

**YAKLAŞIM TEORİSİNDE q -POZİTİF LİNEER OPERATÖR
DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

ERSİN ŞİMŞEK

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
OCAK - 2019**

**YAKLAŞIM TEORİSİNDE q -POZİTİF LİNEER OPERATÖR
DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

ERSİN ŞİMŞEK

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**Danışman
Doç. Dr. Tuncay TUNÇ**

**MERSİN
OCAK - 2019**

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi beyan ederim.

ETHICAL DECLARATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

10/01/ 2019

İmza / Signature

Ersin ŞİMŞEK

ÖZET

YAKLAŞIM TEORİSİNDE q -POZİTİF LİNEER OPERATÖR DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Weierstrass teoremini ispatlamanın kullanışlı yollarından bir tanesi pozitif ve lineer operatör dizilerini kullanmaktan geçer. Bu operatör dizilerinin en iyi bilineni Bernstein polinomlarının oluşturduğu dizidir. Bernstein polinomları baz alınarak çok sayıda operatör dizileri üretilmiştir. Bu tezin ana konusu bu tür operatör dizileridir. Diğer taraftan, bu tezin uygulama alanı olan q -analizin temelleri birkaç yüzyıl önce atılmasına rağmen analizdeki uygulamaları son yıllarda gelişmiştir. Bunun sonucu olarak yaklaşım teorisinde kullanılan bütün operatörler q -analize uyarlanmıştır. Bu tezde ayrık tipli operatörlerin q -benzerlerini üreten bir genel operatör tanımlanmıştır. Bunun için belli düzgünlük koşullarına sahip fonksiyonlardan yararlanılmıştır. İyi bilinen bazı operatör dizileri için üreteç fonksiyonu bulunmuştur. Bu operatör dizileri Bernstein, Chlodowsky, Lupaş, Meyer-König ve Zeller ve Bleiman-Butzer-Hahn operatör dizilerinin q -benzerleridir. Bunların yanı sıra seçilen uygun bir üreteç fonksiyonun yardımıyla Baskakov operatörünün yeni bir q -genellemesi elde edilmiştir.

Elde edilen genel operatör dizisinin momentleri üreteç fonksiyonu cinsinden belirlenmiştir. Momentler yardımıyla bu operatör dizisinin bazı yaklaşım özellikleri verilmiştir. Daha açık bir ifadeyle, bu dizi için Korovkin tipi teorem ispatlanmıştır ve bazı bilinen fonksiyon sınıfları için Jackson tipi ve Voronovskaya tipi teoremler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Pozitif lineer operatör, q -analiz, Üreteç fonksiyonu, Korovkin tipi teorem, Voronovskaya tipi teorem, Yaklaşım hızı.

Danışman: Doç. Dr. Tuncay TUNÇ, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

ON THE CONSTRUCTION OF q -ANALOGUES FOR SOME POSITIVE LINEAR OPERATORS

One of the useful ways to prove the Weierstrass theorem is through the use of positive and linear operator sequences. The best known of these operator sequences is the sequence of Bernstein polynomials. Numerous operator arrays were produced based on Bernstein polynomials. The main subject of this thesis is such operator sequences. On the other hand, although the fundamentals of q -analysis, which is the field of application of this thesis, were discarded a few hundred years ago, its applications in analysis developed in recent years. As a result, all operators used in the theory of approximation are adapted to the q -analysis. In this thesis, a general operator who produces q -analogues of discrete type operators is defined. For this purpose, certain smoothness conditions have been used. A generating function has been found for some well-known operator sequences. These operator sequences are q -analogues of the operator sequences of Bernstein, Chlodowsky, Lupaş, Meyer-König and Zeller and Bleiman-Butzer-Hahn. In addition, a new q -generalization of the Baskakov operator was obtained with the help of a suitable generator function selected.

The moments of the overall operator sequence were determined in terms of the generator function. Some approximation properties of this operator sequence are given with the help of moments. In other words, the Korovkin type theorem has been proved for this series and Jackson type and Voronovskaya type theorems for some known class of functions have been obtained.

Keywords: Positive linear operator, q -calculus, Generating functions, Korovkin-type theorem, Voronovskaya-type theorem, Rate of convergence.

Advisor: Assoc. Prof. Tuncay TUNÇ, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleőtirilmesinde bilimsel önerileriyle beni yönlendiren, sabırla bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını yapan, samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Tuncay Tunç'a teşekkür ederim.

Katkılarından dolayı tez izleme komitesi üyeleri değerli hocalarım, Prof. Dr. Mehmet Küukaslan'a ve Doç. Dr. Sehmuz Fındık'a teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi bu tez çalıőmam sırasında da beni manevi açıdan sürekli destekleyen sevgili eőim İpek Semra Şimşek'e ve canım kızım Mercan Ela Şimşek'e sonsuz teşekkür ederim.

Bu alıőma Mersin Üniversitesi Bilimsel Araőtırma Projeleri birimince 2017-1-TP3-2180 Proje Numarası ile desteklenmiőtir. Desteklerinden dolayı Mersin Üniversitesi Bilimsel Araőtırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	ii
ONAY	iii
ETİK BEYAN	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
KISALTMALAR ve SİMGELER	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	5
3. MATERYAL ve YÖNTEM	15
3.1. Temel Kavramlar	15
3.2. Bazı Fonksiyon Uzayları	16
3.3. Yaklaşım Kuramı ve Temel Teoremleri	18
3.3.1. Weiersatras Yaklaşım Teoremi	18
3.3.2. Cebirsel Polinomların Yaklaşım Hızı	19
3.4 Pozitif Lineer Operatörler	20
3.5 Pozitif Lineer Operatörler ile Yaklaşım	22
3.5.1. Korovkin Teoremi	22
3.5.2. Pozitif Lineer Operatörlerin Yaklaşım Hızı	26
3.6. q -Analizde Temel Kavramlar	28
3.6.1. Bazı Pozitif Lineer Operatörlerin q -Analizdeki Benzerleri	32
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	40
4.1. q -Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Özellikleri	40
4.1.1. Genel Operatörün İnşası	40
4.1.2. Genel Operatörün Momentleri	42
4.1.3. $\mathcal{L}_{n,q}$ Operatörlerinin Bazı Uygulamaları	45
4.1.3.1 q -Bernstein Operatörü	45
4.1.3.2 q -Chlodowsky Operatörü	47
4.1.3.3 q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü	50
4.1.3.4 q -Lupaş Operatörü	52
4.1.3.5 q -Meyer-König ve Zeller Operatörü	52
4.2. q -Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Yaklaşım Özellikleri	53
4.2.1. Korovkin Tipi Teorem	53
4.2.2. Yaklaşım Hızı	56
4.2.3. Voronovskaya Tipi Teorem	58
4.2.4. q -Bernstein Operatörünün Yaklaşım Özellikleri	61
4.3. Baskakov Operatörlerinin Farklı Genellemesi	65
4.3.1. Operatörün İnşası ve Yaklaşım Özellikleri	65
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	73
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	82

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$:=$	Tanım olarak eşittir.
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	Pozitif reel sayılar kümesi
\mathbb{P}_n	Derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlar kümesi
I_A	$A > 0$ olmak üzere $I_A = [0, A]$ kapalı aralığı
$[a, b]$	Kapalı aralık
(a, b)	Açık aralık
$\mathcal{F}(M, K)$	M de tanımlı K -değerli bütün fonksiyonların uzayı
$B(I_A)$	I_A da tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı
$C(I_A)$	I_A da tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı
$Lip_M \alpha$	Lipschitz uzayı
$\ \cdot\ $	Norm
L	Operatör
$\{L_n\}$	Operatörler dizisi
$e_r(t)$	t^r ($r \in \mathbb{N}_0$)
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun δ adımlı birinci mertebeden süreklilik modülü
$\omega_2(f; \delta)$	f fonksiyonunun δ adımlı ikinci mertebeden süreklilik modülü
$f_n \rightrightarrows f$	$\{f_n\}$ dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$[n]_q$	$\frac{1-q^n}{1-q}$ ve $[0]_q := 0$ ile tanımlı q -tam sayılar
$[n]_q!$	$[1]_q [2]_q [3]_q \cdots [n]_q$ ve $[0]_q! = 1$ ile tanımlı q -faktöriyel
$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q$	$\frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$ ile tanımlı q -binom katsayılar
$\varphi_{n,q}$	Üreteç fonksiyonları
$D_q f$	f fonksiyonun q -türevi
$\frac{\partial_q^k f(x, y)}{\partial_q x^k}$	f fonksiyonun x 'e göre k -inci q -kısmi türevi
$(a \oplus b)_q^n$	$(a + b)^n$ 'in q -benzeri
$(a \boxplus b \boxplus c)_q^n$	$(a + b + c)^n$ 'in q -benzeri
$(a \ominus b)_q^n$	$(a - b)^n$ 'in q -benzeri

Kısaltma/Simgesi	Tanım
$D_q^k f$	f fonksiyonunun k . mertebeden q -türevi
$\mathcal{L}_{n,q}$	Genel operatör
$C^r(I)$	I üzerinde r . mertebeden türevi sürekli fonksiyonlar uzayı
$\omega(\delta)$	Süreklilik modülü tipi fonksiyon
$B_n(f; \cdot)$	Bernstein operatörü
$E_n(f, Y)$	En iyi yaklaşım sayısı
$\mathcal{M}_n(x)$	n . Mutlak moment
$M_n(x)$	n . Moment
$H_n(f; \cdot)$	Bleimann-Butzer-Hahn operatörü
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$o(\cdot)$	Landau sembolü
$\nabla_n^q f(x)$	n . q -ileri fark
$e_{r,i}(t)$	Genel test fonksiyonları
$\mu_{n,i,j}(x, q)$	j . merkezi moment
$\mu_{n,i,j}^*(x, q)$	j . merkezi q moment
$S_q(r, m)$	İkinci tür q -Stirling sayıları
$S_{n,q}(f; \cdot)$	q -Szazs-Mirakyan Operatörü
$C_\rho[0, \infty)$	$[0, \infty)$ üzerinde ρ ağırlıklı fonksiyonlar uzayı
$F_{n,q}(f; \cdot)$	q -Szazs-Mirakyan Operatörü
$P_{n,q}(f; \cdot)$	q -Baskakov operatörü
$\mathcal{B}_{n,q}(f; \cdot)$	q -Baskakov operatörü
$V_{n,q}^*(f; \cdot)$	q -Baskakov operatörü
$M_{n,q}(f; \cdot)$	q -Meyer-König ve Zeller
$M_{n,q}^*(f; \cdot)$	q -Meyer-König ve Zeller
$[k]_{q,m}$	$[k]_q [k-1]_q [k-2]_q \cdots [k-m+1]_q$
$K_{n,q}(f; \cdot)$	q -Baskakov operatörü
$C_{n,q}(f; \cdot)$	q -Chlodowsky operatörü

1. GİRİŞ

Gerçek değerli sürekli fonksiyonlara daha basit fonksiyon sınıfının elemanlarıyla, örneğin cebirsel polinomlar ile yaklaşılması, son iki yüzyıl içinde çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiştir. Cebirsel polinomlar ile sürekli fonksiyonlara yaklaşım teorisi ilk olarak 1854 yılında, P.L. Chebyshev'in buhar makinesi ile ilgili ortaya koyduğu aşağıdaki problemi ifade etmesi ile başlamıştır; “Bir $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı verilsin. Acaba f fonksiyonunu, $[a, b]$ aralığında herhangi bir noktada maksimum hatası kontrol edilecek şekilde, derecesi n 'yi geçmeyen bir P polinomu ile gösterebilir miyiz?”

Sürekli fonksiyonlara yaklaşımın olması ile ilgili akla gelebilecek ilk soru olan yaklaşımın var olma olasılığı ile ilgili temel sonuçlar yaklaşım teorisinin amacını ve özünü temsil etmektedir. Weierstrass Yaklaşım Teoremi olarak bilinen söz konusu teorem, “sonlu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli herhangi bir f fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ için, reel katsayılı bir P cebirsel polinomu vardır öyle ki her $x \in [a, b]$ için $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.” şeklinde ifade edilebilir. Başka bir deyişle, polinomlar, kapalı bir aralık üzerinde sürekli olan herhangi bir fonksiyona düzgün olarak yaklaşabilir. Bu temel teoremin, K. Weierstrass tarafından 1885 yılında verilen ispatından başlayarak günümüze kadar birçok ispatı yapılmıştır. Fakat bu yaklaşım teoreminin ilk kanıtının uzun ve karmaşıklığından dolayı birçok ünlü matematikçi, gelişen yeni analiz yöntemlerini de dikkate alarak daha basit ve daha öğretici bir kanıt bulmak için çalışmışlardır. Bu teoremi ispatlamanın en basit ve en şık yollarından birisi 1912'de S.N. Bernstein tarafından verilmiştir: Bernstein $[0, 1]$ aralığında sürekli herhangi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin terimlerini

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

şeklinde inşa etmiştir. Bernstein polinomları, $[0, 1]$ aralığı için Weierstrass Yaklaşım Teoremine basit ve inşa edilebilir bir kanıt sağlamaktadır. Söz konusu bu polinomları üreten operatörlere Bernstein operatörleri denir. $B_n(f)$ polinomuna f fonksiyonunun n . Bernstein polinomu denir. Bernstein operatörü, en çok incelenen pozitif lineer operatör olmasının yanında çok sayıda versiyona geliştirilmiş ve modifiye edilmiştir. Bernstein operatörleri birkaç nedenden ötürü popüler olmuştur: Birincisi açık bir şekilde verilebilir olması ve değişkenin yalnızca rasyonel değerleri için fonksiyonun değerlerine bağımlı olması, ikinci olarak, çeşitli şekil koruma özelliklerine sahip olması ve çalışmanın en basit yollarını sağlaması ve son olarak da türevlerinin ve integrallerinin ele alınmasının kolay olmasıdır. Bu özellikler f 'in değerlendirilmesinin zor ve

zaman alıcı olduğu durumlarda oldukça yararlıdır. Bernstein operatörünün özellikleri baz alınarak 1950-51 yıllarında T. Popoviciu, 1951 yılında H. Bohman ve 1953 yılında P.P. Korovkin fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım teorisindeki uygulamaları üzerinde önemli araştırmalar yapmışlardır. Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan polinomları üreten operatörler için kolay uygulanabilir bir kriter vermişlerdir. *Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremi* olarak bilinen söz konusu teoreme göre, “ $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyonun verilen pozitif lineer operatör dizileri altındaki görüntülerinin söz konusu sürekli fonksiyona düzgün yakınsayabilmesi için gerek ve yeter koşul $1, x, x^2$ fonksiyonlarının her birinin görüntülerinden oluşan dizilerin kendilerine düzgün yakınsamasıdır.” Bernstein operatörleri Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlar. Bu temel çalışmadan sonra sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomlar veya daha genel olan tam fonksiyonlar dizisi oluşturmak için çok sayıda pozitif lineer operatör inşa edilmiştir. Bunlardan bazıları *Szasz-Mirakyan operatörü*, *Baskakov operatörü*, *Meyer-König ve Zeller operatörü* ve *Bleiman-Butzer-Hahn operatörü*’dür.

Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan ve yukarıda adı geçen temel operatörleri belli koşullar altında üretebilen genel pozitif lineer operatörler üzerinde de birçok çalışma yapılmıştır. Ayrıca, bu operatörlerin yardımıyla yeni operatörler de oluşturulabilmiştir. V.A. Baskakov 1957 yılında f ve φ_n , $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sonsuz mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N},$$

şeklinde genel bir pozitif lineer operatör dizisi tanımlamıştır. φ_n fonksiyon dizilerinin uygun seçimiyle daha önce verilen operatörler üretilebilir. Örneğin; $x \in [0, 1]$ için $\varphi_n(x) = (1-x)^n$ fonksiyon dizisinin seçimiyle Bernstein polinomları, $x \in [0, b]$ için $\varphi_n(x) = e^{-nx}$ fonksiyon dizisinin seçimiyle Szasz-Mirakyan operatörü üretilebilir. Bundan başka diğer bir genel operatör dizisi 1970 yılında A.D. Gadjiev ve I.I. Ibragimov tarafından

$$L_n(f; x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\partial^v K_n(x, t, u)}{\partial u^v} \Big|_{\substack{u=\alpha_n \psi_n(t) \\ t=0}} \frac{(-\alpha_n \psi_n(0))^v}{v!} f\left(\frac{v}{n^2 \psi_n(0)}\right), \quad x, t \in [0, A], \quad u \in (-\infty, \infty)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Operatörün yapısında bulunan K_n ve ψ_n fonksiyon dizilerinin uygun seçimiyle bilinen birçok pozitif lineer operatör dizisi elde edilebilir. Örneğin;

$K_n(x, t, u) = \left(1 - \frac{ux}{1+t}\right)^n$, $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa Bernstein polinomu,

$K_n(x, t, u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa Szasz-Mirakyan operatörü elde edilir.

Bernstein operatörlerinin önemli genellemelerinden bir tanesi ve q -analizdeki uygulamalarının da ilki 1987'de A. Lupaş tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_{n,q}(f; x) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1} (1-x+q^j x)} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N}, q > 0.$$

Bundan on yıl sonra Bernstein operatörünün q -tam sayılarına dayanan farklı bir genellemesi G.M. Phillips tarafından

$$B_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N}, 0 < q < 1$$

şeklinde verilmiştir. Son yıllarda, birçok araştırmacı özellikleri iyi bilinen pozitif lineer operatörleri, q -analizdeki teknikleri kullanarak genelleştirmiş ve bu operatörlerin genelleştirilmiş versiyonlarının özelliklerini inceleme problemlerine odaklanmışlardır.

q -parametresine bağlı genel bir pozitif lineer operatörler dizisi ilk olarak 2009 yılında C. Radu tarafından $q \in (0, 1)$ ve \mathbb{R}^+ üzerinde sonsuz mertebeden sürekli q -türeve sahip, reel değerli bir $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ fonksiyon dizisi için

i) $\psi_n(0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$,

ii) $(-1)^k D_q^k \psi_n(x) \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \geq 0$,

iii) Her $(x, k) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ için bir i_k , $0 \leq i_k \leq k$, pozitif tamsayısı vardır öyle ki

$$D_q^{k+1} \psi_n(x) = (-1)^{i_k+1} D_q^{k-i_k} \psi_n(q^{i_k+1} x) \beta_{n,k,i_k,q}(x), \text{ burada } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n,k,i_k,q}(0)}{[n]_q^{i_k+1} q^{k-i_k}} = 1$$

koşulları sağlandığında her bir $f \in C_2(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$T_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2} D_q^k \psi_n(x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}}\right), \quad x \geq 0$$

şeklinde inşa edilmiştir. Bu ise, V.A. Baskakov tarafından 1957 yılında yapılan genel operatörün q -benzeridir.

Bu çalışmada, yukarıda söz edilen ve farklı yöntemlerle elde edilen ayrık tipteki q -pozitif lineer operatörlerin tek bir formda yazılmasının yanında, üreteç fonksiyonların yardımıyla literatürde olmayan yeni q -pozitif lineer operatörlerin de üretilmesine olanak sağlayan tek bir genel operatörün inşa edilmesi ve özelliklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Elde edilen genel operatör aşağıda verilmiştir:

$I_A = [0, A]$, $A > 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için $\varphi_{n,q} : I_A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerekli özelliklere sahip üretici fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in B(I_A)$, (I_A üzerinde tanımlı sınırlı bir fonksiyonlar uzayı) ve belli $\alpha_{n,k,q}$ sayıları için

$$\mathcal{L}_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}}\right)$$

ayrık tipte pozitif ve lineer olan genel bir operatördür. Bu operatörün gerekli özelliklere sahip olması için tüm koşullar ile bunlara bağlı genel ve yaklaşım özelliklerine tezin Bulgular bölümünde yer verilmiştir.

Tezin Materyal ve Yöntem bölümünde matematiksel analizin ve q -analizin bazı temel teoremleri, tanım ve gösterimlerine, q -pozitif lineer operatörlerin özelliklerine ve örneklerine, bazı fonksiyon sınıflarına, test fonksiyonlarına yaklaşımın bazı temel özelliklerinin yanı sıra Weierstrass Teoremi ve Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremine yer verilmiştir.

