T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ

Vural DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Şubat-2019

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Vural DENİZ tarafından hazırlanan "Bazı Lineer Olmayan Fark Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin Periyodikliği" adlı tez çalışması 26.02.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Özkan ÖCALAN	…………………………
Danışman Doç. Dr. Kemal USLU	…………………………
Üye Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER	…………………………

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa YILMAZ
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Vural DENİZ
26.02.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ

Vural DENİZ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Kemal USLU

2019, 83 Sayfa

Jüri
Danışman: Doç. Dr. Kemal USLU
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Dr. Öğr. Üyesi Haldun Alpaslan PEKER

Bu çalışmada bazı lineer olmayan fark denklem sistemleri araştırılmış, bu sistemlerin çözümlerinin periyodik davranışları incelenmiştir. Ayrıca bu sistemlerin çözümleri başlangıç şartlarına bağlı olarak elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan fark denklem sistemleri, çözümlerin periyodu, rasyonel fark denklem sistemleri.

ABSTRACT

MS THESIS

THE PERIODICITY OF SOLUTIONS OF SOME NON-LINEAR DIFFERENCE EQATION SYSTEMS

Vural DENİZ

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELCUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Kemal USLU

2019, 83 Pages

Jury
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Kemal USLU
Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Assist. Prof. Dr. Haldun Alpaslan PEKER

In this study, some of non-linear difference equation systems are investigated, periodic behaviors of solutions of these systems are investigated. Also the solutions of these systems are obtained by initial conditions.

Keywords: Non-linear difference equation systems, the period of solutions, system of the rational difference equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. Kemal USLU danışmalığında hazırlanarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve desteklerini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Kemal USLU' ya, maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Vural DENİZ
KONYA-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	:	İki boyutlu reel sayılar kümesi
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	En az
$<$	:	Küçük
$>$	:	Büyük
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$=$	:	Eşit
$\neq$	:	Eşit değil

1. GİRİŞ

Fark denklem, bir ya da daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik göstermesine rağmen inceleme süreci yönünden diferansiyel denklemlerden daha yenidir. Diferansiyel denklemlerin temeli doğada kopukluğun olmadığı varsayımına dayanmaktadır. Birçok olayın matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20. yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide genetik olaylardaki gelişmeler tüm doğa olaylarının süreklilik terimlerinin ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Bu nedenle diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri kullanılarak kaldırılmak istenmiştir.

Diferansiyel denklemlerin bazı başlangıç değer problemleri için kapalı formda çözümleri yoktur ya da çözümleri bulmak çok zor olabilir. Böyle durumlarda nümerik yöntemlerle çözümlere ulaşılmaya çalışılır. Bu yöntemlerden birisi de fark denklemlerdir. Fark denklemler yapısı itibariyle temel aritmetik işlemlere dayandığı için problemin çözümünde kolaylık sağlar.

Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri daha çok, ekonomide arz talep dengesi hesabında, ekonomik dalgalanmalar ile fiyat değişim problemlerinde, işsizlik oranları hesabında, kuşaklar arasında genetik başkalaşım ilişkisinde, spektrum analizinde filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Son yıllarda fark denklemleri ile fark denklem sistemlerinin davranışları ve özellikle de periyodikliği, kararlılığı, sınırlılığı ve salınımlılığı ile ilgili birçok çalışma yapılmaktadır. Biz de bu çalışmamızda, bazı fark denklem sistemleri tanımlayarak bu sistemlerin çözümlerinin davranışlarını inceleyeceğiz.

Bu tez çalışmasında;

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{B}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} \quad , \quad s_{n+1} = \frac{2A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{D}{p_n - r_n}, \quad n \geq 0$$

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{B}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\ s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}},\ n\geq 0$$

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{B}{q_{n-3}-r_{n-3}},q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}},\ s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-2}-r_{n-2}},n\geq 0$$

fark denklem sistemlerinin $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ olduğu durumda periyodikliği incelenerek sonrasında aynı denklemlerin $A,B,C,D\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ parametrelerine bağlı olduğu durumlarda periyodikliği incelendi. Sonra bu sistemin genel hali olan

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{B}{q_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-k}-r_{n-k}},\quad n\geq 0$$

rasyonel fark denklem sistemi ele alınarak bu sistemin de çözümlerinin $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ olduğu durumda ve $A,B,C,D\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ parametrelerine bağlı olduğu durumlarda periyodikliği ayrıca incelenmiştir.

Son olarak da bu fark denklem sistemleri için nümerik örnekler ve bu örneklerin grafikleri verilmiştir.

2.FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Fark denklemleriyle ilgili son yıllarda çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Fark denklemlerinin davranışları ve fark denklem sistemlerinin özellikle periyodikliğiyle ilgili literatürde son yıllarda yapılmış olan bazı çalışmalara göz atalım:

Çınar (2004) çalışmasında,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \geq 0$$

fark denkleminin çözümlerini ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Dehghan ve ark. (2006) çalışmalarında,

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_{n-k}} + \frac{B}{x_{n-3k}} \quad \text{fark denkleminin,}$$

$A, B \in (0, \infty)$; $x_{-3k+1}, x_{-3k+2}, \ldots, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere çözümlerinin k periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Taşkara ve ark. (2011) çalışmalarında;

$k \in \mathbb{N}$, $x_{-k-1}, x_{-k}, \ldots \in \mathbb{R}$ başlangıç şartları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{p_n x_n + x_{n-(k+1)}}{q_n + x_{n-(k+1)}},$$

fark denkleminin periyodikliğini incelemişler ve $(k+1)$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Schinas (1997) çalışmasında,

$x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_{n-1}}$ $,n=0,1,...$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini kullanarak;

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0,\ A\in(0,\infty)$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}},\quad n\geq 0,\ A\in(0,\infty)$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}},\quad n\geq 0,\ A\in(0,\infty)$$

fark denklem sistemlerini incelemiştir. Sonrasında fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının *a,b* pozitif sabit sayılar olması veya $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ pozitif sayıların periyodik dizisi olması durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etmiştir.

Grove ve ark. (2001) çalışmalarında,

a, b, c ve d reel sayılar ve x_0,y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n},\ n=0,1,...$$

fark denklem sisteminin, çözümlerinin davranışlarını araştırmışlardır.

Clark ve Kulenović (2002) çalışmalarında,

a, b, c ve d pozitif sayılar ve x_0,y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n}, \ n \geq 0 \text{ için}$$

fark denklem sisteminin asimptotik davranışlarını ve sistemin çözümlerinin global asimptotik kararlılık özelliklerini incelemişlerdir.

Kulenovic ve Nurkanovic (2003) çalışmalarında,

A ve B katsayıları $(0, \infty)$ aralığında reel sayılar ve başlangıç şartları x_0, y_0 negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = Ax_n \frac{y_n}{1 + y_n}, \quad y_{n+1} = By_n \frac{x_n}{1 + x_n},$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılığını incelemişlerdir.

Çınar (2004) çalışmasında,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}$$

fark denklem sistemini inceleyerek çözümlerinin dört periyotlu olduğunu elde etmiştir.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1} = \frac{1}{z_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} y_{n-1}}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini inceleyerek $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) çalışmalarında,

pozitif başlangıç şartları altında,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}, \quad y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}, \quad n \geq 0$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Kulenovic ve Nurkanovic (2005) çalışmalarında,

a,b,c,d,e ve f, $(0,\infty)$ aralığında keyfi seçilen reel sayılar ve başlangıç şartları x_0, y_0, z_0 negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, \quad z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, \quad n = 0,1,2,...$$

fark denklem sistemin çözümlerinin global kararlılığını incelemişlerdir.

Özban (2006) çalışmasında;

tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}, \quad n \geq 0$$

fark denklem sisteminin bütün pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Iricanin ve Stevic (2006) çalışmalarında;

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}}, \quad \ldots \quad , x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}}, \quad x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)} + x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}}, \quad \ldots \quad , x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}} \quad k \in \mathbb{N}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Papaschinopoulos ve ark. (2007) çalışmalarında;

$a_i, b_i, (i=1,2,...,k)$ pozitif sabitler , $k \geq 3$ tamsayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere,

$$x_1(n+1) = \frac{a_k x_k(n) + b_k}{x_{k-1}(n-1)},$$

$$x_2(n+1) = \frac{a_1 x_1(n) + b_1}{x_k(n-1)},$$

.

.

.

$$x_i(n+1) = \frac{a_{i-1} x_{i-1}(n) + b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)}, \; i = 3,4,...,k$$

denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Şimşek ve ark. (2009) çalışmalarında;

A katsayısı ve x_0, y_0 başlangıç şartları $(0,\infty)$ aralığında reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{y_n}{x_n}\right\}, \; y_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{y_n}, \frac{x_n}{y_n}\right\}, \; n \geq 0$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Köse ve ark. (2010) çalışmalarında;

$$x_{n+1} = \frac{A}{y_n}, \; y_{n+1} = \frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-1}}, \; n = 0,1,2,... \text{ ve } x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, A, B \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Kılıklı (2011) tez çalışmasında;

$$x_{n+1} = \frac{A}{y_{n-k}},\ y_{n+1} = \frac{B}{z_{n-k}},\ z_{n+1} = \frac{Bx_{n-1}}{y_n x_{n-(k+1)}},\ n = 0,1,2,...\ ve\ A,B \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$$

denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Emre (2014) tez çalışmasında;

$$x_{n+1} = \frac{Ay_{n-1}}{y_n z_{n-3}} + \frac{B}{z_{n-2}},\ y_{n+1} = \frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1} = \frac{A}{x_{n-2} - y_{n-2}},\ n \geq 0$$

fark denklem sisteminin $A,B \in \mathbb{R} - \{0\}$ durumunda çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Uslu ve Esen (2015) çalışmalarında;

$$x_{n+1} = \frac{A}{y_{n-1}},\ y_{n+1} = \frac{B}{z_{n-1} - x_{n-1}},\ z_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}}{x_n y_{n-2}} + \frac{A}{y_{n-1}},\ n \geq 0$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin $A,B \in \mathbb{R} - \{0\}$ durumunda çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Uslu ve Uğurlu (2016) çalışmalarında;

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} + y_{n-1}},\ y_{n+1} = \frac{1}{z_{n-1} - x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-1} + y_{n-1}},\ z_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n\left(x_{n-2} + y_{n-2}\right)} + \frac{1}{x_{n-1} + y_{n-1}},\ n \geq 0$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

3.FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde yer alan bazı genel tanımlara ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 3.1. $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \tag{3.1}$$

eşitliğine bir fark denklemi denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 3.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 3.3. $a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$, katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{3.2}$$

biçimindeki bir denkleme k yıncı basamaktan lineer fark denklem denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman homojen fark denklemi, aksi durumda homojen olmayan fark denklemi olarak adlandırılır. Buna göre k yıncı basamaktan bir lineer homojen fark denklem

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, (3.2) denklemine sabit katsayılı, aksi halde değişken katsayılı fark denklem denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 3.4. $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$, fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar.

Her $n \geq n_0$ için

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0 \tag{3.4}$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_r$ sabitleri var ise, bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımlıdır denir. (3.4) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde lineer bağımsızdır denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 3.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olmak üzere $\forall\ x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n \geq 0 \tag{3.5}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.5. Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ 'e (3.5) denkleminin denge noktası denir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.6. Eğer $\forall n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subset I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (3.5) denkleminin değişmez aralığı denir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.7. $\bar{x}$, (3.5) denkleminin denge noktası olmak üzere:

- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır,
- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,
- Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası,

- Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\overline{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır,
- Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır,
- Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \gamma$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \overline{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına repeller denir

(Elaydi, 1995).

Tanım 3.8. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için p, $x_{n+p} = x_n$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.9. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için p, $x_{n+p} = x_n$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.10. (3.5) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde alırsak;

$$r = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial u} \quad \text{ve} \quad s = \frac{\partial f(\overline{x}, \overline{x})}{\partial v}$$

olmak üzere;

$$y_{n+1} = r y_n + s y_{n-1} \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.5) denkleminin $\overline{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi denir.

(3.6) denkleminin karakteristik denklemi ise;

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{3.7}$$

şeklindedir (Elaydi, 1995) .

Teorem 3.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

a. Eğer (3.7) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b. Eğer (3.7) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c. Eğer (3.7) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

d. Eğer (3.7) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

e. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.

f. Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$'e global asimptotik kararlıdır denir.

g. Eğer (3.7) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır

(Chatterjee ve ark., 2003).

Tanım 3.11. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \le x_n \le Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine sınırlıdır denir (Elaydi, 1995).

Tanım 3.12.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n, z_n) \\ z_{n+1} &= f_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \tag{3.8}$$

fark denklem sistemi verilsin. Eğer $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ (3.9) şartları sağlarsa, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ noktası (3.8) denklem sisteminin denge noktası olarak adlandırılır

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{y} &= f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ \bar{z} &= f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(Nasri ve ark., 2005).

Tanım 3.13. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|(x_0, y_0, z_0) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\| < \delta$ iken $((x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3)$

$\forall n \geq 0$ için $\|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\| < \varepsilon$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (3.8) sisteminin denge noktası olan $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ kararlıdır denir. Aksi halde, kararsızdır (Nasri ve ark., 2005).

Tanım 3.14. Eğer (3.8) sisteminin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\|(x_0, y_0, z_0) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\| < \gamma$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$\lim_{n \to \infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\| = 0$

ise (3.8) sisteminin denge noktası asimptotik kararlıdır (Nasri ve ark., 2005) .

Tanım 3.15. Eğer (3.8) sisteminin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$\lim_{x \to \infty} \|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\| = 0$

ise (3.8) sisteminin denge noktası olan $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ global asimptotik kararlıdır denir (Nasri ve ark., 2005).

Teorem 3.3. (3.8) denklem sisteminin $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ denge noktasında jakobiyen matrisi

$$J(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dz}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} \\ \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dy}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dz}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} \\ \left(\frac{df_3}{dx}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dy}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dz}\right)_{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} \end{vmatrix}$$

olup, bu jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu

$P(\lambda) = \det\left[J(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) - \lambda I\right] = 0$

ile verilsin.

Bu polinomda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

- $P(\lambda)$ nın bütün kökleri 1 den küçükse denge noktası $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ kararlıdır.

- $P(\lambda)$ nın köklerinden en az biri 1 den büyükse denge noktası $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ kararsızdır

(Nasri ve ark., 2005).

4. BAZI LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde elde edilen sonuçlar Kılıklı (2011), Emre (2014) ve Hanedar'ın (2014) çalışmalarındaki yöntemlerden yararlanılarak elde edilmiş olup ilk kez ele alınan orijinal sonuçlardır.

Sekiz alt bölümden oluşan bu bölümde ilk olarak,
$p_0,\, q_{-1},\, q_0,\, r_{-1},\, r_0,\, s_{-1},\, s_0 \in (0,\infty)$ ve $p_0 \neq r_0,\, s_i \neq q_i + r_i,\, q_i \neq r_i,\, i = \{-1,0\}$ olmak üzere,

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_n - r_n} \tag{4.1}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Sonrasında (4.1) sisteminde $A, B, C, D \in \mathbb{R} - \{0\}$ parametreleri kullanılarak yazılan,

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{B}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+1} = \frac{2A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{D}{p_n - r_n} \tag{4.2}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Benzer şekilde (4.3) bölümünde,

$p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-2,-1,0\}$ ve $p_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1}=\frac{1}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+1}=\frac{1}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad s_{n+1}=\frac{2}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}} \tag{4.3}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Sonrasında (4.3) sisteminde $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ parametreleri kullanılarak yazılan,

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{B}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}} \tag{4.4}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Çalışmanın (4.5) bölümünde,

$p_{-2},p_{-1},p_0,q_{-3},q_{-2},q_{-1},q_0,r_{-3},r_{-2},r_{-1},r_0,s_{-3},s_{-2},s_{-1},s_0\in(0,\infty)$, $p_i\neq r_i, i=\{-2,-1,0\}$ ve $s_i\neq q_i+r_i, q_i\neq r_i, i=\{-3,-2,-1,0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1}=\frac{1}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{1}{q_{n-3}-r_{n-3}},\quad q_{n+1}=\frac{1}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}},\quad s_{n+1}=\frac{2}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}+\frac{1}{p_{n-2}-r_{n-2}} \tag{4.5}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

(4.6) bölümünde ise (4.5) sisteminde $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ parametreleri kullanılarak yazılan,

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{B}{q_{n-3}-r_{n-3}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}},\ s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-2}-r_{n-2}} \tag{4.6}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Sonrasında önceki altı bölümde incelenen sistemlerin periyotlarının belirli bir düzen içerinde olduğu göz önüne alınarak bu sistemlerin genel hali olan;

$p_{-k}, p_{-k+1}, ..., p_{-1}, p_0, q_{-k-1}, q_{-k}, ..., q_{-1}, q_0, r_{-k-1}, r_{-k}, ..., r_{-1}, r_0, s_{-k-1}, s_{-k}, ..., s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$ ve

$p_i \neq r_i, i = \{-k, -k+1, ..., 0\}$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-k-1, -k, ..., 0\}$, $k \in \mathbb{N}$

olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{1}{q_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-k} - r_{n-k}} \tag{4.7}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

Son olarak (4.7) sisteminde $A, B, C, D \in \mathbb{R} - \{0\}$ parametreleri kullanılarak yazılan,

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{B}{q_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{Cr_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}}, s_{n+1} = \frac{2A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{Cr_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}} + \frac{D}{p_{n-k} - r_{n-k}} \tag{4.8}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliği incelenmiştir.

