T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KEYFİ BİR *R* HALKASI ÜZERİNDE TANIMLI 3-BOYUTLU ROTRİSLER KÜMESİNİN CEBİRSEL YAPISI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETÜL COŞGUN

TEMMUZ 2018
MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

Betül COŞGUN tarafından hazırlanan **KEYFİ BİR R HALKASI ÜZERİNDE TANIMLI 3-BOYUTLU ROTRİSLER KÜMESİNİN CEBİRSEL YAPISI ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 13/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Doç. Dr. Mustafa AŞÇI **(Başkan)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Pamukkale Üniversitesi, DENİZLİ

Doç. Dr. Ummahan ACAR **(Danışman)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Bekir TANAY **(Üye)** İmza:

Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU İmza:

Matematik Bölüm Başkanı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Ummahan ACAR İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 13/07/2018

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini, akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Betül COŞGUN

13/07/2018

C. Betül

ÖZET

KEYFİ BİR *R* HALKASI ÜZERİNDE TANIMLI 3-BOYUTLU ROTRİSLER KÜMESİNİN CEBİRSEL YAPISI ÜZERİNE

Betül COŞGUN

Yüksek Lisans Tezi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ummahan ACAR
Temmuz 2018, 60 sayfa

Bu çalışmada, herhangi bir R halkası üzerinde 3-boyutlu rotris kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca R halkası üzerindeki 3-boyutlu rotrisler kümesi $\mathcal{R}_3(R)$ olmak üzere $\mathcal{R}_3(R)$ kümesinin cebirsel yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rotris, Rotris Halka, Rotris Halkasının İdealleri.

ABSTRACT

ON THE ALGEBRAIC STRUCTURE OF THE 3-DIMENSIONAL RHOTRICES SET DEFINED ON AN ARBITRARY RING *R*

Betül COŞGUN

Master of Science (M.Sc.)

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ummahan ACAR

June 2018, 60 pages

In this study, 3-dimensional rhotrix concept is defined on any R ring. In addition, the algebraic structure of the set $\mathcal{R}_3(R)$ is examined, with the set $\mathcal{R}_3(R)$ 3-dimensional rhotrix on the R ring.

Keywords: Rhotrix, Rhotrix Rings, Ideals of Rhotrix Ring.

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasında engin bilgi birikiminden yararlandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve çalışmalarım boyunca vermiş olduğu destek ve yardımlardan ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı çok saygıdeğer hocam, danışmanım Doç. Dr. Ummahan ACAR' a minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Birlikte çalışmaktan zevk aldığım, her konuda desteklerini esirgemeyen ve bu çalışmaya katkılarından dolayı Emre ÇİFTLİKLİ'ye, Emel KARACA'ya ve A.Beray MATBAN'a, ayrıca matematik bölümündeki değerli hocalarıma ve araştırma görevlilerine,

Bütün hayatım boyunca benden maddi manevi desteklerini esirgemeyen, ideallerimi gerçekleştirme yolunda her daim benimle olan ve en önemlisi bu günlere gelmemi sağlayan aileme ve ayrıca çalışmam boyunca destekleriyle yanımda olan tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, BAP-17-223 numaralı Bilimsel Araştırma Projesiyle desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Ç$ek(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
Gö$r(f)$	f fonksiyonunun görüntü kümesi
$I \lhd R$	I R nin ideali
$\mathcal{R}_3(R)$	R halkası üzerinde 3-boyutlu rotrisler halkası
1_R	R halkasının birimi
$0_{\mathcal{R}_3(R)}$	$\mathcal{R}_3(R)$ halkasının sıfırı
$1_{\mathcal{R}_3(R)}$	$\mathcal{R}_3(R)$ halkasının birimi

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Atanassov ve Shannon (1998) "Matrix-Tertions and Matrix-Noitrets: Exercise for Mathematical Enrichment" adlı çalışmasında ilk kez noitret ve tertion kavramlarını matematiğe kazandırmıştır. Bu çalışmadan yola çıkarak Ajibade (2003) ”The Concept of Rhotrix in Mathematical Enrichment" adlı çalışmasında rotris tanımını vermiştir. Bu tanıma göre 3-boyutlu reel bileşenli bir R rotrisi a, b, c, d, e reel sayılar olmak üzere

$$R = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

şeklindedir. Yukarıdaki R rotrisinde c bileşeni rotrisin kalbidir ve $c = h(R)$ ile gösterilir. Aynı çalışmada aşağıdaki gibi tanımlanan toplama işlemine göre rotrisler kümesinin grup olduğu gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} R+Q &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & h(R) & d \\ & e & \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & h(Q) & z \\ & t & \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a+x & \\ b+y & h(R)+h(Q) & d+z \\ & e+t & \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

Ayrıca R ve Q gibi iki rotrisin çarpımı da

$$
\begin{aligned}
R \circ Q &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & h(R) & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \circ \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & h(Q) & z \\ & t & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & ah(Q)+xh(R) & \\ bh(Q)+yh(R) & h(R)h(Q) & dh(Q)+zh(R) \\ & eh(Q)+th(R) & \end{array} \right\rangle
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu çalışma doğrultusunda Mohammed(2009) "A Remark on the Classification of Rhotrices as Abstract Structures" adlı çalışmasında da gerçel(reel) sayılar ve tam sayılar kümesi üzerinde rotrislerin halka, tamlık bölgesi, temel ideal bölgesi olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalar dışında Ajibade'nin tanımlamış olduğu çarpma işleminden farklı olarak satır-sutün çarpması olarak adlandırılan

$$
\begin{aligned}
R \bullet Q &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & h(R) & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \bullet \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & h(Q) & z \\ & t & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & ax+dy & \\ bx+ey & h(R).h(Q) & az+dt \\ & bz+et & \end{array} \right\rangle
\end{aligned}
$$

"$\bullet$" çarpma işlemi tanımlanmıştır. (Sani , 2004)

Ayrıca Aminu (2010) "The Equation $R_n b$ over Rhotrices" adlı çalışmada satır-sütun çarpmasını kullanarak rotris kümesinin vektör uzayı olduğunu göstermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir.

Bu çalışmalar ışığında bizde tez çalışmamızda; bileşenleri keyfi bir R halkasından olan 3-boyutlu rotrislerin cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tez çalışmamızın birinci bölümünde grup,halka ve cisim tanımları ve bazı özellikleri verilecek ve halka homomorfizmaları tanımları hatırlanacak. Daha sonra rotris tanımı ve bu alandaki çalışmaların bir literatür özeti verilecektir.

Tezin ikinci bölümünde ise gerçel sayılar ve tam sayılar üzerinde rotris halkalarının tanımı ve bazı özellikleri verilecektir.

Tezin üçüncü bölümünde ise keyfi bir halka üzerinde 3-boyutlu rotrisler kümesinin üzerinde tanımlanan işlemler ile halka yapısı oluşturduğu gösterilecek ve bazı özellikleri incelenektir.

Sonuçlar bölümünde ise elde ettiğimiz sonuçlar özetlenmiştir.

1.2. Temel Tanımlar

Bu bölümde tez çalışmamız boyunca gerek duyacağımız temel tanımlar ile ilgili kısa bir literatür özeti verilecektir. Daha ayrıntılı bilgi için Hungerford(1980) ve Mordeson(1997) kaynaklarından yararlanılabilir.

1.2.1. Grup, halka , tamlık bölgesi , cisim

Tanım 1.2.1. G boştan farklı bir küme olmak üzere, her $a,b \in G$ için $\star(a,b) = a\star b$ ile tanımlı $\star : G\times G \to G$ bağıntısı bir fonksiyon ise $\star$, G üzerinde bir ikili işlemdir denir ve her $a \in R$ için $a\star e = e\star a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa e'ye $\star$ işlemine göre G'nin birimi ve $a \in G$ için $a\star b = b\star a = e$ olacak şekilde bir $b \in G$ varsa b'ye de $\star$ işlemine göre a'nın tersi denir. (Hungerford, 1980)

Tanım 1.2.2. G boştan farklı bir küme ve $\star$, G üzerinde bir ikili işlem olsun.

- Eğer her $a,b,c \in G$ için $a\star(b\star c) = (a\star b)\star c$ sağlanıyorsa $\star$ işlemi G üzerinde birleşmelidir ve $(G,\star)$ sıralı ikilisine yarıgrup denir.
- $(G,\star)$ yarıgrubu birim elemana sahip ise $(G,\star)$ monoiddir denir.
- Eğer $(G,\star)$ monoidinde her elemanın tersi varsa $(G,\star)$ gruptur denir.
- Eğer $a,b \in G$ için $a\star b = b\star a$ sağlanıyorsa $\star$ işlemi G üzerinde değişmelidir ve $(G,\star)$ değişmeli gruptur denir. (Hungerford , 1980)

Tanım 1.2.3. G boştan farklı bir küme ve $\star$, G üzerinde ikili işlem olmak üzere, G birleşmeli,birimli ve tersinir ise G'ye grup denir. Eğer $\star$ işlemi G üzerinde değişmeli ise G ye $\star$ işlemine göre değişmeli grup denir.

Tanım 1.2.4. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde toplama (+) ve çarpma (.) ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer (+) ve (.) işlemlerine göre;

- $(R,+)$ değişmeli grup,
- Her $a,b,c \in R$ için $(a.b).c = a.(b.c)$ $((R,.)$ yarıgrup)
- Her $a,b,c \in R$ için $a.(b+c) = a.b + a.c$ ve $(a+b).c = a.c + b.c$, şartları sağlanıyorsa, R'ye (+)ve (.) ile birlikte halka denir ve (R,+,.) üçlüsü ile gösterilir. Ayrıca eğer,
- Her $a,b \in R$ için $a.b = b.a$ oluyorsa R'ye değişmeli halka ,
- Her $a \in R$ için $r.1_R = 1_R.r = r$ olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R'ye birimli halka denir. (R,+) değişmeli grubunda (+) işlemine göre birim elemana halkanın sıfırı denir ve'0_R'ile gösterilir. (Hungerford, 1980)

Çalışmanın geri kalan kısmında $a.b$ yerine ab gösterimi kullanılacaktır.

Tanım 1.2.5. R bir halka ve $0_R \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0_R$ $(ba = 0_R)$ olacak şekilde bir $0_R \neq b \in R$ varsa a'ya sol(sağ) sıfır bölen denir. Hem sağ hem sol sıfır bölen olan elemana halkanın sıfır böleni denir. (Hungerford, 1980)

Tanım 1.2.6. R birimli bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$varsa a'ya sol(sağ) tersinir eleman denir. Hem sağ hem sol tersinir olan elemana tersinir eleman denir. (Hungerford, 1980)

Tanım 1.2.7. Birimli ve $1_R \neq 0_R$ olmak üzere, değişmeli ve sıfır bölensiz R halkasına tamlık bölgesi denir. (Hungerford, 1980)

Tanım 1.2.8. R bir halka olmak üzere, $na = 0_R$ olacak şekilde en küçük n pozitif tam sayısına R halkasının karakteristiği denir ve $CharR = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n yok ise R nin karakteristiği 0'dır denir. (Hungerford, 1980)

1.2.2. Halka homomorfizmaları, idealler, dik toplam

Çalışmamızın 3. bölümünde rotris halkasının cebirsel özelliklerinden bahsedeceğimiz için bu kısımda halka homomorfizması , ideal , bölüm halkası ve dik toplam kavramları verilecektir. Bu kısımdaki tanım ve özellikler için Hungerford(1980) , Mordeson(1997) kaynakları kullanılacaktır.

Tanım 1.2.9. R ve S iki halka ve $f : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa f'ye R den S ye halka homomorfizması denir.