Bulgular bölümünde, q -pozitif lineer operatörlerin uygun üreteç fonksiyonlarının seçimi yardımıyla tek bir metot tarafından inşa edilmesi ile ilgili doğrudan uygulamalara, düzgün yakınsaklık, yaklaşım hızları ile ilgili bazı önemli sonuçlara, literatürde olmayan yeni bir pozitif lineer operatörün üretilmesine ve yaklaşım özelliklerine yer verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Sürekli bir fonksiyona, polinomlar dizisi ile yaklaşımın varlığının ispatlanması yaklaşım kuramının önemli problemlerinden biridir. Yaklaşım Teorisinin öncülerinden sayılan P.L. Chebyshev [1] henüz polinomlarla yaklaşımın varlığı hakkında herhangi bir çalışma yokken 1854 yılında, bir polinomun, verilen polinomlar sınıfı içinde fonksiyona düzgün norma göre en yakın olup olmadığını belirleyen önemli bir kriter vermiştir. K. Weierstrass [2], 1885 yılında, sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğunu gösteren önemli bir teorem vermiştir. Teoreminde f , \mathbb{R} üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$W_n(f;x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n(t-x)^2}{2}} f(t) dt, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

ile tanımlı $\{W_n(f)\}$ fonksiyon dizisinin söz konusu fonksiyona \mathbb{R} üzerinde noktasal; kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde ise düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. Fakat bu yaklaşım teoreminin ilk kanıtının uzun ve karmaşıklığından dolayı birçok ünlü matematikçi, gelişen yeni analiz yöntemlerini de dikkate alarak daha basit ve daha öğretici bir kanıt bulmak için çalışmışlardır.

Bu teoremi ispatlamanın en basit ve şık yollarından birisi 1912 yılında S.N. Bernstein [3] tarafından verilmiştir. $[0,1]$ aralığında sürekli herhangi bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin terimlerini

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

şeklinde inşa etmiştir. Bernstein, bu polinomlar ile $[0,1]$ aralığı için Weierstrass Yaklaşım Teoremine basit ve inşa edilebilir bir kanıt sağlamıştır. Bernstein'in kanıtı $t = a(1-x) + bx$ dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığından $[a,b]$ aralığına taşınabilir. $B_n(f)$ polinomuna f fonksiyonunun n . Bernstein polinomu denir. Söz konusu bu polinomları üreten operatörlere Bernstein operatörleri denir. Bernstein operatörü, en çok incelenen pozitif lineer operatör olmasının yanında çok sayıda versiyona geliştirilmiş ve modifiye edilmiştir. Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen Weierstrass Teoreminin yukarıda bahsedilen ispatının dışında literatürde birçok ispatı vardır. A. Pinkus [4], Weierstrass Teoreminin farklı kanıtlarını bir araya getiren bir çalışma yapmıştır. Bu kanıtlardan bazıları: Runge (1885), Picard (1891), Lerch (1892 ve 1903), Volterra (1897), Lebesgue (1898), Mittag-Leffler (1900), Fejér

(1900 ve 1916), Landau (1908), De la Vallée Poussin (1908), Jackson (1911), Sierpinski (1911), Montel (1918). Bernstein'in $\{B_n(f)\}$ dizilerini oluşturma tekniği pozitif lineer operatörlerle yaklaşımın ilk adımı olmuştur. Sonraki yıllarda, kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşımda pozitif lineer operatörler yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır.

1930 yılında, L. V. Kantorovich [5] Bernstein polinomlarını;

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

biçiminde $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara genelleştirmiştir. K_n operatörlerine *Kantorovich polinomları* denir.

1932 yılında, E. Voronovskaya [6] tarafından f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve sabit bir x noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ise,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[B_n(f;x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

biçiminde bir asimptotik formül verilmiştir. 1935 yılında, T. Popoviciu [7] $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için süreklilik modülü yardımıyla Bernstein polinomlarının fonksiyona yaklaşım hızını

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{5}{4} \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

şeklinde belirlemiştir.

1937 yılında, I. Chlodowsky [8], Bernstein polinomlarını sonsuz aralıklarda

$$C_n(f,x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n} b_n\right), \quad 0 \leq x \leq b_n$$

olarak tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Burada; $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/n) = 0$ koşullarını sağlayan pozitif reel sayıların bir artan dizisidir. $C_n(f)$ polinomlarına *Bernstein-Chlodowsky polinomları* adı verilir.

1941 yılında, G.M. Mirakyan [9], $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)|/(1+x^2) < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan

$$S_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-nx} (nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty)$$

ile tanımlı $\{S_n\}$ operatörler dizisini tanımlamıştır ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 1944 yılında J. Favard [10] ve 1950 yılında O. Szasz [11] bu operatörlerin bazı özelliklerini incelemiştir. Genellikle $S_n(f)$ fonksiyon serileri *Szasz-Mirakyan operatörleri* olarak bilinirler.

1950'li yıllara gelindiğinde araştırmacılar genel pozitif lineer operatör dizisinin yaklaşım özellikleri ile ilgilenmeye başlamışlardır. Bunun sonucu olarak da " $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi ve sürekli f fonksiyonu verildiğinde $\{L_n(f)\}$ fonksiyon dizisinin f 'ye düzgün yakınsadığını garanti etmek için gerekli ve yeterli koşullar nelerdir?" sorusu akla gelmiştir. 1950-51 yıllarında T. Popoviciu [12], 1952-54 yıllarında H. Bohman [13] ve 1953 yılında P.P. Korovkin [14, 15] bu problemi birbirinden bağımsız olarak çözmüşlerdir. Bu üç matematikçinin yaptığı katkılar aşağıda sırasıyla verilmiştir: T. Popoviciu, çalışmalarını 1951 yılında Romen dilinde yayınlamıştır ve bu nedenle yukarıdaki probleme katkısı birçok araştırmacı tarafından bilinmemektedir. Popoviciu, kanıtında, $n \in \mathbb{N}$ için L_n 'nin sabit fonksiyonları ürettiğini düşünüyordu. Popoviciu'nun o zamanki çalışması "On the proof of Weierstrass' theorem using interpolation polynomials" adıyla 1998 yılında Daniela Kacsó tarafından İngilizceye çevrilip East Journal on Approximations adlı dergide tekrardan basılmıştır. H. Bohman, sözü edilen problemi sadece ayrık tipteki pozitif lineer operatörler için kanıtlamıştır. Bohman, kanıtında, $k=0, \overline{n}$ için, $u_{k,n}$, $[a, b]$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar ve $t_{k,n}$ aynı aralık üzerinde tanımlı bir dizi olmak üzere

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(t_{k,n}) u_{k,n}(x), \quad x \in [a, b]$$

şeklinde olan ayrık tipteki pozitif lineer operatörler dizilerinin $[a,b]$ üzerinde sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı hakkında oldukça kullanışlı bir kriter vermiştir.

P.P. Korovkin, ayrık tipte olan pozitif lineer operatörler için çözümünü genellemiştir. Ayrıca integral tipli operatörler için de aynı problemi çözmüş ve pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisini derinleştiren çalışmalar yapmıştır. Özetle, yukarıda adlarını andığımız Matematikçiler fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım teorisindeki uygulamaları üzerinde önemli araştırmalar yapmışlardır. Yani; kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan polinomları üreten operatörler için kolay uygulanabilir bir kriter vermişlerdir. *Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremi** olarak bilinen söz konusu teoreme göre, “ $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyonun, verilen pozitif lineer operatör dizileri altındaki görüntülerinin söz konusu sürekli fonksiyona düzgün yakınsayabilmesi için gerek ve yeter koşul $1, x, x^2$ fonksiyonlarının her birinin görüntülerinden oluşan dizilerin kendilerine düzgün yakınsamasıdır.” Bu kriter, sürekli fonksiyonlara pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin temelini oluşturmuştur. Bu temel çalışmadan sonra sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomlar veya daha genel olan tam fonksiyonlar dizisi oluşturmak için çok sayıda pozitif lineer operatörler inşa edilmiştir.

1957 yılında V.A. Baskakov [16], $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)|/(1+x^2) < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan

$$V_n(f;x) = (1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x} \right)^k f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,\infty)$$

ile tanımlı $\{V_n\}$ operatörler dizisini tanımlamıştır ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Bu operatörler *Baskakov operatörleri* olarak literatüre geçmiştir.

1960 yılında, W. Meyer König-K. Zeller [17] tarafından tanımlanan ve 1964 yılında E.W Cheney ve A. Sharma [18] tarafından aşağıda verilen forma çevrilen ve literatürde *Meyer-König-Zeller operatörleri* olarak bilinen operatörler, $f \in C[0,1)$ olmak üzere;

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1} f\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad 0 \leq x < 1,$$

* *Popoviciu-Bohman-Korovkin Teoremi daha yaygın olarak Korovkin Teoremi olarak bilindiğinden bundan sonra sadece Korovkin Teoremi olarak yazılacaktır.*

şeklinde tanımlanır.

$[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara yakınsayan

$$D_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t) dt,$$

ile tanımlı operatörler 1967 yılında J.L. Durrmeyer [19] tarafından verilmiştir.

1968 yılında D.D Stancu [20], Bernstein operatörünü şu şekilde genellemiştir:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Açıktır ki $\alpha = \beta = 0$ durumunda Bernstein polinomları elde edilir. Bu tipteki operatörlere *Bernstein-Stancu operatörleri* denir.

Korovkin teoremini $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlanan sürekli ve sınırsız fonksiyonlara genişletme problemi ilk olarak 1974-76 yılları arasında Z. Ditzian [21] ve A.D Gadjiyev [22,23] tarafından ele alınmıştır.

1980 yılında G. Bleimann, P.L. Butzer ve L. Hahn [24] sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar için,

$$H_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right), \quad x \in [0, \infty),$$

formunda pozitif lineer operatörlerin bir dizisini tanımlamışlardır. Bu operatörlere *Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri* adı verilir.

Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan ve yukarıda adı geçen temel operatörleri belli koşullar altında üretebilen genel pozitif lineer operatörler üzerinde de birçok çalışma yapılmıştır. Ayrıca bu operatörlerin yardımıyla yeni operatörler de oluşturulabilmektedir. V. A. Baskakov [16] 1957 yılında f ve φ_n , $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N},$$

şeklinde genel bir pozitif lineer operatör dizisi tanımlamıştır. φ_n fonksiyon dizilerinin uygun seçimiyle daha önce verilen operatörler üretilebilir. Örneğin; $x \in [0,1]$ için $\varphi_n(x) = (1-x)^n$ fonksiyon dizisinin seçimiyle Bernstein polinomları, $x \in [0,b]$ için $\varphi_n(x) = e^{-nx}$ fonksiyon dizisinin seçimiyle Szasz-Mirakyan operatörü üretilebilir. Bundan başka, diğer bir genel operatör dizisi 1970 yılında A.D. Gadjiev ve I.I. Ibragimov [25] tarafından

$$L_n(f;x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\partial^v K_n(x,t,u)}{\partial u^v} \Big|_{\substack{u=\alpha_n \psi_n(t) \\ t=0}} \frac{(-\alpha_n \psi_n(0))^v}{v!} f\left(\frac{v}{n^2 \psi_n(0)}\right), \quad x, t \in [0, A], \quad u \in (-\infty, \infty)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Operatörün yapısında bulunan K_n ve ψ_n fonksiyon dizilerinin uygun seçimiyle bilinen birçok pozitif lineer operatör dizisi elde edilebilir. Örneğin; $K_n(x,t,u) = \left(1 - \frac{ux}{1+t}\right)^n$, $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa Bernstein polinomu, $K_n(x,t,u) = e^{-n(t+ux)}$, $\alpha_n = n$ ve $\psi_n(0) = \frac{1}{n}$ olarak alınırsa Szasz-Mirakyan operatörü elde edilir.

Pozitif lineer operatör dizileri üzerinde yapılan farklı bir genelleme ise birden çok pozitif lineer operatörün bir araya gelmesiyle elde edilen

$$L_n(f;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{n,m}(x) A_{n,m}(f), \quad x \in I$$

formdaki genellemedir. Burada; I bir aralık olmak üzere $A_{n,m}$, $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler, $\varphi_{n,m}$ 'lar ise I üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlardır. $A_{n,m}$, $\varphi_{n,m}$ ve I aralığının uygun seçimiyle yeni pozitif lineer operatörler elde edilebilir. Örneğin; $I = [0,1]$ olmak

üzere; $\varphi_{n,m}(x) = \frac{e^{-nx} (nx)^{m-1}}{(m-1)!}$ ve $A_{n,m}(f)$ olarak Bernstein polinomu seçilirse

$$L_n(f;x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx} (nx)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m\alpha_n} \binom{m\alpha_n}{k} x^k (1-x)^{m\alpha_n-k} f\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right), \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlı Szasz-Mirakyan-Bernstein tipinde operatörler dizisi elde edilir [26].

Son yıllarda birçok yeni operatörün inşa edilmesinin yanında, incelenen bu tür operatörlerin farklı genelleştirmeleri üzerinde de çalışmalar yapılmaktadır. Bu önemli genelleştirmelerden bir tanesi de kökleri Euler'e kadar dayanan "kuantum analiz" veya "q-analiz" olarak bilinen alanda yapılan, "q" parametresine bağlı olan genellemedir. q-analizin teknikleri kullanılarak iyi bilinen pozitif lineer operatörlerin q-genellemeleri yapılmıştır. Bu genellemelerden ilki 1987 yılında A. Lupaş [27] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$L_{n,q}(f;x) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-1} (1-x+q^j x)} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N}, q > 0.$$

Bundan on yıl sonra Bernstein operatörünün q-tam sayılarına dayanan farklı bir genellemesi G.M. Phillips [28] tarafından

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N}, 0 < q < 1$$

şeklinde tanıtılmıştır. Literatürde, q-Bernstein polinomları olarak bilinen bu operatörler sadece $q \in (0,1)$ olduğunda pozitif iken, Lupaş'ın elde ettiği operatörler her $q > 0$ için pozitifdir. Lupaş operatörünün bu avantajına rağmen q-Bernstein polinomu çok daha fazla ilgi çekmiş ve çok geniş bir araştırmacı grubu tarafından çalışılmıştır. Lupaş ve Phillips'in Bernstein operatörünün q-benzerini inşa ettikleri teknikler baz alınarak geliştirilen pozitif lineer operatör dizilerinin q-benzerleri teorisi beraberinde çok sayıda operatörün q-benzerinin inşa edilmesine imkan vermiştir. Bunlardan bazıları: 2008 yılında A. Aral [29] tarafından Szasz-Mirakyan operatörünün benzeri $f \in C[0, \infty)$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$S_{n,q}(f;x) = E_q \left(-[n]_q \frac{x}{b_n} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q! (b_n)^k} f\left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\right)$$

biçiminde inşa edilmiştir. 2010 yılında Szasz-Mirakyan operatörünün farklı bir q-benzeri N. I. Mahmudov [30] tarafından, $f \in C[0, \infty)$ ve $q > 1$ için

$$F_{n,q}(f;x) = e_q\left(-[n]_q q^{-k}x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q! q^{k(k-1)/2}} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

biçiminde inşa edilmiştir. A. Aral ve V. Gupta [31] tarafından Baskakov operatörünün farklı iki q -versiyonu tanımlanmıştır. Bunlar: $q \in (0,1)$ için,

$$P_{n,q}(f;x) = \left(\frac{qx}{1+x}; q\right)_{n,k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{qx}{1+x}\right)^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n]_q}\right),$$

$$P_{n,q}^*(f;x) = \left(\frac{q^2x}{1+x}; q\right)_{n,k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{q^2x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{[k]_q}{q^{k+1} [n]_q}\right)$$

biçimindedir. Yine A. Aral ve V. Gupta [32] tarafından Baskakov operatörün başka bir q -versiyonu tanımlanmıştır: $q > 0$ için,

$$\mathcal{B}_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x;q)_{n+k}^{-1} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q}\right).$$

T. Trif [33], 2002 yılında Meyer-König-Zeller operatörünün q -benzerini $q \in (0,1)$ için;

$$M_{n,q}(f;x) = \prod_{s=0}^n (1-xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right), \quad 0 \leq x < 1$$

biçiminde tanımlamıştır. Bu genellemede $M_{n,q}(e_2;x)$ ifadesinin açık formülünün elde

edilememesinden dolayı 2006 yılında O. Doğru ve O. Duman [34] $f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right)$ yerinde $f\left(\frac{q^k [k]_q}{[n+k]_q}\right)$

şeklinde bir modifikasyon yapmışlardır. Bleimann-Butzer ve Hahn operatörlerinin q -genellemesi

2007 yılında A. Aral ve O. Doğru [35] tarafından $q \in (0,1)$ için;

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\prod_{s=0}^{n-1} (1+q^s x)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right), \quad x \in [0, \infty)$$

şeklinde yapılmıştır.

q -parametresine bağlı genel bir pozitif lineer operatörler dizisi ilk olarak 2009 yılında C. Radu [36] tarafından verilmiştir: $q \in (0, 1)$ ve \mathbb{R}^+ üzerinde sonsuz mertebeden sürekli q -türeve sahip reel değerli bir $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ fonksiyon dizisi için

- i) $\psi_n(0) = 1, n \in \mathbb{N}$,
- ii) $(-1)^k D_q^k \psi_n(x) \geq 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, x \geq 0$,
- iii) Her $(x, k) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ için bir $i_k, 0 \leq i_k \leq k$, pozitif tamsayısı vardır öyle ki

$$D_q^{k+1} \psi_n(x) = (-1)^{i_k+1} D_q^{k-i_k} \psi_n(q^{i_k+1} x) \beta_{n, k, i_k, q}(x), \text{ burada } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n, k, i_k, q}(0)}{[n]_q^{i_k+1} q^{k-i_k}} = 1.$$

koşulları sağlandığında, $f \in C_2(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere

$$T_{n, q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2} D_q^k \psi_n(x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}}\right), \quad x \geq 0$$

şeklinde inşa edilmiştir. Bu son ifadede $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}$ için $\psi_n(x) = (1+q^{n-1}x)_q^{-n}$ olarak düşünülürse klasik Baskakov operatörünün başka bir q -versiyonu

$$V_{n, q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} (qx)^k \frac{1}{(1+qx)_q^{n+k}} f\left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q}\right)$$

şeklinde elde edilir. Dikkat edelim ki yukarıda sözü edilen q -genellemelerinin tümünde $q \rightarrow 1$ iken klasik operatörler elde edilir. Elbette ki yukarıda adı geçen pozitif lineer operatör dizileri dışında bu tezde değinilmeyen birçok pozitif lineer operatör ve onların çeşitli genellemeleri

bulunmaktadır. Pozitif lineer operatörleri ve genellemelerini geçmişten günümüze kadar ele alan birçok kitap, tez ve makaleye [37-48] ve bunların içinde yer alan kaynaklardan ulaşılabilir.

Bu tezde, pozitif lineer operatörler ve onların genellemeleri ile ilgili yukarıda adı geçen operatörlerin bir sınıfının tek bir operatör tarafından elde edilip, bu sınıfın yaklaşım özelliklerinin belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu amaç doğrultusunda elde edilen genel operatör aşağıda verilmiştir: $q > 0$ ve $I_A = [0, A]$ şeklinde bir aralık olsun. $\{\varphi_{n,q}\}_{n=1}^{\infty}$, $I_A \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon dizisi için

i) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I_A$ için, $\varphi_{n,q}(x, 0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x, 1) = 1$,

ii) Her $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ için, $\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0}$ var ve x değişkenine göre süreklidir,

iii) Her $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x, u \geq 0$ için, $\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \geq 0$

koşulları sağlandığında $f \in B(I_A)$ için

$$\mathcal{L}_{n,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}}\right)$$

ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörleri $B(I_A)$ üzerinde pozitif ve lineerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, matematiksel analizin yaklaşım teorisinde sıkça kullanılan bazı temel konu ve kavramların yanı sıra yaklaşımın temel teoremlerine, pozitif lineer operatörlerin tanımına ve sağladığı temel özelliklere yer verilecektir.

3.1 Temel Kavramlar

$\{f_n\}$, D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $x \in D$ için $\{f_n(x)\}$ reel sayılar dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi D üzerinde *noktasal yakınsaktır* denir. Bir başka deyişle, her $x \in D$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(x, \varepsilon)$ doğal sayısı,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (n \geq N) \quad (3.1)$$

olacak şekilde varsa $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna D üzerinde noktasal yakınsaktır. Bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ biçiminde yazılır. (3.1)'i eş zamanlı olarak bütün $x \in D$ sayıları için sağlayan bir N bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için (3.1)'i eş zamanlı olarak her $x \in D$ için sağlayan (sadece ε sayısına bağlı) bir N sayısı bulmak mümkün ise $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna *düzenli yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{D} f$ ile gösterilir. $f_n \xrightarrow{D} f$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Reel sayı serisinin yakınsaklığının, onun kısmî toplamlar dizisinin yakınsaklığı cinsinden tanımlandığı gibi fonksiyon serilerinin yakınsaklığı da kendisinin kısmî toplamlar dizisinin yakınsaklığı cinsinden tanımlanır. Buna göre, D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi için, eğer $f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ile tanımlı $\{f_n\}$ dizisi bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f$ ya da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ ($x \in D$) şeklinde yazılır. Dahası, eğer $\{f_n\}$ dizisi f' 'e D üzerinde düzenli yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi f fonksiyonuna D üzerinde düzenli yakınsaktır denir.

Taylor Formülü: $x_0 \in (a, b)$ noktasında n . mertebeden türevlenebilir bir $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon_n(x, x_0)$$

formülü doğrudur; burada $\varepsilon_n(\cdot, x_0)$ sürekli ve $\varepsilon_n(x_0, x_0) = 0$. Eğer, $x_0 = 0$ alınırsa, yukarıdaki ifadeye *Maclaurin formülü* denir [49, 50].

