widetilde{\subseteq} \uparrow F(b)$ olmadığını varsayalım. Esnek açık filtreler esnek baz oluşturacağından, (D,E)' deki bazı $F(c)$ için $F(b) \in (F,A) - \downarrow F(c)$ olur ve bunun sonucu olarak $F(b) \in (D_{F(b)}, E_{F(b)}) \widetilde{\subseteq} (F,A) - \downarrow F(c)$ olacak şekilde $(D_{F(b)}, E_{F(b)})$ filtrelenmiş açık esnek küme vardır. $(D_{F(b)}, E_{F(b)})$ nin sonlu çokluğu, $(D_{F(b_1)}, E_{F(b_1)})$, ..., $(D_{F(b_n)}, E_{F(b_n)})$ diyelim, (H,C) yi örtmek zorundadır. Her i için $F(c_i) \in (D,E) - (D_{F(b_i)}, E_{F(b_i)})$ alalım ve her i için $F(c) \leq F(c_i)$ olacak şekilde (D,E) de $F(c)$ alalım. Buradan, $F(c) \in (D_{F(b_i)}, E_{F(b_i)})$ olması $F(c_i) \in (D_{F(b_i)}, E_{F(b_i)})$ olmasını gerektirir. Böylece $(D_{F(b_i)}, E_{F(b_i)})$ lerin hiç biri $F(c)$ yi içermez, buda çelişki getirir. Böylece, $F(a) \in (D,E) \widetilde{\subseteq} \uparrow F(b)$ olacak şekilde $F(b) \in (G,B)$ vardır.

$F(a) \in (F,A)$ için, $(K,I) = \{F(b) \in (F,A) : F(a) \in int(\uparrow F(b))\}$ yi göz önünde bulunduralım. Buradan, Teorem 3.2.81' den her $F(b) \in (K,I)$ için $F(b) \ll F(a)$ olur. Ayrıca, bir önceki paragraftan, $F(a)$ yı içeren her Scott esnek açık kümesi (K,I) nın elemanını içerir, buda (K,I) nın yönlendirilmiş esnek küme olması elde edilir. Son olarak **(2)** $\Rightarrow$ **(1)** de verilen argümana benzer olarak, $sup(K,I) = F(a)$ olur. Böylece, (F,A) esnek domain olur.

□

Aşağıdaki teoremde yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı ile Esnek Scott topoloji arasındaki ilişki incelenirken elde edilen sonuçlar yazılmıştır.

Teorem 3.2.85. Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme $(F,A,\leq)$' da, $int_{\sigma((F,A))}(G,B)$, (G,B) esnek kümesinin $\sigma((F,A))$ içi olarak gösterilsin. $\prec$ esnek küme bağıntısı $F(a) \prec F(b) :\Leftrightarrow F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olarak tanımlansın. Buna göre aşağıdakiler sağlanır.

a) $\prec$ bir yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntıdır.

b) $F(a) \prec F(b)$ olması $F(a) \ll F(b)$ olmasını gerektirir.

c) $F(a) \prec F(b)$ ve $F(a) \ll F(b)$ nin her $a,b \in A$ için birbirine denk olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için $\Uparrow F(a)$ nın Scott açık esnek küme olmasıdır.

d) $\prec$ esnek küme bağıntısının yaklaşımsal (approximating) olması için gerek ve yeter koşul $\ll$ esnek küme bağıntısının yaklaşımsal (approximating) olmasıdır, yani (F,A) nın esnek domain olmasıdır.

Kanıt. **a)** **i)** $F(a) \prec F(b)$ olsun. Buradan $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a) \tilde{\subseteq} \uparrow F(a)$ olur. Buda $F(a) \leq F(b)$ olmasını gerektirir.

ii) $F(c) \leq F(a) \prec F(b) \leq F(d)$ olsun. Buradan $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olur. $\uparrow (int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)) = int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ ve $F(b) \leq F(d)$ olduğundan, $F(d) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ elde edilir.

$F(c) \leq F(a)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\uparrow F(a) \tilde{\subseteq} \uparrow F(c)$ olur. Buradan da $int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a) \tilde{\subseteq} int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(c)$ elde edilir ve $F(d) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olduğundan, $F(d) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(c)$ olur. Sonuç olarak $F(c) \prec F(d)$ olur.

iii) $F(0)$, $(F,A,\leq)$ nın en küçük elemanı olsun. Buradan $int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(0) = int_{\sigma((F,A))}(F,A) = (F,A)$ olur. Buda her $a \in A$, için $F(a) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(0)$ olmasını gerektirir. Böylece her $a \in A$ için $F(0) \prec F(a)$ elde edilir.

Bunlardan dolayı $\prec$ bir yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı olur.

b) $F(a) \prec F(b)$ olsun. Buradan $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olur. Buradan Teorem 3.2.81 den $F(a) \ll F(b)$ elde edilir.

c) $(\Rightarrow:)$ Her $a,b \in A$ için $F(a) \prec F(b)$ ve $F(a) \ll F(b)$ denk olduklarını kabul edelim. $a \in A$ için $D(c) = sup(D,C) \in \twoheaduparrow F(a)$ olan (D,C) yönlendirilmiş esnek kümesini alalım. $F(a) \ll D(c)$ ise $F(a) \prec D(c)$ olur, buradan $D(c) \in int \uparrow F(a)$ olur. Daha sonra $D(d) \leq D(e)$ olan her $e \in D$ için $D(e) \in int \uparrow F(a)$ olacak şekilde $d \in D$ vardır. Buradan da $F(a) \prec D(e)$ elde edilir. Buda $F(a) \ll D(e)$ olmasını gerektirir. Buradan $D(e) \in \twoheaduparrow F(a)$ olur. Böylece $(D,C) \tilde{\cap} \twoheaduparrow F(a) \neq \Phi$ olur. Sonuç olarak her $a \in A$ için $\twoheaduparrow F(a)$ bir Scott açık esnek küme olur.

$(\Leftarrow:)$ $\twoheaduparrow F(a)$ bir Scott açık esnek küme olsun.

$F(a) \prec F(b)$ olsun. Buradan $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olur ve buda $F(a) \ll F(b)$ olmasını gerektirir ((**b**)).

$F(a) \ll F(b)$ olsun. Buradan $F(b) \in \twoheaduparrow F(a)$ olur. $\twoheaduparrow F(a)$ bir Scott açık esnek küme olduğundan, $int_{\sigma((F,A))} \twoheaduparrow F(a) = \twoheaduparrow F(a)$ olur. Böylece $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \twoheaduparrow F(a)$ elde edilir. $int_{\sigma((F,A))} \twoheaduparrow F(a) \tilde{\subseteq} int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $F(b) \in int_{\sigma((F,A))} \uparrow F(a)$ elde edilir. Sonuç olarak $F(a) \prec F(b)$ olur.

d) (b) ve (c) den elde edilir.

$\square$

3.2.2. Scott sürekli esnek fonksiyonlar

Tanım 3.2.86. (Wardorwski, 2013) $(F,A,\widetilde{\tau})$, $(G,B,\widetilde{\nu})$ esnek topolojik uzaylar ve $T:(F,A)\widetilde{\to}(G,B)$ esnek fonksiyon olsun. Her $(H,C)\,\widetilde{\in}\,\widetilde{\nu}$ için $T^{-1}((H,C))\,\widetilde{\in}\,\widetilde{\tau}$ ise T ye sürekli esnek fonksiyon denir.

Teorem 3.2.87. (Yaylalı ve Tanay, 2017) (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümesinden (G,B) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümesine T sürekli esnek fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(1) T esnek Scott topolojiye göre esnek sürekli bir fonsiyondur, yani

$$Her(D,C)\,\widetilde{\in}\,\sigma(G,B)\,\text{için}\,T^{-1}((D,C))\,\widetilde{\in}\,\sigma(F,A).$$

(2) T yönlendirilmiş esnek kümelerin supremumlarını korur, yani T sıra korur ve (F,A)'nın her yönlendirilmiş esnek altkümesi (D,C) için $T(sup(D,C)) = supT((D,C))$ sağlanır.

(F,A) ve (G,B) esnek domain ise **(1), (2)** aşağıdakilere denktir:

(3) Her $F(a)\,\widetilde{\in}\,(F,A)$ ve $G(b)\,\widetilde{\in}\,(G,B)$ için $G(b) \ll T(F(a))$ olması için gerek ve yeter şart $F(a') \ll F(a)$ olan bazı $a' \in A$ için $G(b) \ll T(F(a'))$ olmasıdır.

(4) Her $F(a)\,\widetilde{\in}\,(F,A)$ için $T(F(a)) = sup\{T(F(a')) : F(a') \ll F(a)\}$.

Kanıt.

1 ⇒ 2: T nin sıra korur olduğunu göstermeliyiz.

$T(F(a)) \nleq T(F(a'))$ olduğunu varsayalım, o halde $(H,C) = (F,A) - \downarrow T(F(a'))$ Scott açık esnek kümesi $T(F(a))$ yı içerir. Böylece $(D,C) = T^{-1}((H,C))$, $F(a)$yı içeren $F(a')$ nü içermeyen Scott açık esnek küme olur. Fakat buradan (D,C) yukarı esnek küme olduğundan $F(a) \nleq F(a')$ olur. Bu nedenle, $F(a) \leq F(a')$ olması $T(F(a)) \leq T(F(a'))$ olmasını gerektirir.