Bire bir halka homomorfizmasına monomorfizma , örten halka homomorfizmasına epimorfizma , 1-1 ve örten halka homomorfizmasına izomorfizma denir. $f : R \to S$ bir halka izomorfizması ise R ve S halkalarına izomorf denir. $R \cong S$ ile gösterilir.
Eğer $f : R \to R$ bir homomorfizma ise f'ye endomorfizma, izomorfizma ise f'ye otomorfizma denir.

$f : R \to S$ halka homomorfizması olmak üzere f homomorfizmasının çekirdeği

$$\text{Ç}ek(f) = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$$

ve görüntüsü

$$G\text{ö}r(f) = \{f(r) \mid r \in R\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca Çek(f) , R halkasının bir idealidir. (Hungerford, 1980)

Tanım 1.2.10. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olmak üzere I kümesi R'deki toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $(S, +, .)$ bir halka oluyorsa S halkasına R halkasının althalkası denir ve $S \leq R$ ile gösterilir. Eğer R'nin bir I althalkası için her $r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ($xr \in I$) oluyorsa I'ya sol(sağ) ideal denir. Eğer I hem sağ hemde sol ideal ise I'ya ideal denir ve $I \lhd R$ ile gösterilir. (Mordeson, 1997)

R halkasında bir I ideali için $(I, +) \leq (R, +)$ olur. $a, b \in R$ için

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b \in I$$

şeklinde tanımlanan bağıntı denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre oluşan denklik sınıfları her $r \in R$ için ;

$$\overline{r} = r + I = \{r + a | a \in I\}$$

şeklindedir. Tüm denklik sınıflarının kümesi R/I ile gösterilir. Yani

$$R/I = \{r + I : r \in R\}$$

.

Tanım 1.2.11. R/I kümesi üzerinde toplama "$+$" ve çarpma "." işlemleri sırasıyla $a+I, b+I \in R/I$ için

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$$

$$(a+I).(b+I) = (ab)+I$$

şeklinde tanımlanır.

R/I kümesi bu işlemler ile birlikte bir halka oluşturur. Bu halkaya R nin I idealine göre bölüm halkası denir. (Mordeson, 1987)

Teorem 1.2.12. I, R'nin bir ideali olmak üzere $\pi(r) = r + I$ şeklinde tanımlanan $\pi : R \to R/I$ dönüşümü bir halka epimorfizmasıdır ve çek(π)$= I$ dır. π epimorfizmasına doğal(kanonik) epimorfizma denir.

Tanım 1.2.13. R bir halka ve P R nin bir ideali olmak üzere eğer $P \neq R$ ve R nin keyfi A, B idealleri için

$$A.B \subset P \;\; \Rightarrow \;\; A \subset P \;\; veya \;\; B \subset P$$

sağlanıyorsa P asal idealdir denir. (Hungerford, 1980)

Teorem 1.2.14. R bir halka olsun. Eğer P R nin ideali , $P \neq R$ ve her $a, b \in R$ için

$$a.b \in P \Rightarrow a \in P \; veya \; b \in P$$

ise P asal idealdir.

Tersine P asal ve R değişmeli ise $a, b \in R$ için $a.b \in P \Rightarrow a \in P \; veya \; b \in P$ olur.

Tanım 1.2.15. R bir halka ve M R nin bir ideali olmak üzere eğer $M \subset N \subset R$ olacak şekilde R nin N ideali yoksa M ye maksimal ideal denir.

Tanım 1.2.16. I boştan farklı bir indeks kümesi olmak üzere $\{R_i \mid i \in I\}$ halkaların bir ailesi olsun. R_i kümelerinin kartezyen çarpımı $\prod\{R_i \mid i \in I\}$, her $i \in I$ için $f(i) \in R_i$ olacak şekildeki tüm $f : I \to \bigcup\{R_i \mid i \in I\}$ fonksiyonlarının kümesidir. $f, g \in \prod\{R_i \mid i \in I\}$ olsun. Her $i \in I$ için $f+g$ ve fg;

$$(f+g)(i) = f(i)+g(i)$$

$$(fg)(i) = f(i)g(i)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda $(\prod\{R_i \mid i \in I\},+,.)$ bir halka oluşturur. Bu halkaya $\{R_i \mid i \in I\}$ halka ailesinin dik toplamı denir ve $\prod\limits_{i\in I} R_i$ şeklinde gösterilir.

Her $i \in I$ için $f \in \prod\limits_{i\in I} R_i$ ve $f(i) = a_i \in R_i$ olsun. Genellikle f $\{a_i \mid i \in I\}$ görüntü kümesiyle tanımlanır. Bu gösterimi kullanarak her $i \in I$ ve $a_i, b_i \in R$ için

$$\{a_i \mid i \in I\} + \{b_i \mid i \in I\} = \{a_i + b_i \mid i \in I\}$$

$$\{a_i \mid i \in I\}.\{b_i \mid i \in I\} = \{a_i b_i \mid i \in I\}$$

işlemleri tanımlanabilir. Eğer $I = \{1,2,...,n\}$ sonlu bir küme ise tam dik toplam $\bigoplus\limits_{i\in I} R_i = R_1 \oplus R_2 \oplus ... \oplus R_n$ şeklinde gösterilir ve $\{a_i \mid i \in I\}$ elemanı genellikle $(a_1, a_2, ..., a_n)$ şeklinde yazılır.

1.2.3. Leavitt yol cebri

Bulgular ve değerlendirme bölümünde yapmış olduğumuz çalışmaları örneklendirmek için leavitt yol cebrinden yararlanacağız. Bu nedenle Leavitt yol cebri tanımı bu kısımda verilecektir. Bu kısımdaki tanım ve özellikler için (Abrams, 2017) kaynak alınmıştır.

Tanım 1.2.17. E^0 ve E^1 kümeleri ve $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$ dönüşümlerinin oluşturduğu $E = (E^0, E^1, r, s)$ dörtlüsüne yönlü graf denir. E^0 ın elemanlarına tepe ve E^1 in elemanlarına kenar denir. Her $e \in E^1$ için $s(e)$ e nin kaynağı ve $r(e)$ e nin menzilidir.

Tanım 1.2.18. K bir cisim ve E keyfi bir graf olmak üzere eğer

(A1) Her $v_i, v_j \in E^0$ için $v_i v_j = \delta_{ij} v_{ij}$

(A2) Her $e \in E^1$ için $s(e)e = e = er(e)$

koşulları sağlanıyorsa $K[E^0 \cup E^1]$ e E üzerinde K-cebir yolu denir ve $A(E)$ ile gösterilir. (Abrams, 2017)

Tanım 1.2.19. K bir cisim , E keyfi bir graf ve $(E^1)^*$ iz kenarların kümesi. Eğer $K[E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*]$

(A1) Her $v_i, v_j \in E^0$ için $v_i v_j = \delta_{ij} v_{ij}$

(A2) Her $e \in E^1$ için $s(e)e = e = er(e)$ ve $r(e)e^* = e^* = e^* s(e)$

(CK1) Her $e_i, e_j \in E^0$ için $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$

(CK2) Her $v \in E^0$ reguler kenarı için $v = \sum_{\{e \in E^1 : s(e) = v\}} ee^*$

koşullarını sağlıyorsa katsayıları K olan E nin leavitt yol cebri denir ve $L_K(E)$ ile gösterilir. (Abrams, 2017)

1.3. Kaynak Özetleri

Bu bölümde; bölüm 3. deki çalışmalarımızda kullanıcağımız rotris kavramı ve bu rotrislerin oluşturduğu kümeler üzerindeki cebirsel işlemler ve özellikleri verilecektir.

1.3.1. Gerçel bileşenli rotris tanımı

Tanım 1.3.1. $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

paralelkenar formuna 3-boyutlu gerçel bileşenli rotris denir. (Ajibade, 2003)

Bir R rotrisi için köşegenlerin kesiştiği bileşene rotrisin kalbi denir ve $h(R)$ ile gösterilir.

Gerçel bileşenli 3-boyutlu rotrislerin kümesi

$$\mathcal{R}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklindedir.

Örnek 1.3.2.

$$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & -5 & \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{5} \\ & 6 & \end{array} \right\rangle$$

3-boyutlu gerçel bileşenli bir rotristir ve kalbi $h(A) = -2$ dir.

Sani (2007) "The Row-Column Multiplication of High Dimensional Rhotrices" adlı çalışmasında Ajibadenin 3-boyutlu rotris tanımını n-boyutlu rotrislere genellemiştir. Genel olarak n-boyutlu rotris

$$< a_{ij}, c_{lk} >= \left\langle \begin{array}{ccccccc} & & & a_{11} & & & \\ & & a_{21} & c_{11} & a_{12} & & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{t1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{tt} \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & a_{tt-1} & c_{t-1t-1} & a_{t-1t} & & \\ & & & a_{tt} & & & \end{array} \right\rangle$$

formundadır. Burada $n \in 2\mathbb{Z}^{+}+1$, $t=\frac{n+1}{2}$ $a_{ij}(i,j=1,2,...,t)$ ve $c_{kl}(k,l=1,2,...,t-1)$ n-boyutlu rotrisin bileşenleridir ve n-boyutlu rotrislerin bileşen sayısı $\frac{1}{2}(n^2+1)$ şeklindedir. Örneğin;

$$\left\langle \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & \frac{-2}{5} & 8 & -1 & \\ \frac{4}{9} & 1 & -2 & 11 & 21 \\ & \frac{3}{11} & -13 & 0 & \\ & & 0 & & \end{array} \right\rangle$$

5-boyutlu gerçel bileşenli bir rotristir ve bileşen sayısı 13'dür.

1.3.2. Rotris kümeleri üzerinde cebirsel işlemler ve özellikleri

Bu bölümde ilk olarak Ajibade (2003) "The Concept of Rhotrix in Mathematical Enrichment" adlı makalesinde rotris halkaları üzerinde tanımlamış olduğu cebirsel işlemler ve ardından Sani (2004) "An Alternative Method for Multiplication of Rhotrices" adlı makalesinde tanımlamış olduğu cebirsel işlemler verilecektir.

$$R=\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & h(R) & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, \; Q=\left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & h(Q) & z \\ & t & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$$

olmak üzere;

İki Rotrisin toplamı:

$$R+Q=\left\langle \begin{array}{ccc} & a+x & \\ b+y & h(R)+h(Q) & d+z \\ & e+t & \end{array} \right\rangle$$

İki Rotrisin eşitliği:

$$R = Q \Leftrightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y \\ h(R) = h(Q) \\ d = z \\ e = t \end{cases}$$

Bir Rotris ile bir skalerin çarpımı: $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\alpha R = \left\langle \begin{array}{ccc} & \alpha a & \\ \alpha b & \alpha h(R) & \alpha d \\ & \alpha e & \end{array} \right\rangle$$

Literatürde rotrislerde çarpma işlemi iki farklı yol ile yapılmıştır. Bunlardan ilki Ajibade'nin tanımladığı kalpli çarpma dediğimiz çarpmadır, ikincisi ise Sani'nin tanımlamış olduğu satır-sütun çarpmasıdır.

