λ-YAKINSAK VE SINIRLI SERİLERİN BAZI YENİ FARK DİZİ UZAYLARI

Yasin ÇINAR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

2018

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

λ-YAKINSAK VE SINIRLI SERİLERİN BAZI YENİ FARK DİZİ UZAYLARI

Yasin ÇINAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞRI

2018

..../..../2018

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**λ-Yakınsak ve Sınırlı Serilerin Bazı Yeni Fark Dizi Uzayları**" adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Tezimin ...... yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

..../..../2018

Yasin ÇINAR

λ-YAKINSAK VE SINIRLI SERİLERİN BAZI YENİ FARK DİZİ UZAYLARI

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Yasin ÇINAR tarafından hazırlanan sma ...../...../2018 tarihinde a¸ ğıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan :	....	*İmza* :	....
Üye :	....	*İmza* :	....
Üye :	....	*İmza* :	....
Üye :	....	*İmza* :	....
Üye :	....	*İmza* :	....

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. Ibrahim HAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

λ-YAKINSAK VE SINIRLI SERİLERİN BAZI YENİ FARK DİZİ UZAYLARI

Yasin ÇINAR

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Yapmış olduğumuz çalışmada; Kızmaz (1981) tarafından tanımlanan fark matrisinin, Kaya ve Furkan (2015) tarafından tanımlanan $cs_0^\lambda,\ cs^\lambda$ ve bs^λ dizi uzayları üzerindeki etki alanı olan mutlak olmayan türden $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ fark dizi uzayları tanımlandı ve bu uzayların birer BK-uzayı olduğu gösterildi. Ayrıca bu uzayların $cs_0,\ cs$ ve bs uzayları ile izomorfik oldukları belirlendi ve Schauder bazları verildi. Bunun yanısıra, bazı kapsama bağıntıları incelendi ve bu uzayların α-, β- ve γ-dualleri hesaplandı. Son olarak, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ olmak üzere $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ uzaylarından ℓ_p, c ve c_0 uzaylarına bazı matris dönüşümlerinin sınıfları karakterize edildi.

2018, 28 sayfa

Anahtar sözcükler: λ uzaylar, fark dizi uzayları, Schauder bazı, α-, β- ve γ-dualler, matris dönüşümleri.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME NEW DIFFERENCE SEQUENCE SPACES OF λ-CONVERGENT AND BOUNDED SERIES

Yasin ÇINAR

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In the study, we have studied; the difference sequence spaces $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ and $bs^\lambda(\Delta)$ of non-absolute type which is the domain of the difference matrix defined by Kızmaz (1981) on the sequence spaces $cs_0^\lambda,\ cs^\lambda$ and bs^λ defined by Kaya and Furkan (2015) are defined and these sequence spaces are shown to be BK-spaces. Also, it is determined that these spaces are isomorphic to the spaces $cs_0,\ cs$ and bs, respectively, and their Schauder basis are given. In addition, some inclusion relations are examined and the α-, β- and γ-duals of these sequence spaces are calculated. Finally, the classes of matrix transformations from the spaces $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ and $bs^\lambda(\Delta)$ to the spaces $\ell_p,\ c$ and c_0 are characterized, where $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2018, 28 pages

Keywords: λ spaces, difference sequence spaces, Schauder basis, α-, β- and γ-duals, matrix transformations.

TEŞEKKÜR

Tez çalışma konusunu veren ve tamamlayıncaya kadar çalışmalarımın her safhasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, hiçbir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet ocak AKDEMİR'e minnet ve şükranlarımı sunuyorum.

Konunun ihtiyaç duyduğum kısımlarında kendileri ile fikir teatisinde bulunmama imkan tanıyan Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü doktora öğrencilerinden sayın Meltem KAYA'ya hassetwn teşekkür ederim.

Çalışmalarım esnasında beni sürekli olarak teşvik eden ve cesaretlendiren başta eşim Elif Zerrin ÇINAR, oğlum Muhammet Mustafa, kızlarım Rukiyete Büşra, Fatma Şüheda, Zeynep İkra, Ümmügülsüm Safura ve Ümame Tuana ÇINAR'a özellikle teşekkür ederim.

07/12/2018

Yasin ÇINAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
w	Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
c_0	Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
ℓ_1	Mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
ℓ_p	p. kuvvetten mutlak yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs_0	Sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs	Yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs	Sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
c_0^λ	λ-sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
c^λ	λ-yakınsak dizilerin uzayı
ℓ_∞^λ	λ-sınırlı dizilerin uzayı
cs_0^λ	λ-sıfıra yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
cs^λ	λ-yakınsak seri teşkil eden dizilerin uzayı
bs^λ	λ-sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı
$\mathcal{F}$	Doğal sayılar cümlesinin bütün sonlu alt cümlelerinin ailesi
$(A_n(x))$	x dizisinin A matrisi altındaki dönüşüm dizisi
$\lim\limits_n$	$\lim\limits_{n\to\infty}$
$\sum\limits_k$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}$

1. GİRİŞ

Dizi uzayı çalışmalarında esas mesele yeni bir dizi uzayı tanımlayabilmektir. Bu manada dizi uzayı çalışan araştırmacılar, bir sonsuz üçgensel matrisin standart dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak bir çok yeni dizi uzayı oluşturdular. Bunlardan en iyi bilinenler, Ng ve Lee (1978)'nin Cesáro matrisini kullanarak yaptıkları "Cesáro sequence spaces of non-absolute type" isimli çalışma ve Wang (1978)'ın Nörlund matrisini kullanarak "On Nörlund sequence spaces " ismini verdiği çalışmadır. Daha sonraki yıllarda değişik sonsuz üçgensel matrisler kullanılarak birçok çalışma yapıldı.

Fark dizi uzayı kavramı ilk olarak Kızmaz tarafından tanımlandı. Kızmaz (1981) $X = \ell_\infty, c$ ve c_0 olmak üzere

$$X(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1}) \in X\}$$

dizi uzaylarını elde etti ve bu uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Et (1993) bu Δ-dizi uzaylarını biraz daha genişleterek

$$X(\Delta^2) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^2 x = (\Delta^2 x_k) = (\Delta x_k - \Delta x_{k+1}) \in X\}$$

uzaylarını tanımladı. Et ve Çolak (1995) bu dizi uzaylarını pozitif bir m sayısı için tekrar genelleştirdiler ve $\Delta^0 x = (x_k), \Delta x = (x_k - x_{k+1}), \Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^{m} (-1)^v \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} x_{k+v}$ olmak üzere

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) \in w : \Delta^m x \in X\}$$

dizi uzaylarını elde ettiler. Bu uzayın $m = 1$ hali Kızmaz'ın tanımladığı uzayları, $m = 2$ hali Et'in çalışmalarındaki uzayları özel durum olarak vermektedir. Et ve Esi (2000), sıfırdan farklı kompleks sayıların $v = (v_k)$ dizisi için $m \in \mathbb{N}, \Delta_v^0 x = (v_k x_k), \Delta_v x = (v_k x_k - v_{k+1} x_{k+1}), \Delta_v^m x = (\Delta_v^m x_k) = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} v_{k+i} x_{k+i}$ olmak üzere bu uzayları

$$X(\Delta_v^m) = \{x = (x_k) \in w : \Delta_v^m x \in X\}$$

şeklindeki uzaylara genelleştirdiler.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda, tez çalışmasında

Tanım 2.1. $X \neq \emptyset$ ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \to X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \to X$$

işlemleri verilmek üzere, eğer $\forall x,\ y,\ z \in X$ ve $\alpha,\ \beta \in K$ için;

L1) $x + y = y + x$,

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır,

L4) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ vardır,

L5) $1 \,.\, x = x$,

L6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

L7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

L8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

şartları sağlanıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir (Maddox 1970).

