T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL HİPERHALKALAR

NESLİHAN AYTAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. GÜRSEL YEŞİLOT

İSTANBUL, 2018

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL HİPERHALKALAR

Neslihan AYTAÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 19.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL

Marmara Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Cebirsel yapılar yıllar geçtikçe çeşitlilik göstererek artmıştır. 1934'te temeli atılan cebirsel hiperyapılar; fizik, kimya, bilgisayar bilimleri alanlarında uygulamalara sahiptir. Bu çalışmada çarpımsal hiperhalkaların temel özelliklerinden bahsederek aynı yolda yürümeye çalıştık.

Çalışmamın her aşamasında desteklerini esirgemeyen, tavsiyeleriyle yol gösteren değerli hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT'a teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi her konuda yanımda olan aileme, dostlarıma sevgi ve şükran duyduğumu belirtmek isterim.

Aralık, 2018

Neslihan AYTAÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$P^{*}(H)$	H kümesinin bütün alt kümelerinin kümesi
Rad(I)	Bir idealin radikali
$\circ$	Hiperişlem
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$(\Rightarrow)$	Gerek şart
$(\Leftarrow)$	Yeter şart
$(\Leftrightarrow)$	Ancak ve ancak
$<a>$	Bir a elemanıyla üretilen ideal
Çekf	Bir f fonksiyonunun çekirdeği

KISALTMA LİSTESİ

AMS	Amerikan Matematik Derneği

ÖZET

ÇARPIMSAL HİPERHALKALAR

Neslihan AYTAÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Cebirsel hiperyapılar, klasik cebirsel yapılarla benzerlikler gösterir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde cebirsel hiperyapılar ile ilgili temel tanım ve kavramlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde dağılma ve kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalkaların özelliklerinden bahsedilmiştir. Sağdan kuvvetli dağılma özelliğine sahip ideallerin soldan da dağılma özelliğine sahip olma şartları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise 2-yutan ve 2-yutan asalımsı hiperideallerin bazı özellikleri örneklerle açıklanmıştır. Bu hiperideallerin radikalleriyle ilgili teoremler verilmiştir. C-ideallerle ilgili birkaç sonuç verilmiş ve çalışma tamamlanmıştır. AMS 2010 konu kodu: 20N20

Anahtar Kelimeler: Hiperhalkalar, çarpımsal hiperhalkalar, hipergruplar, 2-yutan hiperidealler, 2-yutan asalımsı idealler, C-idealler.

ABSTRACT

MULTIPLICATIVE HYPERRINGS

Neslihan AYTAÇ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Algebraic hyperstructures have similar properties with classical algebraic structures. In this thesis in second chapter definitions of hyperstructures were written down. In third section the properties of strongly distributive multiplicative hyperrings were mentioned. If a hyperring is strongly distributive from right, then we said the conditions for strongly left distributivity. So it is strongly distributive. In fourth section the definitions of 2-absorbing and 2-absorbing primary hyperideals was given with examples. Some theorems were given about their radicals. Some results were given about C-ideals and study was completed. AMS 2010 Classification: 20N20

Keywords: Hyperrings, multiplicative hyperrings, hypergroups, 2-absorbing hyperideals, 2-absorbing primary hyperideals, C-ideals.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Cebirsel hiperyapılar veya hipersistemler klasik cebirin köklü dallarından biridir. Hiperyapılar ilk olarak F Marty tarafından 1934'te 8. İskandinav Matematik kongresinde tanıtılmıştır [1]. Daha sonra birçok araştırmacı bu konu üzerinde derinleşmiş ve çalışmalar yapmıştır. Cebirsel hiperyapıların uygulamalı bilimler, bilgisayar bilimleri, kimya, fizik, bulanık yapılar gibi dallarda da uygulamaları mevcuttur. Örneğin bazı elementlerin redoks tepkimelerinin sonuçları hipergrup oluşturur [2].

Çarpımsal hiperhalkalar ise ilk olarak Rosaria Rota tarafından 1982 yılında bulunmuştur [3]. Daha sonra 1990'da yine Rota tarafından kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalkalar çalışılmıştır [5]. Bazı çarpımsal hiperhalkalara örnekler verilmiştir. Krasner tarafından tanıtılan Krasner halkaları da hiperhalkaların önemli bir sınıfını oluşturur [4]. Krasner hiperhalkalarında hiperişlem toplama iken Rota'nın hiperhalkalarında çarpmadır.

Değişmeli halkalarda 2-yutan ideallerden, 2007 yılında A. Badawi tarafından ilk olarak bahsetmiştir [6]. Bu idealler asal ideallerin daha genel halidir. n-yutan (n-absorbing) idealler yine Badawi ve Anderson tarafından tanıtılmıştır [7]. Klasik cebirdeki her bir eleman tek elemanlı bir küme olarak kabul edilerek tüm özellikler hiperyapılara aktarılabilir. Bu bağlamda cebirdeki birçok özellik hiperyapılarda da diğer matematikçiler tarafından incelenmiştir. Asal hiperidealler Procesi ve Rota tarafından klasik cebire benzer bir şekilde tanımlanmıştır [8]. Ayrıca asal ve asalımsı hiperidealler

Dasgupta tarafından detaylıca tanıtılmış, birçok özellik incelenmiştir. C-idealler yine Dasgupta tarafından bulunmuştur [9].

Hiperyapılar 2007'de Davvaz ve Leoreanu-Fotea tarafından kitap haline getirilmiş ve önemli bir kaynak oluşturmuştur [10]. Yapılan çalışmalarda derine inildikçe yukarıda bahsettiğimiz matematikçilere ek olarak Ameri, Norouzi, Corsini, Vougiouklis ve diğer birçok araştırmacının cebirsel hiperyapılar ve standart cebirsel yapılar arasında ilişkiler kurulmuştur. Halkalarda olduğu gibi modüllerde veya cisimlerde de hiperişlemler tanımlanmıştır. Bu alanlarda da yapılan çalışmalar hala devam etmektedir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada değişmeli cebirde bulunan çarpımsal yapılar ile cebirsel hiperyapılar arasında kurulan benzerlikler incelenmiştir. Bir halkadan, ideali kullanılarak, nasıl hiperyapı kurulabileceği üzerinde durulmuştur. Çarpımsal hiperhalkaların özellikleri, bu halkaların hiperidealleri ve bu hiperideallerin radikallerinden bahsedilmiştir. Bazı temel teoremler ve tanımlar sıralanmıştır. Hiperhalkalarda çalışmak isteyenlere temel kaynak oluşturmak amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

Değişmeli halkalarda idealler, asal idealler, asalımsı idealler ne ise değişmeli ve çarpımsal hiperhalkalarda da aynı yapılar tanımlanabilir. Bu yapılar kuvvetli dağılma özelliğine sahip ise üzerinde tanımlanan işlemine göre halka yapısı oluşturulabilir. Asal hiperideallerin genel hali n-yutan hiperidealler bulunur. Bu hiperideallerin radikalleri bazen asal olurken bazen asalımsı olabilir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız temel tanımları sıralayalım.

Tanım 2.1 $P^*(H)$, H kümesinin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere

$$\circ : HxH \to P^*(H) \tag{2.1}$$

olarak tanımlı işleme hiperişlem denir. $(H,\circ)$ cebirsel yapısına hipergrupoid denir. $A,B \in P^*(H)$ ve $x \in H$ olmak üzere $\circ$ hiperişlemi

$$A \circ B = \bigcup_{a\in A, b\in B} a \circ b \Rightarrow A \circ x = A \circ \{\mathrm{x}\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.2 $(H,\circ)$ cebirsel yapısı eğer birleşme özeliğini sağlıyorsa yani her $a,b,c \in H$ için $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ oluyorsa yarı hipergrup (semihypergroup) adını alır.

Tanım 2.3 $(H,\circ)$ bir yarı hipergrup olsun. Her $a \in H$ için $a \circ H = H = H \circ a$ oluyorsa $H \circ \{a\} = H = \{a\} \circ H$ kuazi hipergrup (quasihypergroup) adını alır.

Tanım 2.4 $(H,\circ)$ cebirsel yapısı hem yarı hipergrup hem de kuazi hipergrup ise hipergrup adını alır.

Tanım 2.5 $(H,\circ)$ yarı hipergrubunun boştan farklı bir alt kümesi K olsun. Her $x \in K$ için $x \circ K = K = K \circ x$ ise K'ya H'nin alt hipergrubu denir.

Tanım 2.6 $(H,\circ)$ değişmeli hipergrubu

i) $\forall x \in H \quad e \circ x = \{x\}$ için $e \in H$ vardır.

ii) $\forall x \in H$ için $e \in x \circ x^{-1}$ olacak şekilde tek bir x^{-1} vardır.

iii) $x \in y \circ z$ ise $y \in x \circ z^{-1}$ olur.

şartlarını sağlıyorsa kanonik hipergrup adını alır.