İki Rotrisin kalpli çarpımı:

$$R \circ Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & a.h(Q) + x.h(R) & \\ b.h(Q) + y.h(R) & h(R).h(Q) & d.h(Q) + z.h(R) \\ & e.h(Q) + t.h(R) & \end{array} \right\rangle$$

İki Rotrisin satır-sütun çarpımı:

$$R \bullet Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & ax + dy & \\ bx + ey & h(R).h(Q) & az + dt \\ & bz + et & \end{array} \right\rangle$$

Örnek 1.3.3. Reel bileşenli iki rotris,

$$R = \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3} & \\ -1 & 5 & \frac{3}{5} \\ & -6 & \end{array} \right\rangle, \; Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 7 & -1 & 0 \\ & -3 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$$

olmak üzere, $R+Q$, $3R$, $R \circ Q$ ve $R \bullet Q$ rotrisleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$R+Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3}+0 & \\ -1+7 & 5-1 & \frac{3}{5}+0 \\ & -6-3 & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3} & \\ 6 & 4 & \frac{3}{5} \\ & -9 & \end{array} \right\rangle$$

$$3R = \left\langle \begin{array}{ccc} & 3.\frac{4}{3} & \\ 3.(-1) & 3.5 & 3.\frac{3}{5} \\ & 3.(-6) & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 4 & \\ -3 & 15 & \frac{9}{5} \\ & -18 & \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{aligned} R \circ Q &= \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3}.(-1)+0.5 & \\ (-1).(-1)+(-1).5 & 5.(-1) & \frac{3}{5}.(-1)+0.5 \\ & (-6).(-1)+(-3).5 & \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{ccc} & -\frac{4}{3} & \\ -4 & -5 & -\frac{3}{5} \\ & -9 & \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

$$R \bullet Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{4}{3}.0+3.7 & \\ (-1).0+(-6).7 & 5.(-1) & 4.0+\frac{3}{5}.(-3) \\ & (-1).0+(-6).(-3) & \end{array} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{array}{ccc} & 21 & \\ -42 & -5 & -\frac{9}{5} \\ & 18 & \end{array} \right\rangle$$

1.3.3. Tam sayı bileşenli rotris tanımı

Tanım 1.3.4. $a,b,c,d,e \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

paralelkenar formuna 3-boyutlu tam sayı bileşenli rotris denir. (Ajibade, 2003)

Aynı gerçel bileşenli rotrislerde olduğu gibi tam sayı bileşenli rotrislerde de köşegenlerin kesiştiği yer rotrisin kalbidir. Yukarıdaki rotrisi düşünürsek c bileşeni bu rotrisin kalbidir.

Tam sayı bileşenli 3-boyutlu rotrislerin kümesi

$$\mathcal{R}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklindedir.

Örnek 1.3.5. $B = \left\langle \begin{array}{ccc} & -5 & \\ 3 & 0 & 8 \\ & -14 & \end{array} \right\rangle$ 3-boyutlu tam sayı bileşenli bir rotristir ve kalbi $h(A) = 0$ dir.

2. GERÇEL BİLEŞENLİ ROTRİSLER KÜMESİNİN BAZI CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Ajibade(2003) rotrisler kümesi üzerindeki işlemleri vermesinden sonra bir çok araştırmacı tarafından rotrislerin cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu çalışmalar arasında (Sani, 2004 ; Sani,2007; Mohammed, 2007; Mohammed, 2009; Mohammed, 2010; Mohammed, 2012; Tudunkaya and Makanjuola, 2010; Tudunkaya and Makanjuola, 2012; Usaini and Tudunkaya, 2011; Tudunkaya, 2013; Aminu, 2009; Aminu, 2010) verilebilir.

Özellikle Mohammed (2009) " A Remark on the Classification of Rhotrices as Abstract Structures" çalışmasında rotrisler kümesinin halka, cisim, tamlık bölgesi, esas ideal bölgesi, tek türlü çarpanlarına ayrılabilir bölge şartlarını hangi koşullar altında sağladığını araştırmıştır. Bu kısımda bizde Mohammed (2009) çalışmasının kısa bir özetini vereceğiz.

2.1. Rotris Halkaları

Bu bölümde literatürde var olan gerçel bileşenli ve tam sayı bileşenli rotris halkaları ile ilgili kısa bir özet verilecektir.

2.1.1. Gerçel bileşenli rotris halkası

Teorem 2.1.1. $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ reel bileşenli rotrisler kümesi $''+''$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. (Mohammed, 2009)

Kanıt. R, Q, T $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ de keyfi elemanlar olsun.

1. Reel sayılar $'+'$ işlemine göre birleşmeli olduğundan

$$(R+Q)+T = R+(Q+T)$$

eşitliği sağlanır. Yani rotrisler kümesi üzerinde tanımlı olan toplama$(+)$ işlemi $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ kümesi üzerinde birleşme özelliğine sahiptir.

2. $\forall R \in \mathcal{R}$ için $R+0=0+R=R$ olacak şekilde $0 \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ vardır ve

$$0 = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır. Yani $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ kümesi etkisiz elemana sahiptir ve bu eleman 0 dır.

3. Her $R = \left\langle \begin{array}{ccc} & r_1 & \\ r_2 & h(R) & r_4 \\ & r_5 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ için $R+(-R)=(-R)+R=0$ olacak şekilde $-R \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ vardır ve

$$-R = \left\langle \begin{array}{ccc} & -r_1 & \\ -r_2 & -h(R) & -r_4 \\ & -r_5 & \end{array} \right\rangle$$

şeklindedir. Yani $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ kümesindeki her elemanın $'+'$ işlemine göre tersi vardır.

O zaman $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), + >$ ikilisi gruptur.

Ayrıca $\mathbb{R}$ üzerindeki toplama işlemi değişmeli olduğu için $R+Q=Q+R$ eşitliği sağlanır. Bu yüzden $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), + >$ değişmeli grup olur. □

Teorem 2.1.2. $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı toplama "$+$" ve kalpli çarpma "$\circ$" işlemleri ile değişmeli ve birimli bir halkadır. $R^* =< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), +, \circ >$ şeklinde gösterilir.

Kanıt. 1. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), + >$ değişmeli gruptur.

2. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), \circ >$ semigruptur. Yani $(R \circ Q) \circ T = R \circ (Q \circ T)$ eşitliği sağlanır. Çünkü $\mathbb{R}$ üzerinde $'.'$ işlemi birleşme özelliğine sahiptir.

3. $\mathbb{R}$ üzerinde $'.'$ işleminin $'+'$ üzerine sağdan, soldan dağılma özelliği olduğu için $\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ kümesinde çarpma işlemi toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahiptir. $R\circ(Q+T)=(R\circ Q)+(R\circ T)$ ve
$(R+Q)\circ T)=(R\circ T)+(Q\circ T)$

O zaman $R^*=<\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ>$ halka olur. Ayrıca $R\circ Q=Q\circ R$ özelliği sağlandığından değişmeli halkadır. $\forall R\in\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ için $R\circ I=I\circ R=R$ olacak şekilde $I\in\mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ vardır ve bu elemana halkanın birim elemanı denir.

$$R\circ I=\left\langle\begin{array}{ccc} & r_1 & \\ r_2 & h(R) & r_3 \\ & r_4 & \end{array}\right\rangle\circ\left\langle\begin{array}{ccc} & i_1 & \\ i_2 & h(I) & i_3 \\ & i_4 & \end{array}\right\rangle=\left\langle\begin{array}{ccc} & r_1 & \\ r_2 & h(R) & r_3 \\ & r_4 & \end{array}\right\rangle$$

$$\left.\begin{array}{r} r_1.h(I)+i_1.h(R)=r_1 \\ r_2.h(I)+i_2.h(R)=r_2 \\ h(R).h(I)=h(R) \\ r_3.h(I)+i_3.h(R)=r_3 \\ r_4.h(I)+i_4.h(R)=r_4 \end{array}\right\}\Rightarrow i_1=i_2=i_3=i_4=0,\ h(I)=1$$

Böylece

$$I=\left\langle\begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array}\right\rangle$$

olur. Dolayısıyla $R^*=<\mathcal{R}_3(\mathbb{R}),+,\circ>$ değişmeli ve birimli bir halka olur. $\square$

Tanım 2.1.3. $R\circ Q=I$ olacak şekildeki Q rotrisine R rotrisinin tersi denir ve

$Q = R^{-1}$ ile gösterilir.

$$Q = R^{-1} = \frac{-1}{h(R)^2} \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & -h(R) & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, \; h(R) \neq 0$$

R^* rotris halkasındaki tersinir elemanların kümesi

$$U_1 = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \; ve \; c \neq 0 \right\}$$

ile gösterilir.
Rotrisler kümesindeki tersinir elemanların kümesinin '$\circ$' işlemine göre grup oluşturduğu sıradaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.1.4. $< U_1, \circ >$ ikilisi bir grup oluşturur.

Kanıt. $\forall U, V, W \in U_1$ için

1. U, $V \in U_1$ için $h(U) \neq 0$ ve $h(V) \neq 0$ olduğundan ve $\mathbb{R}$ sıfır bölensiz olduğundan $h(U)h(V) \neq 0$ olur. Dolayısıyla $U \circ V$ rotrisi U_1 kümesinin elemanıdır.

2. $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$ eşitliği sağlanır. Yani U_1 kümesi birleşme özelliğine sahiptir.

3. $U \circ I = I \circ U = I$ olacak şekilde $I \in U_1$ vardır ve

$$I = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

şeklindedir.

4. $U \circ T = T \circ U = I$ olacak şekilde $T \in U_1$ vardır.

$$U = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, \; c \neq 0$$

olmak üzere;

$$T = U^{-1} = \frac{-1}{c^2} \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & -c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & \frac{-a}{c^2} & \\ \frac{-b}{c^2} & \frac{1}{c} & \frac{-d}{c^2} \\ & \frac{-e}{c^2} & \end{array} \right\rangle, \; c \neq 0$$

şeklindedir.
O zaman $< U_1, \circ >$ gruptur.

$\square$

Teorem 2.1.5. R^* rotris halkasının sıfır bölenleri kümesi

$$ZD = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & 0 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,d,e,0 \in \mathbb{R} \; ve \; en \; az \; bir \; a,b,d,e \neq 0 \right\}$$

şeklindedir. (Mohammed, 2009)

Kanıt. $R = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, T = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & w & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$

$R \neq 0$, $T \neq 0$ ve $R \circ T = 0$ olsun.

$$R \circ T = \left\langle \begin{array}{ccc} & az+xc & \\ bz+yc & cz & dz+tc \\ & ez+wc & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

Buradan; $cz = 0 \Rightarrow c = 0$ veya $z = 0$ olur. Farzedelim ki; $c = 0$ ve $z \neq 0$ olsun. O zaman $az = bz = dz = ez = 0$ olmalı, $z \neq 0$ olduğundan $a = b = d = e = 0$ bulunur ve bu bir çelişkidir. Çünkü $R \neq 0$, bu sebeple $c = 0$ ve $z = 0$ olmalıdır. Benzer şekilde, $z = 0$ *ve* $c \neq 0$ durumunu da gösterebiliriz. Bu durumda $T \neq 0$ olması ile çelişir.

Böylece $R = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & 0 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$ *ve* $T = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & 0 & t \\ & w & \end{array} \right\rangle$ şeklindedir. □

Teorem 2.1.6.

$$J = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & 0 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a, b, d, e, 0 \in \mathbb{R} \right\}$$

olmak üzere J kümesi ve 0 rotrisi R^* rotris halkasının iki idealidir. $J, 0 \lhd R^*$

Kanıt. Gerçekten de;
$\forall J_1, J_2 \in J$ için;

1. $0 \in J \Rightarrow J \neq \emptyset$

2.

$$J_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a_1 & \\ b_1 & 0 & d_1 \\ & e_1 & \end{array} \right\rangle, J_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a_2 & \\ b_2 & 0 & d_2 \\ & e_2 & \end{array} \right\rangle$$

olmak üzere;

$$J_1 - J_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a_1 - a_2 & \\ b_1 - b_2 & 0 & d_1 - d_2 \\ & e_1 - e_2 & \end{array} \right\rangle \in J$$

3. $\forall R \in R^*$ için

$$R \circ J_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a_1 h(R) & \\ b_1 h(R) & 0 & d_1 h(R) \\ & e_1 h(R) & \end{array} \right\rangle \in J$$

$J \lhd R^*$ olur. R^* değişmeli halka olduğu için sağ ideal aynı zamanda sol ideal olur. □

Rotris kümesi üzerinde iki türlü çarpma işlemi tanımlamıştık bunlardan ilki olan kalpli çarpma işlemi ile halka yapısını koruduğunu Teorem 2.1.2 de görmüştük. Şimdide satır-sütun çarpımı ile rotris kümesinin halka yapısını koruduğu göreceğiz.