Şimdi $T(\sup(D,C)) = \sup T((D,C))$ olduğunu göstermeliyiz.

(D,C), (F,A) nın yönlendirilmiş esnek alt kümesi olsun. Buradan T sıra korur olduğundan, $T((D,C))$ yönlendirilmiştir ve $\sup T((D,C)) \leq T(\sup(D,C))$ olur. $F(a) = \sup(D,C)$ ve $G(b) = \sup T((D,C))$ olsun. $T(F(a)) \leq G(b)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $T(F(a)) \nleq G(b)$ olduğunu varsayalım. $(G,B)- \downarrow G(b)$ Scott açık esnek kümesi $T(F(a))$ yı içerir; bu nedenle $T^{-1}((G,B)- \downarrow G(b))$, $F(a)$ yı içeren Scott açık esnek küme olur. Bundan dolayı $D(c)$, $T^{-1}((G,B)- \downarrow G(b))$ de olacak şekilde (D,C) de $D(c)$ vardır. Buradan $T(D(c))$, $(G,B)- \downarrow G(b)$ de olur, yani, $T(D(c)) \nleq G(b) = \sup T((D,C))$ elde edilir. Bu çelişki ile $T(F(a)) \leq G(b)$ olduğunu göstermiş oluruz.

$2 \Rightarrow 1$: (H,C), (G,B) nin Scott kapalı esnek alt kümesi olsun. $T^{-1}((H,C))$ nin (F,A) da Scott kapalı esnek küme olduğunu göstermektense, $T^{-1}((H,C))$ nin yönlendirilmiş esnek alt kümesi (D,C) yi alalım. **2** den, $T(\sup(D,C)) = \sup T((D,C))$ olduğunu biliyoruz. Fakat (H,C) Scott kapalı ve $T((D,C))$, T nin monotonluğundan yönlendirilmiş olduğundan, Teorem 3.2.79 den $\sup T((D,C))$, (H,C) dedir. O halde, $T(\sup(D,C))$, (H,C) dedir ve bundan dolayı $\sup(D,C)$, $T^{-1}((H,C))$ de olur. Buradan Teorem 3.2.79 den $T^{-1}((H,C))$ Scott kapalı esnek küme olur.

$2 \Rightarrow 4$: Tanım 3.1.38 dan $\twoheaddownarrow F(a)$ yönlendirilmiş ve $F(a) = \sup \twoheaddownarrow F(a)$ olduğundan.

$4 \Rightarrow 3$: **4** den Tnin monoton olduğu sonucunu çıkartabiliriz. Gerçektende, eğer $F(a') \leq F(a)$ ise $\twoheaddownarrow F(a') \subseteq \twoheaddownarrow F(a)$ olur ve sonuç olarak $T(F(a')) = \sup T(\twoheaddownarrow F(a')) \leq \sup T(\twoheaddownarrow F(a)) = T(F(a))$ elde edilir. Şimdi $G(b) \ll T(F(a')) = \sup T(\twoheaddownarrow F(a'))$ olduğunu kabul edelim. T monoton olduğundan $T(\twoheaddownarrow F(a'))$ yönlendilmiştir. Böylece, Teorem 3.1.40 den $G(b) \ll T(F(a''))$ olan $F(a'') \ll F(a')$ vardır. Tersine, eğer bazı $F(a'') \ll F(a')$ için $G(b) \ll T(F(a''))$ ise T nin monotonluğundan ve $\ll$ için Teorem 3.1.36 den $G(b) \ll T(F(a'))$ olur.

$3 \Rightarrow 1$: $(D,C) \in \sigma((G,B))$ ve $F(a) \in T^{-1}((D,C))$ olsun. Teorem 3.2.82 den $G(b) \ll T(F(a))$ olan (D,C) de $G(b)$ vardır. **3** den $G(b) \ll T(F(a'))$ olacak şekilde $F(a') \ll F(a)$ buluruz. $T(\twoheaduparrow F(a')) \subseteq (D,C)$ olduğunu gösterirsek ispatı bitiririz. Şimdi $F(a') \ll F(a'')$ olan $F(a'')$ yı alalım. Her $G(b') \ll T(F(a'))$ için **3** den $G(b') \ll T(F(a''))$ olur ve sonuç olarak $T(F(a')) = \sup \twoheaddownarrow T(F(a')) \leq T(F(a''))$ elde edilir. Teorem 3.1.36 den $G(b) \leq T(F(a'))$ olur ve $G(b)$, (D,C) dedir. Bundan dolayı, Tanım 3.2.71 dan $T(F(a'')) \in (D,C)$ olur.

□

Tanım 3.2.88. (Yaylalı ve Tanay, 2017) (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümesinden (G,B) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek kümesine T esnek fonksiyonunun, Scott sürekli esnek fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul Teorem 3.2.87 deki **(1), (2), (3)** koşullarının sağlanmasıdır.

Örnek 3.2.89. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel küme ve $E = \{p_1, p_2, p_3\}$ parametre kümesi olsun. $A_1 = \{p_1\}$ iken $F_1(p_1) = \{u_1, u_2\}$ olacak şekilde (F_1, A_1) esnek kümesi ve $A_2 = \{p_2, p_3\}$ iken $F_2(p_2) = \{u_1\}$, $F_2(p_3) = \{u_1, u_3\}$ olacak şekilde (F_2, A_2) esnek kümesi tanımlansın. (F_1, A_1) ve (F_2, A_2) üzerinde sırasıyla $\leq_1 = \{F_1(p_1) \times F_1(p_1)\}$ ve $\leq_2 = \{F_2(p_3) \times F_2(p_3), F_2(p_3) \times F_2(p_2), F_2(p_2) \times F_2(p_2)\}$ esnek bağıntıları ile $\widetilde{\tau}_1 = \{\Phi, (F_1, A_1)\}$, $\widetilde{\tau}_2 = \{\Phi, (F_2, A_2), \{F(p_2)\}\}$ esnek topolojik uzayları verilsin. T esnek fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$T(p_1, \varnothing) = (p_1, \varnothing); T(p_1, \{u_1\}) = (p_2, \{u_1\}); T(p_1, \{u_2\}) = (p_3, \{u_3\}).$$

$T^{-1}(F_2, A_2) = (F_1, A_1) \in \widetilde{\tau}_1$ olmasına rağmen $T^{-1}(\{F_2(p_2)\}) = \{p_1, \{u_1\}\}$, $\widetilde{\tau}_1$ de olmadığından T esnek fonkiyonu sürekli değildir.

Örnek 3.2.90. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel küme ve $A = \{a_1, a_2\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ parametre kümeleri olsun. $(F, A) = \{(a_1, \{u_2\}), (a_2, \{u_1, u_3\})\}$ ve $(G, B) = \{(b_1, \{u_1\}), (b_2, \{u_3\}), (b_3, \{u_2, u_3\})\}$ olacak şekilde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri tanımlansın. (F, A) ve (G, B) üzerinde sırasıyla $\leq_1 = \{F(a_1) \times F(a_1), F(a_1) \times F(a_2), F(a_2) \times F(a_2)\}$ ve $\leq_2 = \{G(b_1) \times G(b_1), G(b_2) \times G(b_2), G(b_3) \times G(b_3), G(b_3) \times G(b_1), G(b_1) \times G(b_2), G(b_3) \times G(b_2)\}$ esnek bağıntıları ile $\tau_1 = \{(F, A), \{F(a_2)\}, \Phi\}$ ve $\tau_2 = \{(G, B), \Phi, \{G(b_2)\}, \{G(b_2), G(b_1)\}\}$ esnek Scott topolojik uzayları verilsin. $T : (F, A) \widetilde{\rightarrow} (G, B)$ esnek fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$T(a_1, \{u_2\}) = (b_3, \{u_2\}); T(a_2, \{u_1\}) = (b_2, \{u_3\}); T(a_2, \{u_3\}) = (b_2, \{u_3\}).$$

T esnek fonksiyonunun Teorem 3.2.87 1. kısmını sağladığı

$$T^{-1}(\Phi) = \Phi; T^{-1}(G, B) = (F, A); T^{-1}(\{G(b_2)\}) = \{F(a_2)\}; T^{-1}(\{G(b_2), G(b_1)\}) = \{F(a_2)\}$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece T esnek fonksiyonu sürekli olur.
Aynı zamanda Teorem 3.2.87 in 2. kısmı, bütün yönlendirilmiş esnek kümeler (F, A); $\{F(a_2)\}$, $\{F(a_1)\}$ bulunarak ve T altında supremumlarının görüntüleri aşağıdaki gibi bulunarak

$$T(sup(F, A)) = T(\{F(a_2)\}) = G(b_2) = supT(F, A),$$

$$T(sup\{F(a_2)\}) = T(F(a_2)) = G(b_2) = supT(\{F(a_2)\}),$$

$$T(sup\{F(a_1)\}) = T(F(a_1)) = (b_3, \{u_2\}) = supT(\{F(a_1)\}).$$

T esnek fonksiyonunun Scott sürekliliği gösterilebilir.

