



T.C.

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GÖZENEKLİ BİR ORTAMDA TUTULAN İÇİ BOŞ SİLİNDİR ÇUBUK
ÜZERİNDEN OLAN AKIŞA BİRLEŞİK ISI TRANSFERİ VE MANYETİK
ALANIN ETKİSİ (MHD)**

PINAR ALTUNTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

KAHRAMANMARAŞ 2018

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GÖZENEKLİ BİR ORTAMDA TUTULAN İÇİ BOŞ SİLİNDİR ÇUBUK
ÜZERİNDEN OLAN AKIŞA BİRLEŞİK ISI TRANSFERİ VE MANYETİK
ALANIN ETKİSİ (MHD)**

PINAR ALTUNTAŞ

Bu tez,
Makine Mühendisliği Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS
derecesi için hazırlanmıştır.

KAHRAMANMARAŞ 2018

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Pınar ALTUNTAŞ tarafından hazırlanan “GÖZENEKLİ BİR ORTAMDA TUTULAN İÇİ BOŞ SİLİNDİR ÇUBUK ÜZERİNDEN OLAN AKIŞA BİRLEŞİK ISI TRANSFERİ VE MANYETİK ALAN ETKİSİ (MHD)” adlı bu tez, jürimiz tarafından 22 / 01 / 2019 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet KAYA (DANIŞMAN)
Makine Mühendisliği
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi



Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ERDOĞAN (ÜYE)
Makine Mühendisliği
İnönü Üniversitesi



Dr. Öğr. Üyesi Beril ÖZÇELİK (ÜYE)
Makine Mühendisliği
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi



Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YAZICI
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, alıntı yapılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Pınar ALTUNTAŞ



Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

GÖZENEKLİ BİR ORTAMDA TUTULAN İÇİ BOŞ SİLİNDİR ÇUBUK ÜZERİNDE OLAN AKIŞA BİRLEŞİK ISI TRANSFERİ VE MANYETİK ALANIN ETKİSİ (MHD)

ÖZET

Bu çalışmada, gözenekli bir ortamda tutulan içi boş silindir çubuk üzerinden olan akışa birleşik ısı transferi ve manyetik alanın etkisi araştırılmıştır. Akış alanında hız ve sıcaklık dağılımını belirlemek için, Navier-Stokes ve enerji denklemleri benzerlik yöntemiyle sınır tabaka denklemlerine dönüştürülmüştür. Daha sonra bu denklemler Keller-box yöntemiyle nümerik olarak çözülmüştür. Birleşik ısı transferi parametresinin, karışık ısı taşınımı parametresinin, gözenekli ortam parametresinin, Forchheimer parametresinin, Manyetik alan parametresinin ve Eckert sayısının hız ve sıcaklık profilleri ile yerel sürtünme katsayısı ve yerel ısı transfer parametrelerine etkisi belirlenmiştir. Elde edilen grafikler yorumlanmıştır. Birleşik ısı transferi parametresi p 'nin artması yerel sürtünme ve yerel ısı transferi etkisini azalttığı; Karışık ısı taşınım parametresinin Ri , Gözenekli ortam parametresinin k_1 , Forchheimer parametresinin F^* , Manyetik alan parametresinin Mn artması ile yerel sürtünme ve yerel ısı transfer etkilerinin arttığı tespit edilmiştir. Eckert sayısı Ec 'nin artmasının ise, yerel sürtünme etkisini artırdığı, yerel ısı transferi etkisini azalttığı tespit edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: gözenekli ortam, birleşik ısı transferi, manyetik alan, karışık ısı taşınımı, Forchheimer parametresi, Eckert sayısı, Keller-Box yöntemi

THE EFFECTS OF MAGNETIC FIELD (MHD) AND CONJUGATE HEAT TRANSFER OVER A HOLLOW CYLINDRICAL ROD EMBEDDED IN A POROUS MEDIUM

ABSTRACT

In this study, the effects of magnetic field and conjugate heat transfer over a hollow cylindrical rod embedded in a porous medium have been investigated. In order to determine the velocity and temperature distributions in the flow area, the equations of Navier-Stokes and energy were transformed into the boundary layer equations using the similarity method. Later, these equations were solved numerically using Keller-Box method. The effects of conjugate heat transfer, conjugate heat convection, porous medium, Forchheimer parameter, magnetic field parameters and Eckert number on the velocity and temperature profiles as well as on the local friction coefficient and local heat transfer parameters were determined. All the plots obtained were analyzed and interpreted. It was observed that the increase in the p , conjugate heat transfer parameter, reduced the effect of local friction and local heat transfer, whereas, the increase in conjugate heat convection parameter, Ri , porous medium parameter, k_1 , Forchheimer parameter, F^* , and magnetic field parameter, Mn , increased the effect of local friction and local heat transfer. On the other hand, the increase in Eckert number, Ec , increased the effect of local friction while reducing the effect of local heat transfer.

Keywords: porous medium, conjugate heat transfer, magnetic field, conjugate heat convection, Forchheimer parameter, Eckert number, Keller-Box method

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana zamanını ayırıp, gösterdiği sabırla beni yönlendiren, büyük ilgi ve desteğini gördüğüm tez danışmanım Sn. Prof. Dr Ahmet KAYA'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteğini gördüğüm ve çalışmalarım sırasında sabırları ve anlayışları nedeni ile eşime ve anneme, verdiği moral ve cesareten dolayı ise babama ve kardeşime çok teşekkür ederim.

Pınar ALTUNTAŞ



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SEMBOLLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER VE YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	3
2.1. Birleşik Isı Transferi	3
2.2. Sınır Tabaka Teorisi.....	4
2.2.1. Laminer ve Türbülanslı Sınır Tabaka, Geçiş Bölgesi.....	5
2.2.2. Sınır Tabakanın özellikleri ve önemi.....	6
2.2.3. Sınır Tabaka denklemleri.....	7
2.2.4. Benzerlik yöntemi.....	11
2.3. Gözenekli Ortam.....	15
2.3.1. Gözenekli ortamın özellikleri	16
2.3.2. Gözenekli ortamlarda Laminer akış.....	17
2.3.3. Gözenekli ortamda Türbülanslı akış.....	20
2.3.4. Gözenekli ortamdaki akışkan akışının differansiyel denklemi.....	21
2.3.5. Non-Darcy yasası ve Forcheimer denklemi	23
2.4. Sonlu Farklar Yöntemi.....	25
2.4.1. Keller-Box yöntemi	25
2.5. Yapılan Çalışmalar	29
3. MATERYAL VE METOT	35
3.1. Nümerik Yöntem	42
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	48
5. SONUÇLAR.....	65
KAYNAKLAR.....	66
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SEMBOLLER

B₀	Manyetik akı yoğunluğu [Wb/m ²]
c_p	Özgöl ısı [kJ/kg K]
f	Boyutsuz serbest akım fonksiyonu
Pr	Prandtl sayısı [ν/α]
Re	Reynolds sayısı [$u_{\infty}r_0/\nu$]
Ri	Richardson sayısı [Gr/Re ²]
T	Sıcaklık [K]
u, v	x ve r yönündeki hızlar [m/s]
x, r	Yatay ve düşey doğrultudaki koordinat sistemi [m]
θ	Boyutsuz sıcaklık profili $\left[\frac{T-T_{\infty}}{T_0-T_{\infty}}\right]$
g	Yerçekimi ivmesi [m/s ²]
Gr	Grashof sayısı $\left[\frac{g\beta(T_0-T_{\infty})r_0^3}{\nu^2}\right]$
Ha	Hartman sayısı $\left[\frac{\sigma B_0^2 r_0^2}{\mu}\right]$
Ec	Eckert sayısı $\left[\frac{u_{\infty}^2}{c_p(T_0-T_{\infty})}\right]$
k	Isı iletkenliği [W/mK]
L	Silindir uzunluğu [m]
F*	Forchheimer parametresi [Fr ₀]
Mn	Manyetik alan parametresi [Ha/Re]
k₁	Gözenekli ortam parametresi $\left[\frac{\nu r_0}{k u_{\infty}}\right]$
p	Birleşik ısı transfer parametresi
ri, ro	İçi boş silindirin iç ve dış yarıçapı [m]
T	Sıcaklık [K]
T₀	Silindirin iç yüzey sıcaklığı [K]

Yunan alfabesi

ν	Kinematik viskozite [m^2/s]
σ	Stefan–Boltzmann sabiti [$5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$]
α_n	Rosseland yayılım katsayısı [m^2/s]
η	Benzerlik değişkeni $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_\infty}{v_x} \right)^{1/2} \left[\frac{r^2 - r_0^2}{r_0} \right] \right]$
ρ	Akışkan yoğunluğu [kg/m^3]
μ	Dinamik viskozite [Pa s]
ξ	Boyutsuz akış yönünde koordinat [x/r_0]

Alt indisler

f	Akışkan
s	Silindirik katı cisim
w	Duvar
∞	Çevre

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Sınır tabaka yapısı.....	4
Şekil 2.2. Sınır tabaka bölgeleri.....	5
Şekil 2.3. Laminer ve Türbülanslı tabakalarda partikül hızları.....	6
Şekil 2.4. Akış aleti.....	18
Şekil 2.5. Kütlelin korunumunun gösterimi.....	21
Şekil 2.6. Gözenekli ortam akış rejimi.....	23
Şekil 2.7. Keller-Box metodu için sonlu fark kareleri.....	25
Şekil 3.1. Problemin şematik gösterimi.....	36
Şekil 4.1. Bilgisayar programı için akış diyagramı.....	48
Şekil 4.2. Birleşik ısı transferi (conjugate) parametresinin (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi.....	50
Şekil 4.3. Birleşik ısı transferi (conjugate) parametresinin (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	51
Şekil 4.4. Karışık ısı taşınımı parametresinin (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi.....	52
Şekil 4.5. Karışık ısı taşınımı parametresinin (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	54
Şekil 4.6. Gözenekli ortam parametresinin k_1 (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi	55
Şekil 4.7. Gözenekli ortam parametresinin k_1 (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	56
Şekil 4.8. Forchheimer parametresinin F^* (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi.....	58
Şekil 4.9. Forchheimer parametresinin F^* (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	59
Şekil 4.10. Manyetik alan parametresinin M_n (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi.....	60
Şekil 4.11. Manyetik alan parametresinin M_n (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	61
Şekil 4.12. Eckert Sayısının Ec (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi.....	63
Şekil 4.13. Eckert Sayısının Ec (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi.....	64

1. GİRİŞ

Gözenekli ortamlarda ısı geçişi ve akışkan akışı, akciğerde, jeotermal kaynaklarda tuzlu suyun dolaşımından, kanın mikroskobik düzeyde akışına kadar çok geniş bir mühendislik kapsadığı için büyük önem taşımaktadır. Gözenekli ortamlardaki ısı geçişi ve akışkan akışı konusu makine, inşaat, kimya, nükleer, bio-mühendisliği, jeotermal mühendisliği, hava-uzay mühendislikleri ve gıda bilimi gibi birçok alanı ilgilendirmektedir (Baytaş, 2006).

Mühendislik uygulamalarının simülasyonu için, ısı iletim özellikleri akış alanında önemlidir. Bu simülasyonlar eşanjör, HVAC (Isıtma, Havalandırma ve İklimlendirme), yanma/brülör, elektronik soğutma ve benzeri simülasyonları içermektedir. Bu uygulamalarda ısıнын hem sıvı hem de katı arasında gerçekleşen ısı transferine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu ısı transferi türü, birleşik ısı transferi (Conjugate Heat Transfer, CHT) olarak tanımlanmaktadır (Mamun, 2008). Birleşik ısı transferi iki bitişik alan mevcut olduğunda uygulanmaktadır. Bu alanlar, katı veya akışkan alanlar olabilir. Isı üreten aktif elektronik bileşenlerine tutturulmuş bir ısı emicisinin zorlanmış veya doğal taşınımında soğutulması işlemi birleşik ısı transferine örnek olarak verilebilmektedir.

Isıtılan hareketli malzemelerin oluşturduğu ısı ve kütle aktarımı ile akışın incelenmesi, sıcak haddeleme, sıcak ekstrüzyon, tel çekme ve sürekli döküm gibi birçok imalat işleminde ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, çapraz olarak uygulanan bir manyetik alanın hareketi altında elektriksel olarak iletken viskoz sıvı akışının çalışması, manyetohidrodinamik (MHD) güç jeneratörleri, MHD pompaları, hızlandırıcılar, aerodinamik ısıtma, elektrostatik çöktürme, polimer teknolojisi, petrol gibi birçok alanda kullanılmaktadır (Elgazery, 2008). Manyetohidrodinamik (MHD) ısı transfer alanının incelenmesi iki sınıfa ayrılabilir: 1. Konveksiyon akışta ve aerodinamik ısıtmada ısı transferini kontrol etmek için elektromanyetik alanların kullanılması, 2. Isıtma, MHD jeneratörü, pompa vb. cihazlar için elektromanyetik alanlar üretilir. MHD, sıvı hız alanı (hidrodinamik sınır tabakası) ve elektromanyetik alan arasında karşılıklı bir etkileşim ile karakterize edilmektedir. Faraday yasaları da manyetik alan ve sıvı hareketini etkilemektedir (EL-Amin 2003).

Bu çalışmada, gözenekli bir ortamda tutulan içi boş düşey bir silindir çubuk göz önüne alınmıştır. Düşey içi boş silindir çubuğun iç sıcaklığı sabittir. İçi boş silindir çubuk üzerinden olan akışa, birleşik ısı transferi ve manyetik alanın etkisi araştırılmıştır. Akış

alanı karakterize eden momentum ve enerji denklemleri yazılarak benzerlik yöntemiyle sınır tabaka denklemlerine dönüştürülmüştür ve bu sınır tabaka denklemleri örtük (kapalı) sonlu fark yöntemi olan Keller-box yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Sayısal verilere göre birleşik ısı transferi parametresinin, karışık ısı taşınımı parametresinin, gözenekli ortam parametresinin, Forchheimer parametresinin, Manyetik alan parametresinin ve Eckert sayısının hız ve sıcaklık profilleri ile yerel sürtünme katsayısı ve yerel ısı transfer parametrelerine etkisi incelenmiştir.



2. GENEL BİLGİLER VE YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Birleşik Isı Transferi

Cidar ile akışkan arasında ısı değişiminin olduğu yerde birleşik ısı transferi ortaya çıkmaktadır. Birleşik ısı transferi ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır ve çoğu çalışmada boru cidarının dış yüzeyinde sınır şartı olarak sabit yüzey ısı akısı veya sabit yüzey sıcaklığı kullanılmıştır. Isı değiştiricileri, kanatçıklar, mikro elektronik çiplerin soğutulması, fırınlar, ark kaynağı ve nükleer yakıt boruları vb. mühendislik uygulamalarında birleşik ısı transferi mevcuttur. Endüstriyel uygulamalarda ısı kaybının veya kazancının artırılması veya azaltılması amaçlanmıştır. Boru içinden akan akışkanlar, boru dış yüzeyinde doğal ya da zorlanmış taşınım ile ısı kaybına maruz kalabilir. Isı transferine, cidarın kalınlığı ve ısı iletkenliğine ek olarak akışkanın fiziksel özelliği ve akış karakteri de etki etmektedir (Darıcı, 2004).

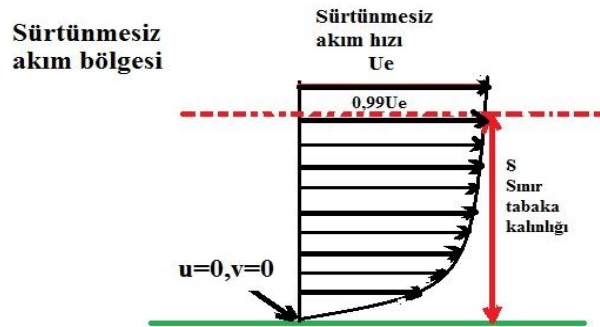
Isı transferi analizlerinde, genellikle akışkan-cidar ara yüzeyinde sıcaklık veya ısı akısı hesaplanmaktadır ve enerji denkleminin akış bölgesinde olması gerekmektedir. Akışkan-cidar ara yüzeyinde bilinmeyen koşullar, katı cidarın boyutlarına ve fiziksel özelliklerine bağlı olduğu gibi, akışkanın akış şartlarına ve fiziksel özelliklerine de bağlıdır. Cidardaki ısı iletimini ve akışkan içindeki taşınım ile ısı transferini birleştiren problemlere “birleşik ısı transferi (conjugate heat transfer)” denmektedir. İletim ve taşınımın aynı anda olduğu bu birleşik problemlere dikkat edilmelidir, çünkü cidar kalın ve ısı iletkenlik katsayısı küçük ise ısı transferi etkilenmektedir. Özellikle ısı değiştirici tasarımları için büyük önem taşımaktadır. Bu tip cihazların tasarımındaki birleşik ısı transferi problemlerinin çözümünde, iletim ve taşınım ile ısı transferinin birlikte analiz edilmesi gerekmektedir. Isı transferi simülasyonlarının çoğunda da gerçeğe yakın olması için birleşik ısı transferi analizleri yapılması gerekmektedir (Darıcı, 2004).

Birleşik ısı transferi analizi, geçici rejim, ısı değiştiricilerin açıldığı-kapandığı ve çalışma şartlarında değişiklik olduğu zamanlarda kontrol etme açısından büyük önem taşımaktadır. Sistemin güç kaynağında meydana gelebilecek kesinti ya da pompalardaki arıza halinde veya çalışma koşulları göz önüne alınarak cihazlarda ısı transferinin zamana bağlı değişimi incelenmelidir. Rejeneratif ve reküperatif ısı değiştiricilerinde, gaz türbini kanatlarının soğutulmasında, nükleer reaktör soğutma borularında, uçak motorlarında ve uzay araçlarında çıkabilecek problemin incelenmesi ve istenmeyen tahribatın önlenmesi açısından birleşik ısı transferi önemlidir (Darıcı, 2004).

2.2. Sınır Tabaka Teorisi

Sınır tabaka, viskozitenin akışkan tabakalarının birbiri üzerinde kaymaya karşı gösterdikleri direncin bir ölçüsüdür. Aynı direnç etkisi akışkanla - katı cidar arasında da söz konusudur. Yani bir akışkan bir katı cisim etrafından geçerken veya bir cisim bir akışkan içerisinde hareket ederken cisim akışkana, akışkan da cisme temas yüzeyleri boyunca teğetsel kuvvetler uygular. Böyle bir hareket içerisinde temas yüzeyinin bütün noktalarında katı cismin hızı ile akışkanın ortalama hızları aynı olmaktadır. Yani akışkanın katı cisme göre hızı sıfırdır. Cisme en yakın tabakalarda neredeyse durma hızlarında olan akışkan zerreleri daha üst tabakalardaki biraz daha hızlı komşu akışkan kitlelerine teğetsel kuvvetler uygulayarak onların yavaşlamasına neden olurlar. Komşu tabakalar arasındaki bu etkileşim cisimden uzaklaştıkça azalacak biçimde sonsuza kadar devam eder. Bir katı cidar civarında akım hızlarının bu şekilde azalması doğrudan viskozitenin sonucudur. Viskozitenin olmaması halinde, yani sürtünmesiz akımda bu etkinin bulunmayacağını söylemek mümkündür. Aslında bütün akışkanlar viskoz ve sürtünmelidir (Yükselen, 2008).

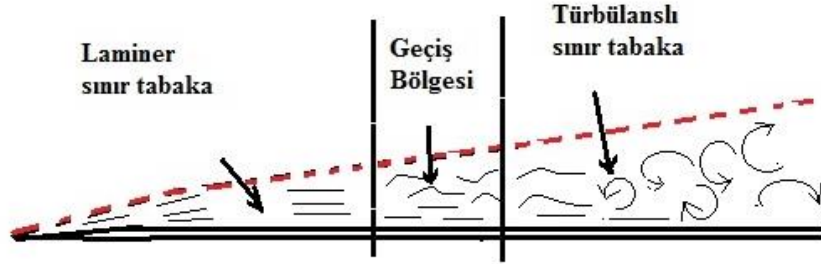
Prandtl, viskozite etkisinin bir katı cidar yakınında dar bir bölgede çok fazla olduğunu ve bu bölgenin dışına çıkınca etkinin ihmal edilebilir mertebelere indiğini tespit ederek, bir cisim etrafındaki akım alanının farklı karakterde iki bölge halinde incelenmesinin uygun olacağını ortaya koymuştur. Bu bölgelerden, katı cidara yakın olan ve akım hızlarının bu şekilde azaldığı bölgeye sınır tabaka adını vermiştir. Viskozite etkilerinin ihmal edilebilir mertebelere indiği dış bölgeye ise sürtünmesiz akım bölgesi adını vermiştir. Sınır tabaka genellikle akım hızlarının; viskoz olmayan bölgedeki akım hızlarının %99'u ve daha altındaki mertebelerde olduğu bölge olarak tarif edilmektedir. Katı cidardan itibaren, akım hızının sürtünmesiz akım hızının %99'una eşit olduğu tabakaya kadar olan mesafe de sınır tabakanın kalınlığı olarak tanımlanmaktadır (Yükselen, 2008).



Şekil 2.1. Sınır tabaka yapısı (Yükselen, 2008)

2.2.1. Laminer ve Türbülanslı Sınır Tabaka, Geçiş Bölgesi

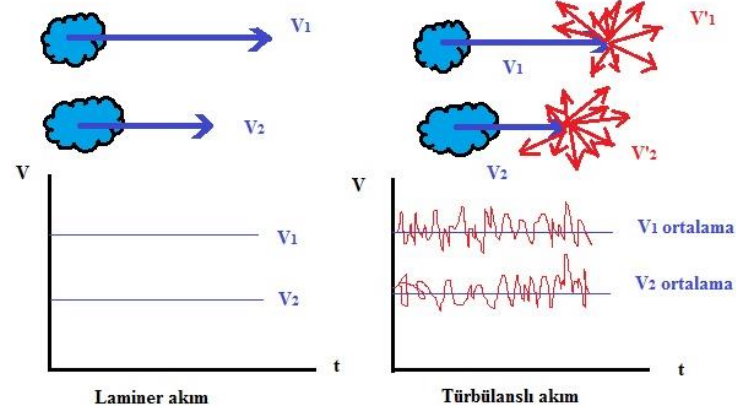
Sınır tabakalar, laminer ve türbülanslı olarak iki şekilde bulunabilir. Çoğu zaman laminer olarak başlayan sınır tabaka başlangıç noktasından belli bir uzaklıkta türbülanslı hale dönüşür. Laminer sınır tabakanın türbülanslı hale dönüştüğü bölgeye geçiş (transition) bölgesi adı verilmektedir.



Şekil 2.2. Sınır Tabaka Bölgeleri (Yükselen, 2008)

Sınır tabakanın laminer veya türbülanslı oluşunu tanımlamak için makroskopik seviyedeki akışkan kitlelerinin hareketine bakmak gerekmektedir. Şayet makroskopik büyüklükteki akışkan taneleri yörüngeleri boyunca düzgün görünümlü bir akış halinde ise ve yörüngeler arasında makroskopik boyutta bir karışma olmuyorsa bu tip sınır tabakaya laminer sınır tabaka adı verilmektedir.