Tanım 2.7 $(R,+,\circ)$ cebirsel yapısı

i) $(R,+)$ hipergruptur.

ii) $(R,\circ)$ yarı hipergruptur yani $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ 'dir.

iii) $\circ$ işlemi $+$ üzerine dağılmalıdır.

şartlarını sağlıyorsa genel hiperhalka adını alır.

Tanım 2.8 $(R,+,\circ)$ cebirsel yapısı

i) $(R,+)$ kanonik hipergruptur.

ii) $(R,\circ)$ yarı hipergrubu iki taraflı yutan elemana sahiptir yani her $x \in R$ için $x \circ 0 = 0 \circ x = 0$ olacak bir 0 elemanı vardır.

iii) $\forall x,y,z \in R$ elemanları için $x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z$ ve $(y+z) \circ x = y \circ x + z \circ x$

şartlarını sağlıyorsa Krasner hiperhalkası adını alır [4] .

Tanım 2.9 $(R,+,\circ)$ cebirsel yapısı

i) $(R,+)$ değişmeli grup

ii) $(R,\circ)$ yarı hipergrup

iii) $\forall x,y,z \in \mathrm{R}$ için $x \circ (y+z) \subseteq x \circ y + x \circ z$ ve $(y+z) \circ x \subseteq y \circ x + z \circ x$

iv) $\forall x,y \in R$ için $x \circ (-y) = (-x) \circ y = -(x \circ y)$ şartlarını sağlıyorsa çarpımsal hiperhalka adını alır [5] .

Yukarıdaki **(iii)** şıkkında $\subseteq$ yerine = olursa R hiperhalkası kuvvetli dağılma özeliğine sahiptir denir. Üçüncü bölümde bu özelliğe sahip çarpımsal hiperhalkaları inceleyeceğiz.

Tanım 2.10 $(R,+,\circ)$ cebirsel yapısının boş kümeden farklı bir alt kümesi I olsun.

i) $\forall x,y\in R$ için $x-y\subseteq I$

ii) $\forall r\in R$ ve $\forall x\in I$ için $r\circ x\subseteq I$ şartları sağlanıyorsa I kümesine R hiperhalkasının hiperideali denir.

Tanım 2.11 R bir hiperhalka ve R'nin bir hiperideali I olsun. $R/I=\{x+I, x\in R\}$ şeklinde tanımlanan yapıya bölüm hiperhalkası denir. Burada işlemler aşağıdaki gibidir.

$(x+I)\oplus(y+I)=\{z+I, z\in x+y\}$

$(x+I)\odot(y+I)=\{u+I, u\in x.y\}$

Tanım 2.12 R_1 ve R_2 iki hiperhalka olsun. R_1 hiperhalkasından R_2'ye tanımlı bir f fonksiyonu

i) $f(a+b)\subseteq f(a)+f(b)$ ve $f(a.b)=f(a).f(b)$ şartlarını sağlıyorsa homomorfizma adını alır.

ii) $f(a+b)=f(a)+f(b)$ ve $f(a.b)=f(a).f(b)$ şartlarını sağlıyorsa iyi (kuvvetli) homomorfizma adını alır.

Tanım 2.13 R bir hiperhalka ve R'nin bir hiperideali P olsun. R hiperhalkasının iki ideali A ve B için $A\circ B\subseteq P$ iken $A\subseteq P$ veya $B\subseteq P$ oluyorsa P hiperidealine asal hiperideal denir [8] .

Tanım 2.14 R değişmeli bir hiperhalka ve R'nin bir hiperideali Q olsun. Her $a,b\in R$, $a\circ b\subseteq Q$ ve $a\not\subseteq Q$ olduğunda bir $n\in\mathbb{N}$ için $b^n\subseteq Q$ oluyorsa Q hiperidealine R hiperhalkasının asalımsı hiperideali denir [9] .

Tanım 2.15 R değişmeli bir hiperhalka ve R'nin bir hiperideali I olsun. R hiperhalkasının I hiperidealini kapsayan tüm asal hiperideallerinin kesişimine I hiperidealinin radikali denir. $Rad(I)$ veya $\sqrt{I}$ olarak gösterilir [9]. Bu tanım değişmeli hiperhalkada

$Rad(I)=\left\{a\in R \mid a^n\in I, n\in\mathbb{N}^+\right\}$ şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.16 R değişmeli bir hiperhalka ve R'nin bir hiperideali Q olsun. Eğer Q hiperidealinin radikali $Rad(Q)=P$ asal ise Q hiperidealine P-asalımsı denir.

Tanım 2.17 $(R,+,\circ)$ bir çarpımsal hiperhalka ve I onun boştan farklı bir hiperideali olsun. Bir P asal hiperideali $I\subseteq P$ olacak şekilde bulunsun. Eğer $I\subseteq P\subseteq P'$ olacak şekilde bir P' asal hiperideali yoksa P kümesine I' nın minimal asal hiperideali denir.

Tanım 2.18 $(R,+,\circ)$ değişmeli bir hiperhalka ve $x \in R$ olsun. Eğer bir $n > 0$ için $x^n = \{0\}$ oluyorsa x elemanına R'nin nilpotent elemanı denir. Eğer $0 \in x^n$ oluyorsa x elemanına zayıf nilpotent eleman denir [12].

Tanım 2.19 $(R,+,\circ)$ değişmeli bir hiperhalka ve $x \in R$ olsun. Eğer $\{x\} = x \circ x = x^2$ ise x'e idempotent eleman denir. Eğer $x \in x^2$ ise x elemanına zayıf idempotent denir [12].

Tanım 2.20 $(R,+,\circ)$ değişmeli bir hiperhalka ve $x \in R$ olsun. Eğer $x \circ y = \{0\}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $y \in R$ varsa x'e sıfır bölen denir. $0 \in x \circ y$ ise x'e zayıf sıfır bölen denir [12].

BÖLÜM 3

ÇARPIMSAL HİPERHALKALAR

3.1 Çarpımsal Hiperhalkalar

Tanım 3.1 R bir halka olsun ve bu halka üzerinde bir hiperişlem tanımlansın. $(R,+,\circ)$ cebirsel yapısı

i) $(R,+)$ değişmeli grup

ii) $(R,\circ)$ yarı hipergrup

iii) $\forall x,y,z\in R$ için $x\circ(y+z)\subseteq x\circ y+x\circ z$ ve $(y+z)\circ x\subseteq y\circ x+z\circ x$

iv) $\forall x,y\in R$ için $x\circ(-y)=(-x)\circ y=-(x\circ y)$ şartlarını sağlıyorsa çarpımsal hiperhalka adını alır [5] .

Ön bilgiler kısmında da yazmış olduğumuz bu tanımla ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 3.1 $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi olmak üzere $(Z_m,+,\cdot)$ yapısını düşünelim. Bu kümede hiperişlem $a\circ b=\{ab,pab\}$ $p\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, m)$ şeklinde tanımlansın.

i) $\mathbb{Z}$ değişmeli olduğundan açıktır.

ii) $(a\circ b)\circ c=\{ab,pab\}\circ c=\{abc,pabc,pabc,p^2abc\}$ ve

$a\circ(b\circ c)=a\circ\{bc,pbc\}=\{abc,pabc,pabc,p^2abc\}$ olduğundan iki küme eşittir.

$(a+b)\circ c=\{(a+b)c,p(a+b)c\}\subseteq a\circ c+b\circ c=\{ac,pac\}+\{bc,pbc\}$

$=\{ac+bc,pac+bc,pac+pbc,ac+pbc\}$ olur.

iii) $a \circ (b+c) \subseteq a \circ b + a \circ c$

$a \circ (b+c) = \{a(b+c), pa(b+c)\} \subseteq \{ab, pab\} + \{ac, pac\} = \subseteq a \circ b + a \circ c$ olur.

iv) $(-a) \circ b = \{-ab, -pab\} = \{a(-b), pa(-b)\} = a \circ (-b) = -(a \circ b)$

$(Z_m, +, \circ)$ cebirsel yapısı çarpımsal hiperhalkadır.

Örnek 3.2 R değişmeli halka ve $a \circ b = (a,b)$ olsun. Burada (a,b) a ve b elemanları ile üretilen ideal olsun.