3.2. Bazı Fonksiyon Uzayları

X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

- i) Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$,
- ii) Her $x \in X$ ve $\alpha \in K$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (3.2)
- iii) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir *normlu uzay* adı verilir [51].

M boştan farklı bir küme olsun. $\mathcal{F}(M, K) = \{f : f : M \rightarrow K \text{ bir fonksiyon}\}$ M üzerinde tanımlı K -değerli tüm fonksiyonların sınıfını gösterebiliriz. $f, g \in \mathcal{F}(M, K)$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere her $x \in M$ için,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)),$$

ile tanımlı toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre $\mathcal{F}(M, K)$ ailesi K cismi üzerinde bir lineer uzaydır. $K = \mathbb{R}$ ve M kümesini de \mathbb{R} 'nin bir alt kümesi olarak seçilirse $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ M üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı elde edilir.

Sürekli Fonksiyonlar Uzayı: I bir aralık ve f bu aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $M > 0$ olmak üzere her $x \in I$ için $|f(x)| \leq M$ ise f I üzerinde sınırlıdır denir. I üzerinde sınırlı tüm reel değerli fonksiyonların sınıfı $B(I)$ ile gösterilir:

$$B(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \exists M > 0; \forall x \in I, |f(x)| \leq M\}.$$

I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı ise $C(I)$ ile gösterilir. Açık ki $B(I)$ ve $C(I)$ sınıfları $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ uzayının alt uzaylarıdır. $B(I)$ üzerinde

$$\|f\|_{B(I)} := \sup_{x \in I} |f(x)| \tag{3.3}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu (3.2) koşullarını sağladığından bu uzay üzerinde bir normdur. (3.3) ile tanımlı norma *düzgün norm* denir. r . mertebeden türevi $C(I)$ sınıfından olan fonksiyonların uzayı $C^r(I)$ ile gösterilir. Özel olarak $C^0(I) := C(I)$. $I = [a, b]$ ise $C[a, b]$ gösterimi kullanılır. Her $r \in \mathbb{N}_0$ için $C^r(I)$ uzayının önemli bir alt uzayı da Polinomlar uzayıdır: $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ olmak üzere $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ olarak tanımlı fonksiyona n dereceli polinom denir. Derecesi $\leq n$ olan tüm polinomların kümesi \mathbb{P}_n ile gösterilir. Açık ki \mathbb{P}_n , $C(I)$ uzayının bir alt uzayıdır.

Süreklilik Modülü: $f \in C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $\delta > 0$ sayısı için

$$\omega(f; \delta) := \sup_{\substack{x, x+h \in [a, b] \\ 0 \leq h \leq \delta}} \{|f(x+h) - f(x)|\}, \quad \omega_2(f; \delta) := \sup_{\substack{x, x+h \in [a, b] \\ 0 \leq h \leq \delta}} \{|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|\}$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ve $\omega_2(f; \delta)$ ifadelerine, sırasıyla, f fonksiyonunun δ adımlı birinci ve ikinci mertebeden süreklilik modülü denir. Birinci süreklilik mertebeden modülünün sık kullanılan bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- i) $\omega(f; \delta) \geq 0$ (pozitiflik);
- ii) $\delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ (monotonluk);
- iii) $\omega(f; \delta_1 + \delta_2) \leq \omega(f; \delta_1) + \omega(f; \delta_2)$ (yarı toplamsallık);
- iv) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$;
- v) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$;
- vi) Her $x, t \in [a, b]$ için $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$;
- vii) Her $x, t \in [a, b]$ ve $\delta > 0$ için $|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta}|t - x|\right)\omega(f; \delta)$.

Lipschitz Sınıfı: f $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon $M > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Her $x, t \in [a, b]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M|t - x|^\alpha$$

koşulu sağlanırsa f Lipschitz sınıfındandır denir ve $f \in Lip_M \alpha$ ile gösterilir. Ayrıca $f \in Lip_M \alpha$ olması için gerek ve yeter koşulun $\omega(f; \delta) \leq M\delta^\alpha$ olduğu tanımdan kolayca görülür [52, 53].

$f, [0, \infty)$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve ω aşağıdaki koşulları sağlayan süreklilik modülü tipinde bir fonksiyon olsun:

- i) $\omega, [0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan δ ya göre artan bir fonksiyon,
- ii) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$,
- iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) = 0$.

Her $x, t \in [0, \infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega\left(\left|\frac{t}{1+t} - \frac{x}{1+x}\right|\right)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in H_\omega[0, \infty)$ sınıfındadır denir. Her $f \in H_\omega[0, \infty)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlıdır. Böylece $H_\omega[0, \infty) \subset C_B[0, \infty)$ olduğu görülür. Örneğin; $0 < \alpha \leq 1$ için $\omega(t) = Mt^\alpha$ olarak seçilirse

$$|f(t) - f(x)| \leq M \frac{|t-x|^\alpha}{(1+t)^\alpha (1+x)^\alpha}$$

elde edilir. Dolayısıyla $H_\omega[0, \infty) \subset Lip_M \alpha$ olduğu görülür [54].

3.3. Yaklaşım Kuramı ve Temel Teoremleri

Bu bölümde, verilen sürekli fonksiyona istenilen yakınlıkta polinomların varlığı hakkındaki Weierstrass teoremi, Bernstein teoremi ve Cebirsel polinomların yaklaşım hızı ile ilgili sonuçlara yer verilecektir.

3.3.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

1885 yılında K. Weierstrass, keyfi bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona keyfi yakınlıkta bir cebirsel polinomun varlığını aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

3.3.1.1. Teorem (Weierstrass Yaklaşım Teoremi) [2]. Her bir $f \in C[a, b]$ fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|f - P\|_{C[a, b]} < \varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.

Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen ve literatürde *Weierstrass Yaklaşım Teoremi* olarak bilinen teoremin birçok ispatı vardır. Bu ispatlar içerisinde önemli

olanlardan bir tanesi 1912 yılında S.N. Bernstein tarafından verilmiştir. S.N. Bernstein, $[0,1]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile tanımlı polinomları tanımlamıştır. Bu polinomlara n . Bernstein polinomu, B_n operatörüne de n . Bernstein operatörü denir. Sınırlı fonksiyonlar kümesinden polinomlar kümesine giden B_n operatörü lineerdir, yani her f, g fonksiyonu ve her α, β reel sayıları için

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca, eğer $f \leq g$ ise, $B_n(f; x) \leq B_n(g; x)$ eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, tanımdan kolayca görüleceği üzere, $|B_n(f; x)| \leq B_n(|f|; x)$ olur.

S.N. Bernstein, bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini, aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

3.3.1.2. Teorem (Bernstein) [3]. Bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu verildiğinde, $\{B_n(f; \cdot)\}$ Bernstein polinomlar dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.

3.3.2. Cebirsel Polinomların Yaklaşım Hızı

Cebirsel polinomların sürekli fonksiyonlara yaklaşımının varlığı dışında hangi hızda yaklaştığının bulunması da yaklaşım kuramının önemli problemlerindedir. Bu konuyla ilgili ilk çalışmalar D. Jackson [55] tarafından yirminci yüzyılın başlarında çalışılmıştır. İlk olarak yaklaşım hızını ölçecek bazı kavramlar verilecektir.

X bir normlu uzay olmak üzere $x, y \in X$ noktaları arasındaki uzaklık $\|x - y\|_X$ ile tanımlanır. $Y \subset X$ boş olmayan bir alt küme olsun. Bir $f \in X$ verildiğinde $E(f; Y) := \inf_{p \in Y} \|f - p\|_X$ sayısına f elamanının Y kümesindeki en iyi yaklaşım sayısı denir. Açıktır ki, eğer $f \in Y$ ise en iyi yaklaşım sıfırdır. Eğer bir $p^* \in Y$ için $\inf_{p \in Y} \|f - p\|_X = \|f - p^*\|_X$ oluyorsa p^* elemanına f elemanının Y kümesine en iyi yaklaşım elemanı denir. Aynı kavram $C[a, b]$ uzayındaki bir f fonksiyonu için bu fonksiyonun \mathbb{P}_n derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlar uzayındaki en iyi

yaklaşım sayısı $E_n(f) := \inf_{P \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$ ile tanımlanır. D. Jackson, 1912 yılında, kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonların derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısının süreklilik modülü cinsinden belirlenmesine dair sonuçlar elde etmiştir:

3.3.2.1. Teorem [55]. *Eğer $f \in C[-1,1]$ ise $E_n(f) \leq 6\omega(f; 1/n)$.*

3.3.2.2. Sonuç [55]. *Eğer f fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında $Lip_M \alpha$ sınıfına ait ise $E_n(f) \leq 6 \frac{M}{n^\alpha}$.*

3.4. Pozitif Lineer Operatörler

M ve N boştan farklı kümeler olmak üzere, $X \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$ 'nin, ve $Y \mathcal{F}(N, \mathbb{R})$ 'nin birer alt uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ eşitliğini sağlayan $L: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna bir *lineer operatör* denir. Bir lineer operatör tanım uzayının sıfır ögesini görüntü uzayının sıfır ögesine götürür. Bir lineer uzaydan cisme tanımlı herhangi bir fonksiyona *fonsiyonel* denir. Eğer bu fonksiyon lineer ise *lineer fonsiyonel* adını alır. Her pozitif $f \in X$ fonksiyonu için $L(f)$ pozitif fonksiyon ise L operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem pozitif hem de lineer olan operatöre *pozitif lineer operatör* adı verilir.

Her $f, g \in X$ için $f \leq g$ olduğunda, $L(f) \leq L(g)$ oluyorsa L operatörüne *monotondur* denir. Açık ki pozitif lineer operatörler aynı zamanda monotondurlar. Öte yandan, $L: X \rightarrow Y$ pozitif lineer operatör ve $f, |f| \in X$ için $|L(f)| \leq L(|f|)$ eşitsizliği doğrudur [15].

$L: X \rightarrow Y$ operatörü verilsin. Her $f \in X$ için $\|L(f)\|_Y \leq C \|f\|_X$ eşitsizliğini sağlayan bir C sabiti varsa, L operatörüne *sınırlı operatör* denir. Bu eşitsizliği sağlayan C sabitlerinin infimumuna L operatörünün *normu* denir ve $\|L\|$ ile gösterilir [51]. Öte yandan, $L: B(I) \rightarrow B(I)$ pozitif lineer operatör ise o zaman L sınırlıdır ve normu $\|L\| = \|L(1)\|_{B(I)}$ eşitliği ile hesaplanır.

Pozitif lineer operatör ile yaklaşım kuramında sık kullanılan eşitsizliklerden bir tanesi aşağıda verilmiştir: $f, g \in B(I)$ olmak üzere

$$|L(f \cdot g)| \leq \sqrt{L(f^2)} \cdot \sqrt{L(g^2)}.$$

Bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* denir. Bu eşitsizliğin genel hali de doğrudur: $L: B(I) \rightarrow B(I)$ pozitif lineer operatör ve $p, q > 1$ reel sayılar öyle ki $1/p + 1/q = 1$ olsun. O zaman her $f, g \in B(I)$ için

$$L(|f \cdot g|) \leq \left(L(|f|^p) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(L(|g|^q) \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe *pozitif lineer operatörler için Hölder eşitsizliği* adı verilir. Özel olarak Hölder eşitsizliğinde $p=q=2$ alınrsa yukarıda verilen *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* elde edilir [41].

Pozitif lineer operatörlerin n -inci mertebeden momentlerin hesaplanması bu tip operatörlerin yaklaşım özelliklerinin belirlenmesinde büyük bir önem taşır. $L:C[a,b] \rightarrow C[a,b]$ bir pozitif lineer operatör olsun. $i \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $e_i(x) := x^i$ ve bu operatör için n -inci mertebeden moment $n \geq 0$ için $M_n(x) := L((e_1 - x)^n; x)$, $x \in [a,b]$ olarak tanımlanır. $n \geq 1$ tek ise n -inci mutlak moment $\mathcal{M}_n(x) := L(|e_1 - x|^n; x)$, $x \in [a,b]$ biçiminde tanımlanırlar. Ayrıca ilerde göreceğimiz birinci mutlak moment $\mathcal{M}_1(x)$ ve ikinci mertebeden moment $M_2(x)$ pozitif lineer operatörlerin yaklaşım hızının hesaplanmasında önemli rolleri vardır. Dahası Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak $\mathcal{M}_1(x) \leq \sqrt{L(e_0^2; x)} \cdot \sqrt{M_2(x)}$ eşitsizliği ince hesaplamalar için çok kullanışlı değildir. Bunun için aşağıdaki önermede verilen alternatif yollar izlenebilir.

3.4.1. Önerme [41]. $L: X \rightarrow Y$ pozitif lineer operatör ve $p, q > 1$ reel sayılar öyle ki $1/p + 1/q = 1$ olsun. Her $f, g \in X$ ve $n = n_1 + n_2$ olan $n, n_1, n_2 \geq 0$ sayıları için

$$\mathcal{M}_n(x) \leq \left(\mathcal{M}_{n_1, p}(x) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\mathcal{M}_{n_2, q}(x) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Eğer $n=1$, $n = n_1 + n_2 = 0 + 1$, $p=q=2$ ise $\mathcal{M}_1(x) \leq \sqrt{L(e_0^2; x)} \cdot \sqrt{M_2(x)}$ eşitsizliği elde edilir.

3.4.2. Önerme [41]. $L:C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ pozitif lineer operatör, $L(e_0) = e_0$ ve $1 \leq s < r$ olsun. 0 zaman

$$\left(\mathcal{M}_s(x) \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\mathcal{M}_r(x) \right)^{\frac{1}{r}}, \quad x \in [0,1].$$

Ayrıca

$$\mathcal{M}_1(x) \leq (M_2(x))^{\frac{1}{2}} \leq (\mathcal{M}_3(x))^{\frac{1}{3}} \leq (M_4(x))^{\frac{1}{4}} \leq \dots$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Aşağıdaki önerme lineer operatörlerin yüksek mertebeden momentlerin hesaplanmasında kullanılan bir rekürans formülüdür.

3.4.3. Önerme [41]. L lineer operatör ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$M_k(x) = L(e_k; x) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^{k-j} M_j(x).$$

3.4.4. Sonuç [41]. L lineer operatör ve $L(e_i) = e_i$, $i=0,1$ olsun. O halde üçüncü ve dördüncü mertebeden momentler aşağıdaki gibidir.

$$M_3(x) = L(e_3; x) - x^3 - 3xM_2(x);$$

$$M_4(x) = L(e_4; x) - x^4 - 4xM_3(x) - 6x^2M_2(x)$$

3.5. Pozitif Lineer Operatörler ile Yaklaşım

3.5.1. Korovkin Teoremi

1951 yılında H. Bohman, her $n \in \mathbb{N}$ ve $k=0,1,2,\dots,n$ için $x, \xi_{n,k} \in [0,1]$ ve $p_{n,k} \geq 0$ olmak üzere

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(\xi_{n,k}) p_{n,k}(x)$$

ile tanımlı $\{L_n\}$ dizisi

$$L_n(e_i) \xrightarrow{[0,1]} e_i, \quad i=0,1,2$$

koşullarını sağladığında, $\{L_n(f)\}$ $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli olan f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. H. Bohman'ın ele aldığı bu tipteki operatörler, açıktır ki, pozitif ve lineerdir ve f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır. 1953 yılında

P.P. Korovkin aynı problemi daha geniş operatörler sınıfında, b noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olan $f \in C[a, b]$ fonksiyonları için incelemiştir.

3.5.1.1. Teorem (Korovkin) [15]. $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi verilsin. $f \in C[a, b]$ b noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel ekseninde sınırlı olmak üzere

$$L_n(f) \xrightarrow{[a,b]} f \quad \Leftrightarrow \quad L_n(e_i) \xrightarrow{[a,b]} e_i, \quad i=0,1,2.$$

3.5.1.2. Örnek (Bernstein Polinomları) [15]. $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için n . Bernstein polinomu (operatörü)

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörlerin oluşturulma yapısı binom açılımına dayanmaktadır. x, y pozitif sayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere binom açılımı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçimindedir. Bu açılımda $x \in [0,1]$ olmak üzere $y=1-x$ alınırsa;

$$1 = (x+1-x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda, verilen sürekli fonksiyona bağlı Bernstein polinomlar dizisinin bu fonksiyona düzgün yakınsadığı, bir başka ifadeyle Bernstein Teoreminin (Teorem 3.3.1.2) ispatı Korovkin Teoremi kullanılarak yapılacaktır.

Bernstein operatörleri lineerdir: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_n(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x).$$

Bernstein operatörleri pozitifdir: Her $x \in [0, 1]$, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $k = 0, 1, \dots, n$ için $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan her $f \geq 0$ için $B_n(f; x) \geq 0$ sağlanır.

Bernstein operatörleri Korovkin teoreminin koşullarını sağlar:

$$B_n(e_0; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

$$\begin{aligned} B_n(e_1; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} = x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} = x(1-x+x)^{n-1} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(e_2; x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 = x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \frac{k-1}{n} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-2)-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\ &= x^2 \frac{n-1}{n} (1-x+x)^{n-2} + \frac{x}{n} (1-x+x)^{n-1} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

Bu sonuçlar toparlanırsa

$$B_n(e_0; x) = 1, \quad B_n(e_1; x) = x, \quad B_n(e_2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} \quad (3.5)$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(e_i; x) - e_i(x)| = 0, \quad i = 0, 1$$

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(e_2; x) - e_2(x)| = \frac{1}{4n}$$

dolayısıyla Bernstein operatörler dizisi Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı görülür. O halde Korovkin Teoremi gereğince her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\| = 0$$

olur. Bir başka deyişle, $\{B_n(f)\}$ dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla Bernstein Teoreminin sonucu olarak da Weierstrass Teoreminin farklı bir ispatı elde edilmiş olur.

Bernstein operatörlerinin merkezi momentleri: (3.5) eşitliklerinden her $x \in [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(e_1 - x; x) = 0, \quad B_n((e_1 - x)^2; x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir. Bernstein operatörlerinin tanımı yardımıyla

$$B_n(e_3; x) = x^3 + \frac{3x^2(1-x)}{n} + \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2},$$

$$B_n(e_4; x) = x^4 + \frac{6x^3(1-x)}{n} + \frac{x^2(1-x)(7-11x)}{n^2} + \frac{x(1-x)(6x^2-6x+1)}{n^3}$$

eşitlikleri elde edilebilir. Bunlar yardımıyla daha yüksek mertebeden momentler

$$B_n((e_1 - x)^3; x) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2} \quad \text{ve} \quad B_n((e_1 - x)^4; x) = \frac{x(1-x)[1+3(n-2x(1-x))]}{n^3}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Yukarıda verilen Korovkin teoremi, G. Bleimann, P.L. Butzer ve L. Hahn [23] tarafından

$$H_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right), \quad x \in [0, \infty),$$

formunda tanımlanan operatörler için geçerli değildir. Bundan dolayı bu operatör dizilerinin bir f fonksiyonu için düzgün yakınsaklığı farklı bir test fonksiyonlar ailesi için elde edilmiştir. H_ω

uzayında tanımlı pozitif lineer operatör dizileri için $e_r^*(t) = \left(\frac{t}{1+t}\right)^r$, $r = 0, 1, 2$ test fonksiyonları

kullanılarak Korovkin teoremi, pozitif yarı eksen üzerinde sürekli bir f fonksiyonu için $\{H_n(f)\}$ dizisinin düzgün yakınsaması A.D Gadjiyev ve Ö. Çakar [54] tarafından ispatlanmıştır. Bu teoreme göre; A_n , $H_\omega[0, \infty)$ dan $C_B[0, \infty)$ ya tanımlı operatörler olmak üzere her $r = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(e_r^*) - e_r^*\|_{C_B} = 0$$

ise her $f \in H_\omega[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f\|_{C_B} = 0$$

sağlanır. Yukarıda tanımlanan Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri bu teoremi sağlar.

3.5.2. Pozitif Lineer Operatörlerin Yaklaşım Hızı

$[0, 1]$ aralığında $f \in Lip_1\alpha$ sınıfına ait olan $f(x) = |x - 1/2|^\alpha$ fonksiyonunun Bernstein polinomları yardımıyla yaklaşım hızı, Sonuç 3.3.2.2'de verildiği gibi $1/n^\alpha$ değildir. Bu hız $1/(n^{\alpha/2})$ şeklinde elde edilebilir. Dolayısıyla Sonuç 3.3.2.2 Bernstein polinomlar yardımıyla ispatlanamaz [15].

Bu kısımda, verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı hakkında süreklilik modülünün yardımıyla genel teoremlerin yanında, Bernstein polinomlarının verilen fonksiyona yaklaşım hızına da yer verilecektir. Sadece birinci mertebeden süreklilik modülünü kullanarak yapılan ilk değerlendirme $L(e_0) = e_0$ koşulu altında R. Mamedov [56] tarafından verilmiştir.