4.1. (4.1) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_0,\ q_{-1},\ q_0,\ r_{-1},\ r_0,\ s_{-1},\ s_0 \in (0,\infty)$ ve $p_0 \neq r_0,\ s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i,\ i = \{-1,0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_n - r_n} \tag{4.1}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. $p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_0 \neq r_0,\ s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ ve $p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0$ herhangi pozitif başlangıç şartları olmak üzere (4.1) denkleminde $n = 0$ alırsak;

$$p_1 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}}, \quad q_1 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})}{r_{-1}},$$

$$r_1 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0}, \quad s_1 = \frac{2}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})}{r_{-1}} + \frac{1}{p_0 - r_0}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonraki her adımlarda indisler birer arttırılır ve bir önceki adımlarda elde edilen sonuçları yerine koyarak gerekli sadeleştirmeleri yaparsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_2 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{1}{q_0 - r_0} = p_0 - r_0 + \frac{1}{q_0 - r_0}, \quad q_2 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{r_1(s_0 - r_0 - q_0)}{r_0} = p_0 - r_0 + \frac{1}{r_0},$$

$$r_2 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} = p_0 - r_0, \quad s_2 = \frac{2}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{r_1(s_0 - r_0 - q_0)}{r_0} + \frac{1}{p_1 - r_1} = 2(p_0 - r_0) + \frac{1}{r_0} + q_{-1} - r_{-1}$$

$$p_3 = p_1 - r_1 + \frac{1}{q_1 - r_1} = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}} + \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})}, \quad q_3 = p_1 - r_1 + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}} + s_0 - r_0 - q_0,$$

$$r_3 = p_1 - r_1 = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}}, \quad s_3 = 2(p_1 - r_1) + \frac{1}{r_1} + q_0 - r_0 = \frac{2}{q_{-1} - r_{-1}} + s_0 - r_0 - q_0 + q_0 - r_0$$

$$p_4 = \frac{1}{q_0 - r_0} + \frac{r_0}{r_1(s_0 - r_0 - q_0)} = \frac{1}{q_0 - r_0} + r_0, \quad q_4 = \frac{1}{q_0 - r_0} + s_1 - r_1 - q_1 = \frac{1}{q_0 - r_0} + \frac{1}{p_0 - r_0},$$

$$r_4 = \frac{1}{q_0 - r_0}, \quad s_4 = \frac{2}{q_0 - r_0} + (s_1 - r_1 - q_1) + (q_1 - r_1) = \frac{2}{q_0 - r_0} + \frac{1}{p_0 - r_0} + \frac{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})}{r_{-1}}$$

$$p_5 = \frac{1}{q_1 - r_1} + r_1 = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0},$$

$$q_5 = \frac{1}{q_1 - r_1} + \frac{1}{p_1 - r_1} = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + q_{-1} - r_{-1},$$

$$r_5 = \frac{1}{q_1 - r_1} = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})},$$

$$s_5 = \frac{2}{q_1 - r_1} + \frac{1}{p_1 - r_1} + \frac{r_1(s_0 - r_0 - q_0)}{r_0} = \frac{2r_{-1}}{r_0(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + q_{-1} - r_{-1} + \frac{1}{r_0}$$

$$p_6 = \frac{r_0}{r_1(s_0 - r_0 - q_0)} + \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} = r_0 + p_0 - r_0 = p_0,$$

$$q_6 = \frac{r_0}{r_1(s_0 - r_0 - q_0)} + q_0 - r_0 = r_0 + q_0 - r_0 = q_0,$$

$$r_6 = \frac{r_0}{r_1(s_0 - r_0 - q_0)} = r_0,$$

$$s_6 = \frac{2r_0}{r_1(s_0 - r_0 - q_0)} + q_0 - r_0 + \frac{1}{r_1} = 2r_0 + q_0 - r_0 + s_0 - r_0 - q_0 = s_0$$

Bu şekilde işleme devam edersek, $p_0 \neq r_0,\ s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i, i = \{-1, 0\}$ olduğundan hiçbir adımda rasyonel ifadelerin paydasının sıfır olmadığı görülmektedir. Elde edilen tüm ifadeler $p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0$ başlangıç şartlarına bağlı olarak yazılabilmektedir. Başlangıç şartları ne olursa olsun bu durum değişmeyeceği için sistemdeki bütün denklemler iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.1. $p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$ ve $p_0 \neq r_0,\ s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i, i = \{-1, 0\}$ olmak üzere, (4.1) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.1) denklem sisteminin çözümleri periyodiktir ve periyodu altıdır.

İspat: (4.1) fark denklem sisteminde her bir adımda *n* yerine (*n+1*) yazarak iterasyon yöntemi uygularsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_n - r_n}$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} + \frac{1}{q_n - r_n} = p_n - r_n + \frac{1}{q_n - r_n},$$

$$q_{n+2} = \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} + \frac{r_{n+1}(s_n - r_n - q_n)}{r_n} = p_n - r_n + \frac{1}{r_n},$$

$$r_{n+2} = \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} = p_n - r_n,$$

$$s_{n+2} = \frac{2}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} + \frac{r_{n+1}(s_n - r_n - q_n)}{r_n} + \frac{1}{p_{n+1} - r_{n+1}} = 2(p_n - r_n) + \frac{1}{r_n} + q_{n-1} - r_{n-1}$$

$$p_{n+3} = p_{n+1} - r_{n+1} + \frac{1}{q_{n+1} - r_{n+1}} = \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}} + \frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})},$$

$$q_{n+3} = p_{n+1} - r_{n+1} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}} + s_n - r_n - q_n,$$

$$r_{n+3} = p_{n+1} - r_{n+1} = \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}},$$

$$s_{n+3} = 2(p_{n+1} - r_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}} + q_n - r_n = \frac{2}{q_{n-1} - r_{n-1}} + s_n - r_n - q_n + q_n - r_n$$

$$p_{n+4}=\frac{1}{q_n-r_n}+\frac{r_n}{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}=\frac{1}{q_n-r_n}+r_n\,,$$

$$q_{n+4}=\frac{1}{q_n-r_n}+s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}=\frac{1}{q_n-r_n}+\frac{1}{p_n-r_n}\,,$$

$$r_{n+4}=\frac{1}{q_n-r_n}\,,$$

$$s_{n+4}=\frac{2}{q_n-r_n}+(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})+(q_{n+1}-r_{n+1})=\frac{2}{q_n-r_n}+\frac{1}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+5}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}+r_{n+1}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{1}{s_n-r_n-q_n}\,,$$

$$q_{n+5}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+q_{n-1}-r_{n-1}\,,$$

$$r_{n+5}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}\,,$$

$$s_{n+5}=\frac{2}{q_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}{r_n}=\frac{2r_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+q_{n-1}-r_{n-1}+\frac{1}{r_n}$$

$$p_{n+6}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+\frac{1}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=r_n+p_n-r_n=p_n\,,$$

$$q_{n+6}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+q_n-r_n=r_n+q_n-r_n=q_n\,,$$

$$r_{n+6}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}=r_n\,,$$

$$s_{n+6}=\frac{2r_n}{r_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+q_n-r_n+\frac{1}{r_{n+1}}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

bulunur ve (4.1) fark denklem sisteminin altı periyotlu olduğu görülür.

4.2. (4.2) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde,

$p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_0 \neq r_0, s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere,

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{B}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+1} = \frac{2A}{s_n - r_n - q_n} + \frac{Cr_n(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_{n-1}} + \frac{D}{p_n - r_n} \tag{4.2}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. (4.2) fark denklem sistemi (4.1) sisteminin A,B,C,D parametrelerine bağlı şekildeki ifade edilmiş hali olduğundan, (4.1) sistemindeki denklemler iyi tanımlı ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olduğu için (4.2) sistemindeki denklemler de iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.2.1. $p_0, q_{-1}, q_0, r_{-1}, r_0, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_0 \neq r_0$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere, (4.2) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.2) denklem sisteminin çözümlerinin altı periyotlu olması için gerek ve yeter şart $B = DC$ olmasıdır.

İspat: Yukarıda belirtilen başlangıç şartları altında (4.2) denklem sisteminin çözümlerinin altı periyotlu olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.2) denklem sisteminde iterasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{B}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+2}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{B}{q_n-r_n}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{B}{q_n-r_n},$$

$$q_{n+2}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{Cr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}{r_n}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=\frac{A(p_n-r_n)}{D},$$

$$s_{n+2}\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{Cr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}{r_n}+\frac{D}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{2A(p_n-r_n)}{D}+\frac{AC}{r_n}+\frac{D(q_{n-1}-r_{n-1})}{B}$$

$$p_{n+3}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+\frac{B}{q_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{Br_{n-1}}{Cr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})},$$

$$q_{n+3}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+\frac{AC}{r_{n+1}}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+C(s_n-r_n-q_n),$$

$$r_{n+3}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})},$$

$$s_{n+3}=\frac{2A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+\frac{AC}{r_{n+1}}+\frac{D(q_n-r_n)}{B}=\frac{2AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+C(s_n-r_n-q_n)+\frac{D(q_n-r_n)}{B}$$

$$p_{n+4}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{Br_n}{Cr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{Br_n}{AC},$$

$$q_{n+4}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+4}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)},$$

$$s_{n+4}=\frac{2AB}{D(q_n-r_n)}+C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})+\frac{D(q_{n+1}-r_{n+1})}{B}=\frac{2AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{CDr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{Br_{n-1}}$$

$$p_{n+5}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{Br_{n+1}}{AC}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{B}{C(s_n-r_n-q_n)},$$

$$q_{n+5}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B},$$

$$r_{n+5}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})},$$

$$s_{n+5}=\frac{2AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{CDr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}{Br_n}=\frac{2ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B}+\frac{ACD}{Br_n}$$

$$p_{n+6}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+\frac{B}{C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{B(p_n-r_n)}{CD}=\frac{Bp_n}{CD},$$

$$q_{n+6}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+\frac{CD(q_n-r_n)}{B}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{CD(q_n-r_n)}{B}=\left(\frac{B}{DC}-\frac{DC}{B}\right)r_n+\frac{CD}{B}q_n,$$

$$r_{n+6}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}=\frac{Br_n}{CD},$$

$$\begin{aligned}s_{n+6}&=\frac{2ABr_n}{CDr_{n+1}(s_n-r_n-q_n)}+\frac{CD(q_n-r_n)}{B}+\frac{ACD}{Br_{n+1}}\\&=\frac{2Br_n}{CD}+\frac{CD}{B}(q_n-r_n)+\frac{DC}{B}(s_n-r_n-q_n)=\left(\frac{2B}{CD}-\frac{2CD}{B}\right)r_n+\frac{DC}{B}s_n\end{aligned}$$

bulunur. Sistemin altı periyotlu olabilmesi için son eşitliklerden $B=DC$ olacağı açıktır.

Teoremin yeter şartının ispatı için (4.2) denklem sisteminde $B=DC$ alarak sistemimizin altı periyotlu olduğunu göstermeliyiz. (4.2) denklem sisteminde $B=DC$ olsun;

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{DC}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+2}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{DC}{q_n-r_n},\quad q_{n+2}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A(p_n-r_n)}{D},\quad s_{n+2}=\frac{2A(p_n-r_n)}{D}+\frac{AC}{r_n}+\frac{q_{n-1}-r_{n-1}}{C}$$

$$p_{n+3}=\frac{AC}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{Dr_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})},\quad q_{n+3}=\frac{AC}{q_{n-1}-r_{n-1}}+C(s_n-r_n-q_n),$$

$$r_{n+3}=\frac{AC}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad s_{n+3}=\frac{2AC}{q_{n-1}-r_{n-1}}+C(s_n-r_n-q_n)+\frac{q_n-r_n}{C}$$

$$p_{n+4}=\frac{AC}{q_n-r_n}+\frac{Dr_n}{A},\quad q_{n+4}=\frac{AC}{q_n-r_n}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+4}=\frac{AC}{q_n-r_n},\quad s_{n+4}=\frac{2AC}{q_n-r_n}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{D}{(s_n-r_n-q_n)},\quad q_{n+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+(q_{n-1}-r_{n-1}),$$

$$r_{n+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})},\quad s_{n+5}=\frac{2Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+(q_{n-1}-r_{n-1})+\frac{A}{r_n}$$

$$p_{n+6}=r_n+p_n-r_n=p_n,\quad q_{n+6}=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+6}=r_n,\quad s_{n+6}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

sistemin altı periyotlu olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2 $p_0,q_{-1},q_0,r_{-1},r_0,s_{-1},s_0\in(0,\infty)$, $p_0\neq r_0,\ s_i\neq q_i+r_i, q_i\neq r_i, i=\{-1,0\}$, başlangıç şartları, $A,B,C,D\in\mathbb{R}\text{-}\{0\}$ olmak üzere ve $B=DC$ durumunda (4.2) denklem sisteminin çözümünün $\{p_n,q_n,r_n,s_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.2) denklem sisteminin çözümleri;

$$p_{6n+1}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},\quad q_{6n+1}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{Cr_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}},$$

$$r_{6n+1}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},\quad s_{6n+1}=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{Cr_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{6n+2}=\frac{A(p_0-r_0)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},\quad q_{6n+2}=\frac{A(p_0-r_0)}{D}+\frac{AC}{r_0},$$

$$r_{6n+2}=\frac{A(p_0-r_0)}{D},\quad s_{6n+2}=\frac{2A(p_0-r_0)}{D}+\frac{AC}{r_0}+\frac{q_{-1}-r_{-1}}{C}$$

$$p_{6n+3}=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})},\quad q_{6n+3}=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}}+C(s_0-r_0-q_0),$$

$$r_{6n+3}=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}},\quad s_{6n+3}=\frac{2AC}{q_{-1}-r_{-1}}+C(s_0-r_0-q_0)+\frac{q_0-r_0}{C}$$

$$p_{6n+4}=\frac{AC}{q_0-r_0}+\frac{Dr_0}{A},\quad q_{6n+4}=\frac{AC}{q_0-r_0}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{6n+4}=\frac{AC}{q_0-r_0},\quad s_{6n+4}=\frac{2AC}{q_0-r_0}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}}$$

$$p_{6n+5}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+\frac{D}{s_0-r_0-q_0},\quad q_{6n+5}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+q_{-1}-r_{-1}$$

$$r_{6n+5}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})},\quad s_{6n+5}=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+q_{-1}-r_{-1}+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{6n+6}=p_0,\quad q_{6n+6}=q_0,$$

$$r_{6n+6}=r_0,\quad s_{6n+6}=s_0$$

şeklindedir.

İspat: $n=0$ için çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin sağlandığı yani yukarıdaki eşitliklerin doğru olduğunu varsayarak $(n+1)$ için sağlandığını gösterelim;

$$p_{6n+7}=\frac{A}{s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}}+\frac{DC}{q_{6n+5}-r_{6n+5}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},$$

$$q_{6n+7}=\frac{A}{s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}}+\frac{Cr_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}{r_{6n+5}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{Cr_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}},$$

$$r_{6n+7}=\frac{A}{s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},$$

$$s_{6n+7}=\frac{2A}{s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}}+\frac{Cr_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}{r_{6n+5}}+\frac{D}{p_{6n+6}-r_{6n+6}}$$
$$=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{Cr_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{6n+8}=\frac{A(p_{6n+6}-r_{6n+6})}{D}+\frac{DC}{q_{6n+6}-r_{6n+6}}=\frac{A(p_0-r_0)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},$$

$$q_{6n+8}=\frac{A(p_{6n+6}-r_{6n+6})}{D}+\frac{AC}{r_{6n+6}}=\frac{A(p_0-r_0)}{D}+\frac{AC}{r_0},$$

$$r_{6n+8}=\frac{A(p_{6n+6}-r_{6n+6})}{D}=\frac{A(p_0-r_0)}{D},$$

$$s_{6n+8}=\frac{2A(p_{6n+6}-r_{6n+6})}{D}+\frac{AC}{r_{6n+6}}+\frac{q_{6n+5}-r_{6n+5}}{C}=\frac{2A(p_0-r_0)}{D}+\frac{AC}{r_0}+\frac{q_{-1}-r_{-1}}{C}$$

$$p_{6n+9}=\frac{AC}{q_{6n+5}-r_{6n+5}}+\frac{Dr_{6n+5}}{r_{6n}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})},$$

$$q_{6n+9}=\frac{AC}{q_{6n+5}-r_{6n+5}}+C(s_{6n}-r_{6n}-q_{6n})=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}}+C(s_0-r_0-q_0),$$

$$r_{6n+9}=\frac{AC}{q_{6n+5}-r_{6n+5}}=\frac{AC}{q_{-1}-r_{-1}},$$

$$s_{6n+9}=\frac{2AC}{q_{6n+5}-r_{6n+5}}+C(s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6})+\frac{q_{6n+6}-r_{6n+6}}{C}=\frac{2AC}{q_{-1}-r_{-1}}+C(s_0-r_0-q_0)+\frac{q_0-r_0}{C}$$

$$p_{6n+10}=\frac{AC}{q_{6n+6}-r_{6n+6}}+\frac{Dr_{6n+6}}{A}=\frac{AC}{q_0-r_0}+\frac{Dr_0}{A},$$

$$q_{6n+10}=\frac{AC}{q_{6n+6}-r_{6n+6}}+\frac{CD}{p_{6n+6}-r_{6n+6}}=\frac{AC}{q_0-r_0}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{6n+10}=\frac{AC}{q_{6n+6}-r_{6n+6}}=\frac{AC}{q_0-r_0},$$

$$s_{6n+10}=\frac{2AC}{q_{6n+6}-r_{6n+6}}+\frac{CD}{p_{6n+6}-r_{6n+6}}+\frac{r_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}{r_{6n+5}}=\frac{2AC}{q_0-r_0}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}{r_{-1}}$$

$$p_{6n+11}=\frac{Ar_{6n+5}}{r_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}+\frac{D}{s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+\frac{D}{s_0-r_0-q_0}$$