Teorem 2.1.7. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), +, \bullet >$ birimli bir halkadır ve birimi $I = \left\langle \begin{array}{ccc} & 1 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 1 & \end{array} \right\rangle$ olur.

$$R = \left\langle \begin{array}{ccc} & r_1 & \\ r_2 & h(R) & r_3 \\ & r_4 & \end{array} \right\rangle, \; Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & q_1 & \\ q_2 & h(Q) & q_3 \\ & q_4 & \end{array} \right\rangle,$$

$$T = \left\langle \begin{array}{ccc} & t_1 & \\ t_2 & h(T) & t_3 \\ & t_4 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$$

Kanıt. 1. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), + >$ değişmeli gruptur. (Bakınız Teorem 2.1.1)

2. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), \bullet >$ semigruptur. Yani $(R \bullet Q) \bullet T = R \bullet (Q \bullet T)$ eşitliği sağlanır.

3. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma ve her iki işlemde birleşme özelliğine sahip olduğundan $R \bullet (Q+T) = (R \bullet Q) + (R \bullet T)$ ve $(R+Q) \bullet T = (R \bullet T) + (Q \bullet T)$ eşitlikleri sağlanır.

Sonuç olarak $< \mathcal{R}_3(\mathbb{R}), +, \bullet >$ bir halkadır ve her $R \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ için $R \bullet I = R = I \bullet R$ olduğundan $I \in \mathcal{R}_3(\mathbb{R})$ halkanın birim elemanıdır. □

2.1.2. Tam sayı bileşenli rotris halkası

Kaynak özetleri bölümünde tam sayı bileşenli rotrislerin kümesini

$$\mathcal{R}_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$$

şeklinde vermiştik. Gerçel bileşenli rotrislerde olduğu gibi tam sayı bileşenli rotrisler kümesi de halka yapısı oluşturur. $< \mathcal{R}_3(\mathbb{Z}), +, \circ >$ üçlüsü değişmeli bir halkadır.

Teorem 2.1.8. $\mathcal{R}_3(\mathbb{Z})$ rotris halkasının tersinir elemanlarının kümesi

$$U_2 = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \ ve \ c \in \{1,-1\} \right\}$$

şeklindedir. (Mohammed, 2009)

Kanıt. $R, Q \in \mathcal{R}_3(\mathbb{Z})$ için;

$$R = \left\langle \begin{array}{ccc} & k & \\ l & m & n \\ & p & \end{array} \right\rangle, \ Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & w & \end{array} \right\rangle$$

ve

$$R \circ Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & kz+xm & \\ lz+ym & mz & nz+tm \\ & pz+wm & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

olsun. Buradan $mz = 1 \Rightarrow m = z = 1$ veya $m = z = -1$
Durum 1; $m = z = 1$ olsun. O zaman

$$\left. k+x=0, l+y=0, n+t=0, p+w=0 \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-k \\ y=-l \\ t=-n \\ w=-p \end{array}$$

$$Q = R^{-1} = \left\langle \begin{array}{ccc} & -k & \\ -l & 1 & -n \\ & -p & \end{array} \right\rangle$$

Durum 2; $m = z = -1$ olsun. O zaman

$$\left. -k-x=0, -l-y=0, -n-t=0, -p-w=0 \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-k \\ y=-l \\ t=-n \\ w=-p \end{array}$$

$$Q = R^{-1} = \left\langle \begin{array}{ccc} & -k & \\ -l & 1 & -n \\ & -p & \end{array} \right\rangle$$

Böylece $U_2 = \{R \in \mathcal{R}_3(\mathbb{Z}) \mid h(R) = 1 \; veya \; h(R) = -1\}$ şeklinde olur. □

Teorem 2.1.9. $\mathcal{R}_3(\mathbb{Z})$ rotris halkasının indirgenemez elemanlarının kümesi

$$E_2 = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \; ve \; c \text{ indirgenemez} \right\}$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.10.

$$P_1 = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & 1 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$P_2 = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & -1 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,d,e \in \mathbb{Z} \right\}$$

ve $P = P_1 \cup P_2 \cup 0$ olmak üzere P kümesi $'+'$ ve $'\circ'$ işlemlerine göre temel ideal bölgesidir. $P^* =< P, +, \circ >$ şeklinde gösterilir.

Kanıt. İlk olarak P^* tamlık bölgesi olduğunu göstermemiz gerekir. P^* birimli, değişmeli bir halka olduğu bilindiğinden sadece sıfır bölensiz olduğunu göstermek yeterlidir. $R,\ Q \in P^*$ alalım. $R \circ Q = 0$ olduğunda $R = 0$ veya $Q = 0$ olmalıdır.

$$R = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & 1 & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & 1 & z \\ & t & \end{array} \right\rangle \in P^*$$

$$R \circ Q = \left\langle \begin{array}{ccc} & a+x & \\ b+y & 1 & d+z \\ & e+t & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle$$

$R,Q \in P^*$ için $R \circ Q$ çarpım rotrisinin kalbi $h(R \circ Q) = 1, -1$ olduğundan $R \circ Q = 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi için $R = 0$ veya $Q = 0$ olması gerekir. Bu sebeple, P^* sıfır bölensizdir yani tamlık bölgesidir.

P kümesinin 0 ve kendisinden başka ideali yoktur. $J \lhd P$ için eğer $J = 0 \Rightarrow < O >= J$ ve $J = P \Rightarrow < I >= P$ olur. Her ideali bir eleman tarafından üretildiği için bu temel ideal bölgesi olur. $\square$

Teorem 2.1.11.

$$U = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in \mathbb{Z} \text{ ve } c \neq 0 \right\} \cup \{0_{\mathcal{R}_3(\mathbb{Z})}\}$$

$U^* =< U, +, \circ >$ olmak üzere U^* tek türlü çarpanlara ayırma bölgesidir. (Mohammed, 2009)

3. BULGULAR VE DEĞERLENDİRME

3.1. Keyfi Bir Halka Üzerinde 3-boyutlu Rotrisler Kümesi Üzerindeki İşlemler ve Halka Yapısı Oluşturması

Bu bölümde keyfi bir R halkası üzerinde tanımlı 3-boyutlu rotris kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca bu rotrislerden oluşan küme üzerinde işlemler tanımlanmış ve bu işlemler ile rotris kümesinin halka yapısını oluşturduğu görülmüştür. Oluşturduğumuz yeni halkanın R halkasının bazı cebirsel özelliklerini sağladığı kanıtlanacaktır.

Tanım 3.1.1. $(R,+,.)$ birimli bir halka olsun. R halkası üzerinde 3-boyutlu rotris kavramı $a,b,c,d,e \in R$ olmak üzere

$$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır. A rotrisinin c bileşenine rotrisin kalbi denir ve $h(A) = c$ ile gösterilir.

R halkası üzerinde tüm 3-boyutlu rotrislerin kümesini $\mathcal{R}_3(R)$ ile göstericeğiz.

$$\mathcal{R}_3(R) = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in R \right\}$$

$\mathcal{R}_3(R)$ üzerinde "$\widehat{+}$"(toplama) ve "$\odot$"(çarpma) ikili işlemleri her

$$A=\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B=\left\langle \begin{array}{ccc} & a^{'} & \\ b^{'} & c^{'} & d^{'} \\ & e^{'} & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$$

için

$$A\widehat{+}B=\left\langle \begin{array}{ccc} & a+a^{'} & \\ b+b^{'} & c+c^{'} & d+d^{'} \\ & e+e^{'} & \end{array} \right\rangle$$

$$A\odot B=\left\langle \begin{array}{ccc} & a.c^{'}+c.a^{'} & \\ b.c^{'}+c.b^{'} & c.c^{'} & d.c^{'}+c.d^{'} \\ & e.c^{'}+c.e^{'} & \end{array} \right\rangle$$

şeklinde tanımlanır.
R üzerinde "$+$" ve "." iyi tanımlı olduğundan $\mathcal{R}_3(R)$ üzerinde tanımlı "$\widehat{+}$" ve "$\odot$" de iyi tanımlıdır.

Teorem 3.1.2. R halkası üzerinde tüm 3-boyutlu rotrislerin kümesi $\mathcal{R}_3(R)$ "$\widehat{+}$" ve "$\odot$" ile bir halkadır.

Kanıt. İlk olarak $<\mathcal{R}_3(R),\widehat{+}>$ ikilisinin değişmeli grup olduğunu gösterelim.

$$A=\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B=\left\langle \begin{array}{ccc} & a^{'} & \\ b^{'} & c^{'} & d^{'} \\ & e^{'} & \end{array} \right\rangle, C=\left\langle \begin{array}{ccc} & a^{''} & \\ b^{''} & c^{''} & d^{''} \\ & e^{''} & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$$

alalım.

$$
\begin{aligned}
(A\widehat{+}B)\widehat{+}C &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a+a^{'} & \\ b+b^{'} & c+c^{'} & d+d^{'} \\ & e+e^{'} & \end{array} \right\rangle \widehat{+} \left\langle \begin{array}{ccc} & a^{''} & \\ b^{''} & c^{''} & d^{''} \\ & e^{''} & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & (a+a^{'})+a^{''} & \\ (b+b^{'})+b^{''} & (c+c^{'})+c^{''} & (d+d^{'})+d^{''} \\ & (e+e^{'})+e^{''} & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & a+(a^{'}+a^{''}) & \\ b+(b^{'}+b^{''}) & c+(c^{'}+c^{''}) & d+(d^{'}+d^{''}) \\ & e+(e^{'}+e^{''}) & \end{array} \right\rangle \\
&= A\widehat{+}(B\widehat{+}C)
\end{aligned}
$$

Yukarıda görüldüğü gibi $+$ işlemi R üzerinde birleşmeli olduğundan $\widehat{+}$ işlemi de $\mathcal{R}_3(R)$ üzerinde birleşmelidir. Benzer şekilde $+$ işlemi R üzerinde değişmeli olduğundan

$$
\begin{aligned}
A\widehat{+}B &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a+a^{'} & \\ b+b^{'} & c+c^{'} & d+d^{'} \\ & e+e^{'} & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & a^{'}+a & \\ b^{'}+b & c^{'}+c & d^{'}+d \\ & e^{'}+e & \end{array} \right\rangle \\
&= B\widehat{+}A
\end{aligned}
$$

sağlanır. Yani $\widehat{+}$ işlemi $\mathcal{R}_3(R)$ üzerinde değişmelidir.

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$$

elemanı ve $\mathcal{R}_3(R)$ kümesinden aldığımız keyfi bir A eleman için

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \widehat{+} A = A \widehat{+} \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle = A$$

eşitlikleri sağlanır.

Yani $\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$ $\mathcal{R}_3(R)$ nin sıfırıdır ve $0_{\mathcal{R}_3(R)}$ ile gösterilir.

R bir halka olduğundan R deki her elemanın R de toplamsal tersi vardır. Böylece keyfi

$$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$$

için

$$-A = \left\langle \begin{array}{ccc} & -a & \\ -b & -c & -d \\ & -e & \end{array} \right\rangle$$

olmak üzere $A \widehat{+} (-A) = (-A) \widehat{+} A = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ olur. Buradan $-A$ rotrisine A nın toplamsam tersi denir.

Sonuç olarak, $< \mathcal{R}_3(R), \widehat{+} >$ değişmeli bir gruptur.