3.5.2.1. Teorem [56]. Eğer $f \in C[a, b]$ ise, o zaman her $x \in [a, b]$ ve her $\delta > 0$ için

$$|L(f;x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L(e_0;x) - 1| + \left(L(e_0;x) + \frac{1}{\delta} \left(L(e_0;x) \cdot L((e_1-x)^2;x) \right)^{1/2} \right) \omega(f;\delta)$$

Daha sonra O. Shisha ve B. Mond [57] daha genel sonuçlar elde etmişlerdir. Lineer fonksiyonların ikinci mertebeden süreklilik modülü sıfır olduğundan bu süreklilik modülü çeşidi yardımıyla fonksiyonların yaklaşım mertebesini ölçmek daha avantajlıdır. İkinci süreklilik modülü yardımıyla ilk değerlendirmeyi H. Esser [58] 1976 yılında yapmıştır. Daha sonra, 1984 yılında H. Gonska [59] H. Esser'in sonuçlarını iyileştirmiştir. 1995 yılında ise R. Paltenea [43] bu değerlendirmeleri oldukça titiz yapılmasına olanak sağlayan aşağıdaki teoremi vermiştir.

3.5.2.2. Teorem [43]. Her $f \in C[a, b]$ için her $x \in [a, b]$ ve $0 < \delta \leq 1/2(b-a)$ ise

$$|L(f;x) - f(x)| \leq |f(x)| \cdot |L(e_0;x) - 1| + |L(e_1-x;x)| \cdot \frac{1}{\delta} \omega(f;\delta) + \left(L(e_0;x) + \frac{1}{2\delta^2} L((e_1-x)^2;x) \right) \omega_2(f;\delta).$$

Teoremdeki $0 < \delta \leq 1/2(b-a)$ koşulu lineer fonksiyonların pozitif lineer operatörler altında invariant (değişmez) olmasını sağlamak için konmuştur.

3.5.2.3. Sonuç. $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

E. Voronovskaya 1932 yılında, S.N. Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomları için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

3.5.2.4. Teorem (Voronovskaya) [6]. f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden sürekli türevelere sahip ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [B_n(f;x) - f(x)] = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

3.6. q -Analizde Temel Kavramlar

q -analiz'in temelleri Euler'e kadar dayanmaktadır. Takip eden zamanlarda bu alanda dikkate değer sonuçlar 1908 yılında F.H. Jackson [60] tarafından verilmiştir. Jackson q -fonksiyonları tanımlamıştır. Ayrıca daha fazlasını sistematik biçimde inceleyen ilk kişidir. Günümüzde matematik, mekanik ve fizik gibi çeşitli alanlarda uygulamalarından dolayı q -analiz (limitsiz analiz), alanında önemli bir faaliyet artışı söz konusudur. Bu bölümde q -analiz'in bazı önemli tanımları ve notasyonlarından bahsedilecektir. q -tamsayılar, q -faktöriyel, q -binom katsayısı, q -türev ve son olarak q -analizin ana hatları verilecektir. Aşağıdaki gösterim, tanım ve teoremlere dair daha kapsamlı bilgiler için [45], [48] ve [61] kaynaklarına bakılabilir. $q > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $[n]_q$ ile gösterilen q -tamsayılar

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. λ herhangi bir reel sayı olmak üzere $[\lambda]_q$ ile gösterilen q -reel sayıların tanımı için de yine yukardaki tanım kullanılır. $n \in \mathbb{N}$ için $[n]_q!$ ile gösterilen q -faktöriyel

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \cdots [1]_q, & n = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $n, k \in \mathbb{N}$ için q -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

biçiminde tanımlanır. f (a, b) aralığında tanımlı bir fonksiyon ve h pozitif reel sayı olmak üzere; $r, j \in \mathbb{N}_0$ için q -ileri farklar

$$\nabla_q^0 f(x_j) := f(x_j), \quad \nabla_q^{r+1} f(x_j) := q^r \nabla_q^r f(x_{j+1}) - \nabla_q^r f(x_j)$$

olarak tanımlanmıştır. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $(a+b)^n$ 'nin q -benzeri

$$(a \oplus b)_q^n := \prod_{s=0}^{n-1} (a + q^s b), \quad (a \oplus b)_q^0 = 1, \quad (a \ominus b)_q^n := (a \oplus (-b))_q^n.$$

şeklinde tanımlanırken $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(a + b + c)^n$ 'nin q -benzeri

$$(a \boxplus b \boxplus c)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (a \oplus b)_q^{n-k} c^k \quad (3.6)$$

olarak tanımlanır. $a = 0$ ise

$$(0 \boxplus b \boxplus c)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (0 \oplus b)_q^{n-k} c^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\prod_{s=0}^{n-k-1} q^s b \right) c^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(n-k-1)/2} b^{n-k} c^k.$$

$b = 0$ ise [45, s. 77] deki 303. denklem elde edilir.

$$(a \boxplus 0 \boxplus c)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (a \oplus 0)_q^{n-k} c^k = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^{n-k} c^k$$

$c = 0$ ise $(a \boxplus b \boxplus 0)_q^n = (a \oplus b)_q^n$ elde edilir.

Verilmiş bir f fonksiyonun q -türevi $D_q f$ ile gösterilir ve

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, \quad x \neq 0$$

kuralı ile hesaplanır. Ayrıca q -türev "Jackson türevi" olarak da bilinir. Eğer $f'(0)$ varsa

$D_q f(0) = f'(0)$. Ayrıca, eğer f türevlenebilir ise

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = f'(x)$$

elde edilir, böylece klasik türev ile q -türev çakışır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Yani f fonksiyonun q -türevi var ise klasik türevinin olması gerekmez. Örneğin, $q \in (0,1)$ için

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunun sadece $x=0$ da klasik türevi var iken, q -türevi tüm reel ekseninde vardır. Bu da q -türevin klasik türevden daha genel olduğunu gösterir. Ayrıca $D_q^0 f := f$ ve $k \geq 1$ için k . mertebeden q -türev ise $D_q^k f = D_q(D_q^{k-1} f)$ şeklinde tanımlanmıştır. q -türev tanımına benzer olarak

iki değişkenli bir f fonksiyonunun x 'e göre q -kısmi türevi $\frac{\partial_q f(x, y)}{\partial_q x}$ ile gösterilir ve

$$\frac{\partial_q f(x, y)}{\partial_q x} = \frac{f(qx, y) - f(x, y)}{(q-1)x}, \quad x \neq 0$$

ile hesaplanır. y 'ye göre q -kısmi türev benzer şekilde tanımlanır. Yukarıdaki tanımdan açıktır ki q -türev lineerdir. Yani, a ve b reel sayıları için

$$D_q \{af(x) + bg(x)\} = aD_q f(x) + bD_q g(x).$$

Yine yukarıdaki tanımdan iki fonksiyonun çarpımının q -türevi, q -Leibniz kuralı ve iki fonksiyonun bölümünün q -türevi, sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$D_q \{f(x)g(x)\} = D_q f(x)g(x) + f(qx)D_q g(x).$$

$$D_q^{(k)}(fg)(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q D_q^{(k)} f(q^{n-k}x) D_q^{(n-k)} g(x)$$

$$D_q \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{D_q f(x)g(qx) - f(qx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}, \quad g(x) \neq 0$$

Örneğin, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = x^n$ fonksiyonunun q -türevi,

$$D_q f(x) = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n - 1)x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n]_q x^{n-1}$$

biçiminde elde edilir. Yine yukarıdaki tanımdan kolayca görülür ki $n \geq 1$ için

$$D_q (1 \oplus x)_q^n = [n]_q (1 \oplus qx)_q^{n-1}; \quad D_q \left\{ \frac{1}{(1 \oplus x)_q^n} \right\} = -\frac{[n]_q}{(1 \oplus x)_q^{n+1}}.$$

Genel olarak; $n \geq 1$ ve $a, b, r, s \in \mathbb{R}$ için

$$D_q (a \oplus bx)_q^n = [n]_q b (a \oplus qbx)_q^{n-1};$$

$$D_q (ax \oplus b)_q^n = [n]_q a (ax \oplus b)_q^{n-1};$$

$$D_q \left\{ \frac{(1 \oplus ax)_q^r}{(1 \oplus bx)_q^s} \right\} = [r]_q a \frac{(1 \oplus aqx)_q^{r-1}}{(1 \oplus bqx)_q^s} - [s]_q b \frac{(1 \oplus ax)_q^r}{(1 \oplus bx)_q^{s+1}}.$$

Şimdi de Taylor formülünün q -benzerini tanımlayalım. f , (a, b) aralığında sürekli fonksiyon ve $c \in [a, b]$ ise q -Taylor formülü aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_q^k f)(c) \frac{(x \ominus c)_q^k}{[k]_q!}, \quad x \in (a, b).$$

Örneğin $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = (x \oplus a)_q^n$ fonksiyonunun $x=0$ noktasının komşuluğundaki q -Taylor formülünü bulalım. Gerçekten, f fonksiyonunun birinci q -türevi $D_q f(x) = [n]_q (x \oplus a)_q^{n-1}$ ve ikinci q -türevi $D_q^2 f(x) = [n]_q [n-1]_q (x \oplus a)_q^{n-2}$ olduğundan $k \leq n$ için tümevarım yardımıyla $D_q^k f(x) = [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \cdots [n-k+1]_q (x \oplus a)_q^{n-k}$ olduğu kolayca elde edilir ve burada $x=0$ alınırsa $(D_q^k f)(0) = [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \cdots [n-k+1]_q (a)_q^{n-k}$ bulunur.

$(a)_q^{n-k} = aqa \cdots q^{n-k-1}a = a^{n-k}q^{(n-k)(n-k-1)/2}$ ifadesi yukarıda yerine yazılır gerekli düzenlemeler yapılırsa $(D_q^k f)(0) = [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \cdots [n-k+1]_q a^{n-k} q^{(n-k)(n-k-1)/2}$ elde edilir. Sonuç olarak $f(x) = (x \oplus a)_q^n$ 'in q -Taylor formülü

$$(x \oplus a)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(n-k-1)/2} a^{n-k} x^k$$

gibi olacaktır. Bu son ifadede k yerine $n-k$ yazılır ve q -binom katsayıların tanımından yararlanılırsa $f(x) = (x \oplus a)_q^n$ 'in q -Taylor formülü

$$(x \oplus a)_q^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} a^k x^{n-k}$$

biçiminde elde edilir.

3.6.1 Bazı Pozitif Lineer Operatörlerin q -Analizdeki Benzerleri

Operatörlerin q -benzerleri yapılırken dikkat edilmesi gereken önemli noktalardan bir tanesi, $q=1$ olması durumunda bu operatörlerin klasik hallerinin elde edilmesidir. Ayrıca operatörlerin q -benzerlerinin yapılmasındaki asıl amaç q 'nun seçimiyle daha iyi bir yaklaşım hızı elde etmektir. Operatörlerin q -benzerlerini yapan ilk araştırmacılar Lupaş ve Phillips'tir. Her ikisi de Bernstein operatörünün birbirinden farklı q -benzerini inşa etmişlerdir. Daha sonra diğer araştırmacılar benzer teknikler kullanarak diğer pozitif lineer operatör dizilerinin q -benzerlerini inşa etmişlerdir.

Operatörlerin yaklaşım özelliklerini elde etmek için genellikle merkezi momentler kullanılır. Örneğin, ilk üç moment operatörlerin yaklaşım özelliklerinin belirlenmesinde önemli bir yere sahiptir. Fakat farklı tipteki pozitif lineer operatörlerin merkezi momentlerinin açık formüllerinin hesaplanmasında farklı tipte test fonksiyonları kullanılır. Özel olarak q -Bernstein operatörü için t^r , $r=0,1,2$ test fonksiyonları uygun iken, q -Bleimann-Butzer-Hahn operatörü

için $\left(\frac{t}{1+t}\right)^r$, $r=0,1,2$ test fonksiyonları ve q -Meyer-König ve Zeller operatörü için

$\left(\frac{t}{1-t}\right)^r$, $r=0,1,2$ test fonksiyonları uygundur. Bu test fonksiyonları dışında da test fonksiyonları bulunmaktadır fakat bu tezde sadece yukarıda belirtilen test fonksiyonları incelenmiştir.

Bu tezde, $j \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörleri için j -merkezi momentler ve j -merkezi q -momentler

$$\mu_{n,i,j}(x,q) := \mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^j ; x \right), \quad i=0,1,2.$$

$$\mu^*_{n,i,j}(x,q) := \mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_q^j ; x \right), \quad i=0,1,2.$$

olarak tanımlanır. Öte yandan $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün tanımlı olduğu uzaya bağlı olarak yukarıda açık şekilde belirtilen test fonksiyonlarının kapalı şekli

$$e_{r,i}(t) = \left(\frac{t}{1+(1-i)t} \right)^r, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad i=0,1,2 \quad (3.7)$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki; $e_{r,0}$ q -Bleimann-Butzer-Hahn operatörü için, $e_{r,1}$ q -Bernstein, q -Szász-Mirakyan, q -Baskakov ve q -Lupaş operatörleri için ve $e_{r,2}$ q -Meyer-König ve Zeller operatörü için uygundur. Ayrıca (3.7) ile tanımlanan test fonksiyonları için

$$e_{r,i} \left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}} \right) = \left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,q}} \right)^r, \quad i=0,1,2 \quad (3.8)$$

koşulunun sağlandığını varsayalım. Burada ki önemli nokta $\alpha_{n,k,q}$ pozitif sayı dizisinin test fonksiyonu altındaki görüntüsünün k parametresinden bağımsız olmasıdır, yani $\alpha_{n,q}$, pozitif sayı dizisinin elde edilmesidir. Örneğin, $e_{r,0}(t)$ test fonksiyonunda $\alpha_{n,k,q} = q^k [n-k+1]_q$ reel sayı dizisi

dikkate alındığında $e_{r,0} \left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q} \right) = \left(\frac{[k]_q}{[n+1]_q} \right)^r$ elde edilir. $e_{r,0}(t)$ test fonksiyonunda

$\alpha_{n,k,q} = q^{-n} [k+n]_q$ reel sayı dizisi dikkate alındığında $e_{r,2} \left(\frac{[k]_q}{q^{-n} [k+n]_q} \right) = \left(\frac{[k]_q}{q^{-n} [n]_q} \right)^r$ elde edilir.

İkinci çeşit q -Stirling sayıları: $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$S_q(r, m) = \frac{q^{-m(m-1)/2}}{[m]_q!} \sum_{v=0}^m (-1)^v q^{v(v-1)/2} \begin{bmatrix} m \\ v \end{bmatrix}_q ([m-v]_q)^r, \quad m=0, 1, \dots, r.$$

Burada, $S_q(0, 0) = 1$, $r > 0$ için $S_q(r, 0) = 0$ [62]. Ayrıca,

$$([k]_q)^r = \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} S_q(r, m) [k]_q [k-1]_q \cdots [k-m+1]_q \quad (3.9)$$

eşitliği doğrudur. Yüksek mertebeden momentlerin hesaplanabilmesi için ikinci çeşit q -Stirling sayılarına ihtiyaç vardır.

Lupaş Operatörü: $f \in C[0, 1]$ ve $q > 0$ için

$$L_{n,q}(f; x) = \frac{1}{((1-x) \oplus x)_q^n} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad x \in [0, 1].$$

biçiminde A. Lupaş [27] tarafından 1987 yılında tanımlanmıştır. Bu operatörün özelliği klasik Bernstein operatörünün ilk q -genellemesi olmasıdır. Operatörün ilk üç momenti sırasıyla

$$L_{n,q}(e_{0,1}; x) = 1, \quad L_{n,q}(e_{1,1}; x) = x \quad \text{ve} \quad L_{n,q}(e_{2,1}; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \left(\frac{1-x+q^n x}{1-x+qx} \right) \text{ dir. } 0 < q_n < 1 \text{ olmak}$$

üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = 1$ koşulları sağlansın. O halde her $f \in C[0, 1]$

için $L_{n,q_n}(f; x)$ dizisi $[0, 1]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Ayrıca, yaklaşım hızı,

$$\text{her } f \in C[0, 1] \text{ ve } \delta > 0 \text{ için } |L_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{1(1-x)/[n]_q} \right) \text{ şeklindedir.}$$

q-Bernstein Operatörü: $f \in C[0, 1]$ ve $0 < q < 1$ için

$$B_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \quad (3.10)$$

biçiminde, G.M Phillips [28] tarafından 1997 yılında tanımlanmıştır. Bu operatörün özelliği klasik Bernstein operatörünün ikinci q -genellemesi olmasının yanında oluşturulma tekniği bakımından

farklı bir yol sunmasıdır. Ayrıca bu operatörler diğer pozitif lineer operatörlerin q -benzerlerinin oluşturulmasında büyük bir etkiye sahiptir. Bu operatörün ilk üç momenti $B_{n,q}(e_{0,1};x)=1$, $B_{n,q}(e_{1,1};x)=x$ ve $B_{n,q}(e_{2,1};x)=x^2+x(1-x)/[n]_q$ şeklindedir. (3.10) ile tanımlanan q -Bernstein operatörü için Korovkin teoreminin koşulları sağlanmaz. Gerçekten; $n \rightarrow \infty$ iken $B_{n,q}(e_{0,1};x) \Rightarrow 1$ ve $B_{n,q}(e_{1,1};x) \Rightarrow x$ iken $B_{n,q}(e_{2,1};x) \not\Rightarrow x^2$ dir. Dolayısıyla $B_{n,q}(f;x) \not\Rightarrow f$ dir. Bunun sebebi $0 < q < 1$ olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken $[n]_q \rightarrow 1/(1-q)$ olmasıdır. Bundan dolayı düzgün yakınsamayı garanti etmek için q yerine 1'e yakınsayan bir $\{q_n\}$ dizisi alınır. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için $B_{n,q_n}(f;x)$ $[0,1]$ üzerinde dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Ayrıca, süreklilik modülü cinsinden yaklaşım hızı ise her $f \in C[0,1]$ ve $\delta > 0$ için $|B_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{1(1-x)/[n]_{q_n}}\right)$ şeklindedir. Bu operatör için Voronovskaya tipi teorem şu şekildedir: f , $[0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı ve bir $x_0 \in [0,1]$ noktasında $f''(x_0)$ var ise $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} (B_{n,q_n}(f;x_0) - f(x_0)) = \frac{1}{2} x_0 (1-x_0) f''(x_0)$ sağlanır.

q -Szász-Mirakyan Operatörü: $f \in C[0,\infty)$ ve $0 < q < 1$ için A. Aral [29] tarafından

$$S_{n,q}(f;x) = E_q \left(-[n]_q \frac{x}{b_n} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q! (b_n)^k} f \left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q} \right).$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $E_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]_q!}$ ve $0 \leq x < \alpha_q(n)$,

$\alpha_q(n) = b_n / ((1-q)[n]_q)$ ve $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ olmak üzere pozitif sayıların bir dizisidir. q -Szász-Mirakyan operatörünün ilk üç momenti $S_{n,q}(e_{0,1};x)=1$, $S_{n,q}(e_{1,1};x)=x$ ve $S_{n,q}(e_{2,1};x)=qx^2+xb_n/[n]_q$ olarak hesaplanmıştır. $0 < q_n < 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ olan bir $\{q_n\}$ dizisi verilsin. Her $f \in C_\rho^0[0,\infty)$ için, eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/[n]_{q_n} = 0$ ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq x \leq \alpha_{q_n}(n)} |S_{n,q_n}(f;x) - f(x)| / \rho(x) = 0$. Ayrıca yaklaşım hızı yeterince büyük n doğal sayısı için

$\sup_{0 \leq x \leq \alpha_{q_n}(n)} |S_{n,q_n}(f;x) - f(x)| / \rho(x) \leq (2 + \sqrt{2}) \omega(f; \sqrt{b_n/[n]_{q_n}})$ şeklindedir. Burada,

$C_\rho^0[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)|/\rho(x) < \infty\}$ ağırlıklı uzay olmak üzere bu uzay üzerindeki norm, $\rho(x) = 1 + x^{2m}$ ($m \geq 2$) olmak üzere $\|f\|_\rho = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|/\rho(x)$ şeklindedir.