$(r,s) = \{rx + sy \mid x, y \in R\}$ olduğunu hatırlatalım.

i) $(a \circ b) \circ c = \bigcup\limits_{x \in a \circ b} x \circ c$

$= \{(ar + bs + an + bm)r' + ct + (ar + bs + an + bm)n' + cm'; r, s, r', t \in R; n, m, n', m' \in \mathbb{Z}\}$

$= \{ar'' + bs'' + ct'' + au + bv + cw; r'', s'', t'' \in R, u, v, w \in \mathbb{Z}\} = (a,b,c)$

$a \circ (b \circ c) = (a,b,c)$

ii) $(a+b) \circ c = (a+b, c) = \{(a+b)r + cs + (a+b)n + cm; r, s \in R, n, m \in \mathbb{Z}\}$

$a \circ c + b \circ c = (a,c) + (b,c)$

$= \{ar' + cs' + an' + cm' + br'' + cs'' + bn'' + cm''; r', s', r'', s'' \in R; n', m', n'', m'' \in \mathbb{Z}\}$

Buradan $(a+b) \circ c \subseteq a \circ c + b \circ c$ olur.

iii) $\circ$ işlemi değişmeli olduğu için açıktır.

iv) $(-a) \circ b = -(a,b) = (a,-b) = -(a,b)$

Örnek 3.3 $(R, +, \circ)$ birimli halka ve S, R halkasının birimini içeren bir alt halkası olmak üzere $a \circ b = aS \cup bS$ hiperişlemi tanımlansın.

i) $(a \circ b) \circ c = (aS \cup bS) \circ c = \bigcup\limits_{x \in aS \cup bS} x \circ c = \bigcup\limits_{s \in S} (as\mathrm{S} \cup c\mathrm{S} \cup b\hat{s}\mathrm{S} \cup c\mathrm{S}) = a\mathrm{S} \cup b\mathrm{S} \cup c\mathrm{S}$

$\forall s \in S$ için $sS \subseteq S$ olur $a \circ (b \circ c) = a\mathrm{S} \cup b\mathrm{S} \cup c\mathrm{S} = (a \circ b) \circ c$ olur.

ii) $(a+b) \circ c = (a+b)\mathrm{S} \cup c\mathrm{S} \subseteq a\mathrm{S} \cup c\mathrm{S} + b\mathrm{S} \cup c\mathrm{S} = a \circ c + b \circ c$

iii) $\circ$ değişmeli olduğu için aşikardır.

iv) $\forall r \in R$ için $rS = (-r)S$ olacaktır.

Örnek 3.4 R değişmeli halka, S onun alt halkası olsun. R halkası üzerinde hiperişlem $a \circ b = abS$ şeklinde tanımlansın.

i) $(a \circ b) \circ c = ab\mathrm{S} \circ c = \bigcup_{x \in abS} x \circ c = \bigcup_{s \in S} abcsS = \bigcup_{y \in bcS} a \circ y = a \circ (b \circ c)$

ii) $(a+b) \circ c = (a+b)c\,\mathrm{S} = (ac+bc)\mathrm{S} \subseteq ac\mathrm{S} + bc\mathrm{S} = a \circ c + b \circ c$

iii) $\circ$ işleminin değişme özelliğinden açıktır.

iv) $(-a) \circ b = -abS = a \circ -b = -(a \circ b)$

Örnek 3.5 $(R,+,\cdot)$ bir halka ve I onun bir ideali olsun. R üzerinde bir $a \circ b = ab + I$ hiperişlemi tanımlansın. $(R,+,\circ)$ yapısı kuvvetli dağılma özelliğine sahip bir çarpımsal hiperhalkadır.

Örnek 3.6 $F = \mathbb{Z}_2[x] \big/ < x^4 + x + 1 >$ halkasını göz önüne alalım. $E = \mathbb{Z}_2[x] \big/ < x^2 + x + 1 >$ kümesi alınsın. E kümesi F 'nin bir alt halkasıdır. Örnek 3.4'te tanımlanan hiperişlemi düşünelim. $a \circ b = abE$ ile tanımlı hiperişleme göre $(F,+,\circ)$ yapısı bir çarpımsal hiperhalkadır.

3.2 Sağdan ve Soldan Kuvvetli Dağılma Özelliğine Sahip Çarpımsal Hiperhalkalar

Önerme 3.1 $(R,+,\circ)$ sağdan kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. $\forall a \in R$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir [5]:

i) $a \circ 0 - a \circ 0 = a \circ 0$

ii) $0 \circ a - 0 \circ a = 0 \circ 0$

iii) $0 \circ 0 - 0 \circ 0 = 0 \circ 0$

iv) $0 \circ 0 \subseteq a \circ 0$

v) $0 \circ a \subseteq 0 \circ 0$

vi) $0 \in 0 \circ 0$ ve $0 \in a \circ 0$ dır.

İspat

i) $a \circ 0 - a \circ 0 = a \circ (0 - 0) = a \circ 0$

ii) $0 \circ a - 0 \circ a = 0 \circ (a - a) = 0 \circ 0$

iii) $0 \circ 0 - 0 \circ 0 = 0 \circ (0 - 0) = 0 \circ 0$

iv) $0 \circ 0 = (a - a) \circ 0 \subseteq a \circ 0 - a \circ 0 = a \circ 0$

v) $0 \circ a = (0 - 0) \circ \mathrm{a} \subseteq 0 \circ \mathrm{a} - 0 \circ a = 0 \circ 0$

vi) $\forall a,b,c \in R$ için $a \circ (b - c) \subseteq a \circ b - a \circ c$ olduğunu biliyoruz. $b = c$ alırsak

$a\circ 0 = a\circ b - a\circ b \subseteq 0$ olur. $0\in a\circ 0$ bulunur. Her $a\in R$ için ispatladık. $a=0$ için de $0\in 0\circ 0$ olacaktır.

Önerme 3.2 $0\circ 0$ ve her $a\in R$ için $a\circ 0$ alt kümeleri R hiperhalkasının alt gruplarıdır.

İspat $x,y\in R$ alalım. $(R,+)$ değişmeli grup olduğundan $x-y\in R$ olacaktır.

$x\circ 0 - y\circ 0 = (x-y)\circ 0 \in a\circ 0$ olur. $a\circ 0$, R'nin alt grubu olur.

$x=y=0$ için $0\circ 0$ kümesinin de R 'nin alt grubu olduğu görülür.

Önerme 3.3 $(R,+,\circ)$ soldan dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. Her $a\in R$ için aşağıdaki sonuçlar geçerlidir.

i) $0\circ 0 \subseteq a\circ 0 \subseteq a\circ(0\circ 0)$

ii) $(0\circ 0)\circ \mathrm{a} \subseteq 0\circ 0$

iii) $0\circ 0 = 0\circ 0\circ 0$

iv) $0\circ a\circ 0 = 0\circ 0$

İspat

i) Önerme 3.1'in (iv) ve (vi) şıklarından $0\in 0\circ 0\subseteq a\circ 0$ daha geniş bir küme olur.

ii) Önerme 3.1 (v)' ten $0\circ a\subseteq 0\circ 0$ olduğunu biliyoruz. O halde $(0\circ 0)\circ a = 0\circ(0\circ a) = \bigcup\limits_{x\in 0\circ a} 0\circ x \subseteq 0\circ 0$ olur.

iii) $0\circ(0\circ 0) = \bigcup\limits_{x\in 0\circ 0} 0\circ x \subseteq 0\circ 0$ (i) şıkkından $0\circ 0\subseteq 0\circ(0\circ 0)$ olur. Çift kapsamadan eşitlik görülür.

iv) $0\circ 0 = 0\circ(0\circ 0)\subseteq 0\circ a\circ 0$ (iii)'den. $0\circ a\circ 0 \subseteq (0\circ 0)\circ 0 = 0\circ 0$ olur.

Önerme 3.4 $0\circ 0$ ve her $a\in R$ için $a\circ 0\circ 0$ kümeleri R 'nin sağ hiperidealleridir.

İspat $0\circ a\subseteq 0\circ 0$ ve $0\circ x\subseteq 0\circ 0$ olduğu önceki önermelerden görülür.

$0\circ 0\circ x \subseteq 0\circ(0\circ 0) = 0\circ 0\circ 0 = 0\circ 0$

$x-y\in a\circ 0\circ 0$ olur.

$0\in 0\circ 0$ olduğunu ve $0\circ 0\subseteq a\circ 0\circ 0$ biliyoruz. $0\in a\circ 0\circ 0$ olur. Yani $a\circ 0\circ 0\neq\varnothing$ olur.

$a\circ 0 - a\circ 0 = a\circ 0$ idi. $a\circ 0\circ 0 - a\circ 0\circ 0 = a\circ 0\circ 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$z\in a\circ 0\circ 0 - a\circ 0\circ 0$ alalım. $x,y\in 0\circ 0$ ve $0\circ 0$ bir grup olduğundan $x-y\in 0\circ 0$ olacaktır. Buradan

$z\in a\circ x - a\circ y = a\circ(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \subseteq a\circ(0\circ 0)$ bulunur.

Tersine bir $w \in a \circ 0 \circ 0$ ve $x, y \in a \circ 0$ alalım.

$w \in a \circ 0 \circ 0 = (a \circ 0 - a \circ 0) \circ 0 \Rightarrow \mathrm{w} \in (\mathrm{x} - \mathrm{y}) \circ 0 \subseteq x \circ 0 - y \circ 0 \subseteq a \circ 0 \circ 0 - a \circ 0 \circ 0$

Herhangi $x \in R$ için

$a \circ 0 \circ 0 \circ x = (a \circ 0) \circ (0 \circ \mathrm{x}) \subseteq (a \circ 0) \circ (0 \circ 0)$

$= a \circ (0 \circ 0 \circ 0) = 0 \circ 0 = a \circ 0 \circ 0$ bulunur.