Tanım 2.2. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M \subset X$ olsun. Eğer her $\alpha \in K$ ve $x, y \in M$ için

$$x + y \in M \quad \text{ve} \quad \alpha x \in M$$

oluyorsa M uzayına, X uzayının bir alt vektör uzayı denir. Bu iki şart, $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere $\alpha x + \beta y \in M$ olmasına denktir (Maddox 1970).

Tanım 2.3. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x,\ y \in X$ vektörleri ve her α skaleri için;

N1) $\|x\| \geqslant 0$,

N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

N4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Başar 2011).

Tanım 2.4. $(X,\ \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x=(x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer

1) $\forall\varepsilon>0$ için $\forall\, n>n_0$ iken $\|x_n-x\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisi x' e yakınsaktır denir. $x=(x_n)$ dizisi x' e yakınsak ise $\lim_n x_n=x$ veya $x_n\to x$ şeklinde yazılır (Kreyszig 1978).

2) $\forall\varepsilon>0$ için $\forall m,n>n_0$ iken $\|x_m-x_n\|<\epsilon$ olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $x=(x_n)$ dizisine X uzayında bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5. $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Maddox 1970).

Tanım 2.6. X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Eğer $\forall x_1,x_2\in X$ ve $\alpha_1,\alpha_2\in K$ skalerleri için

$$T(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\alpha_1Tx_1+\alpha_2Tx_2$$

ise $T:X\to Y$ dönüşümü lineerdir denir (Maddox 1970).

Tanım 2.7. $(X,\|\cdot\|_1)$ ve $(Y,\|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T:X\to Y$ lineer bir dönüşümü olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x\in X$ için $\|Tx\|_2=\|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T'ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alırlar ve $X\cong Y$ yazılır (Kantorovich and Akilow 1982).

Şimdi, çalışmamızda temel teşkil eden bazı kavramlarının tanımlarını verelim:

Tanım 2.8. $T=(t_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer $T=(t_{nk})$ sonsuz matrisi

$$t_{nk}=\begin{cases}0, & k>n,\\ t_{nn}\neq 0, & k=n,\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanıyorsa T matrisine üçgensel matris denir (Wilansky 1984).

Tanım 2.9. X bir dizi uzayı ve $A=(a_{nk})$ da reel sayıların bir sonsuz matrisi olsun.

$$X_A=\{x=(x_k)\in w : A(x)\in X\}$$

cümlesine A matrisinin etki alanı (matris bölgesi) denir (Malkowsky and Pawan 1999).

Tanım 2.10. Bir tam normlu lineer uzaya F-uzayı, her $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} p_k : X &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\rightarrow p_k(x) = x_k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan topolojiye sahip X dizi uzayına K-uzayı denir. K-uzayı olan F-uzayı, FK-uzayı olarak adlandırılır. Topolojisi bir normdan elde edile bilen FK-uzayına BK-uzayı denir (Wilansky 1984).

Teorem 2.1. X bir BK-uzayı ve T'de bir üçgensel matris olsun. Bu taktirde, X_T cümlesi her $x \in X_T$ için,

$$\|x\|_T = \|Tx\|$$

normuna göre bir BK-uzayıdır (Wilansky 1984).

Tanım 2.11. A ve B sonsuz matrisler olsun. Eğer AB mevcut ve $AB = I$ olursa A' ya B' nin bir sol tersi ve B' ye de A' nın bir sağ tersi denir. Buna ek olarak, eğer BA' da mevcut ve $AB = BA = I$ olursa B ye A nın bir tersi denir (Boos 2000).

Tanım 2.12. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında $(b_k) \subset X$ dizisi verilsin. Her $x \in X$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek (α_k) skalerler dizisi varsa (b_k) cümlesine X uzayının Schauder bazı denir ve bu durumda $x = \sum_k \alpha_k b_k$ yazılır (Kreyszig 1978).

Teorem 2.2. T bir üçgensel matris ve S matrisi T' nin tersi olsun. Eğer (b_n), X normlu uzayının bir Schauder bazı ise $(S(b_n))$' de X_T' nin bir Schauder bazıdır (Başar 2011).

Tanım 2.13. Kompleks yada reel terimli bütün dizilerin uzayı w ile gösterilsin. w dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre vektör uzayı yapısına sahiptir. w vektör uzayının herhangi bir alt vektör uzayına ise dizi uzayı denir (Maddox 1970).

Çalışma boyunca sıkça kullanacağımız standart dizi uzayları

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0\right\}, \\
c &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_k x_k \text{ mevcut}\right\}, \\
\ell_\infty &= \left\{x = (x_k) \in w : \sup_k |x_k| < \infty\right\}, \\
\ell_p &= \left\{x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \ 1 \leqslant p < \infty\right\}, \\
cs_0 &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\right\}, \\
cs &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ mevcut}\right\}, \\
bs &= \left\{x = (x_k) \in w : \sup_n \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| < \infty\right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.14. X bir dizi uzayı olsun. Bu durumda;

$$
\begin{aligned}
X^\alpha &= \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in \ell_1\}, \\
X^\beta &= \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in cs\}, \\
X^\gamma &= \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in bs\}
\end{aligned}
$$

cümlelerine sırasıyla X uzayının α-, β- ve γ-duali denir. α-dualine Köthe-Toeplitz duali, β-dualine genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali adı verilir. X^α, X^β ve X^γ birer dizi uzayı olup, $X^\alpha \subset X^\beta \subset X^\gamma$ kapsamaları mevcuttur (Garling 1967).

2.1 Matris Dönüşümleri

Bu kısımda; dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri tanımlanarak, sonraki bölümler de kullanılacak olan matris dönüşümleri ile ilgili lemmalar verilecektir.

Tanım 2.15. $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise, $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

X ve Y herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve Y uzayında ise A matrisi, X uzayından Y uzayına tanımlıdır denir ve $A \in (X, Y)$ yazılır. X uzayından Y uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir (Wilansky 1984).