Örnek 3.2.91. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ve $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ evrensel kümeler ile $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ve $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ parametre kümeleri olsun. $(F,A) = \{(a_1, \{u_2, u_3\}), (a_2, \{u_1, u_4\}), (a_3, \{u_1, u_3, u_4\})\}$ ve $(G,B) = \{(b_1, \{v_3\}), (b_2, \{v_1, v_3\}), (b_3, \{v_2\}), (b_4, \{v_1, v_2\})\}$ olacak şekilde (F,A) ve (G,B) esnek kümeleri tanımlansın. (F,A) ve (G,B) üzerinde sırasıyla $\leq_{(F,A)} = \{F(a_1) \times F(a_1), F(a_2) \times F(a_2), F(a_3) \times F(a_3), F(a_3) \times F(a_2), F(a_1) \times F(a_2)\}$ ve $\leq_{(G,B)} = \{G(b_1) \times G(b_1), G(b_2) \times G(b_2),\ G(b_3) \times G(b_3), G(b_4) \times G(b_4), G(b_1) \times G(b_2), G(b_2) \times G(b_4), G(b_1) \times G(b_4), G(b_3) \times G(b_1), G(b_3) \times G(b_2), G(b_3) \times G(b_4)\}$ esnek bağıntıları ile
$\tau_1 = \{(F,A), \{F(a_2), F(a_3)\}, \{F(a_1), F(a_2)\}, \{F(a_2)\}, \Phi\}$ ve
$\tau_2 = \{(G,B), \Phi, \{G(b_4)\}, \{G(b_1), G(b_2), G(b_4)\}, \{G(b_2), G(b_4)\}\}$ esnek Scott topolojik uzayları verilsin. $T : (F,A) \tilde{\to} (G,B)$ esnek fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$T(a_1, \{u_2\}) = (b_1, \{v_3\}), T(a_1, \{u_3\}) = (b_1, \{v_3\}), T(a_2, \{u_1\}) = (b_4, \{v_2\}),$$

$$T(a_2, \{u_4\}) = (b_4, \{v_2\}), T(a_3, \{u_1\}) = (b_2, \{v_1\}), T(a_3, \{u_3\}) = (b_2, \{v_3\}),$$

$$T(a_3, \{u_4\}) = (b_2, \{v_3\}).$$

T esnek fonksiyonunun Teorem 3.2.87 in birinci kısmını sağladığı

$$T^{-1}(\Phi) = \Phi, T^{-1}(G,B) = (F,A), T^{-1}(\{G(b_1), G(b_2), G(b_4)\}) = (F,A),$$

$$T^{-1}(\{G(b_2), G(b_4)\}) = \{F(a_2), F(a_3)\}\, T^{-1}(\{G(b_4)\}) = \{F(a_2)\}$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece T esnek fonksiyonu Scott sürekli olur.
Aynı zamanda Teorem 3.2.87 in 2. kısmı, (F,A) daki tüm yönlendirilmiş esnek kümeler (F,A), $\{F(a_2), F(a_3)\}$, $\{F(a_1), F(a_2)\}$, $\{F(a_2)\}$, $\{F(a_3)\}$, $\{F(a_1)\}$ bulunarak ve T altında supremumlarının görüntüleri aşağıdaki gibi incelenerek T esnek fonksiyonunun Scott sürekliliği gösterilebilir:

$T(sup(F,A)) = T(\{F(a_2)\}) = (b_4, \{v_2\}) = sup\, T(F,A),$

$sup\, T(\{F(a_2), F(a_3)\}) = sup\{(b_2, \{v_1\}), (b_2, \{v_3\}), (b_4, \{v_2\})\}$ yi bulalım.

$sup\{(b_2, \{v_1\}), (b_2, \{v_3\}), (b_4, \{v_2\})\}$ yi bulmak için $G_1'(b_2) = \{v_1, v_2\}$ ve $G_1'(b_4) = \{v_2\}$ olacak şekilde $(G_1', \{b_2, b_4\})$ esnek kümesi tanımlayarak Tanım 3.1.14 ile

$\leq_{G_1'} = \{\{((b_2,b_2),\{(v_1,v_1)\}),\ ((b_2,b_2),\{(v_1,v_2)\}),\ ((b_2,b_2),\{(v_2,v_1)\}),\ ((b_2,b_2),\{(v_2,v_2)\})\},\ \{((b_4,b_4),\{(v_2,v_2)\})\},\ \{((b_2,b_4),\{(v_1,v_2)\}),\ ((b_2,b_1),\{(v_2,v_2)\})\}\} = \{G_1'(b_2)\times G_1'(b_2), G_1'(b_4)\times G_1'(b_4), G_1'(b_2)\times G_1'(b_4)\}$ esnek bağıntısı buradan da $sup\{(b_2,\{v_1\}),(b_2,\{v_3\}),(b_4,\{v_2\})\} = (b_4,\{v_2\})$ elde edilir. Ayrıca $T(sup\{F(a_3),F(a_2)\}) = T(F(a_2)) = \{b_4,\{v_2\}\}$ bulunur. Sonuç olarak $supT\{F(a_2),F(a_3)\}$ ve $T(sup\{F(a_3),F(a_2)\})$ eşit bulunur.

$supT\{F(a_1),F(a_2)\} = sup\{(b_1,\{v_3\}),(b_4,\{v_2\})\}$ yi bulalım.

$sup\{(b_1,\{v_3\}),(b_4,\{v_2\})\}$ yi bulmak için $G_2(b_1) = \{v_3\}$ ve $G_2(b_4) = \{v_2\}$ olacak şekilde $(G_2,\{b_1,b_4\})$ esnek kümesi tanımlayarak Tanım 3.1.14 ile $\leq_{G_2} = \{\{((b_1,b_1),\{(v_3,v_3)\}),((b_4,b_4),\{(v_2,v_2)\}),\ \{((b_1,b_4),\{(v_3,v_2)\})\}\}$ esnek bağıntısı buradan da $sup\{(b_1,\{v_3\}),(b_4,\{v_2\})\} = (b_4,\{v_2\})$ elde edilir. Ayrıca, $T(sup\{F(a_1),F(a_2)\}) = T(F(a_2)) = (b_4,\{v_2\})$ bulunur. Sonuç olarak $supT\{F(a_1),F(a_2)\} = sup\{(b_1,\{v_3\}),(b_4,\{v_2\})\}$ elde edilir.

$supT\{F(a_2)\} = sup\{(b_4,\{v_2\})\}$ yi bulalım.

$sup\{(b_4,\{v_2\})\}$ yi bulmak için $G_3(b_4) = \{v_2\}$ olacak şekilde $(G_3,\{b_4\})$ esnek kümesi tanımlayarak Tanım 3.1.14 ile $\leq_{G_3} = \{\{((b_4,b_4),\{(v_2,v_2)\})\}$ esnek bağıntısı buradan da $sup\{(b_4,\{v_2\})\} = (b_4,\{v_2\})$ elde edilir. Ayrıca, $T(sup\{f(a_2)\}) = T(F(a_2)) = (b_4,\{v_2\})$ bulunur. Böylece, $supT\{F(a_2)\} = sup\{(b_4,\{v_2\})\}$ elde edilir.

$supT\{F(a_3)\} = sup\{(b_2,\{v_1\}),(b_2,\{v_3\})\}$ yi bulalım.

$sup\{(b_2,\{v_1\}),(b_2,\{v_3\})\}$ yi bulmak için $G_4(b_2) = \{v_1,v_3\}$ olacak şekilde $G_4,\{b_2\}$ esnek kümesi tanımlayarak Tanım 3.1.14 ile $\leq_{G_4} = \{((b_2,b_2),\{(v_1,v_1)\}),((b_2,b_2),\{(v_1,v_3)\}),((b_2,b_2),\{(v_3,v_1)\}),((b_2,b_2),\{(v_3,v_3)\})\} = G_4(b_2)\times G_4(b_2)$ esnek bağıntısı buradan da $sup\{(b_2,\{v_1\}),(b_2,\{v_3\})\} = \{(b_2,\{v_1\}),(b_2,\{v_3\})\} = G_4(b_2) = G(b_2)$ elde edilir. Ayrıca, $T(sup\{F(a_3)\}) = T(F(a_3)) = G(b_2)$ bulunarak $T(sup\{F(a_3)\}) = supT(F(a_3))$ elde edilir.

$supT\{F(a_1)\} = sup\{(b_1,\{v_3\})\}$ ü bulalım.

$sup\{(b_1,\{v_3\})\}$ ü bulmak için $G_5(b_1) = \{v_3\}$ olacak şekilde $(G_5,\{b_1\})$ esnek kümesi tanımlayarak Tanım 3.1.14 ile $\leq_{G_5} = \{((b_1,b_1),\{(v_3,v_3)\})\}$ esnek bağıntısı buradan da $sup\{(b_1,\{v_3\})\} = (b_1,\{v_3\})$. elde edilir. Ayrıca, $T(sup\{F(a_1)\}) = T(F(a_1)) = (b_1,\{v_3\})$ bulunur. Böylece $supT\{F(a_1)\} = sup\{(b_1,\{v_3\})\}$ elde edilir.