Şimdi "$\odot$" işleminin birleşme özelliğini ve "$\widehat{+}$" üzerine dağılma özelliğini sağladığını gösterelim.

$$(A\odot B)\odot C=\left\langle \begin{array}{ccc} & a.c^{'}+c.a^{'} & \\ b.c^{'}+c.b^{'} & c.c^{'} & d.c^{'}+c.d^{'} \\ & e.c^{'}+c.e^{'} & \end{array}\right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & a^{''} & \\ b^{''} & c^{''} & d^{''} \\ & e^{''} & \end{array}\right\rangle$$

$$=\left\langle \begin{array}{ccc} & (a.c^{'}+c.a^{'}).c^{''}+c.c^{'}.a^{''} & \\ (b.c^{'}+c.b^{'}).c^{''}+c.c^{'}.b^{''} & c.c^{'}.c^{''} & (d.c^{'}+c.d^{'}).c^{''}+c.c^{'}.d^{''} \\ & (e.c^{'}+c.e^{'}).c^{''}+c.c^{'}.e^{''} & \end{array}\right\rangle$$

$$=A\odot(B\odot C)$$

Yukarıda görüldüğü gibi . işlemi R de birleşmeli ve $+$ üzerine dağılma özelliğine sahip olduğundan $\odot$ işlemi de $\mathcal{R}_3(R)$ de birleşmelidir.

$$(A\widehat{+}B)\odot C=\left\langle \begin{array}{ccc} & a+a^{'} & \\ b+b^{'} & c+c^{'} & d+d^{'} \\ & e+e^{'} & \end{array}\right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & a^{''} & \\ b^{''} & c^{''} & d^{''} \\ & e^{''} & \end{array}\right\rangle$$

$$=\left\langle \begin{array}{ccc} & (a+a^{'}).c^{''}+(c+c^{'}).a^{''} & \\ (b+b^{'}).c^{''}+(c+c^{'}).b^{''} & (c+c^{'}).c^{''} & (d+d^{'}).c^{''}+(c+c^{'}).d^{''} \\ & (e+e^{'}).c^{''}+(c+c^{'}).e^{''} & \end{array}\right\rangle$$

$$=(A\odot C)\widehat{+}(B\odot C)$$

Böylece $\odot$ işlemi $\widehat{+}$ üzerine soldan dağılma özelliğine sahiptir. Çünkü R de . işlemi $+$ üzerine soldan dağılma özelliğine sahiptir.
Benzer şekilde R halka olduğundan ve . işleminin $+$ üzerine sağdan dağılma özelliğine sahip olduğu için $\odot$ işleminin $\widehat{+}$ işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğini sağladığınız görürüz.

Sonuç olarak, $<\mathcal{R}_3(R),\widehat{+},\odot>$ sıralı üçlüsü bir halkadır. Ve bu halkaya R üzerinde 3-boyutlu Rotris halkası denir. $\square$

Eğer R birimli(1_R) bir halka ise o zaman $\mathcal{R}_3(R)$ halkası da birimlidir ve birimi

$$1_{\mathcal{R}_3(R)} = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 1_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \text{ dir.}$$

Gerçektende,

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 1_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

ve

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & 1_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

Eğer R halkası değişmeli ise $\mathcal{R}_3(R)$ halkası da değişmelidir.

Yani, keyfi bir $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$, $B = \left\langle \begin{array}{ccc} & a' & \\ b' & c' & d' \\ & e' & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanları için

$$\begin{aligned} A \odot B &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a.c' + c.a' & \\ b.c' + c.b' & c.c' & d.c' + c.d' \\ & e.c' + c.e' & \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a'.c + c'.a & \\ b'.c + c'.b & c'.c & d'.c + c'.d \\ & e'.c + c'.e & \end{array} \right\rangle \\ &= B \odot A \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Dahası bir F cismi üzerinden aldığımız kalbi sıfırdan farklı her

$$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(F)$$

rotrisinin çarpımsal tersi vardır ve

$$A^{-1} = -\frac{1}{c^2} \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & -c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

şeklindedir.

Aşağıdaki teorem bize $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının karakteristiğinin R halkasının karakteristiğine bağlı olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.3. $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının karakteristiği R halkasının karakteristiğine eşittir.

Kanıt. R, karakteristiği k olan bir halka olsun. O zaman $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının karakteristiğide k dır.

$Char\mathcal{R}_3(R) = t$ olsun. $k = t$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} Char\mathcal{R}_3(R) = t \quad & \Rightarrow \quad Her \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R) \;\; i\c{c}in \;\; t.\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle = 0_{\mathcal{R}_3(R)} \\ & \Rightarrow \quad Her \;\; a,b,c,d,e \in R \;\; i\c{c}in \;\; t.a = t.b = t.c = t.d = t.e = 0_R \\ & \Rightarrow \quad k/t. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
CharR = k \;&\Rightarrow\; Her \;\; a \in R \;\; için \;\; k.a = 0_R \\
&\Rightarrow\; Her \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R) \;\; için \left\langle \begin{array}{ccc} & k.a & \\ k.b & k.c & k.d \\ & k.e & \end{array} \right\rangle = 0_{\mathcal{R}_3(R)} \\
&\Rightarrow\; Her \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R) \;\; için \;\; k.\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle = 0_{\mathcal{R}_3(R)} \\
&\Rightarrow\; t/k.
\end{aligned}
$$

Böylece, $k = t$. $\square$

3.1.1. $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında idempotent ve nilpotent elemanlar

Bu bölümde halka teorideki idempotent ve nilpotent eleman tanımlarını verdikten sonra $\mathcal{R}_3(R)$ halkasındaki idempotent ve nilpotent elemanları karakterize edeceğiz.

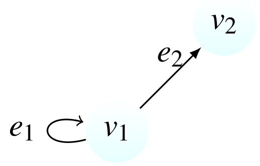
Tanım 3.1.4. R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $a^n = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa a'ya nilpotent eleman denir. R'nin tüm nilpotent elemanlarının kümesi nil(R) ile gösterilir.

Tanım 3.1.5. R bir halka ve $e \in R$ olmak üzere $e^2 = e$ oluyorsa e'ye idempotent eleman denir.

Teorem 3.1.6. *R birimli bir halka ve c R de idempotent bir eleman olsun. O zaman* $\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & c & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$ *$\mathcal{R}_3(R)$ halkasında idempotent elemandır.*

Kanıt. $$\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & c & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle^2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & c^2 & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & c & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \qquad \square$$

Ama bir $\mathcal{R}_3(R)$ halkasındaki tüm idempotent elemanlar bu formda değildir. Örneğin; eğer R Leavitt Path Algebra $L_K(E)$ ve E grafıda aşağıdaki gibi olsun.



$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & e_2 & \\ 0 & v_1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(L_K(E))$ elemanını düşünelim.

$L_K(E)$ halkasında

$v_1.v_1 = v_1$

$v_1.v_2 = v_2.v_1 = 0$

$e_2.v_1 = v_2.e_2 = 0, v_1.e_2 = e_2.v_2 = e_2$

$v_1.e_1 = e_1.v_1 = e_1, v_2.e_1 = e_1.v_2 = 0$

eşitlikleri sağlandığı için

$$A^2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & e_2.v_1 + v_1.e_2 & \\ 0 & v_1.v_1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & e_2 & \\ 0 & v_1 & 0 \\ & 0 & \end{array} \right\rangle = A$$

olur.

Teorem 3.1.7. *R birimli bir halka ve c R de nilpotent eleman olsun. O zaman*

$\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$ *elemanı da $\mathcal{R}_3(R)$ de nilpotenttir. $\mathcal{R}_3(R)$ halkasındaki tüm nilpotent elemanların kümesi $\mathcal{N}_3(R)$ ile gösterilir.*

Kanıt. $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanını alalım ve c R de nilpotent elaman olsun. c nilpotent eleman olduğu için, $c^n = 0_R$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ elemanı vardır.
$h(A^n) = c^n = 0_R$
Böylece, $A^{2n} = A^n.A^n = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$
Özel olarak, eğer R değişmeli bir halka ise o zaman $c^n = 0_R$ iken $A^{n+1} = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ dir. □

Örnek 3.1.8. $R = \mathbb{Z}_8 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}\}$ olsun. $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4} \in \mathbb{Z}_8$ nilpotent elemanlardır. O zaman

$$c = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & \overline{0} & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$
$$\Rightarrow \quad A^2 = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$$

$$c=\overline{2} \quad \Rightarrow \quad A=\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & \overline{2} & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^2=\left\langle \begin{array}{ccc} & 4a & \\ 4b & \overline{4} & 4d \\ & 4e & \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^3=\left\langle \begin{array}{ccc} & 12a & \\ 12b & \overline{0} & 12d \\ & 12e & \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^4=0_{\mathcal{R}_3(R)}$$

$$c=\overline{4} \quad \Rightarrow \quad A=\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & \overline{4} & d \\ & e & \end{array} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^2=\left\langle \begin{array}{ccc} & 8a & \\ 8b & \overline{0} & 8d \\ & 8e & \end{array} \right\rangle = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$$

3.1.2. Rotris halkasının bazı özellikleri

Teorem 3.1.9. $(R,+,.)$ ve $(S,*,\diamond)$ halkalar ve $<\mathcal{R}_3(R),\widehat{+},\odot>$ ve $<\mathcal{R}_3(S),\widehat{+},\odot>$ sırasıyla R ve S halkaları üzerinde 3-boyutlu rotris halkaları olsun. Eğer R halkası S halkasına izomorf ise $\mathcal{R}_3(R)$ ve $\mathcal{R}_3(S)$ halkaları izomorftur.

Kanıt. $R\cong S$ olsun.O zaman $f:R\rightarrow S$ bir halka homomorfizması vardır.

$g : \mathcal{R}_3(R) \to \mathcal{R}_3(S)$ Her $\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ için

$$g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle\right) = \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a) & \\ f(b) & f(c) & f(d) \\ & f(e) & \end{array} \right\rangle$$

şeklinde g yi tanımlayalım.

Keyfi $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B = \left\langle \begin{array}{ccc} & a' & \\ b' & c' & d' \\ & e' & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanlarını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} A = B \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a) & \\ f(b) & f(c) & f(d) \\ & f(e) & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a') & \\ f(b') & f(c') & f(d') \\ & f(e') & \end{array} \right\rangle \\ &\Rightarrow \quad g(A) = g(B) \end{aligned}$$

olduğu için g iyi tanımlıdır.

$$
\begin{aligned}
g(A\widehat{+}B) &= g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a+a^{'} & \\ b+b^{'} & c+c^{'} & d+d^{'} \\ & e+e^{'} & \end{array} \right\rangle\right) \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a+a^{'}) & \\ f(b+b^{'}) & f(c+c^{'}) & f(d+d^{'}) \\ & f(e+e^{'}) & \end{array} \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a)*f(a^{'}) & \\ f(b)*f(b^{'}) & f(c)*f(c^{'}) & f(d)*f(d^{'}) \\ & f(e)*f(e^{'}) & \end{array} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a) & \\ f(b) & f(c) & f(d) \\ & f(e) & \end{array} \right\rangle \widehat{+} \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a^{'}) & \\ f(b^{'}) & f(c^{'}) & f(d^{'}) \\ & f(e^{'}) & \end{array} \right\rangle \\
&= g(A)\widehat{+}g(B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(A \odot B) &= g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a.c^{'}+c.a^{'} & \\ b.c^{'}+c.b^{'} & c.c^{'} & d.c^{'}+c.d^{'} \\ & e.c^{'}+c.e^{'} & \end{array} \right\rangle\right) \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a.c^{'}+c.a^{'}) & \\ f(b.c^{'}+c.b^{'}) & f(c.c^{'}) & f(d.c^{'}+c.d^{'}) \\ & f(e.c^{'}+c.e^{'}) & \end{array} \right\rangle \\
&= g(A) \odot g(B)
\end{aligned}
$$

Böylece, g bir halka homomorfizmasıdır.

$$
\begin{aligned}
Kerg &= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle\right) = 0_{\mathcal{R}_3(S)} \right\} \\
&= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a) & \\ f(b) & f(c) & f(d) \\ & f(e) & \end{array} \right\rangle = 0_{\mathcal{R}_3(S)} \right\} \\
&= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0_S \right\} \\
&= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle : a = b = c = d = e = 0_R \right\} \\
&= 0_{\mathcal{R}_3(R)}
\end{aligned}
$$

olduğundan g, $1-1$ dir.

$$
\begin{aligned}
Img &= \left\{ g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \right) : \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R) \right\} \\
&= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & f(a) & \\ f(b) & f(c) & f(d) \\ & f(e) & \end{array} \right\rangle : f(a), f(b), f(c), f(d), f(e) \in S \right\} \\
&= \mathcal{R}_3(S)
\end{aligned}
$$

olduğundan g, örtendir.