Önerme 3.5 $(R, +, \circ)$ çarpımsal hiperhalkası soldan sağılma özelliğine sahip olsun. Her $a \in R$ için aşağıdakiler geçerlidir:

i) $0 \circ a - 0 \circ a = 0 \circ a$

ii) $(a \circ 0) - (a \circ 0) = 0 \circ 0$

iii) $0 \circ 0 - 0 \circ 0 = 0 \circ 0$

iv) $0 \circ 0 \subseteq 0 \circ a$

v) $a \circ 0 \subseteq 0 \circ 0$

vi) $0 \in 0 \circ 0$ ve $0 \in 0 \circ a$ olur.

vii) $0 \circ 0$ kümesi $(R, +)$ kümesinin alt grubudur.

viii) $0 \circ a$ kümesi $(R, +)$ kümesinin alt grubudur.

ix) $0 \circ a \subseteq (0 \circ 0) \circ a$

x) $a \circ (0 \circ 0) \subseteq 0 \circ 0$

xi) $0 \circ 0 = 0 \circ 0 \circ 0$

xii) $0 \circ a \circ 0 = 0 \circ 0$

xiii) $0 \circ 0$ kümesi $(R, +, \circ)$ kümesinin sol hiperidealidir.

xiv) $0 \circ 0 \circ a$ kümesi $(R, +, \circ)$ kümesinin sol hiperidealidir.

İspat Önceki önermelere benzer şekilde ispatlar yapılabilir.

Önerme 3.6 $(R, +, \circ)$ sağdan (soldan) kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. Eğer herhangi $a, b \in R$ için $|a \circ b| = k > 1$ ise $(R, +, \circ)$ kümesi soldan (sağdan) da kuvvetli dağılma özeliğine sahiptir [5].

İspat Herhangi $a, b \in R$ için Önerme 3.1 ve $|a \circ b| = k$ olduğunda $0 \circ a = 0 \circ 0 = a \circ 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $0 \circ 0$ kümesi $(R, +)$'nın alt grubudur. Hatta herhangi $a, b \in R$ için $a \circ b = a \circ (b + 0) = a \circ b + a \circ 0 = a \circ b + 0 \circ 0 = \bigcup_{c \in a \circ b} c + 0 \circ 0$ olur. $0 \circ 0$ bir alt grup olduğu için $a \circ b$, kosetlerin birleşimine eşittir. $a \circ b$ koset olmalıdır. Her $x, y, z \in R$ elemanları için $(x + y) \circ z \subseteq x \circ z + y \circ z = (\mathrm{t} + 0 \circ 0) + (\mathrm{s} + 0 \circ 0) = (\mathrm{t} + \mathrm{s}) + (0 \circ 0)$

olur. Bu ise soldan dağılma özelliğine sahip olduğunu gösterir. Zaten $(R,+,\circ)$ hiperhalkası kabulümüzden sağdan kuvvetli dağılma özelliğine sahipti. O halde $(R,+,\circ)$ iki yönden de dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olur.

3.3 Kuvvetli Dağılma Özelliğine Sahip Çarpımsal Hiperhalkalar

Bu bölümde $(R,+,\circ)$ hiperhalkasını her iki yönden de dağılma özelliğine sahip kabul edeceğiz.

Önerme 3.7 $(R,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. Her $a \in R$ için aşağıdakiler geçerlidir:

i) $a \circ 0 = 0 \circ 0 = 0 \circ a$

ii) $0 \circ 0$ kümesi R hiperhalkasının bir hiperidealidir.

İspat

i) Önerme 3.1 (iv) şıkkından $0 \circ 0 \subseteq a \circ 0$ olduğu açıktır. Önerme 3.5'te $a \circ 0 \subseteq 0 \circ 0$ olduğunu biliyoruz. $0 \circ 0 = a \circ 0$ olur. Yine Önerme 3.5'ten $0 \circ 0 \subseteq 0 \circ a$ olduğunu biliyoruz.

Önerme 3.1 (v) şıkkından $0 \circ a \subseteq 0 \circ 0$ olur. Çift kapsamadan $a \circ 0 = 0 \circ 0 = 0 \circ a$ olduğu görülür.

ii) $\forall a,b \in 0 \circ 0$ için $z \in 0 \circ 0 - 0 \circ 0 = 0 \circ 0$ olur. Önerme 3.3' teki (ii) şıkkından $(0 \circ 0) \circ \mathrm{x} \subseteq 0 \circ 0$ bulunur.

Bu önermeden çıkarılacak şu sonuçlara varabiliriz: Eğer $x \in 0 \circ 0$ ise $x \in 0 \circ x$ olur.

Her $a \in R$ ve $a \in 0 \circ a$ için $0 \circ 0 = 0 \circ a = a \circ 0 = R$ olacaktır.

Hatta her $a,b \in R$ için $a \circ b = (a+0) \circ b = a \circ b + 0 \circ 0 = a \circ b + R = R$ olur.

Buradan kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalkalar için aşikâr bir örnek bulmuş oluruz. Bu sebeple bundan sonra sadece herhangi bir $a \in R$ için $a \notin 0 \circ a$ olan kuvvetli sağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalkaları ele alacağız (*eğer varsa*).

Gerçekten eğer $(R,+,\cdot)$ bir halka ve I onun aşikâr olmayan bir ideali olsun. O halde her $a,b \in R$ için $a \circ b = a.b + I$ şeklinde tanımlanırsa $(R,+,\circ)$ halkası kuvvetli dağılma özelliğine sahip bir çarpımsal hiperhalka olur.

Önerme 3.8 $(R,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. Her $a,b \in R$ için $|a \circ b| = k > 1$ olur [5].

İspat Herhangi $a,b \in R$ için $a \circ b = (a+0) \circ b = a \circ b + 0 \circ b = a \circ b + 0 \circ 0 = \bigcup_{c \in a \circ b} c + 0 \circ 0$

Hatta herhangi $c,d \in a \circ b$ için $c - d \in a \circ b - a \circ b = (a-a) \circ b = 0 \circ b = 0 \circ 0$ olduğundan $c + 0 \circ 0 = d + 0 \circ 0$ olur. Herhangi $a,b \in R$ ve $c \in a \circ b$ için $a \circ b = c + 0 \circ 0$ ve $|a \circ b| = |0 \circ 0|$ olur. (En azından $c, d, 0 \in 0 \circ 0$ $|0 \circ 0| = 3 > 1$ olacaktır.)

Önerme 3.9 $R/_{0 \circ 0}$ bölüm hiperhalkası bir halkadır.

İspat $R/_{0 \circ 0}$ değişmeli gruptur. Gerçekten her $a,b \in R$ için $a_1 = a + I \in R/_I$ ve $b_1 = b + I \in R/_I$ alalım.

$a_1 + b_1 = a + 0 \circ 0 + b + 0 \circ 0 = a + b + 0 \circ 0 = b + a + 0 \circ 0 = b + a$ olduğundan küme değişmelidir. Grup ve halka şartları da kolaylıkla gösterilebilir.

Önerme 3.10 $(R,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. Her $x \in R$ elemanı için $x \in 1 \circ x$ ve $x \in x \circ 1$ olacak şekilde $\exists 1 \in R$ elemanı varsa $\forall x, y \in R$ için

i) $1 \circ x = x + 0 \circ 0 = x \circ 1$

ii) $1 \circ x \circ y = x \circ y$ özellikleri yazılabilir [5].

İspat

i) $x \in 1 \circ x$ ve $1 \circ x = x + 0 \circ 0$ olduğundan $\forall c \in 1 \circ x$ için $1 \circ x = c + 0 \circ 0$ olur. $y \in x \circ 1$ için $x \circ 1 = c + 0 \circ 0$ olur.

ii) $c \in x \circ y$ için

$$1 \circ x \circ y = (x + 0 \circ 0) \circ \mathrm{y} = x \circ y + 0 \circ 0 \circ y = x \circ y + 0 \circ 0 = c + 0 \circ 0 + 0 \circ 0 = c + 0 \circ 0 = x \circ y$$

yazılır.

Buraya kadar bulduklarımıza dayanarak kuvvetli dağılma özelliğine sahip bir $(R,+,\circ)$ çarpımsal hiperhalkası üzerine uygun bir çarpma işlemi $\cdot$ tanımlama ihtimalini araştıralım. $(R,+,\circ)$ bir halka ve $0 \circ 0$ onun ideallerinden biri olmak üzere $\forall a,b \in R$ için $a \circ b = a \cdot b + 0 \circ 0$ tanımlanabilir mi?

İlk olarak $(R,+)=(\mathbb{Z},+)$ olsun. $0\circ 0$ kümesi tam sayılar kümesinin bir alt grubu olduğundan $0\circ 0 = m\mathbb{Z}$ formatında olmalıdır. $\mathbb{Z}$ kümesinde şu çarpımı tanımlayabiliriz.