Türbülanslı sınır tabakada ise makroskopik büyüklükteki akışkan tanelerinin hareketinde bir düzensizlik (rastgelelik) vardır. Yani, sınır tabaka içerisindeki her bir tabakada ortalama bir hız yanında, şiddetli ve yüksek frekanslı ani hızlar söz konusudur. Tanecikler genel akım doğrultusunda ortalama bir hareket yaparken rastgele doğrultularda ve rastgele hızlarda ani hareketler de yaparlar. Ani hız doğrultuları rastgele olduğundan türbülanslı sınır tabakanın tabakaları arasında kütle transferi ve oldukça kuvvetli bir karışım söz konusudur. Geçiş bölgesinde ise laminer ve türbülanslı sınır tabaka karakteristiklerinin her ikisine birden rastlanmaktadır (Yükselen, 2008).



Şekil 2.3. Laminer ve Türbülanslı tabakalarda partikül hızları (Yükselen, 2008)

2.2.2. Sınır Tabakanın özellikleri ve önemi

Akışkan, katı bir cisim etrafında akarken hız sınır tabaka ve ısı sınır tabaka olmak üzere iki çeşit sınır tabaka oluşmaktadır. Bu iki sınır tabaka aşağıda verilen amaçlar için incelenmektedir.

- 1- Katı cisim ve akışkan akışı üzerine uygulanan toplam kuvvetleri bulmak için kullanılır. Cisim üzerinde olan akışkan akışı ile gelen toplam kuvvetler bulunarak toplam sürüklenme kuvveti elde edilmektedir.

Örnek olarak, düz levha üzerinde olan akış için hız sınır tabaka denklemleri incelenerek toplam kuvvet bulunmaktadır. Aşağıdaki eşitlikte τ yüzey üzerindeki kayma gerilmesini, b ve G ise levhanın uzunluğunu ve genişliğini ifade etmektedir.

$$F = \int_0^b \tau G dx \quad (N) \quad (2.1)$$

- 2- Akışkan akışı ve katı yüzey arasında oluşan ısı direncin veya ısı geçişini bulabilmek için incelenmektedir. Toplam ısı geçişini ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\dot{Q} = \int_0^b q'' G dx \quad (W) \quad (2.2)$$

Burada $q'' (W/m^2)$ birim yüzeyden birim zamanda geçen ısı enerjisi miktarını veya ısı akısını vermektedir. Yüzey üzerindeki kayma gerilmesi ve ısı akısı aşağıdaki şekilde bulunmaktadır.

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad \text{ve} \quad q'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.3)$$

Yukarıdaki ifadelerde, u ve T sırasıyla akışkanın hızı ve sıcaklığı, y akış yönüne dik levha eksenini, k akışkanın ısı iletim katsayısını, μ ise akışkanın dinamik veya mutlak viskozitesini göstermektedir (Baytaş, 2015).

2.2.3. Sınır Tabaka denklemleri

Kütle Korunumu, momentum ve enerji denklemleri kısmi diferansiyel denklemler olup momentum ve enerji denklemi doğrusal olmayan denklemlerdir. Bu yüzden bu denklemlerin çözülebilmesi varsayım yapmadan zordur. Prandtl'in sınır tabaka yaklaşımı sayesinde bu zor olan denklemleri daha sade hale getirerek çözülebilmesi kolaylaşmıştır (Baytaş, 2015).

Kütle korunumu denklemi:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Momentum dengesi:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (2.5)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (2.6)$$

Yukarıdaki denklemlerdeki, f_x, f_y son terimleri x ve y yönündeki dış kuvvetleri ifade etmektedir.

Enerji dengesi:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi_x \quad (2.7)$$

Yukarıdaki enerji denkleminde Φ_x son terimi dış kuvvetleri ifade etmektedir. Yukarıda yer alan dört denklemde dört bilinmeyen vardır. Bunlar u_x, u_y, p, T 'dir. Prandtl'in yaklaşımı dört denkleme uygulanıp sadeleştirilerek sınır tabaka denklemleri elde

edilmektedir. Sınır tabakanın dışında kalan serbest akım bölgesi, katı yüzeyin ısı geçiş mekanizmasından ve sürtünmeden etkilenmemektedir. Serbest akım bölgesi için aşağıdaki ifadeler yazılmaktadır.

$$u_x = u_\infty, u_y = 0, p = p_\infty, T = T_\infty \quad (2.8)$$

Sınır tabaka kalınlığı δ ile katı yüzey uzunluğu b çok ince olduğundan x yönündeki momentum denklemi önce ele alınır. Denklem (2.8) ölçeklemede kullanılarak her bir ifade birbiri ile karşılaştırılmaktadır (Baytaş, 2015).

$$\underbrace{u_\infty \frac{u_\infty}{b}, u_y \frac{u_\infty}{\delta}}_{\text{Atalet Kuvvetleri}} \sim \underbrace{\frac{p}{\rho b}}_{\text{Basınç}} \underbrace{v \frac{u_\infty}{b^2}, v \frac{u_\infty}{\delta^2}}_{\text{Sürtünme Kuvvetleri}} \quad (2.9)$$

Düşey hız bileşeni u_y 'nin büyüklüğünü bulmak için kütle korunumu denklemi kullanılmaktadır.

$$\frac{u_\infty}{b} \sim \frac{u_y}{\delta} \quad (2.10)$$

Yukarıdaki bağıntıdan düşey hız bileşeni bulunmaktadır.

$$u_y \sim \frac{\delta u_\infty}{b} \quad (2.11)$$

Atalet kuvvetleri, yukarıdaki denklemler yardımı ile u_∞^2/b olarak bulunmaktadır. Her iki kuvvetin büyüklüğü denktir ve birbiri ile kıyaslandığında ihmal etmek söz konusu değildir. Sürtünme kuvvetleri birbiri ile kıyaslanırsa $\delta \ll b$ olduğu için denklem (2.5)'teki $\partial^2 u_x / \partial x^2$ ifadesi $\partial^2 u_x / \partial y^2$ yanında ihmal edilmektedir. İnce bir tabaka olarak kabul edilen sınır tabaka için aşağıdaki denklem geçerli olmaktadır.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

Sınır tabaka kalınlığı x 'e bağlı olarak büyümektedir. Fakat δ , b ile kıyaslandığında çok küçük olduğundan kayma için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\frac{d\delta}{dx} \ll 1 \quad (2.13)$$

Sınır tabaka için yazılan momentum denge denklemleri elde edilen ifadeler kullanılarak düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (2.14)$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (2.15)$$

Akışkan içinde herhangi bir noktada basınç x ve y nin bir işlevidir. Bu durumda toplam türev tam differansiyel yardımı ile bulunup dx ile bölünürse basıncın x' e göre türevi bulunmaktadır (Incropera, 2001).

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (2.16)$$

Denklem (2.14)' de basınç değişimi ile viskoz kuvvetlerin büyüklük derecelerinin eşit olduğu düşünülerek ölçekleme yapılırsa,

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \mu \frac{u_\infty}{\delta^2} \quad (2.17)$$

ifadesi bulunmaktadır. Denklem (2.15)'deki $\partial p / \partial y$ 'nin ölçeklemesi ise aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \mu \frac{u_y}{\delta^2} \sim \mu \frac{u_\infty}{\delta} \quad (2.18)$$

Denklem (2.16)'deki ifadeler $\partial p / \partial x$ ile bölünüp, (2.17) ve (2.18) de bulunan ifadeler yerine yazılırsa, son durumda denklem (2.19) şeklinde olmaktadır.

$$\frac{(\partial p / \partial y)(\partial y / \partial x)}{\partial p / \partial x} \sim \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \ll 1 \quad (2.19)$$

Denklem (2.16) da son terim ihmal edilmektedir. Çünkü sınır tabaka içinde $\delta \ll b$ 'dir. Böylece (2.16) denklemi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.20)$$

Buradan sınır tabaka içinde basıncın x yönünde değiştiği bulunur ve sınır tabakanın hemen dışında ise basınç değişimi ifadesi Denklem (2.21)' deki gibidir.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} \quad (2.21)$$

Ayrıca $\partial p / \partial y \cong 0$ olacağından y yönündeki momentum denklemi ortadan kalkmaktadır ve sınır tabaka içinde $p = p(x)$ denilebilir. O halde y yönündeki basınç değişiminin x yönündeki basınç değişimine oranla ihmal edilecek kadar küçük olduğu yukarıda kanıtlanmaktadır. Sınır tabakanın çok ince olması sebebi ile de kayma tabakası içindeki $(\partial p / \partial x)$ basınç düşümü ihmal edilecek kadar azdır. Bu sebeple sınır tabaka içinde ve dışında basınç düşümü yerine $(\partial p_{\infty} / \partial x)$ yazılabilir.

Denklem (2.7)'deki enerji denklemi ısıl sınır tabaka için yeniden düzenlenmektedir. Prandtl sayısının çok küçük olmadığı durumda, ısıtılan yüzey üzerinde ve ısıl sınır tabaka içinde sıcaklık gradyanların değişimi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\delta_t}{dx} \ll 1 \quad (2.23)$$

Böylece tüm varsayımlar sonucunda x yönünde momentum dengesi:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (2.24)$$

Enerji dengesi:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi_x \quad (2.25)$$

şeklinde yazılmaktadır (Incropera, 2001).

2.2.4. Benzerlik yöntemi

Sınır tabaka dışında kalan bölgelerde yani serbest akım bölgesinde Bernoulli denklemi geçerlidir. Bernoulli denklemi akım çizgisi boyunca basınç, hız ve yükseklik arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz = \text{sabit} \quad (2.26)$$

(p/ρ) akış enerjisini, $(u^2/2)$ kinetik enerjiyi, gz ise potansiyel enerjiyi ifade etmektedir. Bernoulli denklemi yaklaşımına göre viskoz etkiler, atalet, yerçekimi ve basınç etkilerine göre ihmal edilebilmektedir (Çengel, 2006). Bernoulli denklemi serbest akım bölgesi için düzenlenirse x 'e göre türevi alınır ve x yönündeki basınç gradyanı için aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\infty}}{\partial x} + u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} = 0 \quad (2.27)$$

Elde edilen bu eşitlik denklem (2.24)'de yerine yazılmaktadır. Kütle, Momentum ve Enerji denklemleri (Denklem 2.4 , 2.24, 2.25) yeniden düzenlendiğinde aşağıdaki iki boyutlu sınır tabaka denklemleri elde edilmektedir.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.29)$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.30)$$

Değişken sayısını azaltmak ve çözümü kolaylaştırmak için aşağıdaki dönüşümlerden yararlanılmaktadır.

$$\frac{u_x}{u_{\infty}} = \phi_1(x, y) \quad (2.31)$$

$$\frac{T_d - T}{T_d - T_\infty} = \phi_2(x, y) \quad (2.32)$$

Sınır koşulları ise,

$$y = 0 \quad u_x = u_y = 0 \quad T = T_d \quad (2.33)$$

$$y = \delta \quad u_x = u_\infty \quad T = T_\infty \quad (2.34)$$

şeklindedir. $\Delta T(x) = T_d - T_\infty$ olarak alınarak denklem (2.31) ve (2.32) tekrar yazılmaktadır.

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \phi_1(\eta) \quad (2.35)$$

$$\frac{T_d - T}{\Delta T} = \phi_2(\eta) \quad (2.36)$$

Denklem (2.35) ve (2.36)'da η benzerlik değişkenidir ve η için sınır tabaka kalınlığı referans alınacak tek uzunluktur. Denklemlere bakıldığında $u_\infty, T_\infty, T_d(x), \nu, \text{Pr}, x, y$ gibi bir çok değişken mevcuttur. Sınır tabaka denklemlerinde en çok benzerlik çözüm yöntemi (değişkenlerin birleştirilmesi) kullanılmaktadır. Burada amaç sınır tabaka denklemlerini bir veya iki adi differansiyel denkleme dönüştürerek basitleştirmektir. Bu yöntemle başlangıç ve sonsuz sınır koşulları yeni bir sınır koşulu ile birleştirilmektedir (Baytaş, 2015).

Akış yönünde ilerledikçe hızın değişimi farklı olmaktadır. y yönündeki uzunluk sabit tutularak hız değişim eğrisi sabit kalması sağlanacaktır. Bu yüzden y yönündeki uzunluğu sınır tabaka kalınlığına bölerek yeni bir boyutsuz benzerlik dönüşüm değişkeni

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} \quad (2.37)$$

şeklinde elde edilmektedir. x ve y yönündeki hızlar ise akım fonksiyonu tanımından aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.38)$$

Yukarıdaki benzerlik değişkenleri kullanılarak akım fonksiyonları elde edilmektedir.

$$\psi(x, y) = \int_0^y u_x = \delta(x) \int_0^\eta u_x d\eta = \delta(x) \int_0^\eta u_\infty \phi_1(\eta) d\eta \quad (2.39)$$

Yukarıdaki $\phi_1(\eta)$ fonksiyonu için denklem (2.40) yazılabilir ve denklem (2.39) için aşağıdaki benzerlik biçimi elde edilmektedir.

$$\psi(x, y) = u_\infty \delta(x) f(x, \eta) \quad (2.40)$$

Hız sınır tabaka ölçüsü ise aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$\delta = \left(\frac{\nu b}{u_\infty} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

Sınır tabaka kalınlığı Denklem (2.41) düzenlenerek Denklem (2.40)'da yerine konulursa aşağıdaki akım fonksiyonu elde edilmektedir.

$$\psi(x, y) \sim (\nu x u_\infty)^{1/2} f(x, \eta) \quad (2.42)$$

Denklem (2.35)' deki $\phi_1(\eta)$ akım fonksiyonu benzerlik biçimi ifadesi düzenlenerek aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \frac{df(x, \eta)}{d\eta} = f'(x, \eta) \quad (2.43)$$

Denklem (2.37)'de sınır tabaka kalınlığı yerine Denklem (2.41)'deki değeri düzenlenerek dönüşüm değişkeni elde edilmektedir.

$$\eta = \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} y \quad (2.44)$$

Sınır tabaka denklemi (2.29), Denklem (2.38)'deki eşitlikler kullanılarak tekrar düzenlenmektedir.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y^2} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right) \quad (2.45)$$

Denklemlerin $x-y$ düzeleminde $x-\eta$ düzelemine dönüşümü yapılması gerekmektedir. Zincir kuralı yardımı ile dönüşüm denklemleri bulunur. Buradan işlemler sonucu enerji denklemi ve Denklem (2.45) düzenlenerek elde edilmektedir.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_\eta + \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.46)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)_x \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.47)$$

Elde edilen akım fonksiyonunun benzerlik biçim denklemi (2.40) ile Denklem (2.46) ve (2.47)'deki eşitlikler kullanılarak dönüşümler yapılmakta ve sınır tabaka denklemleri yeniden yazılmaktadır.

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_y = f \frac{d}{dx} (u_\infty \nu x)^{1/2} + (u_\infty \nu x)^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x} + (u_\infty \nu x)^{1/2} f' \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_x = (u_\infty \nu x)^{1/2} f' \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2} = u_\infty f'$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = u_\infty f'' \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}$$
(2.48)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_\eta + T' \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_x = T' \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = T'' \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)$$
(2.49)

Bulunan dönüşüm denklemleri Denklem (2.48) ve (2.49)'a göre düzenlendiği zaman iki boyutlu momentum ve enerji denklemleri elde edilmektedir.

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - (f')^2) = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{Pr}T'' + \frac{m+1}{2}fT' = x\left(f'\frac{\partial T}{\partial x} - T'\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (2.51)$$

Yukarıdaki denklemlerde m boyutsuz basınç gradyenidir.

$$m = \frac{x}{u_\infty} \frac{du_\infty}{dx} \quad (2.52)$$

Duvar sıcaklığı belli ise sıcaklık aşağıdaki şekilde boyutsuz olarak yazılabilmektedir.

$$\theta = \frac{T_d - T}{T_d - T_\infty} \quad (2.53)$$

Duvardaki ısı akısı bilirse Denklem (2.53)'teki boyutsuz ifade boyutsuzlaştıma için uygun değildir. T sıcaklığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$T = T_\infty + T_\infty(1 - \theta)\phi(x) \quad (2.54)$$

Burada $\theta = \theta(x, \eta)$ şeklindedir. Denklem (2.54)'ü Denklem (2.51)'de yerine yazarsak, boyutsuz dönüştürülmüş enerji denkleminin son hali elde edilmektedir.

$$\frac{1}{Pr}\theta'' + \frac{m+1}{2}f\theta' + n(1-\theta)f' = x\left(f'\frac{\partial \theta}{\partial x} - \theta'\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (2.55)$$

Yukarıdaki denklemde m ve n birer boyutsuz değişkendir. m ifadesi denklem (2.52)'de yazılmıştır. n ise duvar sıcaklığının belirlendiği hal için aşağıdaki gibidir (Baytaş, 2015).

$$n = \frac{x}{T_d - T_\infty} \frac{dT_d}{dx} \quad (2.56)$$

2.3. Gözenekli Ortam

Katı bir iskelet içerisinde birbirleri ile irtibatlı boşlukların bulunduğu bir malzemeye gözenekli ortam denir. Gözenekli ortamlara örnek olarak, deniz kumu, kireçtaşı, odun, çavdar ekmeği, akciğer ve dokuları örnek verilebilir. Ayrıca petrolün yeraltından çıkarılmasında, jeotermal enerji, kimyasal ve nükleer atıkların depolanmasında, yalıtım malzemelerinde, çakıl yataklı nükleer reaktörlerin tasarımında, doku içinde kanın akışı ve ısı geçişi problemlerinde, hava ve uzay araçlarında aerodinamik ısınmanın önüne

geçmek için kullanılan ısıl kalkan problemleri gibi çok sayıda bilimsel ve teknik alanda gözenekli ortam modellemesi kullanılmaktadır (Baytaş, 2006).

Gözenekli ortamlarda akış ile ilgili, Darcy tarafından temiz su getirme projesi için 1856 yılında yapılan deneysel çalışma ilk çalışmalardandır. Darcy yasası bir bağıntıdır ve korunum denklemleri gibi değildir. Gözenekli ortamlardaki akışkan akışı esas işleyişini basınç farkı şeklinde uygulanan bir kuvvetin meydana getirdiği akış olarak tanımlanmaktadır. Gözenek büyüklüğü, ortalama basınç ve basınç farkının sınırları ise dışarıdan uygulanan bir basınçla oluşan bu mekanik akışa etki eden faktörlerdir (Baytaş, 2015).

2.3.1. Gözenekli ortamın özellikleri

Ortaya çıkan her alanda malzemeye gözenekli ortam denilebilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir. Bunlar,

- a) Malzeme kendi boyutları ile karşılaştırıldığında içerisinde çok küçük ve birbiri ile irtibatlı boşluklar içermektedir. Bir katı matris içinde oluşan bu boşluklar, hava su vb gibi akışkanlardan oluşan karışımlar bulundurmaktadır.
- b) Akışkan katı malzemenin bir ucundan girip öbür ucundan çıkabilmelidir (Dullien, 1992).

Doğal bir gözenekli ortam içinde bulunan boşlukların büyüklüğü ve şekli düzensizdir. Gözenekli ortamın bütün özellikleri düzensizlikten etkilenmektedir. Gözenek yapısı değişkenlerinden en önemlileri ise; geçirgenlik, akış yatağı ve gözenekliliktir. Geçirgenlik gözenekli ortamın küle geçiş özelliğini, gözeneklilik ve akış yatağı yapısı ise gözenekli ortamı ifade etmektedir. Gözeneklilik ε ile gösterilir ve malzeme içindeki toplam boşluk hacminin malzemenin toplam hacmine oranıdır.

$$\varepsilon = \frac{\text{Gözenekli bir ortam içindeki toplam boşluk hacmi}}{\text{Gözenekli ortamın toplam hacmi}} = \frac{V_a}{V_a + V_k} \quad (2.57)$$

Yukarıdaki denklemde V_a katı içinde akışkan veya boşluk hacmini, V_k ise katı matris hacmini ifade etmektedir. Gözeneklilik, gözenekli bir malzeme için en önemli özelliktir. Malzemenin tüm fiziksel özellikleri gözeneklilikten etkilenmektedir. Her yerde aynı özellikleri gösteren gözenekli ortamda, gözeneklilik sabit olabilir fakat yere bağlı olarak

genellikle değişiklik göstermektedir. Gözenekliliğin yere bağlı değişimi aşığıdaki eşıtlik ile ifade edilmektedir (Alazmi ve Vafai, 2000).

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} \left(1 + b e^{-cy/d_p} \right) \quad (2.58)$$

Yukarıdaki denklemde b ve c gözeneklilik değişim sabitidir ve deneysel çalışma sonucu elde edilmiştir. d_p ise her bir taneciğin çapını ifade etmektedir. İki boyutlu gözenekli ortam çalışmalarıda akış yatağının yapısı önemlidir. Akış yatağı (tortuosity) gözenekliliğe, boşluklar arasındaki akış kanallarının şekline ve tanecik çapına bağlıdır (Ergün, 1952).

$$\lambda = \sqrt{\varepsilon} \quad (2.59)$$

Geçirgenlik ise gözenekli ortamın akış iletkenliğinin ve malzeme içinden akışkanın geçme kolaylığının ölçüsüdür. Geçirgenlik akışkanın özelliğinden bağımsız olup gözenekli ortamın geometrisine bağlıdır. K ile gösterilir ve geçirgenliğin birimi m^2 dir. Geçirgenlik ifadesi Darcy olarak tanımlanabilir ve bir Darcy= $0.987 \times 10^{-12} m^2$ dir (Baytaş, 2015).

Küresel taneciklerden oluşan gözenekli bir malzemenin geçirgenliliği, gözeneklilik ve tanecik çapına göre aşığıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$K = \frac{\varepsilon^3 d_p^3}{A(1-\varepsilon)^2} (m^2) \quad (2.60)$$

Yukarıdaki denklemde A sabittir ve $A=150$ olarak bulunmuştur. d_p ise kürelerin çapıdır (Ergün, 1952).

2.3.2. Gözenekli ortamlarda Laminer akış

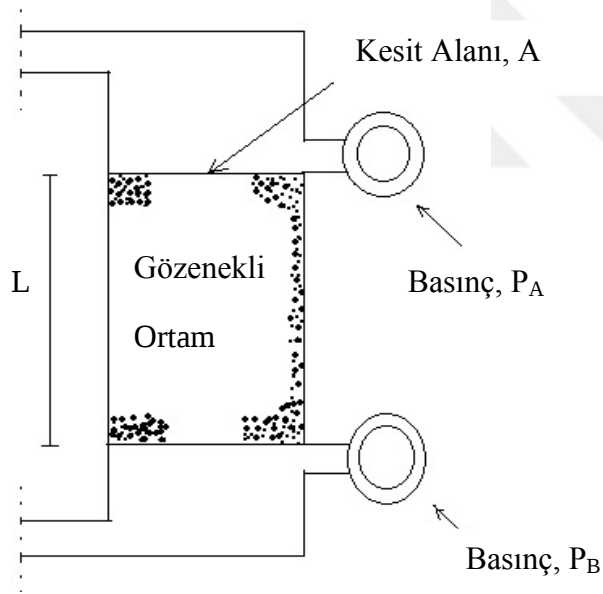
Düzgün akım çizgileriyle belirtilen çok düzenli akış hareketine laminer akış denilmektedir. Laminer akışta, bir akışkan elemanın geçtiği yol, diğer bir akışkan elemanı tarafından izlenmektedir. Türbülanslı akışta ise akışkan elemanları arasında sadece kısmi bir korelasyon sağlanabilir. Laminer akış durumunda, akışkan viskozitesi içsel sürtünmenin ölçüsü olarak tanımlanmaktadır. Akışkan plakları değişik hızlarda ise plaklar arası kayma kuvveti vardır ve katı yüzeyindeki akışkan hızı sıfırdır. Katı sabit ise sıvıya katı tarafından hareketinin zıt yönünde karşı bir kuvvet uygulanır. Eğer katı sabit değilse akışkan kendisi ile beraber katıyı çekmeye çalışır. Bu viskoz direniş için katıdaki çekme

kuvvetine eşit ve zıt yönde bir kuvvet denilebilir. Düz plakta oluşan bu kayma kuvveti, Newtonun (μ : akışkanın viskozitesi v : plaka üzerindeki yüksekliğe bağlı akışkan hızı z : yüzeyden sıvıya uzaklık)

$$F = \mu \left(\frac{dv}{dz} \right) \quad (2.61)$$

denklemleri hesaplanmaktadır (Saydam, 1973).