Şimdi dual uzay hesabında ve matris dönüşümlerinde kullanacağımız bazı matris sınıflarının karakterizasyonlarını veren lemmaları ispatsız olarak sunalım. Burada ve çalışmanın diğer bütün kısımlarında λ_{-1} ve x_{-1} gibi negatif indisli her terimin sıfıra eşit olduğu kabul edilecektir.

Lemma 2.1. $A = (a_{nk}) \in (cs_0 : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N,K \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (a_{nk} - a_{n,k+1}) \right| < \infty. \tag{2.1}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.2. $A = (a_{nk}) \in (cs : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N,K \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (a_{nk} - a_{n,k-1}) \right| < \infty \tag{2.2}$$

sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.3. $A = (a_{nk}) \in (bs : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (2.1) ile birlikte $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_k a_{nk} = 0 \tag{2.3}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.4. $A = (a_{nk}) \in (cs_0 : c)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| < \infty, \tag{2.4}$$

olması ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n (a_{nk} - a_{n,k+1}) \tag{2.5}$$

limitinin mevcut olmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.5. $A = (a_{nk}) \in (cs : c)$ olması için gerek ve yeter şart (2.4) şartının sağlanması ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n a_{nk} \tag{2.6}$$

limitinin mevcut olmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.6. $A = (a_{nk}) \in (bs : c)$ olması için gerek ve yeter şart (2.3) ve (2.6) şartlarının sağlanması ve

$$\sum_k |a_{nk} - a_{n,k-1}| \tag{2.7}$$

serisinin yakınsak olmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.7. $A = (a_{nk}) \in (cs_0 : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (2.4) şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.8. $A = (a_{nk}) \in (cs : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k-1}| < \infty \tag{2.8}$$

olmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.9. $A = (a_{nk}) \in (bs : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (2.3) ve (2.4) şarlarının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.10. $A = (a_{nk}) \in (cs_0 : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (2.4) ile birlikte $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n (a_{nk} - a_{n,k+1}) = 0 \tag{2.9}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.11. $A = (a_{nk}) \in (cs : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (2.4) ile birlikte $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n a_{nk} = 0 \tag{2.10}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.12. $A = (a_{nk}) \in (bs : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (2.3) ile birlikte

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0 \tag{2.11}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.13. $A = (a_{nk}) \in (cs_0 : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < p < \infty$ için

$$\sup_k \sum_n \left| \sum_{k \in K} (a_{nk} - a_{n,k+1}) \right|^p < \infty \tag{2.12}$$

olmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.14. $A = (a_{nk}) \in (cs : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < p < \infty$ olmak üzere

$$\sup_k \sum_n \left| \sum_{k \in K} (a_{nk} - a_{n,k-1}) \right|^p < \infty \tag{2.13}$$

şartının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

Lemma 2.15. $A = (a_{nk}) \in (bs : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart (2.3) ve (2.12) şartlarının sağlanmasıdır (Stieglitz and Tietz 1977).

3. FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımladıktan sonra bu uzayların BK-uzayı olduklarını göstereceğiz. Daha sonra $cs_0^\lambda(\Delta)$ ve $cs^\lambda(\Delta)$ uzaylarının Schauder bazlarını hesaplayacağız. Ayrıca, $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ uzayları ile ilgili kapsama bağıntılarını sunacağız ve bu uzayların duallerini vereceğiz.

3.1 $cs_0^\lambda(\Delta)$, $cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ Dizi Uzayları

Fark dizi uzayı kavramı ilk olarak Kızmaz tarafından ¸

Tanım 3.1. Verilen herhangi bir $x \in w$ dizisi için, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olsun. X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere,

$$\Delta X = \{x = (x_k) \in w : \Delta x \in X\}$$

şeklinde tanımlanan dizi uzaylarına Fark Dizi Uzayları denir (Kızmaz 1981).

Mursaleen ve Noman (2010a), $\lambda = (\lambda_k)$ pozitif reel sayıların kesin artan ve ∞' a yakınsayan bir dizisi, yani;

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ..., \text{ ve } \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$$

olmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_{nk} = \begin{cases} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_n}, & 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \tag{3.1}$$

ile tanımlı $\Lambda = (\lambda_{nk})$ üçgensel matrisinin c_0, c ve ℓ_∞ uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak, c_0^λ, c^λ ve ℓ_∞^λ uzaylarını tanımladır. Daha sonra Kaya ve Furkan (2015), bu matrisin $cs,\ cs_0$ ve bs dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak,

$$\begin{aligned} cs^\lambda &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k,\ \ mevcut\right\}, \\ cs_0^\lambda &= \left\{x = (x_k) \in w : \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k = 0\right\}, \\ bs^\lambda &= \left\{x = (x_k) \in w : \sup_m \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) x_k \right| < \infty\right\} \end{aligned}$$

dizi uzaylarını inşa ettiler.

Şimdi, cs_0^λ, cs^λ ve bs^λ dizi uzaylarını ve fark matrisini kullanarak $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ fark dizi uzaylarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{aligned} cs_0^\lambda(\Delta) &= \left\{x=(x_k)\in w : \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(x_k-x_{k-1})=0\right\},\\ cs^\lambda(\Delta) &= \left\{x=(x_k)\in w : \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(x_k-x_{k-1})\ \text{mevcut}\right\},\\ bs^\lambda(\Delta) &= \left\{x=(x_k)\in w : \sup_m\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(x_k-x_{k-1})\right|<\infty\right\}. \end{aligned}$$

(3.1)' de tanımlı $\Lambda=(\lambda_{nk})$ matrisi ile fark matrisini çarparak, $\bar{\Lambda}=(\bar{\lambda}_{nk})$ ile gösterdiğimiz yeni üçgensel matrisi her $n,k\in\mathbb{N}$ için

$$\bar{\lambda}_{nk}=\begin{cases}\frac{(\lambda_k-\lambda_{k-1})-(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}{\lambda_n}, & k<n,\\ \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n}, & k=n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

ile tanımlayalım. Esasında tanımladığımız yeni dizi uzayları, $\bar{\Lambda}=(\bar{\lambda}_{nk})$ üçgensel matrisinin, cs, cs_0 ve bs dizi uzayları üzerindeki etki alanı olarak düşünülebilir. Yani,

$$cs_0^\lambda(\Delta)=(cs_0)_{\bar{\Lambda}},\ \ cs^\lambda(\Delta)=(cs)_{\bar{\Lambda}}\ \text{ ve }\ bs^\lambda(\Delta)=(bs)_{\bar{\Lambda}}$$

dır.

Çalışma boyunca kullanacağımız bir $x=(x_k)\in w$ dizisinin $\bar{\Lambda}$-dönüşümüne karşılık gelen $y(\lambda)=\{y_k(\lambda)\}$ dizisi

$$y_k(\lambda)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\lambda_j-\lambda_{j-1})-(\lambda_{j+1}-\lambda_j)}{\lambda_k}x_j+\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda_k}x_k,\ \ \forall k\in\mathrm{N}, \tag{3.2}$$

eşitliği ile verilir. Aynı zamanda, herhangi bir $x=(x_k)\in w$ dizisinin $\bar{\Lambda}$-dönüşüm dizisini her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$(\bar{\Lambda}x)_n=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(x_k-x_{k-1}) \tag{3.3}$$

olarak yazarız.