$1\cdot 1 = s$ ve $s\in 1\circ 1$ için $1\circ 1 = s + 0\circ 0$ olur. Hatta $\forall a,b\in\mathbb{N}$ için kuvvetli dağılma özelliğinden $a\circ b = 1\circ 1 + ...+1\circ 1 = abs + 0\circ 0 = (1\circ 1\circ 1\circ 1\circ 1.....\circ 1)+1$ ilk toplamaya göre ab tane terim üzerinden $ab(\mathrm{S}+0\circ 0) = ab\mathrm{S}+0\circ 0$ yazılır.

Bu eşitlik çarpımsal hiperhalka tanımının (iv) özelliğinden ve bağıntılar kullanılarak genişletilebilir. Bu ‘ $\cdot$ ’ işlemi şu şekilde tüm $\mathbb{Z}$ üzerine genişletilebilir:

$\forall a,b\in\mathbb{Z}$ için $a\cdot b = abs$ tanımlansın. $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ değişmeli grup olduğu açıktır. Hatta $(\mathrm{Z},+,\cdot)$ yapısından $(\mathbb{Z},+,\circ)$ yapısına tanımlı $\alpha(a)=a$ fonksiyonu 1-1 ve örten bir homomorfizmadır.

$\alpha(a\cdot b) = abs \in abs + 0\circ 0 = a\circ b = \alpha(a)\circ\alpha(b)$.

Daha da ötesi $(\mathbb{Z},+,\cdot)/m\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z},+,\circ)/0\circ 0$ tanımlı $\beta(\overline{a}) = a + 0\circ 0$ fonksiyonu halka izomorfizmasıdır. Aynı şeyleri $R=\mathbb{Z}_n$ için de söyleyebiliriz.

Önerme 3.11 $(R,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özelliğine sahip hiperhalka olsun. $(R,+)$ yerine $(\mathbb{Z},+)$ veya $(\mathbb{Z}_n,+)$ alınabilir. O halde $(R,+,\cdot)$ değişmeli bir halka ve $0\circ 0$ onun bir ideali olacak biçimde R üzerinde $\cdot$ çarpımı tanımlanabilir. Hatta $\forall a,b\in R$ için $a\circ b = a\cdot b + 0\circ 0$ tanımlanırsa $(R,+,\circ)$ değişmeli hiperhalka olur. Son olarak

$\alpha:(R,+,\cdot)\to(R,+,\circ)$ $\alpha(a)=a$ şeklinde tanımlanan fonksiyon 1-1 örten bir homomorfizma olur. $\beta:(R,+,\cdot)/T \to (R,+,\circ)/0\circ 0$ halka izomorfizması olur. Burada $T=\alpha^{-1}(0\circ 0)$ ‘dır [5].

İspat Önerme 3.12’te bu teoremin daha genel hali için ispat verilecektir.

Önerme 3.12 $(A,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özelliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. $(R,+,\cdot)$ halkasında $\alpha: R\to A$ fonksiyonu

i) $\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x})+\alpha(\mathrm{y})$

ii) $\alpha(\mathrm{x}\cdot \mathrm{y}) \in \alpha(\mathrm{x}) \circ \alpha(\mathrm{y})$ şartlarını sağlayacak şekilde 1-1 ve örten olsun. S kümesi $0 \circ 0$ hiperidealini göstermek üzere, $T = \alpha^{-1}(S)$ kümesi de $(R,+,\cdot)$ kümesinin bir ideali olur. Hatta $(\mathrm{R},+,\cdot)/T \cong (A,+,\circ)/S$ dir.

Ayrıca $(A,+)$ kümesinde α üzerinden $\forall a,b \in A$ için $a \circ b = a \times b + S$ olacak şekilde bir $\times$ çarpımı tanımlanabilir öyle ki $(A,+,\times) \cong (R,+,\cdot)$ olur. Hatta $(A,+,\times)/S \cong (\mathrm{R},+,\cdot)/T$ olur [5] .

İspat $\beta : R/T \to A/S$ ve $\beta(h+T) = \alpha(h) + S$ olarak tanımlı fonksiyon olsun.

$h = k$ alalım.

$h + T = k + T$ olur.

$\beta(h+T) = \alpha(h) + S$

$h = k$ ise α izomorfizma olduğundan $\alpha(h) = \alpha(k)$ olacaktır. O halde $\alpha(h) + S = \alpha(k) + S = \beta(k+T)$ olur. Buradan β iyi tanımlıdır. Bire bir ve örten olduğu da α izomorfizma olduğundan gösterilebilir. Şimdi β fonksiyonunun halka homomorfizması olduğunu gösterelim.

$y \in R, t \in T$ olsun. O halde $\alpha(\mathrm{y}) \in R$ ve $\alpha(\mathrm{t}) \in \mathrm{S}$ olur.

S kümesi A kümesinin hiperideali olduğundan $\alpha(y) \circ \alpha(t) \subseteq S$ olacaktır. Önermenin (ii) kabülünden $\alpha(y \cdot t) \in \alpha(y) \circ \alpha(t)$ olur ki bu $y \cdot t \in \alpha^{-1}(S) = T$ olması demektir. Benzer şekilde $t \cdot y \in T$ olur. Şimdi bir $\beta : R/T \to A/S$ fonksiyonu tanımlayalım. $\beta(h+T) = \alpha(h) + S \quad (h \in R/T)$ α iki grup arasındaki bir izomorfizma olduğundan β iyi tanımlıdır. Hatta $S = \alpha(T)$ olduğundan β fonksiyonu bire bir ve örtendir. Daha ötesi β bir halka izomorfizmasıdır. Gerçekten $\forall \overline{h}, \overline{k} \in R/T$ için α izomorfizma olduğundan

$\beta(\overline{h} \cdot \overline{k}) = \beta(\overline{h \cdot k}) + S = \alpha(h \cdot k) + S = \alpha(h) \circ \alpha(k) + S$ yazılabilir.

$\beta(\overline{h} \cdot \overline{k}) = \beta(h + T \cdot k + T) = \beta(h \cdot k + T) = \beta(\overline{h \cdot k}) + S = \alpha(h \cdot k) + S \subseteq \alpha(h) \circ \alpha(k) + S$

olur.

(ii)' den hiperişlem $a \circ b = c + S$ ile tanımlı idi.

$\alpha(x \cdot y) \in \alpha(x) \circ \alpha(y) = \alpha(h) \circ \alpha(k) + S = \alpha(h) + S \circ \alpha(k) + S = \beta(\overline{h}) \circ \beta(\overline{k})$ olur.

Şimdi $(A,+)$ kümesinde şu çarpımı tanımlayabiliriz. $\forall a,b \in A$ olmak üzere $a \times b = \alpha(h \cdot k)$ dır. Burada $h = \alpha^{-1}(a)$ ve $k = \alpha^{-1}(b)$ olur.

α fonksiyonu izomorfizma olduğundan işlem birleşme özelliğini sağlar. Gerçekten $j,h,k \in R$ ve $c = \alpha(j)$ olmak üzere

$(a \times b) \times c = \alpha(h \cdot k) \times c = \alpha(h \cdot k) \times \alpha(j) = \alpha((h \cdot k) \cdot j)$

$= \alpha(h \cdot (k \cdot j)) = \alpha(h) \times \alpha(k \cdot j) = a \times (b \times c)$ olur.

α fonksiyonunun benzer şekilde dağılma özelliğini sağladığı da gösterilebilir.

$a \times (b + c) = \alpha(h) \times (\alpha(k) + \alpha(j)) = \alpha(h) \times \alpha(k) + \alpha(h) \times \alpha(j)$

$\alpha(h \cdot k) = a \times b = \alpha(h) \times \alpha(k)$ olduğundan α izomorfizmadır.

(ii)' den $a \times b \in a \circ b$ olduğunu biliyoruz. $\alpha : (R,+,\circ) \to (A,+,\times)$ halka izomorfizması olur.

Önerme 3.13 $(A,+,\circ)$ kuvvetli dağılma özeliğine sahip çarpımsal hiperhalka olsun. $S = 0 \circ 0$ kümesi A'nın hiperideali olsun. $(R,+,\cdot)$ halkası bir $\alpha : (R,+) \to (A,+)$ izomorfizması ile var olsun ve şu şartları sağlasın:

i) $T = \alpha^{-1}(S)$ kümesi R 'nin bir ideali olsun.

ii) $\beta : {(R,+,\cdot)}/{T} \to {(A,+,\circ)}/{S}$ halka izomorfizması olsun.

O halde $(A,+)$ da bir $\times$ çarpımı tanımlayabiliriz. $(A,+,\times)$ yapısı bir halka olur, S kümesi $(A,+,\times)$ 'in bir ideali olur. $\alpha : (R,+) \to (A,+)$ izomorfizmadır. $\beta : {(R,+,\cdot)}/{T} \to {(A,+,\circ)}/{S}$ izomorfizmadır.