Sonuç olarak, $\mathcal{R}_3(R) \cong \mathcal{R}_3(S)$. □

Teorem 3.1.10. $(R,+,.)$ ve $(S,*,\diamond)$ halkalar, $\mathcal{R}_3(R)$ ve $\mathcal{R}_3(S)$ sırasıyla R ve S üzerinde rotris halkaları ve

$$
\mathcal{R}_3(R\times S) = \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & (a,x) & \\ (b,y) & (c,z) & (d,t) \\ & (e,u) & \end{array} \right\rangle : (a,x),(b,y),(c,z),(d,t),(e,u) \in R\times S \right\}
$$

bilinen $\widehat{+}$ ve $\odot$ işlemleri ile 3-boyutlu rotris halkasıdır.

O zaman $\mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S)$ halkası, $\mathcal{R}_3(R\times S)$ halkasına izomorftur.

Kanıt. $g : \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S) \to \mathcal{R}_3(R\times S)$, keyfi

$$
\left(P_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, P_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a' & \\ b' & c' & d' \\ & e' & \end{array} \right\rangle \right) \in \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S) \text{ için}
$$

$$
g(P_1,P_2) = \left\langle \begin{array}{ccc} & (a,a') & \\ (b,b') & (c,c') & (d,d') \\ & (e,e') & \end{array} \right\rangle \text{ şeklinde tanımlayalım.}
$$

- Her $\left(P_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, P_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & a' & \\ b' & c' & d' \\ & e' & \end{array} \right\rangle \right),$

  $\left(Q_1 = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{array} \right\rangle, Q_2 = \left\langle \begin{array}{ccc} & x' & \\ y' & z' & t' \\ & u' & \end{array} \right\rangle \right) \in \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S)$ için

  $(P_1, P_2) = (Q_1, Q_2) \Rightarrow P_1 = Q_1 ve P_2 = Q_2$
  $\Rightarrow a = x,\ b = y,\ c = z,\ d = t,\ e = u\ ve\ a' = x',\ b' = y',\ c' = z',\ d' = t',\ e' = u'$
  $\Rightarrow (a, a') = (x, x'),\ (b, b') = (y, y'),\ (c, c') = (z, z'),\ (d, d') = (t, t'),$
  $(e, e') = (u, u')$
  Bu yüzden, $g(P_1, P_2) = g(Q_1, Q_2)$ olur. g, iyi tanımlıdır.

- $g((P_1, P_2) \widehat{+} (Q_1, Q_2)) =$

$$
\begin{aligned}
&= g\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a+x & \\ b+y & c+z & d+t \\ & e+u & \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{ccc} & a' * x' & \\ b' * y' & c' * z' & d' * t' \\ & e' * u' & \end{array} \right\rangle \right) \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & (a+x, a' * x') & \\ (b+y, b' * y') & (c+z, c' * z') & (d+t, d' * t') \\ & (e+u, e' * u') & \end{array} \right\rangle \\
&= g(P_1, P_2) \widehat{+} g(Q_1, Q_2)
\end{aligned}
$$

ve $g((P_1, P_2) \odot (Q_1, Q_2)) = g(P_1 \odot Q_1, P_2 \odot Q_2) = g(P_1, P_2) \odot g(Q_1, Q_2)$

Bu yüzden g, bir halka homomorfizmasıdır.

$$
\begin{aligned}
Kerg &= \{(P_1, P_2) \in \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S) : g(P_1, P_2) = 0_{\mathcal{R}_3(R \times S)}\} \\
&= \{(P_1, P_2) \in \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S) : P_1 = 0_{\mathcal{R}_3(R)}\ ve\ P_2 = 0_{\mathcal{R}_3(S)}\} \\
&= 0_{\mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S)}
\end{aligned}
$$

Bu yüzden, g $1-1$ dir.

$$\begin{aligned} Img &= \{g(P_1,P_2) : (P_1,P_2) \in \mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S)\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & (a,x) & \\ (b,y) & (c,z) & (d,t) \\ & (e,u) & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in R \; ve \; x,y,z,t,u \in S \right\} \\ &= \mathcal{R}_3(R \times S) \end{aligned}$$

Böylece, g örtendir.

Sonuç olarak,$\mathcal{R}_3(R) \times \mathcal{R}_3(S) \cong \mathcal{R}_3(R \times S)$.

□

3.2. $\mathcal{R}_3(R)$ Halkasının Yarı Değişmeliliği

Bu kısımda bazı özel rotris halkalarının yarı değişmeli olduğu gösterilecektir. Bu nedenle öncelikle yarıdeğişmeli halka tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Yarı değişmeli halkalar ile ilgili özellikler (Shin, 1973; Yang Gang, 2007) makalesinden alınmıştır.

Tanım 3.2.1. R bir halka olmak üzere, eğer her $a,b \in R$ için

$$ab = 0 \text{ iken } \; aRb = 0$$

oluyorsa R'ye yarıdeğişmeli (semicommutative) halka denir. (Shin, 1973)

Bir halkanın sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa bu halkaya inmiş(reduced) halka denir. Teorem 3.1.12 de bize inmiş halkalar ile yarıdeğişmeli halkalar arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 3.2.2. *R* bir halka olsun. Eğer *R* inmiş halka ise *R* yarıdeğişmeli halkadır.

İnmiş bir halka üzerinde tanımlı 3-boyutlu rotrisler halkasının yarıdeğişmelilik durumu aşağıdaki teoremde verilecektir.

Teorem 3.2.3. R bir inmiş halka olsun. O zaman $\mathcal{R}_3(R)$ yarı değişmeli bir halkadır.

Kanıt. $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B = \left\langle \begin{array}{ccc} & a' & \\ b' & c' & d' \\ & e' & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ için $A \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ iken $A \odot \mathcal{R}_3(R) \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ olduğundan

$a.c' + c.a' = 0_R$, $b.c' + c.b' = 0_R$, $c.c' = 0_R$, $d.c' + c.d' = 0_R$, $e.c' + c.e' = 0_R$.

$a.c' + c.a' = 0_R$ eşitliğini göz önünde bulunduralım ve eşitliğin her iki tarafını soldan $c.a'$ ile çarparsak;

$c.a'.a.c' + c.a'.c.a' = 0_R$ elde ederiz. $c.c' = 0_R$ iken R yarı değişmeli olduğundan $c.a.a'.c' = 0_R$ olur.

Buradan $(c.a')^2 = 0_R$ elde edilir. R inmiş bir halka olduğundan sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur böylece $c.a' = 0_R$ olur.

$a.c' + c.a' = 0_R$ eşitliğini sağdan $a.c'$ ile çarparsak; $a.c'.a.c' + c.a'.a.c' = 0_R$ eşitliğini elde ederiz. Yarıdeğişmelilikten $(a.c')^2 = 0_R$ ve buradanda $a.c' = 0_R$ olur.

Benzer şekilde, $k = a, b, d, e$ için tüm $c.k' = k.c' = 0_R$ olduğu görülür.

Şimdi keyfi bir $C = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanı alalım. $A \odot C \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$A \odot C \odot B = \left\langle \begin{array}{ccc} & a.z.c' + c.x.c' + c.z.a' & \\ b.z.c' + c.y.c' + c.z.b' & c.z.c' & d.z.c' + c.t.c' + c.z.d' \\ & e.z.c' + c.u.c' + c.z.e' & \end{array} \right\rangle$$

$c.c' = 0_R$, $k = a, b, d, e$ için tüm $k.c' = c.k' = 0_R$ ve R yarı değişmeli halka olduğu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$a.z.c' + c.x.c' + c.z.a' = 0_R$$

$$b.z.c' + c.y.c' + c.z.b' = 0_R$$

$$c.z.c^{'} = 0_R$$

$$d.z.c^{'} + c.t.c^{'} + c.z.d^{'} = 0_R$$

$$e.z.c^{'} + c.u.c^{'} + c.z.e^{'} = 0_R$$

Böylece, $A \odot C \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$. Buradanda $A \odot \mathcal{R}_3(R) \odot B = 0_{\mathcal{R}_3(R)}$.

Sonuç olarak, $\mathcal{R}_3(R)$ yarı değişmeli halkadır. □

3.3. Rotris Halkasının İdealleri

Bu bölümde; keyfi bir R halkası üzerinde tanımlı 3-boyutlu rotrislerden oluşan halkanın ideallerini araştıracağız.

R bir halka ve $I \lhd R$ olmak üzere I üzerinde tanımlı tüm 3-boyutlu rotrislerin kümesini $\mathcal{R}_3(I)$ ile göstereceğiz. Aşağıdaki teorem bize $\mathcal{R}_3(I)$ kümesinin $\mathcal{R}_3(R)$ de ideal olduğunu verir.

Teorem 3.3.1. *R bir halka ve $\mathcal{R}_3(R)$ bir Rotris halkası olsun.*

$$I \lhd R \Leftrightarrow \mathcal{R}_3(I) \lhd \mathcal{R}_3(R)$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ I, R nin ideali olduğunda $I \subseteq R$ ve $0_R \in I$ dır. Böylece $\mathcal{R}_3(I) \subseteq \mathcal{R}_3(R)$ ve $0_{\mathcal{R}_3(R)} \in \mathcal{R}_3(I)$ dir.
$0_{\mathcal{R}_3(R)} \in \mathcal{R}_3(I)$ olduğu için $\mathcal{R}_3(I) \neq \emptyset$

Keyfi $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B = \left\langle \begin{array}{ccc} & a^{'} & \\ b^{'} & c^{'} & d^{'} \\ & e^{'} & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

ve $C = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanlarını alalım.

- $A\widehat{+}(-B) = \left\langle \begin{array}{ccc} & a+(-a^{'}) & \\ b+(-b^{'}) & c+(-c^{'}) & d+(-d^{'}) \\ & e+(-e^{'}) & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

- $A \odot C = \left\langle \begin{array}{ccc} & a.z+c.x & \\ b.z+c.y & c.z & d.z+c.t \\ & e.z+c.u & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

  ve

  $C \odot A = \left\langle \begin{array}{ccc} & x.c+z.a & \\ y.c+z.b & z.c & t.c+z.d \\ & u.c+z.e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

Böylece $\mathcal{R}_3(I) \lhd \mathcal{R}_3(R)$.

($\Leftarrow$) $\mathcal{R}_3(I)$, $\mathcal{R}_3(R)$ nin ideali olduğundan $\mathcal{R}_3(I) \subseteq \mathcal{R}_3(R)$ ve $0_{\mathcal{R}_3(R)} \in \mathcal{R}_3(I)$ dir. Böylece $I \subseteq R$,$0_R \in I$ ve $I \neq \emptyset$.
$a,b \in I$ ve $r \in R$ alalım.

- $a \in I \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

  $b \in I \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & b & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$

  $\mathcal{R}_3(I)$ ideal olduğundan $\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a-b & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$ ve $a-b \in I$

- $r \in R \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ccc} & r & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$

  $\mathcal{R}_3(I)$ ideal olduğundan $\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & r & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$

  $$= \left\langle \begin{array}{ccc} & a.r & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$$

  ve $a.r \in I$ olur.

  $$\left\langle \begin{array}{ccc} & r & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$$

  $$= \left\langle \begin{array}{ccc} & r.a & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I)$$

  ve $r.a \in I$ olur.