Teorem 3.2.92. (Yaylalı ve Tanay, 2017) **Esnek Scott sürekli fonksiyonlar için en küçük sabit nokta teoremi:** (F,A) en küçük eleman $F(a_0)$ a sahip yönlendirilmiş tam kısmi sıralı bir esnek küme olsun.

i) Varlık: Her Scott sürekli $T:(F,A)\to(F,A)$ esnek fonksiyonu en küçük sabit noktaya $(LFP(T))$ sahiptir.

ii) Yapım: En küçük nokta ardışık olarak tanımlanan Kleene zinciri:

$$K_0 = F(a_0),\ K_{n+1} = T(K_n) = T^{n+1}(K_0)$$

ile

$$LFP(T) = sup_n K_n = sup_n T^n(K_0)$$

olur.

iii) Korunum: (G,B) başka bir en küçük elemana sahip yönlendirilmiş tam kısmi sıralı bir esnek küme olsun ve

$$\begin{array}{ccc} (F,A) & \xrightarrow{V} & (G,B) \\ \Big\downarrow T & & \Big\downarrow S \\ (F,A) & \xrightarrow{V} & (G,B) \end{array}$$

diagramı Scott sürekli esnek fonksiyonlar ile değişmeli (commuting) olsun. Buradan $V(LFP(T)) = LFP(S|_{\uparrow V(F_0)})$ elde edilir.

Kanıt. $K_0 = F(a_0) \le T(F(a_0)) = K_1$ olsun. T sıra korur olduğundan, $K_1 = T(K_0) \le T(K_1) = K_2$ ve tümevarım ile her n için $T(K_n) \le T(K_{n+1})$ elde edilir. K_n artan olduğundan, (F,A) da en küçük üst sınır $F(a) = sup_n K_n$ vardır. T nin sürekliliğinden, $T(F(a)) = T(sup_n K_n) = sup_n K_{n+1} = F(a)$ olur. Buradan da $F(a)$, T nin sabit noktası olur. Aslında T en küçük sabit noktaya sahiptir. Gerçektende, $F(a') = T(F(a'))$ nü başka bir sabit nokta olarak kabul edersek, $K_0 = F(a_0) \le F(a')$ olduğundan $K_1 = T(F(a_0)) \le T(F(a')) = F(a')$ bulunur. Tümevarım ile de her n için $K_n \le F(a')$, buradan da $F(a) = sup_n K_n \le F(a')$ elde edilir. Böylece **i** ve **ii** ispatlanmış olur.
iii ü ispatlamak için $\uparrow V(F(a_0))$ın, en küçük eleman $V(F(a_0))$ a sahip yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olduğuna ve S nin, $V(F(a_0)) \le G(b)$ olması $S(G(b)) = S(V(F(a_0))) = V(T(F(a_0))) \ge V(F(a_0))$ olmasını gerektirirken $\uparrow V(F(a_0))$ ı kendi içine eşlediğine dikkat çekmeliyiz. Sonuç olarak S, $\uparrow V(K_0)$ a kısıtlandığında en küçük sabit noktası vardır ve

$$
\begin{aligned}
V(LFP(T)) &= V(sup_n T^n(K_0)), && \textbf{(ii)} \text{ den}\\
&= sup_n V(T^n(K_0)), && \text{V Esnek Scott sürekli olduğundan}\\
&= sup_n S^n(V(K_0)), && \text{diagram değişmeli olduğundan}\\
&= LFP(S_{\uparrow V(K_0)}), && \textbf{(ii)} \text{ den}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

□

Not: Eğer V strict ise yani eğer $V(K_0) = K_0$ ise $V(LFP(T)) = LFP(S)$ olur.

3.2.3. Esnek kompakt-açık topoloji ve esnek Isbell topoloji

(F,A) ile (G,B), T_0 esnek topolojik uzaylar arasındaki bütün sürekli esnek fonksiyonlar $STOP((F,A),(G,B))$ ile gösterilsin.

Tanım 3.2.93. $STOP((F,A),(G,B))$ üzerinde alt baz elemanları, (H,C) esnek alt kümesi, (F,A) da esnek kompakt ve (I,D) esnek alt kümesi, (G,B) de esnek açık olacak şekilde

$$N((H,C) \to (I,D)) = \{T \in STOP((F,A),(G,B)) : T((H,C)) \tilde{\subseteq} (I,D)\}$$

formunda olan esnek topolojiye esnek kompakt-açık topoloji denir.

$T((H,C)) \tilde{\subseteq} (I,D)$ olması için gerek ve yeter koşul $(H,C) \tilde{\subseteq} T^{-1}((I,D))$ olmasıdır. İkinci kısmin doğru olması için (H,C) nin saturasyonunun $T^{-1}((I,D))$ tarafından içerilmesi gerekir. Herhangi bir kompakt saturated esnek küme (H,C) için, (H,C) yi içeren açık esnek kümeler, Örnek 3.2.77 den $F_{(H,C)}$ Scott açık esnek filtresidir, ve $T \in N((H,C) \to (I,D)) \Leftrightarrow T^{-1}((I,D)) \in F_{(H,C)}$ olur. Buradan $N(F_{(H,C)} \leftarrow (I,D)) :=$ $\{T \in STOP((F,A),(G,B)) : T^{-1}((I,D)) \in F_{(H,C)}\}$ olarak tanımlanırsa, $N(F_{(H,C)} \leftarrow$ $(I,D)) = N((H,C) \to (I,D))$ olur.

Tanım 3.2.94. $STOP((F,A),(G,B))$ üzerindeki esnek Isbell topoloji, alt baz elemanları, $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\sigma(\mathcal{O}(F,A))$ dan ve (I,D), (G,B) nin esnek açık alt kümesi olacak şekilde,

$$[\widetilde{\mathcal{A}},(I,D)] = \{T \in STOP((F,A),(G,B)) | \exists (H,C) \in \widetilde{\mathcal{A}}, T((H,C)) \subseteq (I,D)\}$$

esnek açık kümeleri olan esnek topoloji olarak tanımlanır.

$STOP((F,A),(G,B))$ esnek Isbell topoloji ile donatıldığında $[(F,A),(G,B)]$ ile gösterilecektir.

Not. Alternatif olarak esnek Isbell topoloji aşağıdaki gibi tanımlanabilir:
(F,A) ve (G,B) esnek topolojileri için, $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\sigma(\mathcal{O}((F,A)))$ dan ve (I,D), $\mathcal{O}((G,B))$ den olacak şekilde

$$N(\widetilde{\mathcal{A}} \leftarrow (I,D)) = \{T \in STOP((F,A),(G,B)) : T^{-1}((I,D)) \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$$

esnek kümesi $STOP((F,A),(G,B))$ üzerinde bir esnek topoloji için esnek altbaz oluşturur.

Yukarıdaki iki tanımın denkliği aşağıdaki gibi gösterilebilir:
$\widetilde{\mathcal{A}}$, $\sigma(\mathcal{O}((F,A)))$ dan ve (I,D), $\mathcal{O}((G,B))$ dan olacak şekilde $T \in N(\widetilde{\mathcal{A}} \leftarrow (I,D))$ olsun. Buradan $T^{-1}((I,D)) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ elde edilir. Buda $T^{-1}((I,D)) = (H,C)$ olacak şekilde $(H,C) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ olmasını gerektirir. Daha sonra $T((H,C)) = T(T^{-1}((I,D))) \widetilde{\subseteq} (I,D)$ olur. Buradan da $T \in [\widetilde{\mathcal{A}},(I,D)]$ elde edilir.
$T \in [\widetilde{\mathcal{A}},(I,D)]$ olsun. $T((H,C)) \widetilde{\subseteq} (I,D)$ olacak şekilde $(H,C) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ vardır. $(H,C) \widetilde{\subseteq} T^{-1}(T((H,C))) \ \widetilde{\subseteq} T^{-1}((I,D))$ ve $(H,C) \in \widetilde{\mathcal{A}} \in \sigma(\mathcal{O}((F,A)))$ olduğundan, $T^{-1}((I,D)) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ olur. Buda $T \in N(\widetilde{\mathcal{A}} \leftarrow (I,D))$ olmasını gerektirir.

Örnek 3.2.95. Başlangıç evreni $U = \{u_1,u_2,u_3\}$ ve parametre kümeleri $A = \{p_1,p_2\}$ ile $B = \{p_3\}$ olsun. $(F,A) = \{(p_1,\{u_2\}),(p_2,\{u_1\})\}$ ve $(G,B) = \{(p_3,\{u_1\})\}$ esnek kümeleri ile $\widetilde{\tau} = \{\Phi,(F,A),\{(p_1\{u_2\})\}\}$, (F,A) üzerinde ve $\widetilde{\sigma} = \{\Phi,(G,B),\{(p_3,\{u_1\})\}\}$, (G,B) üzerinde esnek topolojiler olsun.
$T_i : (F,A) \widetilde{\rightarrow} (G,B)$ esnek fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} T_1 : \quad & (p_1,\{u_2\}) \widetilde{\rightarrow} (p_3,\{u_1\}) \\ & (p_2,\{u_1\}) \widetilde{\rightarrow} (p_3,\{u_1\}) \end{aligned}$$

Esnek Isbell topoloji için esnek altbaz aşağıdaki adımlar ile elde edilir:
$\sigma(\mathcal{O}(F,A)) = \{\Phi,\widetilde{\tau},\{(F,A)\},\{(p_1,\{u_2\}),(F,A)\}\}$
$\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \{\Phi\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \{(F,A)\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_3 = \{(p_1,\{u_2\}),(F,A)\}$ ve $\widetilde{\mathcal{A}}_4 = \widetilde{\tau}_F$.
Buradan esnek altbaz $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\{T_1\}\}$ ve esnek Isbell topoloji $\widetilde{\tau} = \{\Phi,\{T_1\}\}$ olur.

Örnek 3.2.96. Başlangıç evreni $U = \{u_1,u_2,u_3\}$ ve parametre kümeleri $A = \{p_1,p_3\}$, $B = \{p_1,p_2\}$ olsun. $(F,A) = \{(p_1,\{u_1\}),(p_3,\{u_3\})\}$ ve $(G,B) =$

$\{(p_1,\{u_2\}),(p_2,\{u_1\})\}$ esnek kümeleri ile $\widetilde{\tau} = \{\Phi,(F,A),\{(p_3,\{u_3\})\}\}$, (F,A) üzerinde ve $\widetilde{\sigma} = \{\Phi,(G,B),\{(p_1,\{u_2\})\}\}$, (G,B) üzerinde esnek topolojiler olsun.
$T_i : (F,A)\widetilde{\to}(G,B)$ esnek fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{array}{llll} T_1: & (p_1,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_2,\{u_1\}) & T_2: & (p_1,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) \\ & (p_3,\{u_3\})\widetilde{\to}(p_2,\{u_1\}) & & (p_3,\{u_3\})\widetilde{\to}(p_2,\{u_1\}) \\ T_3: & (p_1,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & T_4: & (p_1,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_2,\{u_1\}) \\ & (p_3,\{u_3\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & & (p_3,\{u_3\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) \end{array}$$

(F,A) ile (G,B) arasındaki bütün sürekli esnek fonksiyonlar: $\{T_1,T_3,T_4\}$

Esnek Isbell topoloji için esnek alt baz elemanları aşağıdaki adımlar ile elde edilir.

$\sigma(\mathcal{O}(F,A)) = \{\Phi,\widetilde{\tau},\{(F,A)\},\{(p_3,\{u_3\}),(F,A)\}\}$

$\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \{(F,A)\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \{\Phi\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_3 = \{(p_3,\{u_3\}),(F,A)\}$ ve $\widetilde{\mathcal{A}}_4 = \widetilde{\tau}_F$.

$[\widetilde{\mathcal{A}}_1 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_3\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_2 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_1,T_3,T_4\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_3 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_3,T_4\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_4 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_1,T_3,T_4\}$
.
.
.
Sonuç olarak esnek Isbell topoloji $\widetilde{\tau} = \{\Phi,\{T_1,T_3,T_4\},\{T_3,T_4\},\{T_3\}\}$ olur.

Örnek 3.2.97. Başlangıç evreni $U = \{u_1,u_2,u_3\}$ ve parametre kümeleri $A = \{p_1,p_2\}$, $B = \{p_1,p_3,p_4\}$ olsun. $(F,A) = \{(p_1,\{u_2\}),(p_2,\{u_1\})\}$ ve $(G,B) = \{(p_1,\{u_2\}),(p_3,\{u_1\}),(p_4,\{u_1\})\}$ esnek kümeleri ile $\widetilde{\tau}_F = \{\Phi,(F,A),\{(p_2,\{u_1\})\}\}$, (F,A) üzerinde ve
$\widetilde{\tau}_G = \{\Phi,(G,B),\{(p_1,\{u_2\}),(p_4,\{u_1\})\},\{(p_1,\{u_2\})\}\}$, (G,B) üzerinde esnek topolojiler olsun.
$T_i : (F,A)\widetilde{\to}(G,B)$ esnek fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$
\begin{array}{llll}
T_1: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & T_2: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) \\
 & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) \\
T_3: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & T_4: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) \\
 & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) & & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) \\
T_5: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & T_6: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) \\
 & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) & & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) \\
T_7: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) & T_8: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) \\
 & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_3,\{u_1\}) & & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) \\
T_9: & (p_1,\{u_2\})\widetilde{\to}(p_4,\{u_1\}) & & \\
 & (p_2,\{u_1\})\widetilde{\to}(p_1,\{u_2\}) & &
\end{array}
$$

(F,A) ile (G,B) arasındaki bütün sürekli esnek fonksiyonlar: $\{T_1,T_2,T_4,T_6,T_8,T_9\}$
$\sigma(\mathcal{O}(F,A)) = \{\Phi,\widetilde{\tau}_F,\{(F,A)\},\{(p_2,\{u_1\}),(F,A)\}\}$

$\widetilde{\mathcal{A}}_1 = \{\Phi\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_2 = \{(F,A)\}$, $\widetilde{\mathcal{A}}_3 = \{(p_2,\{u_1\}),(F,A)\}$ ve $\widetilde{\mathcal{A}}_4 = \widetilde{\tau}_F$.
Esnek Isbell topoloji için esnek altbaz elemanları aşağıdaki şekilde elde edilir.
$[\widetilde{\mathcal{A}}_1 \leftarrow ...] = \{T_1,T_2,T_4,T_6,T_8,T_9\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_2 \leftarrow (G,B)] = \{T_1,T_2,T_4,T_6,T_8,T_9\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_2 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\}),(p_4,\{u_1\})\}] = \{T_1,T_4,T_9\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_2 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_1\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_3 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\}),(p_4,\{u_1\})\}] = \{T_1,T_6,T_9\}$
$[\widetilde{\mathcal{A}}_3 \leftarrow \{(p_1,\{u_2\})\}] = \{T_1,T_6,T_9\}$
.
.
.

Sonuç olarak esnek Isbell topoloji
$\widetilde{\tau} = \{\Phi,\{T_1,T_2,T_4,T_6,T_8,T_9\},\{T_1,T_4,T_9\},\{T_1,T_6,T_9\},\{T_1,T_9\},\{T_1\},\ \{T_1,T_4,T_6,T_9\}\}$
olarak elde edilir.

Teorem 3.2.98. $(F,A,\widetilde{\tau})$ ve $(G,B,\widetilde{\sigma})$ esnek topolojik uzaylar olsun. $[(F,A),(G,B)]$ üzerindeki esnek Isbell topoloji, esnek kompkt-açık topolojiden daha incedir. Eğer (F,A) esnek sade (sober) ve $\mathcal{O}((F,A))$ esnek sürekli latis ise esnek Isbell topoloji ve esnek kompakt-açık topoloji çakışır.

Kanıt. Kompakt-açık topolojide her esnek altbaz elemanı esnek Isbell topolojide de esnek alt baz elemanı olur. Diğer yandan, (F,A) nın esnek sober ve $\mathcal{O}((F,A))$ nın esnek sürekli latis olduğunu kabul edelim. Eğer $T \in N((H,C) \leftarrow (K,I))$

ise $T^{-1}((K,I)) \in (H,C)$ ve $\mathcal{O}((F,A))$ esnek sürekli olduğundan Teorem 3.2.84 den $T^{-1}((K,I)) \in (D,E)\widetilde{\subseteq}(H,C)$ olacak şekilde açık esnek filtre (D,E) vardır. Buradan $N((M,O) \to (K,I)) = N((D,E) \leftarrow (K,I))$ olacak şekilde kompakt saturated esnek küme (M,O) vardır ve böylece $(K,I) \in N((M,O) \to (K,I)) = N((D,E) \leftarrow (K,I))\widetilde{\subseteq}N((H,C) \leftarrow (K,I))$ olur. Sonuç olarak, bu durumda esnek Isbell topoloji, esnek kompakt-açık topoloji tarafından içerilir. Böylece çakışırlar. □

Teorem 3.2.99. $(F,A,\widetilde{\tau})$ ve $(G,B,\widetilde{\sigma})$ esnek topolojik uzaylar olsun ve $\Omega[(F,A),(G,B)]$, özelleştirilmiş (specialization) esnek sıralama ile $[(F,A),(G,B)]$ esnek Isbell topolojik uzayını göstersin. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

i) $\Omega[(F,A),(G,B)]$ da $T \leq S$ olur.

ii) Her $F(a) \in (F,A)$ için $\Omega(G,B)$ da $T(F(a)) \leq S(F(a))$ olur.

iii) $\mathcal{O}(G,B)$ daki her (H,C) için $T^{-1}((H,C))\widetilde{\subseteq}S^{-1}((H,C))$ olur.