Szasz-Mirakyan operatörünün bir başka q -versiyonu da N. Mahmudov [30] tarafından $q > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_{n,q}(f; x) = e_q\left(-[n]_q q^{-k} x\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{k(k-1)/2}} \frac{([n]_q x)^k}{[k]_q!} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada, eğer $|q| > 1$ veya $0 < |q| < 1$ ve $|x| < \frac{1}{1-q}$ ise $e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]_q!}$. Bu

operatör için momentler $F_{n,q}(e_{0,1}; x) = 1$, $F_{n,q}(e_{1,1}; x) = x$ ve $F_{n,q}(e_{2,1}; x) = x^2 + \frac{x}{[n]_q}$ olarak

hesaplanmıştır. $p \in \mathbb{N}$ ve $\rho(x) = 1 + x^p$ olmak üzere $C_\rho[0, \infty)$ üzerinde $q_n > 1$ ve $x \in [0, \infty)$ ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,q_n}(f; x) = f(x)$ sağlanır. Bu yakınsama $0 \leq a \leq b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı üzerinde

düzgündür. Ayrıca her $f \in C_\rho^2[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} [F_{n,q_n}(f; x) - f(x)] = \frac{x}{2} f''(x)$

şeklinde bir Voronovskaya tipi teorem verilmiştir.

q-Baskakov Operatörü: A. Aral ve V. Gupta [31,32] tarafından Baskakov operatörünün üç farklı q versiyonu tanımlanmıştır. Bunlardan birincisi $q \in (0, 1)$ ve $f \in C[0, \infty)$ için

$$P_{n,q}(f; x) = \left(\frac{qx}{1+x}; q\right)_n \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{qx}{1+x}\right)^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n]_q}\right), \quad x \in [0, \infty),$$

şeklindedir, burada $(x; q)_n := \prod_{s=0}^{n-1} (1 - q^s x)$. Bu operatör için momentler sırasıyla $x \in [0, \infty)$ olmak

üzere $P_{n,q}(e_{0,1}; x) = 1$, $P_{n,q}(e_{1,1}; x) = x$ ve $x \in \left[0, \frac{q}{1-q}\right)$ için

$$P_{n,q}(e_{2,1}; x) = \frac{x^2}{(q+x(q-1))} + \frac{1}{[n]_q} \frac{x(1+x)}{(q+x(q-1))}$$

olarak hesaplanmıştır. $a > 0$ için $a/(a+1) < q_n < 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ olan bir $\{q_n\}$ dizisi verilsin. Her $f \in C[0, a]$ için $\{P_{n, q_n}(f)\}$ dizisi f fonksiyonuna $[0, a]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. İkinci q -versiyonu ise

$$P_{n, q}^*(f; x) = \left(\frac{q^2 x}{1+x}; q \right) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{q^2 x}{1+x} \right)^k f \left(\frac{[k]_q}{q^{k+1} [n]_q} \right)$$

biçimindedir. Bu operatör için momentler sırasıyla $x \in [0, \infty)$ için $P_{n, q}^*(e_{0,1}; x) = 1$,

$$P_{n, q}^*(e_{1,1}; x) = x/(1+x(1-q)) \quad \text{ve} \quad P_{n, q}^*(e_{2,1}; x) = \frac{x^2}{q(1+x(1-q))} + \frac{1}{[n]_q} \frac{x(1+x)}{q^2(1+x(1-q))} \quad \text{olarak}$$

hesaplanmıştır. Sonucusu ise $q > 0$ için,

$$\mathcal{B}_{n, q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k (-x; q)_{n+k}^{-1} f \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)$$

biçimindedir, burada $(x; q)_n = (1-x)(1-qx) \cdots (1-q^{n-1}x)$. Bu operatörün yaklaşım özellikleri için

$\rho(x) = 1+x^2$ ve $\{q_n\}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere ve $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ koşullarına sahip ise her $f \in C_\rho[0, \infty)$ için $\mathcal{B}_{n, q_n}(f)$ dizisi f fonksiyonuna yakınsaktır ve $[0, \infty)$ aralığının kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır. f $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olsun ω_2 , f fonksiyonun ikinci mertebeden düzgünlük modülü olmak üzere yaklaşım hızı

$$|\mathcal{B}_{n, q_n}(f; x) - f(x)| \leq M \omega_2 \left(f; \sqrt{\frac{x}{[n]_q} \left(1 + \frac{x}{q} \right)} \right) \text{ biçimindedir.}$$

C. Radu [36] tarafından $q \in (0, 1)$ için Baskakov operatörünün diğer bir q versiyonu ise,

$$V_{n, q}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} (qx)^k \frac{1}{(1+qx)_q^{n+k}} f \left(\frac{[k]_q}{q^{k-1} [n]_q} \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu operatör için momentler sırasıyla $x \in [0, \infty)$ için $V_{n,q}^*(e_{0,1}; x) = 1$,

$$V_{n,q}^*(e_{1,1}; x) = qx \text{ ve } V_{n,q}^*(e_{2,1}; x) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q} qx^2 + \frac{q}{[n]_q} x \text{ olarak hesaplanmıştır.}$$

q-Meyer-König ve Zeller Operatörü: $x \in [0, a]$ $a \in (0, 1)$, $f \in C[0, a]$ $n \in \mathbb{N}$, $0 < q \leq 1$ olmak üzere; T. Trif [33] tarafından tanımlanan *q-Meyer-König ve Zeller operatörü*

$$M_{n,q}(f; x) = (1 \ominus x)_q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q}\right), \quad x \in [0, 1),$$

şeklinde. O. Doğru ve O. Duman [34] tarafından tanımlı diğer bir *q-Meyer-König ve Zeller operatörü* ise;

$$M_{n,q}^*(f; x) = (1 \ominus x)_q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{q^n [k]_q}{[k+n]_q}\right), \quad x \in [0, 1),$$

şeklinde. Bu operatör için momentler: $M_{n,q}^*(e_{0,1}; x) = 1$, $M_{n,q}^*(e_{1,1}; x) = q^n x$ ve $(q^{2n} - 1)x^2 \leq M_{n,q}^*(e_{2,1}; x) - x^2 \leq (q^{2n+1} - 1)x^2 + q^{2n}x/[n]_q$ olarak hesaplanmıştır. T. Trif'in verdiği genelleştirmeden sonra $M_{n,q}^*(e_{r,1}; x)$, ($r = 0, 1, 2$) şeklindeki ifadeler için açık formüllerin elde edilebilmesi amacıyla O. Doğru ve O. Duman tarafından ikinci bir genelleştirme yapılmıştır. Sonuç olarak

$$M_{n,q}^*(e_{0,2}; x) = 1, \quad M_{n,q}^*(e_{1,2}; x) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q} \frac{q^n x}{1 - q^{n+1}x} \text{ ve}$$

$$M_{n,q}^*(e_{2,2}; x) = \frac{[n+1]_q [n+2]_q}{([n]_q)^2} \frac{q^{2n+1} x^2}{(1 - q^{n+1}x)(1 - q^{n+2}x)} + \frac{[n+1]_q}{([n]_q)^2} \frac{q^{2n} x}{(1 - q^{n+1}x)}$$

ifadeleri doğrudur. $0 < q_n \leq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/[n]_{q_n} = 0$ limitleri sağlanıyorsa yukarıda tanımlanan $M_{n,q_n}^*(f; x)$, *q-Meyer-König ve Zeller operatörü* $[0, a]$ aralığında sürekli ve tüm \mathbb{R} de sınırlı olan f fonksiyonuna, bu aralıkta düzgün yakınsar. $f \in C[0, a]$ olmak üzere

$|M_{n,q}^*(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{(1-q_n)^2 a^2 + aq_n^{2n}/[n]_{q_n}}\right)$ ifadesi q -Meyer-König ve Zeller operatörünün yaklaşım hızı olarak hesaplanmıştır.

q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü: A. Aral ve O. Doğru [35] Bleimann-Butzer-Hahn operatörlerin q -benzerini $f \in C[0, \infty)$ ve $q \in (0, 1)$ için,

$$H_n(f;x) = \frac{1}{(1 \oplus x)_q^n} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right), \quad x \in [0, \infty),$$

şeklinde tanımlamışlardır ve bu operatörün momentlerini $H_{n,q}(e_{0,0};x) = 1$,

$$H_{n,q}(e_{1,0};x) = \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \frac{x}{1+x} \quad \text{ve} \quad H_{n,q}(e_{2,0};x) = \frac{[n]_q [n-1]_q}{([n+1]_q)^2} \frac{q^2 x^2}{(1+x)(1+qx)} + \frac{[n]_q}{([n+1]_q)^2} \frac{x}{1+x}$$

olarak hesaplamışlardır. $\{q_n\}$ dizisi $0 < q_n \leq 1$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $q_n \rightarrow 1$ koşullarını sağlamak üzere

H_{n,q_n} operatörü $\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_{n,q_n}(e_{r,0};x) - e_{r,0}\|_{C_B} = 0$ ($r=0,1,2$) koşullarını sağlıyorsa her $f \in H_\omega$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_{n,q_n}(f;x) - f\|_{C_B} = 0$ sağlanır. Benzer koşullar altında verilen bir $f \in H_\omega$ için yaklaşım hızı

$$|H_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq 2\omega\left(f; \sqrt{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} + \frac{q_n^2 [n]_{q_n} [n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} \left(\frac{1+x}{1+q_n x}\right)\right) + \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} \frac{x}{1+x}}\right)$$

olarak hesaplanmıştır.

4. BULGULAR

4.1. q -Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Özellikleri

Bu bölümde, bazı ayrık tipli pozitif lineer operatörlerin (örneğin, Bernstein, Meyer-König ve Zeller, Baskakov ve Bleimann-Butzer-Hahn v.b. operatörlerin) q -benzerlerini oluşturmak için üretici fonksiyonlara dayalı bir yöntem önerilmiştir. Başka bir deyişle, ayrık tipte genel operatörler oluşturulmuştur ve bu operatörler kullanılarak, sürekli fonksiyonlara yaklaşımda önemli bir role sahip merkezi momentler için üretici fonksiyona dayalı formüller elde edilmiştir. Son olarak, üretici fonksiyonlarının yardımıyla, inşa edilen genel operatörlerin bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

4.1.1. Genel Operatörün İnşaası

Fonksiyon dizileri yardımıyla pozitif lineer operatörler dizisinin inşası için aşağıdaki adımlar sırasıyla takip edilmiştir.

$q > 0$, $A > 0$ olmak üzere $I_A = [0, A]$ olsun. $I_A \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}_{n=1}^{\infty}$ reel değerli fonksiyon dizisi aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I_A$ için $\varphi_{n,q}(x, 0) \neq 0$, $\varphi_{n,q}(x, 1) = 1$.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}_0$ için $\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0}$ var ve x değişkenine göre sürekli olsun.

(iii) Her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x, u \geq 0$ için $\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \geq 0$ olsun.

$\{\varphi_{n,q}\}$ dizisine üretici fonksiyonlar dizisi denir. Bu koşullar altında $\{\varphi_{n,q}\}$ üretici fonksiyonunun, yakınsaklık yarıçapının 1'den küçük olmaması koşulu altında $u = 0$ noktasındaki q -Taylor formülü

$$\varphi_{n,q}(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} u^k \quad (4.1)$$

gibi elde edilir. Açıktır ki yukarıdaki (i) ve (ii) özellikleri kullanılırsa, (4.1)'den

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = 1$$

sonucu hemen elde edilir. Şimdi, $\{\varphi_{n,q}\}$ üretici fonksiyon dizisi yardımıyla aşağıdaki gibi genel bir q -operatörler dizisi tanımlayalım.

$f \in B(I_A)$ olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için

$$\mathcal{L}_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} f \left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}} \right). \quad (4.2)$$

Burada; $\alpha_{n,k,q}$ pozitif sayıların bir dizisidir. $\mathcal{L}_{n,q} : B(I_A) \rightarrow B(I_A)$ tanımlı bir lineer operatördür ve (iii) koşulundan dolayı $\mathcal{L}_{n,q}$ pozitifdir.

4.1.1.1. Önerme: $\{\varphi_{n,q}\}$ bir üreteç fonksiyon dizisi ise her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{\partial_q^m \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^m} \Big|_{u=1} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[k]_{q,m}}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} \quad (4.3)$$

eşitliği doğrudur. Burada $[k]_{q,m} = [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \cdots [k-m+1]_q$.

İspat: (4.1) eşitliğinin u 'ya göre her mertebeden q -türevi vardır. O halde m -defa q -türev alınırsa

$$\frac{\partial_q^m \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^m} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} [k]_q [k-1]_q [k-2]_q \cdots [k-m+1]_q u^{k-m}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki yanına $u = 1$ yazılırsa

$$\frac{\partial_q^m \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^m} \Big|_{u=1} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[k]_{q,m}}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0}$$

eşitliği elde edilir. ■

4.1.2. Genel Operatörün Momentleri

4.1.2.1. Lemma: $\{\varphi_{n,q}\}$ üretici fonksiyonlar dizisi olsun. $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün momentleri

$$\mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i};x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}^r} \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} \mathbb{S}_q(r,m) \left. \frac{\partial_q^m \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^m} \right|_{u=1} \quad (4.4)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada, $\mathbb{S}_q(r,m)$ ikinci tür q -Stirling sayılarıdır.

İspat: $r=0$ için (4.4) açıktır. $r \in \mathbb{N}$ olsun.

$$[k]_q^r = \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} \mathbb{S}_q(r,m) [k]_{q,m}$$

eşitliği ile (4.2) ifadesi ve (3.8) koşulu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i};x) &= \frac{1}{\alpha_{n,q}^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} [k]_q^r \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,q}^r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} \mathbb{S}_q(r,m) [k]_{q,m} \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,q}^r} \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} \mathbb{S}_q(r,m) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[k]_{q,m}}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik ve Önerme 4.1.1.1.'den istenilen elde edilir. ■

4.1.2.1. Sonuç: $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün ilk üç momenti aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}_{n,q}(e_{0,i};x) = 1$$

$$\mathcal{L}_{n,q}(e_{1,i};x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}} \left. \frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u} \right|_{u=1} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_{n,q}(e_{2,i};x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}^2} \left\{ q \frac{\partial_q^2 \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^2} + \frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u} \right\} \Bigg|_{u=1} \quad (4.6)$$

4.1.2.2. Lemma: Her $j \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün q -merkezi momentleri aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{n,q,j}(x) = \sum_{s=0}^j (-1)^s \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix}_q q^{s(s-1)/2} e_{s,i}(x) \mathcal{L}_{n,q}(e_{j-s,i};x),$$

burada $\mu_{n,q,j}(x) := \mathcal{L}_{n,q}\left(\left(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x)\right)_q^j; x\right)$.

İspat: Her $t, x \in I_A$ ve $j \in \mathbb{N}$ için Gauss binom formülünden

$$\left(e_{1,i}(t) \ominus e_{1,i}(x)\right)_q^j = \sum_{s=0}^j (-1)^s \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix}_q q^{s(s-1)/2} e_{1,i}^s(x) e_{1,i}^{j-s}(t)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$\mathcal{L}_{n,q}\left(\left(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x)\right)_q^j; x\right) = \sum_{s=0}^j (-1)^s \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix}_q q^{s(s-1)/2} e_{1,i}^s(x) \mathcal{L}_{n,q}\left(e_{1,i}^{j-s}(\cdot); x\right)$$

$e_{1,i}^r(\cdot) = e_{r,i}(\cdot)$ olduğu göz önüne alınırsa istenilen eşitlik elde edilir. ■

4.1.2.3. Lemma: Her $j \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün merkezi momentleri aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{n,j}(x) = \sum_{s=0}^j (-1)^s \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} e_{s,i}(x) \mathcal{L}_{n,q}(e_{j-s,i};x),$$

burada, $\mu_{n,j}(x) := \mathcal{L}_{n,q}\left(\left(e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)\right)^j; x\right)$.

İspat: Her $t, x \in I_A$ ve $j \in \mathbb{N}$ için Binom Formülünden

$$(e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^j = \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{j}{s} e_{1,i}^s(x) e_{1,i}^{j-s}(t)$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$\mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^j ; x \right) = \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{j}{s} e_{1,i}^s(x) \mathcal{L}_{n,q} \left(e_{1,i}^{j-s}(\cdot) ; x \right)$$

elde edilir, burada $e_{1,i}^r(\cdot) = e_{r,i}(\cdot)$ olduğu göz önüne alınır istenilen eşitlik elde edilir. ■

4.2.2.4. Lemma: Her $j \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün merkezi momentleri için aşağıdaki indirgeme bağıntısı doğrudur.

$$\mu_{n,j}(x) = \mathcal{L}_{n,q} \left(e_{j,i} ; x \right) - \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j}{s} e_{s,i}(x) \mu_{n,s}(x)$$

İspat: Her $j \in \mathbb{N}$ için

$$e_{j,i}(t) = e_{1,i}^j(t) = (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x) + e_{1,i}(x))^j = \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} e_{1,i}^{j-s}(x) (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^s$$

eşitliğin her iki yanına $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,q} \left(e_{j,i} ; x \right) &= \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} e_{1,i}^{j-s}(x) \mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^s ; x \right) \\ &= \mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^j ; x \right) + \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j}{s} e_{j-s,i}(x) \mathcal{L}_{n,q} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^s ; x \right) \\ &= \mu_{n,j}(x) + \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j}{s} e_{j-s,i}(x) \mu_{n,s}(x) \end{aligned}$$

ve buradan istenen elde edilir. ■

4.1.3 $\mathcal{L}_{n,q}$ Operatörlerinin Bazı Uygulamaları

Bu kısımda, yukarıda tanımlanan genel operatörlerde, üretici fonksiyonların uygun seçimi sayesinde literatürde iyi bilinen bazı operatörler elde edilecektir.

4.1.3.1. q -Bernstein Operatörü. Her $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ için

$$\varphi_{n,q}(x,u) = (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n \quad (4.7)$$

ile tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}$ fonksiyon dizisi verilsin. Burada $(1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n := (1 \boxplus (-x) \boxplus xu)_q^n$. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki $\varphi_{n,q}(x,0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x,1) = 1$ koşulları sağlanmaktadır. q -türev yardımıyla

$$\frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u} = \frac{\partial_q (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n}{\partial_q u} = [n]_q x (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-1}$$

$$\frac{\partial_q^2 \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^2} = [n]_q [n-1]_q x^2 (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-2}$$

ve benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q x^k (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-k}$$

elde edilir. Buradan

$$\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q x^k (1 \ominus x)_q^{n-k}$$

bulunur. $(1 \ominus x)_q^{n-k} \Big|_{u=0} = \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$ eşitliği dikkate alınırsa

$$\frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) ifadesinin sağ tarafı x 'in bir polinomu olduğundan (ii) koşulu ve $q \in (0,1)$ ve $x \in [0,1]$ olduğundan (iii) koşulu sağlanmaktadır. Böylece (4.7) ile tanımlanan $\varphi_{n,q}$ fonksiyonları bir pozitif lineer operatör dizisi üretir. (4.8) ve $\alpha_{n,k,q} = [n]_q$, (4.2) ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,q,k}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

elde edilir. $k > n$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := 0$ olduğundan, $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü, $f \in B[0,1]$ için

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

şeklinde tanımlanan q -Bernstein Operatörüne dönüşür.

q -Bernstein Operatörünün momentleri Sonuç 4.1.2.1 yardımıyla aşağıda verilmiştir:

$$B_{n,q}(e_{0,1};x) = 1;$$

$$B_{n,q}(e_{1,1};x) = \frac{1}{[n]_q} \frac{\partial_q (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n}{\partial_q u} \Big|_{u=1} = \frac{1}{[n]_q} [n]_q x (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-1} \Big|_{u=1} = x;$$

$$B_{n,q}(e_{2,1};x) = \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q \frac{\partial_q^2 (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n}{\partial_q u^2} + \frac{\partial_q (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n}{\partial_q u} \right\} \Big|_{u=1}$$

$$= \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q [n]_q [n-1]_q x^2 (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-2} + [n]_q x (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^{n-1} \right\} \Big|_{u=1}$$

$$= \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q[n]_q [n-1]_q x^2 + [n]_q x \right\}$$

$q[n-1]_q = [n]_q - 1$ olduğu göz önüne alınır ve $q[n]_q [n-1]_q x^2 + [n]_q x = [n]_q^2 x^2 + [n]_q x(1-x)$ ifadesi son eşitlikte yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$B_{n,q}(e_{2,1}; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

elde edilir.