$$q_{6n+11}=\frac{Ar_{6n+5}}{r_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}+(q_{6n+5}-r_{6n+5})=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+(q_{-1}-r_{-1})$$

$$r_{6n+11}=\frac{Ar_{6n+5}}{r_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})},$$

$$s_{6n+11}=\frac{2Ar_{6n+5}}{r_{6n+6}(s_{6n+5}-r_{6n+5}-q_{6n+5})}+(q_{6n+5}-r_{6n+5})+\frac{A}{r_{6n+6}}=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1})}+(q_{-1}-r_{-1})+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{6n+12}=r_{6n+6}+p_{6n+6}-r_{6n+6}=r_0+p_0-r_0=p_0,$$

$$q_{6n+12}=r_{6n+6}+q_{6n+6}-r_{6n+6}=r_0+q_0-r_0=q_0,$$

$$r_{6n+12}=r_{6n+6}=r_0,$$

$$s_{6n+12}=2r_{6n+6}+q_{6n+6}-r_{6n+6}+s_{6n+6}-r_{6n+6}-q_{6n+6}=s_{6n+6}=s_0$$

olduğu görülür ve tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

4.3. (4.3) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-2,-1,0\}$ ve

$p_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-2} - r_{n-2}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1} - r_{n-1}} \qquad (4.3)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. $p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-2,-1,0\}$ $p_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ ve $p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0$ herhangi pozitif başlangıç şartları olmak üzere (4.3) denkleminde $n = 0$ alırsak;

$$p_1 = \frac{1}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{1}{q_{-2} - r_{-2}}, \quad q_1 = \frac{1}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})}{r_{-1}},$$

$$r_1 = \frac{1}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}}, \quad s_1 = \frac{2}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})}{r_{-1}} + \frac{1}{p_{-1} - r_{-1}}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonraki her adımlarda indisler birer arttırılır ve bir önceki adımlarda elde edilen sonuçlar yerine koyarak gerekli sadeleştirmeleri yaparsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_2 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}}, \quad q_2 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{1}{r_0},$$

$$r_2 = \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0}, \quad s_2 = \frac{2}{s_0 - r_0 - q_0} + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{p_0 - r_0}$$

$$p_3 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{1}{q_0 - r_0} = p_{-1} - r_{-1} + \frac{1}{q_0 - r_0}, \quad q_3 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{1}{r_1} = p_{-1} - r_{-1} + s_{-1} - r_{-1} - q_{-1},$$

$$r_3 = \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} = p_{-1} - r_{-1}, \quad s_3 = \frac{2}{s_1 - r_1 - q_1} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{p_1 - r_1} = 2(p_{-1} - r_{-1}) + s_{-1} - r_{-1} - q_{-1} + q_{-2} - r_{-2}$$

$$p_4 = p_0 - r_0 + \frac{1}{q_1 - r_1} = p_0 - r_0 + \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})}, \quad q_4 = p_0 - r_0 + s_0 - r_0 - q_0,$$

$$r_4 = p_0 - r_0, \quad s_4 = 2(p_0 - r_0) + s_0 - r_0 - q_0 + q_{-1} - r_{-1}$$

$$p_5 = p_1 - r_1 + \frac{r_0}{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} = \frac{1}{q_{-2} - r_{-2}} + r_0, \quad q_5 = p_1 - r_1 + s_1 - r_1 - q_1 = \frac{1}{q_{-2} - r_{-2}} + \frac{1}{p_{-1} - r_{-1}},$$

$$r_5 = p_1 - r_1 = \frac{1}{q_{-2} - r_{-2}}, \quad s_5 = 2(p_1 - r_1) + s_1 - r_1 - q_1 + q_0 - r_0 = \frac{2}{q_{-2} - r_{-2}} + \frac{1}{p_{-1} - r_{-1}} + q_0 - r_0$$

$$p_6 = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}} + r_1 = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}} + \frac{1}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}}, \quad q_6 = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}} + \frac{1}{p_0 - r_0},$$

$$r_6 = \frac{1}{q_{-1} - r_{-1}}, \quad s_6 = \frac{2}{q_{-1} - r_{-1}} + \frac{1}{p_0 - r_0} + q_1 - r_1 = \frac{2}{q_{-1} - r_{-1}} + \frac{1}{p_0 - r_0} + \frac{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})}{r_{-1}}$$

$$p_7 = \frac{1}{q_0 - r_0} + \frac{1}{s_0 - r_0 - q_0}, \quad q_7 = \frac{1}{q_0 - r_0} + \frac{1}{p_1 - r_1} = \frac{1}{q_0 - r_0} + q_{-2} - r_{-2},$$

$$r_7 = \frac{1}{q_0 - r_0}, \quad s_7 = \frac{2}{q_0 - r_0} + \frac{1}{p_1 - r_1} + \frac{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})}{r_0} = \frac{2}{q_0 - r_0} + q_{-2} - r_{-2} + \frac{1}{r_0}$$

$$p_8 = \frac{1}{q_1 - r_1} + \frac{1}{s_1 - r_1 - q_1} = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})} + p_{-1} - r_{-1}, \quad q_8 = \frac{1}{q_1 - r_1} + q_{-1} - r_{-1} = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})} + q_{-1} - r_{-1},$$

$$r_8 = \frac{1}{q_1 - r_1} = \frac{r_{-1}}{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})}, \quad s_8 = \frac{2}{q_1 - r_1} + q_{-1} - r_{-1} + \frac{1}{r_1} = \frac{2r_{-1}}{r_0(s_{-2} - r_{-2} - q_{-2})} + q_{-1} - r_{-1} + s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}$$

$$p_9 = \frac{r_0}{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + p_0 - r_0 = r_0 + p_0 - r_0 = p_0,$$

$$q_9 = \frac{r_0}{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + q_0 - r_0 = r_0 + q_0 - r_0 = q_0,$$

$$r_9 = \frac{r_0}{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} = r_0,$$

$$s_9 = \frac{2r_0}{r_1(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1})} + q_0 - r_0 + s_0 - r_0 - q_0 = 2r_0 + q_0 - r_0 + s_0 - r_0 - q_0 = s_0$$

Bu şekilde devam edersek, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-2,-1,0\}$ $p_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$ olduğundan hiçbir adımda rasyonel ifadelerin paydasının sıfır olmadığı görülmektedir. Elde edilen tüm ifadeler $p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0$ başlangıç şartlarına bağlı olarak yazılabilmektedir. Başlangıç şartları ne olursa olsun bu durum değişmeyeceği için sistemdeki bütün denklemler iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1. $p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i,\ i = \{-1,0\}$ ve $s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i,\ i = \{-2,-1,0\}$ olmak üzere, (4.3) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.3) denklem sisteminin çözümleri periyodiktir ve periyodu dokuzdur.

İspat: (4.1) fark denklem sisteminde her bir adımda *n* yerine (*n+1*) yazarak iterasyon yöntemi uygularsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-2} - r_{n-2}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-1} - r_{n-1}}$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+2} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_n} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{r_n},$$

$$r_{n+2} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+2} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_n} + \frac{1}{p_n - r_n} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{p_n - r_n}$$

$$p_{n+3}=\frac{1}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{1}{q_n-r_n}=p_{n-1}-r_{n-1}+\frac{1}{q_n-r_n},$$

$$q_{n+3}=\frac{1}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{1}{r_{n+1}}=p_{n-1}-r_{n-1}+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1},$$

$$r_{n+3}\frac{1}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=p_{n-1}-r_{n-1},$$

$$s_{n+3}=\frac{2}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{1}{r_{n+1}}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}=2(p_{n-1}-r_{n-1})+(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})+(q_{n-2}-r_{n-2})$$

$$p_{n+4}=p_n-r_n+\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}=p_n-r_n+\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})},\quad q_{n+4}=p_n-r_n+s_n-r_n-q_n,$$

$$r_{n+4}=p_n-r_n,\quad s_{n+4}=2(p_n-r_n)+(s_n-r_n-q_n)+(q_{n-1}-r_{n-1})$$

$$p_{n+5}=p_{n+1}-r_{n+1}+\frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}}+r_n,$$

$$q_{n+5}=(p_{n+1}-r_{n+1})+(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+5}=p_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$s_{n+5}=2(p_{n+1}-r_{n+1})+(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})+(q_n-r_n)=\frac{2}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}}+q_n-r_n$$

$$p_{n+6}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+r_{n+1}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad q_{n+6}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+6}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$s_{n+6}=\frac{2}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{p_n-r_n}+q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{2}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+7}=\frac{1}{q_n-r_n}+\frac{1}{s_n-r_n-q_n},\quad q_{n+7}=\frac{1}{q_n-r_n}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{1}{q_n-r_n}+q_{n-2}-r_{n-2},$$

$$r_{n+7} = \frac{1}{q_n - r_n},$$

$$s_{n+7} = \frac{2}{q_n - r_n} + \frac{1}{p_{n+1} - r_{n+1}} + \frac{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})}{r_n} = \frac{2}{q_n - r_n} + q_{n-2} - r_{n-2} + \frac{1}{r_n}$$

$$p_{n+8} = \frac{1}{q_{n+1} - r_{n+1}} + \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})} + p_{n-1} - r_{n-1},$$

$$q_{n+8} = \frac{1}{q_{n+1} - r_{n+1}} + q_{n-1} - r_{n-1} = \frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})} + q_{n-1} - r_{n-1},$$

$$r_{n+8} = \frac{1}{q_{n+1} - r_{n+1}} = \frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})},$$

$$s_{n+8} = \frac{2}{q_{n+1} - r_{n+1}} + q_{n-1} - r_{n-1} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{2r_{n-1}}{r_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})} + q_{n-1} - r_{n-1} + s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}$$

$$p_{n+9} = \frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})} + p_n - r_n = r_n + p_n - r_n = p_n,$$

$$q_{n+9} = \frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})} + q_n - r_n = r_n + q_n - r_n = q_n,$$

$$r_{n+9} = \frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})} = r_n,$$

$$s_{n+9} = \frac{2r_n}{r_{n+1}(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1})} + q_n - r_n + s_n - r_n - q_n = 2r_n + q_n - r_n + s_n - r_n - q_n = s_n$$

bulunur ve (4.3) denklem sisteminin dokuz periyotlu olduğu görülür.

4.4. (4.4) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $s_i \neq q_i + r_i, q_i \neq r_i, i = \{-2,-1,0\}$,

$p_i \neq r_i, i = \{-1,0\}$, ve $A,B,C,D \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{B}{q_{n-2} - r_{n-2}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{Cr_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{2A}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{Cr_n(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_{n-1}} + \frac{D}{p_{n-1} - r_{n-1}} \qquad (4.4)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. (4.4) fark denklem sistemi (4.3) sisteminin A,B,C,D parametrelerine bağlı şekildeki ifade edilmiş hali olduğundan, (4.3) sistemindeki denklemler iyi tanımlı ve $A,B,C,D \in \mathbb{R} - \{0\}$ olduğu için (4.4) sistemindeki denklemler de iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.4.1. $p_{-1}, p_0, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i$, $i = \{-1,0\}$, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-2,-1,0\}$ ve $A,B,C,D \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, (4.4) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.4) denklem sisteminin bütün çözümlerinin dokuz periyotlu olması için gerek ve yeter şart $B = DC$ olmasıdır.

İspat: Yukarıda belirtilen başlangıç şartları altında (4.4) denklem sisteminin çözümlerinin dokuz periyotlu olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.4) denklem sisteminde iterasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{B}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}}$$

$$p_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{B}{q_{n-1}-r_{n-1}},\ q_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_n}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\ s_{n+2}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{r_n}+\frac{D}{p_n-r_n}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_n}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+3}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{B}{q_n-r_n}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+\frac{B}{q_n-r_n},$$

$$q_{n+3}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{AC}{r_{n+1}}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+C(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}),$$

$$r_{n+3}\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D},$$

$$s_{n+3}=\frac{2A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{AC}{r_{n+1}}+\frac{D}{p_{n+1}-r_{n+1}}=2\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+C(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})+\frac{D(q_{n-2}-r_{n-2})}{B}$$

$$p_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{B}{q_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{Br_{n-1}}{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})},\ q_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+C(s_n-r_n-q_n),$$

$$r_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D},\quad s_{n+4}=\frac{2A(p_n-r_n)}{D}+C(s_n-r_n-q_n)+\frac{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}$$

$$p_{n+5}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+\frac{Br_n}{Cr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{Br_n}{AC},$$

$$q_{n+5}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+5}=\frac{A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)},$$

$$s_{n+5}=\frac{2A(p_{n+1}-r_{n+1})}{D}+C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})+\frac{D\left(q_n-r_n\right)}{B}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{D\left(q_n-r_n\right)}{B}$$

$$p_{n+6}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{Br_{n+1}}{AC}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{B}{C(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})},\ q_{n+6}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+6}=\frac{AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})},$$

$$s_{n+6}=\frac{2AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{D(q_{n+1}-r_{n+1})}{B}=\frac{2AB}{D(q_{n-1}-r_{n-1})}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{CDr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{Br_{n-1}}$$

$$p_{n+7}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{B}{C(s_n-r_n-q_n)},$$

$$q_{n+7}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD(q_{n-2}-r_{n-2})}{B},$$

$$r_{n+7}=\frac{AB}{D(q_n-r_n)},$$

$$s_{n+7}=\frac{2AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{CDr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{Br_n}=\frac{2AB}{D(q_n-r_n)}+\frac{CD(q_{n-2}-r_{n-2})}{B}+\frac{ACD}{Br_n}$$

$$p_{n+8}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{B}{C(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1})}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{B(p_{n-1}-r_{n-1})}{CD},$$

$$q_{n+8}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B},$$

$$r_{n+8}=\frac{AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})},$$

$$s_{n+8}=\frac{2AB}{D(q_{n+1}-r_{n+1})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B}+\frac{ACD}{Br_{n+1}}$$
$$=\frac{2ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{CD(q_{n-1}-r_{n-1})}{B}+\frac{DC(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}{B}$$

$$p_{n+9}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{B(p_n-r_n)}{CD}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{B(p_n-r_n)}{CD}=\frac{Bp_n}{CD},$$

$$q_{n+9}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{CD(q_n-r_n)}{B}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{CD(q_n-r_n)}{B}=\left(\frac{B}{DC}-\frac{DC}{B}\right)r_n+\frac{CD}{B}q_n,$$

$$r_{n+9}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}=\frac{Br_n}{CD},$$

$$s_{n+9}=\frac{2ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}+\frac{DC\left(s_n-r_n-q_n\right)}{B}$$
$$=\frac{2Br_n}{CD}+\frac{CD}{B}(q_n-r_n)+\frac{DC}{B}(s_n-r_n-q_n)=2\left(\frac{B}{CD}-\frac{CD}{B}\right)r_n+\frac{DC}{B}s_n$$

bulunur. Sistemin dokuz periyotlu olabilmesi için son eşitliklerden $B=DC$ olacağı açıktır.

Teoremin yeter şartının ispatı için (4.4) denklem sisteminde $B=DC$ alarak sistemimizin dokuz periyotlu olduğunu göstermeliyiz. (4.4) denklem sisteminde $B=DC$ olsun;

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{DC}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}}$$

$$p_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{DC}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+2}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_n}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+3}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+\frac{DC}{q_n-r_n},\quad q_{n+3}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+C(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}),$$

$$r_{n+3}=\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D},\quad s_{n+3}=2\frac{A(p_{n-1}-r_{n-1})}{D}+C(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1})+\frac{q_{n-2}-r_{n-2}}{C}$$

$$p_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+\frac{Dr_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})},\quad q_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D}+C(s_n-r_n-q_n),$$

$$r_{n+4}=\frac{A(p_n-r_n)}{D},\quad s_{n+4}=\frac{2A(p_n-r_n)}{D}+C(s_n-r_n-q_n)+\frac{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{C}$$

$$p_{n+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{Dr_n}{A},\quad q_{n+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)},\quad s_{n+5}=\frac{2AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{\left(q_n-r_n\right)}{C}$$

$$p_{n+6}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)},\quad q_{n+6}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+6}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)},\quad s_{n+6}=\frac{2AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+7}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)}+\frac{D}{\left(s_n-r_n-q_n\right)},\quad q_{n+7}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)}+q_{n-2}-r_{n-2},$$

$$r_{n+7}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)},\quad s_{n+7}=\frac{2AC}{\left(q_n-r_n\right)}+q_{n-2}-r_{n-2}+\frac{A}{r_n}$$

$$p_{n+8}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+p_{n-1}-r_{n-1},\quad q_{n+8}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+q_{n-1}-r_{n-1},$$

$$r_{n+8}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})},\quad s_{n+8}=\frac{2Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)+\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)$$

$$p_{n+9}=r_n+p_n-r_n=p_n,\quad q_{n+9}=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+9}=r_n,\quad s_{n+9}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

sistemin dokuz periyotlu olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.2 $p_{-1},p_0,q_{-2},q_{-1},q_0,r_{-2},r_{-1},r_0,s_{-2},s_{-1},s_0\in(0,\infty)$, $p_i\neq r_i, i=\{-1,0\}$, $s_i\neq q_i+r_i, q_i\neq r_i, i=\{-2,-1,0\}$ başlangıç şartları, $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere ve $B=DC$ durumunda, (4.4) denklem sisteminin çözümünün $\{p_n,q_n,r_n,s_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.4) denklem sisteminin çözümleri;

$$p_{9n+1}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{DC}{q_{-2}-r_{-2}},\quad q_{9n+1}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{Cr_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}},$$

$$r_{9n+1}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}},\quad s_{9n+1}=\frac{2A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{Cr_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_{-1}-r_{-1}}$$

$$p_{9n+2}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},\quad q_{9n+2}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{CA}{r_0},$$

$$r_{9n+2}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},\quad s_{9n+2}=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{CA}{r_0}+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{9n+3}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},\quad q_{9n+3}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right),$$

$$r_{9n+3}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D},\quad s_{9n+3}=\frac{2A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)+\frac{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}{C}$$

$$p_{9n+4}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})},\quad q_{9n+4}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right),$$

$$r_{9n+4}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D},\quad s_{9n+4}=\frac{2A\left(p_0-r_0\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)+\frac{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}{C}$$

$$p_{9n+5}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{Dr_0}{A},\quad q_{9n+5}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}},$$

$$r_{9n+5}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)},\quad s_{9n+5}=\frac{2AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}}+\frac{\left(q_0-r_0\right)}{C}$$

$$p_{9n+6}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)},\quad q_{9n+6}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{9n+6}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)},\quad s_{9n+6}=\frac{2AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}}$$

$$p_{9n+7}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+\frac{D}{\left(s_0-r_0-q_0\right)},\quad q_{9n+7}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+\left(q_{-2}-r_{-2}\right),$$

$$r_{9n+7}=\frac{AC}{q_0-r_0},\quad s_{9n+7}=\frac{2AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2}+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{9n+8}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+p_{-1}-r_{-1},\quad q_{9n+8}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+q_{-1}-r_{-1},$$

$$r_{9n+8}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})},\quad s_{9n+8}=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+q_{-1}-r_{-1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}$$

$$p_{9n+9}=p_0,\quad q_{9n+9}=q_0,$$

$$r_{9n+9}=r_0,\qquad s_{9n+9}=s_0$$

şeklindedir.