Teorem 3.1. $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ uzayları, dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre lineer uzay yapısına sahiptir. Ayrıca, bu uzaylar

$$\|x\|_{cs_0^\lambda(\Delta)}=\|x\|_{cs^\lambda(\Delta)}=\|x\|_{bs^\lambda(\Delta)}=\|\bar{\Lambda}x\|_{bs},$$

yani

$$\|x\|_{bs^{\lambda}(\Delta)} = \|\bar{\Lambda}x\|_{bs} = \sup_{m}\left|\sum_{n=0}^{m}(\bar{\Lambda}x)_n\right|$$

şeklinde tanımlı norm ile birer BK-uzayıdır.

İspat. Öncelikle $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayının lineer uzay yapısına sahip olduğunu gösterelim. Bunun için $x, y \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ ve α, β skaler olmak üzere $\alpha x + \beta y \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ olduğunu göstermeliyiz. $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ cümlesi

$$cs_0^{\lambda}(\Delta) = \{x = (x_k) \in w : \bar{\Lambda}x \in cs_0\}$$

şeklinde tanımlandığından $\bar{\Lambda}x, \bar{\Lambda}y \in cs_0$ olur. O halde her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{m}\bar{\Lambda}_n(\alpha x + \beta y) &= \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\alpha x_k + \beta y_k - \alpha x_{k-1} - \beta y_{k-1}) \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\
&\quad +\beta\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k - \lambda_{k-1})(y_k - y_{k-1}) \\
&= \alpha\sum_{n=0}^{m}\bar{\Lambda}_n(x) + \beta\sum_{n=0}^{m}\bar{\Lambda}_n(y)
\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa $\bar{\Lambda}x, \bar{\Lambda}y \in cs_0$ olduğundan

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}\bar{\Lambda}_n(\alpha x + \beta y) = 0$$

elde edilir. Bu ise $\bar{\Lambda}(\alpha x + \beta y) \in cs_0$, yani $\alpha x + \beta y \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ olması demektir. Dolayısıyla $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayı lineer uzay yapısına sahiptir. Benzer şekilde, $cs^{\lambda}(\Delta)$ cümlesinin de lineer uzay olduğu gösterilebilir.

Şimdi $bs^{\lambda}(\Delta)$ cümlesinin lineer uzay yapısına sahip olduğunu gösterelim. $x, y \in bs^{\lambda}(\Delta)$ ve α, β skaler olsun. O halde $bs^{\lambda}(\Delta)$ cümlesinin tanımından $\bar{\Lambda}x, \bar{\Lambda}y \in bs$ yazabiliriz. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&\sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \bar{\Lambda}_n(\alpha x+\beta y)\right| \\
&= \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\alpha x_k+\beta y_k-\alpha x_{k-1}-\beta y_{k-1})\right| \\
&\leqslant |\alpha| \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(x_k-x_{k-1})\right| \\
&+ |\beta| \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1})(y_k-y_{k-1})\right| \\
&= |\alpha| \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \bar{\Lambda}_n(x)\right| + |\beta| \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \bar{\Lambda}_n(y)\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde $\bar{\Lambda}x, \bar{\Lambda}y \in bs$ olduğundan

$$\sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \bar{\Lambda}_n(\alpha x+\beta y)\right| < \infty$$

elde edilir. Bu yüzden $\bar{\Lambda}(\alpha x+\beta y) \in bs$ olduğu görülür ki bu da $(\alpha x+\beta y) \in bs^{\lambda}(\Delta)$ olması demektir. Dolayısıyla $bs^{\lambda}(\Delta)$ cümlesi lineer uzay yapısına sahiptir. Ayrıca, bu uzayların BK-uzayı olmaları da Teorem 2.1' in bir sonucu olarak söylenebilir.

Not: X herhangi bir dizi uzayı ve $x = (x_k) \in w$ için $|x| = (|x_k|)$ olsun. Eğer X dizi uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\|$ normuna göre bu uzaydaki bir $x = (x_k)$ dizisi için $\|x\| \neq \||x|\|$ oluyorsa X dizi uzayına mutlak değer özelliğini sağlamıyor denir. Literatür de genellikle mutlak değer özelliğini sağlamayan dizi uzayları "Mutlak Olmayan Tipten ..." şeklinde adlandırılmıştır.

Şimdi $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayının mutlak değer özelliğini sağlamadığını gösterelim. Bunun için $\lambda = (\lambda_k)$ ve $x = (x_k)$ dizilerini sırasıyla $\lambda_k = k+1$ ve $x = (1, -2, 0, 0, 0, \dots)$ olacak şekilde seçelim. Bu durumda $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ fark dizi uzayı,

$$cs_0^{\lambda}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(x_k - x_{k-1}) = 0 \right\}$$

olur. O halde $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ olur. Teorem 3.1' den $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayı üzerinde

$$\|x\|_{bs^{\lambda}(\Delta)} = \|\bar{\Lambda}x\|_{bs} = \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} (\bar{\Lambda}x)_n\right|$$

normunun tanımlanabileceğini biliyoruz. Bu durumda

$$\|\bar{\Lambda}x\|_{bs} = \sup_m \left|\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(x_k - x_{k-1})\right| = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $|x| = (|x_k|) = (1, 2, 0, 0, 0, \dots)$ dizisinin normu hesaplandığında;

$$\begin{aligned} \|\bar{\Lambda}|x|\|_{bs} &= \sup_m \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k-1}) \right| \\ &= \sup_m \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n+1} x_n \right| = 2 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $x = (1, -2, 0, 0, 0, \dots)$ dizisi için $\|x\|_{bs^\lambda(\Delta)} \neq \||x|\|_{bs^\lambda(\Delta)}$ olduğu görülür. Bu ise $cs_0^\lambda(\Delta)$ uzayının mutlak olmayan tipten olduğunu gösterir. $cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ uzaylarının da mutlak değer özelliğini sağlamadığı benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 3.2. Mutlak olmayan tipten $cs_0^\lambda(\Delta), cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ dizi uzayları sırasıyla cs_0, cs ve bs dizi uzaylarına izometrik olarak izomorftur, yani $cs_0^\lambda(\Delta) \cong cs_0, cs^\lambda(\Delta) \cong cs$ ve $bs^\lambda(\Delta) \cong bs$ dir.