4.1.3.2. q -Chlodowsky Operatörü. $\{b_n\}$ monoton artan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Her $x \in [0, b_n]$ ve $q \in (0, 1)$ için

$$\varphi_{n,q}(x, u) = \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^n \quad (4.9)$$

ile tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}$ fonksiyon dizisi verilsin. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki $\varphi_{n,q}(x, 0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x, 1) = 1$ koşulları sağlanmaktadır.

q -türev yardımıyla

$$\frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u} = \frac{\partial_q \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^n}{\partial_q u} = [n]_q \frac{x}{b_n} \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-1}$$

$$\frac{\partial_q^2 \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^2} = [n]_q [n-1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^2 \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-2}$$

benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-k}$$

elde edilir. Buradan

$$\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \right)_q^{n-k}$$

bulunur. $\left(1 \ominus \frac{x}{b_n} \right)_q^{n-k} \Big|_{u=0} = \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n} \right)$ eşitliği dikkate alınır

$$\frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n} \right) \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) ifadesinin sağ tarafı x 'in bir polinomu olduğundan (ii) koşulu ve $q \in (0,1)$ ve $x \in [0, b_n]$ olduğundan (iii) koşulu sağlanmaktadır. Böylece (4.9) ile tanımlanan $\varphi_{n,q}$ fonksiyonları

bir pozitif lineer operatör dizisi üretir. (4.10) ve $\alpha_{n,k,q} = \frac{[n]_q}{b_n}$, (4.2) ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} f \left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,q,k}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n} \right) f \left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q} \right)$$

elde edilir. $k > n$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := 0$ olduğundan, $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü, $f \in B[0, b_n]$ için

$$C_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n} \right) f \left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q} \right), \quad x \in [0, b_n]$$

şeklinde tanımlanan q -Chlodowsky Operatörüne dönüşür; burada $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_q} = 0$

koşullarını sağlayan monoton artan bir pozitif reel sayı dizisidir.

q -Chlodowsky Operatörünün momentleri Sonuç 4.1.2.1 yardımıyla aşağıdaki gibidir:

$$C_{n,q}(e_{0,1};x) = 1;$$

$$C_{n,q}(e_{1,1};x) = \frac{b_n}{[n]_q} \frac{\partial_q \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^n}{\partial_q u} \Bigg|_{u=1} = \frac{b_n}{[n]_q} [n]_q \frac{x}{b_n} \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-1} \Bigg|_{u=1} = x;$$

$$\begin{aligned} C_{n,q}(e_{2,1};x) &= \left(\frac{b_n}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q \frac{\partial_q^2 \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} x \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^n}{\partial_q^2 u^2} + \frac{\partial_q \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^n}{\partial_q u} \right\} \Bigg|_{u=1} \\ &= \left(\frac{b_n}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q [n]_q [n-1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^2 \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-2} + [n]_q \frac{x}{b_n} \left(1 \boxplus \frac{x}{b_n} \boxplus \frac{x}{b_n} u \right)_q^{n-1} \right\} \Bigg|_{u=1} \\ &= \left(\frac{b_n}{[n]_q} \right)^2 \left\{ q [n]_q [n-1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^2 + [n]_q \frac{x}{b_n} \right\} \end{aligned}$$

$q[n-1]_q = [n]_q - 1$ olduğu göz önüne alınır,

$$q [n]_q [n-1]_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^2 + [n]_q \frac{x}{b_n} = [n]_q^2 \left(\frac{x}{b_n} \right)^2 + [n]_q \frac{x}{b_n} \left(1 - \frac{x}{b_n} \right)$$

ifadesi son eşitlikte yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$C_{n,q}(e_{2,1};x) = x^2 + \frac{x(b_n - x)}{[n]_q}$$

elde edilir.

4.1.3.3. q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü. Her $x \in [0, \infty)$ ve $q \in (0, 1)$ için

$$\varphi_{n,q}(x,u) = \frac{(1 \oplus xu)_q^n}{(1 \oplus x)_q^n} \quad (4.11)$$

ile tanımlı fonksiyon dizisi verilsin. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki $\varphi_{n,q}(x,0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x,1) = 1$ koşulları sağlanmaktadır.

q -türev yardımıyla

$$\frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u} = [n]_q x \frac{(1 \oplus qxu)_q^{n-1}}{(1 \oplus x)_q^n}$$

$$\frac{\partial_q^2 \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^2} = [n]_q [n-1]_q qx^2 \frac{(1 \oplus q^2 xu)_q^{n-1}}{(1 \oplus x)_q^n}$$

ve benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q x^k q q^2 q^3 \cdots q^{k-1} \frac{(1 \oplus q^k xu)_q^{n-k}}{(1 \oplus x)_q^n}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} = \frac{[n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2} x^k \frac{(1 \oplus q^k xu)_q^{n-k}}{(1 \oplus x)_q^n}$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse

$$\left. \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = \frac{1}{(1 \oplus x)_q^n} \frac{[n]_q}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2} x^k \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade x 'e göre bir rasyonel fonksiyondur ve $[0, \infty)$ aralığının hiçbir noktasında tanımsız değildir. Dolayısıyla (ii) koşulu ve $q \in (0, 1)$ ve $x \in [0, \infty)$ olduğundan (iii) koşulu da sağlanır. Sonuç olarak (4.11) ile tanımlanan $\varphi_{n,q}$ fonksiyonları bir pozitif lineer operatör dizisi üretir. (4.12) ve $\alpha_{n,k,q} = q^k [n-k+1]_q$, (4.2) tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa,

$$\mathcal{L}_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,q,k}}\right) = \frac{1}{(1 \oplus x)_q^n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right)$$

ifadesi elde edilir. $k > n$ için $\binom{n}{k}_q := 0$ olduğundan, $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü, $f \in B[0, \infty)$ için

$$H_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q q^{k(k-1)/2} x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right)$$

şeklinde tanımlanan q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörüne dönüşür.

q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörünün momentleri Sonuç 4.1.2.1 yardımıyla aşağıdaki gibidir:

$$H_{n,q}(e_{0,2}; x) = 1;$$

$$H_{n,q}(e_{1,2}; x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}} \left. \frac{[n]_q x (1 \oplus qux)_q^{n-1}}{(1 \oplus x)_q^n} \right|_{u=1} = \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \frac{x}{1+x};$$

$$H_{n,q}(e_{2,2}; x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}^2} \left\{ q \frac{[n]_q [n-1]_q q x^2 (1 \oplus q^2 ux)_q^{n-2}}{(1 \oplus x)_q^n} + \frac{[n]_q x (1 \oplus qux)_q^{n-1}}{(1 \oplus x)_q^n} \right\} \Big|_{u=1}$$

$$= \frac{[n]_q [n-1]_q}{[n+1]_q^2} \frac{q^2 x^2}{(1+x)(1+qx)} + \frac{[n]_q}{[n+1]_q^2} \frac{x}{1+x}.$$

4.1.3.4. q -Lupaş Operatörü. $n \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için

$$\varphi_{n,q}(x,u) := \frac{((1-x) \oplus ux)_q^n}{((1-x) \oplus x)_q^n}, \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlı fonksiyon dizisi verilsin. q -türev yardımıyla her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q x^k q^{k(k-1)/2} \frac{(1-x)^{n-k}}{((1-x) \oplus x)_q^n} \quad (4.13)$$

elde edilir. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki (i)-(iii) koşulları sağlanır. (4.13) ve $\alpha_{n,k,q} = [n]_q$, (4.2)

ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa, $f \in B[0,1]$ için

$$L_{n,q}(f;x) = \frac{1}{((1-x) \oplus x)_q^n} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

q -Lupaş operatörüne dönüşür. Bu operatörün momentleri Sonuç 4.1.2.1 yardımıyla,

$$L_{n,q}(e_{0,1};x) = 1; \quad L_{n,q}(e_{1,1};x) = x; \quad L_{n,q}(e_{2,1};x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q} \left(\frac{1-x+q^n x}{1-x+qx} \right).$$

şeklinde elde edilir.

4.1.3.5. q -Meyer-König ve Zeller operatörü. $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\varphi_{n,q}(x,u) := \frac{(1 \ominus x)_q^{n+1}}{(1 \ominus ux)_q^{n+1}}, \quad q \in [0,1), \quad x \in [0,1)$$

ile tanımlı fonksiyon dizisi verilsin. q -türev yardımıyla her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = [n+1]_q [n+2]_q \cdots [n+k]_q x^k (1 \ominus x)_q^{n+1} \quad (4.14)$$

elde edilir. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki (i)-(iii) koşulları sağlanır. (4.14) ve $\alpha_{n,k,q} = q^{-n} [k+n]_q$, (4.2) ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa, $f \in B[0,1)$ için

$$M_{n,q}(f;x) = (1 \ominus x)_q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^{-n} [k+n]_q}\right)$$

Meyer-König ve Zeller operatörüne dönüşür. Benzer şekilde operatörün momentleri Sonuç 4.1.2.1 yardımıyla,

$$M_{n,q}(e_{0,0};x) = 1;$$

$$M_{n,q}(e_{1,0};x) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q} \frac{xq^n}{(1-xq^{n+1})};$$

$$M_{n,q}(e_{2,0};x) = \frac{[n+1]_q [n+2]_q}{[n]_q^2} \frac{x^2 q^{2n+1}}{(1-xq^{n+1})(1-xq^{n+2})} + \frac{[n+1]_q}{[n]_q^2} \frac{x^2 q^{2n}}{(1-xq^{n+1})}.$$

şeklinde elde edilir.

4.2. q -Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu bölüm, üretici fonksiyon dizilerine dayanan ayrık tipteki pozitif lineer operatör dizilerinin bazı yaklaşım özellikleri ile ilgilidir. Ayrık tipteki bu dizilerin yakınsama oranı ve yaklaşım özellikleri, süreklilik modülü yardımıyla belirlenmiştir. Ayrıca Voronovskaya tipi teoremler verilmiştir. Son olarak, elde edilen teoremler için bazı uygulamalar sunulmuştur.

4.2.1. Korovkin Tipi Teorem

4.2.1.1. Tanım. $i=0,1,2$ olsun. Her $x, t \in I_A$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|)$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in H_{\omega}^i(I_A)$ sınıfındadır; $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$|f(t) - f(x)| \leq M |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|^{\alpha}$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in Lip_{M,i} \alpha$ sınıfındadır denir.

4.2.1.1. Lemma. $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörlerinin tanımlı olduğu uzaya bağlı olarak her $x \in I_A$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i}; x) - e_{r,i}(x)| \leq r e_{r-1,i}(A) \sqrt{\mu_{n,i,2}(x,q)}, \quad r \in \mathbb{N}_0, \quad i = 0, 1, 2$$

eşitsizliği sağlanır. Burada; $e_{-1,i}(A) := 0$ ve $\mu_{n,i,2}(x,q) := \mathcal{L}_{n,q}((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^2; x)$.

İspat: $r = 0$ durumunda ispat açıktır. $r \in \mathbb{N}$ olsun. Her $t, x \in I_A$ ve $A < 1$ için

$$\begin{aligned} |e_{r,i}(t) - e_{r,i}(x)| &\leq \left| \left(\frac{t}{1+(1-i)t} \right)^r - \left(\frac{x}{1+(1-i)x} \right)^r \right| = \left| \frac{t}{1+(1-i)t} - \frac{x}{1+(1-i)x} \right| \\ &\quad \left| \left(\frac{t}{1+(1-i)t} \right)^{r-1} + \dots + \left(\frac{x}{1+(1-i)x} \right)^{r-1} \right| \\ &\leq |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)| \left| \left(\frac{A}{1+(1-i)A} \right)^{r-1} + \dots + \left(\frac{A}{1+(1-i)A} \right)^{r-1} \right| \\ &= r e_{r-1,i}(A) |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)| \end{aligned}$$

buradan

$$|e_{r,i}(t) - e_{r,i}(x)| \leq r e_{r-1,i}(A) |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğe $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü uygulanırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i};x) - e_{r,i}(x)| \leq \mathcal{L}_{n,q}(|e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)|;x)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa her $r \in \mathbb{N}_0$ ve $i = 0, 1, 2$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i};x) - e_{r,i}(x)| \leq r e_{r-1,i}(A) \sqrt{\mathcal{L}_{n,q}((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^2; x)} = r e_{r-1,i}(A) \sqrt{\mu_{n,i,2}(x,q)}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer yaklaşım $A > 0$ içinde sergilenirse aynı eşitsizlik sadece $i = 0, 1$ durumlarında geçerlidir. ■

4.2.1.1. Sonuç. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i,2}(x, q_n) = 0$ ise her $x \in I_A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n,q_n}(e_{r,i};x) = e_{r,i}(x), \quad r = 0, 1, 2.$$

Burada; $\{q_n\}$, $(0, 1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o(1/n)$.

4.2.1.1. Teorem. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i,2}(x, q_n) = 0$ ve $f \in H_\omega^i(I_A)$ ise her $x \in I_A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n,q_n}(f; x) = f(x),$$

sağlanır. Burada; $\{q_n\}$, $(0, 1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o(1/n)$.

İspat: $f \in H_\omega^i(I_A)$ olduğundan her $x, t \in I_A$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|)$$

eşitsizliği doğrudur. O halde bu son eşitsizlik yardımıyla $|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)| < \delta$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği yazılabilir. f fonksiyonu I_A üzerinde sürekli olduğundan keyfi bir $M > 0$ ve $t, x \in I_A$ için $|f(t) - f(x)| < 2M$ sağlanır. Öte yandan $|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)| \geq \delta$ ise o zaman $(e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^2 \geq \delta^2$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her $t, x \in I_A$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanına \mathcal{L}_{n,q_n} operatörü uygulanırsa;

$$|\mathcal{L}_{n,q_n}(f;x) - f(x)| \leq \mathcal{L}_{n,q_n}(|f(\cdot) - f(x)|;x) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \mathcal{L}_{n,q_n}((e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^2; x) = \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \mu_{n,i,2}(x; q_n)$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,i,2}(x, q_n) = 0$ olduğu dikkate alınırsa istenilen elde edilir. ■

4.2.2. Yaklaşım Hızı

Yaklaşım teorisinin önemli bir problemi de yaklaşım hızının belirlenmesidir. Yaklaşım hızı $\gamma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olmak üzere; $|L_n(f;x) - f(x)| \leq \gamma_n$ eşitsizliğini sağlayan $\{\gamma_n\}$ dizisinin bulunması ile ilgilidir. Bu hesaplamayı yapmak için süreklilik modülünden faydalanılır.

4.2.2.1. Teorem. $E_{n,q}$ ayrık tipli operatör dizileri için

$$(i) \quad f \in H_{\omega}^i(I_A) \text{ ve } i=0,1,2 \text{ için } |\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mu_{n,i,2}(x;q)}\right) \omega(\delta);$$

$$(ii) \quad f \in C(I_A) \text{ ve } i=1,2 \text{ için } |\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mu_{n,i,2}(x;q)}\right) \omega(f;\delta)$$

eşitsizlikleri her $\delta > 0$ için doğrudur. Burada; $\mu_{n,i,2}(x,q) := \mathcal{L}_{n,q}((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x))^2; x)$ ve $\omega(\delta)$,

$\omega(f;\delta)$ süreklilik modülleridir.

İspat: $\mathcal{L}_{n,q}(e_{0,i};x) = 1$, ($i=0,1,2$) olduğu ve operatörün monotonluğu dikkate alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \mathcal{L}_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|;x) \tag{4.15}$$

eşitsizliği bulunur. $f \in H_{\omega}^i(I_A)$ olduğundan her $x, t \in I_A$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu son eşitsizlik ile (4.15) birlikte değerlendirilse her $\delta > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \omega(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|) \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|\right) \omega(\delta) \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.15), (4.16) ve ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliği birlikte düşünülürse her $\delta > 0$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mu_{n,i,2}(x;q)}\right) \omega(\delta)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece (i) durumu ispatlanmış olur. (ii) durumu için: $f \in C(I_A)$ olmasından dolayı benzer şekilde ispatlanır. ■

4.2.2.2. Teorem. Her $f \in Lip_{M,i,\alpha}$ ($i=0,1,2$) ve $x \in I_A$ için

$$|\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq M(\mu_{n,i,2}(x;q))^{\alpha/2}.$$

İspat: $f \in Lip_{M,i,\alpha}$ ($M > 0$, $i=0,1,2$ ve $0 < \alpha \leq 1$) olduğundan her $t, x \in I_A$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|^\alpha$$

eşitsizliğine $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$|\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \mathcal{L}_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|; x) \leq M \mathcal{L}_{n,q}(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|^\alpha; x)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ ile Hölder eşitsizliği dikkate alınırsa

$$|\mathcal{L}_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq M \left(\mathcal{L}_{n,q}(|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|^2; x) \right)^{\alpha/2} \leq M (\mu_{n,i,2}(x;q))^{\alpha/2}$$

böylece istenilen elde edilir. ■

4.2.3. Voronovskaya Tipi Teorem

4.2.3.1. Teorem. $f \in C^2(I_A)$ ve $f(e_{1,i}(x)) \in B(I_A)$ ($i=0,1,2$) olsun. O halde her $x \in I_A$ ile $e_{r,i}(x) \in I_A$ için

$$\left| \mathcal{L}_{n,q_n}(f(e_{1,i}(\cdot))); x - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(e_{1,i}(x))}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,i,j}^*(x, q_n) \right| \leq F_{n,i}(x) \frac{\omega((D_{q_n}^2 f), \delta)}{[2]_{q_n}!}.$$

Burada $F_{n,i}(x) = \mu_{n,i,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,i,2}(x, q_n) \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} e_{j,i}(x) (1-q_n)^j \mu_{n,i,4-j}(x, q_n)}$, $\{q_n\}$, (0,1)

üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1-q_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ve

$$\mu_{n,i,j}^*(x, q) = \mathcal{L}_{n,q}\left(\left(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x)\right)_q^j; x\right).$$

İspat: $f \in C^2(I_A)$ ve $x \in I_A$ için $e_{1,i}(x) \in I_A$ olsun. q -Taylor formülünden; her $s, v \in I_A$ için

$$f(s) = f(v) + (D_{q_n} f)(v)(s-v) + \frac{(D_{q_n}^2 f)(v)}{[2]_{q_n}!} (s \ominus v)_{q_n}^2 + g_{q_n}(s; v) \quad (4.17)$$

eşitliği yazılabilir. Burada;

$$g_{q_n}(s; v) = \frac{(D_{q_n}^2 f)(\xi_{s,v}) - (D_{q_n}^2 f)(s)}{[2]_{q_n}!} (s \ominus v)_{q_n}^2$$

ve $\xi_{s,v}$ s ile v arasında olmak üzere; $|\xi_{s,v} - v| < |s - v|$. (4.17) ifadesinde $s = e_{1,i}(t)$ ve $v = e_{1,i}(x)$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} f(e_{1,i}(t)) &= f(e_{1,i}(x)) + (D_{q_n} f)(e_{1,i}(x))(e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)) \\ &+ \frac{(D_{q_n}^2 f)(e_{1,i}(x))}{[2]_{q_n}!} (e_{1,i}(t) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 + g_{q_n}(e_{1,i}(t); e_{1,i}(x)) \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.18) ifadesine \mathcal{L}_{n,q_n} operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n,q_n}(f(e_{1,i}(\cdot));x) &= f(e_{1,i}(x)) + (D_{q_n} f)(e_{1,i}(x)) \mathcal{L}_{n,q_n}((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x));x) \\ &+ \frac{(D_{q_n}^2 f)(e_{1,i}(x))}{[2]_{q_n}!} \mathcal{L}_{n,q_n}((e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2;x) + \mathcal{L}_{n,q_n}(g_{q_n}(e_{1,i}(\cdot);e_{1,i}(x));x). \end{aligned}$$

Bu son aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$\left| \mathcal{L}_{n,q_n}(f(e_{1,i}(\cdot));x) - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(e_{1,i}(x))}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,i,j}^*(x,q_n) \right| \leq \mathcal{L}_{n,q_n}(g_{q_n}(e_{1,i}(\cdot);e_{1,i}(x));x) \quad (4.19)$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın bu aşamasında süreklilik modülünün yardımıyla (4.19) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan $\mathcal{L}_{n,q_n}(g_{q_n}(e_{1,i}(\cdot);e_{1,i}(x));x)$ için bir değerlendirme yapılacaktır. Her $\delta > 0$ için,

$$\begin{aligned} \left| (D_{q_n}^2 f)(\xi_{e_{1,i}(t),e_{1,i}(x)}) - (D_{q_n}^2 f)(e_{1,i}(x)) \right| &\leq \omega\left((D_{q_n}^2), \left| \xi_{e_{1,i}(t),e_{1,i}(x)} - e_{1,i}(x) \right| \right) \\ &\leq \omega\left((D_{q_n}^2), |e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)|\right) \\ &\leq \omega\left((D_{q_n}^2), \delta\right) \left(1 + \frac{|e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x)|}{\delta} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeye \mathcal{L}_{n,q_n} operatörü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}_{n,q_n}(|g_{q_n}(e_{1,i}(\cdot);e_{1,i}(x))|;x) \leq \frac{\omega\left((D_{q_n}^2 f), \delta\right)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,i,2}^*(x,q_n) + \mathcal{L}_{n,q_n}(|e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)| |(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2|;x) \right]$$

eşitsizliği bulunur. $\mathcal{L}_{n,q_n}(|e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)| |(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2|;x)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\mathcal{L}_{n,q_n} \left(\left| e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x) \right| \left| (e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 \right|; x \right) \leq \sqrt{\mathcal{L}_{n,q_n} \left((e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x)); x \right)} \sqrt{\mathcal{L}_{n,q_n} \left(\left[(e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 \right]^2; x \right)}$$

elde edilir.

$$(e_{1,i}(t) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 = (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^2 + (1 - q_n) e_{1,i}(x) (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))$$

olduğu dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} \left[(e_{1,i}(t) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 \right]^2 &= (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^4 + 2(1 - q_n) e_{1,i}(x) (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^3 \\ &\quad + (1 - q_n)^2 e_{2,i}(x) (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^2 \\ &= \sum_{p=0}^2 \binom{2}{p} (1 - q_n)^p e_{p,i}(x) (e_{1,i}(t) - e_{1,i}(x))^{4-p} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mathcal{L}_{n,q_n} \left(\left| e_{1,i}(\cdot) - e_{1,i}(x) \right| \left| (e_{1,i}(\cdot) \ominus e_{1,i}(x))_{q_n}^2 \right|; x \right) \leq \sqrt{\mu_{n,i,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,i}(x) \mu_{n,i,4-j}(x, q_n)}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{L}_{n,q_n} \left(\left| g_{q_n}(e_{1,i}(\cdot); e_{1,i}(x)) \right|; x \right) \leq \frac{\omega((D_{q_n}^2 f), \delta)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,i,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,i,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,i}(x) \mu_{n,i,4-j}(x, q_n)} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son ifade (4.19) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{L}_{n,q_n} (f(e_{1,i}(\cdot)); x) - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(e_{1,i}(x))}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,i,j}^*(x, q_n) \right| \\ \leq \frac{\omega((D_{q_n}^2 f), \delta)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,i,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,i,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,i}(x) \mu_{n,i,4-j}(x, q_n)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$F_{n,i}(x) = \mu_{n,i,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,i,2}(x, q_n) \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} e_{j,i}(x) (1-q_n)^j \mu_{n,i,4-j}(x, q_n)}$$

olarak düşünülürse ispat tamamlanmış olur. ■

4.2.4. q -Bernstein Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Yukarıda elde edilen teoremler doğrultusunda Bernstein operatörü için uygulamalar aşağıda verilmiştir.