Sonuç olarak, $I \lhd R$. $\square$

Teorem 3.3.1 $I \lhd R$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathcal{R}_3(I) \lhd \mathcal{R}_3(R)$ olduğunu gördük.

Fakat, sıradaki teorem bize $I \lhd R$ olmak üzere kalbi ideale ait olan tüm 3-boyutlu rotrisler kümesinin $\mathcal{R}_3(R)$ de ideal olduğunu verir.

Teorem 3.3.2. R bir halka, $I \lhd R$ olmak üzere

$$M = \left\{ \left\langle \begin{matrix} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{matrix} \right\rangle : c \in I \right\}$$

kümeside $\mathcal{R}_3(R)$ de bir idealdir.

Kanıt. I , R de bir ideal olduğundan $0_R \in I$ olup $M \subseteq \mathcal{R}_3(R)$ ve $0_{\mathcal{R}_3(R)} \in M$ olur. Böylece $M \neq \emptyset$.

$$A = \left\langle \begin{matrix} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{matrix} \right\rangle, B = \left\langle \begin{matrix} & a_1 & \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ & e_1 & \end{matrix} \right\rangle \in M \text{ ve } C = \left\langle \begin{matrix} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{matrix} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$$

elemanlarını alalım.

$A, B \in M$ olduğundan $c, c_1 \in I$ dır. $I \lhd R$ olduğundan

$c - c_1 \in I$ olur. Dolayısıyla $A \widehat{+} (-B) = \left\langle \begin{matrix} & a - a_1 & \\ b - b_1 & c - c_1 & d - d_1 \\ & e - e_1 & \end{matrix} \right\rangle \in M.$

$$A \odot C = \left\langle \begin{matrix} & a.z + c.x & \\ b.z + c.y & c.z & d.z + c.t \\ & e.z + c.u & \end{matrix} \right\rangle \in M \text{ ve}$$

$$C \odot A = \left\langle \begin{matrix} & x.c + z.a & \\ y.c + z.b & z.c & t.c + z.d \\ & u.c + z.e & \end{matrix} \right\rangle \in M$$

Çünkü $z \in R$, $c \in I$ ve I, R de ideal olduğundan $z.c \in I$ ve $c.z \in I$ dır.

Sonuç olarak, M , $\mathcal{R}_3(R)$ de bir idealdir. $\square$

Sonuç olarak: $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının tüm ideallerini genelleştirmeye çalıştığımızda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.3.3. Keyfi bir K kümesinin $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının bir ideali olması için gerek ve yeter koşul her $A \in K$ için $h(A) \in I$ olacak şekilde R nin bir I ideali vardır.

Kanıt. $I = \{a \in R : A \in K \text{ için } a = h(A)\} \subseteq R$

K ideal olduğundan $0_{\mathcal{R}_3(R)} \in K$ olur ve bu elaman için $0_R \in I,\ I \neq \emptyset$.

$a,b \in I\ ,\ r \in R$ için $a - b \in I\ ,\ a.r \in I$ ve $r.a \in I$ olduğunu göstermeliyiz.

$a \in I$ ise $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in K$ ve $b \in I$ ise $B = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & b & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in K$ olur

ve $K \lhd \mathcal{R}_3(R)$ olduğundan $A \widehat{+} (-B) \in K$ ve buradanda $a - b \in I$ elde edilir.

$r \in I$ için $R = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & r & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ olur K ideal oldğundan $A \odot R \in K$ ve $R \odot A \in K$ olur. Buradanda $a.r \in I$ ve $r.a \in I$.

Tersine;

$K = \{A \in \mathcal{R}_3(R) : h(A) \in I\}$.

$I \lhd R$ olduğundan $0_R \in I$ olur böylece kalbi 0_R olan tüm rotrisler K nın elemanı olur ve $K \neq \emptyset$.

Eğer $A,B \in K\ ,\ R \in \mathcal{R}_3(R)$ için $A \widehat{+} (-B) \in K\ ,\ A \odot R \in K$ ve $R \odot A \in K$ olduğunu gösterirsek kanıt biter.

$A,B \in K$ ise $h(A), h(B) \in I$ olur. $I \lhd R$ olduğundan $h(A) - h(B) = h(A \widehat{+} (-B)) \in I$, $h(A).h(R) = h(A \odot R) \in I$ ve $h(R).h(A) = h(R \odot A) \in I$ olur. Buradanda $A \widehat{+} (-B)$, $A \odot R$, $R \odot A \in K$ olur. □

Teorem 3.3.4. R birimli ve değişmeli bir halka I , R nin ideali olmak üzere

$$I, R \textit{ nin esas ideali} \Leftrightarrow \mathcal{R}_3(I), \mathcal{R}_3(R) \textit{ nin esas idealidir.}$$

Kanıt. $(\Rightarrow)$ I , R halkasının esas ideali olsun. O zaman I , R de ideal olduğundan

$\mathcal{R}_3(I)$, $\mathcal{R}_3(R)$ de bir ideal olur. $a \in R$ için $I = (a)$ ve $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$ olsun.

$$P \in \mathcal{R}_3(I) \Rightarrow P = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R), \quad a,b,c,d,e \in (a) = I$$

$$\Rightarrow P = \left\langle \begin{array}{ccc} & a.r_1 & \\ a.r_2 & a.r_3 & a.r_4 \\ & a.r_5 & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & r_1 & \\ r_2 & r_3 & r_4 \\ & r_5 & \end{array} \right\rangle \in (A).$$

Tersine; $\mathcal{R}_3(I)$, $\mathcal{R}_3(R)$ de esas ideal olsun. O zaman $\exists P \in \mathcal{R}_3(R) \ni \mathcal{R}_3(I) = (P)$. $I = (h(P))$ olduğunu gösterirsek kanıt tamamlanır.

$a \in I$ alalım. O zaman $\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & a & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(I) = (P)$.

$\Rightarrow a = h(P).x$, $x \in R \Rightarrow a \in (h(P))$. Böylece $I \subseteq (h(P))$ olur. $\mathcal{R}_3(I) = (P)$ ve$\mathcal{R}_3(R)$ birimli değişmeli olduğundan $P \in \mathcal{R}_3(I)$ olur ve buradan $h(P) \in I$ olup böylece $(h(P)) \subseteq I$ olur. Sonuç olarak $I = (h(P))$.

□

- $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında sıfırdan farklı A ve B rotrislerinin çarpımı 0(sıfır) a eşittir. Bu yüzden, $\mathcal{R}_3(R)$ halkası sıfır bölenlere sahiptir ve tamlık bölgesi değildir.

Uyarı 3.3.5. Bir rotris halkasının her ideali esas ideal olabilir fakat rotrisler halkası tamlık bölgesi olmadığı için esas ideal bölgesi olamaz.

Teorem 3.3.6. R bir halka ve I R nin ideali olmak üzere $\mathcal{R}_3(R/I)$ kümesi "$\widehat{+}$" , "$\odot$" işlemleri ile bir halkadır. Ayrıca $\mathcal{R}_3(R/I)$ halkası ile $\mathcal{R}_3(R)/\mathcal{R}_3(I)$ bölüm halkası izomorftur.

Kanıt. R/I halka olduğundan $\mathcal{R}_3(R/I)$ kümeside üzerinde bilinen "$\widehat{+}$" ve "$\odot$" işlemleri ile bir halkadır.

Her $\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ için $f\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle\right) = \left\langle \begin{array}{ccc} & a+I & \\ b+I & c+I & d+I \\ & e+I & \end{array} \right\rangle$

şeklinde $f : \mathcal{R}_3(R) \to \mathcal{R}_3(R/I)$ dönüşümünü tanımlayalım.

Keyfi $A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle, B = \left\langle \begin{array}{ccc} & x & \\ y & z & t \\ & u & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(R)$ elemanlarını alalım.

- $A = B \Rightarrow a = x,\ b = y,\ c = z,\ d = t,\ e = u$
  $\Rightarrow a+I = x+I,\ b+I = y+I,\ c+I = z+I,\ d+I = t+I,\ e+I = u+I$
  $\Rightarrow f(A) = f(B)$

  olduğu için f iyi tanımlıdır.

$$\begin{aligned} f(A\widehat{+}B) &= \left\langle \begin{array}{ccc} & (a+x)+I & \\ (b+y)+I & (c+z)+I & (d+t)+I \\ & (e+u)+I & \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{ccc} & a+I & \\ b+I & c+I & d+I \\ & e+I & \end{array} \right\rangle \widehat{+} \left\langle \begin{array}{ccc} & x+I & \\ y+I & z+I & t+I \\ & u+I & \end{array} \right\rangle \\ &= f(A)\widehat{+}f(B) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
f(A \odot B) &= f\left(\left\langle \begin{array}{ccc} & a.z+c.x & \\ b.z+c.y & c.z & d.z+c.t \\ & e.z+c.u & \end{array} \right\rangle\right) \\
&= \left\langle \begin{array}{ccc} & (a.z+c.x)+I & \\ (b.z+c.y)+I & (c.z)+I & (d.z+c.t)+I \\ & (e.z+c.u)+I & \end{array} \right\rangle \\
&= f(A) \odot f(B)
\end{aligned}
$$

Böylece, f bir halka homomorfizmasıdır.

$Kerf = \left\{P \in \mathcal{R}_3(R) : f(P) = 0_{\mathcal{R}_3(R/I)}\right\}$

$A = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{array} \right\rangle \in Kerf$ için $f(A) = 0_{\mathcal{R}_3(R/I)}$ olduğundan

$$
\left\langle \begin{array}{ccc} & a+I & \\ b+I & c+I & d+I \\ & e+I & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & I & \\ I & I & I \\ & I & \end{array} \right\rangle
$$

$a+I=I,\ \ b+I=I,\ \ c+I=I,\ \ d+I=I,\ \ e+I=I$ olur. Buradan $a,b,c,d,e \in I$ olur. Böylece $A \in \mathcal{R}_3(I)$. $\ Kerf \subseteq \mathcal{R}_3(I)$.

Tersine $\mathcal{R}_3(I) \subseteq Kerf$ olduğu aşikardır.

Sonuç olarak $Kerf = \mathcal{R}_3(I)$ elde ederiz.

$$\begin{aligned} Imf &= \{f(P) : P \in \mathcal{R}_3(R)\} \\ &= \left\{ \left\langle \begin{array}{ccc} & a+I & \\ b+I & c+I & d+I \\ & e+I & \end{array} \right\rangle : a,b,c,d,e \in R \right\} = \mathcal{R}_3(R/I) \end{aligned}$$

Böylece, f örtendir.

Sonuç olarak, I.izomorfizma teoreminden $\mathcal{R}_3(R)/\mathcal{R}_3(I) \cong \mathcal{R}_3(R/I)$ □

Halka teoride asal idealler önemli bir rol oynar. Öncelikle asal idealin tanımını hatırlayalım. R bir halka , $P \lhd R$ olmak üzere $a,b \in R$ için $aRb \subseteq P$ iken ya $a \in P$ ya da $b \in P$ oluyor ise P ye R de asal ideal denir. Bizde sıradaki teoremde $\mathcal{R}_3(R)$ rotris halkasının asal ideallerini karakterize etmeye çalışacağız.

Teorem 3.3.7. R bir halka ve $\mathcal{R}_3(P)$, $\mathcal{R}_3(R)$ 3-boyutlu Rotris halkasının bir asal ideali olsun. O zaman P , R nin asal idealidir.

Kanıt. $\mathcal{R}_3(P) \lhd \mathcal{R}_3(R) \Rightarrow P \lhd R$ olduğunu Teorem 3.3.1 de göstermiştik ve şimdi asal olduğunu gösterelim.

$a,b \in R$ elamanlarını alalım ve $aRb \subseteq P$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $axb \in P$ dir.