İspat: $n=0$ için çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin sağlandığı yani yukarıdaki eşitliklerin doğru olduğunu varsayarak $(n+1)$ için sağlandığını gösterelim;

$$p_{9n+10}=\frac{A}{s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}}+\frac{DC}{q_{9n+7}-r_{9n+7}}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{DC}{q_{-2}-r_{-2}},$$

$$q_{9n+10}=\frac{A}{s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}}+\frac{Cr_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}{r_{9n+8}}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{Cr_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}}$$

$$r_{9n+10}=\frac{A}{s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}},$$

$$s_{9n+10}=\frac{2A}{s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}}+\frac{Cr_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}{r_{9n+8}}+\frac{D}{p_{9n+8}-r_{9n+8}}$$
$$=\frac{2A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{Cr_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_{-1}-r_{-1}}$$

$$p_{9n+11}=\frac{A}{s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}}+\frac{DC}{q_{9n+8}-r_{9n+8}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},$$

$$q_{9n+11}=\frac{A}{s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}}+\frac{AC}{r_{9n+9}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{AC}{r_0},$$

$$r_{9n+11}=\frac{A}{s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},$$

$$s_{9n+11}=\frac{2A}{s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}}+\frac{AC}{r_{9n+9}}+\frac{D}{p_{9n+9}-r_{9n+9}}=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{AC}{r_0}+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{9n+12}=\frac{A\left(p_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}{D}+\frac{DC}{q_{9n+9}-r_{9n+9}}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},$$

$$q_{9n+12}=\frac{A\left(p_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}{D}+C\left(s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}\right)=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right),$$

$$r_{9n+12}=\frac{A\left(p_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}{D}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D},$$

$$\begin{aligned}s_{9n+12}&=\frac{2A(p_{9n+8}-r_{9n+8})}{D}+C\left(s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}\right)+\frac{\left(q_{9n+7}-r_{9n+7}\right)}{C}\\&=\frac{2A(p_{-1}-r_{-1})}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)+\frac{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}{C}\end{aligned}$$

$$p_{9n+13}=\frac{A\left(p_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}{D}+\frac{Dr_{9n+8}}{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})},$$

$$q_{9n+13}=\frac{A\left(p_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}{D}+C\left(s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}\right)=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right),$$

$$r_{9n+13}=\frac{A\left(p_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}{D}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D},$$

$$\begin{aligned}s_{9n+13}&=\frac{2A(p_{9n+9}-r_{9n+9})}{D}+C\left(s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}\right)+\frac{\left(q_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}{C}\\&=\frac{2A(p_0-r_0)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)+\frac{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}{C}\end{aligned}$$

$$p_{9n+14}=\frac{AC}{\left(q_{9n+7}-r_{9n+7}\right)}+\frac{Dr_{9n+9}}{A}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{Dr_0}{A},$$

$$q_{9n+14}=\frac{AC}{\left(q_{9n+7}-r_{9n+7}\right)}+\frac{CD}{p_{9n+8}-r_{9n+8}}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}},$$

$$r_{9n+14}=\frac{AC}{\left(q_{9n+7}-r_{9n+7}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)},$$

$$s_{9n+14}=\frac{2AC}{\left(q_{9n+7}-r_{9n+7}\right)}+\frac{CD}{p_{9n+8}-r_{9n+8}}+\frac{\left(q_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}{C}=\frac{2AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}}+\frac{\left(q_0-r_0\right)}{C}$$

$$p_{9n+15}=\frac{AC}{\left(q_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}+\frac{D}{\left(s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)},$$

$$q_{9n+15}=\frac{AC}{\left(q_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}+\frac{CD}{p_{9n+9}-r_{9n+9}}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{9n+15}=\frac{AC}{\left(q_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)},$$

$$s_{9n+15}=\frac{2AC}{\left(q_{9n+8}-r_{9n+8}\right)}+\frac{CD}{p_{9n+9}-r_{9n+9}}+\frac{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}{r_{9n+8}}$$
$$=\frac{2AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-1}}$$

$$p_{9n+16}=\frac{AC}{\left(q_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}+\frac{D}{\left(s_{9n+9}-r_{9n+9}-q_{9n+9}\right)}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+\frac{D}{\left(s_0-r_0-q_0\right)},$$

$$q_{9n+16}=\frac{AC}{\left(q_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}+q_{9n+7}-r_{9n+7}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2},$$

$$r_{9n+16}=\frac{AC}{\left(q_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)},$$

$$s_{9n+16}=\frac{2AC}{\left(q_{9n+9}-r_{9n+9}\right)}+q_{9n+7}-r_{9n+7}+\frac{A}{r_{9n+9}}=\frac{2AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2}+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{9n+17}=\frac{Ar_{9n+8}}{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}+p_{9n+8}-r_{9n+8}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+p_{-1}-r_{-1}$$

$$q_{9n+17}=\frac{Ar_{9n+8}}{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}+q_{9n+8}-r_{9n+8}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+q_{-1}-r_{-1}$$

$$r_{9n+17}=\frac{Ar_{9n+8}}{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})},$$

$$s_{9n+17}=\frac{2Ar_{9n+8}}{r_{9n+9}(s_{9n+7}-r_{9n+7}-q_{9n+7})}+q_{9n+8}-r_{9n+8}+s_{9n+8}-r_{9n+8}-q_{9n+8}$$
$$=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}+q_{-1}-r_{-1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}$$

$$p_{9n+18}=r_{9n+9}+p_{9n+9}-r_{9n+9}=r_0+p_0-r_0=p_0,$$

$$q_{9n+18}=r_{9n+9}+q_{9n+9}-r_{9n+9}=r_0+q_0-r_0=q_0,$$

$$r_{9n+18}=r_{9n+9}=r_0,$$

$$s_{9n+18} = 2r_{9n+9} + q_{9n+9} - r_{9n+9} + s_{9n+9} - r_{9n+9} - q_{9n+9} = s_0$$

olduğu görülür ve tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

4.5. (4.5) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i,\ i = \{-2,-1,0\}$ ve

$s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i,\ i = \{-3,-2,-1,0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{1}{q_{n-3} - r_{n-3}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{r_n(s_{n-3} - r_{n-3} - q_{n-3})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{r_n(s_{n-3} - r_{n-3} - q_{n-3})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-2} - r_{n-2}} \qquad (4.5)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. $p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i,\ i = \{-2,-1,0\}$ $s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i,\ i = \{-3,-2,-1,0\}$ ve $p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0$ herhangi pozitif başlangıç şartları olmak üzere (4.5) denkleminde $n = 0$ alırsak;

$$p_1 = \frac{1}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{1}{q_{-3} - r_{-3}}, \quad q_1 = \frac{1}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})}{r_{-1}},$$

$$r_1 = \frac{1}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}}, \quad s_1 = \frac{2}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})}{r_{-1}} + \frac{1}{p_{-2} - r_{-2}}$$

eşitlikleri elde edilir. Sonraki her adımlarda indisler birer arttırılır ve bir önceki adımlarda elde edilen sonuçları yerine koyarak gerekli sadeleştirmeleri yaparsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_2=\frac{1}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{1}{q_{-2}-r_{-2}},\quad q_2=\frac{1}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{r_1(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_{-0}}=\frac{1}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{1}{r_0},$$

$$r_2=\frac{1}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}},\ \ s_2=\frac{2}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{r_1(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_0}+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}}=\frac{2}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{1}{r_0}+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}}$$

$$p_3=\frac{1}{s_0-r_0-q_0}+\frac{1}{q_{-1}-r_{-1}},\quad q_3=\frac{1}{s_0-r_0-q_0}+\frac{1}{r_1}=\frac{1}{s_0-r_0-q_0}+s_{-2}-r_{-2}-q_{-2},$$

$$r_3=\frac{1}{s_0-r_0-q_0},\quad s_3=\frac{2}{s_0-r_0-q_0}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{p_0-r_0}=\frac{2}{s_0-r_0-q_0}+s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}+\frac{1}{p_0-r_0}$$

$$p_4=\frac{1}{s_1-r_1-q_1}+\frac{1}{q_0-r_0}=p_{-2}-r_{-2}+\frac{1}{q_0-r_0},$$

$$q_4=\frac{1}{s_1-r_1-q_1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}=p_{-2}-r_{-2}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1},$$

$$r_4=\frac{1}{s_1-r_1-q_1}=p_{-2}-r_{-2},$$

$$s_4=\frac{2}{s_1-r_1-q_1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}+\frac{1}{p_1-r_1}=2(p_{-2}-r_{-2})+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}+q_{-3}-r_{-3}$$

$$p_5=p_{-1}-r_{-1}+\frac{1}{q_1-r_1}=p_{-1}-r_{-1}+\frac{r_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})},\quad q_5=p_{-1}-r_{-1}+s_0-r_0-q_0,$$

$$r_5=p_{-1}-r_{-1},\quad s_5=2(p_{-1}-r_{-1})+s_0-r_0-q_0+q_{-2}-r_{-2}$$

$$p_6=p_0-r_0+\frac{r_0}{r_1(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}=p_0-r_0+r_0=p_0,\quad q_6=p_0-r_0+s_1-r_1-q_1=p_0-r_0+\frac{1}{p_{-2}-r_{-2}},$$

$$r_6=p_0-r_0,\quad s_6=2\left(p_0-r_0\right)+s_1-r_1-q_1+q_{-1}-r_{-1}=2\left(p_0-r_0\right)+\frac{1}{p_{-2}-r_{-2}}+q_{-1}-r_{-1}$$

$$p_7=p_1=\frac{1}{q_{-3}-r_{-3}}+\frac{1}{s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}},\quad q_7=p_1-r_1+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}}=\frac{1}{q_{-3}-r_{-3}}+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}},$$

$$r_7=p_1-r_1=\frac{1}{q_{-3}-r_{-3}},\quad s_7=2\left(p_1-r_1\right)+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}}+q_0-r_0=\frac{2}{q_{-3}-r_{-3}}+\frac{1}{p_{-1}-r_{-1}}+q_0-r_0$$

$$p_8=\frac{1}{q_{-2}-r_{-2}}+\frac{1}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}},\quad q_8=\frac{1}{q_{-2}-r_{-2}}+\frac{1}{p_0-r_0},$$

$$r_8=\frac{1}{q_{-2}-r_{-2}},\quad s_8=\frac{2}{q_{-2}-r_{-2}}+\frac{1}{p_0-r_0}+q_1-r_1=\frac{2}{q_{-2}-r_{-2}}+\frac{1}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}{r_{-1}}$$

$$p_9=\frac{1}{q_{-1}-r_{-1}}+\frac{1}{s_0-r_0-q_0},\quad q_9=\frac{1}{q_{-1}-r_{-1}}+\frac{1}{p_1-r_1}=\frac{1}{q_{-1}-r_{-1}}+q_{-3}-r_{-3},$$

$$r_9=\frac{1}{q_{-1}-r_{-1}},\quad s_9=\frac{2}{q_{-1}-r_{-1}}+\frac{1}{p_1-r_1}+\frac{r_1(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2})}{r_0}=\frac{2}{q_{-1}-r_{-1}}+q_{-3}-r_{-3}+\frac{1}{r_0}$$

$$p_{10}=\frac{1}{q_0-r_0}+\frac{1}{s_1-r_1-q_1}=\frac{1}{q_0-r_0}+p_{-2}-r_{-2},\quad q_{10}=\frac{1}{q_0-r_0}+q_{-2}-r_{-2},$$

$$r_{10}=\frac{1}{q_0-r_0},\quad s_{10}=\frac{2}{q_0-r_0}+q_{-2}-r_{-2}+\frac{1}{r_1}=\frac{2}{q_0-r_0}+q_{-2}-r_{-2}+s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}$$

$$p_{11}=\frac{1}{q_1-r_1}+p_{-1}-r_{-1}=\frac{r_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+p_{-1}-r_{-1},$$

$$q_{11}=\frac{1}{q_1-r_1}+q_{-1}-r_{-1}=\frac{r_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+q_{-1}-r_{-1},$$

$$r_{11}=\frac{1}{q_1-r_1}=\frac{r_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})},$$

$$s_{11}=\frac{2}{q_1-r_1}+q_{-1}-r_{-1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}=\frac{2r_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+q_{-1}-r_{-1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}$$

$$p_{12}=r_0+p_0-r_0=p_0,\qquad q_{12}=r_0+q_0-r_0=q_0,$$

$$r_{12}=r_0,\qquad s_{12}=2r_0+q_0-r_0+s_0-r_0-q_0=s_0$$

Bu şekilde işleme devam edersek, $p_i\neq r_i,\ i=\{-2,-1,0\}$, $s_i\neq q_i+r_i,\ q_i\neq r_i$, $i=\{-3,-2,-1,0\}$ olduğundan hiçbir adımda rasyonel ifadelerin paydasının sıfır olmadığı görülmektedir. Elde edilen tüm ifadeler $p_{-2},p_{-1},p_0,q_{-3},q_{-2},q_{-1},q_0,r_{-3},r_{-2},r_{-1},r_0,s_{-3},s_{-2},s_{-1},s_0$ başlangıç şartlarına bağlı olarak yazılabilmektedir. Başlangıç şartları ne olursa olsun bu durum değişmeyeceği için sistemdeki bütün denklemler iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.1. $p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i,\ i=\{-2,-1,0\}$ ve $s_i \neq q_i + r_i,\ q_i \neq r_i,\ i=\{-3,-2,-1,0\}$ olmak üzere, (4.5) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.5) denklem sisteminin bütün çözümleri periyodiktir ve periyodu on ikidir.

İspat: (4.5) fark denklem sisteminde her bir adımda n yerine $(n+1)$ yazarak iterasyon yöntemi uygularsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{1}{q_{n-3} - r_{n-3}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{r_n(s_{n-3} - r_{n-3} - q_{n-3})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2}} + \frac{r_n(s_{n-3} - r_{n-3} - q_{n-3})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-2} - r_{n-2}}$$

$$p_{n+2} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-2} - r_{n-2}},$$

$$q_{n+2} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_{n+1}(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_n} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{1}{r_n},$$

$$r_{n+2} = \frac{1}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}},$$

$$s_{n+2} = \frac{2}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{r_{n+1}(s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2})}{r_n} + \frac{1}{p_{n-1} - r_{n-1}} = \frac{2}{s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}} + \frac{1}{r_n} + \frac{1}{p_{n-1} - r_{n-1}}$$

$$p_{n+3} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+3} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{r_{n+1}} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2},$$

$$r_{n+3} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+3} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{p_n - r_n} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + s_{n-2} - r_{n-2} - q_{n-2} + \frac{1}{p_n - r_n}$$

$$p_{n+4} = \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} + \frac{1}{q_n - r_n} = p_{n-2} - r_{n-2} + \frac{1}{q_n - r_n},$$

$$q_{n+4} = \frac{1}{s_{n+1} - r_{n+1} - q_{n+1}} + s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1} = p_{n-2} - r_{n-2} + s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1},$$

$$r_{n+4}=\frac{1}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=p_{n-2}-r_{n-2},$$

$$s_{n+4}=\frac{2}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}=2(p_{n-2}-r_{n-2})+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}+q_{n-3}-r_{n-3}$$

$$p_{n+5}=p_{n-1}-r_{n-1}+\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}=p_{n-1}-r_{n-1}+\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},$$

$$q_{n+5}=p_{n-1}-r_{n-1}+s_n-r_n-q_n,$$

$$r_{n+5}=p_{n-1}-r_{n-1},\quad s_{n+5}=2(p_{n-1}-r_{n-1})+s_n-r_n-q_n+q_{n-2}-r_{n-2}$$

$$p_{n+6}=p_n-r_n+r_n=p_n,\quad q_{n+6}=p_n-r_n+s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}=p_n-r_n+\frac{1}{p_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$r_{n+6}=p_n-r_n,\quad s_{n+6}=2\left(p_n-r_n\right)+s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}+q_{n-1}-r_{n-1}=2\left(p_n-r_n\right)+\frac{1}{p_{n-2}-r_{n-2}}+q_{n-1}-r_{n-1}$$

$$p_{n+7}=p_{n+1}=\frac{1}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{1}{q_{n-3}-r_{n-3}},\quad q_{n+7}=p_{n+1}-r_{n+1}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}}=\frac{1}{q_{n-3}-r_{n-3}}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+7}=p_{n+1}-r_{n+1}=\frac{1}{q_{n-3}-r_{n-3}},$$

$$s_{n+7}=2\left(p_{n+1}-r_{n+1}\right)+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}}+q_n-r_n=\frac{2}{q_{n-3}-r_{n-3}}+\frac{1}{p_{n-1}-r_{n-1}}+q_n-r_n$$

$$p_{n+8}=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad q_{n+8}=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+8}=\frac{1}{q_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$s_{n+8}=\frac{2}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{p_n-r_n}+q_{n+1}-r_{n+1}=\frac{2}{q_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{1}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+9}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{s_n-r_n-q_n},\quad q_{n+9}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}}+q_{n-3}-r_{n-3},$$

$$r_{n+9}=\frac{1}{q_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$s_{n+9}=\frac{2}{q_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{1}{p_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{r_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_n}=\frac{2}{q_{n-1}-r_{n-1}}+q_{n-3}-r_{n-3}+\frac{1}{r_n}$$

$$p_{n+10}=\frac{1}{q_n-r_n}+p_{n-2}-r_{n-2}, \quad q_{n+10}=\frac{1}{q_n-r_n}+q_{n-2}-r_{n-2},$$

$$r_{n+10}=\frac{1}{q_n-r_n}, \quad s_{n+10}=\frac{2}{q_n-r_n}+q_{n-2}-r_{n-2}+\frac{1}{r_{n+1}}=\frac{2}{q_n-r_n}+q_{n-2}-r_{n-2}+s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}$$

$$p_{n+11}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}+p_{n-1}-r_{n-1}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+p_{n-1}-r_{n-1},$$

$$q_{n+11}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}+q_{n-1}-r_{n-1}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+q_{n-1}-r_{n-1},$$

$$r_{n+11}=\frac{1}{q_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},$$

$$s_{n+11}=\frac{2}{q_{n+1}-r_{n+1}}+q_{n-1}-r_{n-1}+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}=\frac{2r_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+q_{n-1}-r_{n-1}+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}$$

$$p_{n+12}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+p_n-r_n=r_n+p_n-r_n=p_n,$$

$$q_{n+12}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+q_n-r_n=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+12}=\frac{r_n}{r_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}=r_n,$$

$$s_{n+12}=\frac{2r_n}{r_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

bulunur ve (4.5.2) denklem sisteminin on iki periyotlu olduğu görülür.