İspat. İspat için, $X = \{cs,\ cs_0,\ bs\}$ ve $X^\lambda(\Delta) = \{cs_0^\lambda(\Delta), cs^\lambda(\Delta), bs^\lambda(\Delta)\}$ olsun. Teoremi ispatlamak için $X^\lambda(\Delta)$ ve X dizi uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir dönüşümün varlığını göstermeliyiz. (3.2) eşitliği ile T dönüşümünü

$$\begin{aligned} T\ :\ X^\lambda(\Delta) &\rightarrow X \\ x &\mapsto T(x) = \bar{\Lambda}(x) = y \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda; $x = (x_j),\ u = (u_j) \in X^\lambda(\Delta)$ ve α, β skalerleri için

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta u) &= \bar{\Lambda}(\alpha x + \beta u) \\ &= \alpha\bar{\Lambda}(x) + \beta\bar{\Lambda}(u) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(u) \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

Şimdi, T lineer dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Bunun için, $Tx = \theta$ olduğunda $x = \theta$ olduğunu göstermek yeterlidir. O halde $Tx = \theta$ olduğunu kabul edelim.

(3.2)' den

$$\begin{aligned} k &= 0 \text{ için } x_0 = 0, \\ k &= 1 \text{ için } x_1 = 0, \\ &\vdots \\ k &= n \text{ için } x_n = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $x = \theta$ olması demektir.

Şimdi, T dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

Bunun için, herbir $y = (y_k) \in X$ için enaz bir $x \in X^{\lambda}$ elemanının var olduğunu göstereceğiz. $y = (y_k) \in X$ alalım ve $x = (x_k(\lambda))$ dizisini,

$$x_k(\lambda) := \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=j-1}^{j} (-1)^{j-i} \frac{\lambda_i}{\lambda_j - \lambda_{j-1}} y_i; \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{3.4}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda; her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k(\lambda) - x_{k-1}(\lambda) = \sum_{i=k-1}^{k} (-1)^{k-i} \frac{\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_i$$

eşitliğini elde ederiz. Bu taktirde, (3.3) eşitliğini kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (\bar{\Lambda}x)_n &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k-1}^{k} (-1)^{k-i} \lambda_i y_i \\ &= y_n \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\bar{\Lambda}x = y$ olduğunu gösterir. O halde $y = (y_k) \in X$ olduğundan $\bar{\Lambda}x \in X$ sonucuna ulaşırız. Böylece $x \in X^{\lambda}(\Delta)$ ve $Tx = y$ elde edilir. Dolayısıyla T dönüşümü örtendir.

Son olarak, her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_{bs} = \|y(\lambda)\|_{bs} = \|\bar{\Lambda}x\|_{bs} = \|x\|_{bs^{\lambda}(\Delta)}$$

yazılabilir. Bu ise T' nin normu koruduğunu gösterir. Bu durumda, T lineer, birebir, örten ve normu koruyan bir dönüşümdür. Dolayısıyla teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2.2' ye göre, Teorem 3.2' nin ispatında verilen izomorfizmi kullanarak, cs_0 ve cs uzaylarının Schauder bazlarının ters görüntülerinin, sırasıyla $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ ve $cs^{\lambda}(\Delta)$ uzaylarının Schauder bazları olduğunu söyleyebiliriz. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k(\lambda) = (\bar{\Lambda}x)_k$ olsun. Her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $b^{(k)}(\lambda) = \{b_n^{(k)}(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini

$$b_n^{(k)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & n < k, \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}}, & n = k, \\ \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}, & n > k, \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda, $\{b^{(k)}(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi, $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ ve $cs^{\lambda}(\Delta)$ uzayları için bir Schauder bazıdır ve her

$x \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ veya $cs^{\lambda}(\Delta)$ dizisi

$$x = \sum_k \alpha_k(\lambda) b^{(k)}(\lambda);$$

şeklinde bir tek gösterime sahiptir.

3.2 Kapsama Bağıntıları

Bu kısımda, $cs_0^{\lambda}(\Delta), cs^{\lambda}(\Delta)$ ve $bs^{\lambda}(\Delta)$ uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntılarını vereceğiz.

Teorem 3.3. $cs_0^{\lambda}(\Delta) \subset cs^{\lambda}(\Delta) \subset bs^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması kesin olarak sağlanır.

İspat. Öncelikle $cs_0^{\lambda}(\Delta) \subset cs^{\lambda}(\Delta) \subset bs^{\lambda}(\Delta)$ kapsamasının geçerli olduğu aşikardır. Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{\frac{1}{(i+2)(i+3)}\lambda_i - \frac{1}{(i+1)(i+2)}\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}, \quad (\forall k \in \mathrm{N})$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (\bar{\Lambda}x)_n &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{(k+2)(k+3)}\lambda_k - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\lambda_{k-1} \right) \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{m} (\bar{\Lambda}x)_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+3}$$

olur. Bu son eşitlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\bar{\Lambda}x)_n = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Bu ise $\bar{\Lambda}x \in cs \backslash cs_0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla x dizisi $cs^{\lambda}(\Delta)$ uzayındadır, fakat $cs_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayında değildir yani, $cs_0^{\lambda}(\Delta) \subset cs^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması kesindir.

Şimdi $cs^{\lambda}(\Delta) \subset bs^{\lambda}(\Delta)$ kapsamasının kesin olduğunu göstermek için $y = (y_k)$ dizisini

$$y_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i \left(\frac{\lambda_i + \lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\right), \quad (\forall\, k \in \mathrm{N})$$

eşitliği ile tanımlayalım. O halde her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}(\bar{\Lambda}y)_n &= \sum_{n=0}^{m}\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\lambda_k + \lambda_{k-1}) \\ &= \sum_{n=0}^{m}(-1)^n\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\bar{\Lambda}y \in bs \backslash cs$ olması demektir. Dolayısıyla y dizisi $bs^{\lambda}(\Delta)$ uzayında olup $cs^{\lambda}(\Delta)$ uzayında değildir. Bu ise $cs^{\lambda}(\Delta) \subset bs^{\lambda}(\Delta)$ kapsamasının kesin olduğunu gösterir.

Lemma 3.1. $c_0 \subset c_0^{\lambda}$ kapsaması kesin olarak sağlanır (Mursaleen and Noman 2010a).

Lemma 3.2. $c_0^{\lambda}(\Delta) \subset c^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması kesi olarak sağlanır (Mursaleen and Noman 2010b).

Teorem 3.4. $cs^{\lambda}(\Delta) \subset c_0^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması kesin olarak geçerlidir.

İspat. $x \in cs^{\lambda}(\Delta)$ iken $\bar{\Lambda}x \in cs$ ve dolayısıyla $\bar{\Lambda}x \in c_0$ olduğu için $cs^{\lambda}(\Delta) \subset c_0^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması geçerlidir. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için

$$x_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i+1}; \quad (k \in \mathrm{N})$$

eşitliği ile tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Bu durumda,

$$\Delta x = (x_k - x_{k-1}) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \in c_0$$

ve böylece $\Delta x \in c_0^{\lambda}$ olur. Bu ise $x \in c_0^{\lambda}(\Delta)$ olması demektir.