Gözenekli ortamda akışkanın hızı, akış yolu boyunca noktadan noktaya değişmektedir ve hızdaki bu değişiklikleri meydana getiren kuvvet de noktadan noktaya farklılık göstermektedir. Doğal gözenekli maddelerin gözenek yapıları ve akış yolları dağınıktır fakat kararlı laminar akışta bir akışkan elamanı için bu akış yolunun üniform olduğu kabul edilmektedir. Kararlı laminar akış için kuvvet, sıvı üzerindeki dış ve iç kuvvetlerle dengede olmalıdır. Örnek olarak aşağıdaki şekilde akış aleti verilmektedir (Saydam, 1973).



Şekil 2.4. Akış Aleti (Saydam, 1973)

Yukarıdaki şekilde A kesitli, L boyundaki silindirik gözenekli bir madde tüp içine yerleştirilip, sistem sıvıyla doldurulmaktadır. Sıvının gözenekli ortamda yukarı doğru akışına karşı aşağı doğru viskoz bir direnç vardır. Bu kuvvet denklem (2.61)' den gözenekli ortamı da entegre ederek bulunabilir. Fakat gözenekli ortamın geometrisini matematiksel ifade etmek zordur. Laminer akışta gözenekler içinde hızın kısmi dağılımı hız büyüklüğünden bağımsızdır. Bu yüzden dv/dz her yerde q/A ile orantılı, toplam yüzey

ise AL ile orantılı olmalıdır. Burada $\dot{q}$ volumetrik akış debisidir. Sıvıya uygulanan viskoz çekme kuvveti ise aşağıdaki gibidir (Saydam, 1973).

$$F_{\mu} = B \mu q L \quad (2.62)$$

B , uzunluk karesinin tersi boyutunda olan ve gözenek geometrisi özelliği olan bir sabittir. Akış yukarı doğru olduğunda F kuvveti tam tersi yönde olup aşağı doğrudur. Gözenekli ortamda sıvıya etki eden dış kuvvetleri P_a ve P_b basınçları olarak alınabilmekte ve bu basınçların etki ettiği gözenek alanı ise εA olarak ifade edilmektedir. Bu basınçların oluşturduğu yukarı doğru kuvvet ,

$$F_p = (P_b - P_a) \varepsilon A \quad (2.63)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Aşağı doğru kuvvete ise örnekte bakıldığında sıvının ağırlığı etki etmektedir. Bu kuvvet ise,

$$F_g = \rho(\varepsilon AL)g \quad (2.64)$$

olup, g yerçekimi ivmesi, ρ ise sıvının yoğunluğudur.

Kararlı akış halinde F_{μ} , F_p ve F_g kuvvetleri dengede olmalıdır. Dolayısıyla,

$$B\mu qL + \rho(\varepsilon AL)g = (P_b - P_a)\varepsilon A \quad (2.65)$$

Buradan,

$$q = -\frac{KA}{\mu L}[(P_a - P_b) + \rho g L] \quad (2.66)$$

elde edilmektedir. Denklem (2.66) Darcy kanunu ifade etmektedir. K sabiti ise permeabilite olup gözenekli ortamın özelliğidir.

$$K = \varepsilon / B \quad (2.67)$$

Yatay doğrusal akışta sıvı ağırlığının etkisi olmayacağı için (2.66) denkleminde $\rho g L$ ifadesi ihmal edilmektedir. Buradan

$$q = -\frac{KA}{\mu L}(P_a - P_b) \quad (2.68)$$

ifadesi bulunmaktadır (Saydam, 1973).

2.3.3. Gözenekli ortamda Türbülanslı akış

Yüksek $\dot{q}$ akış debilerinde laminar akış ve Darcy yasası geçerli değildir. Laminer akışın sınırları Reynolds sayısına bakılarak belirlenmektedir. Reynolds sayısı,

$$Re = \frac{q\rho\delta}{\mu A\varepsilon} \quad (2.69)$$

ifadesi olarak tanımlanmaktadır. Burada $\dot{q}$ volumetrik akış debisi, ρ sıvı yoğunluğu, μ viskozite, A örneğin kesit alanı ve δ de ortalama tane büyüklü çapıdır. Gözenekli ortamlarda kanal çapının ölçülmesi zordur bu yüzden hesaplamalarda gözenek çapının ölçüsü yerine tane çapı alınmaktadır veya gözenek çapı ölçüsü için $(K/\varepsilon)^{1/2}$ ifadesi kullanılmaktadır (Saydam, 1973).

Gözenekli ortamda türbülanslı akış Re Reynolds sayısı ile λ sürtünme faktörü arasındaki bağlantı ile bulunabilir. Sürtünme faktörü,

$$\lambda = \delta \frac{\Delta p}{Lp} \left(\frac{\varepsilon A}{q} \right)^2 \quad (2.70)$$

ifadesine eşittir. Eşitlikteki Δp ifadesi örnek uzunluğu boyunca olan basınç düşümüdür. Birden daha küçük Reynolds sayısı için Re ile λ arasında

$$\lambda = c Re^{-1} \quad (2.71)$$

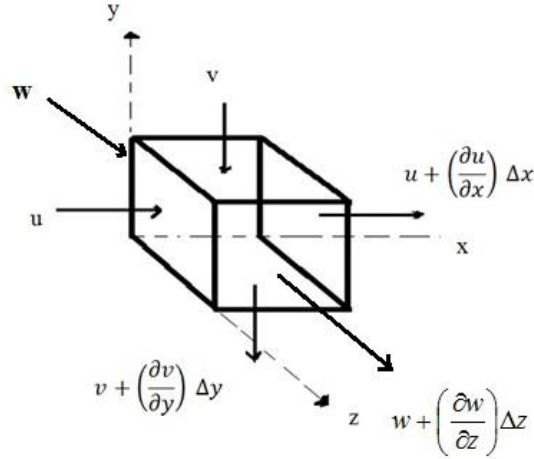
ilişkisi mevcuttur ve c sabittir. (2.69) , (2.70) ve (2.71) denklemlerinden,

$$q = \frac{\varepsilon \delta^2 A \Delta p}{c \mu L} \quad (2.72)$$

gözenekli ortamda türbülanslı akış için Darcy kanuna eşdeğer bir ifade elde edilmektedir (Saydam, 1973).

2.3.4. Gözenekli ortamdaki akışkan akışının diferansiyel denklemi

Gözenekli ortamda akış matematiksel olarak ifade edilir ve süreklilik denklemi çıkarılmaktadır. Süreklilik denklemi çıkarılan gözenekli ortamdaki akış için diferansiyel denklem böylece yazılmaktadır.



Şekil 2.5. Kütlenin Korunumun Gösterimi (Saydam, 1973)

Yukarıdaki şekil dikkate alınarak gözenekli ortamdaki üç boyutlu akımın temel denklemleri elde edilmektedir. Ortam doygun, boşluklu ve sıkıştırılmaz olduğu kabul edilmiştir. Δx , Δy , Δz akımın boyutlarıdır. Birim zamanda x, y, z doğrultusunda elemana giren akışkanın hızları (akış yoğunluğu) u, v, w ile gösterilmiştir. Çıkış hızları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \quad (2.73)$$

$$v + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y \quad (2.74)$$

$$w + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \Delta z \quad (2.75)$$

Kütlenin korunumu yasası gereği giren akım miktarı ile çıkan akım miktarı sistemde aynı olmalıdır. O halde,

$$u(\Delta y \Delta z) + v(\Delta x \Delta z) + w(\Delta x \Delta y) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right) (\Delta y \Delta z) + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) (\Delta x \Delta z) + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \right) (\Delta x \Delta y) \quad (2.76)$$

ifadesi elde edilmektedir. Sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.77)$$

süreklilik denklemi elde edilir. Bu denklemde akış yoğunluğu u , v , w bileşenleri, Darcy kanununa göre ifade edildiği zaman gözenekli ortam karakterine bağlı bir çok denklemin meydana geldiği görülmektedir.

İzotrop gözenekli ortam için,

$$v = -\frac{K}{\mu} \tilde{V} \psi \quad (2.78)$$

denklemi uygulanabilir. Sonuç diferansiyel denklemi ise aşağıdaki şekilde olmaktadır.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{K}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.79)$$

Denklemde, μ viskozitesi sabit olarak alınırsa, K permeabilitesi x , y , z 'nin fonksiyonu olabilir. Ortam homojen olduğunda K permeabilitesi sabit olur. Eğer μ viskozitesi sabitse akışın diferansiyel denklemi,

$$\left(\frac{K}{\mu} \right) \tilde{V}^2 \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \left(\frac{K}{\mu} \right) = 0 \quad (2.80)$$

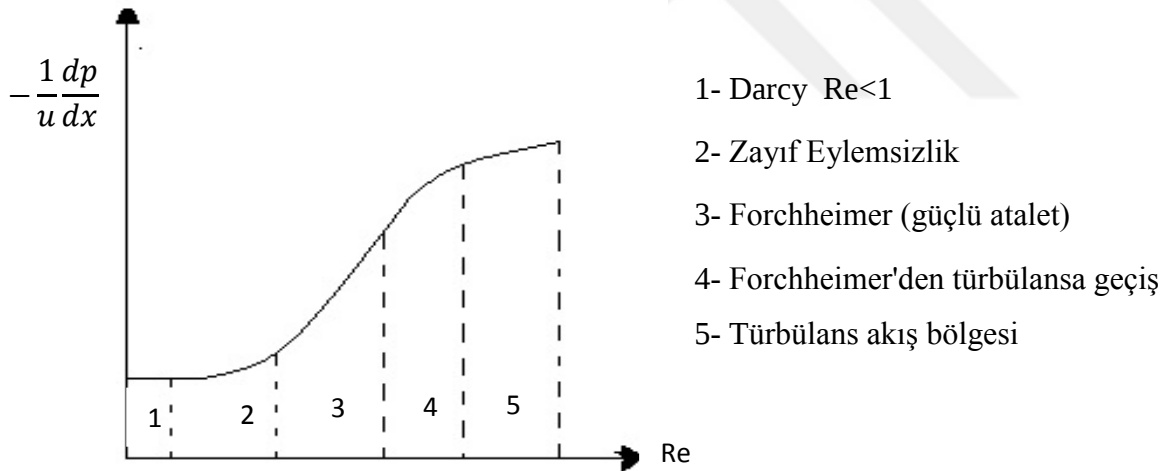
şekilde ifade edilebilir.

Denklem (2.80) gözenekli ortamda akan izotrop, homojen, sıkıştırılamayan akışın eşitliğidir (Saydam, 1973).

2.3.5. Non-Darcy yasası ve Forcheimer denklemleri

Darcy olmayan davranışlar, yüksek hızın olduğu durumlarda gözenekli ortamlarda sıvı akışını tanımlamak için önemlidir. Sıvı akış hızının basınç gradyanıyla doğru orantılı olduğunu belirten Darcy yasası, hem sıvı hem de gaz fazlı sistemlerde sadece düşük akış hızlarında doğru olmaktadır. Daha yüksek akış hızlarında, Darcy yasası genellikle akış hızında ikinci dereceden bir terim içeren Forcheimer denklemleriyle değiştirilmektedir. (Takhanov, 2011). Darcy olmayan akışı tanımlamak için Reynolds sayısı ve Forcheimer sayısına bakılmaktadır. Geçmişte yapılan çalışmalar incelendiğinde Forcheimer sayısı, Darcy olmayan akışın tanımlanmasında geniş uygulanabilirlik avantajına sahiptir ve sıvı-katı etkileşimlerinden kaynaklanan basınç düşüşünün viskoz dirençle olan oranına eşittir (Zeng ve Grigg, 2006).

Gözenekli ortamlarda akış rejimleri Şekil 2.6'de gösterildiği gibi sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma; akış rejimi Re sayısı küçük olandan Re sayısı büyük olana kadar aşağıdaki gibi değişmektedir. 1=Darcy, 2=Zayıf eylemsizlik, 3= Forcheimer (güçlü atalet), 4=Forcheimer'den türbülansa geçiş ve 5= türbülans akış bölgesidir (Skjetne 1995).



Şekil 2.6. Gözenekli ortam akış rejimi (Skjetne 1995)

Darcy yasası (Darcy, 1856), akış hızı ve basınç gradyanının doğrusal bir ilişkisi olduğunda gözenekli ortamlardaki akışı ve düşük akış hızlarını ($Re < 1$) tanımlamak için geçerlidir. Bu yasa, viskoz kuvvetlerin gözenekli ortamlarda atalet kuvvetleri üzerinde hakim olduğunu varsaymaktadır, bu nedenle atalet kuvvetleri ihmal edilebilir. Yatay olmayan gözenekli bir ortamdan sıkıştırılmaz bir Newton akışkanının tek yönlü sabit bir akışı şöyle yazılabilir:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{K} V \quad (2.81)$$

Burada, P basınç (Pa), V Darcy hızı (m/s), x alan koordinatı (m), μ akışkanın dinamik viskozitesi (Pa s) ve K ortamın geçirgenliğidir (Darcy geçirgenliği) (m^2). Bununla birlikte, akış hızı (Reynolds sayısı) arttıkça, atalet kuvvetleri daha önemli hale gelmekte ve basınç gradyanı ile akış hızı arasındaki ilişki doğrusal olmamaktadır. Böyle bir durumda Darcy yasası genellikle akış hızındaki kübik bir terimle düzeltilmektedir.

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{K} V + \frac{\gamma}{\mu} p^2 V^3 \quad (2.82)$$

Burada γ zayıf atalet faktörüdür. Zayıf eylemsizlik, atalet kuvvetinin viskoz kuvvetle aynı düzeye sahip olduğu bir rejimdir. Skjetne tarafından deneysel olarak doğrulanmıştır.

Akış oranı (Reynolds sayısı) daha da arttıkça, basınç kaybı zayıf atalet rejiminden bir basınç düşüşünün karışma hızının karesiyle orantılı olduğu Forchheimer (güçlü atalet) rejimine dönüşmektedir (Forchheimer, 1901).

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu}{k_{fh}} V + F \rho V^2 \quad (2.83)$$

Burada, k_{fh} Forchheimer geçirgenliğidir (m^2). F atalet direnci katsayısı, Darcy olmayan akış katsayısı veya Forchheimer katsayısıdır (m^{-1}). Denklem (2.83) genellikle zayıf atalet geçiş rejimi nedeniyle ve $k \neq k_{fh}$ olduğu için Forchheimer denklemi olarak bilinmektedir. Bu olgunun ana nedeninin viskoz yayılım olduğu (viskoz etkiye karşı kinetik enerjinin iç enerjiye dönüştürülmesi olduğu) varsayılmaktadır. Düşük Re değerlerinde, viskoz yayılma sabit kalmaktadır. Daha yüksek Re değerlerinde ise, yüksek atalet kuvvetlerinden dolayı viskoz yayılma artmakta ve ortamın geçirgenliğinde değişiklik olmaktadır. Ayrıca, Forchheimer denklemini yazmak için kullanılan makro ölçekli ve mikro ölçekli yaklaşımlar vardır. Makro ölçekli yaklaşımlar, Forchheimer denklemini süreklilik ölçeğinde Navier-Stokes denkleminde oluşmaktadır. Mikro ölçekli yaklaşım ise seri veya paralel olarak sıralanmış ve basit analitik çözümler içeren gözenekli bir ortamı tanımlamaktadır (Takhanov, 2011).

2.4. Sonlu Farklar Yöntemi

Yapısı parabolik olan sınır tabaka denklemleri, sonlu farklar metodları, metot çizgileri, Galerkin metodu ve sonlu elemanlar metodları gibi sayısal yöntemler kullanılarak çözülebilmektedir. Günümüzde kullanılan metodların içerisinde sonlu farklar metodu, sınır tabaka eşitlikleri için en yaygın olarak kullanılmaktadır (Cebeci, 2002).

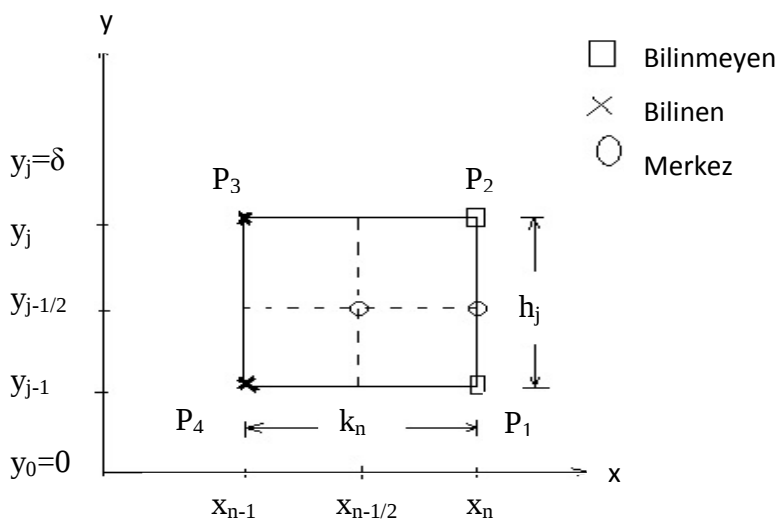
2.4.1. Keller-Box yöntemi

Keller-Box yöntemi, alternatif bir kapalı (implicit) yöntem olarak tanımlanmaktadır. Bu yöntem, tüm parabolik kısmi differansiyel denklemlerin çözümü için çok sayıda uygun istenen özelliğe sahiptir. Bu yöntemin başlıca özellikleri ve çözüm için takip edilecek yol Cebeci tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

- 1) Keller-Box Methodu, Crank-Nicolson methoduna göre denklemleri çözmek için biraz daha fazla aritmetiktir.
- 2) Düzensiz x ve y aralığında 2. Dereceden doğruluk bulunmaktadır.
- 3) Çok hızlı x varyasyonlarına izin verir.
- 4) Çok sayıda bağlı denklemin çözümünün kolay programlanmasına izin vermektedir.

Aşağıdaki 4 madde izlenerek Keller-Box Methodu uygulanmaktadır.

- 1) Denklemi ya da denklemleri birinci dereceye düşürülür.
- 2) Merkezi farklar kullanarak fark eşitlikleri yazılır.
- 3) Doğrusal değilse cebirsel sonuç denklemleri doğrusallaştırılır ve matris-vektör formunda yazılır.
- 4) Doğrusal (lineer) sistem block-tridiagonal-elimination metoduyla çözülür.



Şekil 2.7. Box metodu için sonlu fark kareleri (Cebeci, 2002)

Denklem (2.84) in Keller-Box metodunu kullanarak çözümü aşağıdaki gibidir.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.84)$$

İlk önce denklemleri ikincil denklem sisteminde ifade edilmektedir.

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T' = p \quad (2.85)$$

(2.22) eşitliği kullanarak (2.21) denlemi düzenlenmektedir.

$$p' = \frac{Pr}{\nu} u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.86)$$

Sıradan differansiyel denkleminin (2.85) sonlu fark formu Şekil (2.7)'de gösterilen P_1P_2 'nin orta noktası $(x_n, y_{i-1/2})$ için yazılmıştır ve kısmi differansiyel denkleminin (2.86) sonlu fark formu $P_1P_2P_3P_4$ dikdörtgenin orta noktası $(x_{n-1/2}, y_{j-1/2})$ için yazılmaktadır.

$$\frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j} = \frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{2} = p_{j-1/2}^n \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{h_j} + \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{h_j} \right) = \frac{Pr}{\nu} u_{j-1/2}^{n-1} \frac{T_{j-1/2}^n - T_{j-1/2}^{n-1}}{k_n} \quad (2.88)$$

(2.86) numaralı ifade açık halde denklem (2.88)'deki gibi yazılmaktadır. Ayrıca denklem (2.87) ve (2.88) yeniden düzenlenerek yazılabilir.

$$T_j^n - T_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} (p_j^n - p_{j-1}^n) = 0 \quad (2.89)$$

$$(s_1)_j p_j^n + (s_2)_j p_{j-1}^n + (s_3)_j (T_j^n + T_{j-1}^n) = R_{j-1/2}^{n-1} \quad (2.90)$$

Burada,

$$(s_1)_j = 1, (s_2)_j = -1, (s_3)_j = -\frac{\lambda_j}{2} \quad (2.91)$$

$$R_{-1/2}^{n-1} = -\lambda_j T_{j-1/2}^{n-1} + p_{j-1}^{n-1} - p_j^{n-1} \quad (2.92)$$

$$\lambda_j = \frac{2Pr}{\nu} u_{j-1}^{n-1} \frac{h_j}{k_n} \quad (2.93)$$

$u_{j-1/2}$ ifadesi için üst simge gerekli değildir ama genelde dahil edilmektedir.

Yukarıdaki (2.89) ve (2.90) denklemleri $j=1,2, \dots, J-1$ için uygulanırsa $j=0$ ve $j=J$ olduğunda $T_0 = T_w$, $T_J = T_e$ yazılmaktadır.

(2.89) ve (2.90) denklemleri doğrusal olduğu için sistem tek seferde matris vektör şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

	T_0	P_0	T_j	P_j	T_J	P_J
Sınır koşulları	1	0	0	0		
Denklem 2.26	-1	$\frac{-h_1}{2}$	1	$\frac{-h_1}{2}$		
Denklem 2.27	$(s_3)_j$	$(s_2)_j$	$(s_3)_j$	$(s_1)_j$	0	0
	0	0	-1	$\frac{-h_{j+1}}{2}$	1	$\frac{-h_{j+1}}{2}$
Sınır koşulları			$(s_3)_J$	$(s_2)_J$	$(s_3)_J$	$(s_2)_J$
			0	0	1	0

$$x \begin{bmatrix} (T_0) \\ (p_0) \\ (T_j) \\ (p_j) \\ (T_J) \\ (p_J) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ((r_1)_0) \\ ((r_2)_0) \\ ((r_1)_j) \\ ((r_2)_j) \\ ((r_1)_J) \\ ((r_2)_J) \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$(r_1)_0 = T_w, (r_1)_j = R_{j-1/2}^{n-1}, 1 \leq j \leq J,$$

$$(r_2)_j = 0, 0 \leq j \leq J-1, (r_2)_J = T_e \quad (2.95)$$

Verilen (2.94) denklem sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir.

$$A\delta = r \quad (2.96)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & C_0 & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & \\ & & B_j & A_j & C_j \\ & & & B_{j-1} & A_{j-1} & C_{j-1} \\ & & & & B_j & A_j \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_J \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_J \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

$$\delta_j = \begin{bmatrix} T_j \\ p_j \end{bmatrix}, \quad r_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

A_j , B_j ve C_j matrisleri 2x2 matrisi olarak tanımlanmıştır.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{-h_1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_j = \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_1)_j \\ -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J-1, \\ A_j = \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_1)_j \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} (s_3)_j & (s_1)_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq J, \\ A_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq j \leq J-1 \quad (2.99)$$

Crank-Nicolson denkleminde olduğu gibi kapalı (kesin) doğal metodu yine üç boyutlu bir matrisi oluşturmaktadır, fakat girdiler skalar yerine 2x2 blok şeklindedir.