4.6. (4.6) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i$, $i = \{-2,-1,0\}$,

$s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-3,-2,-1,0\}$ ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}} + \frac{B}{q_{n-3}-r_{n-3}}, \; q_{n+1} = \frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}} + \frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}, \; s_{n+1} = \frac{2A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}} + \frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}} + \frac{D}{p_{n-2}-r_{n-2}} \tag{4.6}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. (4.6) fark denklem sistemi (4.5) sisteminin A,B,C,D parametrelerine bağlı şekildeki ifade edilmiş hali olduğundan, (4.5) sistemindeki denklemler iyi tanımlı ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olduğu için (4.6) sistemindeki denklemler de iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.6.1. $p_{-2}, p_{-1}, p_0, q_{-3}, q_{-2}, q_{-1}, q_0, r_{-3}, r_{-2}, r_{-1}, r_0, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i$, $i = \{-2,-1,0\}$, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-3,-2,-1,0\}$ ve $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere, (4.6.2) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.6) denklem sisteminin çözümlerinin on iki periyotlu olması için gerek ve yeter şart $B = DC$ olmasıdır.

İspat: Yukarıda belirtilen başlangıç şartları altında (4.6) denklem sisteminin çözümlerinin on iki periyotlu olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.6) denklem sisteminde iterasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{B}{q_{n-3}-r_{n-3}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-2}-r_{n-2}}$$

$$p_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{B}{q_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$q_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_n}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},$$

$$s_{n+2}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{Cr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{r_n}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{AC}{r_n}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}}$$

$$p_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{B}{q_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$q_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_{n+1}}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+C\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right),$$

$$r_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},$$

$$s_{n+3}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{AC}{r_{n+1}}+\frac{D}{p_n-r_n}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+C\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right)+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+4}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+\frac{B}{q_n-r_n}=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+\frac{B}{q_n-r_n},$$

$$q_{n+4}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right),$$

$$r_{n+4}=\frac{A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D},$$

$$s_{n+4}=\frac{2A}{s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)+\frac{D}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{2A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)+\frac{D\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}{B}$$

$$p_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+\frac{B}{q_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+\frac{Br_{n-1}}{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},$$

$$q_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right),$$

$$r_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D},\quad s_{n+5}=\frac{2A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right)+\frac{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}{B}$$

$$p_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{Br_n}{Cr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{Br_n}{AC},$$

$$q_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+C\left(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}\right)=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$r_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D},$$

$$s_{n+6}=\frac{2A\left(p_n-r_n\right)}{D}+C\left(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}\right)+\frac{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}=\frac{2A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}$$

$$p_{n+7}=\frac{A\left(p_{n+1}-r_{n+1}\right)}{D}+\frac{Br_{n+1}}{AC}=\frac{AB}{D\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{B}{C\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right)},$$

$$q_{n+7}=\frac{A\left(p_{n+1}-r_{n+1}\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}=\frac{AB}{D\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+7}=\frac{A\left(p_{n+1}-r_{n+1}\right)}{D}=\frac{AB}{D\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)},$$

$$s_{n+7}=\frac{2A\left(p_{n+1}-r_{n+1}\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{D\left(q_n-r_n\right)}{B}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{D\left(q_n-r_n\right)}{B}$$

$$p_{n+8}=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{B}{C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)},\quad q_{n+8}=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+8}=\frac{AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)},$$

$$s_{n+8}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{D\left(q_{n+1}-r_{n+1}\right)}{B}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{CDr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{Br_{n-1}}$$

$$p_{n+9}=\frac{AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{B}{C\left(s_n-r_n-q_n\right)},$$

$$q_{n+9}=\frac{AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}=\frac{AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}{B},$$

$$r_{n+9}=\frac{AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)},$$

$$s_{n+9}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD}{p_{n+1}-r_{n+1}}+\frac{CDr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}{Br_n}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}{B}+\frac{ACD}{Br_n}$$

$$p_{n+10}=\frac{AB}{D\left(q_n-r_n\right)}+\frac{B}{C\left(s_{n+1}-r_{n+1}-q_{n+1}\right)}=\frac{AB}{D\left(q_n-r_n\right)}+\frac{B\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{CD},$$

$$q_{n+10}=\frac{AB}{D\left(q_n-r_n\right)}+\frac{CD\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}{B},$$

$$r_{n+10}=\frac{AB}{D\left(q_n-r_n\right)},$$

$$s_{n+10}=\frac{2AB}{D\left(q_n-r_n\right)}+\frac{CD\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}{B}+\frac{ACD}{Br_{n+1}}=\frac{2AB}{D\left(q_n-r_n\right)}+\frac{CD\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}{B}+\frac{CD\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right)}{B}$$

$$p_{n+11}=\frac{AB}{D\left(q_{n+1}-r_{n+1}\right)}+\frac{B\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{CD}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+\frac{B\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{CD},$$

$$q_{n+11}=\frac{AB}{D\left(q_{n+1}-r_{n+1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B},$$

$$r_{n+11}=\frac{AB}{D\left(q_{n+1}-r_{n+1}\right)}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},$$

$$\begin{aligned}s_{n+11}&=\frac{2AB}{D\left(q_{n+1}-r_{n+1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}+\frac{CD\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{B}\\&=\frac{2ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}+\frac{CD\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{B}\end{aligned}$$

$$p_{n+12}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{B\left(p_n-r_n\right)}{CD}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{B\left(p_n-r_n\right)}{CD}=\frac{Bp_n}{CD},$$

$$q_{n+12}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}==\frac{Br_n}{CD}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}=\left(\frac{B}{CD}-\frac{CD}{B}\right)r_n+\frac{CD}{B}q_n,$$

$$r_{n+12}=\frac{ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}=\frac{B}{CD}r_n,$$

$$s_{n+12}=\frac{2ABr_n}{CDr_{n+1}(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2})}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}+\frac{CD\left(s_n-r_n-q_n\right)}{B}=2\left(\frac{B}{CD}-\frac{CD}{B}\right)r_n+\frac{CD}{B}s_n$$

bulunur. Sistemin on iki periyotlu olabilmesi için son eşitliklerden $B=DC$ olacağı açıktır.

Teoremin yeter şartının ispatı için (4.6) denklem sisteminde $B=DC$ alarak sistemimizin on iki periyotlu olduğunu göstermeliyiz. (4.6) denklem sisteminde $B=DC$ olsun;

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{DC}{q_{n-3}-r_{n-3}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}}+\frac{Cr_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-2}-r_{n-2}}$$

$$p_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{DC}{q_{n-2}-r_{n-2}},\quad q_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{AC}{r_n},$$

$$r_{n+2}=\frac{A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}},\quad s_{n+2}=\frac{2A}{s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}}+\frac{AC}{r_n}+\frac{D}{p_{n-1}-r_{n-1}}$$

$$p_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{DC}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+C\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right),$$

$$r_{n+3}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+3}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+C\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right)+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+4}=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+\frac{DC}{q_n-r_n},\quad q_{n+4}=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right),$$

$$r_{n+4}=\frac{A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D},\quad s_{n+4}=\frac{2A\left(p_{n-2}-r_{n-2}\right)}{D}+C\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)+\frac{\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}{C}$$

$$p_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+\frac{Dr_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},\quad q_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right),$$

$$r_{n+5}=\frac{A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D},\quad s_{n+5}=\frac{2A\left(p_{n-1}-r_{n-1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right)+\frac{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}{C}$$

$$p_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{Br_n}{AC},\quad q_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-2}-r_{n-2}},$$

$$r_{n+6}=\frac{A\left(p_n-r_n\right)}{D},\quad s_{n+6}=\frac{2A\left(p_n-r_n\right)}{D}+\frac{CD}{p_{n-2}-r_{n-2}}+\frac{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{C}$$

$$p_{n+7}=\frac{AC}{\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{D}{\left(s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}\right)},\quad q_{n+7}=\frac{AD}{C\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}},$$

$$r_{n+7}=\frac{AC}{\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)},\quad s_{n+7}=\frac{2AC}{\left(q_{n-3}-r_{n-3}\right)}+\frac{CD}{p_{n-1}-r_{n-1}}+\frac{\left(q_n-r_n\right)}{C}$$

$$p_{n+8}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{D}{\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)},\quad q_{n+8}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+8}=\frac{AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)},\quad s_{n+8}=\frac{2AC}{\left(q_{n-2}-r_{n-2}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+9}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_n-r_n-q_n\right)},\quad q_{n+9}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+q_{n-3}-r_{n-3},$$

$$r_{n+9}=\frac{AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)},\quad s_{n+9}=\frac{2AC}{\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}+q_{n-3}-r_{n-3}+\frac{A}{r_n}$$

$$p_{n+10}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)}+p_{n-2}-r_{n-2},\quad q_{n+10}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)}+q_{n-2}-r_{n-2},$$

$$r_{n+10}=\frac{AC}{\left(q_n-r_n\right)},\quad s_{n+10}=\frac{2AC}{\left(q_n-r_n\right)}+q_{n-2}-r_{n-2}+s_{n-2}-r_{n-2}-q_{n-2}$$

$$p_{n+11}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+p_{n-1}-r_{n-1},\quad q_{n+11}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+q_{n-1}-r_{n-1},$$

$$r_{n+11}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})},\quad s_{n+11}=\frac{2Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-3}-r_{n-3}-q_{n-3})}+q_{n-1}-r_{n-1}+s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}$$

$$p_{n+12}=r_n+p_n-r_n=p_n,\qquad q_{n+12}=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+12}=r_n,\qquad s_{n+12}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

sistemin on iki periyotlu olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.2 $p_{-2},p_{-1},p_0,q_{-3},q_{-2},q_{-1},q_0,r_{-3},r_{-2},r_{-1},r_0,s_{-3},s_{-2},s_{-1},s_0\in(0,\infty)$, $p_i\neq r_i,\ i=\{-2,-1,0\}$, $s_i\neq q_i+r_i,\ q_i\neq r_i,\ i=\{-3,-2,-1,0\}$, başlangıç şartları, $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere ve $B=DC$ durumunda (4.6) denklem sisteminin çözümünün $\{p_n,q_n,r_n,s_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.6) denklem sisteminin çözümleri;

$$p_{12n+1}=\frac{A}{s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}}+\frac{DC}{q_{-3}-r_{-3}},\quad q_{12n+1}=\frac{A}{s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}}+\frac{Cr_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}{r_{-1}},$$

$$r_{12n+1}=\frac{A}{s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}},\quad s_{12n+1}=\frac{2A}{s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}}+\frac{Cr_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_{-2}-r_{-2}}$$

$$p_{12n+2}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{DC}{q_{-2}-r_{-2}},\quad q_{12n+2}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{AC}{r_0},$$

$$r_{12n+2}=\frac{A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}},\quad s_{12n+2}=\frac{2A}{s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}}+\frac{AC}{r_0}+\frac{D}{p_{-1}-r_{-1}}$$

$$p_{12n+3}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},\quad q_{12n+3}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+C\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right),$$

$$r_{12n+3}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},\quad s_{12n+3}=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+C\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right)+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{12n+4}=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},\quad q_{12n+4}=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right),$$

$$r_{12n+4}=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D},\quad s_{12n+4}=\frac{2A(p_{-2}-r_{-2})}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)+\frac{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}{C}$$

$$p_{12n+5}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})},\quad q_{12n+5}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right),$$

$$r_{12n+5}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D},\quad s_{12n+5}=\frac{2A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)+\frac{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}{C}$$

$$p_{12n+6}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{Dr_0}{A},\quad q_{12n+6}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{CD}{p_{-2}-r_{-2}},$$

$$r_{12n+6}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D},\quad s_{12n+6}=\frac{2A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{CD}{p_{-2}-r_{-2}}+\frac{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}{C}$$

$$p_{12n+7}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right)},\quad q_{12n+7}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}},$$

$$r_{12n+7}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)},\quad s_{12n+7}=\frac{2AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}}+\frac{\left(q_0-r_0\right)}{C}$$

$$p_{12n+8}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)},\quad q_{12n+8}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{12n+8}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)},\quad s_{12n+8}=\frac{2AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}{r_{-1}}$$

$$p_{12n+9}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_0-r_0-q_0\right)},\quad q_{12n+9}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+q_{-3}-r_{-3},$$

$$r_{12n+9}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)},\quad s_{12n+9}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\left(q_{-3}-r_{-3}\right)+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{12n+10}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+p_{-2}-r_{-2},\quad q_{12n+10}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2},$$

$$r_{12n+10}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)},\quad s_{12n+10}=\frac{2AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2}+s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}$$

$$p_{12n+11} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})} + p_{-1} - r_{-1}, \quad q_{12n+11} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})} + q_{-1} - r_{-1},$$

$$r_{12n+11} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})}, \quad s_{12n+11} = \frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})} + q_{-1} - r_{-1} + s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}$$

$$p_{12n+12} = p_0, \qquad q_{12n+12} = q_0,$$

$$r_{12n+12} = r_0, \qquad s_{12n+12} = s_0$$

şeklindedir.