Diğer taraftan her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\begin{aligned}
(\bar{\Lambda}x)_n &= \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{k+1} \\
&\geqslant \frac{1}{\lambda_n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(\lambda_k-\lambda_{k-1}) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\bar{\Lambda}x \notin cs$ ve dolayısıyla $x \notin cs^{\lambda}(\Delta)$ olması demektir. Böylece x, $c_0^{\lambda}(\Delta)$ uzayına ait olduğu halde $cs^{\lambda}(\Delta)$ uzayında olmadığından $cs^{\lambda}(\Delta) \subset c_0^{\lambda}(\Delta)$ kapsaması kesindir.

3.3 Dual Uzaylar

Bu kısımda, $cs_0^{\lambda}(\Delta), cs^{\lambda}(\Delta)$ ve $bs^{\lambda}(\Delta)$ dizi uzaylarının α-, β- ve γ-duallerini belirleyen teoremleri ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.5. Her $n, k \in \mathrm{N}$ için $B^{\lambda} = (b_{nk}^{\lambda})$ matrisi

$$b_{nk}^{\lambda} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}} - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right)a_n, & k < n, \\ \frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n, & k = n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda

$$f_1^{\lambda} = \left\{a = (a_n) \in w : \sup_{N,K\in\mathcal{F}}\left|\sum_{n\in N}\sum_{k\in K}(b_{nk}^{\lambda} - b_{n,k+1}^{\lambda})\right| < \infty\right\} \tag{3.5}$$

ve

$$f_2^{\lambda} = \left\{a = (a_n) \in w : \sup_{N,K\in\mathcal{F}}\left|\sum_{n\in N}\sum_{k\in K}(b_{nk}^{\lambda} - b_{n,k-1}^{\lambda})\right| < \infty\right\}; \tag{3.6}$$

olmak üzere $\{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\alpha} = \{bs^{\lambda}(\Delta)\}^{\alpha} = f_1^{\lambda}$ ve $\{cs^{\lambda}(\Delta)\}^{\alpha} = f_2^{\lambda}$ dır.

İspat. $a = (a_n) \in w$ olsun. Bu durumda, (3.4) bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned} a_n x_n &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k-1}^{k} (-1)^{k-j} \frac{\lambda_j}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} a_n y_j \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_k - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} y_{k-1} \right) a_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) y_k a_n + \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} y_n a_n \\ &= (B^\lambda y)_n \end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece (3.7) eşitliğinden $x = (x_k) \in cs_0^\lambda(\Delta)$ iken $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in cs_0$ iken $B^\lambda y \in \ell_1$ olmasıdır. Yani, $a = (a_n) \in \{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $B^\lambda \in (cs_0 : \ell_1)$ olmasıdır. Dolayısyla, Lemma 2.1' de A matrisi yerine B^λ matrisini alırsak, $a = (a_n) \in \{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın

$$\sup_{N,K \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (b_{nk}^\lambda - b_{n,k+1}^\lambda) \right| < \infty \tag{3.8}$$

olduğu görülür.

Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_k b_{nk}^\lambda = 0$$

olduğundan Lemma 2.3' ün (2.3) şartı sağlanır. Bu da bizi $\{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\alpha = \{bs^\lambda(\Delta)\}^\alpha = f_1^\lambda$ sonucuna ulaştırır.

Benzer şekilde, (3.7) eşitliği kullanılarak $a = (a_n) \in \{cs^\lambda(\Delta)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şartın $B^\lambda \in (cs : \ell_1)$ olması gerektiği sonucu çıkar. Dolayısyla, Lemma 2.2' de A matrisi yerine B^λ matrisini alırsak, $a = (a_n) \in \{cs^\lambda(\Delta)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N,K \in \mathcal{F}} \left| \sum_{n \in N} \sum_{k \in K} (b_{nk}^\lambda - b_{n,k-1}^\lambda) \right| < \infty \tag{3.9}$$

olmasıdır. Böylece $\{cs^\lambda(\Delta)\}^\alpha = f_2^\lambda$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{a}_k(n) = \lambda_k \left[\frac{a_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} + \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) \sum_{j=k+1}^{n} a_j \right]; \quad (k < n)$$

olmak üzere f_3^λ, f_4^λ, f_5^λ, f_6^λ, f_7^λ ve f_8^λ kümelerini

$$\begin{aligned}
f_3^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |\bar{a}_k(n)-\bar{a}_{k+1}(n)| < \infty\right\},\\
f_4^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \sup_k \left|\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}a_k\right| < \infty\right\},\\
f_5^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \lim_{n\to\infty}(\bar{a}_k(n)-\bar{a}_{k+1}(n)) \text{ mevcut } (k\in \mathrm{N})\right\},\\
f_6^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \sum_{j=k}^{\infty} a_j \text{ mevcut } (k\in \mathrm{N})\right\},\\
f_7^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{a}_k(n)-\bar{a}_{k+1}(n)| \text{ yakınsak}\right\},\\
f_8^\lambda &= \left\{a=(a_k)\in w : \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}a_k\right) \text{ mevcut}\right\},
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım. Bu taktirde, $\{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_3^\lambda \cap f_4^\lambda \cap f_5^\lambda$, $\{cs^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_3^\lambda \cap f_4^\lambda \cap f_6^\lambda$ ve $\{bs^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_6^\lambda \cap f_7^\lambda \cap f_8^\lambda$ olur.

İspat. Herhangi bir $a=(a_k)\in w$ dizisini alalım ve $T^\lambda=(t_{nk}^\lambda)$ matrisi her $n,\ k\in \mathbb{N}$ için

$$t_{nk}^\lambda = \begin{cases} \bar{a}_k(n) & k<n,\\ \frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n & k=n,\\ 0 & k>n \end{cases}$$

şeklinde olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k x_k &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j-1}^{j}(-1)^{j-i}\frac{\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_{j-1}}y_i\right]a_k\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left[\frac{a_k}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}+\left(\frac{1}{\lambda_k-\lambda_{k-1}}-\frac{1}{\lambda_{k+1}-\lambda_k}\right)\sum_{j=k+1}^{n}a_j\right]y_k\\
&\quad +\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n y_n\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\bar{a}_k(n)y_k+\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\lambda_{n-1}}a_n y_n\\
&= (T^\lambda y)_n;\ \ (n\in \mathrm{N}), \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

eşitliğini düşünelim. Böylece (3.10) eşitliğinden; $x=(x_k)\in cs_0^\lambda(\Delta)$ iken $ax=(a_n x_n)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in cs_0$ iken $T^\lambda y\in c$ olmasıdır. Yani, $a=(a_n)\in\{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $T^\lambda\in(cs_0:c)$

olmasıdır. Dolayısyla, Lemma 2.4' den

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |\bar{a}_k(n) - \bar{a}_{k+1}(n)| < \infty \tag{3.11}$$

$$\sup_n \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n \right| < \infty \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\bar{a}_k(n) - \bar{a}_{k+1}(n)) \ \ (\text{her } k \in \mathrm{N} \text{ için mevcut}) \tag{3.13}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_3^\lambda \cap f_4^\lambda \cap f_5^\lambda$ dır.