Buradan $\left\langle \begin{array}{ccc} & axb & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(P)$ olur.Yani

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & axb & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & x & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & b & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle$$

ve $\mathcal{R}_3(P)$ asal ideal olduğundan ya $\left\langle \begin{array}{ccc} & a & \\ 0_R & 0_R & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(P)$ ya da

$\left\langle \begin{array}{ccc} & 0_R & \\ 0_R & b & 0_R \\ & 0_R & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(P)$ dir. Buradan ya $a \in P$ ya da $b \in P$ olur. Böylece P , R de bir asal idealdir. □

Ancak tersi doğru değildir yani P , R halkasının bir asal ideali iken $\mathcal{R}_3(P)$, $\mathcal{R}_3(R)$ 3-boyutlu rotris halkasının bir asal ideali olmak zorunda değildir.

Örnek 3.3.8. $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasını düşünelim. $3\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının bir asal idealidir. Ancak $\mathcal{R}_3(3\mathbb{Z})$, $\mathcal{R}_3(\mathbb{Z})$ halkasında bir idealdir ancak asal ideal değildir. Gerçektende

$\left\langle \begin{array}{ccc} & -2 & \\ 5 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle, \left\langle \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & 6 & -1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(\mathbb{Z})$ elemanlanlarını alırsak

$$\left\langle \begin{array}{ccc} & -2 & \\ 5 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle \odot \left\langle \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & 6 & -1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 33 & 18 & 3 \\ & 18 & \end{array} \right\rangle \in \mathcal{R}_3(3\mathbb{Z})$$

fakat $\left\langle \begin{array}{ccc} & -2 & \\ 5 & 3 & 1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle \notin \mathcal{R}_3(3\mathbb{Z})$ ve $\left\langle \begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & 6 & -1 \\ & 2 & \end{array} \right\rangle \notin \mathcal{R}_3(3\mathbb{Z})$.

Aşağıdaki teorem ise bize bir rotrisler halkası $\mathcal{R}_3(R)$ da bir idealin asal olması için kalbinin R halkasının asal idelinde olmasının yeticeğini gösterecektir.

Teorem 3.3.9. *K $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında bir ideal olmak üzere K nın asal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $A \in K$ için $h(A) \in P$ olacak şekilde bir P asal idealinin var olmasıdır.*

Kanıt. K $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında bir ideal iken her $A \in K$ için $h(A) \in P$ olacak şekilde bir P idealinin olduğunu biliyoruz. (Bakınız 3.3.2). Şimdi bu P idealinin asal olduğunu

gösterelim.
Her $a,b \in R$ için $a.R.b \subseteq P$ olsun. O zaman keyfi bir $c \in R$ için $a.c.b \in P$ olur. Buradanda en az bir $A \in K$ var öyle ki $h(A) = a.c.b$.

$A = X \odot Y \odot Z$ öyle ki $h(X) = a$, $h(Y) = c$, $h(Z) = c$ olacak şekilde X,Y,Z rotrisleri vardır. K bir ideal, $A \in K$ ve keyfi bir $c \in R$ için $Y \in \mathcal{R}_3(R)$ olduğundan ya $X \in K$ ya da $Z \in K$ olur. Buradanda ya $a \in P$ ya da $b \in P$ olur.

Sonuç olarak P R halkasında asal bir idealdir.

Tersine; 3.3. den eğer her $A \in K$ için $h(A) \in P$ olacak şekilde R halkasında bir P ideali var ise K nın da $\mathcal{R}_3(R)$ da bir ideal olduğunu biliyoruz. Şimdi ise K idealinin asallığını göstermeliyiz.
Keyfi $X,Y \in \mathcal{R}_3(R)$ için
$X \odot \mathcal{R}_3(R) \odot Y \subseteq K$ olsun. Öyleyse her $A \in \mathcal{R}_3(R)$ için $X \odot A \odot Y \in K$ olur. Buradanda $h(X \odot A \odot Y) = h(X).h(A).h(Y) \in P$ olur ve P asal olduğundan ya $h(X) \in P$ ya da $h(Y) \in P$ olur. Böylece ya $X \in K$ ya da $Y \in K$ olur.

Sonuç olarak K $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında bir asal idealdir. □

Teorem 3.3.10. $\mathcal{R}_3(R)$ ve R bir halka, $\mathcal{R}_3(M)$ de $\mathcal{R}_3(R)$ nin maksimal ideali olsun. O zaman M , R nin maksimal idealidir.

Kanıt. 3.3.1 dan M nin R bir ideali olduğu görülür. R nin kendinden farklı bir J idealini alalım ve $M \subset J \subset R$ olsun.

$M \subset J \subset R \Rightarrow \mathcal{R}_3(M) \subset \mathcal{R}_3(J) \subset \mathcal{R}_3(R)$ olur ve $J \neq R$ olduğundan $\mathcal{R}_3(J) \neq \mathcal{R}_3(R)$ olur ve ayrıca $\mathcal{R}_3(M)$ maksimal ideal olduğundan $\mathcal{R}_3(M) = \mathcal{R}_3(J)$ dir.

Böylece $M = J$ olur. Sonuç olarak M , R nin maksimal idealidir.

□

Ancak tersi doğru değildir.

Örneğin; R halka ve I maksimal ideal olsun. $M = \left\langle \begin{array}{ccc} & R & \\ R & I & R \\ & R & \end{array} \right\rangle$ olarak düşünelim.

M , $\mathcal{R}_3(R)$ nin bir idealidir ve $\mathcal{R}_3(I) \subseteq M \subseteq \mathcal{R}_3(R)$.

Teorem 3.3.11. $K \lhd \mathcal{R}_3(R)$ olmak üzere $M = \{a \in R : a = h(A)\ ,\ A \in K\}$ R halkasının maksimal ideali ise K da $\mathcal{R}_3(R)$ kümesinin maksimal idealidir.

Kanıt. Farzedelim ki K maksimal ideal olmasın o zaman $K \subseteq J \subseteq \mathcal{R}_3(R)$ olacak şekilde bir J ideli vardır.

J ideal olduğu için her $A \in J$ için $h(A) \in I$ olacak şekilde R de bir I ideali vardır. $K \subseteq J$ olduğundan her $B \in K$ için $h(B) \in I$ olur ve böylece $M \subseteq I$ olur fakat her $A \in J$ için $h(A) \notin M$ olduğundan $I \subsetneqq M$ olur. Sonuç olarak $M \subseteq I \subseteq R$ olacak şekilde R de bir J ideali vardır. Buda M nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla K $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında maksimal ideal olmalıdır.

□

Örnek 3.3.12. $R = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının tüm ideallerini belirleyiniz ve bazı özelliklerini inceleyiniz.

$\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ halkasının idealleri $A =< \overline{0} >\ ,\ B =< \overline{2} >\ ,\ C =< \overline{3} >\ ,\ D = R$ şeklindedir.

Buradan $\mathcal{R}_3(R)$ halkasının idealleri de aşağıdaki gibidir.

$K = \mathcal{R}_3(R)\ ,\quad K_1 = 0_{\mathcal{R}_3(R)}\ ,\quad K_2 = \mathcal{R}_3(B)\ ,\quad K_3 = \mathcal{R}_3(C)\ ,$

$$K_4 = \left\langle \begin{array}{ccc} & R & \\ R & A & R \\ & R & \end{array} \right\rangle ,\ K_5 = \left\langle \begin{array}{ccc} & R & \\ R & B & R \\ & R & \end{array} \right\rangle ,\ K_6 = \left\langle \begin{array}{ccc} & R & \\ R & C & R \\ & R & \end{array} \right\rangle .$$

Dahası, B ve C idealleri R halkasında asal oldukları için K_5 ve K_6 idealleri de $\mathcal{R}_3(R)$ halkasında asal olurlar.

Gerçektende; keyfi $X, Y \in \mathcal{R}_3(R)$ için $X \odot Y \in K_5$ ise $h(X \odot Y) = h(X).h(Y) \in B$ olur.
Buradanda B asal olduğu için ya $h(X) \in B$ ya da $h(Y) \in B$ olur.
Böylece ya $X \in K_5$ ya da $Y \in K_5$ olur.

Benzer şekilde K_6 idealinin asallığıda gösterilebilir.

$$
\begin{tikzcd}
 & K & \\
K_6 \arrow[ur] & & K_5 \arrow[ul] \\
K_3 \arrow[u] & & K_2 \arrow[u] \\
 & K_1 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Ayrıce B ve C idealleri maksimal ideal olduğundan K_5 ve K_6 idealleri de maksimaldir. Yukarıdaki grafikte bunu kolaylıkla görebiliriz.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada bileşenleri keyfi bir R halkasından olan 3-boyutlu rotris kavramı verilmiş ve bu rotrisler kümesi üzerinde bazı cebirsel işlemler tanımlanmıştır. Ayrıca oluşturduğumuz bu kümenin üzerindeki işlemler ile halka yapısı oluşturduğu gösterilmiş ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

Atanassov, K.T. and Shannon, A.G. (1998) Matrix-Tertions and Matrix-Noitrets: Exercises in Mathematical Enrichment, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 29, 898-903

Ajibade, A.O. (2003)The Concept of Rhotrix in Mathematical Enrichment, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* , 34, 175-179

Sani, B. (2004)An Alternative Method for Multiplication of Rhotrices, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35, 777-781

Sani, B. (2007)The Row-Column Multiplication of Higher Dimensional Rhotrices, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38, 657-662

Mohammed, A. (2007)Enrichment Exercises through Extension to Rhotrices , *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38, 131-136

Mohammed, A. (2009)A Remark on the Classification of Rhotrices as Abstract Structures, *International Journal of Physical Sciences*, 4,496-499

Mohammed, A., Balarabe, M. and Imam, A.T. (2012)Rhotrix Linear Transformation, *Advances in Linear Algebra and Matrix Theory*, 2, 43-47

Aminu, A. (2009) On the Linear System over Rhotrices, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 15, 7-12

Aminu, A. (2010) Rhotrix Vector Spaces,*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41, 98-105

Aminu, A. (2010) An Example of Linear Mappings: Extansion to Rhotrices ,*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41, 691-698

Tudunkaya, S.M. and Makanjuola, S.O. (2010)Rhotrices and the Construction of Finite Fields ,*Bullettin of Pure and Applied Sciences*, 29e, 225-229

Usaini, S. and Tudunkaya, S.M. (2011)Note on Rhotrices and the Construction of Finite Fields ,*Bullettin of Pure and Applied Sciences*, 30e, 53-59

Tudunkaya, S.M. and Makanjuola, S.O. (2012)On the Structure of Rhotrices ,*National Association of Mathematical Physics*, 21, 271-280

Tudunkaya, S.M. and Makanjuola, S.O. (2013)Rhotrix Polynomial and Polynomial Rhotrices , *Pure and Applied Mathematics Journal*, 2, 21-25

Yang Gang (2007)Semicommutative and Reduced Rings, *Vietnam Journal of Mathematics*, 35, 1-7

G. Shin (1973)Prime ideal and Sheaf Representation of a Pseudo Symmetric Rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 184, 43-60

Dummit, D.S. Foote, R.M. (2004)Ring Theory, Battista J.,*Abstract Algebra*,3.baskı, USA, 932s

Malik, D.S. Mordeson, J.M. Sen, M.K.(1997) , *Fundamentals of Abstract Algebra*, McGraw-Hill Companies, USA, 636s

Hungerford (1980) , *Algebra*, Springer, USA, 512s

Gene Abrams, Pere Ara and Mercedes S.M. (2017) , *Leavitt Path Algebras*, Springer

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad: Betül COŞGUN

Doğum Yeri ve Tarihi: İzmir , 10.03.1993

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum / Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Gaziemir Lisesi	2011
Lisans	Trakya Üniversitesi	2015

Yabancı Dil(ler)

İngilizce	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		x	
Konuşma		x	
Anlama		x	
Okuma		x	

Sertifika

1. Pedagojik Formasyon Sertifikası,Trakya Üniversitesi,2015