İspat: $n = 0$ için çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin sağlandığı yani yukarıdaki eşitliklerin doğru olduğunu varsayarak $(n+1)$ için sağlandığını gösterelim;

$$p_{12n+13} = \frac{A}{s_{12n+10} - r_{12n+10} - q_{12n+10}} + \frac{DC}{q_{12n+9} - r_{12n+9}} = \frac{A}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{DC}{q_{-3} - r_{-3}},$$

$$q_{12n+13} = \frac{A}{s_{12n+10} - r_{12n+10} - q_{12n+10}} + \frac{Cr_{12n}(s_{12n+9} - r_{12n+9} - q_{12n+9})}{r_{12n+11}} = \frac{A}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{Cr_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})}{r_{-1}}$$

$$r_{12n+13} = \frac{A}{s_{12n+10} - r_{12n+10} - q_{12n+10}} = \frac{A}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}},$$

$$\begin{aligned} s_{12n+13} &= \frac{2A}{s_{12n+10} - r_{12n+10} - q_{12n+10}} + \frac{Cr_{12n}(s_{12n+9} - r_{12n+9} - q_{12n+9})}{r_{12n+11}} + \frac{D}{p_{12n+10} - r_{12n+10}} \\ &= \frac{2A}{s_{-2} - r_{-2} - q_{-2}} + \frac{Cr_0(s_{-3} - r_{-3} - q_{-3})}{r_{-1}} + \frac{D}{p_{-2} - r_{-2}} \end{aligned}$$

$$p_{12n+14} = \frac{A}{s_{12n+11} - r_{12n+11} - q_{12n+11}} + \frac{DC}{q_{12n+10} - r_{12n+10}} = \frac{A}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{DC}{q_{-2} - r_{-2}},$$

$$q_{12n+14} = \frac{A}{s_{12n+11} - r_{12n+11} - q_{12n+11}} + \frac{AC}{r_{12n}} = \frac{A}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{AC}{r_0},$$

$$r_{12n+14} = \frac{A}{s_{12n+11} - r_{12n+11} - q_{12n+11}} = \frac{A}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}},$$

$$s_{12n+14} = \frac{2A}{s_{12n+11} - r_{12n+11} - q_{12n+11}} + \frac{AC}{r_{12n}} + \frac{D}{p_{12n+11} - r_{12n+11}} = \frac{2A}{s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}} + \frac{AC}{r_0} + \frac{D}{p_{-1} - r_{-1}}$$

$$p_{12n+15}=\frac{A}{s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}}+\frac{DC}{q_{12n+11}-r_{12n+11}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}},$$

$$q_{12n+15}=\frac{A}{s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}}+C\left(s_{12n+10}-r_{12n+10}-q_{12n+10}\right)=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+C\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right),$$

$$r_{12n+15}=\frac{A}{s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},$$

$$s_{12n+15}=\frac{2A}{s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}}+C\left(s_{12n+10}-r_{12n+10}-q_{12n+10}\right)+\frac{D}{p_{12n+12}-r_{12n+12}}$$
$$=\frac{2A}{s_0-r_0-q_0}+C\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right)+\frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{12n+16}=\frac{A\left(p_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}{D}+\frac{DC}{q_{12n+12}-r_{12n+12}}=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},$$

$$q_{12n+16}=\frac{A\left(p_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}{D}+C\left(s_{12n+11}-r_{12n+11}-q_{12n+11}\right)=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)$$

$$r_{12n+16}=\frac{A\left(p_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}{D}=\frac{A\left(p_{-2}-r_{-2}\right)}{D},$$

$$s_{12n+16}=\frac{2A\left(p_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}{D}+C\left(s_{12n+11}-r_{12n+11}-q_{12n+11}\right)+\frac{\left(q_{12n+9}-r_{12n+9}\right)}{C}$$
$$=\frac{2A(p_{-2}-r_{-2})}{D}+C\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)+\frac{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}{C}$$

$$p_{12n+17}=\frac{A\left(p_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}{D}+\frac{Dr_{12n+11}}{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}$$

$$q_{12n+17}=\frac{A\left(p_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}{D}+C\left(s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}\right)=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right),$$

$$r_{12n+17}=\frac{A\left(p_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}{D}=\frac{A\left(p_{-1}-r_{-1}\right)}{D},$$

$$s_{12n+17}=\frac{2A\left(p_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}{D}+C\left(s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}\right)+\frac{\left(q_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}{C}$$
$$=\frac{2A(p_{-1}-r_{-1})}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)+\frac{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}{C}$$

$$p_{12n+18}=\frac{A\left(p_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}{D}+\frac{Br_{12n+12}}{AC}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{Br_0}{AC}$$
$$q_{12n+18}=\frac{A\left(p_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}{D}+\frac{CD}{p_{12n+10}-r_{12n+10}}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{CD}{p_{-2}-r_{-2}},$$
$$r_{12n+18}=\frac{A\left(p_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}{D}=\frac{A\left(p_0-r_0\right)}{D},$$
$$s_{12n+18}=\frac{2A\left(p_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}{D}+\frac{CD}{p_{12n+10}-r_{12n+10}}+\frac{\left(q_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}{C}$$
$$=\frac{2A\left(p_0-r_0\right)}{D}+\frac{CD}{p_{-2}-r_{-2}}+\frac{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}{C}$$

$$p_{12n+19}=\frac{AC}{\left(q_{12n+9}-r_{12n+9}\right)}+\frac{D}{\left(s_{12n+10}-r_{12n+10}-q_{12n+10}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\right)}$$
$$q_{12n+19}=\frac{AC}{\left(q_{12n+9}-r_{12n+9}\right)}+\frac{CD}{p_{12n+11}-r_{12n+11}}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}},$$
$$r_{12n+19}=\frac{AC}{\left(q_{12n+9}-r_{12n+9}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)},$$
$$s_{12n+19}=\frac{2AC}{\left(q_{12n+9}-r_{12n+9}\right)}+\frac{CD}{p_{12n+11}-r_{12n+11}}+\frac{\left(q_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}{C}=\frac{2AC}{\left(q_{-3}-r_{-3}\right)}+\frac{CD}{p_{-1}-r_{-1}}+\frac{\left(q_0-r_0\right)}{C}$$

$$p_{12n+20}=\frac{AC}{\left(q_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}+\frac{D}{\left(s_{12n+11}-r_{12n+11}-q_{12n+11}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{D}{\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}$$
$$q_{12n+20}=\frac{AC}{\left(q_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}+\frac{CD}{p_{12n+12}-r_{12n+12}}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$
$$r_{12n+20}=\frac{AC}{\left(q_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)},$$
$$s_{12n+20}=\frac{2AC}{\left(q_{12n+10}-r_{12n+10}\right)}+\frac{CD}{p_{12n+12}-r_{12n+12}}+\frac{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}{r_{12n+11}}$$
$$=\frac{2AC}{\left(q_{-2}-r_{-2}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}{r_{-1}}$$

$$p_{12n+21}=\frac{AC}{\left(q_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}+\frac{D}{\left(s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+\frac{D}{\left(s_0-r_0-q_0\right)},$$
$$q_{12n+21}=\frac{AC}{\left(q_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}+q_{12n+9}-r_{12n+9}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+q_{-3}-r_{-3},$$

$$r_{12n+21}=\frac{AC}{\left(q_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)},$$

$$s_{12n+21}=\frac{2AC}{\left(q_{12n+11}-r_{12n+11}\right)}+q_{12n+9}-r_{12n+9}+\frac{A}{\left(r_{12n+12}\right)}=\frac{2AC}{\left(q_{-1}-r_{-1}\right)}+q_{-3}-r_{-3}+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{12n+22}=\frac{AC}{\left(q_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}+p_{12n+10}-r_{12n+10}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+p_{-2}-r_{-2},$$

$$q_{12n+22}=\frac{AC}{\left(q_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}+q_{12n+10}-r_{12n+10}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2},$$

$$r_{12n+22}=\frac{AC}{\left(q_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}=\frac{AC}{\left(q_0-r_0\right)},$$

$$\begin{aligned}s_{12n+22}&=\frac{2AC}{\left(q_{12n+12}-r_{12n+12}\right)}+q_{12n+10}-r_{12n+10}+s_{12n+10}-r_{12n+10}-q_{12n+10}\\&=\frac{2AC}{\left(q_0-r_0\right)}+q_{-2}-r_{-2}+s_{-2}-r_{-2}-q_{-2}\end{aligned}$$

$$p_{12n+23}=\frac{Ar_{12n+11}}{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}+p_{12n+11}-r_{12n+11}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+p_{-1}-r_{-1}$$

$$q_{12n+23}=\frac{Ar_{12n+11}}{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}+q_{12n+11}-r_{12n+11}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+q_{-1}-r_{-1}$$

$$r_{12n+23}=\frac{Ar_{12n+11}}{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})},$$

$$\begin{aligned}s_{12n+23}&=\frac{2Ar_{12n+11}}{r_{12n+12}(s_{12n+9}-r_{12n+9}-q_{12n+9})}+q_{12n+11}-r_{12n+11}+s_{12n+11}-r_{12n+11}-q_{12n+11}\\&=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-3}-r_{-3}-q_{-3})}+q_{-1}-r_{-1}+s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\end{aligned}$$

$$p_{12n+24}=r_{12n+12}+p_{12n+12}-r_{12n+12}=p_{12n+12},\qquad q_{12n+24}=r_{12n+12}+q_{12n+12}-r_{12n+12}=q_{12n+12},$$

$$r_{12n+24}=r_{12n+12},\qquad s_{12n+24}=2r_{12n+12}+q_{12n+12}-r_{12n+12}+s_{12n+12}-r_{12n+12}-q_{12n+12}=s_{12n+12}$$

olduğu görülür ve tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

4.7. (4.7) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-k}, p_{-k+1}, ..., p_{-1}, p_0, q_{-k-1}, q_{-k}, ..., q_{-1}, q_0, r_{-k-1}, r_{-k}, ..., r_{-1}, r_0, s_{-k-1}, s_{-k}, ..., s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$ ve

$p_i \neq r_i$, $i = \{-k, -k+1, ..., 0\}$, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-k-1, -k, ..., 0\}$, $k \in \mathbb{N}$

olmak üzere;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{1}{q_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)}},\ q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}},\ s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-k} - r_{n-k}} \tag{4.7}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. (4.7) fark denklem sistemi (4.1), (4.3) ve (4.5) sistemlerinin genel hali olması nedeniyle bu sistemlere benzer şekilde her $k \in \mathbb{N}$ için, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-k-1, -k, ..., 0\}$, $p_i \neq r_i$, $i = \{-k, -k+1, ..., 0\}$ olduğundan hiçbir adımda rasyonel ifadenin paydası sıfır olmayacak, elde edilen tüm ifadeler $p_{-k}, p_{-k+1}, ..., p_{-1}, p_0, q_{-k-1}, q_{-k}, ..., q_{-1}, q_0, r_{-k-1}, r_{-k}, ..., r_{-1}, r_0, s_{-k-1}, s_{-k}, ..., s_{-1}, s_0$ başlangıç şartlarına bağlı olarak yazılabilecektir. Başlangıç şartları ne olursa olsun bu durum değişmeyeceği için sistemdeki bütün denklemeler iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.7.1.
$p_{-k}, p_{-k+1}, ..., p_{-1}, p_0, q_{-k-1}, q_{-k}, ..., q_{-1}, q_0, r_{-k-1}, r_{-k}, ..., r_{-1}, r_0, s_{-k-1}, s_{-k}, ..., s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$ ve $p_i \neq r_i$, $i = \{-k, -k+1, ..., 0\}$, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i = \{-k-1, -k, ..., 0\}$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

(4.7) denklem sisteminin çözümü $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.7) denklem sisteminin bütün çözümleri periyodiktir ve periyodu (3k+6) dır.

İspat: (4.7) fark denklem sisteminde her bir adımda n yerine $(n+k)$ veya $(n+1)$ yazarak iterasyon yöntemi uygularsak aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$p_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{1}{q_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)}}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}}, \quad s_{n+1} = \frac{2}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{r_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}} + \frac{1}{p_{n-k} - r_{n-k}}$$

$$p_{n+k+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{1}{q_{n-1} - r_{n-1}}, \quad q_{n+k+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_{n+k}\left(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}},$$

$$r_{n+k+1} = \frac{1}{s_n - r_n - q_n}, \quad s_{n+k+1} = \frac{2}{s_n - r_n - q_n} + \frac{r_{n+k}\left(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}} + \frac{1}{p_n - r_n}$$

$$p_{n+k+2} = p_{n-k} - r_{n-k} + \frac{1}{q_n - r_n}, \quad q_{n+k+2} = p_{n-k} - r_{n-k} + \frac{1}{r_{n+k}},$$

$$r_{n+k+2} = p_{n-k} - r_{n-k}, \quad s_{n+k+2} = 2\left(p_{n-k} - r_{n-k}\right) + \frac{1}{r_{n+k}} + q_{n-k-1} - r_{n-k-1}$$

$$p_{n+k+3} = p_{n-k+1} - r_{n-k+1} + \frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1} - r_{n-k-1} - q_{n-k-1})}, \quad q_{n+k+3} = p_{n-k+1} - r_{n-k+1} + s_n - r_n - q_n,$$

$$r_{n+k+3} = p_{n-k+1} - r_{n-k+1}, \quad s_{n+k+3} = 2\left(p_{n-k+1} - r_{n-k+1}\right) + s_n - r_n - q_n + q_{n-k} - r_{n-k}$$

$$p_{n+2k+3} = \frac{1}{q_{n-k-1} - r_{n-k-1}} + \frac{r_{n+k-1}}{r_{n+k}\left(s_{n-1} - r_{n-1} - q_{n-1}\right)}, \quad q_{n+2k+3} = \frac{1}{q_{n-k-1} - r_{n-k-1}} + s_{n+k} - r_{n+k} - q_{n+k},$$

$$r_{n+2k+3} = \frac{1}{q_{n-k-1} - r_{n-k-1}}, \quad s_{n+2k+3} = \frac{2}{q_{n-k-1} - r_{n-k-1}} + s_{n+k} - r_{n+k} - q_{n+k} + q_n - r_n$$

$$p_{n+2k+4} = \frac{1}{q_{n-k} - r_{n-k}} + r_{n+k}, \quad q_{n+2k+4} = \frac{1}{q_{n-k} - r_{n-k}} + \frac{1}{p_n - r_n},$$

$$r_{n+2k+4}=\frac{1}{q_{n-k}-r_{n-k}},\quad s_{n+2k+4}=\frac{2}{q_{n-k}-r_{n-k}}+\frac{1}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+2k+5}=\frac{1}{q_{n-k+1}-r_{n-k+1}}+\frac{1}{s_n-r_n-q_n},\quad q_{n+2k+5}=\frac{1}{q_{n-k+1}-r_{n-k+1}}+q_{n-k-1}-r_{n-k-1},$$

$$r_{n+2k+5}=\frac{1}{q_{n-k+1}-r_{n-k+1}},\quad s_{n+2k+5}=\frac{2}{q_{n-k+1}-r_{n-k+1}}+q_{n-k-1}-r_{n-k-1}+\frac{1}{r_n}$$

$$p_{n+3k+5}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+\frac{1}{s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}},\quad q_{n+3k+5}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+q_{n-1}-r_{n-1},$$

$$r_{n+3k+5}=\frac{r_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})},\quad s_{n+3k+5}=\frac{2r_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+q_{n-1}-r_{n-1}+\frac{1}{r_{n+k}}$$

$$p_{n+3k+6}=r_n+p_n-r_n=p_n,\qquad q_{n+3k+6}=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+3k+6}=r_n,\qquad s_{n+3k+6}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

bulunur ve (4.7) denklem sisteminin (3k+6) periyotlu olduğu görülür.

4.8. (4.8) FARK DENKLEM SİSTEMİNİN PERİYODİKLİĞİ

Bu bölümde;

$p_{-k},p_{-k+1},...,p_{-1},p_0,q_{-k-1},q_{-k},...,q_{-1},q_0,r_{-k-1},r_{-k},...,r_{-1},r_0,s_{-k-1},s_{-k},...,s_{-1},s_0\in(0,\infty)$ ve

$p_i\neq r_i,\ i=\{-k,-k+1,...,0\}$, $s_i\neq q_i+r_i,\ q_i\neq r_i,\ i=\{-k-1,-k,...,0\}$, $k\in\mathbb{N}$

$A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere;

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{B}{q_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}},$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}}+\frac{D}{p_{n-k}-r_{n-k}}$$

(4.8)

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği incelenmiştir.

Öncelikle sistemde bulunan denklemlerin iyi tanımlı olup olmadıklarına bakalım. (4.8) fark denklem sistemi (4.7) sisteminin A,B,C,D parametrelerine bağlı şekildeki ifade edilmiş hali olduğundan, (4.7) sistemindeki denklemler iyi tanımlı ve $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ olduğu için (4.8) sistemindeki denklemler de iyi tanımlıdır. O halde aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.8.1. $p_{-k},p_{-k+1},...,p_{-1},p_0,q_{-k-1},q_{-k},...,q_{-1},q_0,r_{-k-1},r_{-k},...,r_{-1},r_0,s_{-k-1},s_{-k},...,s_{-1},s_0\in(0,\infty)$ ve $p_i\neq r_i,\ i=\{-k,-k+1,...,0\}$, $s_i\neq q_i+r_i,\ q_i\neq r_i,\ i=\{-k-1,-k,...,0\}$, $k\in\mathbb{N}$ $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere; (4.8) denklem sisteminin çözümü $\{p_n,q_n,r_n,s_n\}$ olsun. Bu durumda (4.8) denklem sisteminin bütün çözümlerinin (3*k*+6) periyotlu olabilmesi için gerek ve yeter şart $B=DC$ olmasıdır.

İspat: Yukarıda belirtilen başlangıç şartları altında (4.8) denklem sisteminin çözümlerinin (3*k*+6) periyotlu olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.8) denklem sisteminde iterasyon yöntemi kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{B}{q_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}},\quad s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-k}-r_{n-k}}$$

$$p_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{B}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}},$$

$$r_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+k+1}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{B}{q_n-r_n},\quad q_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n+k}},$$

$$r_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D},\quad s_{n+k+2}=\frac{2A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n+k}}+\frac{D\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}{B}$$

$$p_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+\frac{Br_{n-1}}{Cr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})},$$

$$q_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right),$$

$$r_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D},\quad s_{n+k+3}=\frac{2A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right)+\frac{D\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}{B}$$

$$p_{n+2k+3}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+\frac{Br_{n+k-1}}{Cr_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)},$$

$$q_{n+2k+3}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+C\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right),$$

$$r_{n+2k+3}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)},\quad s_{n+2k+3}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+C\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right)+\frac{D\left(q_n-r_n\right)}{B}$$

$$p_{n+2k+4}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{Br_{n+k}}{AC},\quad q_{n+2k+4}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+2k+4}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)},\quad s_{n+2k+4}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{CDr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}{Br_{n-1}}$$

$$p_{n+2k+5}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+\frac{B}{C\left(s_n-r_n-q_n\right)},\quad q_{n+2k+5}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}{B},$$

$$r_{n+2k+5}=\frac{AB}{D\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)},\quad s_{n+2k+5}=\frac{2AB}{D\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+\frac{CD\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}{B}+\frac{ACD}{Br_n}$$

$$p_{n+3k+5}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+\frac{B}{C\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right)},$$

$$q_{n+3k+5}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B},$$

$$r_{n+3k+5}=\frac{ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})},$$

$$s_{n+3k+5}=\frac{2ABr_{n-1}}{CDr_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+\frac{CD\left(q_{n-1}-r_{n-1}\right)}{B}+\frac{ACD}{Br_{n+k}}$$

$$p_{n+3k+6}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{B\left(p_n-r_n\right)}{CD}=\frac{Bp_n}{CD},\quad q_{n+3k+6}=\frac{Br_n}{CD}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}=\left(\frac{B}{CD}-\frac{CD}{B}\right)r_n+\frac{CD}{B}q_n,$$

$$r_{n+3k+6}=\frac{Br_n}{CD},\quad s_{n+3k+6}=\frac{2Br_n}{CD}+\frac{CD\left(q_n-r_n\right)}{B}+\frac{CD\left(s_n-r_n-q_n\right)}{B}=2\left(\frac{B}{CD}-\frac{CD}{B}\right)r_n-\frac{CD}{B}s_n$$

bulunur. Sistemin (3*k*+6) periyotlu olabilmesi için son eşitliklerden $B=DC$ olacağı açıktır.