Benzer şekilde, (3.10) eşitliğinden; $a = (a_n) \in \{cs^\lambda(\Delta)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $T^\lambda \in (cs : c)$ olmasıdır. Bu durmda, Lemma 2.5' in (2.4) şartından (3.11) ve (3.12) elde edilir. Ayrıca, (2.6) şartından

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_j \ \ (\text{her } k \in \mathrm{N} \text{ için mevcut}) \tag{3.14}$$

olur. Bu ise $\{cs^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_3^\lambda \cap f_4^\lambda \cap f_6^\lambda$ olduğunu gösterir.

Son olarak, (3.10) eşitliğini kullanarak $a = (a_n) \in \{bs^\lambda(\Delta)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $T^\lambda \in (bs : c)$ olması gerektiği sonucunu çıkarırız. Bu taktirde, her $n \in \mathrm{N}$ için

$$\lim_{k\to\infty} t_{nk}^\lambda = 0$$

olduğundan Lemma 2.6' nın (2.3) şartı sağlanır. Ayrıca, (2.6) şartından (3.14)' ün geçerli olduğu görülür ve (2.7) şartından da

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{a}_k(n) - \bar{a}_{k+1}(n)| \ \ \text{yakınsak} \tag{3.15}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} a_n \right) \ \ \text{mevcut} \tag{3.16}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu da bizi $\{bs^\lambda(\Delta)\}^\beta = f_6^\lambda \cap f_7^\lambda \cap f_8^\lambda$ sonucuna ulaştırır.

Teorem 3.7. f_9^λ kümesini

$$f_9^\lambda = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_n \sum_{k=0}^{n-2} |\bar{a}_k(n) - \bar{a}_{k+1}(n)| < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\gamma = \{bs^\lambda(\Delta)\}^\gamma = f_3^\lambda \cap f_4^\lambda$ ve $\{cs^\lambda(\Delta)\}^\gamma = f_4^\lambda \cap f_9^\lambda$ olur.

İspat. Teorem 3.6' nın ispatına benzer olarak yapılabilir.

4. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, $cs_0^\lambda(\Delta),\ cs^\lambda(\Delta)$ ve $bs^\lambda(\Delta)$ dizi uzaylarından bilinen bazı dizi uzayları içerisine matris sınıflarının karakterizasyonunu yapacağız. Notasyonda kısalık açısından $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere

$$\bar{a}_{nk}(m) = \lambda_k \left[\frac{a_{nk}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} + \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) \sum_{j=k+1}^{m} a_{nj} \right];\ \ (k < m)$$

ve her $m, n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{a}_{nk} = \lambda_k \left[\frac{a_{nk}}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} + \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} - \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right]$$

yazalım.

Teorem 4.1. (i) $A = (a_{nk}) \in (cs_0^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_m \sum_{k=0}^{m-2} |\bar{a}_{nk}(m) - \bar{a}_{n,k+1}(m)| < \infty, \tag{4.1}$$

$$\sup_m \left| \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} a_{nm} \right| < \infty, \tag{4.2}$$

$$\lim_{m\to\infty} (\bar{a}_{nk}(m) - \bar{a}_{n,k+1}(m)) \text{ mevcut } (n,\ k \in \mathbb{N}) \tag{4.3}$$

ve

$$\sup_n \sum_k |\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}| < \infty \tag{4.4}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (cs^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2) ve (4.4) ile birlikte

$$\sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} \text{ mevcut } (n,\ k \in \mathbb{N}) \tag{4.5}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (bs^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart (4.4) ve (4.5) ile birlikte

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{a}_{nk}(m) - \bar{a}_{n,k+1}(m)| \text{ yakınsak}, \tag{4.6}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-1}} a_{nk} \text{ mevcut } (n \in \mathbb{N}), \tag{4.7}$$

$$\lim_{k\to\infty} \bar{a}_{nk} = 0 \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \tag{4.8}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $x = (x_k) \in cs_0^\lambda(\Delta)$ alalım. Bu durumda $A = (a_{nk}) \in (cs_0^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olduğu gösterilmelidir. O halde kabulden dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\beta$ olup, Ax mevcuttur. Şimdi, $\sum_k a_{nk}x_k$ serisinin m· kısmi toplamından elde edilen

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{a}_{nk}(m)y_k + \frac{\lambda_m}{\lambda_m - \lambda_{m-1}} a_{nm}y_m; \ \ (n, \ m \in \mathrm{N}), \tag{4.9}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu durumda $y = (y_k) \in cs_0 \subset c_0$ ve (4.2) şartı sağlandığından (4.9) eşitliğinde $m \to \infty$ için limit alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k = \sum_k \bar{a}_{nk}y_k = \bar{A}_n(y) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.4) ve Lemma 2.7' den dolayı $\bar{A} = (\bar{a}_{nk}) \in (cs_0 : \ell_\infty)$ olduğu dikkate alınarak (4.10)' da ℓ_∞ normu alınırsa

$$\|Ax\|_{\ell_\infty} = \|\bar{A}y\|_{\ell_\infty} < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $A = (a_{nk}) \in (cs_0^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olur.

Tersine, $A = (a_{nk}) \in (cs_0^\lambda(\Delta) : \ell_\infty)$ olsun. Bu taktirde her $x \in cs_0^\lambda(\Delta)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_k a_{nk}x_k$ yakınsak ve $(A_n(x)) \in \ell_\infty$ olur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^\lambda(\Delta)\}^\beta$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. Ayrıca, hipotezden dolayı $Ax \in \ell_\infty$ olduğu için (4.10) ile $\bar{A}y \in \ell_\infty$ olur. Bu ise $y \in cs_0$ için $\bar{A} \in (cs_0 : \ell_\infty)$ olması demektir. Dolayısıyla, Lemma 2.7' den (4.4) şartının sağlandığı görülür.

(ii) ve (iii)' ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2. (i) $A = (a_{nk}) \in (cs_0^\lambda(\Delta) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}) \ \text{mevcut} \ (k \in \mathrm{N}) \tag{4.11}$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (cs^\lambda(\Delta) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2), (4.4) ve (4.5) ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{nk} \ \text{mevcut} \ (k \in \mathrm{N}) \tag{4.12}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (bs^{\lambda}(\Delta) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.12) ile birlikte

$$\sum_k |\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k-1}| \text{ yakınsak} \tag{4.13}$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat. (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) ve (4.11) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ alalım. O halde, (4.1), (4.2) ve (4.3)' den her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\beta}$ olup, Ax mevcuttur. Ayrıca, (4.10) eşitliğinde, (4.4) ve (4.11) ifadeleri dikkate alınırsa $Ax \in c$ olduğu görülür.

Tersine, $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : c)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\beta}$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. Ayrıca, A matrisi her $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ dizisini yakınsak bir diziye dönüştüreceğinden, (4.10) eşitliği ve Lemma 2.4 ile (4.4) ve (4.11) şartlarının sağlandığı görülür.