Her $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ için

$$\varphi_{n,q}(x, u) = (1 \boxplus x \boxplus xu)_q^n$$

ile tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}$ fonksiyon dizisi $f \in B[0,1]$ için

$$B_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

iyi bilinen q -Bernstein operatör dizisini üretir. q -Bernstein Operatörünün momentleri sırasıyla

$$B_{n,q}(e_{0,1}; x) = 1, \quad B_{n,q}(e_{1,1}; x) = x, \quad B_{n,q}(e_{2,1}; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}$$

Dahası, yukarıda elde edilen eşitlikler yardımıyla merkezi momentler aşağıdaki şekilde

$$\mu_{n,1,1}(x, q) = 0 \quad \text{ve} \quad \mu_{n,1,2}(x, q) = \frac{x(1-x)}{[n]_q} \quad \text{elde edilir.}$$

4.2.4.1. Lemma. Her $x \in [0,1]$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$|B_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq \frac{r}{2} \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $r \in \mathbb{N}_0$ olsun. Her $t, x \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} |e_{r,1}(t) - e_{r,1}(x)| &\leq |t^r - x^r| = |t - x| |t^{r-1} + \dots + x^{r-1}| \leq |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)| |1^{r-1} + \dots + 1^{r-1}| \\ &= r |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)| \end{aligned}$$

buradan

$$|e_{r,1}(t) - e_{r,1}(x)| \leq r |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğe $B_{n,q}$ operatörü uygulanırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|B_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq B_{n,q}(|e_{r,1}(\cdot) - e_{r,1}(x)|; x) \leq r B_{n,q}(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)|; x)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa her $r \in \mathbb{N}$ için

$$|B_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq r \sqrt{B_{n,q}((e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x))^2; x)} = r \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q)} \leq r \sqrt{\frac{x(1-x)}{[n]_q}} \leq \frac{r}{2} \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

4.2.4.1. Sonuç. Her $x \in [0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,q_n}(e_{r,1}, x) = e_{r,1}(x), \quad r \in \mathbb{N}_0.$$

Burada; $\{q_n\}$, $(0, 1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.2.4.2. Sonuç. Her $x \in [0, 1]$ olsun. Eğer $f \in C[0, 1]$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,q_n}(f, x) = f(x).$$

Burada; $\{q_n\}$, $(0,1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.2.4.1. Teorem. Eğer $f \in C[0,1]$ ise $\delta = \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}$ için

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega\left(f; \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}\right).$$

İspat: $B_{n,q}(e_{0,1};x) = 1$ olduğu ve operatörün monotonluğu dikkate alınrsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq B_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|;x)$$

eşitsizliği bulunur. Her $t, x \in [0,1]$ için süreklilik modülünün yardımıyla

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f;\delta)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu son eşitsizlik ile birlikte değerlendirilse her $\delta > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|\right) \omega(f;\delta) \quad (4.20)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.20) ifadesine $B_{n,q}$ operatörü uygulanır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği dikkate alınrsa her $\delta > 0$ için

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mu_{n,1,2}(x;q)}\right) \omega(f;\delta) \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{x(1-x)}{[n]_q}}\right) \omega(f;\delta) \leq \left(1 + \frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}\right) \omega(f;\delta)$$

eşitsizliği bulunur. $\delta = \sqrt{\frac{1}{[n]_q}}$ olarak alınrsa

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega \left(f; \sqrt{\frac{1}{[n]_q}} \right)$$

istenen elde edilir. ■

4.2.4.2. Teorem. Her $f \in Lip_M \alpha$ ve $x \in [0,1]$ için

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq M \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^{\alpha/2}.$$

İspat: $f \in Lip_M \alpha$ ($M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$) olduğundan her $t, x \in [0,1]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|^\alpha$$

eşitsizliğine $B_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$|B_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq B_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|; x) \leq M B_{n,q}(|e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|^\alpha; x)$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizlikte $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ ile birlikte Hölder eşitsizliği dikkate

alınırsa

$$\begin{aligned} |B_{n,q}(f;x) - f(x)| &\leq M \left(B_{n,q} \left((e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^2; x \right) \right)^{\alpha/2} \\ &\leq M \left(\mu_{n,1,2}(x;q) \right)^{\alpha/2} \\ &\leq M \left(\frac{x(1-x)}{[n]_q} \right)^{\alpha/2} \\ &\leq M \left(\frac{1}{[n]_q} \right)^{\alpha/2} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. ■

4.3. Baskakov Operatörlerinin Farklı Genellemesi

Bu bölümde, q -Baskakov operatörlerinin yeni bir tipi tanımlanmıştır. Merkezi momentler için formüller elde edilmiş ve tanımlanan q -Baskakov operatör dizilerinin yaklaşım özellikleri ve yakınsama oranı, süreklilik modülü yardımıyla belirlenmiştir.

4.3.1. Operatörün İnşası ve Yaklaşım Özellikleri

Her $x \in [0, \infty)$ ve $q \in (0, 1)$ için

$$\varphi_{n,q}(x,u) = \frac{((1+x) \ominus x)_q^n}{((1+x) \ominus ux)_q^n} \quad (4.21)$$

ile tanımlı fonksiyon dizisi verilsin. Bu fonksiyon dizisi için açıktır ki $\varphi_{n,q}(x,0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x,1) = 1$ koşulları sağlanmaktadır. Her $n \in \mathbb{N}$ için q -türev yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u} &= \frac{\varphi_{n,q}(x,qu) - \varphi_{n,q}(x,u)}{(q-1)u} = \frac{\frac{((1+x) \ominus x)_q^n}{((1+x) \ominus qux)_q^n} - \frac{((1+x) \ominus x)_q^n}{((1+x) \ominus ux)_q^n}}{(q-1)u} \\ &= \frac{[n]_q x ((1+x) \ominus x)_q^n}{\prod_{s=0}^n (1+x - q^s xu)} = \frac{[n]_q x ((1+x) \ominus x)_q^n}{((1+x) \ominus ux)_q^{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} = \frac{[n]_q [n+1]_q \cdots [n+k-1]_q x^k ((1+x) \ominus x)_q^n}{((1+x) \ominus ux)_q^{n+k}}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanını $\frac{1}{[k]_q!}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} = \frac{[n]_q [n+1]_q \cdots [n+k-1]_q x^k ((1+x) \ominus x)_q^n}{[k]_q! ((1+x) \ominus ux)_q^{n+k}}$$

elde edilir. Buradan da gerekli düzenlemeler yapılır ve $u=0$ yazılırsa

$$\left. \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} = ((1+x) \ominus x)_q^n \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1+x)^{-n-k} \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade x 'e göre bir rasyonel fonksiyondur öyle ki $[0, \infty)$ aralığının hiçbir noktasında tanımsız değildir. Dolayısıyla (4.22) ifadesi (ii) koşulunu sağlar. Ayrıca, $q \in (0,1)$ ve $x \in [0, \infty)$ olduğundan dolayı (iii) koşulu da sağlanmaktadır. Sonuç olarak (4.21) ile tanımlı $\varphi_{n,q}$ fonksiyonları bir pozitif lineer operatör üretir. (4.22) ifadesi ve $\alpha_{n,k,q} = [n]_q$ olduğu dikkate alınır ve 4.1.1. bölümünde tanımlanan $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerlerine yazılırsa, $f \in C[0, \infty)$ ve $q \in (0,1)$ için,

$$K_{n,q}(f;x) = ((1+x) \ominus x)_q^n \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.23)$$

ifadesi elde edilir. Dikkat edilirse (4.23) ile tanımlanan operatör klasik Baskakov operatörünün Materyal ve Yöntem bölümünde verilen q -benzerlerinden farklı bir genellemedir.

Sonuç 4.1.2.1'den $K_{n,q}$ operatörünün ilk üç momenti aşağıdaki gibidir:

$$K_{n,q}(e_{0,1};x) = 1;$$

$$K_{n,q}(e_{1,1};x) = \frac{x}{1+x(1-q^n)};$$

$$K_{n,q}(e_{2,1};x) = \frac{q[n+1]_q}{[n]_q} \frac{x^2}{(1+x(1-q^n))(1+x(1-q^{n+1}))} + \frac{1}{[n]_q} \frac{x}{1+x(1-q^n)}.$$

Dahası, yukarıda elde edilen eşitlikler yardımıyla merkezi momentler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\mu_{n,1,1}(x,q) = \frac{x}{1+x(1-q^n)} - x;$$

$$\mu_{n,1,2}(x,q) = \frac{q[n+1]_q}{[n]_q} \frac{x^2}{(1+x(1-q^n))(1+x(1-q^{n+1}))} + \frac{1}{[n]_q} \frac{x}{1+x(1-q^n)} - \frac{2x^2}{(1+x(1-q^n))} + x^2$$

4.3.1.1. Lemma. $A > 0$ olsun, her $x \in [0, A]$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$|K_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq rA^{r-1} \sqrt{\mu_{n,1,2}(x,q)}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: $r \in \mathbb{N}_0$ olsun. Her $t, x \in [0, A]$ ve $A > 0$ için

$$\begin{aligned} |e_{r,1}(t) - e_{r,1}(x)| &\leq |t^r - x^r| = |t - x| |t^{r-1} + \dots + x^{r-1}| \leq |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)| |A^{r-1} + \dots + A^{r-1}| \\ &= rA^{r-1} |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)| \end{aligned}$$

buradan

$$|e_{r,1}(t) - e_{r,1}(x)| \leq rA^{r-1} |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğe $K_{n,q}$ operatörü uygulanırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|K_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq K_{n,q}(|e_{r,1}(\cdot) - e_{r,1}(x)|; x) \leq rA^{r-1} K_{n,q}(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)|; x)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa her $r \in \mathbb{N}$ için

$$|K_{n,q}(e_{r,1}; x) - e_{r,1}(x)| \leq rA^{r-1} \sqrt{K_{n,q}((e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x))^2; x)} = rA^{r-1} \sqrt{\mu_{n,1,2}(x,q)}$$

eşitsizliği elde edilir. ■

4.3.1.1. Teorem. Her $x \in [0, A]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n, q_n}(e_{r,1}, x) = e_{r,1}(x), \quad r \in \mathbb{N}_0.$$

Burada; $\{q_n\}$, $(0,1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o(1/n)$.

İspat: Her $x \in [0, A]$ ve $q_n \in (0,1)$ için ikinci merkezi moment ve $1/(1+x(1-q_n^n)) \leq 1$ eşitsizliği birlikte düşünülürse

$$\mu_{n,1,2}(x, q_n) \leq \frac{[n+1]_{q_n}}{[n]_{q_n}} x^2 + \frac{x}{[n]_{q_n}} - \frac{2x^2}{(1+x(1-q_n^n))} + x^2 = \frac{2x^3(1-q_n^n)}{(1+x(1-q_n^n))} + \frac{x(1+x)}{[n]_{q_n}} \leq 2(1-q_n^n)A^3 + \frac{A(1+A)}{[n]_{q_n}},$$

elde edilir. Yani

$$\mu_{n,1,2}(x, q_n) \leq 2(1-q_n^n)A^3 + \frac{A(1+A)}{[n]_{q_n}}. \quad (4.24)$$

Sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, A]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n,1,2}(x, q_n) = 0$ 'dir. O halde Lemma 4.3.1.1'den her ve

$r \in \mathbb{N}_0$ $x \in [0, A]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n, q_n}(e_{r,1}, x) = e_{r,1}(x)$ olduğu elde edilir. ■

4.3.1.1. Sonuç. Her $x \in [0, A]$ olsun. Eğer $f \in C[0, A]$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n, q_n}(f, x) = f(x)$.

Burada; $\{q_n\}$, $(0,1)$ üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4.3.1.2. Teorem. Eğer $f \in C[0, A]$ ise her $\delta > 0$ için

$$|K_{n, q}(f; x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{2(1-q^n)A^3 + \frac{A(1+A)}{[n]_q}}\right) \omega(f; \delta).$$

İspat: $K_{n, q}(e_{0,1}; x) = 1$ olduğu ve operatörün monotonluğu dikkate alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|K_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq K_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|; x) \quad (4.25)$$

eşitsizliği bulunur. Her $t, x \in [0, A]$ için süreklilik modülünün yardımıyla

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu son eşitsizlik ile (4.25) birlikte değerlendirilse her $\delta > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|\right) \omega(f; \delta) \quad (4.26)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.26) ifadesine (4.23) ile tanımlı $K_{n,q}$ operatörü uygulanır ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği düşünülürse her $\delta > 0$ için

$$|K_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{\mu_{n,1,2}(x;q)}\right) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği bulunur. (4.24) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$|K_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{2(1-q^n)A^3 + \frac{A(1+A)}{[n]_q}}\right) \omega(f; \delta)$$

istenilen elde edilir. ■

4.3.1.3. Teorem. Her $f \in Lip_M \alpha$ ve $x \in [0, A]$ için

$$|K_{n,q}(f;x) - f(x)| \leq M \left(2(1-q^n)A^3 + \frac{A(1+A)}{[n]_q}\right)^{\alpha/2}.$$

İspat: $f \in Lip_M \alpha$ ($M > 0$, $0 < \alpha \leq 1$) olduğundan her $t, x \in [0, A]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M |e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|^\alpha$$

eşitsizliğine $K_{n,q}$ operatörü uygulanırsa

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq K_{n,q}(|f(\cdot) - f(x)|; x) \leq MK_{n,q}(|e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|^\alpha; x)$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizlikte $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ ile birlikte Hölder eşitsizliği dikkate

$$\text{alınırsa } |K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq M \left(K_{n,q} \left((e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^2; x \right) \right)^{\alpha/2} \leq M (\mu_{n,1,2}(x; q))^{\alpha/2} \quad \text{eşitsizliği}$$

bulunur. (4.24) eşitsizliği dikkate alınırsa istenilen elde edilir. ■

4.3.1.4. Teorem. $f \in C^2[0, A]$ olsun. O halde her $x \in [0, A]$ için

$$\left| K_{n,q_n}(f; x) - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(x)}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,1,j}^*(x, q_n) \right| \leq F_{n,1}(x, q_n) \frac{\omega((D_{q_n}^2 f); \delta)}{[2]_{q_n}!}.$$

$$\text{Burada } F_{n,1}(x, q_n) = \mu_{n,1,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q_n) \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} e_{j,1}(x) (1-q_n)^j \mu_{n,1,4-j}(x, q_n)}, \quad \{q_n\}, \quad (0,1)$$

üzerinde tanımlı reel sayıların bir dizisidir öyle ki $1 - q_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ve

$$\mu_{n,1,j}^*(x, q) = K_{n,q} \left((e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))^j; x \right).$$

İspat: $f \in C^2[0, A]$ ve $x \in [0, A]$ olsun. q -Taylor formülünden; her $t, x \in [0, A]$ için

$$f(t) = f(x) + (D_{q_n} f)(x)(t - x) + \frac{(D_{q_n}^2 f)(x)}{[2]_{q_n}!} (t \ominus x)_{q_n}^2 + g_{q_n}(t; x) \quad (4.27)$$

eşitliği yazılabilir. Burada;

$$g_{q_n}(t; x) = \frac{(D_{q_n}^2 f)(\xi_{t,x}) - (D_{q_n}^2 f)(x)}{[2]_{q_n}!} (t \ominus x)_{q_n}^2$$

ve $\xi_{t,x}$ x ile x arasında olmak üzere; $|\xi_{s,v} - x| < |t - x|$. (4.17) ifadesine K_{n,q_n} operatörü uygulanırsa

$$K_{n,q_n}(f;x) = f(x) + (D_{q_n} f)(x) K_{n,q_n}((e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)); x) \\ + \frac{(D_{q_n}^2 f)(x)}{[2]_{q_n}!} K_{n,q_n}((e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))_{q_n}^2; x) + K_{n,q_n}(g_{q_n}; x).$$

Bu son aşğıdaki gibi düzenlenirse

$$\left| K_{n,q_n}(f;x) - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(x)}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,1,j}^*(x, q_n) \right| \leq K_{n,q_n}(g_{q_n}; x) \quad (4.28)$$

eşitsizliği elde edilir. İspatın bu aşamasında süreklilik modülünün yardımıyla (4.28) eşitsizliğinin sağ tarafında bulunan $K_{n,q_n}(g_{q_n}; x)$ için bir değerlendirme yapılacaktır. Her $\delta > 0$ için,

$$\left| (D_{q_n}^2 f)(\xi_{t,x}) - (D_{q_n}^2 f)(x) \right| \leq \omega((D_{q_n}^2); |\xi_{t,x} - x|) \leq \omega((D_{q_n}^2); |e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)|) \\ \leq \omega((D_{q_n}^2); \delta) \left(1 + \frac{|e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x)|}{\delta} \right)$$

elde edilir. Bu son ifadeye K_{n,q_n} operatörü uygulanırsa;

$$K_{n,q_n}(|g_{q_n}|; x) \leq \frac{\omega((D_{q_n}^2 f); \delta)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,1,2}^*(x; q_n) + K_{n,q_n}(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)| |(e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))_{q_n}^2|; x) \right]$$

eşitsizliği bulunur. $K_{n,q_n}(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)| |(e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))_{q_n}^2|; x)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa aşğıdaki ifade elde edilir:

$$K_{n,q_n}(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)| |(e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))_{q_n}^2|; x) \leq \sqrt{K_{n,q_n}((e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)); x)} \sqrt{K_{n,q_n}([(e_{1,1}(\cdot) \ominus e_{1,1}(x))_{q_n}^2]^2; x)}$$

$$(e_{1,1}(t) \ominus_{q_n} e_{1,1}(x))^2 = (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^2 + (1 - q_n) e_{1,1}(x) (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))$$

olduğu dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} \left[(e_{1,1}(t) \ominus_{q_n} e_{1,1}(x))^2 \right]^2 &= (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^4 + 2(1 - q_n) e_{1,1}(x) (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^3 \\ &+ (1 - q_n)^2 e_{1,1}(x) (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^2 = \sum_{p=0}^2 \binom{2}{p} (1 - q_n)^p e_{p,1}(x) (e_{1,1}(t) - e_{1,1}(x))^{4-p} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$K_{n,q_n} \left(|e_{1,1}(\cdot) - e_{1,1}(x)| \left| (e_{1,1}(\cdot) \ominus_{q_n} e_{1,1}(x))^2 \right|; x \right) \leq \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,1}(x) \mu_{n,1,4-j}(x, q_n)}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$K_{n,q_n} \left(|g_{q_n}|; x \right) \leq \frac{\omega \left((D_{q_n}^2 f); \delta \right)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,1,2}^*(x; q_n) + \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,1}(x) \mu_{n,1,4-j}(x, q_n)} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son ifade (4.28) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| K_{n,q_n}(f; x) - \sum_{j=0}^2 \frac{(D_{q_n}^j f)(x)}{[j]_{q_n}!} \mu_{n,1,j}^*(x, q_n) \right| \\ \leq \frac{\omega \left((D_{q_n}^2 f); \delta \right)}{[2]_{q_n}!} \left[\mu_{n,1,2}^*(x; q_n) + \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (1 - q_n)^j e_{j,1}(x) \mu_{n,1,4-j}(x, q_n)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$F_{n,1}(x, q_n) = \mu_{n,1,2}^*(x, q_n) + \sqrt{\mu_{n,1,2}(x, q_n)} \sqrt{\sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} e_{j,1}(x) (1 - q_n)^j \mu_{n,1,4-j}(x, q_n)}$$

olarak düşünülürse ispat tamamlanmış olur. ■

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Pozitif lineer operatör dizilerinin q -benzerlerinin Yaklaşım Teorisinde kullanımı son yıllarda giderek artan bir çalışma alanı olmuştur öyle ki Bernstein operatörü dışındaki diğer operatörler, örneğin Szasz-Mirakyan operatörü, Baskakov operatörü, Meyer-König-Zeller operatörü, Bleimann-Butzer-Hahn operatörü gibi birçok operatörün q -benzerleri inşa edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Son yıllardaki çalışmalara bakıldığında yukarıda adı geçen pozitif lineer operatörlerin q -benzerlerinin inşası için farklı teknikler kullanılmıştır. Örneğin Bernstein operatörünün farklı q -benzerlerinin olması bundan dolayıdır. Ancak pozitif lineer operatörlerin q -benzerlerinin üretilmesi için genel bir yöntem verilmemiştir. Bu alandaki bilinen genel inşa yöntemleri ise sınırlı sayıdadır. Bu tez çalışmasında, farklı tekniklerle elde edilen pozitif lineer operatörlerin q -benzerlerini veren genel bir operatör sınıfını, üreteç fonksiyonlarının yardımıyla nasıl inşa edildiği incelenmiştir. Bu inşa sürecinde önemli bir role sahip olan üreteç fonksiyonlarının sağlaması gereken asgari koşullar belirlenmiştir. Üreteç fonksiyonlarının uygun seçimi ile bilinen pozitif lineer operatörlerin q -benzerlerinin oluşturulmasının yanında daha fazlasının üretilmesine olanak sağlayan operatör sınıfının yaklaşım özellikleri de incelenmiştir. Ayrıca yaklaşım özelliklerinin incelenmesinde önemli bir yer tutan momentlerin hesaplanmasında da üretici fonksiyona bağlı hesaplamalar yapılmıştır.