Teoremin yeter şartının ispatı için (4.8) denklem sisteminde $B=DC$ alarak sistemimizin (3*k*+6) periyotlu olduğunu göstermeliyiz. (4.8) denklem sisteminde $B=DC$ olsun;

$$p_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{DC}{q_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}},\quad q_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}$$

$$r_{n+1}=\frac{A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}},\ s_{n+1}=\frac{2A}{s_{n-k}-r_{n-k}-q_{n-k}}+\frac{Cr_n(s_{n-(k+1)}-r_{n-(k+1)}-q_{n-(k+1)})}{r_{n-1}}+\frac{D}{p_{n-k}-r_{n-k}}$$

$$p_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{DC}{q_{n-1}-r_{n-1}},\quad q_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}},$$

$$r_{n+k+1}=\frac{A}{s_n-r_n-q_n},\quad s_{n+k+1}=\frac{2A}{s_n-r_n-q_n}+\frac{Cr_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)}{r_{n+k-1}}+\frac{D}{p_n-r_n}$$

$$p_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{DC}{q_n-r_n},\quad q_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n+k}},$$

$$r_{n+k+2}=\frac{A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D},\quad s_{n+k+2}=\frac{2A\left(p_{n-k}-r_{n-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n+k}}+\frac{\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}{C}$$

$$p_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+\frac{Dr_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})},$$

$$q_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right),$$

$$r_{n+k+3}=\frac{A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D},\quad s_{n+k+3}=\frac{2A\left(p_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}{D}+C\left(s_n-r_n-q_n\right)+\frac{\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}{C}$$

$$p_{n+2k+3}=\frac{AC}{\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+\frac{Dr_{n+k-1}}{r_{n+k}\left(s_{n-1}-r_{n-1}-q_{n-1}\right)},$$

$$q_{n+2k+3}=\frac{AC}{\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+C\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right),$$

$$r_{n+2k+3}=\frac{AC}{\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)},\quad s_{n+2k+3}=\frac{2AC}{\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)}+C\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right)+\frac{\left(q_n-r_n\right)}{C}$$

$$p_{n+2k+4}=\frac{AC}{\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{Dr_{n+k}}{A},\quad q_{n+2k+4}=\frac{AC}{\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n},$$

$$r_{n+2k+4}=\frac{AC}{\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)},\quad s_{n+2k+4}=\frac{2AC}{\left(q_{n-k}-r_{n-k}\right)}+\frac{CD}{p_n-r_n}+\frac{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}{r_{n-1}}$$

$$p_{n+2k+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+\frac{D}{\left(s_n-r_n-q_n\right)},\quad q_{n+2k+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+q_{n-k-1}-r_{n-k-1},$$

$$r_{n+2k+5}=\frac{AC}{\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)},\quad s_{n+2k+5}=\frac{2AC}{\left(q_{n-k+1}-r_{n-k+1}\right)}+\left(q_{n-k-1}-r_{n-k-1}\right)+\frac{A}{r_n}$$

$$p_{n+3k+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+\frac{D}{\left(s_{n+k}-r_{n+k}-q_{n+k}\right)},\ q_{n+3k+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+q_{n-1}-r_{n-1},$$

$$r_{n+3k+5}=\frac{Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})},\ s_{n+3k+5}=\frac{2Ar_{n-1}}{r_n(s_{n-k-1}-r_{n-k-1}-q_{n-k-1})}+q_{n-1}-r_{n-1}+\frac{A}{r_{n+k}}$$

$$p_{n+3k+6}=r_n+p_n-r_n=p_n,\qquad q_{n+3k+6}=r_n+q_n-r_n=q_n,$$

$$r_{n+3k+6}=r_n,\qquad s_{n+3k+6}=2r_n+q_n-r_n+s_n-r_n-q_n=s_n$$

bulunur ve (4.8) denklem sisteminin (3k+6) periyotlu olduğu görülür.

Teorem 4.8.2.

$p_{-k}, p_{-k+1}, \ldots, p_{-1}, p_0, q_{-k-1}, q_{-k}, \ldots, q_{-1}, q_0, r_{-k-1}, r_{-k}, \ldots, r_{-1}, r_0, s_{-k-1}, s_{-k}, \ldots, s_{-1}, s_0 \in (0,\infty)$, $p_i \neq r_i$, $i=\{-k,-k+1,\ldots,0\}$, $s_i \neq q_i + r_i$, $q_i \neq r_i$, $i=\{-k-1,-k,\ldots,0\}$, $k \in \mathbb{N}$, başlangıç şartları, $A,B,C,D \in \mathbb{R}-\{0\}$ olmak üzere ve $B = DC$ durumunda (4.8) denklem sisteminin çözümünün $\{p_n, q_n, r_n, s_n\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $n \geq 0$ için (4.8) denklem sisteminin çözümleri;

$$p_{n(3k+6)+1} = \frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}} + \frac{DC}{q_{-k-1}-r_{-k-1}}, \quad q_{n(3k+6)+1} = \frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}} + \frac{Cr_0(s_{-(k+1)}-r_{-(k+1)}-q_{-(k+1)})}{r_{-1}}$$

$$r_{n(3k+6)+1} = \frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}}, \quad s_{n(3k+6)+1} = \frac{2A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{n-k}} + \frac{Cr_0(s_{-(k+1)}-r_{-(k+1)}-q_{-(k+1)})}{r_{-1}} + \frac{D}{p_{-k}-r_{-k}}$$

$$p_{n(3k+6)+k+1} = \frac{A}{s_0-r_0-q_0} + \frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}}, \quad q_{n(3k+6)+k+1} = \frac{A}{s_0-r_0-q_0} + \frac{Cr_k\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}{r_{k-1}},$$

$$r_{n(3k+6)+k+1} = \frac{A}{s_0-r_0-q_0}, \quad s_{n(3k+6)+k+1} = \frac{2A}{s_0-r_0-q_0} + \frac{Cr_k\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}{r_{k-1}} + \frac{D}{p_0-r_0}$$

$$p_{n(3k+6)+k+2} = \frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D} + \frac{DC}{q_0-r_0}, \quad q_{n(3k+6)+k+2} = \frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D} + \frac{AC}{r_k},$$

$$r_{n(3k+6)+k+2} = \frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D}, \quad s_{n(3k+6)+k+2} = \frac{2A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D} + \frac{AC}{r_k} + \frac{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+k+3} = \frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D} + \frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})},$$

$$q_{n(3k+6)+k+3} = \frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D} + C\left(s_0-r_0-q_0\right),$$

$$r_{n(3k+6)+k+3} = \frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D}, \quad s_{n(3k+6)+k+3} = \frac{2A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D} + C\left(s_0-r_0-q_0\right) + \frac{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+2k+3} = \frac{AC}{\left(q_{-k-1} - r_{-k-1}\right)} + \frac{Dr_{k-1}}{r_k\left(s_{-1} - r_{-1} - q_{-1}\right)},$$

$$q_{n(3k+6)+2k+3} = \frac{AC}{\left(q_{-k-1} - r_{-k-1}\right)} + C\left(s_k - r_k - q_k\right),$$

$$r_{n(3k+6)+2k+3} = \frac{AC}{\left(q_{-k-1} - r_{-k-1}\right)}, \quad s_{n(3k+6)+2k+3} = \frac{2AC}{\left(q_{-k-1} - r_{-k-1}\right)} + C\left(s_k - r_k - q_k\right) + \frac{\left(q_0 - r_0\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+2k+4} = \frac{AC}{\left(q_{-k} - r_{-k}\right)} + \frac{Dr_k}{A}, \quad q_{n(3k+6)+2k+4} = \frac{AC}{\left(q_{-k} - r_{-k}\right)} + \frac{CD}{p_0 - r_0},$$

$$r_{n(3k+6)+2k+4} = \frac{A}{\left(q_{-k} - r_{-k}\right)}, \quad s_{n(3k+6)+2k+4} = \frac{2AC}{\left(q_{-k} - r_{-k}\right)} + \frac{CD}{p_0 - r_0} + \frac{r_0(s_{-k-1} - r_{-k-1} - q_{-k-1})}{r_{-1}}$$

$$p_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{AC}{\left(q_{-k+1} - r_{-k+1}\right)} + \frac{D}{\left(s_0 - r_0 - q_0\right)}, \quad q_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{AC}{\left(q_{-k+1} - r_{-k+1}\right)} + q_{-k-1} - r_{-k-1},$$

$$r_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{AC}{\left(q_{-k+1} - r_{-k+1}\right)}, \quad s_{n(3k+6)+2k+5} = \frac{2AC}{\left(q_{-k+1} - r_{-k+1}\right)} + q_{-k-1} - r_{-k-1} + \frac{A}{r_0}$$

$$p_{n(3k+6)+3k+5} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1} - r_{-k-1} - q_{-k-1})} + \frac{D}{\left(s_k - r_k - q_k\right)}, \quad q_{n(3k+6)+3k+5} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1} - r_{-k-1} - q_{-k-1})} + q_{-1} - r_{-1},$$

$$r_{n(3k+6)+3k+5} = \frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1} - r_{-k-1} - q_{-k-1})}, \quad s_{n(3k+6)+3k+5} = \frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1} - r_{-k-1} - q_{-k-1})} + q_{-1} - r_{-1} + \frac{A}{r_k}$$

$$p_{n(3k+6)+3k+6} = p_0, \quad q_{n(3k+6)+3k+6} = q_0,$$

$$r_{n(3k+6)+3k+6} = r_0, \quad s_{n(3k+6)+3k+6} = s_0$$

şeklindedir.

İspat: $n=0$ için çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin sağlandığı yani yukarıdaki eşitliklerin doğru olduğunu varsayarak $(n+1)$ için sağlandığını gösterelim.

$$p_{n(3k+6)+3k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}-q_{n(3k+6)+2k+6}}+\frac{DC}{q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}},$$
$$=\frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}}+\frac{DC}{q_{-k-1}-r_{-k-1}}$$

$$q_{n(3k+6)+3k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}-q_{n(3k+6)+2k+6}}$$
$$+\frac{Cr_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}{r_{n(3k+6)+3k+5}}$$
$$=\frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}}+\frac{Cr_0(s_{-(k+1)}-r_{-(k+1)}-q_{-(k+1)})}{r_{-1}}$$

$$r_{n(3k+6)+3k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}-q_{n(3k+6)+2k+6}}=\frac{A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}},$$

$$s_{n(3k+6)+3k+7}=\frac{2A}{s_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}-q_{n(3k+6)+2k+6}}$$
$$+\frac{Cr_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}{r_{n(3k+6)+3k+5}}+\frac{D}{p_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}}$$
$$=\frac{2A}{s_{-k}-r_{-k}-q_{-k}}+\frac{Cr_0(s_{-(k+1)}-r_{-(k+1)}-q_{-(k+1)})}{r_{-1}}+\frac{D}{p_{-k}-r_{-k}}$$

$$p_{n(3k+6)+4k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}}+\frac{DC}{q_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}},$$
$$=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{DC}{q_{-1}-r_{-1}}$$

$$q_{n(3k+6)+4k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}}+\frac{Cr_{n(3k+6)+4k+6}\left(s_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}-q_{n(3k+6)+3k+5}\right)}{r_{n(3k+6)+4k+5}}$$
$$=\frac{A}{s_0-r_0-q_0}+\frac{Cr_k\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}{r_{k-1}}$$

$$r_{n(3k+6)+4k+7}=\frac{A}{s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}}=\frac{A}{s_0-r_0-q_0},$$

$$s_{n(3k+6)+4k+7}=\frac{2A}{s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}}$$
$$+\frac{Cr_{n(3k+6)+4k+6}\left(s_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}-q_{n(3k+6)+3k+5}\right)}{r_{n(3k+6)+4k+5}}+\frac{D}{p_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}}$$
$$=\frac{2}{s_0-r_0-q_0}+\frac{r_k\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}{r_{k-1}}+\frac{1}{p_0-r_0}$$

$$p_{n(3k+6)+4k+8}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}{D}+\frac{DC}{q_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}}=\frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D}+\frac{DC}{q_0-r_0},$$

$$q_{n(3k+6)+4k+8}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n(3k+6)+4k+6}}=\frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_k},$$

$$r_{n(3k+6)+4k+8}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}{D}=\frac{A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D},$$

$$s_{n(3k+6)+4k+8}=\frac{2A\left(p_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}{D}+\frac{AC}{r_{n(3k+6)+4k+6}}+\frac{\left(q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}\right)}{C}$$
$$=\frac{2A\left(p_{-k}-r_{-k}\right)}{D}+\frac{AC}{r_k}+\frac{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+4k+9}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}{D}+\frac{Dr_{n(3k+6)+3k+5}}{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})},$$
$$=\frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D}+\frac{Dr_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})}$$

$$q_{n(3k+6)+4k+9}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}{D}+C\left(s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}\right),$$
$$=\frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)$$

$$r_{n(3k+6)+4k+9}=\frac{A\left(p_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}{D}=\frac{A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D},$$

$$s_{n(3k+6)+4k+9}=\frac{2A\left(p_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}{D}+C\left(s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}\right)$$
$$+\frac{\left(q_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}{C}=\frac{2A\left(p_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}{D}+C\left(s_0-r_0-q_0\right)+\frac{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+5k+9}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}\right)}+\frac{Dr_{n(3k+6)+4k+5}}{r_{n(3k+6)+4k+6}\left(s_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}-q_{n(3k+6)+3k+5}\right)}$$
$$=\frac{AC}{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)}+\frac{Dr_{k-1}}{r_k\left(s_{-1}-r_{-1}-q_{-1}\right)}$$

$$q_{n(3k+6)+5k+9}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}\right)}+C\left(s_{n(3k+6)+4k+6}-r_{n(3k+6)+4k+6}-q_{n(3k+6)+4k+6}\right)$$
$$=\frac{AC}{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)}+C\left(s_k-r_k-q_k\right),$$

$$r_{n(3k+6)+5k+9}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)},$$

$$s_{n(3k+6)+5k+9}=\frac{2AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}\right)}+C\left(s_{n(3k+6)+4k+6}-r_{n(3k+6)+4k+6}-q_{n(3k+6)+4k+6}\right)$$
$$+\frac{\left(q_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}\right)}{C}=\frac{2AC}{\left(q_{-k-1}-r_{-k-1}\right)}+C\left(s_k-r_k-q_k\right)+\frac{\left(q_0-r_0\right)}{C}$$

$$p_{n(3k+6)+5k+10}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}+\frac{D\left(r_{n(3k+6)+4k+6}\right)}{A}=\frac{AC}{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)}+\frac{Dr_k}{A},$$

$$q_{n(3k+6)+5k+10}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}+\frac{CD}{p_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}}=\frac{AC}{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0},$$

$$r_{n(3k+6)+5k+10}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}+=\frac{AC}{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)},$$

$$s_{n(3k+6)+5k+10}=\frac{2AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+6}-r_{n(3k+6)+2k+6}\right)}+\frac{CD}{p_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}}$$
$$+\frac{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}{r_{n(3k+6)+3k+5}}$$
$$=\frac{2AC}{\left(q_{-k}-r_{-k}\right)}+\frac{CD}{p_0-r_0}+\frac{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})}{r_{-1}}$$

$$p_{n(3k+6)+5k+11}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}+\frac{D}{\left(s_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}-q_{n(3k+6)+3k+6}\right)}$$
$$=\frac{AC}{\left(q_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}+\frac{D}{\left(s_0-r_0-q_0\right)},$$

$$q_{n(3k+6)+5k+11}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}+q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}$$
$$=\frac{AC}{\left(q_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}+q_{-k-1}-r_{-k-1}$$

$$r_{n(3k+6)+5k+11}=\frac{AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}=\frac{AC}{\left(q_{-k+1}-r_{-k+1}\right)},$$

$$s_{n(3k+6)+5k+11}=\frac{2AC}{\left(q_{n(3k+6)+2k+7}-r_{n(3k+6)+2k+7}\right)}+q_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}+\frac{A}{r_{n(3k+6)+3k+6}}$$
$$=\frac{2AC}{\left(q_{-k+1}-r_{-k+1}\right)}+q_{-k-1}-r_{-k-1}+\frac{A}{r_0}$$

$$p_{n(3k+6)+6k+11}=\frac{Ar_{n(3k+6)+3k+5}}{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}$$
$$+\frac{D}{\left(s_{n(3k+6)+4k+6}-r_{n(3k+6)+4k+6}-q_{n(3k+6)+4k+6}\right)}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})}+\frac{D}{\left(s_k-r_k-q_k\right)},$$

$$q_{n(3k+6)+6k+11}=\frac{Ar_{n(3k+6)+3k+5}}{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}$$
$$+q_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})}+q_{-1}-r_{-1},$$

$$r_{n(3k+6)+6k+11}=\frac{Ar_{n(3k+6)+3k+5}}{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}=\frac{Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})},$$

$$s_{n(3k+6)+6k+11}=\frac{2Ar_{n(3k+6)+3k+5}}{r_{n(3k+6)+3k+6}(s_{n(3k+6)+2k+5}-r_{n(3k+6)+2k+5}-q_{n(3k+6)+2k+5})}+q_{n(3k+6)+3k+5}-r_{n(3k+6)+3k+5}$$
$$+\frac{A}{r_{n(3k+6)+4k+6}}=\frac{2Ar_{-1}}{r_0(s_{-k-1}-r_{-k-1}-q_{-k-1})}+q_{-1}-r_{-1}+\frac{A}{r_k}$$

$$p_{n(3k+6)+6k+12}=r_{n(3k+6)+3k+6}+p_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}=r_0+p_0-r_0=p_0,$$

$$q_{n(3k+6)+6k+12}=r_{n(3k+6)+3k+6}+q_{n(3k+6)+3k+6}-r_{n(3k+6)+3k+6}=r_0+q_0-r_0=q_0,$$

$$r_{n(3k+6)+6k+12} = r_{n(3k+6)+3k+6} = r_0\,,$$

$$\begin{aligned} s_{n(3k+6)+6k+12} &= 2r_{n(3k+6)+3k+6} + q_{n(3k+6)+3k+6} - r_{n(3k+6)+3k+6} + s_{n(3k+6)+3k+6} - r_{n(3k+6)+3k+6} - q_{n(3k+6)+3k+6} \\ &= 2r_0 + q_0 - r_0 + s_0 - r_0 - q_0 = s_0 \end{aligned}$$