Kanıt. $i \Rightarrow ii$ $\Omega[(F,A),(G,B)]$ de $T \leq S$ olsun. Buradan $F(a) \in (F,A)$ ve (G,B) de esnek açık küme (H,C) için $T(F(a)) \in (H,C)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{N}(F(a))$, $F(a)$ nın esnek açık komşuluklarının Scott esnek açık filtresiyken $T \in N(\mathcal{N}(F(a)) \leftarrow (H,C))$ olmasıdır. Bu da $S \in N(\mathcal{N}(F(a)) \leftarrow (H,C))$ olması için gerek ve yeter şartın $S(F(a)) \in (H,C)$ olmasıdır. Sonuç olarak $T(F(a)) \leq S(F(a))$ olur.

$ii \Rightarrow iii$ Eğer $\Omega(G,B)$ da her $F(a)$ için $T(F(a)) \leq S(F(a))$ ise esnek açık (H,C) için $F(a) \in T^{-1}((H,C))$ olması için gerek ve yeter koşul $T(F(a)) \in (H,C)$ olmasıdır. Buda $S(F(a)) \in (H,C)$ olması için gerek ve yeter şartın $F(a) \in S^{-1}((H,C))$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $T^{-1}((H,C))\widetilde{\subseteq}S^{-1}((H,C))$ elde edilir.

$iii \Rightarrow i$ Her $(H,C) \in \mathcal{O}(G,B)$ için $T^{-1}((H,C))\widetilde{\subseteq}S^{-1}((H,C))$ olduğunu kabul edelim. Eğer $T \in N((K,D) \leftarrow (H,C))$ Isbell esnek açık küme ise $T^{-1}((H,C)) \in (K,D)$ olur, buradan da (K,D) süper esnek kümelerde kapalı olduğundan $S^{-1}((H,C)) \in (K,D)$ elde edilir. Böylece $S \in N((K,D) \leftarrow (H,C))$ olur, esnek altbaz oluşturduğundan , $T \leq S$ elde ederiz.

□

Teorem 3.2.100. $(F,A,\widetilde{\tau})$ ve $(G,B,\widetilde{\sigma})$ esnek topolojik uzaylar olsun. Eğer $T : (F_1,A_1) \to (F,A)$ ve $S : (G,B) \to (G_1,B_1)$ esnek sürekli fonksiyon ise $[(F,A),(G,B)]$ deki her P için $[T,S](P) = SPT$ şeklinde tanımlanan $[T,S] : [(F,A),(G,B)] \to [(F_1,A_1),(G_1,B_1)]$ esnek sürekli fonksiyon olur.

Kanıt. $[T,S]$ sürekliliğini göstermek için $\mathcal{O}(F_1,A_1)$ in her hangi bir Scott açık esnek kümesi (H_1,C_1) ve (G_1,B_1) in herhangi bir açık esnek kümesi (I_1,D_1) i alalım. $\mathcal{O}(F,A)$ in bazı Scott açık esnek kümesi (H,C) ve (G,B) nin bazı esnek açık kümesi (I,D) için $[T,S]^{-1}(N((H_1,C_1) \leftarrow (I_1,D_1)) = N((H,C) \leftarrow (I,D))$ olduğunu göstermek yeterlidir. Sürekli olduğundan esnek açık olan $(I,D) = S^{-1}((I_1,D_1))$ ve $(H,C) = (\mathcal{O}T)^{-1}(H_1,C_1) = \{(J,E) \in \mathcal{O}(F,A) : T^{-1}((J,E)) \in (H_1,C_1)\}$ alalım. $\mathcal{O}T$ keyfi esnek birleşimleri koruduğundan (H,C) Scott esnek süreklidir. Buradan, Scott açık esnek küme (H_1,C_1) in ön görüntüsü (H,C) Scott açık esnek küme olur. Son olarak,

$$\begin{aligned} P \in [T,S]^{-1}(N((H_1,C_1) \leftarrow (I_1,D_1)) &\Leftrightarrow (SPT)^{-1}(I_1,D_1) \in (H_1,C_1) \\ &\Leftrightarrow T^{-1}(P^{-1}(S^{-1}((I_1,D_1)))) \\ &\quad\; = T^{-1}(P^{-1}((I,D))) \in (H_1,C_1) \\ &\Leftrightarrow P^{-1}((I,D)) \in (H,C) \\ &\Leftrightarrow P \in N((H,C) \leftarrow (I,D)). \end{aligned}$$

□

3.2.4. Esnek Lawson topoloji

Tanım 3.2.101. (Babitha ve Sunil, 2010) Bir (F,A) esnek kümesinde herhangi bir esnek bağıntı $R\widetilde{\subset}(F,A) \times (F,A)$ için esnek bağıntının tersi R^{op} bağıntısı; her $F(a),F(b) \in (F,A)$ için $F(a)R^{op}F(b)$ olması için gerek ve yeter koşulun $F(b)RF(a)$ olması şeklinde tanımlanır.

Not. R, (F,A) esnek kümesi üzerinde bir esnek bağıntı olsun. Eğer (F,A) ters esnek bağıntı R^{op} ile göz önüne alınırsa, $(F,A)^{op}$ ile gösterilecektir.

Tanım 3.2.102. $\sigma((F,A)^{op})$ üzerindeki esnek Scott topolojiye esnek Dual Scott topoloji denir. Esnek Dual Scott topoloji aşağıdaki özellikleri sağlayan (G,B) esnek alt kümelerinden oluşmaktadır.
i) (F,A) da $(G,B) = \downarrow (G,B)$ olduğundan $(F,A)^{op}$ da $(G,B) = \uparrow (G,B)$ olur.
ii) Her filtrelenmiş $(D,C)\widetilde{\subseteq}(F,A)$ esnek kümesi için $inf(D,C) \in (G,B)$ olması $(D,C)\widetilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ olmasını gerektirdiğinden, her yönlendirilmiş $(D,C)\widetilde{\subseteq}(F,A)^{op}$ esnek kümesi için $sup(D,C) \in (G,B)$ olması $(D,C)\widetilde{\cap}(G,B) \neq \Phi$ olmasını gerektirir.

Tanım 3.2.103. (F,A) kısmi sıralı esnek bir küme olsun. Esas filtrelerin esnek tümleyenlerinin $(F,A)-\uparrow\{F(a)\}$ ürettiği esnek topolojiye esnek aşağı (lower) topoloji denir ve $\omega(F,A)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.104. (F,A) kısmi sıralı esnek küme olsun. Her $a \in A$ için $\uparrow \{F(a)\}$, $\omega((F,A))$ da kapalı esnek kümedir.

Kanıt. $(G,B) = (F,A) - \uparrow \{F(a)\}$ ise (G,B), $\omega((F,A))$da açık esnek küme olur. Buradan da $\omega((F,A))$da $\uparrow \{F(a)\}$ kapalı esnek küme olur. □

Teorem 3.2.105. (F,A) kısmi sıralı esnek küme olsun. Sonlu bir B kümesi için, $\uparrow (G,B)$, $\omega((F,A))$ da kapalı esnek küme olur.

Kanıt. Teorem 3.2.56' dan kapalı esnek kümelerin sonlu esnek birleşimleri kapalı esnek küme olduğundan $\uparrow (G,B)$, $\omega((F,A))$da kapalı esnek kümedir. □

Teorem 3.2.106. Yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme üzerindeki esnek aşağı topoloji $\omega(F,A)$ genellikle $\sigma((F,A)^{op})$ dan kabadır.

Kanıt. $\uparrow \{F(a)\}$ esas filtreleri dual esnek Scott topoloji için kapalı olduğundan $\omega(F,A)$, $\sigma((F,A)^{op})$ dan kabadır. □

Örnek 3.2.107. $U = \{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$ başlangıç evreni, $A = \{a_1,a_2,a_3\}$ parametre kümesi ve $F(a_1) = \{c_1,c_2\}$, $F(a_2) = \{c_2\}$, $F(a_3) = \{c_4,c_5,c_6\}$ olacak şekilde (F,A) esnek kümesini göz önüne alalım.

$$\leq = \{F(a_1)\times F(a_1), F(a_2)\times F(a_2), F(a_3)\times F(a_3), F(a_1)\times F(a_2), F(a_2)\times F(a_3), F(a_1)\times F(a_3)\}$$

ile (F,A) kısmi sıralı esnek küme, filtrelenmiş esnek küme ve minimum elemanı olduğundan esas filtrelenmiş esnek kümedir.
$(F,A) - \uparrow \{F(a_1)\} = \Phi$
$(F,A) - \uparrow \{F(a_2)\} = \{F(a_1)\}$. Minimumu olduğundan filtrelenmiş esnek kümedir.
$(F,A) - \uparrow \{F(a_3)\} = \{F(a_1),F(a_2)\}$. Minimumu olduğundan filtrelenmiş esnek kümedir.
Buradan esnek alt baz $\widetilde{\mathcal{S}} = \{\Phi,\{F(a_1)\},\{F(a_1),F(a_2)\}\}$ olur.
Böylece esnek baz $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\Phi,(F,A),\{F(a_1)\},\{F(a_1),F(a_2)\}\}$ elde edilir.
Sonuç olarak esnek aşağı topoloji $\widetilde{\omega} = \{\Phi,(F,A),\{F(a_1)\},\{F(a_1),F(a_2)\}\}$ olarak elde edilir.