Blok eleme yönteminde denklem (2.96)'nın çözümü iki taramadan oluşmaktadır. İleri tarama, r_j , Δ_j ve w_j yineleme formülleri ile hesaplanmaktadır.

$$\Delta_0 = A_0 \quad (2.100)$$

$$r_j \Delta_{j-1} = B_j \quad (2.101)$$

$$\Delta_j = A_j - r_j C_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq J \quad (2.102)$$

$$w_0 = r_0 \quad (2.103)$$

$$w_j = r_j - r_j w_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq J \quad (2.104)$$

Burada r_j , B_j yapısıyla aynıdır.

$$r_j = \begin{bmatrix} (\delta_{11})_j & (\delta_{12})_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Δ_j 'nin ikinci sırası, A_j 'nin ikinci sırasıyla aynı yapıya sahip olmasına rağmen;

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} (a_{11})_j & (a_{12})_j \\ -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

genel olarak aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} (a_{11})_j & (a_{12})_j \\ (a_{21})_j & (a_{22})_j \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

δ_j aşağıdaki yinelenen formüllerden hesaplanmaktadır (Cebeci,2002).

$$\Delta_j \delta_j = w_j \quad (2.108)$$

$$\Delta_j \delta_j = w_j - C_j \delta_{j+1}, \quad j = J-1, J-2, \dots, 0 \quad (2.109)$$

2.5. Yapılan Çalışmalar

Sınır tabakada dış akış problemleri birçok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Takhar ve Beg (1997), gözenekli bir ortamda yarı-sonsuz dikey bir levha üzerinden geçen değişken ve non-Darcy olan akışa manyetik alanın etkisini incelemişlerdir. Keller box implicit sonlu fark yöntemini kullanarak ve denklemleri teorik ve sayısal olarak çözerek viskoz yayılım ve sıvı-katı termal iletkenlik oranını araştırmışlardır. Hartmann sayısının momentum sınır tabaka kalınlığını arttırdığını ve aynı zamanda lokal yüzey sürtünmesini azalttığını (kesme gerilmesi) göstermişlerdir. Bununla birlikte, ısı transferi oranının, manyetik alan ile (Eckert sayısının pozitif değerleri için) arttığını belirtmişlerdir.

Yih (1998), gözenekli bir ortamda, değişken bir duvar sıcaklığına sahip düz bir levhaya karşı akışın emiş/üfleme etkisini sayısal olarak analiz etmiştir. Doğrusal olmayan sınır tabaka denklemlerini dönüştürerek, bu diferansiyel denklemleri Keller box yöntemi ile çözmüştür. Boyutsuz hız ve sıcaklık profillerinin, yerel sürtünme katsayısının, Nusselt sayısının; Prandtl sayısı, Hartmann sayısı, duvar sıcaklığı geçirgenlik parametresi ve emme/üfleme parametreleri ile değişimini elde etmiştir. Genellikle, lokal sürtünme katsayısının ve Nusselt sayısının akışkanın emilmesi ve geçirgenlik parametresinin artması nedeniyle arttığını tespit etmişlerdir.

Takhar ve Nath (2000), manyetik alana sahip dönen bir kürenin durgunluk bölgesindeki akışı ve ısı transferini araştırmışlardır. Sınır tabakasının kenarındaki hızın ve döner kürenin açisal hızının zamana bağlı sürekli değişken halde olmasının akış alanındaki düzensizliğe sebep olduğunu açıklamışlardır. Akışı düzenleyen diferansiyel denklemler sistemini sayısal olarak çözmüşlerdir. Yüzey kaymalarının x ve y yönlerinde gerildiğini ve yüzey ısı transferinin hızlanması ile arttığını, manyetik alanın ise yüzey kayma gerilmesi haricinde arttığını bulmuşlardır. Yüzey kaymalarının x ve y yönlerinde gerilmesi ve yüzey ısı transferinin hızlanma ile arttığını, x-yönünde ve manyetik alanın gövdeye göre sabit olduğunda manyetik parametrenin artırılması ile yüzey ısı transferinin azaldığını göstermişlerdir.

Takhar ve Chamkha (2000), sürekli hareketli dikey ince silindir üzerinde olan akışın kütle transferini incelemişlerdir. Akışı karakterize eden kısmi diferansiyel denklemleri, sonlu farklar yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Ayrıca, Shanks transformasyonu ile düzensizlik tekniği kullanarak çözüm elde etmişlerdir. Bu dönüşümü çözümün geçerliliğini arttırmak için kullanmışlardır. Yüzey cisim sürtünmesinin, ısı transferinin ve kütle transferinin kaldırma kuvvetleri ile arttığını, kaldırma kuvvetlerinin ise hız profillerinde büyük ölçüde artışa neden olduğunu belirlemişlerdir. Ayrıca, Prandtl sayısı ve Schmidt sayısının sırasıyla yüzey ısı transferi ve kütle transferini önemli ölçüde etkilediğini tespit etmişlerdir.

Pop and Na (2000), gözenekli bir ortamda, içi boş dikey ince dairesel silindir üzerinde olan akışı sayısal olarak incelemişlerdir. Silindir için bir boyutlu ısı iletimi denklemi ile birlikte silindirin üzerinde olan akışın gözenekli ortam için sınır tabaka denklemlerini, benzer olmayan dönüşüm kullanarak boyutsuzlaştırma yapmışlardır. Elde edilen denklemleri keller-box yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Duvar iletim parametresinin neden olduğu etkilere değinerek, hesaplamalar yapmışlardır. Sıcaklık profilleri ve yerel Nusselt sayısı gibi ısı transfer sonuçlarını elde etmişlerdir.

Vazsi (2001), eğik düz zemindeki iki boyutlu birleşik olmayan ısı transferini analitik ve numerik olarak incelemiştir. Yüzeyin pozitif ve negatif eğimine göre numerik çözümler ve seriler bulmuştur. Denklemleri sonlu farklar yöntemiyle çözmüş ve serilerin doğruluğunu incelemiştir. Pozitif eğim için ön kenardan levha boyunca ölçülen boyutsuz koordinatın tüm değerleri için çözümler mümkün olduğunu, negatif eğim için ise çözümler yalnızca sınır tabakasının ayrıldığı noktaya kadar geçerli olduğunu belirlemiştir.

El-Amin (2003), Darcy olmayan gözenekli maddenin katı matrisinden, Joule ısıtmasından ve zorlanmış taşınım üzerinde olan yatay dairesel silindirin manyetik alan altında birinci ve ikinci mertebeden direnç etkilerini incelemiştir. Değişken duvar sıcaklık koşulları durumunu göz önünde bulundurmıştır. Navier Stokes denklemlerini benzerlik yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Hız ve sıcaklık sonuçlarını, yüzey sürtünme ve ısı transfer oranlarını tablolar ve grafiksel olarak incelemiştir.

Tashtoush ve Al-Odat (2004), dalgalı bir yüzeydeki zorlanmış ısı transferi ve akışa manyetik alan etkisini sayısal olarak incelemiştir. Manyetik alanın Nusselt sayısını azaltarak ve yüzey sıcaklığını artırarak taşınım ile ısı transferini azalttığını bulmuşlardır.

Kumari ve Nath (2004), ince dikey bir silindir üzerinde olan lokal soğutma/ısıtma ve üfleme/emme ile karışık akışın etkilerini incelemiştir. Lokal/ısıtma ve üfleme/emme, karmaşıklığı arttırdığından dolayı problemi çözmek için silindirin bazı bölümlerinde eşit olmayan bir duvar sıcaklığı (ısı akısı) dağılımı ve yüzey kütle transferi düşünmüşlerdir. Sınır tabaka yaklaşımını doğrusal olmayan eşleşmiş parabolik kısmi diferansiyel denklemleri, örtük bir sonlu fark şeması kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Lokal soğutma/ısıtma ve üfleme/emmenin ısı transferi üzerindeki etkilerinin fazla olduğunu, soğutma/ısıtmanın yüzey sürtünme üzerindeki etkisinin ise az olduğunu belirlemişlerdir.

Kumari ve Jayanthi (2004), gözenekli bir ortamda uzun yatay silindir üzerinde ve non-Darcy olan serbest taşınım akış için kararlı hal çözümleri elde etmişlerdir. Sınır tabaka denklemlerini örtük sonlu fark yöntemi olan Keller box yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Ergun sayısı, Rayleigh sayısını, güç kanunu endeksi ve Transpiration parametresi gibi parametrelerin çeşitli değerleri için ısı transferi sonuçlarını elde etmişlerdir.

Eldahab ve Salem (2005), üniform bir manyetik alanın etkisinde ve sürekli hareket halindeki silindir üzerinde olan ayrıca elektrik iletkenliği olmayan non-Newtonian akışın ısı transfer problemini, silindir yüzeyindeki sıcaklık ve konsantrasyonundaki güç yasası varyasyonlarını analiz etmişlerdir. Kimyasal reaksiyon kaynağı terimi ile difüzyon denklemlerini sayısal olarak çözmüşlerdir. Çeşitli parametrelerin hız, sıcaklık ve konsantrasyon profilleri üzerindeki etkileri ile silindir yüzeyinden akışkana olan ısı ve kütle transfer oranlarını grafiksel olarak ve tablo halinde sunmuşlardır.

Chang (2006), kaldırma kuvveti etkisi altında olan dikey ince ve içi boş dairesel silindir boyunca akan bir mikropolar sıvı içinden olan akışı ve ısı transferini araştırmıştır.

Denklemleri lineer olmayan denklemlere dönüştürerek bunlarla ilişkili sınır koşulları kübik spline methodu ve sonlu fark şeması kullanılarak benzer olmayan dönüşümle çözmüştür. Çalışmasında, birleşik ısı transfer parametresinin, Richardson sayısının, mikropolar parametresinin ve Prandtl sayısının etkilerini araştırmıştır. Isı transfer parametresi etkisinin, büyük kaldırma kuvveti etkisinde ve Prandtl sayısı, mikropolar parametresi daha büyük olan bir sistemde daha fazla olduğunu belirlemiştir. Zorlanmış taşınım kiyasla, kaldırma kuvveti etkisinin daha düşük bir arayüzey sıcaklığına, aynı zamanda lokal ısı transfer oranına ve yüzey sürtünme faktörüne yol açtığını bulmuştur. Son olarak, mikropolar sıvı durumunda arayüzey sıcaklığındaki bir artışın, yüzey sürtünme faktöründe ve lokal ısı transfer hızında azalmaya neden olduğunu göstermiştir.

Kaya ve Aydın (2008), viskoz yayılım, emme/enjeksiyon ve atalet etkisi ile akışkanlaştırılmış gözenekli bir ortama gömülü düz bir levha üzerinde olan akışı, keller box sonlu farklar yöntemini kullanarak analiz etmişlerlerdir. Düz plakanın sabit sıcaklıkta tutulduğunu varsayarak, konveksiyon, sınır ve atalet için non-Darcy akışın etkilerini dikkate almışlardır. Non-Darcy akışın etkileri, hızı düşürdüğü ve sıcaklığı artırdığını ve enjeksiyonun tersine dönerken sıvı emişine bağlı olarak lokal ısı transfer parametresinin ve lokal yüzey sürtünme parametresinin arttığını da göstermişlerdir.

Mamun ve Chowdhury (2008), manyetik alanın, viskoz enerji dağılımının ve ısı üretiminin dikey düz zemindeki sıkıştırılamayan, viskoz ve elektriksel iletken sıvıya olan etkilerini kondüksüyon (iletken elektrik) etkisi altında incelemişlerdir. Manyetik alan etkisi altında iletkenlik, viskoz dağılım ve ısı üretimi göz önüne alınarak, zamandan bağımsız, iki boyutlu, laminar olmayan taşınım ısı transferini çalışmışlardır. Hız profilini, sıcaklık dağılımını, yüzey sürtünmesini, ısı transfer oranını ve yüzey sıcaklık dağılımını grafiksel olarak incelemişlerdir. Boyutsuz sınır tabakası denklemlerini ilgili sınır koşulları ile, örtük sonlu fark yöntemini kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Çalışma sonucunda akışkanın hızının ve arayüzdeki sürtünmesinin azalan manyetik alanla birlikte arttığını, sıvının sıcaklığının artan manyetik alan ve ısı üretim parametresi ile arttığını belirlemişlerdir. Ayrıca, artan manyetik alan ve ısı üretim parametresi ile ısı transferi hızının azaldığını tespit etmişlerdir.

Mamun ve Chowdhury(2008), ısı üretiminin, dikey düz zeminden olan akışa etkisini incelemişlerdir. Lineer olmayan denklemleri Keller-box yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Isı iletim parametresi, birleşik ısı transferi parametresi ve Prandtl sayısının farklı değerleri için numerik sonuçlar bulmuşlardır. Hız, sıcaklık, yüzey sürtünmesi ve ısı

transfer katsayısını grafiksel olarak incelemişlerdir. Sıvının hızı ve yüzey sürtünmesinin artan ısı iletim parametresiyle birlikte artarken, artan Prandtl sayısı ile azaldığını, sıvının sıcaklığının artan ısı iletim parametresi, azalan iletkenlik parametresi ve Prandtl sayısı ile arttığını, ayrıca ısı iletim hızının artan ısı iletim parametresi, ısı transferi parametresi ve azalan Prandtl sayısı ile azaldığını belirlemişlerdir.

Anwar ve Amin (2008), izotermal yatay dairesel silindirden geçen sıkıştırılamaz viskoelastik akışkanını incelemişlerdir. Sınır tabaka denklemlerini boyutsuz forma dönüştürerek, elde edilen lineer olmayan diferansiyel denklemleri Keller-box yöntemiyle çözmüşlerdir. Elde edilen bu çözümlerin newton akışkanları için iyi sonuç verdiğini bulmuşlardır.

Chang (2008), dikey ince, iletken ve içi boş dairesel bir silindir boyunca akan mikropolar sıvıda olan doğal taşınım akışını ve ısı transfer özelliklerini sayısal olarak incelemiştir. Denklemleri lineer olmayan denklemlere dönüştürerek bunlarla ilişkili sınır koşulları benzer olmayan dönüşümle boyutsuzlaştırmıştır. Elde edilen denklemleri sonlu farklar yöntemiyle kullanarak çözmüştür. Çalışmasında ısı transfer parametresinin, mikropolar parametresinin ve Prandtl sayısının akış ve termal alanlar üzerindeki etkilerini araştırmıştır. Isı transfer parametresinin, katı-sıvı ara yüzey sıcaklığını, sürtünme faktörünü ve yerel ısı aktarım hızını azalttığını ve Prandtl sayısı büyük olan bir sistemde ise, ısı transfer parametresinin ısı transferi hızı arayüzey sıcaklığı ve yüzey sürtünme faktörü üzerindeki etkisinin de oldukça belirgin olduğunu bulmuştur.

El-Kabeir ve El-Hakiem (2008), gözenekli bir ortamda, termal ve kütle difüzyonu, atalet direnci, manyetik alan ve termal radyasyon etkileri altında olan non-Darcy akışı incelemişlerdir. Tek parametrelili gruplar uygulayarak bağımsız değişkenlerin sayısını azaltmışlardır ve uygun sınır koşullarına sahip differansiyel denklem sistemlerine indirgemişlerdir. Differansiyel sistemleri shooting yöntemi kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Manyetik parametre, Ergun sayısı, güç kanunu (viskozite), kaldırma kuvveti, radyasyon parametresi, Prandtl sayısı ve Lewis sayısının hız üzerindeki etkilerini, sınır tabakasındaki sıcaklık alanlarını, ısı ve kütle transferini grafiksel olarak elde etmişlerdir.

Elgazery ve Hassan (2008), manyetik alanın varlığında gözenekli bir ortamda hareketli bir dikey silindir üzerinde olan manyetohidrodinamik (MHD) kararsız olan akışa termal radyasyon etkisini incelemek için sayısal bir analiz yapmışlardır. Sınır tabaka denklemleri Crank–Nicolson methodu olan örtük sonlu farklar yöntemi ile doğrusal bir

cebirsel sisteme dönüştürmüşlerdir. Sayısal sonuçları, hem hava hem de su için çeşitli parametrelerle incelemiştir. Lokal ve aynı zamanda ortalama kayma gerilmesinin, hız, sıcaklık ve konsantrasyon profilleri üzerinde etkili olduğunu belirlemiştir.

Kaya ve Aydın (2009), bir köşe akışı etrafında zorlanmış taşınım ısı transferine ısı ışıının etkisini incelemiştir. Problemi tanımlayan lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri, benzerlik yöntemiyle sınır tabaka denklemlerine dönüştürmüşler ve Keller-box yöntemiyle çözmüşlerdir. Boyutsuz basınç, emme/üfleme, ısı ışı ve yüzey sıcaklık oranı parametrelerinin hız ve sıcaklık profilleri ve ısı transferi üzerindeki etkilerini belirlemiştir. Boyutsuz basınç ve emme/üfleme parametrelerinin artmasıyla, momentum ve ısı sınır tabaka kalınlıklarının azaldığını ve buna bağlı olarak ısı transferi parametresinin arttığını belirlemiştir.

Kaya ve Aydın (2009), gözenekli ortamda viskoz yayılımın zorlanmış taşınım üzerindeki etkisini sayısal olarak analiz etmişlerdir. Kütle, momentum ve enerji korunumlarını karakterize eden bu kısmi diferansiyel denklemleri, sınır tabaka denklemlerine dönüştürerek Keller box yöntemiyle çözmüşlerdir. Basınç parametresi, gözeneklilik parametresi, atalet parametresi ve Eckert sayısı için hız ve sıcaklık profilleri ile lokal yüzey sürtünmesi ve lokal ısı transfer parametreleri için nümerik sonuçları elde etmişlerdir. Genel olarak, basınç gradyanı parametresinin artırılması veya Eckert sayısının azaltılması ile yerel ısı transfer parametresinin arttığını elde etmişlerdir.

Pal ve Mondal (2009), Darcy olmayan akış ve ısı özelliklerini, ohm yayılım ve termal radyasyon etkilerini araştırmışlardır. Temel denklemleri benzerlik dönüşümünü kullanarak sayısal olarak çözmüşlerdir. Termal radyasyon, manyetik ve elektrik alanlarının farklı değerleri için akış ve ısı transfer özelliklerini analiz etmişlerdir. Manyetik alan ve elektrik alan parametresi için hız ve sıcaklık profillerinin yanı sıra yüzey sürtünme katsayısının ve radyasyon parametresi ile Nusselt sayısının sayısal sonuçları ve parametrelerini grafiksel olarak incelemiştir.

Bu çalışmada ise, gözenekli bir ortamda tutulan içi boş düşey bir silindir çubuk üzerinden olan akışa birleşik ısı transferi ve manyetik alanın etkisi araştırılmıştır. Akış alanında olan momentum ve enerji denklemleri yazılarak benzerlik yöntemiyle sınır tabaka denklemlerine dönüştürülmüş ve nümerik olarak çözülmüştür.

3. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, gözenekli bir ortamda, iç yarıçapı r_i , dış yarıçapı r_o olan içi boş silindir çubuk üzerinde olan akışa, manyetik alan ve viskoz yayılımın etkisi incelenmiştir. Şekil 3.1’de seçilen koordinat sistemi ve akış alanı gösterilmiştir. Silindirin sağ yüzeyinden belirli mesafede, serbest akış hızı u_∞ ve sıcaklığı T_∞ olarak gösterilmiştir. İçi boş silindirin iç sıcaklığı sabit tutulmaktadır ve T_0 dir. Silindirin dış yüzey sıcaklığı ise $T_w(x)$ dir.

Gözenekli ortamın saydam ve akışkanla termal dengede olduğu kabul edilmiştir. Akışkan ve gözenekli ortamın viskozite, termal iletkenlik, özgül ısı ve geçirgenlik gibi özellikleri sabit alınmıştır. Gözenekli ortamın homojen, izotropik olduğu kabul edilmiştir.

Bu çalışmada denklemler, bu kabuller altında genel sınır tabaka denklemlerinin, gözenekli ortam ve manyetik alan etkilerini de ele alarak düzenlenmiştir. Boussinesq ve Non-Darcy yaklaşımıyla laminar ve kararlı rejimdeki Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (3.1)$$

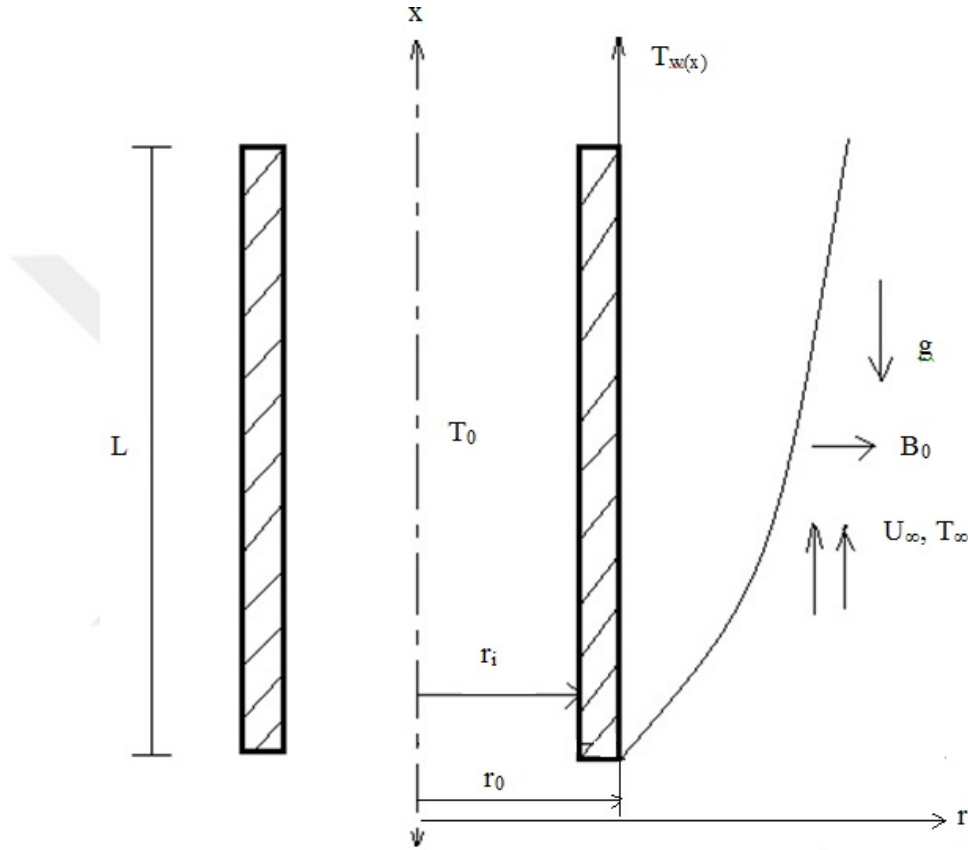
$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right\} = & \frac{1}{\varepsilon} \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{g\beta(T-T_\infty)}{\rho}}_{\text{KALDIRMA KUVVETİ}} - \underbrace{\frac{\sigma B_0^2}{\rho}(u-u_\infty)}_{\text{MHD Terimi}} \\ & - \underbrace{\frac{\nu}{k}(u-u_\infty)}_{\text{DARCY AKIŞI DA VİSKOZ SÜRTÜNME KUVVETİ}} - \underbrace{\frac{F(u^2-u_\infty^2)}{2}}_{\text{FORCHEIMER ATALET ETKİSİ}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = & \frac{\nu}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{\sigma B_0^2}{\rho Cp}(u-u_\infty)^2}_{\text{JOULE ISITMA ISISI}} + \underbrace{\frac{\nu}{Cp} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2}_{\text{SAF AKIŞI İÇİN VİSKOZ ETKİ}} + \underbrace{\frac{\nu}{K Cp} u^2}_{\text{GÖZENEKLİ AKIŞI İÇİN VİSKOZ ETKİ}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Yukarıda verilen bu denklemlere genişletilmiş Brinkman–Forchheimer- Darcy denklemleri denilmektedir (Lauriat ve Ghafir, 2000). Burada u ve v , x ve y doğrultusundaki hız bileşenleridir. ν kinematik viskozite, g yerçekimi ivmesi, B_0 manyetik akı yoğunluğu, ρ akışkan yoğunluğu, β termal genleşme katsayısı, T termal sınır tabaka içindeki akışkan sıcaklığı, K gözenekli ortamın geçirgenliği, F ampirik sabittir. Denklem (3.2)’de denklemin sağ tarafındaki ikinci terim kaldırma kuvvetini, üçüncü terim MHD

(Magnetohydrodynamic kuvvetini) terimini, dördüncü terim Darcy akışı etkisiyle viskoz sürüklenme kuvvetini, beşinci terim ise Forcheimer atalet etkisini gösterir. Denklem (3.3)'de ise denklemin sağ tarafındaki ikinci terim Joule ısıtma ısını, üçüncü terim saf akışlar için viskoz etkisini, dördüncü terim ise gözenekli akışlar için viskoz etkisini göstermektedir.