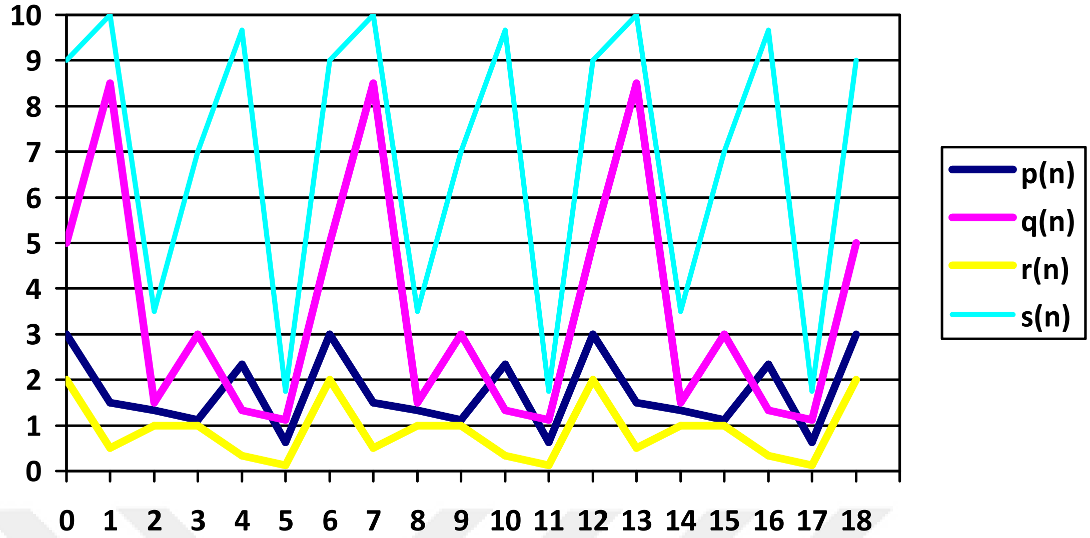
olduğu görülür ve tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanmış olur.

5. NÜMERİK ÖRNEKLER VE ŞEKİLLERİ

Örnek 5.1. (4.8) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$, $k=0$ ve başlangıç şartları $p_0=3$, $q_{-1}=1,5$, $q_0=5$, $r_{-1}=0,5$, $r_0=2$, $s_{-1}=4$, $s_0=9$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin altı periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

Çizelge 5.1

n	p_n	q_n	r_n	s_n
0	3	5	2	9
1	1,5	8,5	0,5	10
2	1,333	1,5	1	3,5
3	1,125	3	1	7
4	2,333	1,333	0,333	9,666
5	0,625	1,125	0,125	1,750
6	3	5	2	9
7	1,5	8,5	0,5	10
8	1,333	1,5	1	3,5
9	1,125	3	1	7
10	2,333	1,333	0,333	9,666
11	0,625	1,125	0,125	1,750
12	3	5	2	9
13	1,5	8,5	0,5	10
14	1,333	1,5	1	3,5
15	1,125	3	1	7
16	2,333	1,333	0,333	9,666
17	0,625	1,125	0,125	1,750
18	3	5	2	9



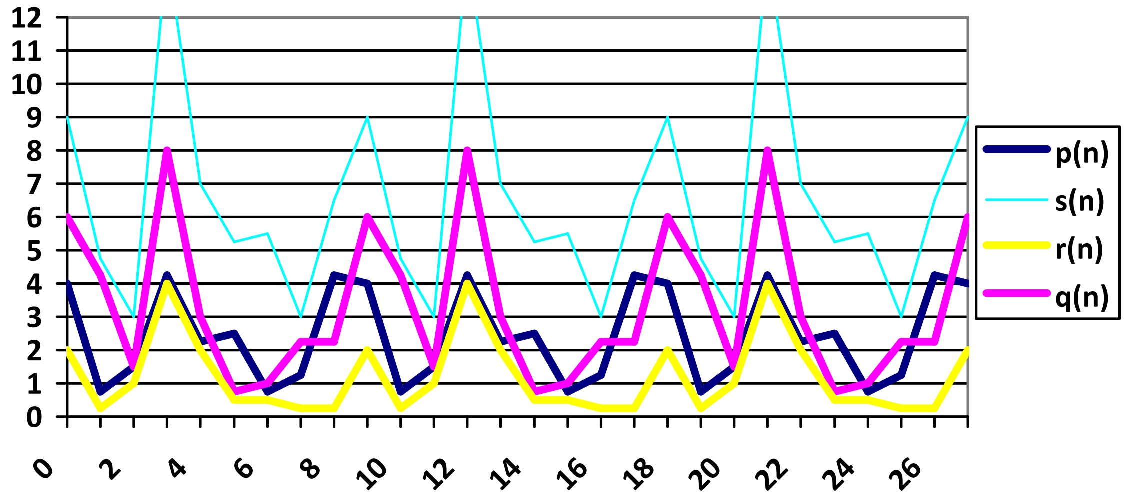
Şekil 5.1. : Altı periyotlu fark denklem sisteminin grafiği

Örnek 5.2 (4.8) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ $k=1$ ve başlangıç şartları $p_{-1}=5$, $p_0=4$, $q_{-2}=3{,}5$, $q_{-1}=3$, $q_0=6$, $r_{-2}=1{,}5$, $r_{-1}=1$, $r_0=2$, $s_{-2}=7$, $s_{-1}=8$, $s_0=9$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin dokuz periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

Çizelge 5.2

n	p_n	q_n	r_n	s_n
0	4	6	2	9
1	0,75	4,25	0,25	4,75
2	1,5	1,5	1	3
3	4,25	8	4	18
4	2,25	3	2	7
5	2,50	0,75	0,50	5,25
6	0,75	1	0,50	5,50
7	1,25	2,25	0,25	3
8	4,25	2,25	0,25	6,5
9	4	6	2	9
10	0,75	4,25	0,25	4,75

11	1,5	1,5	1	3
12	4,25	8	4	18
13	2,25	3	2	7
14	2,50	0,75	0,50	5,25
15	0,75	1	0,50	5,50
16	1,25	2,25	0,25	3
17	4,25	2,25	0,25	6,5
18	4	6	2	9
19	0,75	4,25	0,25	4,75
20	1,5	1,5	1	3
21	4,25	8	4	18
22	2,25	3	2	7
23	2,50	0,75	0,50	5,25
24	0,75	1	0,50	5,50
25	1,25	2,25	0,25	3
26	4,25	2,25	0,25	6,5
27	4	6	2	9

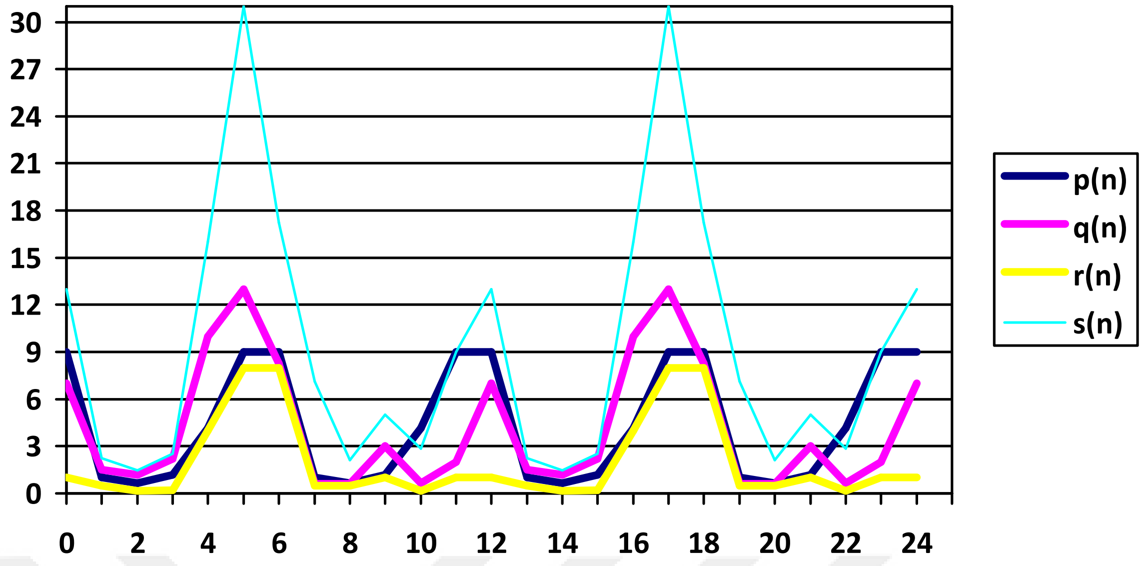


Şekil 5.2. : Dokuz periyotlu fark denklem sisteminin grafiği

Örnek 5.3. (4.8) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ $k=2$ ve başlangıç şartları $p_{-2}=8$, $p_{-1}=10$, $p_0=9$, $q_{-3}=2,5$, $q_{-2}=6$, $q_{-1}=3$, $q_0=7$, $r_{-3}=0,5$, $r_{-2}=4$, $r_{-1}=2$, $r_0=1$, $s_{-3}=5$, $s_{-2}=12$, $s_{-1}=11$, $s_0=13$ olsun. Aşağıdaki tablodan sistemin on iki periyotlu ve periyodik olduğu görülür.

Çizelge 5.3

n	p_n	q_n	r_n	s_n
0	9	7	1	13
1	1	1,5	0,5	2,25
2	0,66666	1,16666	0,16666	1,45833
3	1,2	2,2	0,2	2,525
4	4,16666	10	4	16
5	9	13	8	31
6	9	8,25	8	17,25
7	1	0,625	0,5	7,125
8	0,66666	0,625	0,5	2,125
9	1,2	3	1	5
10	4,16666	0,66666	0,16666	2,83333
11	9	2	1	9
12	9	7	1	13
13	1	1,5	0,5	2,25
14	0,66666	1,16666	0,16666	1,45833
15	1,2	2,2	0,2	2,525
16	4,16666	10	4	16
17	9	13	8	31
18	9	8,25	8	17,25
19	1	0,625	0,5	7,125
20	0,66666	0,625	0,5	2,125
21	1,2	3	1	5
22	4,16666	0,66666	0,16666	2,83333
23	9	2	1	9
24	9	7	1	13



Şekil 5.3. : On iki periyotlu fark denklem sisteminin grafiği

5.1. Nümerik Örneklerden Elde Edilen Sonuçlar

Yukarıda nümerik örnekleri ve grafikleri verilen fark denklem sistemleri için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir;

1. (4.8) fark denklem sisteminde $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ $k=0,1,...$ olduğu durumda fark denklem sistemleri periyodik, sınırlı ve kararsızdır.

2. (4.8) fark denklem sisteminde $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$, $k=0,1,...$ ve $B=DC$ olması durumda fark denklem sistemleri periyodik, sınırlı ve kararsızdır.

3. (4.8) fark denklem sisteminde $A,B,C,D\in\mathbb{R}-\{0\}$, $k=0,1,...$ ve $B\neq DC$ olduğu durumda ise fark denklem sistemleri periyodik değildir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu çalışmada;

$$p_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{B}{q_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)}}, \quad q_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{Cr_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}},$$

$$r_{n+1} = \frac{A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}}, \quad s_{n+1} = \frac{2A}{s_{n-k} - r_{n-k} - q_{n-k}} + \frac{Cr_n(s_{n-(k+1)} - r_{n-(k+1)} - q_{n-(k+1)})}{r_{n-k}} + \frac{D}{p_{n-k} - r_{n-k}}$$

fark denklem sisteminin $A=1$, $B=1$, $C=1$, $D=1$ iken $k=0$, $k=1$, $k=2$ ve $k \in \mathbb{N}$ durumlarında sistemlerin çözümlerinin periyodikliği incelenmiş, sonrasında aynı sistemlerin $A,B,C,D \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ olduğu durumda çözümlerinin periyodikliği ayrıca incelenmiştir. Çalışmanın sonunda da ele alınan her sistemin periyodu grafiklerle gösterilmiştir.

6.2. Öneriler

Bu çalışmada ele alınan fark denklem sistemlerinin denge noktaları ve (4.8) sisteminde $B \neq DC$ durumunda sistemin çözümlerinin davranışları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, Fark denklemleri, Gazi kitabevi.

Camouzis, E. ve Papaschinopoulos, G., 2004, Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations x(n+1)=1+x(n)/yn-m, y(n+1)=1+yn/x(n-m), *Applied Mathematics Letters*, 17 (6), 733-737.

Chatterjee, E., Grove, E., Kostrov, Y. ve Ladas, G., 2003, On the trichotomy character of, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9 (12), 1113-1128.

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation system Xn+1=1/y(n), Y-n+1=Yn/x(n)-1Y(n)-1, *Applied Mathematics and Computation*, 158 (2), 303-305.

Clark, D. ve Kulenović, M., 2002, A coupled system of rational difference equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 43 (6-7), 849-867.

Çinar, C., 2004, On the difference equation xn+ 1= xn− 1− 1+ xnxn− 1, *Applied Mathematics and Computation*, 158 (3), 813-816.

Çınar, C. ve Yalçınkaya, İ., 2004, On the positive solutions of the difference equation system Xn+1=1/z(n), Yn+1=1/x(n)-1Y(n)-1, Zn+1=1/x(n)-1, *International Mathematical Journal*, 5.

Dehghan, M., Douraki, M. J. ve Razzaghi, M., 2006, Global stability of a higher order rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 179 (1), 161-174.

Elaydi, S., 1995, An Introduction To Difference Equations, *Springer*.

Emre, M., 2014, Bazı lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümleri ve periyotları, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Grove, E., Ladas, G., McGrath, L. ve Teixeira, C., 2001, Existence and behavior of solutions of a rational system, *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 8 (1), 1-25.

Hanedar, E., 2014, Lineer olmayan fark sisteminin çözümlerinin periyodu ve sistemin denge noktaları, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Iricanin, B. D. ve Stevic, S., 2006, Some systems of nonlinear difference equations of higher order with periodic solutions, *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A*, 13 (3/4), 499.

Kılıklı, G., 2011, Lineer olmayan fark sisteminin çözümleri ve davranışları, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

Kose, H., Uslu, K., Taskara, N. ve Hekimoglu, O., 2010, On the Dynamics of Solutions of Non-linear Recursive System, *Communications in Mathematics and Applications*, 1 (2), 91-98.

Kulenović, M. ve Nurkanović, M., 2003, Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9 (1), 149-159.

Kulenović, M. ve Nurkanović, Z., 2005, Global behavior of a three-dimensional linear fractional system of difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 310 (2), 673-689.

Nasri, M., Dehghan, M. ve Douraki, M. J., 2005, Study of a system of non-linear difference equations arising in a deterministic model for HIV infection, *Applied Mathematics and Computation*, 171 (2), 1306-1330.

Ozban, A. Y., 2006, On the positive solutions of the system of rational difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323 (1), 26-32.

Papaschinopoulos, G., Schinas, C. ve Stefanidou, G., 2007, On a k-order system of Lyness-type difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2007 (1), 031272.

Schinas, C. J., 1997, Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 216 (1), 164-179.

Simsek, D., Demir, B. ve Cinar, C., 2009, On the Solutions of the System of Difference Equations xn, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2009.

Taskara, N., Uslu, K. ve Tollu, D., 2011, The periodicity and solutions of the rational difference equation with periodic coefficients, *Computers & Mathematics with Applications*, 62 (4), 1807-1813.

Uslu, K. ve Esen, E., 2015, The Solutions and Periods of Two Non-linear Discrete Models, *Asian Journal of Applied Sciences (ISSN: 2321–0893)*, 3 (01).

Uslu, K. ve Ugurlu, T., 2016, Some Periodic Non-linear Difference Models, *Asian Journal of Applied Sciences (ISSN: 2321–0893)*, 4 (01).

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Vural DENİZ
Uyruğu	**:**	TC
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Karaman 15.07.1989
Telefon	**:**	506 656 29 21
Faks	**:**	
e-mail	**:**	vdeniz@selcuk.edu.tr

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Yunuskent Yabancı Dil Ağırlıklı Lise, Merkez, Karaman**	**2007**
Üniversite	:	**Selçuk Üniveristesi, Selçuklu, Konya**	**2011**
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-2018	**Selçuk Üniversitesi Hadim Meslek Yüksekokulu**	**Bilgisayar İşletmeni**
2018	**Selçuk Üniversitesi Hadim Meslek Yüksekokulu**	**Öğretim Görevlisi**

UZMANLIK ALANI
Matematik

YABANCI DİLLER
İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR*

Uslu K., Deniz V, 2018, The Solutions and Periods of Some Considered Non-Linear Difference Equation Systems, Asian Journal of Applied Sciences, Volume 06 – Issue 05, October 2018, Pages 298-300