Hatta $\forall a,b \in A$ için $a \circ b = a \times b + S$ ve $h,k \in R$ için $\alpha(h \cdot k) \in \alpha(h) \circ \alpha(k)$ olur. [5]

İspat Her $a,b \in A$ için $\times$ işlemini tanımlayalım. $a = \alpha(h)$ ve $b = \alpha(k)$ olmak üzere $a \times b = \alpha(h \cdot k)$ olsun. Birleşme ve dağılma özelliğini gösterelim. Her $a,b,c \in A$ için $a = \alpha(h)$, $b = \alpha(k)$, $c = \alpha(m)$ olsun.

$a\times(b\times c)=a\times(\alpha(k\cdot m))=\alpha(h)\times\alpha(k\cdot m)=\alpha(h\cdot(k\cdot m))$

$=\alpha(h\cdot k\cdot m)=\alpha(h\cdot k)\times\alpha(m)=(a\times b)\times c$

olduğundan birleşme özelliğini görülür. Dağılma özelliği için

$a\times(b+c)=a\times(\alpha(k)+\alpha(m))=\alpha(h)\cdot\alpha(k)+\alpha(h)\cdot\alpha(m)$

$=\alpha(h.k)+\alpha(h.m)\ =a\times b+a\times c$ yazılır.

S kümesinin ideal olduğunu gösterelim.

Eğer $a\in A$ $,s\in S$ ve $h,j\in R$ için $a=\alpha(h)$ ve $s=\alpha(j)$ olacak şekilde varsa $j\in T$ için $h.j\in T$ olacağından $a\times s=\alpha(h\cdot j)\subseteq S$ olur. S kümesi $(A,+,\times)$ halkasının ideali olur.

$\times$ çarpımının tanımından α fonksiyonunun $(R,+,\circ)$ kümesinden $(A,+,x)$ kümesine halka izomorfizması olduğu önceki teoremlerdeki gibi gösterilebilir. Yine $\beta:{(R,+,\circ)}/{T}\to{(A,+,x)}/{S}$ halka izomorfizmasıdır.

Son olarak her $c\in a\circ b$ için

$$\begin{aligned}a\times b+S&=\alpha(h\cdot k)+S=\beta(h\cdot k+T)=\beta((h+T)\cdot(k+T))\\&=\beta(h+T)\circ\beta(k+T)=(\alpha(h)+S)\circ(\alpha(k)+S)\\&=\alpha(h)\circ\alpha(k)=a\circ b=c+S\end{aligned}$$

Buradan $a\times b\in a\circ b\Rightarrow\alpha(h\cdot k)=\alpha(h)\times\alpha(k)\in\alpha(h)\circ\alpha(k)$ bulunur.

BÖLÜM 4

2-YUTAN HİPERİDEALLER, 2-YUTAN ASALIMSI HİPERİDEALLER VE C-İDEALLER

4.1 2-Yutan Hiperidealler ve 2-Yutan Asalımsı Hiperidealler

Tanım 4.1 $(R,+,\circ)$ bir çarpımsal hiperhalka ve I onun boştan farklı bir hiperideali olsun. $a\circ b\circ c\subseteq I$ iken $a\circ b\subseteq I$ ya da $b\circ c\subseteq I$ ya da $a\circ c\subseteq I$ oluyorsa I hiperidealine 2-yutan hiperideal (2-absorbing hyperideal) denir [14] .

Örnek 4.1 $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ halkasını düşünelim. Her $x,y\in\mathbb{Z}$ elemanları için hiperişlem $x\circ y=\{2xy,4xy\}$ olarak tanımlansın. $(\mathbb{Z},+,\circ)$ kümesi çarpımsal hiperhalkadır. Bu hiperhalkada $15\mathbb{Z}=\{15n:n\in\mathbb{Z}\}$ hiperidealini alalım. $15\mathbb{Z}$ kümesi 2-yutan hiperidealdir.

Tanım 4.2 $(R,+,\circ)$ bir çarpımsal hiperhalka ve I onun boştan farklı bir hiperideali olsun. $a\circ b\circ c\subseteq I$ iken ya $a\circ b\subseteq I$ ya $b\circ c\subseteq Rad(I)$ ya da $a\circ c\subseteq Rad(I)$ oluyorsa I hiperidealine 2-yutan asalımsı hiperideal (2-absorbing primary hyperideal) denir [14].

Örnek 4.2 $(\mathbb{Z},+,\circ)$ hiperhalkasında her $x,y\in\mathbb{Z}$ için $x\circ y=\{2xy,3xy\}$ olarak tanımlansın. $12\mathbb{Z}=\{12n:n\in\mathbb{Z}\}$ hiperidealini düşünelim. $12\mathbb{Z}$ hiperideali 2-yutan asalımsı hiperideal olur. Fakat 2-yutan hiperideal değildir.

Not 4.1 Her 2-yutan hiperideal 2-yutan asalımsı hiperidealdir ancak tersi doğru değildir. Örnek 4.2'den görülebilir.

Yard. Teorem 4.1 R değişmeli ve çarpımsal hiperhalka olsun. I hiperideali R'nin asalımsı hiperideali olsun. R'nin bir alt kümesi J alalım. $a \in R$ için $a \circ J \subseteq I$ iken $a \not\subseteq I$ ise $J \subseteq Rad(I)$ olur [14].

İspat Her $a \in R$ için $a \circ J \subseteq I$ ve $a \not\subseteq I$ olsun. Her $j_i \in J$ için

$a \circ J = \bigcup_{j_i \in J} a \circ j_i \subseteq I \Rightarrow a \circ j_i \subseteq I$ yazılır. I asalımsı hiperideal olduğundan ve $a \not\subseteq I$ olduğundan $j_i \in Rad(I)$ olur. Buradan $J \subseteq Rad(I)$ bulunur.

Teorem 4.1 Her asalımsı hiperideal 2-yutan asalımsı hiperidealdir.

İspat Her $a, b, c \in R$ için $a \circ b \circ c \subseteq I$ iken $a \circ b \not\subseteq I$ alalım. I asalımsı hiperideal olduğundan Yard. Teorem 4.1 'den $c \subseteq Rad(I)$ olur. Buradan bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $c^n \subseteq I$ olur. I bir hiperideal olduğundan $a^n \in R$ için $a^n \circ c^n \subseteq I$ olur. Bu ise $a \circ c \subseteq Rad(I)$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $b^n \circ c^n \subseteq I \Rightarrow b \circ c \subseteq Rad(I)$ olacaktır. I , 2-yutan asalımsı hiperidealdir.

Teorem 4.2 R değişmeli ve çarpımsal hiperhalka olsun. I hiperideali de R'nin 2-yutan hiperideali olsun. I hiperidealinin radikali $Rad(I)$ kümesi de R'nin 2-yutan hiperidealidir. Ayrıca her $x \in Rad(\mathrm{I})$ için $x^2 \subseteq I$ olur.

İspat Bir $x \in Rad(I)$ alalım. Radikalin tanımından bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \subseteq I$ yazabiliriz. Buradan hareketle

$x \circ x \circ x^{n-2} \subseteq I$ yazılabilir. I kümesi 2-yutan hiperideal olduğundan iki seçeneğimiz var. İlk olarak $x \circ x \subseteq I$ ise ispat tamamlanır. Eğer değilse $x \circ x^{n-2} \subseteq I$ olmalıdır. Tekrar $x \circ x \circ x^{n-3} \subseteq I$ yazalım. I'nın 2-yutan olması sebebiyle $x \circ x \circ x \subseteq I$ durumuna kadar açabiliriz. Bu ise ispatın bu kısmını tamamlar.

Şimdi $a, b, c \in R$ alalım.

$x = a \circ b \circ c \subseteq Rad(I) \Rightarrow x^2 = (a \circ b \circ c)^2 \subseteq I \Rightarrow (a \circ b \circ c) \circ (\mathrm{a} \circ \mathrm{b} \circ \mathrm{c}) \subseteq I$. R değişmeli olduğundan ve birleşme özelliğinden $a^2 \circ b^2 \circ c^2 \subseteq I$ yazılabilir.

I hiperideali 2-yutan olduğundan ya $a^2 \circ b^2 \subseteq I$ ya $a^2 \circ c^2 \subseteq I$ ya da $b^2 \circ c^2 \subseteq I$ olmalıdır. İlk seçeneği göz önüne alalım. Yani $a^2 \circ b^2 \subseteq I$ olsun.

$a^2 \circ b^2 \subseteq I \Rightarrow (a \circ b)^2 \subseteq I \Rightarrow a \circ b \subseteq Rad(I)$. O halde $Rad(I)$ 2-yutan hiperideal olur.

Teorem 4.3 R değişmeli ve çarpımsal hiperhalka olsun. I hiperidealinin radikali $Rad(I)$ asal hiperideal ise I, R hiperhalkasının 2-yutan asalımsı hiperidealidir [14].