Problemın şematik gösterimi aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1. Problemın Şematik Gösterimi

Dış Akış için Sınır Koşulları;

$$r = r_0 \text{ 'da } u = 0, v = 0, T = T_w(x)$$

$$r \rightarrow \infty \text{ 'da } u \rightarrow u_\infty, T \rightarrow T_\infty \quad (3.4)$$

burada w ve ∞ alt indisleri duvar ve serbest akış koşullarını ifade etmektedir. Ayrıca $T_w(x)$ plakanın yüzey sıcaklığıdır ve x'e göre değişmektedir.

Katı için (boş silindir) Sınır koşulları;

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_s}{dr} \right) = 0$$

$$r = 0 \text{ ' da } T = T_0,$$

$$r = r_0 \text{ ' da, } T_s = T(x, r_0); -k_s \frac{dT_s}{dr} \Big|_s = -k_f \frac{\partial T(x, r_0)}{\partial r} \Big|_f \quad (3.5)$$

Burada k_s ve k_f sırasıyla, silindir çubuk ve akışkanın termal iletkenlik katsayılarıdır.

Problemi çözmek için kullanılan boyutsuz ifadeler aşağıdaki gibidir (Kaya ve Aydın, 2009).

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} \left[\frac{r^2 - r_0^2}{r_0} \right], \psi(x, r) = r_0 (\nu u_\infty x)^{1/2} f(\xi, \eta), \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x}, \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{r}{r_0} \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}, \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{r_0}$$

Burada $\psi(x, r)$ serbest akım fonksiyonudur ve denklem (3.1)'de $u = \partial \psi / \partial r$ ve $v = -\partial \psi / \partial x$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu boyutsuz ifadeler kullanıldığı zaman aşağıdaki hız ifadeleri oluşmaktadır.

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = u_\infty f' \quad (3.7)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{r_0}{r} \left(\frac{u_\infty \nu}{x} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} f' \right\} \quad (3.8)$$

Elde edilen hız bileşenleri denklem (3.2) ve denklem (3.3) deki ifadelerde yerlerine yazılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_\infty f' \frac{\partial u_\infty f'}{\partial x} = u_\infty^2 f' \left[\frac{\partial f'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = u_\infty^2 f' \left[\frac{1}{L} \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2x} f'' \right] \quad (3.9)$$

Denklem (3.9) $\frac{1}{L} = \frac{\xi}{x}$ ifadesinden yararlanılarak tekrar düzenlendiğinde Denklem (3.10) elde edilmektedir.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{\infty}^2}{x} \left[\xi f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} f f'' \right] \quad (3.10)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r_0}{r} \left(\frac{u_{\infty} v}{x} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} f' \right] \frac{\partial u_{\infty} f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \quad (3.11)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{u_{\infty}^2}{x} \left\{ \frac{1}{2} f f'' + \xi f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} f f'' \right\} \quad (3.12)$$

$$\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(r \frac{\partial u_{\infty} f'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) \frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{u_{\infty}}{v x} \right) \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r_0} \right) u_{\infty} f'' \frac{r}{r_0} \left(\frac{u_{\infty}}{2x} \right)^{1/2} \right\} \quad (3.13)$$

$$\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{v}{r} \left(\frac{u_{\infty} u_{\infty}}{2x} \right)^{1/2} u_{\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r_0} \right) \frac{r}{r_0} f'' = \frac{u_{\infty}^2}{x} \{ (1 + \lambda \eta) f'' \}' \quad (3.14)$$

Denklem (3.14) için $\lambda = 2 \left\{ \frac{\xi}{\text{Re}} \right\}^{1/2}$ ve $\text{Re} = \frac{u_{\infty} r_0}{v}$ eşitliklerini kullanarak en sade olarak aşağıdaki ifade edilmektedir.

$$\frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{u_{\infty}^2}{x} \{ \lambda f'' + (1 + \lambda \eta) f''' \} \quad (3.15)$$

$$g\beta(T - T_{\infty}) = g\beta\theta(T_0 - T_{\infty}) \quad (3.16)$$

$$\frac{\sigma B_0^2}{\rho} (u - u_{\infty}) = \frac{\sigma B_0^2}{\rho} u_{\infty} [f' - 1] \quad (3.17)$$

$$\frac{v}{k} (u - u_{\infty}) = \frac{v}{k} u_{\infty} [f' - 1] \quad (3.18)$$

$$F(u^2 - u_{\infty}^2) = F u_{\infty}^2 [f'^2 - 1] \quad (3.19)$$

Denklem (3.10-3.12-3.15-3.16-3.17-3.18-3.19)'daki ifadeler Denklem (3.2)'de yerine yazıldığında aşağıdaki momentum denklemi elde edilmektedir.

$$(1 + \lambda\eta) f''' + \lambda f'' + \frac{1}{2} f f'' - \frac{\sigma B_0^2 x}{\rho u_\infty} (f' - 1) + g\beta\theta \frac{(T_0 - T_\infty)x}{u_\infty^2} - \frac{\nu}{k} u_\infty [f' - 1] \frac{x}{u_\infty^2} - F u_\infty^2 (u^2 - 1) \frac{x}{u_\infty^2} = \frac{\xi}{\varepsilon^2} \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (3.20)$$

Yukarıdaki denklem, $Ha = \frac{\sigma B_0^2 r_0^2}{\mu}$, $Re = \frac{u_\infty r}{\nu}$, $Mn = \frac{Ha}{Re}$, $k_1 = \frac{\nu r_0}{k u_\infty}$, $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$,

$Gr = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)r_0^3}{\nu^2}$, $F^* = Fr_0$, $x = r_0\xi$, $\lambda = 2 \left[\frac{\xi}{Re} \right]^{1/2}$ boyutsuz ifadeleri kullanılarak

düzenlenirse son olarak momentum denklemi (Denklem 3.21) elde edilmektedir.

$$\frac{1}{\varepsilon} (1 + \lambda\eta) f''' + \frac{\lambda}{\varepsilon} f'' + \frac{1}{2\varepsilon^2} f f'' - Mn\xi (f' - 1) + Ri\theta\xi - k_1\xi (f' - 1) - F^*\xi (f'^2 - 1) = \frac{\xi}{\varepsilon^2} \left[f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \quad (3.21)$$

Enerji Denklemi (Denklem 3.3) için düzenleme yapılırsa; burada Denklem (3.6)'daki

$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ boyutsuz ifadesi de kullanılarak ilk önce aşağıdaki ifadeler tek tek

yazılmaktadır.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{u_\infty (T_0 - T_\infty)}{x} \left[\xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} \theta f' \right] \quad (3.22)$$

$$\nu \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{u_\infty (T_0 - T_\infty)}{x} \left[\frac{1}{2} f \theta' + \xi \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} \theta f' \right] \quad (3.23)$$

$$\frac{\nu}{Pr} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{u_\infty (T_0 - T_\infty)}{x} [(1 + \lambda\eta) \theta'' + \lambda \theta'] \quad (3.24)$$

$$\frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p} (u - u_\infty)^2 = \frac{\sigma B_0^2}{\rho C_p} u_\infty^2 (f' - 1)^2 \quad (3.25)$$

$$\frac{\nu}{Cp} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 = \frac{\nu}{Cp} \left(\frac{\partial u_{\infty} f'}{\partial \eta} \right)^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 = \frac{\nu}{Cp} u_{\infty}^2 (f'')^2 \frac{r^2}{r_0^2} \left(\frac{u_{\infty}}{\nu x} \right) \quad (3.26)$$

Denklem (3.26) da $\frac{r^2}{r_0^2} = (1 + \lambda \eta)$ ifadesi kullanılarak tekrar düzenlendiğinde aşağıdaki ifade (Denklem 3.27) elde edilmektedir.

$$\frac{\nu}{Cp} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 = \frac{u_{\infty}}{x} \frac{u_{\infty}^2}{Cp} (1 + \lambda \eta) (f'')^2 \quad (3.27)$$

$$\frac{\nu}{K Cp} u^2 = \frac{\nu}{K Cp} u_{\infty}^2 (f')^2 \quad (3.28)$$

Yukarıdaki yazılan tüm bu ifadeler (Denklem 3.22-3.23-3.24-3.25-3.27 ve 3.28) Enerji denklemi Denklem (3.3)'de yerlerine yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{u_{\infty}(T_0 - T_{\infty})}{x} \left\{ \xi f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2} \theta f' - \frac{1}{2} f \theta' - \xi \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\eta}{2} \theta f' \right\} &= \frac{1}{Pr} \frac{u_{\infty}(T_0 - T_{\infty})}{x} [(1 + \lambda \eta) \theta'' + \lambda \theta'] \\ &+ \frac{\sigma B_0^2}{\rho Cp} u_{\infty}^2 (f' - 1)^2 + \frac{u_{\infty}}{x} \frac{u_{\infty}^2}{Cp} (1 + \lambda \eta) (f'')^2 + \frac{\nu}{K Cp} u_{\infty}^2 (f')^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Denklem (3.29) sadeleştiğinde ve eşitlik düzenlendiğinde elde edilen denklem (3.30)'da yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} [(1 + \lambda \eta) \theta'' + \lambda \theta'] + \frac{1}{2} f \theta' + \frac{\sigma B_0^2 x u_{\infty}}{\rho Cp (T_0 - T_{\infty})} (f' - 1)^2 + \frac{u_{\infty}^2 (1 + \lambda \eta)}{Cp (T_0 - T_{\infty})} (f'')^2 + \\ \frac{\nu u_{\infty} x}{K Cp (T_0 - T_{\infty})} (f')^2 = \xi \left\{ f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Momentum Denklemi için kullanılan boyutsuz ifadelere ek olarak $Ec = \frac{u_{\infty}^2}{Cp(T_0 - T_{\infty})}$ ifadesi de denklem (3.30)'da kullanıldığında Enerji Denkleminin son hali Denklem (3.31) elde edilmektedir.

$$\frac{1}{Pr}[(1+\lambda\eta)\theta''+\lambda\theta']+\frac{1}{2}f\theta'+MnEc\xi(f'-1)^2+Ec(1+\lambda\eta)(f'')^2+Eck_1\xi(f')^2=\xi\left\{f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right\} \quad (3.31)$$

Momentum (Denklem 3.21) ve Enerji (Denklem 3.31) Denklemiindeki; k_1 gözenekli ortam parametresi; F^* atalet etkisinin önemini açıklayan Forchheimer parametresi, Ri doğal ve zorlanmış taşınımın ne ölçüde gerçekleştiğini belirten Richardson sayısıdır. $Ri \rightarrow 0$ olması tamamen zorlanmış ısı taşınımının hakim olduğunu, $Ri \rightarrow \infty$ olması ise tamamen doğal taşınımın etkin olduğu anlamına gelmektedir. Ri sayısı x 'in bir fonksiyonu olarak değişmemektedir. Gr ortalama Grashof sayısı, Re ortalama Reynolds sayısı ve Pr Prandtl sayısıdır (Kaya ve Aydın, 2014).

Sınır şartları ise Denklem (3.4)'teki ifadelerden faydalanarak aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$f'(\xi, r_0) = 0, \quad f(\xi, r_0) + 2\xi \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0, \quad \theta(\xi, r_0) = p\theta'\xi^{-1/2} + 1$$

$$f'(\xi, \infty) = 1, \quad \theta(\xi, \infty) = 0 \quad (3.32)$$

Yukarıdaki denklemde, $\theta(\xi, r_0)$ ifadesini bulmak için (3.5) numaralı denklemlerden yararlanarak silindirin dış yüzeydeki sıcaklık dağılımı T_w elde edilmektedir (Chang, 2006).

$$T_w(w) = T(x, r_0) = r_0 \frac{k_f}{k_s} \frac{\partial T}{\partial r} \ln \frac{r_0}{r_i} + T_0 \quad (3.33)$$

Denklem (3.33) ve $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$ boyutsuz ifadesi kullanılarak aşağıdaki (3.34) ve (3.35) numaralı denklemler yazılmaktadır.

$$\theta(T_0 - T_\infty) + T_\infty = r_0 \frac{k_f}{k_s} \ln \frac{r_0}{r_i} \frac{\partial \theta(T_0 - T_\infty)}{\partial \eta} \frac{r_0}{r_0} \left(\frac{u_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} + T_0 \quad (3.34)$$

$$p = \frac{k_f}{k_s} \ln \left(\frac{r_0}{r_i} \right) Re^{1/2} \quad (3.35)$$

burada p ifadesi birleşik (conjugate) ısı transferi parametresidir. $p = 0$ limit durum için

duvar izotermal olmaktadır. Duvarın ısı iletim etkisini birleşik ısı transferi parametresi göstermektedir (Nield, 1999).

3.1. Nümerik Yöntem

Denklem (3.21) ve Denklem (3.31)'deki Momentum ve Enerji denklemleri bir sonlu fark yöntemi olan Keller box yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Keller box yöntemi hakkında bilgi ayrıntılı olarak genel bilgiler kısmında verilmiştir.

İlk önce denklemler ikincil denklem sisteminde ifade edilmektedir.

$$f' = u, u' = v, g = \theta, g' = p \quad (3.36)$$

Denklem (3.36) kullanılarak Denklem (3.21) Momentum Denklemi yeniden düzenlenmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(1 + \lambda\eta)v' + \frac{\lambda}{\varepsilon}v + \frac{1}{2\varepsilon^2}fv - Mn\xi(u-1) + Rig\xi - k_1\xi(u-1) - F^*\xi(u^2-1) = \\ \frac{\xi}{\varepsilon^2} \left[u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}(1 + \lambda\eta)v' + \frac{\lambda}{\varepsilon}v + \frac{1}{2\varepsilon^2}(fv) + Ri\xi g - Mn\xi u + Mn\xi - k_1\xi u + k_1\xi - F^*\xi u^2 + \\ F^*\xi = \frac{\xi}{\varepsilon^2} \left[u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.38) numaralı denklem sonlu fark formunda yazıldığında aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{h_j^{-1}}{2\varepsilon} [1 + \lambda\eta][v_j^n - v_{j-1}^n] + \frac{h_j^{-1}}{2\varepsilon} [1 + \lambda\eta][v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}] \\ & + \frac{\lambda}{2\varepsilon} (v)_{j-1/2}^n + \frac{\lambda}{2\varepsilon} (v)_{j-1/2}^{n-1} + \frac{1}{4\varepsilon^2} (fv)_{j-1/2}^n \\ & + \frac{1}{4\varepsilon^2} (fv)_{j-1/2}^{n-1} + \frac{Ri\xi}{2} (g)_{j-1/2}^n + \frac{Ri\xi}{2} (g)_{j-1/2}^{n-1} \\ & - \frac{Mn\xi}{2} (u)_{j-1/2}^n - \frac{Mn\xi}{2} (u)_{j-1/2}^{n-1} + Mn\xi \\ & - \frac{k_1\xi}{2} (u)_{j-1/2}^n - \frac{k_1\xi}{2} (u)_{j-1/2}^{n-1} + k_1\xi - \frac{F^*\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^n \\ & - \frac{F^*\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^{n-1} + F^*\xi \end{aligned} \right\} = 2 \cdot \left\{ \frac{\xi}{2k_n\varepsilon^2} \left[\begin{aligned} & (u^2)_{j-1/2}^n - (u^2)_{j-1/2}^{n-1} - (fv)_{j-1/2}^n \\ & - (v)_{j-1/2}^{n-1} (f)_{j-1/2}^n + (v)_{j-1/2}^n (f)_{j-1/2}^{n-1} \\ & + (fv)_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \right] \right\} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_j^{-1}}{\varepsilon} [1 + \lambda \eta] [v_j^n - v_{j-1}^n] + \frac{\lambda}{\varepsilon} (v)_{j-1/2}^n + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fv)_{j-1/2}^n + Ri \xi(g)_{j-1/2}^n - Mn \xi(u)_{j-1/2}^n \\ & - k_1 \xi(u)_{j-1/2}^n - F^* \xi(u^2)_{j-1/2}^n - \frac{\alpha_n}{\varepsilon^2} \left[(u^2)_{j-1/2}^n - (v)_{j-1/2}^{n-1} (f)_{j-1/2}^n + (v)_{j-1/2}^n (f)_{j-1/2}^{n-1} \right] = R_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Denklem (3.40)'daki $R_{j-1/2}^{n-1}$ ifadesi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -L_{j-1/2}^{n-1} - \frac{\alpha_n}{\varepsilon^2} \left[(fv)_{j-1/2}^{n-1} - (u^2)_{j-1/2}^{n-1} \right] \quad (3.41)$$

(3.41) numaralı denklemdeki $L_{j-1/2}^{n-1}$ ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$L_{j-1/2}^{n-1} = \frac{h_j^{-1}}{2\varepsilon} [1 + \lambda \eta] \left[v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1} + \frac{\lambda}{\varepsilon} (v)_{j-1/2}^{n-1} + \frac{1}{2\varepsilon^2} (fv)_{j-1/2}^{n-1} + Ri \xi(g)_{j-1/2}^{n-1} - \right. \\ \left. Mn \xi(u)_{j-1/2}^{n-1} - k_1 \xi(u^2)_{j-1/2}^{n-1} - F^* \xi(u^2)_{j-1/2}^{n-1} \right] \quad (3.42)$$

Denklem (3.40), Denklem (3.43) (Newton'un doğrusallaştırılması) formuna dönüştürülerek tekrar düzenlenirse Denklem (3.44) aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$f_j^n = f_j^i + \mathcal{F}_j^i \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h_j^{-1}}{\varepsilon} [1 + \lambda \eta] [\delta v_j^i - \delta v_{j-1}^i] + \frac{\lambda}{\varepsilon} (\delta v)_{j-1/2}^i + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (\delta fv)_{j-1/2}^i + Ri \xi(\delta g)_{j-1/2}^i - Mn \xi(\delta u)_{j-1/2}^i \\ & - k_1 \xi(\delta u)_{j-1/2}^i - F^* \xi(\delta u^2)_{j-1/2}^i - \frac{\alpha_n}{\varepsilon^2} \left[(\delta u^2)_{j-1/2}^i - (v)_{j-1/2}^{n-1} (\delta f)_{j-1/2}^i + (\delta v)_{j-1/2}^i (f)_{j-1/2}^{n-1} \right] = (r_2)_j^i \end{aligned} \quad (3.44)$$

Yukarıdaki denklemde, $(r_2)_j^i$ ifadesi aşağıdaki eşitlikte yazılmıştır.

$$(r_2)_j^i = R_{j-1/2}^{n-1} - \left\{ \frac{h_j^{-1}}{\varepsilon} [1 + \lambda \eta] [v_j^i - v_{j-1}^i] + \frac{\lambda}{\varepsilon} (v)_{j-1/2}^i + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fv)_{j-1/2}^i + \right. \\ \left. Ri \xi(g)_{j-1/2}^i - Mn \xi(u)_{j-1/2}^i - k_1 \xi(u^2)_{j-1/2}^i - F^* \xi(u^2)_{j-1/2}^i - \right. \\ \left. \frac{\alpha_n}{\varepsilon^2} \left[(u^2)_{j-1/2}^i - (v)_{j-1/2}^{n-1} (f)_{j-1/2}^i + (v)_{j-1/2}^i (f)_{j-1/2}^{n-1} \right] \right\} \quad (3.45)$$

Denklem (3.44), (3.46) numaralı denklem formunda incelendiğinde aşağıdaki $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ ifadeleri elde edilmektedir.

$$s_1 \delta v_j + s_2 \delta v_{j-1} + s_3 \delta f_j + s_4 \delta f_{j-1} + s_5 \delta u_j + s_6 \delta u_{j-1} + s_7 \delta g_j + s_8 \delta g_{j-1} = (r_2)_j \quad (3.46)$$

$$s_1 = \frac{h_j^{-1}}{\varepsilon} (1 + \lambda \eta) + \frac{\lambda}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) f_j^i - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.47)$$

$$s_2 = -\frac{h_j^{-1}}{\varepsilon} (1 + \lambda \eta) + \frac{\lambda}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) f_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.48)$$

$$s_3 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) v_j^i - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} v_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.49)$$

$$s_4 = \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) v_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} v_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.50)$$

$$s_5 = -\frac{Mn\xi}{2} - \frac{k_1\xi}{2} - \frac{F^*\xi}{2} - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} u_j^i \quad (3.51)$$

$$s_6 = -\frac{Mn\xi}{2} - \frac{k_1\xi}{2} - \frac{F^*\xi}{2} - \frac{\alpha_n}{2\varepsilon^2} u_{j-1}^i \quad (3.52)$$

$$s_7 = \frac{Ri\xi}{2} \quad (3.53)$$

$$s_8 = \frac{Ri\xi}{2} \quad (3.54)$$

Momentum denklemi için yapılan tüm bu Keller box yöntemiyle çözümler enerji denklemi içinde yapılmaktadır.

İlk önce denklemler ikincil denklem sisteminde ifade edilmektedir. Denklem (3.36) kullanılarak Denklem (3.31) Enerji Denklemi yeniden düzenlenmektedir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Pr} [(1 + \lambda \eta) p'] + \frac{1}{Pr} \lambda p + \frac{1}{2} fp + MnEc\xi(u-1)^2 + Ec(1 + \lambda \eta)(v)^2 + Eck_1\xi(u)^2 \\ & = \xi \left[u \frac{\partial g}{\partial \xi} - p \frac{\partial f}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

(3.55) numaralı denklem sonlu fark formunda yazıldığında aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{2\text{Pr}} h_j^{-1} (1 + \lambda\eta) [p_j^n - p_{j-1}^n] + \frac{1}{2\text{Pr}} h_j^{-1} (1 + \lambda\eta) [p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}] \right. \\ & + \frac{1}{2\text{Pr}} \lambda p_{j-1/2}^n + \frac{1}{2\text{Pr}} \lambda p_{j-1/2}^{n-1} + \frac{1}{4} (fp)_{j-1/2}^n \\ & + \frac{1}{4} (fp)_{j-1/2}^{n-1} + \frac{MnEc\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^n + \frac{MnEc\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^{n-1} \\ & - \frac{MnEc\xi}{2} x2(u_{j-1/2}^n) - \frac{MnEc\xi}{2} x2(u_{j-1/2}^{n-1}) + MnEc\xi \\ & + \frac{Ec(1 + \lambda\eta)}{2} (v^2)_{j-1/2}^n + \frac{Ec(1 + \lambda\eta)}{2} (v^2)_{j-1/2}^{n-1} \\ & \left. + \frac{Eck_1\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^n + \frac{Eck_1\xi}{2} (u^2)_{j-1/2}^{n-1} \right] \end{aligned} \right\} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\xi_n}{2k_n} \left[(ug)_{j-1/2}^n - u_{j-1/2}^n g_{j-1/2}^{n-1} + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n \right] \right. \\ & - (ug)_{j-1/2}^{n-1} - (fp)_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n \\ & \left. - f_{j-1/2}^n p_{j-1/2}^{n-1} + (fp)_{j-1/2}^{n-1} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}} h_j^{-1} (1 + \lambda\eta) [p_j^n - p_{j-1}^n] + \frac{\lambda}{\text{Pr}} p_{j-1/2}^n + \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fp)_{j-1/2}^n + MnEc\xi (u^2)_{j-1/2}^n + \\ & Eck_1\xi (u^2)_{j-1/2}^n - 2MnEc\xi u_{j-1/2}^n + Ec(1 + \lambda\eta) (v^2)_{j-1/2}^n - \alpha_n \left[\begin{aligned} & (ug)_{j-1/2}^n - u_{j-1/2}^n g_{j-1/2}^{n-1} + \\ & u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^n \\ & - f_{j-1/2}^n p_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \right] \quad (3.57) \\ & = T_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned}$$

Denklem (3.57)'daki $T_{j-1/2}^{n-1}$ ifadesi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$T_{j-1/2}^{n-1} = -M_{j-1/2}^{n-1} + \alpha_n [(fp)_{j-1/2}^{n-1} - (ug)_{j-1/2}^{n-1}] \quad (3.58)$$

(3.58) numaralı denklemdeki $M_{j-1/2}^{n-1}$ ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$M_{j-1/2}^{n-1} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{h_j}{\text{Pr}} (1 + \lambda\eta) [p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}] + \frac{\lambda}{\text{Pr}} p_{j-1/2}^{n-1} + \frac{1}{2} (fp)_{j-1/2}^{n-1} + Ec(Mn + k_1) \xi (u^2)_{j-1/2}^{n-1} \\ & - 2MnEc\xi u_{j-1/2}^{n-1} + 2MnEc\xi + Ec(1 + \lambda\eta) (v^2)_{j-1/2}^{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Denklem (3.53), (3.43) numaralı denklem formuna dönüştürülerek tekrar düzenlenirse Denklem (3.60) aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}} h_j^{-1} (1 + \lambda\eta) [\delta p_j^i - \delta p_{j-1}^i] + \frac{\lambda}{\text{Pr}} (\delta p)_{j-1/2}^i + \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (\delta fp)_{j-1/2}^i + MnEc\xi (\delta u^2)_{j-1/2}^i \\ & + Eck_1\xi (\delta u^2)_{j-1/2}^i - 2MnEc\xi (\delta u)_{j-1/2}^i + Ec(1 + \lambda\eta) (\delta v^2)_{j-1/2}^i \\ & - \alpha_n [(\delta ug)_{j-1/2}^i - \delta u_{j-1/2}^i g_{j-1/2}^{n-1} + u_{j-1/2}^{n-1} \delta g_{j-1/2}^i + f_{j-1/2}^{n-1} \delta p_{j-1/2}^i - \delta f_{j-1/2}^i p_{j-1/2}^{n-1}] = (r_3)_j \end{aligned} \quad (3.60)$$

Yukarıdaki denklemde, $(r_3)_j$ ifadesi aşağıdaki eşitlikte yazılmıştır.

$$(r_3)_j = T_{j-1/2}^{n-1} - \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\text{Pr}} h_j^{-1} (1 + \lambda \eta) [p_j^i - p_{j-1}^i] + \frac{\lambda}{\text{Pr}} p_{j-1/2}^i + \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) (fp)_{j-1/2}^i \\ & + Ec(Mn + k_1) \xi (u^2)_{j-1/2}^i - 2MnEc \xi (u)_{j-1/2}^i + Ec(1 + \lambda \eta) (v^2)_{j-1/2}^i \\ & - \alpha_n [(ug)_{j-1/2}^i - u_{j-1/2}^i g_{j-1/2}^{n-1} + u_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^i + f_{j-1/2}^{n-1} p_{j-1/2}^i - f_{j-1/2}^i p_{j-1/2}^{n-1}] \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Denklem (3.60), (3.62) numaralı denklem formunda incelendiğinde aşağıdaki $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}$ ifadeleri elde edilmektedir.

$$\beta_1 \delta p_j + \beta_2 \delta p_{j-1} + \beta_3 \delta f_j + \beta_4 \delta f_{j-1} + \beta_5 \delta u_j + \beta_6 \delta u_{j-1} + \beta_7 \delta g_j + \beta_8 \delta g_{j-1} + \beta_9 \delta v_j + \beta_{10} \delta v_{j-1} = (r_3)_j \quad (3.62)$$

$$\beta_1 = \frac{h_j^{-1}}{\text{Pr}} (1 + \lambda \eta) + \frac{\lambda}{2 \text{Pr}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) f_j^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.63)$$

$$\beta_2 = -\frac{h_j^{-1}}{\text{Pr}} (1 + \lambda \eta) + \frac{\lambda}{2 \text{Pr}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) f_{j-1}^i - \frac{\alpha_n}{2} f_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.64)$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) p_j^i - \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.65)$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) p_{j-1}^i + \frac{\alpha_n}{2} p_{j-1/2}^{n-1} \quad (3.66)$$

$$\beta_5 = \frac{(Mn + k_1) Ec \xi}{2} u_j^i - Mn Ec \xi - \frac{\alpha_n}{2} [g_j^i - g_{j-1/2}^{n-1}] \quad (3.67)$$

$$\beta_6 = \frac{(Mn + k_1) Ec \xi}{2} u_{j-1}^i - Mn Ec \xi - \frac{\alpha_n}{2} [g_j^i - g_{j-1/2}^{n-1}] \quad (3.68)$$

$$\beta_7 = -\frac{\alpha_n}{2} [u_j^i - u_{j-1/2}^{n-1}] \quad (3.69)$$

$$\beta_8 = -\frac{\alpha_n}{2} [u_{j-1}^i - u_{j-1/2}^{n-1}] \quad (3.70)$$

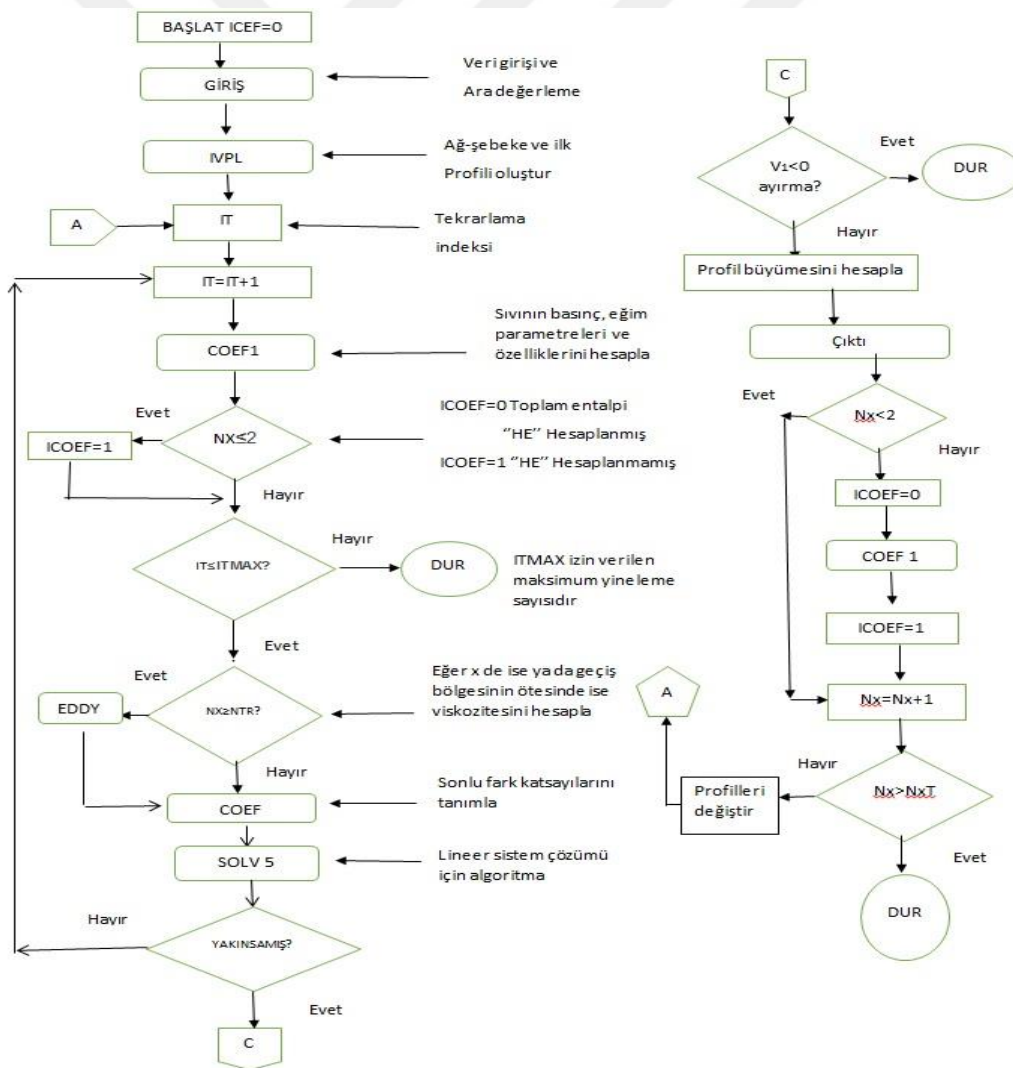
$$\beta_9 = \frac{Ec(1+\lambda\eta)}{2} v_j^i \tag{3.71}$$

$$\beta_{10} = \frac{Ec(1+\lambda\eta)}{2} v_{j-1}^i \tag{3.72}$$



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, gözenekli bir ortamda tutulan içi boş silindirik çubuk üzerinden olan akışa birleşik ısı transferi ve manyetik alanın etkisi araştırılmıştır. Çalışmada karışık ısı taşınımı (mixed convection) parametresi $Ri = 0.01, 0.1, 1.0, 5.0, 10.0$; gözenekli ortam parametresi $k_1 = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$; birleşik ısı transferi parametresi $p = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3$; Forchheimer parametresi $F^* = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$; manyetik alan parametresi $Mn = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$; akışın kinetik enerjisinin sınır tabakası entalpi farkına oranı olan Eckert sayısı $Ec = -0.1, -0.05, 0.0, 0.05, 0.1$; Reynolds sayısı $Re = 250$ ve Prandtl sayısı $Pr = 1$ alınmıştır. Numerik yöntem kısmındaki denklemler Fortran programında yazılarak ve bu parametreler kullanılarak veriler elde edilmiştir. Fortran programı sonucu elde edilen bu veriler ise Sigma Plot programında grafiğe aktarılmıştır. Fortran programının akış şeması aşağıdaki gibidir.



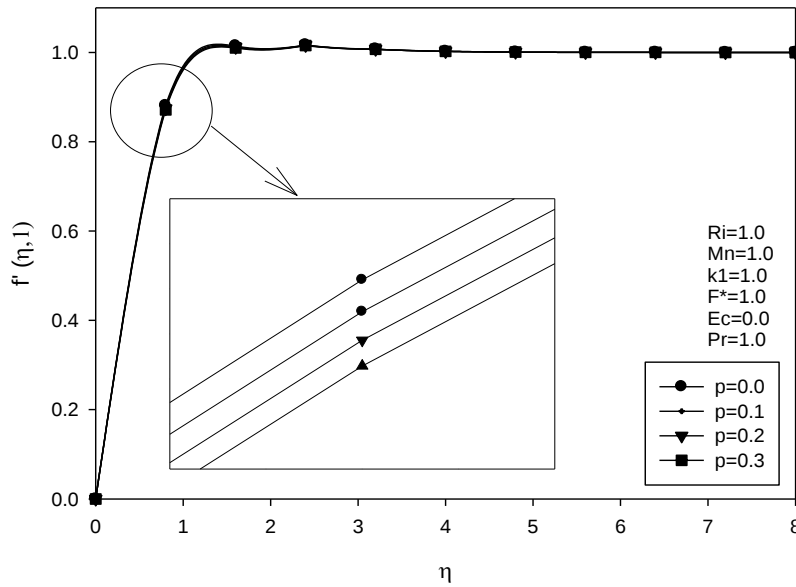
Şekil 4.1. Bilgisayar programı için akış diyagramı (Cebeci, 2002)

a) Birleşik Isı Transfer Parametresi p Etkisi

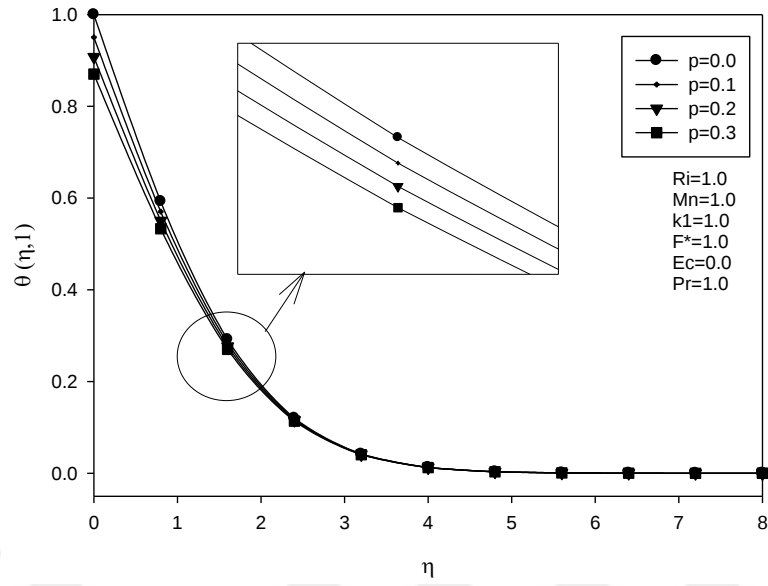
Birleşik ısı transferi parametresi $p=0$, limit durum için izotermal duvar olmaktadır ve birleşik ısı transferi parametresinin p değeri, duvarın ısı iletim etkisinin ne derece olduğunu göstermektedir (Chang, 2008).

Birleşik ısı transfer parametresinin p sınır tabaka içindeki hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.2’ de gösterilmektedir. Değerler $Ri=1.0$, $Mn=1.0$, $k_1=1.0$, $F^*=1.0$, $Ec=0.0$ ve $Pr = 1.0$ durumu için elde edilmiştir.

Birleşik ısı transferi parametresinin (p) artması ile duvardaki hız ve sıcaklık gradyanları azalmıştır. Silindir iletkenliğinin (k_s) azalması veya akışkan iletkenliğinin (k_f) yükselmesi, p değeriyle beraber içi boş silindir çubuğun iç ve dış yüzeyi arasındaki sıcaklık farkını artırır. Silindirin dış yüzündeki sıcaklık sabit tutulduğundan katı-akışkan arayüzündeki sıcaklık azalmaktadır (Chang, 2006).



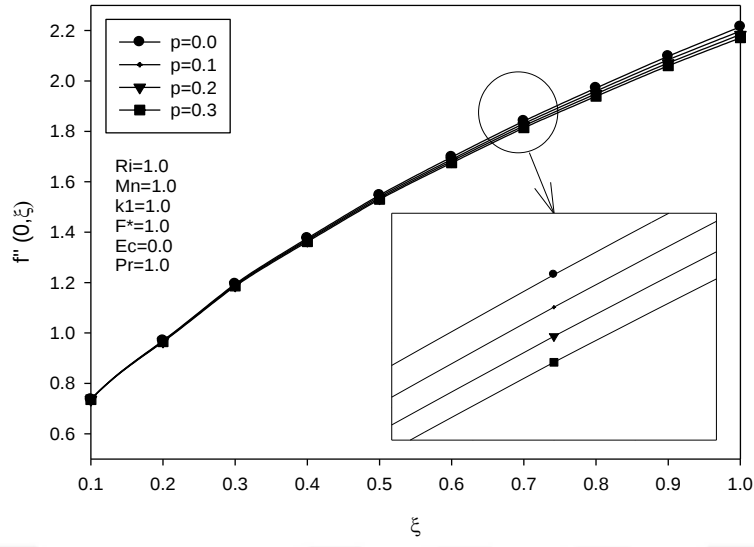
(a)



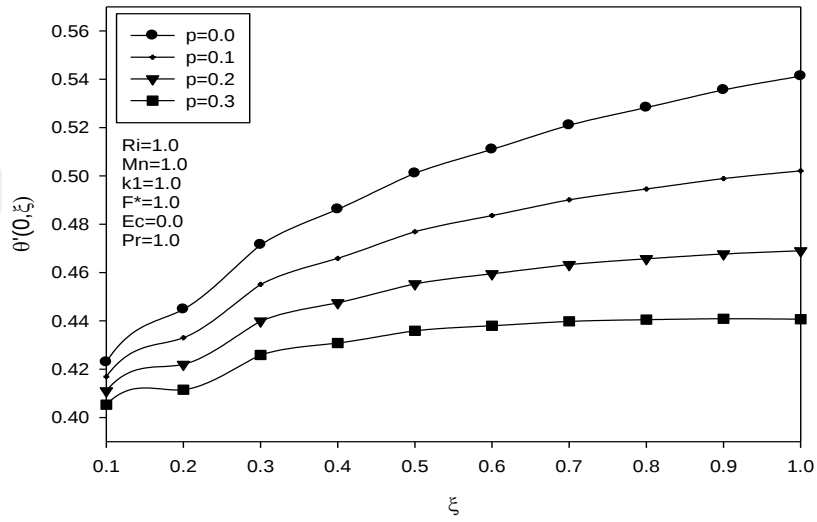
(b)

Şekil 4.2. Birleşik ısı transferi (conjugate) parametresinin (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.3’de yerel sürtünme katsayısı ve ısı transferi parametrelerinin p ve ξ ile değişimleri gösterilmektedir. Birleşik ısı transferi parametresinin (p) artması ile yerel sürtünme katsayısı ve yerel ısı transfer parametrelerinin değeri azalmaktadır. Ayrıca, silindir çubuk üzerinde akışkan sıcaklığının ξ ile artması, ξ değeri ile birlikte yerel sürtünme ve yerel ısı transfer parametrelerinin artmasına sebep olmuştur. Bunun sebebi, akım doğrultusu boyunca artan ara yüz sıcaklığının daha fazla kaldırma kuvveti etkisi yaratması ve dolayısıyla yüzey sürtünme faktörünü arttırmasıdır (Chang, 2008).



(a)



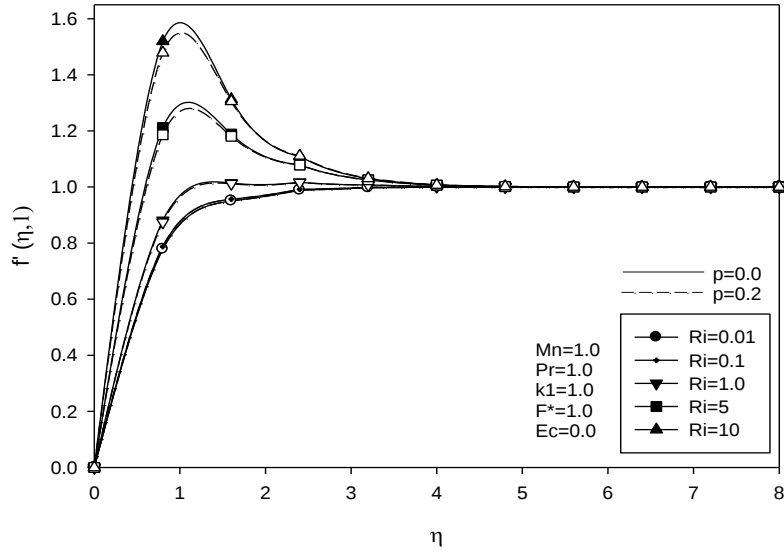
(b)

Şekil 4.3. Birleşik ısı transferi (conjugate) parametresinin (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

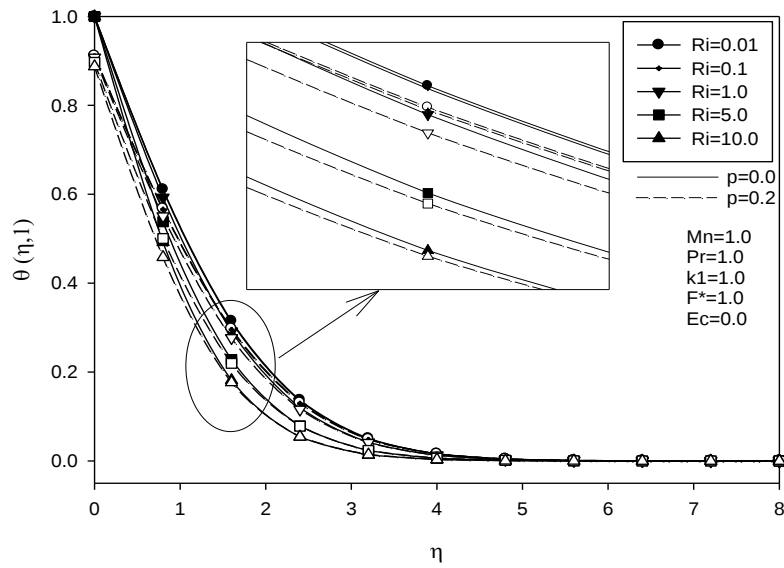
b) Karışık Isı Taşınımı Parametresi Ri Etkisi

Karışık ısı taşınımı parametresinin Ri sınır tabaka içindeki boyutsuz hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.4' de gösterilmiştir. Değerler $Mn=1.0$, $k_1=1.0$, $F^*=1.0$, $Ec=0.0$ ve $Pr=1.0$ durumu için elde edilmiştir. Farklı Ri değerleri için izotermal silindir ($p=0.0$) ve izotermal olmayan silindir ($p=0.2>0$) için incelenmiştir.

Karışık ısı taşınım parametresi Ri sayısının artması ile kaldırma kuvvetleri daha etkin hale gelmekte ve sınır tabaka içinde hız profilini artırmaktadır. Sıcaklık profili ise karışık ısı taşınım parametresi Ri sayısının artması ile artmıştır. Bu durumun, $p=0.0$ (izotermal) ve $p=0.2$ (izotermal olmayan) durumları içinde aynı olduğu grafiklerde görülmektedir.



(a)

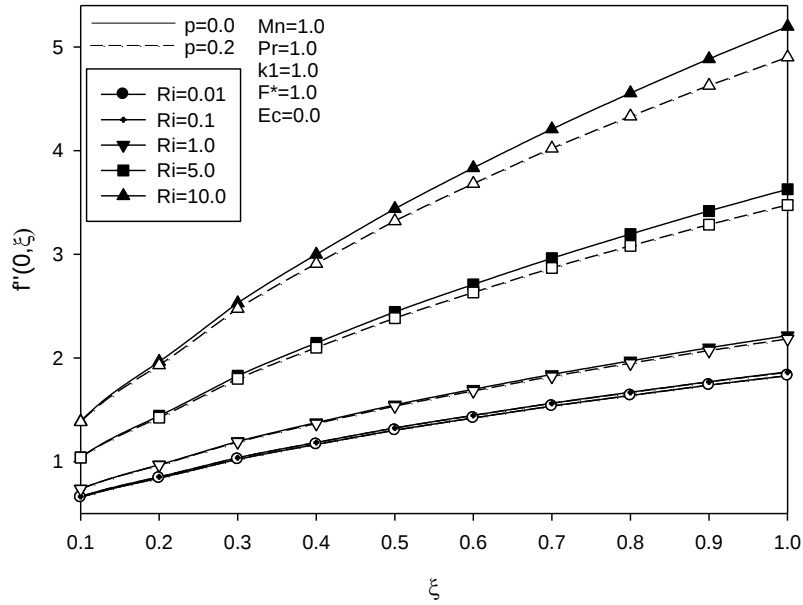


(b)

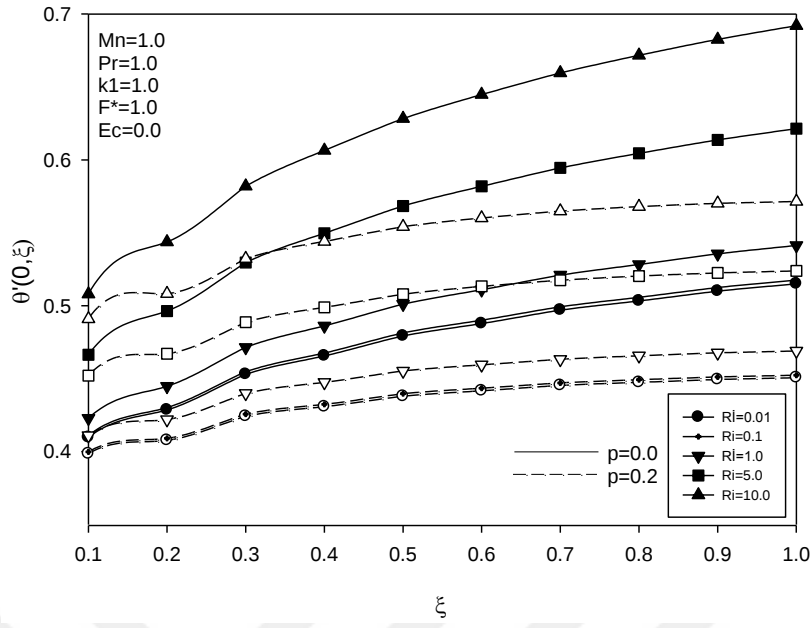
Şekil 4.4. Karışık ısı taşınım parametresinin (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.5’de içi boş silindir boyunca yerel sürtünme ve yerel ısı transferi parametrelerinin değişimleri hem izotermal ($p=0.0$) hemde izotermal olmayan ($p=0.2$ olduğu) silindir çubuk durumu için verilmiştir.

Şekil 4.5 a ve 4.5 b’de, yerel sürtünme katsayısının ve yerel ısı transferi parametresinin karışık ısı taşınım parametresi Ri ile değişimi gösterilmiştir. İzotermal ve izotermal olmayan durumda silindir çubuk için yerel sürtünme katsayısı ve yerel ısı transfer parametresi, Ri değerinin artması ile artmaktadır. Bunun sebebi, karışık ısı taşınım da kaldırma kuvveti etkisinin artması akışkan hızını artırmaktadır ve böylece yerel sürtünme katsayısını ve yerel ısı transfer etkisini yükseltmektedir (Chang, 2008).



(a)



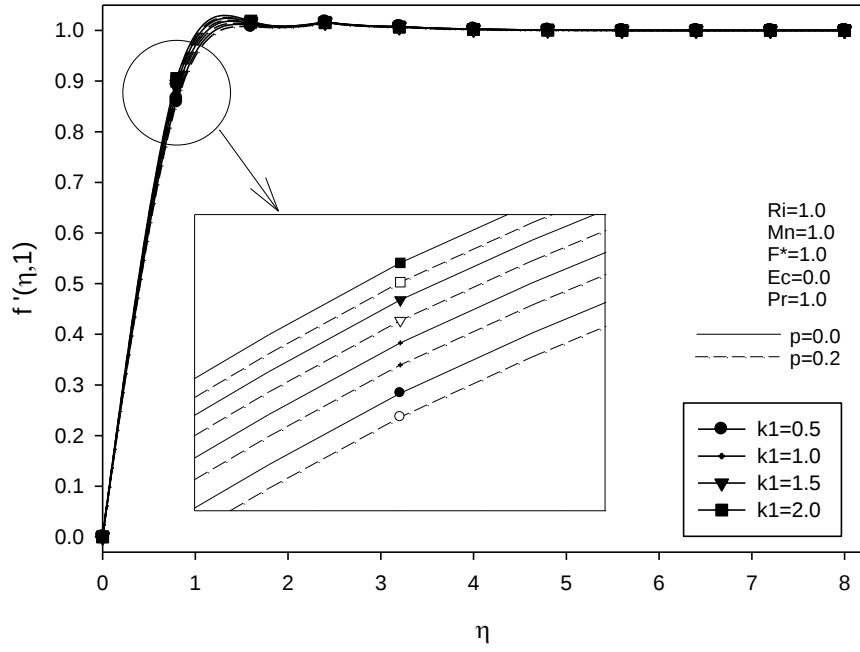
(b)

Şekil 4.5. Karışık ısı taşınımı parametresinin (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

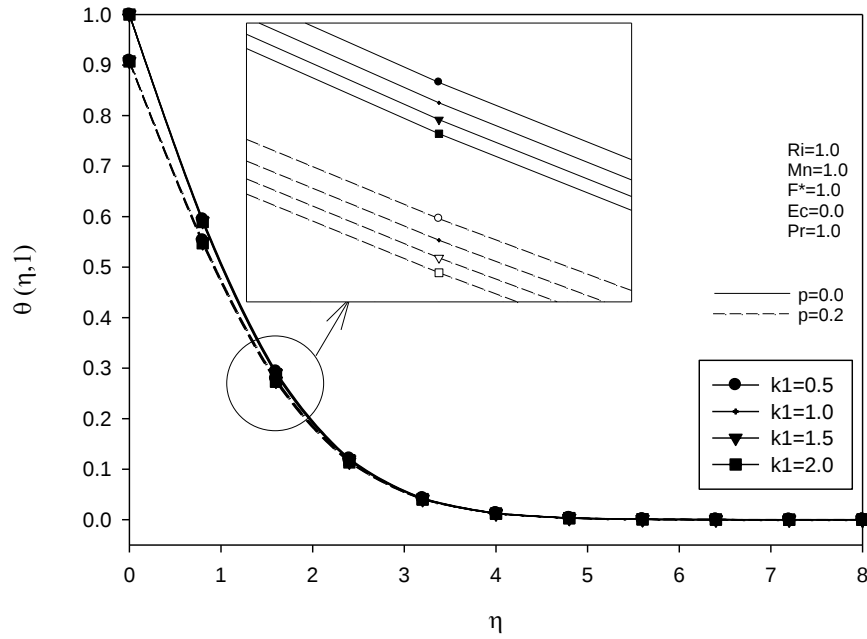
c) Gözenekli Ortam Parametresi k_1 Etkisi

Gözenekli ortam parametresinin k_1 sınır tabaka içindeki boyutsuz hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.6' de gösterilmiştir. Değerler $Ri=1.0$, $Mn=1.0$, $F^*=1.0$, $Ec=0.0$ ve $Pr = 1.0$ durumu için elde edilmiştir. Farklı k_1 değerleri için izotermal silindir ($p=0.0$) ve izotermal olmayan silindir ($p=0.2>0$) için incelenmiştir.

Gözenekli ortam parametresi k_1 değerinin artması, sınır tabaka içinde hem izotermal ($p=0.0$) hem de izotermal olmayan ($p=0.2>0$ olduğu) durumlarda, hem hız profilini artırmakta, hem de sıcaklık gradyanı artmaktadır.



(a)

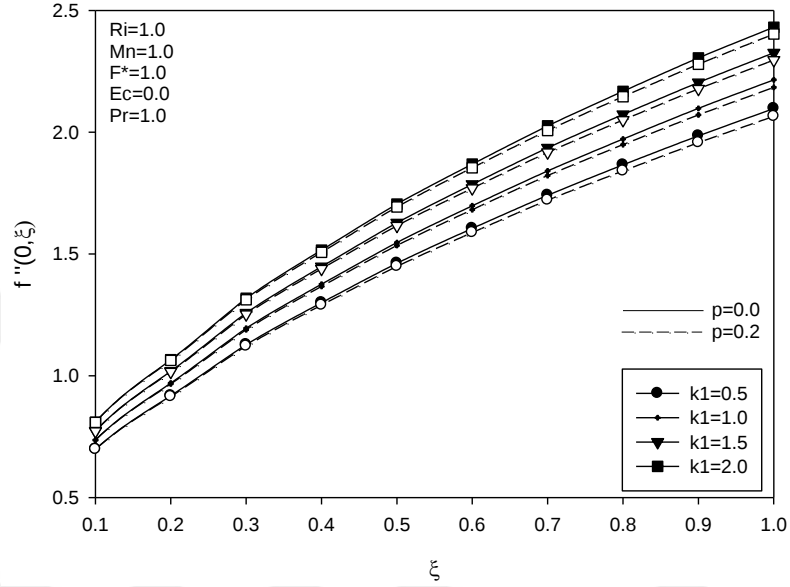


(b)

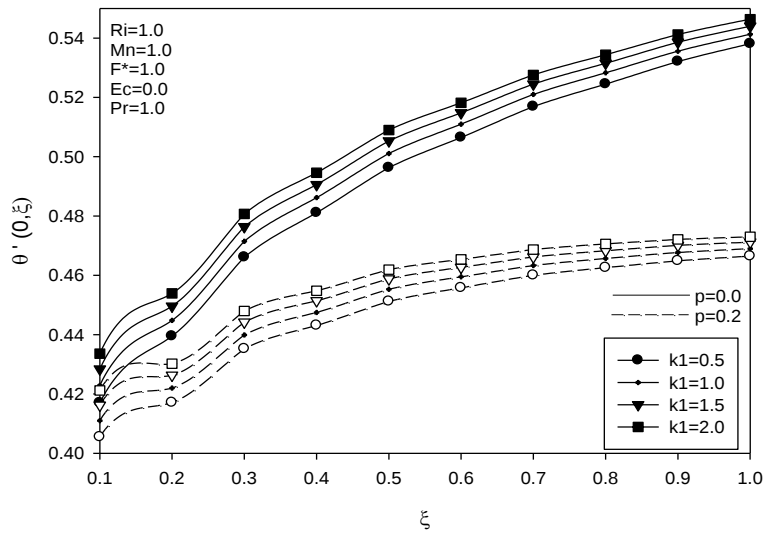
Şekil 4.6. Gözenekli ortam parametresinin k_1 (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.7’da içi boş silindir boyunca yerel sürtünme ve yerel ısı transferi parametrelerinin değişimleri hem izotermal ($p=0$) hemde izotermal olmayan ($p=0.2>0$) silindir durumu için verilmiştir.

Gözenekli ortam parametresi k_1 değerinin artması yerel sürtünme ve yerel ısı transfer profillerini artırmıştır.



(a)



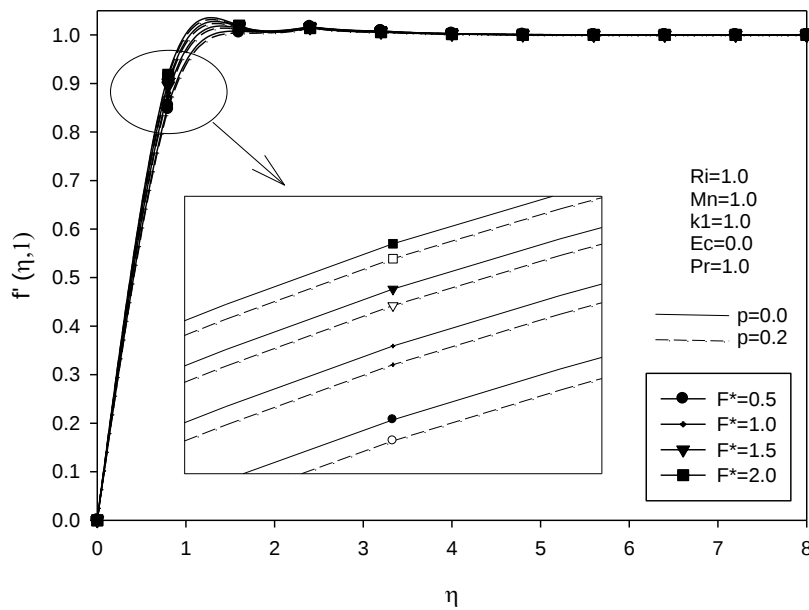
(b)

Şekil 4.7. Gözenekli ortam parametresinin k_1 (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

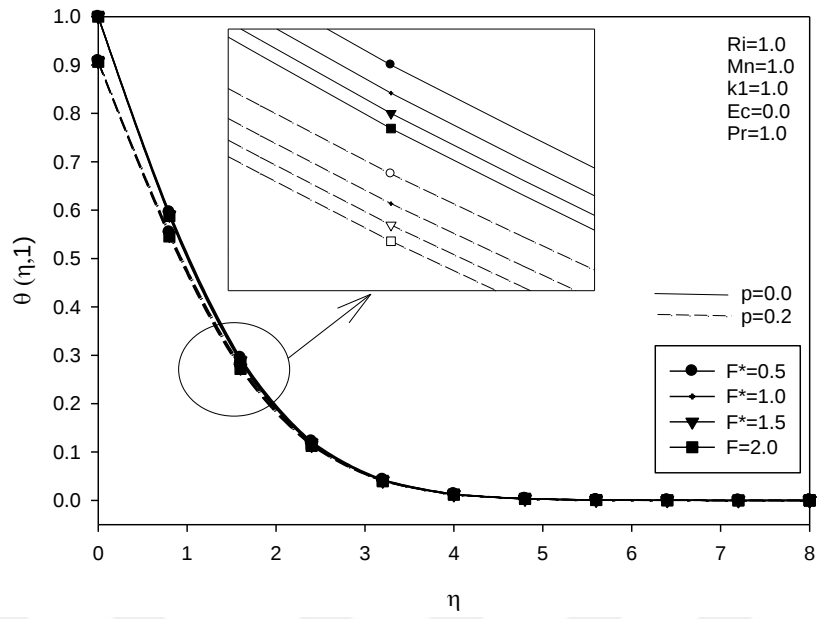
d) Forchheimer Parametresi F^* Etkisi

Forchheimer parametresinin F^* sınır tabaka içindeki boyutsuz hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.8' de gösterilmiştir. Değerler $Ri=1.0$, $Mn=1.0$, $k_1=1.0$, $Ec=0.0$ ve $Pr=1.0$ durumu için elde edilmiştir. Farklı F^* değerleri için izotermal silindir ($p=0.0$) ve izotermal olmayan silindir ($p=0.2>0$) için incelenmiştir.

Forchheimer parametresi F^* değerinin artması sınır tabaka içinde hem izotermal ($p=0.0$) hem de izotermal olmayan ($p=0.2>0$ olduğu) durumlarda hem hız profilini artırmakta, hem de sıcaklık gradyanı artmaktadır.



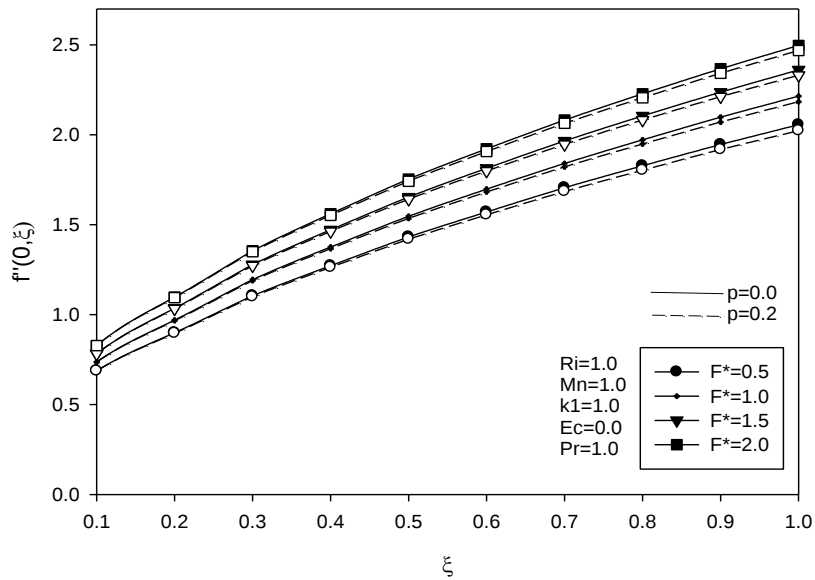
(a)



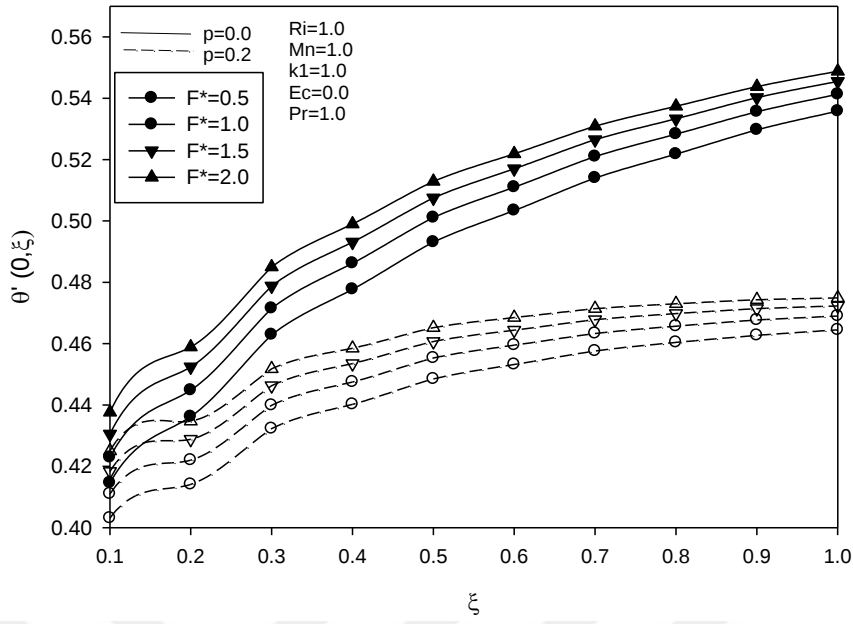
(b)

Şekil 4.8. Forchheimer parametresinin F^* (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.9'de içi boş silindir boyunca yerel sürtünme ve yerel ısı transferi parametrelerinin değişimleri hem izotermal ($p=0$) hemde izotermal olmayan ($p=0.2>0$) silindir durumu için verilmiştir. Forchheimer parametresi F^* değerinin artması yerel sürtünme ve yerel ısı transfer etkisini artırmıştır.



(a)



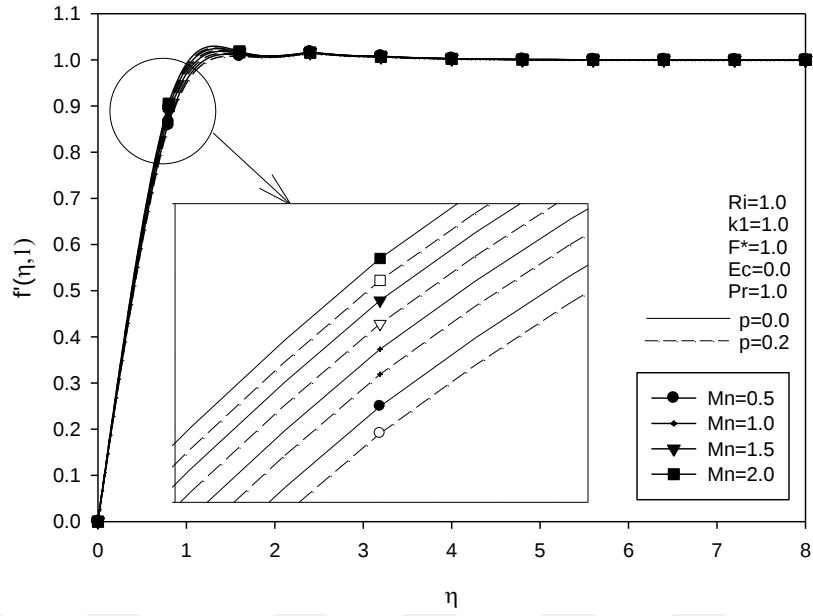
(b)

Şekil 4.9. Forcheimer parametresinin F^* (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

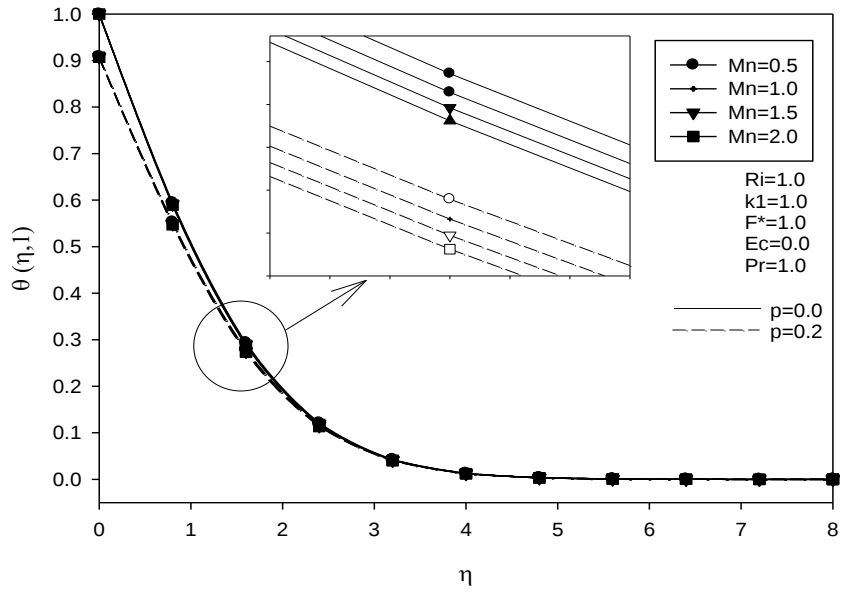
e) Manyetik Alan Parametresi Mn Değişken

Manyetik alan parametresinin Mn sınır tabaka içindeki boyutsuz hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.10' da gösterilmiştir. Değerler $Ri=1.0$, $F^*=1.0$, $k_1=1.0$, $Ec=0.0$ ve $Pr=1.0$ olduğu durum için elde edilmiştir. Farklı Mn değerleri için izotermal silindir ($p=0.0$) ve izotermal olmayan silindir ($p=0.2>0$) için incelenmiştir.