Tanım 3.2.108. (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun. Esnek Scott topoloji ve esnek alt topolojinin $\sigma((F,A)) \vee \omega((F,A))$ ortak inceltilmesine (common refinement) esnek Lawson topoloji denir ve $\lambda((F,A))$ ile gösterilir. $((F,A),\lambda((F,A)))$

esnek Lawson topolojik uzayı, $\Lambda((F,A))$ ile gösterilir.
Başka bir deyişle, esnek Lawson topoloji $(G,B) \in \sigma((F,A))$ olan (G,B) esnek kümeleri ile birlikte $F(a) \in (F,A)$ için $(F,A) - \uparrow F(a)$ esnek kümelerinden oluşan esnek alt bazına sahiptir. $(G,B) \in \sigma((F,A))$ ve (F,A) nın sonlu esnek alt kümesi (H,C) iken $(G,B) - \uparrow (H,C)$ esnek kümesi, $\lambda((F,A))$ için esnek baz oluşturur.

Dikkat edilirse, (G,B) ve $(F,A) - \uparrow (H,C)$, **(S)** özelliğini sağlar. Dolayısıyla, her $(F,A) - \uparrow (H,C)$ ve her Lawson açık esnek küme Teorem 3.2.83 (ii)den **(S)** özelliğini sağlar.

Örnek 3.2.109. Örnek 3.2.107 de tanımlanan kısmi sıralı esnek kümesi $(F,A,\leq)$ göz önüne alalım. Burada esnek Scott topoloji

$$\widetilde{\sigma} = \{(F,A), \Phi, \{F(a_2), F(a_3)\}, \{F(a_3)\}\}$$

olur. Daha sonra esnek Lawson topolojinin esnek alt bazı

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \{\Phi, \{F(a_1)\}, \{F(a_1), F(a_2)\}, (F,A), \{F(a_2), F(a_3)\}, \{F(a_3)\}\}$$

olur. Buradan da esnek Lawson topolojinin esnek bazı

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{\Phi, \{F(a_1)\}, \{F(a_1), F(a_2)\}, (F,A), \{F(a_2), F(a_3)\}, \{F(a_3)\}\}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak esnek Lawson topoloji

$$\widetilde{\tau} = \{\Phi, (F,A), \{F(a_1)\}, \{F(a_1), F(a_2)\}, \{F(a_2), F(a_3)\}, \{F(a_3)\}, \{F(a_1), F(a_3)\}\}$$

olur.

Teorem 3.2.110. (F,A) yönlendirilmiş tam kısmi sıralı esnek küme olsun.
i) (G,B) yukarı esnek kümesinin Lawson açık esnek küme olması için gerek ve yeter şart Scott açık esnek küme olmasıdır.
ii) Aşağı esnek kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şart yönlendirilmiş esnek kümelerin supremumları altında kapalı esnek küme olmasıdır.
iii) Eğer (G,B), (F,A) da Scott kapalı esnek küme ise sırasıyla (G,B) de esnek aşağı alt topoloji, esnek Lawson alt topoloji, (G,B) de esnek aşağı ve esnek Lawson topoloji olurlar.

Kanıt. i) $\sigma((F,A)) \widetilde{\subseteq} \lambda((F,A))$ olduğundan, Scott açık esnek küme Lawson açık esnek küme de olur. Şimdi Lawson açık yukarı esnek kümenin Scott açık esnek küme

olduğunu göstermeliyiz. Yukarı esnek küme (G,B) Lawson açık esnek küme olsun. Buradan **(S)** özelliğini sağlar. Daha sonra Teorem 3.2.79 Scott açık esnek küme olur.
ii) Teorem 3.2.79 (i) den açıktır.
iii) (G,B) esnek aşağı topolojisi ve (F,A) dan relatif esnek aşağı topolojisinde ayni kapalı alt baz esnek kümesine sahiptir. (G,B) nin (G,B) de Scott kapalı esnek alt kümesi (F,A) da Scott esnek kapalı kümedir ve sonuç olarak (F,A) da relatif esnek Scott topoloji, esnek Scott topoloji ile çakışır. Esnek Lawson topoloji için ispat ise bu ikisinden gelir. □

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasından yeni bir esnek bağıntı olan esnek way below bağıntısı ile ilgili sonuçlar incelenerek esnek sürekli latis, esnek domain gibi kavramlar tanımlanmıştır, bu kavramlarla ilgili çeşitli örnekler verilmiştir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili bazı teoremler ve sonuçlar ifade edilmiştir.

Esnek Kümelerdeki topolojik yapılar araştırılmış ve özellikle T_0 esnek topolojik uzaylar ile ilgili önemli bazı sonuçlar elde edilmiştir. T_0 esnek topolojik uzaylar üzerinde yeni bir sıralama olarak özelleştirilmiş esnek sıralama oluşturulmuş ve ayrıca, esnek kompaktlık gibi kavramlar çalışılarak, indirgenemez (irreducible), doymuş (saturated), sade (sober) gibi bazı yeni tanımlamalar ve bunların bazı özellikleri litaratüre kazandırılmıştır.

Scott Topolojinin olası sonuçları odaklanarak esnek Scott Topoloji üzerinde bazı elde edilen yeni sonuçların ispatları ifade edilmiştir. Esnek Scott Topolojide elde edilen sonuçları geliştirmek için esnek meet süreklilik ve esnek way-below bağıntısı incelenerek bazı sonuçlar elde edilmiş ve yeterli sayıda örnek verilmiştir. Ayrıca Esnek way-below bağıntısı genelleştirilerek yardımcı (auxiliary) esnek küme bağıntısı tanımlanmış ve örnekler verilerek, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmaları takiben, yaklaşımsal yardımcı (approximating auxiliary) esnek küme bağıntısı tanımlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra auxiliary esnek küme bağıntısı ile esnek Scott topoloji arasındaki ilişkiler incelenerek bazı sonuçlar elde edildi.

Esnek küme aynı yakınsamaya sahip olmadan esnek alt küme olduğunda esnek bağıntının nasıl oluşturulacağı incelenerek aynı yakınsamaya sahip olmayan esnek alt kümede esnek bağıntı tanımlandı. Böylece esnek fonksiyonların görüntülerinde bağıntı elde edilmiş oldu.

Fonksiyon uzayları üzerindeki topolojik yapılar incelenerek esnek Scott sürekli fonksiyonlar oluşturulmuş ve esnek Scott sürekli fonksiyonlara çeşitli örnekler verilerek elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Bu çalışmalar kullanılarak, esnek kompakt-açık topoloji ile esnek Isbell topoloji tanımlanmıştır. Özellikle fonksiyon uzayları üzerindeki esnek Isbell Topolojinin özellikleri çalışılarak esnek Scott Topoloji ile aralarında bazı ilişkiler bulunmuştur. Esnek fonksiyon uzaylarında Esnek Isbell

Topoloji ile Esnek Kompakt-Açık Topolojiler karşılaştırılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Bunların yanı sıra esnek sıralama yardımı ile esnek aşağı topoloji tanımı verilmiştir. Esnek Scott topoloji ve esnek aşağı topoloji yardımı ile yeni bir topoloji olan esnek Lawson topoloji ifade edilmiş ve esnek Lawson topoloji ile ilgili elde edilen bazı sonuçların ispatları yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yardımıyla esnek kümeler üzerinde kategorik yapılar çalışılabilir, özellikle Topolojik içerikli kategorik yapısal çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. ve Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Comput. Math. Appl. 57*: 1547–1553.

Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi.

Babitha, K.V. ve Sunil, J.J. (2011). Transitive closures and ordering on soft sets. *Comput. Math. Appl. 62*: 2235–2239.

Babitha, K. V. ve Sunil, J. J. (2010). Soft set relations and functions. *Comput. Math. Appl. 60*: 1840–1849.

Birkhoff, G. (1967). *Lattice Theory*. AMS Colloquim Publications.

Bourbaki, N. (1966). *General Topology, Parts 1 and 2*. Hermann and Addison-Wesley.

Çağman, N., Karataş, S. ve Enginoglu, S. (2011). Soft topology. *Comput. Math. Appl. 62*: 351–258.

Day, B. J. ve Kelley, G. M. (1970). On topological quotient maps preserved by pullbaks or products. In *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society*.

Dolecki, S. (2009). An initiation into convergence theory. *Contemporary Mathematics Series A.M.S.*.

Fell, J. M. G. (1962). A hausdorff topology fot the closed subsets of a locally compact non-hausdorff space. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 13, pp. 472–476.

Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M. ve Scott, D. S. (1993). *Continuous Lattices and Domains*. Cambrigde University Press.

Gratzer, G. (1978). *General Lattice Theory*. Birkhauser.

Hermes, H. (1967). *Einführung in die Verbandstheorie*. Springer.

Hoffmann, R. E. (1979). Essentially complete t0 spaces. *Manuscripta Mathematica 27*: 401–432.

Hofmann, K. H. ve Stralka, A. R. (1976). The algebraic theory of compact lawson semilattices: applications of galios connections to compact semilattices. *Dissetationes Mathematicae 137*: 1–54.

Isbell, J.R. (1975a). Meet-continuous lattices. *Symposia Mathematica 16*: 41–54.

Isbell, J. R. (1975b). Function spaces and adjoints. *Mathematica Scandinavica 36*: 317–339.

Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.

Kelley, J. L. (1995). *General Topology*. Springer.

Maji, P.K., Biswas, R. ve Roy, A.R. (2003). Soft set theory. *Comput. Math. Appl. 45*: 555–562.

Markowsky, G. (1976). Chain-complete posets and directed sets with applications. *Algebra Universalis 6*: 53–68.

Molodtsov, D. (1999). Soft set theory-first results. *Comput. Math. Appl. 37*: 19–31.

Moore, E. H. ve Smith, H. L. (1922). A general theory of limits. *American Journal of Mathematics 44*: 102–122.

Mucuk, O. (2010). *Topoloji ve Kategori*. Nobel yayın dağıtım.

Munkres, J. (2000). *Topology*. Prentice Hall.

Roy, S. ve Samanta, T.K. (2011). An introduction of a soft topological spaces. In *Proceeding of UGC sponsored National seminar on Recent trends in Fuzzy set theory, Rough set theory and Soft set theory at Uluberia College on 23rd and 24th September, 2011*.

Sayed, A. F. (2014). Continuity of partially ordered soft sets via soft scott topology and soft sobrification. *Bulletin of Mathematical Sciences and Applications 3*: 98–113.

Scott, D.S. (1972). Continuous lattices. *Lecture Notes in Mathematics 274*: 97–136.

Scott, D.S. (1973). Models for various type-free calculi. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 74*: 157–187.

Scott, D.S. (1982). Domains for denotational semantics. *Lecture Notes in Computer Science 140*: 577–613.

Tanay, B. ve Yaylalı, G. (2014). New structures on partially ordered soft sets and soft scott topology. *Ann. Fuzz. Math. Inform. 7*(89-97).

Vickers, S. J. (1989). *Topology via Logic, volume 5 of Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press.

Wardorwski, D. (2013). On a soft mappings and its fixed points. *Fixed Point Theory and Applications*.

Yaylalı, G., Çakmak Polat N. ve Tanay, B. (2017). Soft intervals and soft ordered topology. *Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi 13*(1): 81–89.

Yaylalı, G. ve Tanay, B. (2015). Soft lattices and some results on orderings on soft set. *Journal of advanced Research in Pure Mathematics 7*: 45–60.

Yaylalı, G. ve Tanay, B. (2015). Some new results on orderings on soft sets. *Journal of Technology of Dumlupınar University 34*.

Yaylalı, G. ve Tanay, B. (2017). Results on soft continuous functions in the soft topological spaces equipped with soft scott topology. *J. Nonlinear Sci.*

Appl. 10: 1183–1194.

Yüksel, S. (2006). *Genel Topoloji*. Eğitim Kitapevi.

Zorlutuna, İ., Akdag, M., Min, W. K. ve Atmaca, S. (2012). Remarks on soft topological space. *Ann. Fuzz. Math. Inform.*: 171–185.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad	:	Gözde Yaylalı Umul
Uyruk	:	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi:		Muğla 08/03/1986
Medeni Hali	:	Evli
Telefon	:	0 554 647 37 16
E-posta	:	gozdeyaylali@mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Halıcı Ahmet Urkay Anadolu Lisesi	2004
Lisans	Orta Doğu Teknik Üniversitesi	2009
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2012

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2010-	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		x	
Konuşma		x	
Anlama			x
Okuma			x

Sertifika

1. Pedagojik Formasyon Sertifikası, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, 2014

Bilimsel Faaliyetler

Makaleler

SCI veya SCI Expanded, SSCI, AHCI tarafından taranan dergilerde yayımlanan tam makale

1. Çakmak Polat Nazan, Yaylalı Gözde ve Tanay Bekir (2018). A New Approach for Soft Semi-Topological Groups Based on Soft Element. Filomat, 32:16, 5743-5751.

2. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan ve Tanay Bekir (2018). A completely new approach for the theory of Soft Groups and Soft Rings. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 1-10.

3. Polat Nazan, Yaylalı Gözde ve Tanay Bekir (2018). A Method for Decision Making Problems by using Graph Representation of Soft Set Relations. Intelligent Automation and Soft Computing.

4. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). Tolerance Soft Set Relation on a Soft Set and its Matrix Applications. Fundamenta Informaticae, 152(2), 107-122.

5. Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). Results on soft continuous functions in the soft topological spaces equipped with soft Scott topology. Journal of Nonlinear Sciences and Apllications, 10(3), 1183-1194.

SCI veya SCI Expanded, SSCI, AHCI dışındaki uluslararası indexler tarafından taranan dergilerde yayımlanan tam makale

1. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). Soft Intervals and Soft Ordered Topology. Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13, 81-89., Doi: 10.18466/cbayarfbe.302645

2. Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2015). Soft Lattices and Some Results on Orderings on Soft Sets. Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 7(3), 45-60.

3. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2014). New structures on partially ordered soft sets and soft Scott topology. Annals of Fuzzy Mathematics and Informations, 7(1), 89-97.

Ulusal hakemli dergilerde yayımlanmış tam makale

1. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2015). Some New Results on Orderings on Soft Sets. Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi.

Sempozyumlar

1. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan, Tanay Bekir (2018). A Computer Application for a Decision Making Algorithm Which is Based on the Soft Set Theory. 11. International Statistics Days Conference 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

2. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan, Tanay Bekir (2018). A Desicion Making Algorithm on the Soft Set Theory with Its Computer Application. International Congress on Fundamental and Applied Sciences 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

3. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan, Tanay Bekir (2018). Relation Between Auxiliary Soft Set Relation and Soft Scott Topology . International Congress on Fundamental and Applied Sciences 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

4. Çakmak Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2018). Neighborhood Structure of a Soft Element. International Congress on Fundamental and Applied Sciences 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

5. Çakmak Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2018). Concept of a Soft Element and Soft Topological Space. International Congress on Fundamental and Applied Sciences 2018 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

6. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan, Tanay Bekir (2018). Relation Between Meet Continuous Soft Sets and Soft Scott Topology. International Conference on Mathematics (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

7. Yaylalı Gözde, Çakmak Polat Nazan, Tanay Bekir (2018). Compact Soft Elements and Algebraic Soft Domains. International Conference on Mathematics (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

8. Çakmak Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2018). Some Results on Soft Element and Soft Topological Space. International Conference on Mathematics (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

9. Çakmak Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2018). Neighborhood system of soft identiy element of soft topological group. International Conference on Mathematics (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

10. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). On the Thoery of Soft Rings. Recent Trends in Pure and Applied Mathematics. (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

11. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). A completely new approach for the theory of Soft Groups. Recent Trends in Pure and Applied Mathematics. (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

12. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). On The Approximating Auxiliary Soft Set Relation. International Conference on Mathematics and Engineering (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

13. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). Some Results on the Subgroups of Soft-Semi Topological Groups. International Conference on Mathematics and Engineering (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

14. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). The Soft Topological Groups Based on the Soft Element. International Conference on Mathematics and Engineering (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

15. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). The Auxiliary Soft Set Relation. International Conference on Mathematics and Engineering (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

16. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). Some Results on Soft Scott Topology and Soft Isbell Topology. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

17. Yaylalı Gözde, Polat Nazan, Tanay Bekir (2017). The Common Refinement of the Soft Scott Topology and the Soft Lower Topology: the Soft Lawson Topology. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

18. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). Some Results on Soft Groups Based on Soft Element. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, Turkey (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

19. Polat Nazan, Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2017). A New Approach for Soft Semi-Topological Groups Based on Soft Element. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Antalya, Turkey (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

20. Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2016). The Soft Isbell Topology with Some Applications. International Congress on Fundamental and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

21. Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2016). Results on Soft Continuous Functions in the

Soft Topological Spaces equipped with Soft Scott Topology. International Conference of Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

22. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2015). A Method for Decision Making by Using Soft Intervals. International Conferences on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

23. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2014). The Way Below Soft Set Relation. International Conferences on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Antalya - 2014 (Özet Bildiri/ Sözlü Sunum)

24. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2013). Some New Results on Orderings on Soft Sets. 2.nd International eurasian conference on mathematical sciences and applications, (August, 2013) Saraybosna. - 2013 (Özet Bildiri/ Sözlü Sunum)

25. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2014). Esnek Aralık Kavramı ve Esnek Sıralama Topolojisi. 27. Ulusal Matematik Sempozyumu Yeditepe Üniversitesi İstanbul - 2014 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

26. Yaylalı Gözde, Tanay Bekir (2012). Yönlendirilmiş Esnek Kümeler ve Esnek Scott Topoloji Üzerine. 25. Ulusal Matematik Sempozyumu Niğde - 2012 (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)

27. Tanay Bekir, Yaylalı Gözde (2015). The Concept of Soft Intervals. I. Fen Bilimleri Araştırma Sempozyumu 26 Mayıs 2015 (Özet Bildiri/Poster)

Projeler

1. Fonksiyon Uzaylarında Esnek Topolojik Yapılar, BAP, Araştırmacı, Proje No: 16/073.

2. Fonksiyon Uzaylarında Esnek Topolojik Yapılar kapsamında elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve yaygınlaştırılması, Teşvik Projeleri (TP), Araştırmacı, Proje No: 18/062