İspat Her $a,b,c \in R$ için $a \circ b \circ c \subseteq I$ alalım ve $a \circ b \not\subseteq I$ olsun. $\circ$ hiperişlemi birleşme özelliğini sağladığından ve R değişmeli olduğundan

$(a \circ c) \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c^2 \subseteq I$ yazabiliriz. Ayrıca $I \subseteq Rad(I)$ olduğunu biliyoruz.

$(a \circ c) \circ (b \circ c) = a \circ b \circ c^2 \subseteq I \subseteq Rad(I)$ olur. $Rad(I)$ kümesi asal hiperideal olduğundan ya $a \circ c \subseteq Rad(I)$ ya da $b \circ c \subseteq Rad(I)$ olmalıdır. Bu ise I 'nın 2-yutan asalımsı hiperideal olduğunu gösterir.

Teorem 4.4 P_1 ve P_2 hiperidealleri R hiperhalkasının iki asal hiperideali olsun. O zaman $P_1 \cap P_2$ kesişimi R hiperhalkasının 2-yutan hiperideali olur [14].

İspat $a,b,c \in R$ ve $a \circ b \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ alarak başlayalım.

$a \circ b \circ c \subseteq P_1 \cap P_2 \Rightarrow a \circ b \not\subseteq P_1 \cap P_2$ ve $b \circ c \not\subseteq P_1 \cap P_2$ olsun. $a \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $a \in P_1 \cap P_2$ olsun.

$a \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow a \in P_1$ ve $a \in P_2$ olmalıdır. P_1 ve P_2 hiperideal olduğundan herhangi bir $b \in R$ için $a \circ b \subseteq P_1$ ve $a \circ b \subseteq P_2$ olur. O zaman $a \circ b$ kümesi, $P_1 \cap P_2$ kesişiminin alt kümesi olur. Bu ise $a \circ b \not\subseteq P_1 \cap P_2$ kabulümüzle çelişir. O halde $a \notin P_1 \cap P_2$ olmalıdır. Benzer durum b ve c için de geçerlidir. Buradan $a,b,c \notin P_1 \cap P_2$ sonucu elde edilir. Teoremin geri kalanını üç durumda inceleyelim:

Birinci durum: $a \notin P_1$ ve $a \notin P_2$ olsun. $c \notin P_1 \cap P_2$ olduğunu yukarda söylemiştik. Buradan sonrasını da üç kısımda inceleyelim. $c \notin P_1$ ve $c \notin P_2$ olsun.

P_1 asal hiperideal olduğundan ve $a \circ c \not\subseteq P_1$ kabulünden $a \circ b \circ c \subseteq P_1$ iken $b \in P_1$ olmalıdır. O halde bir $a \in R$ için P_1 bir hiperideal olduğundan $a \circ b \subseteq P_1$ bulunur.

Benzer şekilde P_2 asal hiperideal olduğundan ve $a \circ c \not\subseteq P_2$ kabulünden $a \circ b \circ c \subseteq P_2$ iken $b \in P_2$ ve $a \circ b \subseteq P_2$ bulunur. $a \circ b \subseteq P_1$ ve $a \circ b \subseteq P_2$ oldu.

$a \circ b \subseteq P_2 \Rightarrow a \circ b \subseteq P_1 \cap P_2$ sonucuna ulaşırız ki bu bir çelişkidir. $c \in P_1$ veya $c \in P_2$ bulmalıyız.

$c \notin P_1$ ve $c \in P_2$ olsun. P_1 asal hiperideal olduğundan $a \circ c \subseteq P_1, a \circ b \circ c \subseteq P_1 \Rightarrow b \in P_1$ buluruz. Buradan bir $c \in R$ için $b \circ c \subseteq P_1$ buluruz. $c \in P_2$ olduğundan $b \circ c \subseteq P_2$ ve $b \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ sonucuna ulaşırız. Bu ise $b \circ c \not\subseteq P_1 \cap P_2$ olmasıyla çelişir.

$c \notin P_2$ ve $c \in P_1$ olsun. P_2 asal hiperideal ve $a \circ c \not\subseteq P_2$ olduğunu biliyoruz. $a \circ b \circ c \subseteq P_2$ için $b \in P_2$ olur. Buradan $b \circ c \subseteq P_2$ olduğunu söyleriz. $c \in P_1$ olduğundan $c \in P_1 \Rightarrow b \circ c \subseteq P_1$ olur ki bu $b \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ olduğunu gösterir. Bu da çelişkidir. Buradan $a \in P_1$ veya $a \in P_2$ olmalıdır.

İkinci durum: $a \in P_1$ ve $a \notin P_2$ olsun. Ayrıca $c \notin P_2$ alalım. P_2 hiperideal olduğundan $a \circ c \not\subseteq P_2$ bulunur. $a \circ b \circ c \subseteq P_2$, $a \circ c \not\subseteq P_2$ olduğundan ve P_2 asal olduğundan $b \in P_2$ olur. Buradan $a \circ b \subseteq P_1 \cap P_2$ yazılır ki bu bir çelişkidir. O halde $c \in P_2$ olmalıdır. $c \notin P_1 \cap P_2 \Rightarrow c \notin P_1$ bulunur. $a \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ olur.

Üçüncü durum: $a \notin P_1$ ve $a \in P_2$ olsun. $c \notin P_1$ kabul edelim. P_1 asal hiperideal olduğundan $a \circ c \not\subseteq P_1$ olur.

$a \circ b \circ c \subseteq P_1$ ve $a \circ c \not\subseteq P_1$ olduğundan $b \in P_1$ olur. $a \circ b \subseteq P_1 \cap P_2$ yazarız ki çelişkiye sebep olur. $c \notin P_1 \cap P_2$ ve $c \in P_1$ olmalıdır. Dolayısıyla $c \notin P_2$ olur. Bu ise $a \circ c \subseteq P_1 \cap P_2$ demektir.

Sonuç olarak $P_1 \cap P_2$ hiperideali 2-yutan hiperideal olur.

Teorem 4.5 P hiperideali R hiperhalkasının hiperideali olsun. Her $i = 1,2,3,\ldots,n$ için $I_1, I_2, I_3, ..., I_n$ kümeleri de R'nin $Rad(I_i) = P$ olacak şekilde 2-yutan asalımsı hiperidealleri olsunlar. O zaman $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ kümesi de 2-yutan asalımsı hiperidealdir ve $Rad(\bigcap_{i=1}^{n} I_i) = P$ olur [14] .

İspat Radikalin tanımı R'nin tüm asal hiperideallerinin kesişimidir. Bu tanıma göre

$Rad(I) = Rad(\bigcap_{i=1}^{n} I_i) = \bigcap_{i=1}^{n} Rad(I_i) = P$ olduğu açıktır. Bu kesişimi $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ olarak alalım. O zaman tüm $a,b,c \in R$ için, $a \circ b \circ c \subseteq I$ olsun. $a \circ b \not\subseteq I$ alalım. Bu bir i için $a \circ b \not\subseteq I_i$ olması demektir. I kümesi 2-yutan asalımsı hiperideal olduğundan $a \circ c \subseteq Rad(I_i)$ veya $b \circ c \subseteq Rad(I_i)$ olmalıdır. O halde ya $a \circ c \subseteq Rad(I)$ olur ya da

$b \circ c \subseteq Rad(I)$ olur. Bu da $I = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ kümesinin 2-yutan asalımsı hiperideal olduğunu gösterir.

4.2 C-İdealler

Tanım 4.3 $(R,+,\circ)$ bir çarpımsal hiperhalka ve I onun boştan farklı bir hiperideali olsun. C kümesi R çarpımsal hiperhalkasının elemanlarının sonlu çarpımlarının ailesi yani $C = \{r_1 \circ r_2 \circ ... \circ r_n \mid r_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Her $A \in C$ için eğer $A \cap I \neq \varnothing$ iken $A \subseteq I$ oluyorsa I hiperhalkasına R 'nin C-ideali denir. [9]

Örnek 4.3 $(R,+,\cdot)$ bir halka ve I onun bir ideali olsun. Her $a,b \in R$ için R üzerinde bir $a \circ b = ab + I$ hiperişlemi tanımlansın. I ideali aynı zamanda $(R,+,\circ)$ hiperhalkasının bir C-ideali olur.

Teorem 4.6 $(R,+,\circ)$ değişmeli bir çarpımsal hiperhalka ve I hiperideali R hiperhalkasının C-ideali olsun. O zaman $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$ olur [9].

İspat Bir $y \in Rad(Rad(I))$ alalım. O zaman bir $n \in \mathbb{N}$ için $y^n \subseteq Rad(I)$ olur. Bu durumda her $x \in y^n$ için $t_i \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x^{t_i} \subseteq I$ olur. Buradan

$x \in y^n \Rightarrow x^{t_i} \subseteq (y^n)^{t_i} = y^{nt_i}$ yazılır. Bu ise $y^{nt_i} \cap I \neq \varnothing$ olduğunu gösterir. I , R 'nin C-ideali olduğundan $y^{nt_i} \subseteq I$ bulunur. $Rad(Rad(I)) \subseteq Rad(I)$ olduğu görülür. $Rad(I) \subseteq Rad(Rad(I))$ olduğu açıktır. Çift kapsamadan eşitlik bulunur.

Teorem 4.7 I hiperideali R çarpımsal hiperhalkasının asalımsı C-ideali olsun. O zaman $Rad(I)$, R çarpımsal hiperhalkasının asal hiperidealdir [9].

İspat $a \circ b \subseteq Rad(I)$ ve $a \not\subseteq Rad(I)$ alalım. Herhangi bir $x \in a \circ b \subseteq Rad(I)$ için n_i vardır öyle ki $x^{n_i} \subseteq I$ olur. R değişmeli olduğundan

$x^{n_i} \subseteq (a \circ b)^{n_i} = a^{n_i} \circ b^{n_i}$ yazabiliriz. Yani $(a^{n_i} \circ b^{n_i}) \cap I \neq \varnothing$ olur. I hiperideali R çarpımsal hiperhalkasının C-ideali olduğundan $a^{n_i} \circ b^{n_i} \subseteq I$ bulunur. $a \not\subseteq Rad(I)$ idi. $a \notin Rad(I) \Rightarrow \mathrm{a}^{n_i} \not\subseteq I \Rightarrow a^{n_i} \cap I = \varnothing$.

O halde her $p \in a^{n_i}$ ve $q \in b^{n_i}$ için $p \notin I$ ve $p \circ q \subseteq a^{n_i} \circ b^{n_i} \subseteq I$ olur.

$p \circ q \subseteq a^{n_i} \circ b^{n_i} \subseteq I$ ve $p \not\subseteq I$ olduğunu biliyoruz. I hiperideali asalımsı olduğundan bir $n_j \in \mathbb{N}$ için $q^{n_j} \in I$ olmalıdır. $q^{n_j} \subseteq I \;\Rightarrow\; q \in b^{n_i} \Rightarrow q^{n_j} \subseteq (\mathrm{b}^{n_i})^{n_j} = b^{n_i n_j}$ olur.

$b^{n_i n_j} \cap I \neq \emptyset$ ve $b^{n_i n_j} \subseteq I \Rightarrow b \in Rad(I)$ bulunur.

$a \circ b \subseteq Rad(I)$ ve $a \notin Rad(I)$ kabul edildi. $b \in Rad(I)$ bulundu. Bu ise $Rad(I)$ kümesinin asal hiperideal olduğunu gösterir.

Teorem 4.8 R çarpımsal hiperhalkasının 2-yutan asalımsı C-ideali I olsun. O halde $Rad(I)$ kümesi R'nin 2-yutan hiperideali olur.

İspat $a,b,c \in R$ ve $a \circ b \circ c \subseteq Rad(I)$ olsun. $b \circ c \not\subseteq Rad(I)$ ve $a \circ c \not\subseteq Rad(I)$ olduğunu kabul edip $a \circ b \subseteq Rad(I)$ olduğunu gösterelim.

Her $x \in a \circ b \circ c$ için bir $n_i \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x^{n_i} \subseteq I$ olur. R değişmeli olduğundan x^{n_i} için $x^{n_i} \subseteq (a \circ b \circ c)^{n_i} = a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i}$ yazılabilir.

$x^{n_i} \subseteq (a \circ b \circ c)^{n_i} = a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i} \Rightarrow a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i} \cap I \neq \emptyset$ bulunur.

I kümesi C-ideal olduğundan $a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i} \subseteq I$ yazılır. $a \circ c \not\subseteq Rad(I)$ olduğunu kabul etmiştik. $a \circ c \not\subseteq Rad(I) \Rightarrow a^{n_i} \circ c^{n_i} \not\subseteq I \Rightarrow (a^{n_i} \circ c^{n_i}) \cap I = \emptyset$ yazılır.

O halde her $a_1 \in a^{n_i}$ ve $c_1 \in c^{n_i}$ için $a_1 \circ c_1 \not\subseteq I$ olur. $a_1 \circ b_1 \circ c_1 \subseteq a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i} \subseteq I$.

Ayrıca $b \circ c \not\subseteq Rad(I) \Rightarrow b^{n_i} \circ c^{n_i} \not\subseteq I \Rightarrow (b^{n_i} \circ c^{n_i}) \cap I = \emptyset$. Herhangi bir $b_1 \in b^{n_i}$ için $b_1 \circ c_1 \not\subseteq I$ bulunur. $a_1 \circ b_1 \circ c_1 \subseteq a^{n_i} \circ b^{n_i} \circ c^{n_i} \subseteq I$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $b^{n_i} \circ c^{n_i} \not\subseteq I$ ve $a^{n_i} \circ c^{n_i} \not\subseteq I$ olduğunu da gösterdik. I hiperideali 2-yutan olduğundan $a^{n_i} \circ b^{n_i} \subseteq I$ olmak zorundadır. O zaman bir $n_i \in \mathbb{N}$ için $a^{n_i} \circ b^{n_i} \subseteq I \Rightarrow a \circ b \subseteq Rad(I)$ bulunur. $Rad(I)$ kümesi R'nin 2-yutan hiperideali olur.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Hiper cebirsel yapılar, cebirsel yapılarla benzerlikler gösterir. Bu çalışmada hiperhalka, hiperideal, Krasner hiperhalkası ve çarpımsal hiperhalkaların tanımları açıklanmıştır. Çarpımsal hiperhalkalarda geçerli bazı teoremler ve özellikler gösterilmiştir. Radikallerin sağladığı özelliklerden bahsedilmiştir. Asal hiperideallerle radikalleri arasındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur.

Çarpımsal hiperhalkalar üzerinde yapılacak başka çalışmalarla daha da derine inilebilir. Sonlu cisimlerde ve bölüm hiperhalkalarında yeni başlıklar tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Marty, F., (1934). “Sur une generalization de la notion de groupe”, 8iem congres des Mathematiciens Scandinaves, August 1934, Stockholm, 45-49.

[2] Davvaz, B., Nezhad, A. and Benvidi, A., (2012). “Chemical Hyperalgebra: Dismutation Reactions”, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 67: 55-63.

[3] Rota, R., (1982). “Sugli iperanelli moltiplicativi”, Rend. Di Mat., Series VII, 2(4): 711-724.

[4] Krasner, M., (1983). “A class of hyperrings and hyperfields”, Int. J. Math. Math. Sci., 2: 307-311.

[5] Rota, R., (1990). “Strongly distributive multiplicative hyperrings”, J. Geom., 39: 130-138.

[6] Badawi, A., (2007). “On 2-absorbing ideals of commutative rings”, Bull. Austral. Math. Soc., 75(3): 417-429.

[7] Anderson, D. and Badawi, A., (2011). “On n-Absorbing Ideals of Commutative Rings”, Communications in Algebra, 39: 1646-1672.

[8] Procesi, R. and Rota, R., (1999). “On some classes of hyperstructures”, Discrete Math., 208/209: 485-497

[9] Dasgupta, U. (2012). “On prime and primary hyperideals of a multiplicative hyperring”, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics, 58(1):19-36.

[10] Davvaz, B. and Leoreanu-Fotea, V., (2007). “Hyperring Theory and Applications”, International Academic Press, U.S.A.

[11] Badawi, A., Tekir, U. and Yetkin, E., (2014). “On 2-absorbing primary ideals in commutative rings”, Bull. Korean Math. Soc., 51(4): 1163-1173.

[12] Ameri, R. and Norouzi, M., (2014). “On commutative hyperrings”, Int. Journal of Algebraic Hyperstructures and Its Applications,1: 45-58.

[13] Velrajan, M. and Asokkumar, A., (2010). “Note on Isomorphism Theorems of Hyperrings”, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2010: 1-12.

[14] Suzen, N. and Yesilot, G. (2018). “On 2-Absorbing Primary Hyperideals Of Multiplicative Hyperrings”, arXiv preprint arXiv:1803.09921.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Neslihan AYTAÇ
Doğum Tarihi ve Yeri	:29.05.1989 , Adapazarı
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:nesbil47@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik	Sakarya Üniversitesi	2012
Lise	Fen Bilimleri	Atatürk Anadolu Lisesi	2007

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2010-2011	Adapazarı Vizyon Dersanesi	Matematik Öğretmeni
2012-2013	Matematik Akademisi Sakarya Şubesi	Matematik Öğretmeni
2013-2018	İlke-Başarı Koleji	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Aytac, N. and Yesilot, G. (2018). “Some Results On Prime And 2-Absorbing Primary C-Ideals Of Multiplicative Hyperrings”, The Mediterranean Internatıonal Conference Of Pure&Applied Mathematics And Related Areas (MICOPAM 2018), 26-29 October 2018, Antalya.