Belirlenen amaç doğrultusunda elde edilen genel operatör: $q > 0$ ve $I_A = [0, A]$ şeklinde bir aralık olmak üzere $\{\varphi_{n,q}\}_{n=1}^{\infty}$, $I_A \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon dizisi için

i) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I_A$ için, $\varphi_{n,q}(x, 0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x, 1) = 1$,

ii) Her $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ için, $\left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0}$ var ve x değişkenine göre süreklidir,

iii) Her $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x, u \geq 0$ için, $\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \geq 0$

koşulları sağlandığında $f \in B(I_A)$ için

$$\mathcal{L}_{n,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \left. \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \right|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}}\right) \quad (5.1)$$

olarak tanımlanmıştır. $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün momentleri

$$\mathcal{L}_{n,q}(e_{r,i};x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}^r} \sum_{m=0}^r q^{m(m-1)/2} \mathbb{S}_q(r,m) \frac{\partial_q^m \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^m} \Big|_{u=1} \quad (5.2)$$

eşitliği ile hesaplanmıştır. (5.1) operatörler dizisinin yapısı incelendiğinde $\varphi_{n,q}$ fonksiyonun seçiminin etkisi oldukça fazla olduğu görülmektedir.

Aslında, q -parametresine bağlı genel bir pozitif lineer operatörler dizisinin inşa edilmesi ilk değildir. $q \in (0,1)$ ve \mathbb{R}^+ üzerinde sonsuz kez sürekli q -türeve sahip reel değerli bir $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ fonksiyon dizisi için aşağıdaki üç koşul sağlandığında

$$i) \quad \psi_n(0) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$ii) \quad (-1)^k D_q^k \psi_n(x) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, x \geq 0,$$

iii) Her $(x,k) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0$ için bir $i_k, 0 \leq i_k \leq k$, pozitif tamsayısı vardır öyle ki

$$D_q^{k+1} \psi_n(x) = (-1)^{i_k+1} D_q^{k-i_k} \psi_n(q^{i_k+1}x) \beta_{n,k,i_k,q}(x), \text{ burada } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_{n,k,i_k,q}(0)}{[n]_q^{i_k+1} q^{k-i_k}} = 1.$$

$f \in C_2(\mathbb{R}^+)$ için,

$$T_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{[k]_q!} q^{k(k-1)/2} D_q^k \psi_n(x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q q^{k-1}}\right), \quad x \geq 0 \quad (5.3)$$

yakınsak bir seri şeklinde 2009 yılında C. Radu [36] tarafından inşa edilmiştir. Fakat bu çalışmadaki (5.3) operatörler dizisi $q=1$ alındığında, V. A. Baskakov [16] tarafından 1957 yılında f ve $\varphi_n, [0, \infty)$ aralığı üzerinde sonsuz türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \varphi_n^{(k)}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N},$$

şeklinde tanımlanan operatör dizisinden başkası değildir. Benzer durum (5.1) ile verilen operatör dizileri için söz konusu değildir. Hem (5.1) hem de (5.3) operatörleri için zorlayıcı nokta ise uygun üreteç fonksiyonun belirlenmesidir. Aşağıda (5.1) için uygun olarak seçilen üretici fonksiyonlar ile elde edilen operatörler sırasıyla verilmiştir.

1- $n \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için $\varphi_{n,q}(x,u) := ((1-x) \oplus ux)_q^n / ((1-x) \oplus x)_q^n$ ile tanımlı fonksiyon dizisi yardımıyla

$$L_{n,q}(f;x) = \frac{1}{((1-x) \oplus x)_q^n} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

q -Lupaş Operatörü elde edilmiştir. Bu operatör ilk kez A. Lupaş [27] tarafından inşa edilmiştir.

2- Her $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ için $\varphi_{n,q}(x,u) = (1 \boxminus x \boxplus xu)_q^n$ ile tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}$ fonksiyon dizisi yardımıyla

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)$$

şeklinde q -Bernstein Operatörü elde edilmiştir. Bu tipteki q -Bernstein operatörü, ilk kez G. M. Phillips [28] tarafından q -ileri farklar kullanılarak oluşturulmuştur. Her ne kadar aynı operatör elde edilmişse de oluşturulma teknikleri bakımından farklıdır.

3- $\{b_n\}$ monoton artan pozitif reel sayıların bir dizisi olsun ve her $x \in [0, b_n]$ ve $q \in (0,1)$ için

$\varphi_{n,q}(x,u) = (1 \boxminus x/b_n \boxplus ux/b_n)_q^n$ ile tanımlı $\{\varphi_{n,q}\}$ fonksiyon dizisi yardımıyla

$$C_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \prod_{s=0}^{n-k-1} \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) f\left(\frac{[k]_q b_n}{[n]_q}\right), \quad x \in [0, b_n]$$

şeklinde q -Chlodowsky Operatörü elde edilmiştir. Bu operatör 2008 yılında H. Karlı ve V. Gupta [63] tarafından inşa edilmiştir.

4- Her $x \in [0, \infty)$ ve $q \in (0,1)$ için $\varphi_{n,q}(x,u) = (1 \oplus xu)_q^n / (1 \oplus x)_q^n$ ile tanımlı fonksiyon dizisi yardımıyla

$$H_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(k-1)/2} x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^k [n-k+1]_q}\right)$$

q -Bleimann-Butzer-Hahn Operatörü elde edilmiştir. Bu operatör 2007 yılında A. Aral ve O. Doğru [35] tarafından incelenmiştir.

5- $n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $q \in [0,1)$, $x \in [0,1)$ için $\varphi_{n,q}(x,u) = (1 \ominus x)_q^{n+1} / (1 \ominus ux)_q^{n+1}$ ile tanımlı fonksiyon dizisi yardımıyla

$$M_{n,q}(f;x) = (1 \ominus x)_q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^{-n} [k+n]_q}\right)$$

q -Meyer-König ve Zeller Operatörü elde edilmiştir. Bu operatör 2005 yılında O. Doğru ve O. Duman [34] tarafından incelenmiştir.

6- Her $x \in [0,\infty)$ ve $q \in (0,1)$ için $\varphi_{n,q}(x,u) = ((1+x) \ominus x)_q^n / ((1+x) \ominus ux)_q^n$ ile tanımlı fonksiyon dizisi yardımıyla

$$K_{n,q}(f;x) = ((1+x) \ominus x)_q^n \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1+x)^{-n-k} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

q -Baskakov Operatörü elde edilmiştir. Dikkat edilirse tanımlanan operatör klasik Baskakov operatörünün Materyal ve Yöntem bölümünde verilen q benzerlerinden farklı bir genellemedir. Böylece (5.1) operatörü yardımıyla literatürde olmayan yeni bir operatör elde edilmiştir. Ancak diğer q -benzerlerden farklı olarak $[0,\infty)$ aralığı üzerinde değil de bu aralığın kapalı bir alt aralığı üzerinde tanımlanmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bunların dışında da pozitif lineer operatörlerin farklı genellemelerinin q -benzerleri mevcuttur. Bunun için araştırmacılardan bu tezde önerilen yöntemi takip edilip, uygun üreteç fonksiyonları seçmeleri önerilmektedir. Bugünlerde yukarıda adı geçen pozitif lineer operatörlerin (p,q) -benzerlerinin oluşturulması oldukça yaygındır, fakat bu çalışmadakine benzer genel bir (p,q) genelleme henüz yapılmamıştır. Bu bağlamda bu çalışmadaki bulgular

bölümü incelendiğinde benzer şekilde (5.1) operatörünün (p,q) -benzerinin inşasının mümkün olduğu düşünülmektedir.

$\mathcal{L}_{n,q}$ operatör dizileri için Bulgular kısmında verilen Korovkin tipi teorem, çeşitli fonksiyon sınıflarındaki fonksiyonlara yaklaşım hızı ve Voronovskaya tipi teoremler yukarıda adı geçen operatörler için daha önce elde edilen sonuçlarla örtüştüğü görülmüştür. Bu da bize $\mathcal{L}_{n,q}$ operatör dizilerinin yukarıda adı geçen operatörleri sadece üretmediği bunun yanında yaklaşım özelliklerinin de incelenmesine olanak sağladığı gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Chebyshev, P. L., Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes. *Mémoires des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Petersbourg* **1854**, 7: 539–586.
- [2] Weierstrass, K., Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin* **1885**, 633-639.
- [3] Bernstein, S. N., Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondée sur le Calcul de Probabilités. *Commun. Soc. Math. Kharkow* **1912-13**, 2, (13): 1-2.
- [4] Pinkus, A., Weierstrass and approximation theory. *J. Approx. Theory* **2000**, 107, (1), 1-66.
- [5] Kantorovich, L. V., Sur Certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein. *I, II, C.R. Acad. URSS* **1930**, 1, (2), 563-568, 595-600.
- [6] Voronovskaya, E., Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein. *C. R. Acad. Sci. URSS* **1932**, 79-85.
- [7] Popoviciu, T., Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica(Cluj)* **1935**, 10, 49-54.
- [8] Chlodovsky, I., Sur le developpement des fonctions définies dans un interval infini en series de polynomes de M. S. Bernstein. *Compositio Math.* **1937**, 4, 380-393.
- [9] Mirakyan, G. M., Approximation of continuous functions with the aid of polynomials. *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **1941**, 31, 201-205.
- [10] Favard, J., Sur les multiplicateurs d'interpolation. *J. Math. Pures Appl.* **1944**, 23 (9), 219- 247.
- [11] Szasz, O., Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval. *J. Res., Nat. Bureau of St.* **1950**, 45, 239-245.
- [12] Popoviciu, T., Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare. *Lucrările Sesiunii Gen. Șt. Acad. Române, 2-12 iunie 1950, Editura Academiei Republicii Populare Române.* **1951**, 1664-1667.
- [13] Bohman, H., On approximation of continuous and of analytic functions. *Ark. Mat* **1952**, 2, 43-56.
- [14] Korovkin, P. P., On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk* **1953**, 90, 961-964.
- [15] Korovkin, P. P., *Linear Operators and Approximation Theory.* Hindustan Publishing Corp. (India): Delhi, 1960; p 222.
- [16] Baskakov, V. A., An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. *Dokl. Akad. Nauk* **1957**, 113, 249-251.
- [17] Meyer-König, W.; Zeller, K., Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.*, **1960**, 19, 89-94.

- [18] Cheney, E. W., Sharma, A., Bernstein power series. *Canadian J. Math.* **1964**, 16 (2), 241-252.
- [19] Durrmeyer, J. L., Une formule d'inversion de la transformee de Laplace: Applications a la th'eorie des moments, PhD thesis, Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, 1967.
- [20] Stancu, D. D., Asupra unei generalizari a polinoamelor lui Bernstein. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. Phys.* **1969**, 14, 31-45.
- [21] Ditzian, Z., Convergence of Sequences of Linear Positive Operators. *Remarks and Applications. J. Approx. Theory* **1975**, 14, 296-301.
- [22] Gadjiev, A. D., The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of P.P. Korovkin. *Dokl. Math.* **1975**, 15, 5 1433-1436.
- [23] Gadjiev, A. D., Theorems of Korovkin type. *Math. Notes* **1976**, 20, 5, 996-998.
- [24] Bleimann, G., Butzer, P. L. and Hahn, L., A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis. *Indag. Math.* **1980**, 42, 255-262.
- [25] Ibragimov, I. I.; Gadjiev, A. D., On a certain Family of linear positive operators. *Soviet Math. Dokl.*, English Trans. **1970**, 11, 1092-1095.
- [26] Şimşek, E., Pozitif Lineer Operatörlerin Yaklaşım Teorisindeki Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Mersin, 2013.
- [27] Lupaş, A., A q -analogue of Bernstein operatör. *Uni. of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus.* **1987**, 9, 85-92.
- [28] Phillips, G. M., Bernstein polynomials based on q -integers. *Ann. Numer. Math.* **1997**, 4, (1-4): 511-518.
- [29] Aral, A., A generalization of Szasz–Mirakyan operators based on q -integers. *Math. Comput. Model.* **2008**, 47, (9–10), 1052–1062.
- [30] Mahmudov, N. I., On q -parametric Szasz–Mirakjan operators. *Mediterr. J.Math.* **2010** 7, (3), 297–311.
- [31] Aral, A.; Gupta, V., On q -Baskakov type operators. *Demons. Math.* **2009**, 42, (1), 109–122.
- [32] Aral, A.; Gupta, V., Generalized q -Baskakov operators. *Math. Slovaca* **2011**, 61, (4), 619–634.
- [33] Trif, T., Meyer-König and Zeller operators based on the q -integers. *Rev. Anal. Numer. Theor. Approx.* **2002**, 29, 221–229.
- [34] Doğru, O. and Duman, O., Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on q -integers. *Publ. Math. Debrecen* **2006**, 68, (1-2):199-214.
- [35] Aral, A.; Doğru, O., Bleimann Butzer and Hahn operators based on q -integers. *J. Inequal. Appl.* **2007**, 12.
- [36] Radu, C., On statistical approximation of a general class of positive linear operators extended in q -calculus. *Appl. Math. Comput.* **2009**, 215, (6), 2317–2325.

- [37] Nowak, G., Gupta, V., The Rate of Pointwise Approximation of Positive Linear Operators Based on q -Integer. *Ukrainian Mathematical Journal* **2011**, 3, 350-360.
- [38] Karşlı, H., Recent results on Chlodovsky operators. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* **2011**, 56, (2), 423–436.
- [39] Holhoş, A., Contributions to the Approximation Of Functions, Ph. D. Thesis, Babeş-Boylai University, 2010.
- [40] Hacıyev A.; Hacısalıhoğlu, H. H., *Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı*. 1. Basım, A.Ü.F.F Döner Sermeye İşletmesi Yayınları:31, Ankara, 1995, 72 s.
- [41] Pitul, P. A., Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators, Ph. D. Thesis, Babeş-Boylai University, 2007.
- [42] Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*. Chelsea Publishing Company: New York, 1986; p 134.
- [43] Paltanea, R., *Approximation theory using positive linear operators*. Birkhauser: Boston, 2004;p 202.
- [44] Altomare, F.; Campiti, M., *Korovkin Type Approximation Theory and Its Application*. Walter de Gruyter Publications: Berlin, 1994; p 627.
- [45] Ernst, T., *The history of q -calculus and a new method*. U.U.D.M Report 2000, Department of Mathematics: Upsala University, 2000; p 230.
- [46] Bustamante, J., *Bernstein Operators and Their Properties*. Birkhäuser/Springer: Cham, 2017, p 420.
- [47] Gupta, V.; Tachev, G., *Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations*. Springer, 2017; p. 186.
- [48] Aral, A.; Gupta, V.; Agarwal, R. P., *Applications of q -Calculus in Operator Theory*, Springer. 2013, p 262.
- [49] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., Ekincioglu, İ., *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I-II*. Tekaç Eylül Yayıncılık, 2003, 1024 s.
- [50] Marsden, J. E., *Elementary Classical Analysis*. W.H. Freeman and Company: San Francisco, 1974; p 537.
- [51] Kızmaz, H., *Fonksiyonel Analiz Giriş*. Karadeniz Tek. Üniv. Basımevi: Trabzon, 1993; 322s
- [52] Davis, P. J., *Interpolation and Approximation*. Blaisdell Publishing Company: 1963; p 393.
- [53] Shevchuk, I. A., *Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a segment*. Naukova Dymka: Kiev, 1992: p 324.
- [54] Gadjiev, A. D.; Çakar, Ö., On uniform approximation by Bleimann, Butzer and Hahn operators on all positive semiaxis. *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* **1999**, 19, 5 21-26.

- [55] Jackson, D., On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials. *TAMS* **1912**, 13, 491-515.
- [56] Mamedov, R. G., On the order of approximation of functions by sequences of linear positive operators. (Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **1959**, 128, 674–676.
- [57] Shisha, O.; Mond, B., The degree of convergence of linear positive operators. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **1968**, 60, 1196-1200.
- [58] Esser, H., On pointwise convergence estimates for positive linear operators on $C[a, b]$. *Indag. Math.* **1976**, 38, 189–194.
- [59] Gonska, H., Quantitative Korovkin-type theorems on simultaneous approximation. *Math. Z.* **1984**, 186:419–433.
- [60] Jackson, F. H., On q -functions and a certain difference operator. *Trans. Roy. Soc. Edin.* **1908**, 46, 253–281.
- [61] Kac, V.; Cheung, P., *Quantum Calculus*. Universitext Springer: New York, 2002; p 112.
- [62] Carlitz, L., q -Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Math Journal.* **1948**, 15, (4), 987-1000.
- [63] Karsli, H.; Gupta, V., Some Approximation Properties of q -Chlodowsky Operators. *Applied Mathematics and Computation.* **2008**, 195, 220–229.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ersin ŞİMŞEK
Doğum Tarihi : 10.01.1984
E-mail : simsek.ersin@gmail.com
Öğrenim Durumu :

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lisans	Matematik	Mersin	2004-2008
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin	2009-2013
Doktora	Matematik	Mersin	2013-2019

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Şimşek, E.; Tunç, T. On approximation properties of some class positive linear operators in q -analysis. *Journal of Mathematical Inequalities*, **2018**, 12, 559-571.
2. Şimşek, E. On a New Type of q -Baskakov Operators. *Journal of Natural and Applied Sciences*, **2018**, 22, 121-125
3. Şimşek, E.; Tunç, T. On the construction of q -analogues for some positive linear operators. *Filomat*, **2017**, 31, 4287-4295.
4. Tunç, T.; Şimşek, E. Some Approximation Properties of Szasz–Mirakyan–Bernstein Operators of the Chlodovsky Type. *Ukrainian Mathematical Journal*, **2014**, 66, 928-936.
5. Tunç, T.; Şimşek, E. Some Approximation Properties of Szasz–Mirakyan–Bernstein Operators. *Ejpm*, **2014**, 7, 419-428.
6. Şimşek, E.; Tunç, T., On Some Sequences of the Positive Linear Operators Based on (p, q) -Calculus. International Conference on Mathematical Studies and Applications 2018, 2018-10-04, 2018-10-06, Karaman, Türkiye, **2018**.
7. Tunç, T.; Şimşek, E., Ayrık Tipte q -Pozitif Lineer Operatörlerin bir Genellemesi Üzerine. *Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications MADEA 8*, 2018-06-17, 2018-06-23, Cholpon-Ata, Kırgızistan, **2018**.
8. Şimşek, E.; Tunç, T., On some sequences of the positive linear operators based on q -calculus. *Caucasian Mathematics Conference- II*, 2017-08-22, 2017-08-24, Van, Türkiye, **2017**.
9. Şimşek, E., q -Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Yaklaşım Özellikleri. 11. Ankara Matematik Günleri, 2016-05-26, 2016-05-27, Ankara, Türkiye, **2016**.
10. Şimşek, E.; Tunç, T., Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin q -Benzerlerinin Üreteçleri. 14. Matematik Sempozyumu, 2015-05-14, 2015-05-16, Niğde, Türkiye, **2015**.
11. Şimşek, E.; Tunç, T., Szasz–Mirakyan–Bernstein Tipli Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri. 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, 2013-09-04, 2013-09-07, Diyarbakır, Türkiye, **2013**.
12. Şimşek, E.; Tunç, T., Approximation properties of the Szasz–Bernstein–Chlodovsky type operators. *Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications*, 2012-09-04, 2012-09-09, Mersin, Türkiye, **2012**.
13. Tunç, T.; Şimşek, E., Approximation Properties of some Positive Linear Operators with two variables. *Theory of Approximation of Functions and its Applications*, 2012-05-28, 2012-06-03, Kamianets Podilsky, Ukrayna, **2012**.