Manyetik alan parametresi Mn değerinin artması sınır tabaka içinde hız ve sıcaklık profillerini artırmaktadır. Manyetik alanın artması akış konsantrasyonunu artırmaktadır. Bu nedenle, ortamın manyetik kuvveti ve gözeneklerinin akışı geciktirmesi, akışa direnme yönündeki ters basınç ile çalışmaktadır (El-Kabeir, 2008). Şekil 4.10'da da görüldüğü üzere manyetik alan parametresi Mn 'nin artırılması ise duvardaki hız ve sıcaklık gradyanlarını artırmaktadır.



(a)

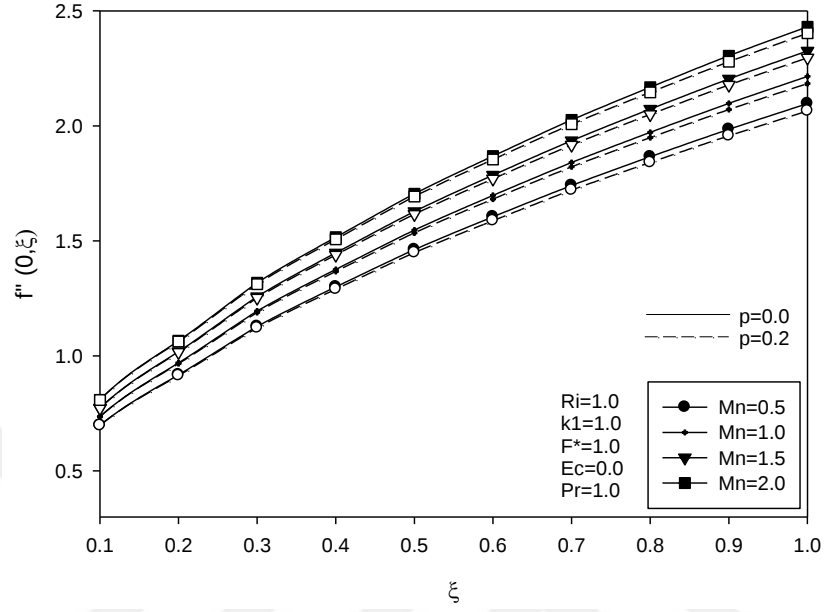


(b)

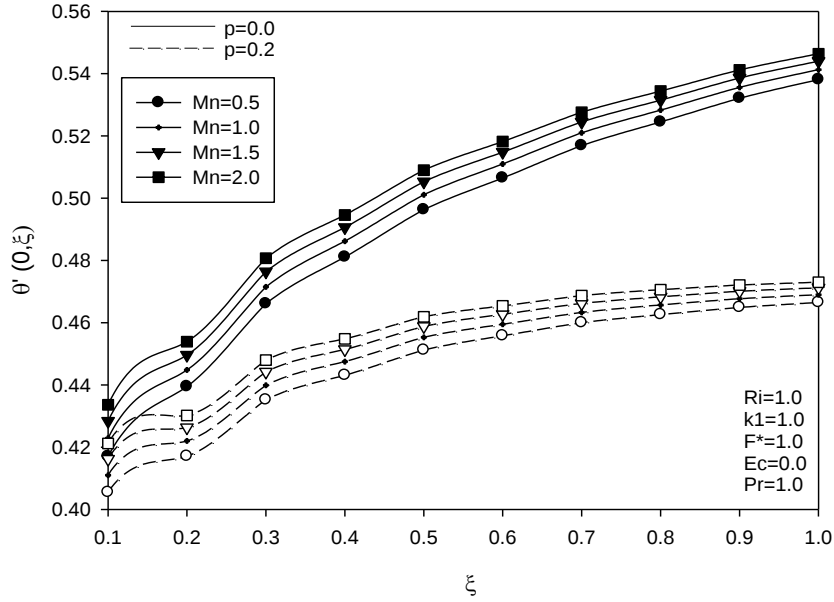
Şekil 4.10. Manyetik alan parametresinin Mn (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.11’da içi boş silindir boyunca yerel sürtünme ve yerel ısı transferi parametrelerinin değişimleri hem izotermal ($p=0$) hem de izotermal olmayan ($p=0.2>0$) silindir durumu için verilmiştir. Manyetik alan parametresinin artması yerel sürtünme ve yerel ısı transfer parametrelerini artırmaktadır. Manyetik kuvvet akıma karşıdır ve

duvardaki kayma gerilmesini azaltır. Manyetik alan parametresi Mn değerinin yükseltilmesi ara yüzey sıcaklığını da azaltmaktadır (Mamun, 2008) ve ısı transferi de Şekil 4.11 b’de görüldüğü gibi Mn ’nin azalması ile azaltmaktadır.



(a)



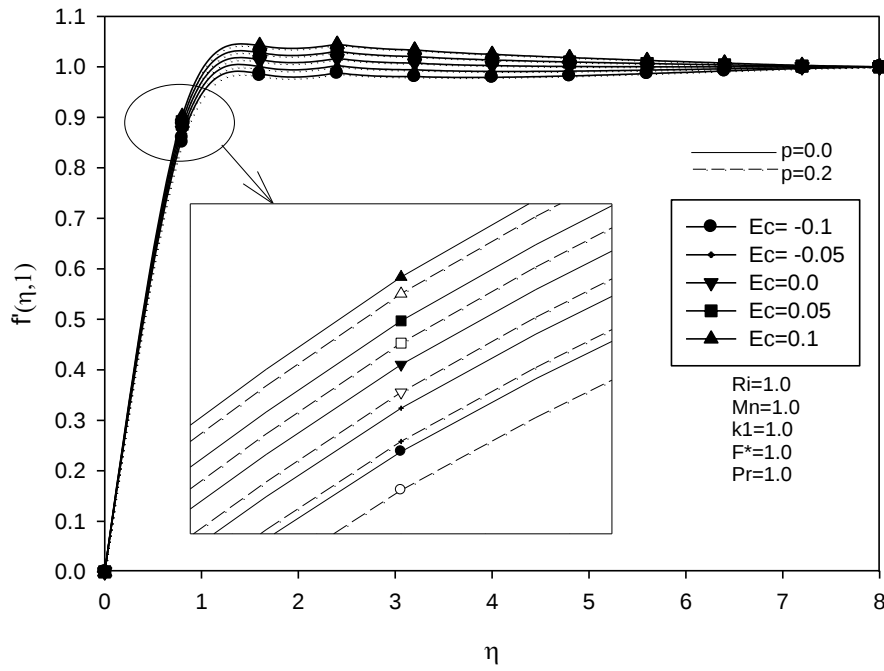
(b)

Şekil 4.11. Manyetik alan parametresinin Mn (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

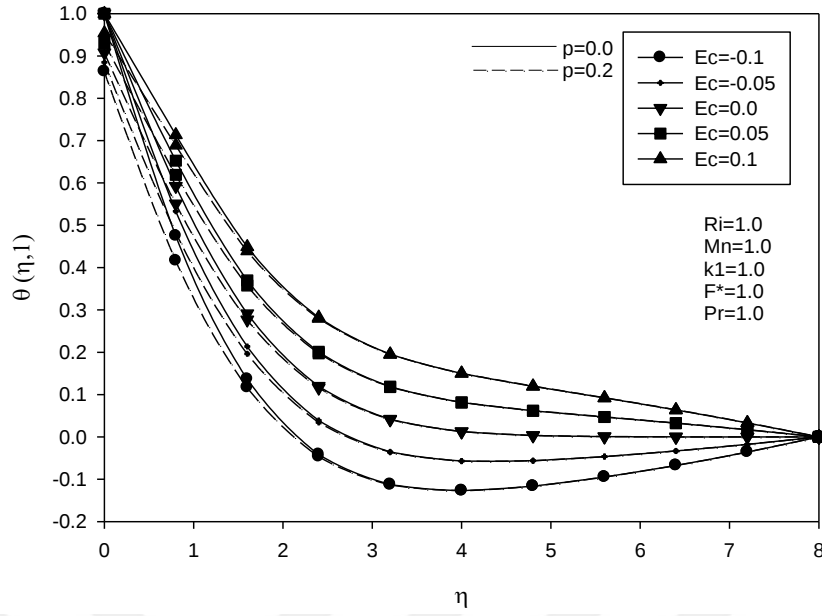
f) Eckert Sayısı Ec Etkisi

Eckert sayısının Ec sınır tabaka içindeki boyutsuz hız (a) ve sıcaklık (b) profiline etkisi Şekil 4.12' de gösterilmiştir. Değerler $Ri=1.0$, $F^*=1.0$, $k_1=1.0$, $Mn=1.0$ ve $Pr = 1.0$ olduğu durum için elde edilmiştir. Farklı Ec değerleri için izotermal silindir ($p=0.0$) ve izotermal olmayan silindir ($p=0.2>0$) için incelenmiştir.

Eckert sayısının artması hız profilini artırmaktadır. Ec 'in pozitif bir değeri için, silindirin sıcaklığı serbest akımından daha büyük olduğundan, silindirden akışkana doğru bir ısı aktarımı olacaktır. Viskoz yayılım, akışkan içinde ısı oluşumuna neden olacak ve bu da akış bölgesindeki sıcaklık dağılımında artışa neden olacaktır. Bunun nedeni, ısı enerjisinin sürtünmeli ısıtma nedeniyle sıvı içinde depolanması gerçeğinden kaynaklanmaktadır. Artmış sıvı sıcaklığı nedeniyle, sıcaklık gradyanı azalacaktır. Şekil 4.12 b 'den görülebileceği gibi, Ec 'in sıcaklığa etkisi aşağı yönde yoğunlaşmaktadır.



(a)

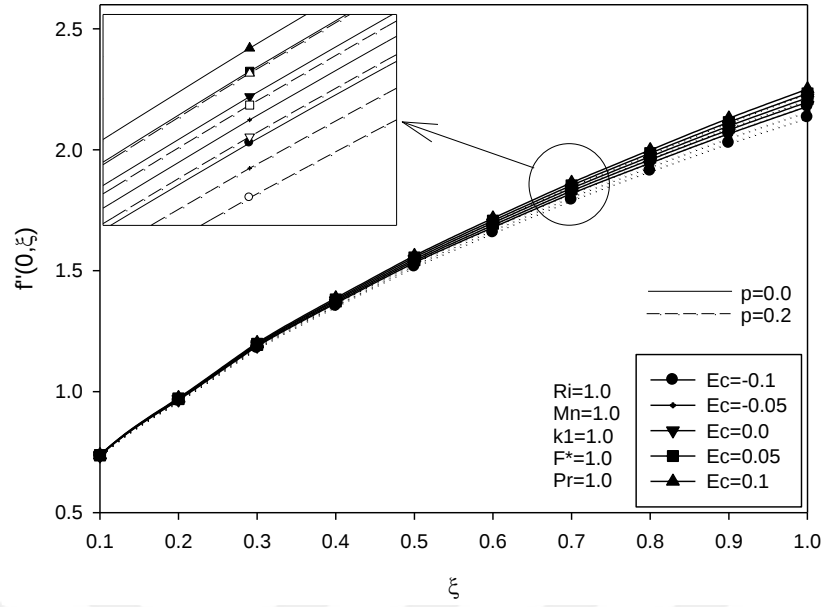


(b)

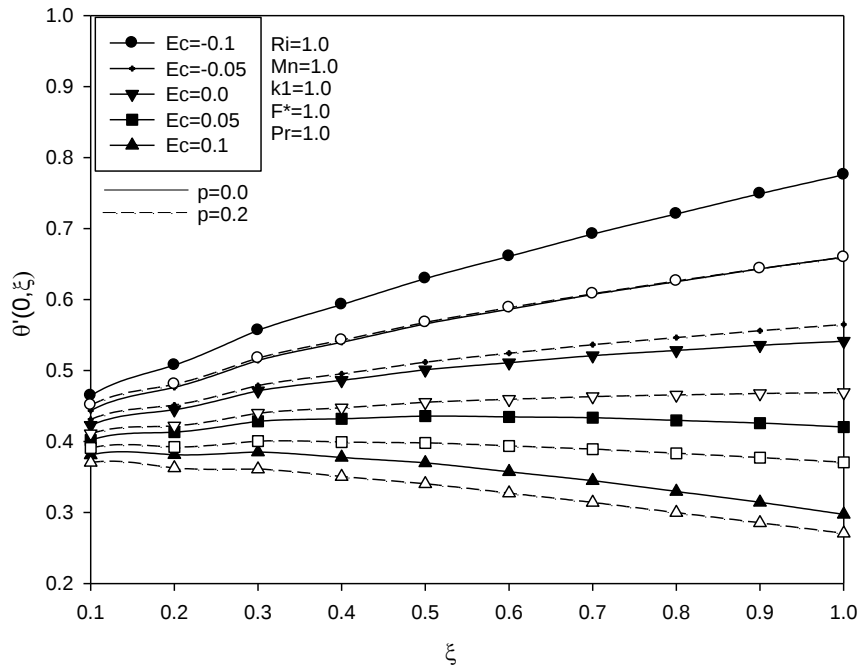
Şekil 4.12. Eckert Sayısının Ec (a) hız ve (b) sıcaklık profillerine etkisi

Şekil 4.13’de içi boş silindir boyunca yerel sürtünme ve yerel ısı transferi parametrelerinin değişimleri hem izotermal ($p=0$) hemde izotermal olmayan ($p=0.2>0$) silindir durumu için verilmiştir.

Viskoz yayılım sıvının içinde bir ısı üretimi kaynağı gibi davranır. Eckert numarası, negatif değerleri için bir yardımcı etkiyi temsil eder pozitif değerler için ısı transferi üzerinde bir karşıt etki yaratır. Ec sayısının artması ile yerel sürtünme artmakta, yerel ısı transferi ise azalmaktadır.



(a)



(b)

Şekil 4.13. Eckert Sayısının Ec (a) yerel sürtünme ve (b) yerel ısı transferine etkisi

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, gözenekli bir ortamda tutulan içi boş silindir çubuk üzerinde olan akış ele alınmıştır. Navier Stokes ve enerji denklemleri benzerlik yöntemiyle sınır tabaka denklemlerine dönüştürülmüştür. Elde edilen bu sınır tabaka denklemleri örtük sonlu fark yöntemi olan Keller-Box Metodu ile numerik olarak çözülmüştür. Birleşik ısı transferi (conjugate) p , birleşik taşınım Ri , gözenekli ortam parametresi k_1 , Forchheimer parametresi F^* , manyetik alan parametresi Mn ve Eckert sayısının Ec , sınır tabaka içindeki hız ve sıcaklık dağılımları ile yerel sürtünme ve ısı transferi parametrelerine etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

- i) Birleşik ısı transferi parametresi p 'nin artması, yerel sürtünme ve yerel ısı transferini azaltmıştır.
- ii) Karışık taşınım parametresinin (Ri), Gözenekli ortam parametresinin (k_1), Forchheimer parametresinin (F^*) ve Manyetik alan parametresinin (Mn) artmaları ile yerel sürtünme ve yerel ısı transfer etkisinin arttığı tespit edilmiştir.
- iii) Eckert sayısı Ec 'nin artması ile yerel sürtünme etkisinin arttığı, yerel ısı transferi etkisinin azaldığı belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- Abo-Eldahab E.M., Salem A.M., 2005, *MHD Flow and heat transfer of non-Newtonian power-law fluid with diffusion and chemical reaction on a moving cylinder*, Heat Mass Transfer 41: 703–708.
- Alazmi, B., Vafai, K., 2000, *Analysis of Variants Within the Porous Media Transport Models*, Journal of Heat Transfer 122:303-326.
- Anwar I., Amin N., Pop I., 2008, *Mixed convection boundary layer flow of a viscoelastic fluid over a horizontal circular cylinder*, International Journal of Non-Linear Mechanics 43:814-821
- Baytaş, A.C., 2006, Gözenekli ortamlarda taşınım olayı, *İTÜ Dergisi, Fen Bilimleri*, 4(1), 3-13.
- Baytaş A.C., 2015, *Taşınım ile Isı Geçişi*, 1.basım, 1282.
- Chang C.L., 2006, *Buoyancy and wall conduction effects on forced convection of micropolar fluid flow along a vertical slender hollow circular cylinder*, International Journal of Heat and Mass Transfer 49:4932–4942.
- Chang C.L., 2006, *Numerical simulation of micropolar fluid flow along a flat plate with wall conduction and buoyancy effects*, J.Phys. D: Appl. Phys. 39,1132-1140
- Chang C.L., 2008, *Numerical Simulation For Natural Convection Of Micropolar Fluids Flow Along Slender Hollow Circular Cylinder With Wall Conduction Effect*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 13 (2008), 624–636.
- Cebeci, T., 2002, *Convective Heat Transfer*, Second Revised Edition, California.
- Çengel A.Y., 2006, *Heat and Mass Transfer A Practical Approach*, Third Edition, McGraw Hill, New York.
- Darcy H.P.G., 1937, *Les fontaines publiques de la ville de Dion*, Victor Delmont Paris.
- Darıcı S., 2004, *Kalın Cidarlı Borularda Eş Zamanlı Gelişen Laminer Akışta Geçici Rejim Birleşik Isı Transferi*, Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Dullien F.A.L., 1992, *Porous Media Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, Inc.
- El-Amin M.F., 2003, *Combined effect of viscous dissipation and Joule heating on MHD forced convection over a non-isothermal horizontal cylinder embedded in a fluid saturated porous medium*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 263:337–343.

- EL-Kabeir S.M.M., EL-Hakiem M.A, Rashad A.M., 2008, *Group method analysis of combined heat and mass transfer by MHD non-Darcy non-Newtonian natural convection adjacent to horizontal cylinder in a saturated porous medium*, Applied Mathematical Modelling 32: 2378–2395.
- Elgazery N.S, Hassan M. A., 2008, *Numerical study of radiation effect on MHD transient mixed-convection flow over a moving vertical cylinder with constant heat flux*, Commun. Numer. Meth. Engng, 24:1183–1202.
- Ergün S., 1952, Fluid flow through packed columns, Chemical Engineering and Progress, 8(2):89-94.
- Forchheimer P., 1901, Wasserbewegung durch boden, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, 45:1736-1741.
- Incropera F.P., DeWitt D.P., 2001, *Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri*, Birinci Basım
- Kaya A., Aydın O., 2008, *Non-Darcian Forced Convection Flow of Viscous Dissipating Fluid over a Flat Plate Embedded in a Porous Medium*, Transp Porous Med 73:173–186.
- Kaya A., Aydın O., 2009, *Bir Köşe Akışı Etrafındaki Zorlanmış Taşınım İle Isı Transferine Isıl Işınlamanın Etkisi*, Isı Bilimi ve Tekniği Dergisi, 29:1:1-6.
- Kaya A., Aydın O., 2009, *Forced Convection Of A Viscous Dissipative Fluid Flow Adjacent To an Isothermal Wedge Embedded In A Porous Medium*, 4th International Conference on Applications of Porous Media.
- Kaya A., Aydın O., 2014, *Gözenekli Bir Ortamdaki Düşey Bir Plaka Üzerinden Olan Akışın Kaldırma Kuvveti Ve Birleşik Isı Transferinin Etkisi*, Isı Bilimi ve Tekniği Dergisi, 34:1:35-41
- Kumari M., Nath G., 2004, *Mixed convection boundary layer flow over a thin vertical cylinder with localized injection/suction and cooling/heating*, International Journal of Heat and Mass Transfer 47:969–976
- Kumari M., Jayanthi S., 2004, *Non-Darcy, Non-Newtonian free convection flow over a horizontal cylinder in a saturated porous medium*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, 31:1219–1226.
- Lauriat G., Ghafir R., 2000, *Forced convective heat transfer in porous media*, In K. Vafai, H.Hadim, *Handbook of Porous Media*, Marcel Dekker, New York, 201–204.
- Mamun A.A., Chowdhury Z.R., Azim M.A., Maleque M.A., 2008, *Conjugate heat transfer for a vertical flat plate with heat generation effect*, Nonlinear Analysis: Model. Cont. 13(2), 213–223.
- Mamun A.A., Chowdhury Z.R., Azim M.A., Molla M.M., 2008, *MHD-conjugate heat transfer analysis for a vertical flat plate in presence of viscous dissipation and heat generation*, International Communications in Heat and Mass Transfer 35:1275–1280.

- Nield D.A., Bejan A., 1999, *Convection in Porous Media*, Springer, New York.
- Pal D., Mondal H., 2010, *Hydromagnetic non-Darcy flow and heat transfer over a stretching sheet in the presence of thermal radiation and Ohmic dissipation*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 15:1197–1209.
- Pop I., Na Y., 2000, *Conjugate free convection over a vertical slender hollow cylinder embedded in a porous medium*, Heat Mass Transfer 36: 375-379.
- Saydam T., 1973, (Collins, E., Çeviri) *Akışkanların gözenekli ortamlardaki akışı*, Çağlayan Basımevi.
- Skjetne, E., 1995, *High-velocity flow in porous media; analytical, numerical and experimental studies*, Doctoral Thesis at Department of Petroleum Engineering and Applied Geophysics, Faculty of Applied Earth Sciences and Metallurgy, Norwegian University of Science and Technology.
- Takhanov D., 2011, *Forchheimer Model for Non-Darcy Flow in Porous Media and Fractures*, London.
- Takhar H.S., Beg O.A., 1997, *Effects of transverse magnetic field, Prandtl number and Reynolds number on non-darcy mixed convective flow of an incompressible viscous fluid past a porous vertical flat plate in a saturated porous medium*, Int. J. Energy Res. 21: 87–100.
- Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G., 2000, *Combined heat and mass transfer along a vertical moving cylinder with a free stream*, Heat and Mass Transfer 36: 237-246.
- Takhar H. S., Nath G., 2000, *Self-similar solution of the unsteady flow in the stagnation point region of a rotating sphere with a magnetic field*, Heat and Mass Transfer 36:89-96.
- Tashtoush B., Al-Odat M., 2004, *Magnetic field effect on heat and fluid flow over a wavy surface with a variable heat flux*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 268:357-363.
- Vaszi A. Z., Ingham D.B., Lesnic D., Munslow D., Pop I., 2001, *Conjugate free convection from a slightly inclined plate embedded in a porous medium*, Angew. Math. Me. 81 (7):465–479.
- Yükselen A., 2008, *Sınır Tabaka Teorisi*, İTÜ ders notları.
- Yih K.A., 1998, *The effect of uniform suction/blowing on heat transfer of magnetohydrodynamic Hiemenz flow through porous media*, Acta Mechanica 130:147-158.
- Zeng Z., Grigg R., 2006, *A Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media*, Transport in Porous Media, 63: 57–69.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi: 28.10.1987

Doğum yeri: Denizli

Lise: Çukurova Elektrik Anadolu Lisesi

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi

Kimya-Metalürji Fakültesi - Kimya Mühendisliği,

Makine Fakültesi - İmalat Mühendisliği

Yüksek Lisans: Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Çalıştığı Kurumlar

2013 – 2014 Kahramanmaraş Çimento Sanayi A.Ş

Kalite Güvence Şefi

2016 – 2017 12 Şubat BKT Tekstil ltd. şti.

Üretim Mühendisi