(ii) ve (iii)' ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.1. (i) $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}) = 0 \;\; (k \in \mathrm{N}) \tag{4.14}$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (cs^{\lambda}(\Delta) : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2), (4.4) ve (4.5) ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_{nk} = 0 \;\; (k \in \mathrm{N}) \tag{4.15}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (bs^{\lambda}(\Delta) : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6), (4.7) ve (4.8) ile birlikte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k |\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}| = 0 \tag{4.16}$$

şartının sağlanmasıdır.

Teorem 4.3. (i) $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2) ve (4.3) ile birlikte

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}} \left| \sum_{n\in N} \sum_{k\in K} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}) \right| < \infty \tag{4.17}$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (cs^{\lambda}(\Delta) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2) ve (4.5) ile birlikte

$$\sup_{N,K\in\mathcal{F}} \left| \sum_{n\in N} \sum_{k\in K} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k-1}) \right| < \infty \tag{4.18}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (bs^{\lambda}(\Delta) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.17) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.17) şartları sağlansın ve $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ olsun. O halde, (4.1), (4.2) ve (4.3)' den her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\beta}$ olup, Ax mevcuttur. Ayrıca, (4.10) eşitliğinde, (4.17) ifadesi dikkate alınırsa Lemma 2.1' den $y = (y_k) \in cs_0$ için $\bar{A}y \in \ell_1$ olduğu görülür. Bu ise $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ için $Ax \in \ell_1$, yani, $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : \ell_1)$ olması demektir.

Tersine, $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : \ell_1)$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\beta}$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. Ayrıca, $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ için $Ax \in \ell_1$ olduğundan, (4.10) eşitliği ve Lemma 2.1 ile (4.17) şartı sağlanır.

(ii) ve (iii)' ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.4. (i) $A = (a_{nk}) \in (cs_0^{\lambda}(\Delta) : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2) ve (4.3) ile birlikte

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{n} \left| \sum_{k\in K} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k+1}) \right|^p < \infty \tag{4.19}$$

şartının sağlanmasıdır.

(ii) $A = (a_{nk}) \in (cs^{\lambda}(\Delta) : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1), (4.2) ve (4.5) ile birlikte

$$\sup_{K\in\mathcal{F}} \sum_{n} \left| \sum_{k\in K} (\bar{a}_{nk} - \bar{a}_{n,k-1}) \right|^p < \infty \tag{4.20}$$

şartının sağlanmasıdır.

(iii) $A = (a_{nk}) \in (bs^{\lambda}(\Delta) : \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) ve (4.19) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.19) şartları sağlansın ve $x = (x_k) \in cs_0^{\lambda}(\Delta)$ olsun. O halde, (4.1), (4.2) ve (4.3)' den her $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk}) \in \{cs_0^{\lambda}(\Delta)\}^{\beta}$ olup, Ax mevcuttur.

Ayrıca, (4.10) eşitliği göz önüne alınırsa (4.19) ve Lemma 2.13' den $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y_k}) \in \boldsymbol{cs_0}$ için $\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\ell_p}$ olduğu görülür. Bu ise $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_k}) \in \boldsymbol{cs_0^\lambda}(\boldsymbol{\Delta})$ için $\boldsymbol{Ax} \in \boldsymbol{\ell_p}$, yani, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{nk}}) \in (\boldsymbol{cs_0^\lambda}(\boldsymbol{\Delta}) : \boldsymbol{\ell_p})$ olması demektir.

Tersine, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{nk}}) \in (\boldsymbol{cs_0^\lambda}(\boldsymbol{\Delta}) : \boldsymbol{\ell_p})$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde her $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ için $(\boldsymbol{a_{nk}}) \in \{\boldsymbol{cs_0^\lambda}(\boldsymbol{\Delta})\}^{\beta}$ olacağından (4.1), (4.2) ve (4.3) şartları sağlanır. Ayrıca, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x_k}) \in \boldsymbol{cs_0^\lambda}(\boldsymbol{\Delta})$ için $\boldsymbol{Ax} \in \boldsymbol{\ell_p}$ olduğundan, (4.10) eşitliği ve Lemma 2.13 ile (4.19) şartı sağlanır.

$(\boldsymbol{ii})$ ve $(\boldsymbol{iii})$' ün ispatı benzer şekilde yapılabilir.

KAYNAKÇA

Basar, F., 2011. Summability Theory and Its Applications. Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, ˙Istanbul.

Boos, J., 2000. Classical and Modern Method in Summability. Oxford University Press.

Et, M., 1993. On Some Difference Sequence Spaces, Turkish Journal of Mathematics, 17, 18–24.

Et, M. and Çolak, R., 1995. On Some Generalized Difference Sequence Spaces, Soochow Journal of Mathematics, 21, 377–386.

Et, M. and Esi, A., 2000. On Köthe-Toeplitz Duals of Generalized Difference Sequence Spaces, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 23, 25-32.

Garling, D.J.H., 1967. The β− and γ− Duality of Sequence Spaces. Proc. Camb. Phill. Soc., 63, 963–981.

Kantorovich, L.V. and Akilov, G.P., 1982. Functional Analysis. Pergamon Press, Oxford.

Kaya, M. and Furkan, H., 2015. Some Topological and Geometric Properties of Some New Spaces of λ-Convergent and Bounded Series. Journal of Function Spaces, 2015, 10 p.

Kızmaz, H., 1981. On Certain Sequence Spaces. Canadian Mathematical Bulletin, 24 (1981), 169–176.

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York.

Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 246 p, London.

Malkowsky, E. and Pawan, K.J., 1999. Sequence Spaces and Applications. Narosa Publishing House, New Delhi, India.

Mursaleen, M. and Noman, A.K., 2010. On the Spaces of λ-Convergent and Bounded Sequences. Thai Journal of Mathematics, 8 (2), 311–329.

Mursaleen, M. and Noman, A.K., 2010. On some new difference sequence spaces of non-absolute type. Mathematical and Computer Modelling 52, 603–617.

Ng, P.N., Lee, P.Y., (1978). Cesàro sequence spaces of non-absolute type. Commentationes Mathematicae, Prace Matematyczne, 20 (2), 429–433.

Stieglitz, M. and Tietz, H., 1977. Matrix transformationen von Folgenräumen Eine Ergebnisübersict. Math. Z., 154, 1–16.

Wang, C.S., (1978). On Nörlund sequence spaces. Tamkang Journal of Mathematics, 9 (2), 269–274.

Wilansky, A., 1984. Summability through Functional Analysis. Mathematics Studies, Amsterdam, North-Holland.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Yasin ÇINAR
Doğum Yeri	: Ağrı
Doğum Tarihi	: 22.01.1970
Uyruğu	: TC
Adres	: Yavuz Mah. Bülbül Cad. Bedran Apt. Kat/2 No:6 AĞRI
Tel	: 0 542 237 83 01-0 536 295 02 46
E-mail	: yasincinar438@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lise	Ağrı İmam Hatip Lisesi	1988
Lisans	Anadolu Üniversitesi	2014

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca