



ÜRETİLEN NORMLU UZAYLAR ARASINDAKİ OPERATÖRLER

Nazlı Büşra YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2019

Nazlı Büşra YILMAZ tarafından hazırlanan "ÜRETİLEN NORMLU UZAYLAR ARASINDAKİ OPERATÖRLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 24/01/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nazlı Büşra YILMAZ

24/01/2019

ÜRETİLEN NORMLU UZAYLAR ARASINDAKİ OPERATÖRLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Nazlı Büşra YILMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu çalışmada, sıralı cisimlerde değer alan normlar ile elde edilen uzaylar arasındaki operatörler ele alınmıştır. Seçilen üreteçlere göre bu operatörlerin lineerlikleri, sınırlılıkları ve normları tanımlanmış ve bu kavramlar üzerine birtakım sonuçlar verilmiştir. İki vektör uzayı arasındaki operatörlerin cebirsel ve topolojik kavramları seçilen üreteçlere göre bu uzayların üretilen normları ile doğrudan ilişkilendirilmiştir. Üretilen normların yapısının operatörlerin karakteristik özelliklerini belirlediği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Üreteç, α -aritmetik, α -norm, operatör normu.

Sayfa Adedi : 41

Danışman : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

OPERATORS BETWEEN GENERATED NORMED SPACES

(M. Sc. Thesis)

Nazlı Büşra YILMAZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2019

ABSTRACT

Operators between any two spaces obtained with the help of norms with valued in the ordered fields are considered. The linearity, boundedness and norms of these operators are defined according to the selected generators. Some conclusions are given on these concepts. The algebraic and topological concepts of operators between any two vector spaces are directly related to generated norms of these spaces according to some selected generators. The structure of generated norms determines the characteristics of operators.

Science Code : 20404

Key Words : Generator, α -arithmetic, α -norm, operator norm.

Page Number : 41

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince, değerli zamanını ve bilgi birikimini benimle paylaşan, yol göstericiliği ile desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Cüneyt Çevik'e teşekkürlerimi sunarım. Yine çalışmalarımda destekleriyle her zaman yanımda olan aileme, dostlarıma ve eğitim hayatımda bugüne kadar bilgileriyle bana katkı sağlayan tüm hocalarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	5
2.1. α -Aritmetik	5
2.2. Üretilen Vektör Uzayları ve Üretilen Normlu Uzaylar	12
3. ÜRETİLEN NORMLU UZAY ÜSTÜNDE DÖNÜŞÜMLER	17
3.1. α -Sınırlı α -Lineer Dönüşümler	17
3.2. Bir Operatörün Normu	21
3.3. α -Fonksiyoneller	28
3.4. Ters Dönüşümler	32
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	37
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	41

1. GİRİŞ

17. yüzyılda Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibnitz diferansiyel ve integral kalkülüsün temelini attı. Bu kalkülüs Newtonyan kalkülüsü olarak adlandırılır. 20. yüzyıla kadar sürekliliği olmayan yöntemler vardı ve türev olmadan büyük başarılar sağlanamadı.

Türev çok uzun süredir matematiksel analizin merkezindedir. Diğer yandan, beklenmedik bir şekilde türev sayesinde ekonomik büyüme modelinde yer alan daha gerçekçi büyüme olgusunu açıklayan bir yaklaşım geliştirilebilmiştir. Bu paradigmanın değişmesiyle yani farklar yerine oranlar yoluyla ölçüm yapıldığında, sapmaların ve doğal olarak varyasyonların da hesaplanabileceğini düşündürdü. Galileo kısaca bunu düşünmüş olsa da 1972 yılında Grossman ve Katz Newtonyan olmayan kalkülüsü hayal edene kadar bu gerçekleşmedi. Grossman ve Katz'ın birlikte yazdığı Non-Newtonian Calculus isimli kalkülüs ve aritmetik sistemleri geniş bir şekilde incelenmiştir [1]. Newtonyan olmayan kalkülüs Newton ve Leibniz kalkülüsüne bir alternatiftir. Klasik operatörlerin yerine Newtonyan olmayan operatörleri temel olarak farklılaştırma araçları sağlanır. Klasik kalkülüsteki her özellik Newtonyan olmayan kalkülüs için bir örnektir. Ayrıca kalkülüs yoluyla araştırılabilen problemlere farklı bir bakış açısı ile bakabilmeye izin verir. Grossman ve Katz aynı zamanda Newtonyan olmayan kalkülüsü kullanarak bigeometrik kalkülüsü oluşturmuştur ve Grossmann ölçeşiz türev sistemi olan bigeometrik kalkülüs üzerine bir kitap yazmıştır [10]. Agamirza Bashirov, Emine Kurpınar Mısırlı ve Ali Özyapıcı Newtonyan olmayan kalkülüsten yararlanarak çarpımsal kalkülüs ve uygulamaları üzerine çalışmalar yapmışlardır [2]. Yücel Tandoğdu'nun da katılmasıyla 2011 yılında yayımladıkları makalede işlemler tanımlayarak üstel aritmetiği kurmuşlar ve çarpımsal diferensiyel eşitlikler ve bunlarla ilgili bazı teoremler vermişlerdir [3]. Ahmet Faruk Çakmak ve Feyzi Başar 2012 yılında yayımladıkları makalede Newtonyan olmayan kalkülüse göre dizi uzaylarında bazı sonuçlar göstermişlerdir [4]. 2014 yılında yayımladıkları makalede ise kompleks sayıları Newtonyan olmayan kalkülüse göre değerlendirmişlerdir [5]. Benzer şekilde birçok matematikçi Newtonyan olmayan kalkülüs alanında çalışmalar yapmıştır [6] - [9].

Newtonyan kalkülüsün temel kavramları olan integralleme ve diferansiyelleme, toplama ve çıkarma işlemlerinin sonsuz küçükler hesabına dayanır. Bu yüzden bu kalkülüse toplamanın temel işlemlerini gösteren toplamsal kalkülüs de denir. Toplamsal kalkülüs, toplamsal özelliklerin uzunluk kavramındaki bir boyutlu uygulamaların tamamına uygundur. Bu durum çok boyutlu durumlarda önemli

olmayan karışıklıklar getirebilir: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün boyu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \dots + x_n^2}$$

olarak tanımlanırken yeni bir işlemle kök toplamı

$$a \oplus_{\text{kök}} b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

şeklinde yazılabilir. Hatta basit olarak bu işlem

$$\|x\| = x_1 \oplus_{\text{kök}} x_2 \oplus_{\text{kök}} \dots \oplus_{\text{kök}} x_n$$

veya

$$\|x\| = x_1 \overset{\alpha}{+} x_2 \overset{\alpha}{+} \dots \overset{\alpha}{+} x_n$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu da bize bir α -toplam operatörü tanımlar. Bu toplam operatörünü temel alarak bir α -aritmetik geliştirilebilir [3].

Aritmetik, matematiğin sayılar arasındaki ilişkileri ve sayıların problemleri çözmede kullanımı ile ilgilenen alanıdır. Bütün aritmetikler yapısal olarak özdeş olmasına rağmen, Newtonyan olmayan kalkülüsün tümünü kurmak için uygun araçlar yardımıyla onları farklılaştırırız. Ama aritmetiklerin kullanılışlığı kalkülüsün yapısını sınırlandırmaz. Basit fizik olayları ve yeni ölçü sistemleri gibi temel olguları anlayabilmek ve geliştirebilmek için farklı aritmetikler üretmek önemlidir. Tanım kümesi reel sayılar ve görüntü kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ birebir eşlemesine *üreteç* adı verilir. Üreteçler yardımıyla klasik aritmetikten farklı birçok aritmetik kurulabilir. Kullanılacak olan α üreticine göre $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi ve üzerindeki aritmetik değişecektir. Bu tezde kullanılan α -aritmetik, normlu uzayları ve normlu uzaylar üstünde tanımlanan tüm işlemleri ve operatörleri α -üretici ile bağdaştıran bir aritmetiktir.

İlk olarak bazı α -aritmetikler tanıtılacaktır. α üretici ile tanımlanan temel işlemler olan α -toplama ve α -çarpma işlemleri, bu işlemlere göre birim elemanlar, α -sıralama bağıntısı kurularak α -aritmetik oluşturulmuştur. Kullanılan üretece göre ortaya çıkan farklı aritmetik örnekleri verilmiştir. Fonksiyonel analiz alanındaki bazı kavram ve teoremlerden yararlanılmıştır [11–14]. Daha sonra bu tezin asıl amacı olan üretilen vektör uzaylar ve üretilen normlu uzaylar incelenmiştir. α -vektör uzayı tanımlanarak

vektör uzayları için verilen bazı teoremler, ispatlar ve örnekler üretece göre yeniden yorumlanmıştır. Böylece α -normlu uzayı tanımlanacak, $C[a, b]$, c , l_∞ ve l_p normlu uzayları α -üreteci yardımıyla yeniden oluşturulmuştur. α -lineerlik ve α -sınırlılık tanımlanarak α -lineer dönüşümler üzerinde bazı teoremler verilmiştir. Sonrasında α -süreklilik kavramı üzerinde durularak ilgili teoremler ispatlanmış ve bazı örneklerle yer verilmiştir. Diğer yandan, α -norm ve operatörler için α -norm kavramları tanımlanmıştır. X reel veya kompleks bir α -vektör uzayı ve $\mathbb{K}_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ veya $\mathbb{C}_\alpha$ olmak üzere $f : X \rightarrow \mathbb{K}_\alpha$ dönüşümü tanımlanarak bir α -fonksiyonel oluşturulmuştur. Çeşitli α -uzaylar üzerinde tanımlanan dönüşümlerle α -fonksiyonel örnekleri verilmiştir. Ayrıca fonksiyonellere bağlı ifadelerle α -fonksiyoneller açısından bakılmıştır. Herhangi bir α -aritmetik yardımıyla tanımlanan dönüşümlerin terslerinin varlıkları ve bazı özellikleri gösterilmiştir. X ve Y α -vektör uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ α -lineer dönüşüm ve T dönüşümünün α -tersi T^{-1} olmak üzere T^{-1} dönüşümünün α -lineer olduğu; X ve Y α -normlu vektör uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü örten ve α -lineer olmak üzere T^{-1} dönüşümünün var ve α -sınırlı olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. α -Aritmetik

Aritmetik, $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesinde sıralı cisim şartlarının tamamını sağlayan bir sistemdir. Birbirine izomorf, yani yapısal olarak birbirine denk olan sonsuz sayıda aritmetik vardır. Her ne kadar iki aritmetik birbirine izomorf olsa da kullanım olarak farklılıkları vardır. Bir α üretici, tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$ 'nin ($\mathbb{R}_\alpha$ ile gösterilen) bir alt kümesi olan birebir bir fonksiyondur. Her üretecten bir tek aritmetik elde edilir, tersine her aritmetik bir tek üretect tarafından üretilir. Üretecin temel görevi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış olan başta ikili işlemler ve sıralama olmak üzere kavramları farklılaştırmaktır. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α üretici yardımıyla tanımlanan temel olarak dört çeşit ikili işlemde bahsedilebilir. Bunlardan ikisi olan α -toplama ve α -çarpma işlemleri her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} x \overset{\alpha}{+} y &= \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)) \\ x \overset{\alpha}{\cdot} y &= \alpha(\alpha^{-1}(x) \cdot \alpha^{-1}(y)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemler göz önüne alınınca, $0_\alpha = \alpha(0)$ sayısı α -toplamaya göre, $1_\alpha = \alpha(1)$ sayısı ise α -çarpmaya göre etkisiz elemanlardır. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$-x = \alpha(-1) \overset{\alpha}{\cdot} x = \alpha(-\alpha^{-1}(x)) \quad (2.2)$$

sayısına x sayısının α -negatifi veya α -toplama işlemine göre tersi; herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{\alpha(0)\}$ için

$$x^{-1_\alpha} = 1/x = \alpha(1/\alpha^{-1}(x)) \quad (2.3)$$

sayısına ise x sayısının α -çarpma işlemine göre tersi denir. Yukarıda tanımlanan işlemler vasıtasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ üzerindeki α -çıkarma ve α -bölme işlemleri her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} x \overset{\alpha}{-} y &= x \overset{\alpha}{+} (-y) = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)) \\ x \overset{\alpha}{/} y &= x \overset{\alpha}{\cdot} \left(1 \overset{\alpha}{/} y \right) = \alpha(\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)) \quad (y \neq \alpha(0)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α üretici yardımıyla farklı sıralamalar da tanımlanabilir. Burada üretecin artanlığı, azalanlığı ve monotonluğu önemli bir rol

oynar. Elde edilen sıralama bilinen sıralama ile farklılık gösterebileceği gibi çakışadabilir. Bilhassa α üretici monoton iken her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için α -sıralama

$$x \stackrel{\alpha}{\leq} y \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y) & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \alpha^{-1}(x) \geq \alpha^{-1}(y) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanır. Yukarıda bahsedilen işlemler ve α -sıralama ile $\mathbb{R}_\alpha$ görüntü kümesi tam sıralı bir cisim olur. α üreticinin monoton olmadığı durumlarda da α -sıralama tanımı yapılabilir. Ancak bu tanımlama $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin uygun alt kümelerine parçalanışı ile elde edilir (Bu alt kümeler α üreticinin kısıtlanışının monoton olması halinde yukarıdakine benzer bir sıralama oluşturulur). Bu durumda ise $\mathbb{R}_\alpha$ kısmî sıralı bir cisim olur.

$\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α üretici vasıtasıyla tanımladığımız işlemler ve sıralama ile oluşturduğumuz bu sıralı cisimlere α -aritmetik adı verilir. Şimdi birkaç adet α -aritmetik örneği inceleyelim.

Örnek

(a) I Birim fonksiyonu $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde *klasik aritmetiği* üretir.

(b) Üstel fonksiyon $\exp$ ise $\mathbb{R}_{\exp} = \mathbb{R}^+$ üzerinde *geometrik aritmetiği* üretir. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned} x \stackrel{\exp}{+} y &= xy \\ x \stackrel{\exp}{\cdot} y &= x^{\ln y} = y^{\ln x} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlemler ve

$$x \stackrel{\exp}{\leq} y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y$$

ile verilen sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^+$ tam sıralı bir cisimdir.

(c) Üreteç

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -\sqrt{(-x)} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olarak alınırsa elde edilen aritmetiğe *kuadratik aritmetik* adı verilir.

(d) $\mathbb{R}$ üzerinde q -aritmetik denilen sonsuz sayıda aritmetik tanımlayabiliriz. Sıfırdan farklı herhangi bir q reel sayısı için $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^{1/q} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^{1/q} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı α üretici ele alınsın. Bu üreticinin tersinin

$$\alpha^{-1}(x) = \begin{cases} x^q & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^q & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada q farklı değerler aldıkça birbirinden farklı sonsuz sayıda α -aritmetik tanımlanabilir. Örneğin $q = 1$ ise α -aritmetik bildiğimiz klasik aritmetik ile çakışırken, $q = 2$ iken ise kuadratik aritmetik denilen aritmetik elde edilir. Ayrıca $q = -1$ olduğu durumda ise *harmonik aritmetik* üretilmiş olur. Tüm durumlarda

$$x \overset{\alpha}{+} y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x \overset{\alpha}{\cdot} y = xy$$

ikili işlemleri ve

$$x \overset{\alpha}{\leq} y \Leftrightarrow x \leq y$$

sıralama bağıntısı ile $\mathbb{R}_\alpha$ tam sıralı bir cisimdir.

Herhangi bir α -aritmetiğin (veya herhangi bir $\mathbb{R}_\alpha$ sıralı cisminin) sıfırı 0_α olduğundan, α -aritmetikte pozitif ve negatif sayıların kümeleri bilinenden farklı olabilir. Başka bir deyişle,

$$\mathbb{R}_\alpha^+ = \left\{ x \mid 0_\alpha \overset{\alpha}{\leq} x \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha \right\} \quad \text{ve} \quad \mathbb{R}_\alpha^- = \left\{ x \mid x \overset{\alpha}{\leq} 0_\alpha \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha \right\} \quad (2.6)$$

biçimindeki $\mathbb{R}_\alpha^+$ ve $\mathbb{R}_\alpha^-$ kümeleri α üreticine göre farklılık gösterebilir. Meselâ yukarıdaki örnekte (b) için $\mathbb{R}_{\exp}^+ = (1, \infty)$ ve $\mathbb{R}_{\exp}^- = (0, 1)$ iken (d)'de $\mathbb{R}_q^+ = (0, \infty)$ ve

$\mathbb{R}_q^- = (-\infty, 0)$ olur. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+$ sayısına α -pozitif sayı ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^-$ sayısına ise α -negatif sayı denir. Sadece pozitiflik veya negatiflik kavramı değişmekle kalmayıp bütün koordinat sistemi farklılaşabilir. Dolayısıyla α -aritmetiğe göre ‘sonsuz’ kavramı da değişebilir. Bu yüzden ∞_α yani ‘ α -sonsuz’ ve $-\infty_\alpha$ yani ‘eksi α -sonsuz’ tanımlamalarına ihtiyaç vardır. Meselâ yukarıdaki örnekte (b) için $-\infty_{\exp} = 0$ ve $\infty_{\exp} = \infty$ iken (c) için $-\infty_q = -\infty$ ve $\infty_q = \infty$ olur.

Reel sayılar için verilen üretici tanımı kompleks sayılara genişletilebilir. Bunun için herhangi bir $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ üreticine karşılık bir $\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\beta$ birebir ve örten dönüşümü tanımlamak gerekir. Burada $\mathbb{C}_\beta$, $\mathbb{C}$ ’nin bir alt kümesidir. $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x_\alpha = \alpha(x)$, $y_\alpha = \alpha(y)$, $i_\alpha = \sqrt{-1} = \alpha(\sqrt{-1}) = \alpha(i)$ olmak üzere,

$$\beta(z) = x_\alpha + i_\alpha \cdot^\alpha y_\alpha \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanan β ’ya *kompleks α -üretici* denir. $\mathbb{C}_\beta$ ’yı cisim yapan işlemler $a, b, c, d \in \mathbb{R}_\alpha$ ve

$$\begin{aligned} z &= a + i_\alpha \cdot^\alpha b \in \mathbb{C}_\beta \\ w &= c + i_\alpha \cdot^\alpha d \in \mathbb{C}_\beta \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} z +^\beta w &= (a +^\alpha c) + i_\alpha \cdot^\alpha (b +^\alpha d) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a) + \alpha^{-1}(c) + i[\alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(d)]) \\ z \cdot^\beta w &= (a \cdot^\alpha d - b \cdot^\alpha c) + i_\alpha \cdot^\alpha (a \cdot^\alpha c + b \cdot^\alpha d) \\ &= \alpha([\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(d) - \alpha^{-1}(b) + \alpha^{-1}(c)] + i[\alpha^{-1}(a) \cdot \alpha^{-1}(c) + \alpha^{-1}(b) \cdot \alpha^{-1}(d)]) \end{aligned}$$

biçimde tanımlanır. $\mathbb{C}_\beta$ üzerindeki $\leq^\beta$ sıralaması ise

$$z \leq^\beta w \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(c) \text{ ve } \alpha^{-1}(b) \leq \alpha^{-1}(d), \alpha \text{ artan} \\ \alpha^{-1}(a) \geq \alpha^{-1}(c) \text{ ve } \alpha^{-1}(b) \geq \alpha^{-1}(d), \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad (2.8)$$

ile verilir. Yukarıda tanımlanan iki işlem ve bu sıralama ile $\mathbb{C}_\beta$ tam sıralı cisimdir. Bu durumda $\mathbb{C}_\beta$ ’nin sıfırı ve biri sırasıyla $0_\beta = \beta(0 + i0)$ ve $1_\beta = \beta(1 + i0)$ olur. β ve α arasındaki farklılıklar saklı tutularak β ’yı da α ile belirletip $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{C}_\alpha$ cisimlerinin

ortak gösterimi olarak $\mathbb{K}_\alpha$ 'yı kullanacağız.

İkili işlemlerin değişmesine bağlı olarak sayıların kuvvetleri ve kökleri de farklılaşabilir. $\mathbb{R}_\alpha$ 'daki bir x sayısının α -karesi

$$x^{2\alpha} = x \cdot^\alpha x = \alpha \left([\alpha^{-1}(x)]^2 \right) \quad (2.9)$$

olur. Tümevarım yöntemi yardımıyla herhangi bir m doğal sayısı için bir x sayısının m . dereceden α -kuvveti

$$x^{m\alpha} = \alpha \left([\alpha^{-1}(x)]^m \right) \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Benzer bir şekilde herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{0_\alpha\}$ sayısı için

$$\begin{aligned} x^{-2\alpha} &= 1 / x^{2\alpha} \\ &= 1 / \left(x \cdot^\alpha x \right) \\ &= 1 / \alpha \left([\alpha^{-1}(x)]^2 \right) \\ &= \alpha \left([\alpha^{-1}(x)]^{-2} \right) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \{0_\alpha\}$ sayısının α -karekökü

$$\sqrt[\alpha]{x} = \alpha \left(\sqrt{\alpha^{-1}(x)} \right) \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanır. Genelleştirmek gerekirse, $\mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir x elemanın herhangi bir $n \geq 2$ tamsayı için n . dereceden α -kökü (eğer mevcutsa);

$$\sqrt[n]{x} = x^{(1/n)\alpha} = x^{1/n_\alpha} = \alpha \left(\sqrt[n]{\alpha^{-1}(x)} \right) \quad (2.12)$$

sayısıdır.

Pozitiflik ve negatiflik kavramının değişimine bağlı olarak mutlak değer kavramında da değişiklik görülebilir. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin bir x elemanın α -mutlak değeri şu şekilde ifade

edilebilir:

$$|x|_{\alpha} = \sqrt{x^{2\alpha}} = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) = \begin{cases} x & , \quad x \overset{\alpha}{>} 0_{\alpha} \\ 0_{\alpha} & , \quad x = 0_{\alpha} \\ -x & , \quad x \overset{\alpha}{<} 0_{\alpha} \end{cases} \quad (2.13)$$

Sıralamaya bağlı olarak $\mathbb{R}_{\alpha}$ kümesindeki aralıklar $\mathbb{R}$ kümesindekilerden farklı olabilir. Bu durumda aralık tanımını yapmakta fayda vardır. $\mathbb{R}_{\alpha}$ kümesinden a ve b elemanları alalım. O halde $\mathbb{R}_{\alpha}$ kümesinin bir açık aralığı

$$(a, b)_{\alpha} = \begin{cases} (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) & , \quad \alpha \text{ artan} \\ (\alpha^{-1}(b), \alpha^{-1}(a)) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer bir şekilde bir yarı açık aralığı da şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$(a, b]_{\alpha} = \begin{cases} (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)] & , \quad \alpha \text{ artan} \\ [\alpha^{-1}(b), \alpha^{-1}(a)) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad (2.15)$$

Şimdi $(1, 2)_{\alpha}$ açık aralığının üretece göre nasıl değiştiğine bakalım. Bu aralık üreteç olarak $\alpha = I$ alınırsa $(1, 2)_{\alpha} = (1, 2)$, $\alpha = \exp$ alınırsa $(1, 2)_{\alpha} = (\ln 1, \ln 2)$, α kuadratik aritmetiği üreten fonksiyon olarak alınırsa $(1, 2)_{\alpha} = (\sqrt{1}, \sqrt{2})$, α harmonik aritmetiği üreten fonksiyon olarak alınırsa $(1, 2)_{\alpha} = (\frac{1}{2}, 1)$ haline gelir.

Teorimizde önemli bir yere sahip olan limit kavramındaki değişime de göz atmak gerekir.

2.1. Tanım

$\mathbb{R}_{\alpha}$ kümesinden bir $\{a_n\}$ dizisi alınsın ve $a \in \mathbb{R}_{\alpha}$ olsun. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_{\alpha}$ için $n > n_{\varepsilon}$ iken $\left| a_n \overset{\alpha}{-} a \right|_{\alpha} \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak biçimde bir n_{ε} sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi a sayısına α -yakınsar denir ve α -lim $a_n = a$ veya $a_n \xrightarrow{\alpha} a$ yazılır. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_{\alpha}$ için $n > n_{\varepsilon}$ iken $a_n \overset{\alpha}{>} \varepsilon$ (veya $a_n \overset{\alpha}{<} -\varepsilon$) olacak biçimde bir n_{ε} sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisi α -sonsuz (veya eksi α -sonsuz) yaklaşıyor denir ve α -lim $a_n = \infty_{\alpha}$ (veya α -lim $a_n = -\infty_{\alpha}$) yazılır.

Üreteç sürekli iken herhangi bir $\{a_n\}$ reel sayı dizisi için

$$\lim a_n = a \quad \Rightarrow \quad \alpha\text{-}\lim \alpha(a_n) = \alpha(a)$$

$$\lim a_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \alpha\text{-}\lim \alpha(a_n) = \infty_\alpha$$

$$\lim a_n = -\infty \quad \Rightarrow \quad \alpha\text{-}\lim \alpha(a_n) = -\infty_\alpha$$

elde edilir.

Özel olarak, $\lim \alpha(n) = \alpha\text{-}\lim \alpha(n) = \infty_\alpha$ ve $\lim \alpha(-n) = \alpha\text{-}\lim \alpha(-n) = -\infty_\alpha$ olur.

2.2. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ içinde verilen bir $\{a_n\}$ dizisi için

$$\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \overset{\alpha}{+} a_2 \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} a_n \overset{\alpha}{+} \cdots$$

ifadesine sonsuz α -seri denir. Genel terimi

$$s_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \overset{\alpha}{+} a_2 \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} a_n = \alpha \left(\sum_{i=1}^n \alpha^{-1}(a_i) \right)$$

olan $\{s_n\}$ dizisine ise *kısmî α -toplamlar dizisi* denir. Bu dizi bir $L \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısına α -yakınsak ise $\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi L α -toplamına sahiptir ve bu durumda $\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha\text{-}\lim s_n = L$ biçiminde yazılır.

2.3. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden bir $\{a_n\}$ dizisi alınsın. Eğer her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $m, n > N$ iken $\left| a_n \overset{\alpha}{-} a_m \right| \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda $\{a_n\}$ dizisine α -Cauchy dizisi denir.

2.4. Tanım

X boş olmayan bir küme olmak üzere $d_\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

$$1) d_\alpha(x, y) = 0_\alpha \Leftrightarrow x = y$$

$$2) d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$$

$$3) d_\alpha(x, y) \stackrel{\alpha}{\leq} d_\alpha(x, z) \stackrel{\alpha}{+} d_\alpha(z, y)$$

aksiyomlarını sağlıyorsa d_α fonksiyonuna *üretilen metrik* veya α -*metrik*, (X, d_α) ikilisine de *üretilen metrik uzay* ya da α -*metrik uzay* denir.

2.2. Üretilen Vektör Uzayları ve Üretilen Normlu Uzaylar

2.5. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. X içinde toplama

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{+} : X \times X &\rightarrow X \\ (x, y) &\rightarrow x \overset{\Delta}{+} y \end{aligned}$$

dönüşümü ile X içinde skaler ile çarpma adı verilen

$$\begin{aligned} \overset{\Delta}{\cdot} : \mathbb{K}_\alpha \times X &\rightarrow X \\ (k, x) &\rightarrow k \overset{\Delta}{\cdot} x \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlayalım. Eğer bu dönüşümler her $x, y, z \in X$ ve her $k, l \in \mathbb{K}_\alpha$ için

- 1) $x \overset{\Delta}{+} y = y \overset{\Delta}{+} x$
- 2) $x \overset{\Delta}{+} (y \overset{\Delta}{+} z) = (x \overset{\Delta}{+} y) \overset{\Delta}{+} z$
- 3) Her $x \in X$ için $x \overset{\Delta}{+} \theta = x$ olacak biçimde bir $\theta \in X$ var,
- 4) Her $x \in X$ için $x \overset{\Delta}{+} x' = \theta$ olacak biçimde bir $x' \in X$ var,
- 5) $k \overset{\Delta}{\cdot} (x \overset{\Delta}{+} y) = (k \overset{\Delta}{\cdot} x) \overset{\Delta}{+} (k \overset{\Delta}{\cdot} y)$
- 6) $(k \overset{\alpha}{+} l) \overset{\Delta}{\cdot} x = (k \overset{\Delta}{\cdot} x) \overset{\Delta}{+} (l \overset{\Delta}{\cdot} x)$
- 7) $(k \overset{\alpha}{\cdot} l) \overset{\Delta}{\cdot} x = k \overset{\Delta}{\cdot} (l \overset{\Delta}{\cdot} x)$
- 8) $1_\alpha \overset{\Delta}{\cdot} x = x$

koşullarını sağlıyorsa X kümesine $\mathbb{K}_\alpha$ üzerinde bir *üretilen vektör uzay* (veya α -*vektör uzayı*) adı verilir.

Örnek

$x_i, y_i \in \mathbb{K}_\alpha$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$ ve $a \in \mathbb{K}_\alpha$ olsun.

$$x \overset{\Delta}{+} y = (x_1 \overset{\alpha}{+} y_1, \dots, x_n \overset{\alpha}{+} y_n)$$

$$a \overset{\Delta}{\cdot} x = (a \overset{\alpha}{\cdot} x_1, \dots, a \overset{\alpha}{\cdot} x_n)$$

tanımları altında $\mathbb{K}_\alpha^n$ kümesi reel bir α -vektör uzay olur.

2.6. Tanım

α ve β iki üreteç olmak üzere $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $f : \mathbb{R}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\beta$ olsun. $\varepsilon \overset{\beta}{>} 0_\beta$ için $\left| x \overset{\alpha}{-} x_0 \right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \delta$ iken $\left| f(x) \overset{\beta}{-} f(x_0) \right|_\beta \overset{\beta}{<} \varepsilon$ olacak biçimde $\delta \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ varsa f 'ye x_0 noktasında (α, β) -süreklidir denir. $\alpha = \beta$ iken f , x_0 noktasında α -süreklidir. f , $\mathbb{R}_\alpha$ 'nın bir A altkümesinin tüm noktalarında (α, β) -süreklili ise f 'ye A üzerinde (α, β) -süreklidir denir.

Örnek

f bir fonksiyon olmak üzere $k \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $[a, b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ aralığı için

$$C_\alpha[a, b] = \{f \mid f : [a, b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha, f \text{ } \alpha\text{-süreklili fonksiyon} \}$$

uzayı

$$(x \overset{\Delta}{+} y)(t) = x(t) \overset{\alpha}{+} y(t)$$

$$(k \overset{\Delta}{\cdot} x)(t) = k \overset{\alpha}{\cdot} x(t)$$

tanımları altında bir α -vektör uzayıdır.

2.7. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ veya $\mathbb{C}_\alpha$ uzayında $|\cdot|_\alpha$ α -mutlak değerine göre bir $\{x_n\}$ dizisi için $|x_n|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} M_\alpha$ olacak biçimde $M \in \mathbb{R}_\alpha^+$ varsa $\{x_n\}$ dizisine α -sınırlıdır denir.

Örnek

Reel ya da kompleks terimli ve α -sınırlı bütün $x = \{x_n\}$ dizileri için

$$\ell_\alpha^\infty = \left\{ x = \{x_n\} \subseteq \mathbb{K}_\alpha : \sup_n^\alpha |x_n| \leq^\alpha \infty_\alpha \right\}$$

kümesi

$$x \overset{\Delta}{+} y = \left\{ x_n \overset{\alpha}{+} y_n \right\}$$

$$k \overset{\Delta}{\cdot} x = \left\{ k \overset{\alpha}{\cdot} x_n \right\}$$

tanımları altında bir α -vektör uzayıdır.

Örnek

Bütün α -yakınsak dizilerin kümesi

$$c_\alpha = \left\{ x = \{x_n\} \subseteq \mathbb{K}_\alpha : \lim_{n \rightarrow \infty}^\alpha x_n \text{ mevcut} \right\}$$

bir önceki örnekte verilen işlemlerle α -vektör uzayıdır.

Örnek

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\ell_\alpha^p = \left\{ x = \{x_n\} \subseteq \mathbb{K}_\alpha : \sup_n^\alpha |x_n| \leq^\alpha \infty_\alpha \right\}$$

kümesi

$$x \overset{\Delta}{+} y = \left\{ x_n \overset{\alpha}{+} y_n \right\}$$

$$k \overset{\Delta}{\cdot} x = \left\{ k \overset{\alpha}{\cdot} x_n \right\}$$

işlemleri ile bir α -vektör uzayıdır.

2.8. Tanım

$X, \mathbb{K}_\alpha$ üzerinde bir α -vektör uzayı olmak üzere $\|\cdot\|_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $k \in \mathbb{K}_\alpha$ için

$$1) \|x\|_\alpha = 0_\alpha \iff x = \theta_\Delta$$

$$2) \left\| k \overset{\Delta}{\cdot} x \right\|_\alpha = |k|_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \|x\|_\alpha$$

$$3) \left\| x \overset{\Delta}{+} y \right\|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} \|x\|_\alpha \overset{\alpha}{+} \|y\|_\alpha$$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme *üretilen norm* veya α -norm, $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ikilisine de *üretilen normlu uzay* veya α -normlu uzay denir.

Örnek

$\mathbb{K}_\alpha^n$ vektör uzayı $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}_\alpha^n$ için

$$\|x\|_\alpha = \sqrt{\alpha \sum_{k=1}^n |x_k|_\alpha^2} = \alpha \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha^{-1}(x_k)|^2} \right)$$

ile tanımlı α -norm ile bir α -normlu uzaydır. Bu norm $\mathbb{K}_\alpha^n$ uzayının doğal normudur. Bu uzay üzerinde tanımlanabilecek diğer norm

$$\|x\|_\alpha = \max_{1 \leq k \leq n}^\alpha |x_k|_\alpha = \alpha \left(\max_{1 \leq k \leq n} |\alpha^{-1}(x_k)| \right)$$

olur.

Örnek

ℓ_2^α α -vektör uzayı her $x = \{x_n\}$ elemanı için

$$\|x\|_{2_\alpha} = \sqrt{\alpha \sum_{k=1}^\infty |x_k|_\alpha^2}$$

ile tanımlı norm ile α -normlu uzaydır. Her $x \in \ell_2^\alpha$ için ℓ_2^α uzayının tanımından $\|x\|_{2_\alpha}$ normu sonludur.

Örnek

$C([a, b]_\alpha)$ α -vektör uzayı ve $x \in C([a, b]_\alpha)$ olmak üzere

$$\|x\|_\alpha = \max_{a \leq t \leq b}^\alpha |x(t)|_\alpha$$

ile tanımlı norm ile α -normlu uzaydır ve bu norm $C([a, b]_\alpha)$ uzayının düzgün normudur. Aynı uzay

$$\|x\|_\alpha = \alpha \int_a^b |x(t)|_\alpha dt = \alpha \left(\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} |\alpha^{-1}(x(t))| dt \right)$$

ve

$$\|x\|_\alpha = \sqrt[\alpha]{\int_a^b (x(t))^{2_\alpha} dt}$$

α -normlarıyla verilebilir.

3. ÜRETİLEN NORMLU UZAY ÜSTÜNDE DÖNÜŞÜMLER

3.1. α -Sınırlı α -Lineer Dönüşümler

Bu bölümde α -normlu uzaylar arasındaki dönüşümler ile ilgileneceğiz.

3.1. Tanım

$X = (X, \overset{\Delta}{+}, \overset{\Delta}{\cdot})$ ve $Y = (Y, \overset{\Diamond}{+}, \overset{\Diamond}{\cdot})$ aynı $\mathbb{K}_\alpha$ cismi üzerinde iki α -vektör uzayı, $T : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere, her $x_1, x_2 \in X$ ve her $a_1, a_2 \in \mathbb{K}_\alpha$ için

$$T(a_1 \overset{\Delta}{\cdot} x_1 \overset{\Delta}{+} a_2 \overset{\Delta}{\cdot} x_2) = a_1 \overset{\Diamond}{\cdot} T(x_1) \overset{\Diamond}{+} a_2 \overset{\Diamond}{\cdot} T(x_2)$$

oluyorsa T dönüşümüne α -lineerdir denir.

Burada X ve Y nin α -normlu uzay olması gerekli değildir.

3.2. Tanım

X ve Y α -normlu uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} K \overset{\alpha}{\cdot} \|x\|_\alpha$$

olacak şekilde $K \in \mathbb{R}_\alpha^+$ varsa T dönüşümü α -sınırlıdır denir.

α -normlu vektör uzayları arasındaki α -sınırlı ve α -lineer dönüşüme α -operatör denir. Bu yüzden α -operatör denildiğinde α -sınırlı ve α -lineer dönüşüm kastedilecektir. Operatörler daima α -sürekli dönüşümlerdir. Bunu göstermek için aşağıdaki teoreme bakalım.

3.3. Teorem

T α -lineer dönüşümü, X α -normlu vektör uzayının bir noktasında α -sürekli ise X üzerinde α -sürekli.

İspat

T dönüşümü bir $x_0 \in X$ noktasında α -sürekli olsun. T dönüşümünün her $x \in X$ için α -sürekli olduğunu gösterelim. X içinde $x_n \xrightarrow{\alpha} x$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisini alalım. $x_n \overset{\Delta}{-} x \overset{\Delta}{+} x_0 \rightarrow x_0$ ve T, x_0 'da α -sürekli olduğundan dolayı $T(x_n \overset{\Delta}{-} x \overset{\Delta}{+} x_0) \rightarrow T(x_0)$ ve bu yüzden $T(x_n) \rightarrow T(x)$ dir. Bu da T 'nin X üzerinde α -sürekli olduğunu gösterir.

3.4. Teorem

T, X α -normlu uzayı üzerinde bir α -lineer dönüşüm olsun. T 'nin X üzerinde α -sürekli olması için gerek ve yeter şart X üzerinde α -sınırlı olmasıdır.

İspat

T α -sınırlı olsun. Her $x \in X$ için $\|T(x)\|_\alpha \leq K^\alpha \cdot \|x\|_\alpha$ olacak şekilde $K \in \mathbb{R}_\alpha^+$ vardır. $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0$, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, X içinde bir dizi olmak üzere α -lim $x_n = x$ olsun. Yeterince büyük n 'ler için $\left\|x_n \overset{\Delta}{-} x\right\|_\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon/K$ sağlanır. T 'nin α -lineerliği ve α -sınırlılığından

$$\left\|T(x_n) \overset{\Delta}{-} T(x)\right\|_\alpha = \left\|T(x_n \overset{\Delta}{-} x)\right\|_\alpha \overset{\alpha}{\leq} K^\alpha \cdot \left\|x_n \overset{\Delta}{-} x\right\|_\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon$$

sağlanır. Böylece T, x noktasında α -sürekli olup önceki teorem gereğince T, X üzerinde α -sürekli dir.

Tersine T, X üzerinde α -sürekli olsun, fakat T α -sınırlı olmasın. T α -sınırlı olmadığından her $n_\alpha > 0_\alpha$ için

$$\|T(x_n)\|_\alpha \overset{\alpha}{>} n_\alpha^\alpha \cdot \|x_n\|_\alpha$$

olacak biçimde $x_n \in X$ vardır. $x_n = \theta_\Delta$ için $T(\theta_\Delta) = \theta_\diamond$ olduğundan teorem gerçekleşir. Bu yüzden her n için $\|x_n\|_\alpha \neq 0_\alpha$ olsun. X içinde genel terimi

$$y_n = 1_\alpha / \left(n_\alpha^\alpha \cdot \|x_n\|_\alpha\right) \overset{\Delta}{\cdot} x_n$$

olan $\{y_n\}$ dizisi tanımlansın. Her n için,

$$\begin{aligned}
\|T(y_n)\|_\alpha &= \left\| T \left(1_\alpha / \left(n_\alpha \cdot^\alpha \|x_n\|_\alpha \right) \triangle x_n \right) \right\|_\alpha \\
&= \left\| 1_\alpha / \left(n_\alpha \cdot^\alpha \|x_n\|_\alpha \right) \diamond T(x_n) \right\|_\alpha \\
&= \left(1_\alpha / \left(n_\alpha \cdot^\alpha \|x_n\|_\alpha \right) \right)^\alpha \|T(x_n)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{>} 1_\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\|y_n\|_\alpha = \left(1_\alpha / \left(n_\alpha \cdot^\alpha \|x_n\|_\alpha \right) \right)^\alpha \|x_n\|_\alpha = 1_\alpha / n_\alpha$$

olduğundan her $\varepsilon \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ ve yeterince büyük n 'ler için $\|y_n\|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \varepsilon$ gerçekleşir. Böylece $\{y_n\}$ dizisi X içinde sıfır vektörü θ_Δ 'ya yakınsar. T , X üzerinde α -sürekli olduğundan dolayı $T(y_n) \rightarrow T(\theta_\Delta) = \theta_\diamond$ olur. Bu ise her n için $\|T(y_n)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{>} 1_\alpha$ olmasıyla çelişir. Bundan dolayı T α -sınırlı olmalıdır.

Bu teoremin sonucu olarak normlu uzaylarda α -süreklilik ve α -sınırlılık kavramları denktir.

Örnek

Sabit $b \in \mathbb{K}_\alpha$ skaleri için X α -normlu uzayı üzerinde bir T α -operatörü her $x \in X$ için

$$T(x) = b \cdot^\Delta x$$

şeklinde tanımlansın. Her $x_1, x_2 \in X$ ve her $a_1, a_2 \in \mathbb{K}_\alpha$ için

$$\begin{aligned}
T(a_1 \cdot^\Delta x_1 + a_2 \cdot^\Delta x_2) &= b \cdot^\Delta (a_1 \cdot^\Delta x_1 + a_2 \cdot^\Delta x_2) \\
&= a_1 \cdot^\Delta (b \cdot^\Delta x_1) + a_2 \cdot^\Delta (b \cdot^\Delta x_2) \\
&= a_1 \cdot^\Delta T(x_1) + a_2 \cdot^\Delta T(x_2)
\end{aligned}$$

olduğundan T α -lineerdir. T 'nin α -sınırlılığından,

$$\|T(x)\|_\alpha = \left\| b \cdot^\Delta x \right\|_\alpha = |b|_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha$$

olup $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K \cdot^\alpha \|x\|_\alpha$ şartını sağlayan $K = |b|_\alpha$ sabiti vardır. Eğer $b = 1_\alpha$ ise T 'ye

X üzerinde α -birim (özdeş) operatör denir ve I_α ile gösterilir. I_α operatörü X 'in her elemanını kendisine dönüştürür. Eğer $b = 0_\alpha$ ise T α -operatörüne X üzerinde α -sıfır operatörü denir ve X 'in her elemanını θ_Δ 'ya dönüştürür.

Örnek

$T(x) = y$ olacak şekilde $T : C([a, b]_\alpha) \rightarrow (C[a, b]_\alpha)$ dönüşümü tanımlansın ve

$$y(s) = \lambda \cdot^\alpha \alpha \cdot \int_a^b k(s, t)x(t)dt, \quad x \in C([a, b]_\alpha), \quad a \leq s \leq b$$

olsun. Burada k , $[a, b]_\alpha \times [a, b]_\alpha$ karesi içinde α -sürekli olan iki değişkenli bir fonksiyonudur ve $\lambda \in \mathbb{R}_\alpha \setminus \{0_\alpha\}$ dır. Her $x_1, x_2 \in C([a, b]_\alpha)$ ve her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}_\alpha$ için $s \in [a, b]_\alpha$ iken

$$\begin{aligned} (T(\alpha_1 \cdot^\Delta x_1 + \alpha_2 \cdot^\Delta x_2))(s) &= \lambda \cdot^\alpha \alpha \cdot \int_a^b k(s, t)(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t))dt \\ &= \alpha_1 \cdot^\alpha \lambda \cdot^\alpha \alpha \cdot \int_a^b k(s, t)x_1(t)dt + \alpha_2 \cdot^\alpha \lambda \cdot^\alpha \alpha \cdot \int_a^b k(s, t)x_2(t)dt \\ &= (\alpha_1 \cdot^\Diamond Tx_1)(s) + (\alpha_2 \cdot^\Diamond Tx_2)(s) \end{aligned}$$

olduğundan T α -lineerdir. Ayrıca T α -sınırlıdır. Bunu göstermek için bir $M \succ 0_\alpha$ ve kare içindeki her (s, t) için $|k(s, t)| \leq M$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\alpha &= \|y\|_\alpha \\ &= \max_{a \leq s \leq b}^\alpha |y(s)|_\alpha \\ &= \max_{a \leq s \leq b}^\alpha \left| \lambda \cdot^\alpha \alpha \cdot \int_a^b k(s, t)x(t)dt \right|_\alpha \\ &\leq |\lambda|_\alpha \cdot^\alpha \max_{a \leq s \leq b}^\alpha \alpha \cdot \int_a^b |k(s, t)|_\alpha |x(t)|_\alpha dt \\ &\leq |\lambda|_\alpha \cdot^\alpha M \cdot^\alpha \max_{a \leq s \leq b}^\alpha |x(t)|_\alpha \cdot^\alpha (b - a)_\alpha \\ &= |\lambda|_\alpha \cdot^\alpha M \cdot^\alpha (b - a)_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

olur. Böylece $K = |\lambda|_\alpha \cdot^\alpha M \cdot^\alpha (b - a)_\alpha$ alınırsa, her $x \in C([a, b]_\alpha)$ için $\|T(x)\|_\alpha \leq^\alpha K \|x\|_\alpha$ olduğundan T α -sınırlıdır. Bu ise T 'nin bir α -operatör olduğunu gösterir.

3.5. Tanım

$\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden bir $\{a_n\}$ dizisi alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \stackrel{\alpha}{\leq} M_\alpha$ olacak şekilde bir M_α reel sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisi üstten α -sınırlıdır denir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \stackrel{\alpha}{\geq} m_\alpha$ olacak biçimde bir m_α sayısı varsa $\{a_n\}$ alttan α -sınırlıdır denir. Bir dizi üstten α -sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin en küçük α -üst sınırı veya α -supremumu, bir dizi alttan α -sınırlı ise alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük α -üst sınırı veya α -infimumu adı verilir. $A \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ lineer nokta kümesi olsun. $M_\alpha \in A$ olmak üzere $M_\alpha = \sup^\alpha A$ biçimindeki M_α elemanına A kümesinin α -maksimumu denir ve $\max^\alpha A$ ile gösterilir. $m_\alpha \in A$ olmak üzere $m_\alpha = \inf^\alpha A$ biçimindeki m_α elemanına A kümesinin α -minimumu denir ve $\min^\alpha A$ ile gösterilir.

$$\sup^\alpha x_n = \begin{cases} \sup x_n & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \inf x_n & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \inf^\alpha x_n = \begin{cases} \inf x_n & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \sup x_n & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

3.2. Bir Operatörün Normu

T, X α -normlu uzayından diğer α -normlu uzaylara giden bir α -operatör ise her $x \in X$ için $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K^\alpha \|x\|_\alpha$ olacak şekilde bir K sabiti vardır. Bu eşitsizliği sağlayan K 'nın en küçük değeri T 'nin α -normu olarak adlandırılır ve $\|T\|_\alpha$ ile gösterilir.

3.6. Teorem

T, X α -normlu vektör uzayı üzerinde bir α -operatör olsun.

$$\begin{aligned} a &= \inf^\alpha \left\{ K \in \mathbb{R}_\alpha^+ : \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K^\alpha \|x\|_\alpha, x \in X \right\}, \\ b &= \sup^\alpha \left\{ \|T(x)\|_\alpha / \|x\|_\alpha : x \in X, x \neq \theta_\Delta \right\}, \\ c &= \sup^\alpha \{ \|T(x)\|_\alpha : x \in X, \|x\|_\alpha = 1_\alpha \}, \\ d &= \sup^\alpha \left\{ \|T(x)\|_\alpha : x \in X, \|x\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} 1_\alpha \right\} \end{aligned}$$

alalım. Bu durumda

$$(a) \text{ Her } x \in X \text{ için } \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} a^\alpha \|x\|_\alpha$$

$$(b) a = b = c = d$$

gerçeklenir. Burada a sayısı daha sonra T α -operatörünün α -normu olarak tanımlanacaktır.

İspat

(a) En büyük α -üst sınır(α -infimum) tanımından her $\varepsilon \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ ve her $x \in X$ için $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} (a + \varepsilon) \cdot \|x\|_\alpha$ bulunur. Bu eşitsizlik bütün keyfi ε sayısı için sağlanır.

(b) İspatlamak için $a \stackrel{\alpha}{\leq} b \stackrel{\alpha}{\leq} c \stackrel{\alpha}{\leq} d \stackrel{\alpha}{\leq} a$ olduğunu gösterelim. Sıfırdan farklı her $x \in X$ için $b \stackrel{\alpha}{\geq} \|Tx\|_\alpha / \|x\|_\alpha$ olur. Ayrıca $x = \theta_\Delta$ için de bu eşitsizlik gerçekleşir. Böylece b

$$\left\{ K : \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K \cdot \|x\|_\alpha, x \in X \right\}$$

kümesine aittir. a , bu kümenin alt sınırlarının en büyüğü olduğundan $a \stackrel{\alpha}{\leq} b$ bulunur. Her $x \neq \theta_\Delta$ olmak üzere her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_\alpha / \|x\|_\alpha = \left\| (1 / \|x\|_\alpha) \cdot T(x) \right\|_\alpha = \left\| T \left((1 / \|x\|_\alpha) \cdot x \right) \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} c$$

olup T α -lineer ve $(1 / \|x\|_\alpha) \cdot x$ ifadesinin normu 1_α 'dir. Bu yüzden $b \stackrel{\alpha}{\leq} c$ bulunur. Ayrıca $\{x : x \in X, \|x\|_\alpha = 1_\alpha\}$ kümesi $\{x : x \in X, \|x\|_\alpha \leq 1_\alpha\}$ kümesinin altkümesidir. Dolayısıyla $c \stackrel{\alpha}{\leq} d$ olur. Son olarak her $x \in X$ için $\|x\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} 1_\alpha$ olsun. (a)'dan $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} a$ olup $d \stackrel{\alpha}{\leq} a$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

X ve Y α -normlu uzaylar olsun. α -lineer ve α -sınırlı dönüşümlerin kümesini $B_\alpha(X, Y) : X \rightarrow Y$ ile göstereceğiz.

$B_\alpha(X, Y)$ kümesinin α -vektör uzay olduğu ve hatta α -normlu uzay olabileceği gösterilebilir. T, T_1 ve T_2 , $B_\alpha(X, Y)$ içinde keyfi operatörler, bir k skaleri ve $x \in X$ için $T_1 \dot{+} T_2$ ve $k \cdot T$ dönüşümleri

$$(T_1 \dot{+} T_2)(x) = T_1(x) \dot{+} T_2(x)$$

$$(k \cdot T)(x) = k \cdot T(x)$$

şeklinde tanımlanır. $T_1 \dot{+} T_2$ ve $k \cdot T$ dönüşümlerinin $B_\alpha(X, Y)$ içinde α -operatör olduklarını ve α -vektör uzayı aksiyomlarını sağladıklarını gösterelim.

Y bir α -vektör uzayı olduğundan $T_1 \dot{+} T_2$ ve $k \dot{\cdot} T$, X 'den Y 'ye bir dönüşümdür. Ayrıca $T_1 \dot{+} T_2$ ve $k \dot{\cdot} T$ 'nin α -lineer dönüşüm olduğu uygulama olarak yapılabilir. T_1 ve T_2 α -sınırlı olduğundan her $x \in X$ için $\|T_1(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K_1 \|x\|_\alpha$ ve $\|T_2(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} K_2 \|x\|_\alpha$ olacak şekilde K_1, K_2 sabitleri vardır. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} \left\| (T_1 \dot{+} T_2)(x) \right\|_\alpha &= \left\| T_1(x) \dot{+} T_2(x) \right\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \|T_1(x)\|_\alpha \dot{+} \|T_2(x)\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} K_1 \dot{\cdot}^\alpha \|x\|_\alpha \dot{+} K_2 \dot{\cdot}^\alpha \|x\|_\alpha \\ &= (K_1 \dot{+} K_2) \dot{\cdot}^\alpha \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

olup $T_1 \dot{+} T_2$ sınırlıdır. Benzer şekilde her $x \in X$ için

$$\left\| (k \dot{\cdot} T)(x) \right\|_\alpha = \left\| k \dot{\cdot} T(x) \right\|_\alpha = |k|_\alpha \dot{\cdot}^\alpha \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} (|k|_\alpha \dot{\cdot}^\alpha K) \dot{\cdot}^\alpha \|x\|_\alpha$$

olacak şekilde K sabiti vardır. T α -sınırlı olduğundan $k \dot{\cdot} T$ de α -sınırlıdır. Böylece $T_1 \dot{+} T_2 \in B_\alpha(X, Y)$ ve $k \dot{\cdot} T \in B_\alpha(X, Y)$ bulunur.

$B_\alpha(X, Y)$ 'nin α -vektör uzayı aksiyomlarını sağladığı kolayca gösterilebilir. $T \in B_\alpha(X, Y)$ olmak üzere T 'nin negatif operatörü $-T = (-1)_\alpha \dot{\cdot} T$ olur. Ayrıca $B_\alpha(X, Y)$ içindeki sıfır vektörü X içindeki her noktayı Y içinde sıfır vektörüne dönüştüren operatördür. Her $T_1, T_2 \in B_\alpha(X, Y)$ için $T_1 \dot{+} T_2 = T_2 \dot{+} T_1$, her $T \in B_\alpha(X, Y)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_\alpha$ skaleri için $(\alpha \dot{\cdot}^\alpha \beta) \dot{\cdot} T = \alpha \dot{\cdot} (\beta \dot{\cdot} T)$ olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ iken,

$$(T_1 \dot{+} T_2)(x) = T_1(x) \dot{+} T_2(x) = T_2(x) \dot{+} T_1(x) = (T_2 \dot{+} T_1)(x)$$

ve

$$\begin{aligned} ((\alpha \dot{\cdot}^\alpha \beta) \dot{\cdot} T)(x) &= (\alpha \dot{\cdot}^\alpha \beta) \dot{\cdot} T(x) \\ &= \alpha \dot{\cdot} (\beta \dot{\cdot} T(x)) \\ &= \alpha \dot{\cdot} ((\beta \dot{\cdot} T)(x)) \\ &= (\alpha \dot{\cdot} (\beta \dot{\cdot} T))(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.7. Teorem

X 'den Y 'ye bütün α -operatörlerin kümesi $B_\alpha(X, Y)$ bir α -vektör uzayıdır.

Ayrıca $B_\alpha(X, Y)$ 'nin nasıl α -normlu uzay olabileceğini ilerde göstereceğiz.

3.8. Tanım

Her $T \in B_\alpha(X, Y)$ operatörü için $\|T\|_\alpha$ ile gösterilen T 'nin α -normu

$$\|T\|_\alpha = \inf \left\{ K : \|T(x)\|_\alpha \leq K^\alpha \|x\|_\alpha, x \in X \right\}$$

sayısıdır.

Bir önceki teoremde verilen ifadeler $\|T\|_\alpha$ için alternatiftir ve bu da her $x \in X$ için

$$\|T(x)\|_\alpha \leq \|T\|_\alpha^\alpha \|x\|_\alpha$$

eşitsizliğini kanıtlar.

Bir operatörün α -normunu bulmak için önceki teoremde verilen ifadelerden herhangi birinin kullanılması uygundur. $Tx = \beta \triangle x$ biçiminde tanımlanan $T : X \rightarrow X$ α -operatörü için

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\alpha &= \sup^\alpha \{ \|T(x)\|_\alpha : x \in X, \|x\|_\alpha = 1_\alpha \} \\ &= \sup^\alpha \{ |\beta|_\alpha \|x\|_\alpha : x \in X, \|x\|_\alpha = 1_\alpha \} \\ &= |\beta|_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak α -birim operatör I için

$$\|I\|_\alpha = 1_\alpha$$

olur.

Şimdi $B_\alpha(X, Y)$ 'nin α -normlu uzay olduğunu gösterebiliriz.

3.9. Teorem

$B_\alpha(X, Y)$ yukarıda verilen operatör normuyla α -normlu uzaydır.

İspat

İspatı için (N1), (N2) ve (N3) özelliklerinin sağlandığı gösterilmelidir. (N1) kolayca gösterilebilir. (N2)'yi göstermek için $T \in B_\alpha(X, Y)$ olsun. Her k skaleri ve $x \in X$ için

$$\left\| (k \blacklozenge T)(x) \right\|_\alpha = \left\| k \blacklozenge T(x) \right\|_\alpha = |k|_\alpha^\alpha \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} |k|_\alpha^\alpha \|T\|_\alpha^\alpha \|x\|_\alpha$$

olup $\left\| k \blacklozenge T \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} |k|_\alpha^\alpha \|T\|_\alpha$ bulunur. Ayrıca $\left\| k \blacklozenge T \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} |k|_\alpha^\alpha \|T\|_\alpha$ olduğunu gösterelim. $k = 0$ iken durum açıktır. $k \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\alpha &= \left\| (k^{-1} \blacklozenge k) \blacklozenge T(x) \right\|_\alpha \\ &= \left\| k^{-1} \blacklozenge (k \blacklozenge T)(x) \right\|_\alpha \\ &= |k|_\alpha^{-1 \cdot \alpha} \left\| (k \blacklozenge T)(x) \right\|_\alpha \\ &\leq |k|_\alpha^{-1 \cdot \alpha} \left\| k \blacklozenge T \right\|_\alpha^\alpha \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

olup $\|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} |k|_\alpha^{-1 \cdot \alpha} \left\| k \blacklozenge T \right\|_\alpha$ veya $\left\| k \blacklozenge T \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} |k|_\alpha^\alpha \|T\|_\alpha$ bulunur. Böylece (N2) şartı sağlanır. (N3)'ü göstermek için $T_1, T_2 \in B_\alpha(X, Y)$ ve $x \in X$ iken

$$\begin{aligned} \left\| (T_1 \blacklozenge T_2)(x) \right\|_\alpha &= \left\| T_1(x) \blacklozenge T_2(x) \right\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \|T_1(x)\|_\alpha^\alpha + \|T_2(x)\|_\alpha^\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \|T_1\|_\alpha^\alpha \|x\|_\alpha^\alpha + \|T_2\|_\alpha^\alpha \|x\|_\alpha^\alpha \\ &= (\|T_1\|_\alpha^\alpha + \|T_2\|_\alpha^\alpha)^\alpha \|x\|_\alpha^\alpha \end{aligned}$$

olup $\left\| T_1 \blacklozenge T_2 \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \|T_1\|_\alpha^\alpha + \|T_2\|_\alpha^\alpha$ bulunur. Dolayısıyla (N3) sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

3.10. Tanım

Bir α -normlu uzayındaki her α -Cauchy dizisi α -yakınsak oluyorsa bu uzaya α -Banach uzayı denir.

$B_\alpha(X, Y)$ α -normlu vektör uzaydır ve özellikleri ağırlıklı olarak Y uzayına bağlıdır. Bu bilgi ışığında fonksiyonel analiz için önemli bir sonuç verelim.

3.11. Teorem

Eğer Y α -Banach uzayı ise $B_\alpha(X, Y)$ α -Banach uzayıdır.

İspat

Bu teorem X uzayının α -Banach uzayı olmasına bakılmaksızın gerçekleşir. Teoremin ispatı için $B_\alpha(X, Y)$ 'deki her bir mutlak yakınsak serinin yakınsak olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $\alpha\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} T_k$ serisi, elemanları $B_\alpha(X, Y)$ 'den olan mutlak yakınsak bir seri olsun. $\alpha\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} \|T_k\|_\alpha$ reel değerli serisi yakınsaktır. X uzayının sabitlenmiş bir x elemanları için $y_n = \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k(x)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Y$ olur. $n > m$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük m 'ler için

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|_\alpha &= \left\| \alpha\text{-}\sum_{k=m+1}^n T_k(x) \right\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \alpha\text{-}\sum_{k=m+1}^n \|T_k(x)\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \alpha\text{-}\sum_{k=m+1}^n \|T_k\|_\alpha^\alpha \cdot \|x\|_\alpha \\ &\stackrel{\alpha}{\leq} \varepsilon^\alpha \cdot \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\{y_n\}$ dizisinin Y içinde α -Cauchy dizisi olduğunu gösterir ve Y α -Banach uzay olduğundan bu dizi α -yakınsaktır. Her $x \in X$ için $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü

$$T(x) = \lim y_n = \alpha\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} T_k x$$

biçiminde tanımlansın. T dönüşümünün α -lineer olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha\text{-}\sum_{k=1}^n \|T_k(x)\|_\alpha \leq \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n \|T_k\|_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha \leq \alpha\text{-}\sum_{k=1}^\infty \|T_k\|_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha$$

olup $\alpha\text{-}\sum_{k=1}^\infty \|T_k(x)\|_\alpha$ α -yakınsaktır. Normun α -sürekliliğinden

$$\begin{aligned} \|T(x)\|_\alpha &= \left\| \lim^\alpha \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k(x) \right\|_\alpha \\ &= \lim^\alpha \left\| \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k(x) \right\|_\alpha \\ &\leq^\alpha \lim^\alpha \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n \|T_k(x)\|_\alpha \\ &\leq^\alpha \alpha\text{-}\sum_{k=1}^\infty \|T_k\|_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

olup T α -sınırlıdır. Böylece $T \in B_\alpha(X, Y)$ bulunur. Son olarak her $x \in X$ ve yeterince büyük $K \in \mathbb{R}_\alpha^+$ için $\alpha\text{-}\sum T_k$ mutlak yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} \left\| \left(T \text{--} \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k \right) (x) \right\|_\alpha &= \left\| \alpha\text{-}\sum_{k=n+1}^\infty T_k(x) \right\|_\alpha \\ &\leq^\alpha \alpha\text{-}\sum_{k=n+1}^\infty \|T_k(x)\|_\alpha \\ &\leq^\alpha \alpha\text{-}\sum_{k=n+1}^\infty \|T_k\|_\alpha \cdot^\alpha \|x\|_\alpha \\ &<^\alpha K \cdot^\alpha \|x\|_\alpha \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left\| T \text{--} \alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k \right\|_\alpha <^\alpha K$$

gerçeklenir, yani $\alpha\text{-}\sum_{k=1}^n T_k \xrightarrow{\alpha} T$ olur. Yani $\alpha\text{-}\sum_{k=1}^\infty T_k$ serisi α -yakınsaktır. Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer $\{T_n\}$, $B_\alpha(X, Y)$ içinde bir dizi ve $\alpha\text{-}\sum T_k$ α -yakınsak ise üçgen eşitsizliğini sonsuz

serilere genelleyerek $\|\alpha\text{-}\sum T_k\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \alpha\text{-}\sum \|T_k\|_\alpha$ eşitsizliğini elde ederiz.

3.3. α -Fonksiyoneller

"Fonksiyonel" kavramı dönüşümlerin belli bir türünü ifade eder. Bu yüzden α -dönüşümler için verilen tanımlar α -fonksiyonellere de uygulanır.

3.12. Tanım

X reel veya kompleks α -vektör uzayı olsun. $\mathbb{K}_\alpha$, $\mathbb{R}_\alpha$ veya $\mathbb{C}_\alpha$ olmak üzere $f : X \rightarrow \mathbb{K}_\alpha$ dönüşümüne X üzerinde bir α -fonksiyonel denir.

Örnek

$f : \mathbb{R}_\alpha^n \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$ ve $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$ sabiti için $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot^\alpha x_k$ bir α -fonksiyoneldir.

Örnek

Her $x \in C([a, b]_\alpha)$ için $f(x) = \alpha\text{-}\int_a^b x(t)$ biçiminde tanımlı $f : C([a, b]_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ bir α -fonksiyoneldir.

Örnek

Her $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_2$ ve $j \in \mathbb{N}$ sabiti için $f(x) = x_j$ biçiminde tanımlanan $f : \ell_2 \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ α -fonksiyoneldir.

Örnek

X α -normlu uzay ise $f(x) = \|x\|_\alpha$ biçiminde tanımlanan $f : X \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ α -fonksiyoneldir.

Her $x_1, x_2 \in X$ ve her α_1, α_2 skalerleri için

$$f(\alpha_1 \cdot^\alpha x_1 \overset{\Delta}{+} \alpha_2 \cdot^\alpha x_2) = \alpha_1 \cdot^\alpha f(x_1) \overset{\Delta}{+} \alpha_2 \cdot^\alpha f(x_2)$$

şartı sağlanıyorsa f α -fonksiyoneli α -lineerdir. Yukarıda verilen ilk üç örnekte f α -lineer fonksiyoneldir, fakat son örnekte α -lineerlik şartı sağlanmaz.

α -normlu uzaylar arasındaki dönüşümler için daha önce verilen tanımlar ve özellikler X α -normlu uzay ise f α -fonksiyoneli için de geçerlidir. Bu özellikleri kısaca tekrar edelim.

$\{x_n\}$ dizisi X içinde x 'e α -yakınsak bir dizi iken $\{f(x_n)\}$, $f(x)$ 'e yakınsayan skalerlerin dizisi ise f α -fonksiyoneli $x \in X$ noktasında α -sürekli. Eğer f , X 'in her özel noktasında α -lineer ve α -sürekli ise X 'in tüm noktalarında α -sürekli. Eğer her $x \in X$ için $|f(x)|_\alpha \leq M \cdot \|x\|_\alpha$ olacak şekilde $M > 0_\alpha$ varsa f α -sınırlıdır. Bu şartı sağlayan en küçük M sayısına f 'nin α -normu denir ve $\|f\|_\alpha$ ile gösterilir. Her $x \in X$ için

$$|f(x)|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \cdot \|x\|_\alpha$$

sağlanır. Üretilen normlu uzaylar üzerindeki α -lineer fonksiyoneller için α -sınırlılık ve α -süreklilik kavramları denktir.

$\mathbb{K}_\alpha$, reel veya kompleks α -vektör uzay olsun. $B_\alpha(X, \mathbb{K}_\alpha)$, X üzerinde tüm α -sınırlı α -lineer fonksiyonellerin uzayı olsun. $\mathbb{K}_\alpha$ 'nın tamlığından $B(X, \mathbb{K}_\alpha)$ α -Banach uzaydır. Burada X uzayının tam olup olmamasının önemi yoktur. α -fonksiyonellerin uzayı $B(X, \mathbb{K}_\alpha)$, X 'in dual uzayı olarak adlandırılır ve X' ile gösterilir. Yukarıda belirtildiği gibi bir α -normlu uzayının duali daima α -Banach uzaydır. Daha önce söylenildiği gibi bir α -lineer fonksiyonelin α -sürekli olması için gerek ve yeter şart α -sınırlı olmasıdır. Bunun için daha kullanışlı ve etkili bir durum vardır ve genel dönüşümlerden ziyade α -fonksiyoneller için kullanılır.

3.13. Teorem

X α -normlu vektör uzayı üzerindeki f α -lineer fonksiyonelinin X üzerinde α -sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$N(f) = \{x : x \in X, f(x) = 0_\alpha\}$$

kümesinin kapalı olmasıdır.

$N(f)$ kümesi X 'in altkümesidir ve X 'in altuzayı olduğu kolayca gösterilebilir. $N(f)$ kümesine f 'nin sıfır uzayı denir. X uzayının f altında görüntüleri 0_α olan bütün noktalarının kümesidir (X ve Y α -vektör uzaylar olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ dönüşümünün sıfır uzayı $N(T) = \{x : x \in X, T(x) = \theta_\diamond\}$ kümesidir.)

İspat

Teoremi ispatlamak için kabul edelim ki f , X üzerinde α -sürekli ve $x_n \rightarrow x$ olacak şekilde $\{x_n\}$, $N(f)$ içinde bir dizi olsun. $N(f)$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $x \in N(f)$ olduğunu göstermeliyiz. Her n için $f(x_n) = 0_\alpha$ olup $\lim_{\alpha} f(x_n) = 0_\alpha$ dır. f , X üzerinde α -sürekli olduğundan $f(x) = \lim_{\alpha} f(x_n) = 0_\alpha$ bulunur. Dolayısıyla $x \in N(f)$ olup istenilen elde edilir.

İspatını tersini göstermek kolay değildir. $N(f)$ kümesi kapalı olsun. f 'nin X üzerinde α -sürekli olduğunu göstereceğiz. X 'in θ_Δ sıfır vektöründe f 'nin α -sürekli olduğunu, yani

$f(\theta_\Delta) = 0_\alpha$ olduğundan X içindeki bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \rightarrow \theta_\Delta$ iken $f(x_n) \rightarrow 0_\alpha$ olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak, her $n > M$ için $x_n \in N(f)$ olacak şekilde M pozitif sabitinin var olduğunu kabul edelim. $n > M$ iken $f(x_n) = 0_\alpha$ olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{\alpha} 0_\alpha$ olmalıdır. İkinci olarak, $\{x_n\}$ dizisinin sonsuz terimleri için $x_n \notin N(f)$ olsun. $\{y_n\}$, $\{x_n\}$ 'nin $N(f)$ 'de olmayan bütün terimlerinden oluşan alt dizisi olsun. Her n için $f(y_n) \neq 0_\alpha$ ve $y_n \xrightarrow{\alpha} \theta_\Delta$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \left(1_\alpha / f(y_n)\right) \triangle y_n$$

alınırsa, her n için $f(t_n) = 1_\alpha$ bulunur.

Şimdi her n için $|f(y_n)|_\alpha \geq 0_\alpha$ olmak üzere $\overline{\lim}_{\alpha} |f(y_n)|_\alpha = 0_\alpha$ olduğu gösterilebilirse $\lim_{\alpha} |f(y_n)|_\alpha = 0_\alpha$ olacaktır. İspat çelişkiye düşülerek yapılacaktır. Kabul edelim ki $\overline{\lim}_{\alpha} |f(y_n)|_\alpha \neq 0_\alpha$ olsun. Sonsuz bazı n 'ler için $|f(y_n)|_\alpha \xrightarrow{\alpha} \delta$ olacak şekilde $\delta \xrightarrow{\alpha} 0_\alpha$ vardır. Bu yüzden $\{y_n\}$ dizisinin her $k \in \mathbb{N}$ için $|f(y_{n_k})|_\alpha \xrightarrow{\alpha} \delta$ özelliğini sağlayan $\{y_{n_k}\}$ alt dizisini seçelim. Her k için

$$\|t_{n_k}\|_\alpha = 1_\alpha / |f(y_{n_k})|_\alpha \cdot \|y_{n_k}\|_\alpha \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{\delta} \cdot \|y_{n_k}\|_\alpha$$

olur. $y_{n_k} \rightarrow \theta_\Delta$ olduğundan $t_{n_k} \rightarrow \theta_\Delta$ bulunur. Her k için f α -lineer olduğundan

$$f(t_{n_1} \triangle t_{n_k}) = f(t_{n_1}) \xrightarrow{\alpha} f(t_{n_k}) = 1_\alpha - 1_\alpha = 0_\alpha$$

olup $t_{n_1} \overset{\Delta}{-} t_{n_k} \in N(f)$ bulunur. Fakat $N(f)$ 'ye ait tüm terimler için $\{t_{n_1} \overset{\Delta}{-} t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, X içinde α -yakınsak bir dizidir ve $N(f)$ kapalıdır. Böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty}^{\alpha} (t_{n_1} \overset{\Delta}{-} t_{n_k}) = t_{n_1} \overset{\Delta}{-} \theta = t_{n_1} \in N(f)$$

olur. Bu ise $f(t_{n_1}) = 1_{\alpha}$ olmasıyla çelişir. Bu yüzden $\overline{\lim}^{\alpha} |f(y_n)|_{\alpha} = 0_{\alpha}$ bulunur.

Böylece her m için $x_n \neq y_m$ iken $f(x_n) = 0_{\alpha}$ olduğundan $f(y_n) \xrightarrow{\alpha} 0_{\alpha}$ ve $f(x_n) \xrightarrow{\alpha} 0_{\alpha}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

$f : C([a, b]_{\alpha}) \rightarrow \mathbb{R}_{\alpha}$ lineer fonksiyoneli için

$$f(x) = \alpha \cdot \int_a^b x(t) dt, \quad x \in C([a, b]_{\alpha})$$

$$\|f\|_{\alpha} = b \overset{\alpha}{-} a \text{ olur.}$$

Çözüm

$C([a, b]_{\alpha})$ üstünde α -düzgün normunu ele alalım. Her $x \in C([a, b]_{\alpha})$ için

$$|f(x)|_{\alpha} = \left| \alpha \cdot \int_a^b x(t) dt \right|_{\alpha} \overset{\alpha}{\leq} \alpha \cdot \int_a^b |x(t)|_{\alpha} dt \overset{\alpha}{\leq} \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|_{\alpha} \cdot \alpha \cdot \int_a^b dt = (b - a) \overset{\alpha}{\cdot} \|x\|_{\alpha}$$

olup f α -sınırlıdır ve $\|f\|_{\alpha} \overset{\alpha}{\leq} b \overset{\alpha}{-} a$ bulunur. Fonksiyonu $a \overset{\alpha}{\leq} t \overset{\alpha}{\leq} b$ için $x_0(t) = 1_{\alpha}$ verilen $x_0 \in C([a, b]_{\alpha})$ ile düşünelim. $f(x_0) = b \overset{\alpha}{-} a \overset{\alpha}{>} 0_{\alpha}$ ve $\|x_0\|_{\alpha} = 1_{\alpha}$ olduğu kolayca görülebilir. Eğer $\|f\|_{\alpha} \overset{\alpha}{<} b \overset{\alpha}{-} a$ ise

$$b \overset{\alpha}{-} a = |f(x_0)|_{\alpha} \overset{\alpha}{\leq} \|f\|_{\alpha} \overset{\alpha}{\cdot} \|x_0\|_{\alpha} \overset{\alpha}{<} (b \overset{\alpha}{-} a) \overset{\alpha}{\cdot} \|x_0\|_{\alpha} = b \overset{\alpha}{-} a$$

olur. Bu ise mümkün değildir. Bu yüzden $\|f\|_{\alpha} = b \overset{\alpha}{-} a$ olup istenilen elde edilir.

3.4. Ters Dönüşümler

X ve Y herhangi iki küme olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir ise $T^{-1} : Y \rightarrow X$ ters dönüşümü vardır ve $x \in X, y \in Y$ için $T(x) = y$ iken $T^{-1}(y) = x$ olur. Y içinde bir y noktası verildiğinde $T(x) = y$ denklemi normal yollarla çözülebilir. Çözüm $x = T^{-1}(y)$ olup tektir. Özel uygulamalar içinde bu problem y verildiğinde $T(x) = y$ çözümünü kolayca sunulmasına rağmen, birebir T dönüşümünü belirlemek kolay değildir. Bu dönüşüm olsa bile uygulamalar açısından tersini ortaya çıkarmak zor olabilir. Bu bölümde dönüşümlerin terslerinin varlıklarını ve durumlarını göstereceğiz.

3.14. Teorem

X ve Y α -vektör uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ birebir ve örten α -lineer dönüşüm ve T dönüşümünün tersi T^{-1} olsun. Bu durumda T^{-1} ters dönüşümü de α -lineerdir.

İspat

İspatı yapmak için her $y_1, y_2 \in Y$ ve α_1, α_2 skalerleri için

$$T^{-1}(\alpha_1 \diamond y_1 + \alpha_2 \diamond y_2) = \alpha_1 \triangle T^{-1}(y_1) + \alpha_2 \triangle T^{-1}(y_2)$$

olduğunu göstermeliyiz. $x_1, x_2 \in X$ için $T^{-1}(y_1) = x_1$ ve $T^{-1}(y_2) = x_2$ olsun. Buradan $T(x_1) = y_1$ ve $T(x_2) = y_2$ olur. T 'nin α -lineerliğinden

$$T(\alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2) = \alpha_1 \diamond T(x_1) + \alpha_2 \diamond T(x_2) = \alpha_1 \diamond y_1 + \alpha_2 \diamond y_2$$

bulunur. Bu ise

$$T^{-1}(\alpha_1 \diamond y_1 + \alpha_2 \diamond y_2) = \alpha_1 \triangle x_1 + \alpha_2 \triangle x_2 = \alpha_1 \triangle T^{-1}(y_1) + \alpha_2 \triangle T^{-1}(y_2)$$

olduğunu gösterir, böylece ispat biter.

X ve Y α -vektör uzaylar, $T : X \rightarrow Y$ α -lineer dönüşüm olmak üzere $x \in X$ için $T(x) = \theta_\diamond$ denkleminin tek çözümünün $x = \theta_\Delta$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda X 'in x_1 ve x_2 noktalar için $T(x_1) = T(x_2)$ ise $T(x_1 \triangle x_2) = \theta_\diamond$ olup $x_1 \triangle x_2 = \theta_\Delta$ yani $x_1 = x_2$ bulunur. Bu ise T 'nin birebirliğini gösterir. Ayrıca T örten ise T^{-1} ters dönüşümün varlığı garantilenir. Bu sonucun tersi de ispatlanabilir.

$T : X \rightarrow Y$ α -lineer dönüşümünün ters dönüşümü T^{-1} olsun ve $x \in X$ için $T(x) = \theta_\diamond$ olsun. T^{-1} 'in α -lineerliğinden $x = T^{-1}(\theta_\diamond) = \theta_\Delta$ olur.

3.15. Teorem

X ve Y α -vektör uzaylar arasındaki $T : X \rightarrow Y$ örten α -lineer dönüşümünün tersi T^{-1} 'in var olması için gerek ve yeter şart $x \in X$ için $T(x) = \theta_\diamond$ denkleminin tek çözümünün $x = \theta_\Delta$ olmasıdır.

Bu teorem bize T dönüşümün sıfır uzayı $N(T)$ 'nin $\{\theta_\Delta\}$ olduğunu ifade eder. X α -normlu uzayı üzerinde f α -lineer fonksiyonelinin tersi varsa f 'nin X üzerinde α -sürekli olduğunu biliyoruz. Bu durum X 'in $\{\theta_\Delta\}$ altkümesinin kapalı olmasından kaynaklanır.

3.16. Teorem

X ve Y α -normlu uzaylar olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü örten ve α -lineer olsun. T^{-1} ters dönüşümünün var ve α -sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} m^\alpha \cdot \|x\|_\alpha$ eşitsizliğini sağlayan bir $m \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ sabitinin var olmasıdır.

İspat

Her $x \in X$ ve bir $m \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ sabiti için eşitsizliğin sağlandığını kabul edelim. Eğer $T(x) = \theta_\diamond$ ise $\|x\|_\alpha = 0_\alpha$ olup $x = \theta_\Delta$ bulunur. Bu yüzden T^{-1} vardır. Her $y \in Y$ için $T^{-1}(y) = x$ olsun. $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} m^\alpha \cdot \|x\|_\alpha$ eşitsizliği

$$\|T^{-1}(y)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} (1_\alpha/m)^\alpha \cdot \|y\|_\alpha$$

eşitsizliğine denktir. Bu da gösterir ki T^{-1} α -sınırlıdır (üstelik $\|T^{-1}\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} 1_\alpha/m$ olur).

Tersi için eğer T^{-1} var ve α -sınırlı ise her $y \in Y$ için $\|T^{-1}(y)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \|T^{-1}\|_\alpha^\alpha \cdot \|y\|_\alpha$ olur. Yani $x = T^{-1}(y)$ olmak üzere $\|x\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \|T^{-1}\|_\alpha^\alpha \cdot \|T(x)\|_\alpha$ bulunur. Eğer y , Y içinde sıfır vektörü yani $y = \theta_\diamond$ ise $x = T^{-1}(y) = \theta_\Delta$ olup x , X 'in sıfır vektörüdür. Üçgen eşitsizliğinden her $m \stackrel{\alpha}{>} 0$ için $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} m \|x\|_\alpha$ bulunur. Diğer yandan $\|y\|_\alpha \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ olup $T^{-1}y \neq \theta_\Delta$ ve $0_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \|x\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \|T^{-1}\|_\alpha^\alpha \cdot \|T(x)\|_\alpha$ olur. Bu yüzden $\|T^{-1}\|_\alpha \stackrel{\alpha}{>} 0_\alpha$ ve sıfırdan farklı $x \in X$ vektörleri için burada $m = 1_\alpha/\|T^{-1}\|_\alpha$ seçilirse $\|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} m^\alpha \cdot \|x\|_\alpha$ bulunur.

3.17. Teorem

X α -normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ α -operatörü için $\|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} 1_\alpha$ olsun. Ayrıca $I \stackrel{\diamond}{-} T$ α -operatörü örten olsun. Bu durumda $(I \stackrel{\diamond}{-} T)^{-1}$ vardır ve

$$\left\| (I \stackrel{\diamond}{-} T)^{-1} \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} 1_\alpha / \left(1_\alpha \stackrel{\alpha}{-} \|T\|_\alpha \right)$$

sağlanır.

İspat

Bu teoremin ispatı önceki teoremin basit bir sonucudur. Üçgen eşitsizliği kullanılarak her $x \in X$ için

$$\|x\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \left\| x \stackrel{\Delta}{-} T(x) \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{+} \|T(x)\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \left\| x \stackrel{\Delta}{-} T(x) \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{+} \|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\cdot} \|x\|_\alpha$$

bulunur. Böylece

$$\left\| (I \stackrel{\diamond}{-} T)(x) \right\|_\alpha = \left\| I(x) \stackrel{\Delta}{-} T(x) \right\|_\alpha = \left\| x \stackrel{\Delta}{-} T(x) \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\geq} (1_\alpha \stackrel{\alpha}{-} \|T\|_\alpha) \stackrel{\alpha}{\cdot} \|x\|_\alpha$$

olur. Önceki teoremin ispatının $I \stackrel{\diamond}{-} T$ operatörüne uygulanmasıyla $m = 1_\alpha \stackrel{\alpha}{-} \|T\|_\alpha$ alınarak sonuca ulaşılır.

Bu teorem için eğer X 'in α -Banach uzayı olduğunu kabul edersek $I \stackrel{\diamond}{-} T$ örten olur. Bunu göstermek için X içinde alınan her y noktası için $(I \stackrel{\diamond}{-} T)x = y$ olacak şekilde $x \in X$ noktalarının var olduğunu göstermeliyiz. Bu yüzden $y \in X$ noktaları keyfi olsun. $B : X \rightarrow X$ dönüşümü $x \in X$ olmak üzere

$$B(x) = T(x) \stackrel{\Delta}{+} y$$

biçiminde tanımlansın. (Eğer $y \neq \theta$ ise B α -lineer değildir. T α -lineer olduğunda buradaki gibi bir B dönüşümü afin olarak adlandırılır.) Her $x', x'' \in X$ noktaları için

$$\left\| B(x) \stackrel{\Delta}{-} B(x'') \right\|_\alpha = \left\| T(x') \stackrel{\Delta}{-} T(x'') \right\|_\alpha = \left\| T(x' \stackrel{\Delta}{-} x'') \right\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\leq} \|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{\cdot} \left\| x' \stackrel{\Delta}{-} x'' \right\|_\alpha$$

olur. $0_\alpha \stackrel{\alpha}{<} \|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} 1_\alpha$ alındığında B, X üzerinde büzülme operatörü olur. Şimdi X α -Banach uzayı kabul edildiğinde sabit nokta teoremine göre B dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Yani $B(x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ vardır. Buradan $T(x) \overset{\Delta}{+} y = x$ ya da $y = (I \overset{\Diamond}{-} T)(x)$ olur.

Sabit nokta teoremi $y = (I \overset{\Diamond}{-} T)(x)$ denkleminin çözümünü ardışık uygulamalar ile bulunabileceğini ispatlar. $x_0, x_1, x_2, \dots$ ardışık yinelemeler olsun ve $x_0 = y$ alalım.

$$\begin{aligned} x_1 &= B(x_0) = T(x_0) \overset{\Delta}{+} y = T(y) \overset{\Delta}{+} y \\ x_2 &= B(x_1) = T(x_1) \overset{\Delta}{+} y = T(T(y) \overset{\Delta}{+} y) \overset{\Delta}{+} y \\ &= T^2(y) \overset{\Delta}{+} T(y) \overset{\Delta}{+} y \\ x_3 &= B(x_2) = T(x_2) \overset{\Delta}{+} y = T(T^2(y) \overset{\Delta}{+} T(y) \overset{\Delta}{+} y) \overset{\Delta}{+} y \\ &= T^3(y) \overset{\Delta}{+} T^2(y) \overset{\Delta}{+} T(y) \overset{\Delta}{+} y \end{aligned}$$

şeklinde devam edildiğinde genel terim

$$x_n = T^n(y) \overset{\Delta}{+} T^{n-1}(y) \overset{\Delta}{+} \dots \overset{\Delta}{+} T^2(y) \overset{\Delta}{+} T(y) \overset{\Delta}{+} y$$

bulunur. $\{x_n\}$ dizisi $\Delta\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} T^k(y)$ serisinin kısmi α -toplamlar dizisidir (T^0 özdeşlik operatörü I anlamına gelir). $\{x_n\}$ dizisi B 'nin sabit x noktasına α -yakınsadığında $\Delta\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} T^k(y)$ serisi de x 'e α -yakınsar. Fakat diğer yandan $x = (I \overset{\Diamond}{-} T)^{-1}(y)$ olur. Şimdi bütün bunları özetleyelim.

3.18. Teorem

X α -Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ bir α -operatör ve $\|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} 1_\alpha$ olsun. $I \overset{\Diamond}{-} T$ örtendir, tersi $(I \overset{\Diamond}{-} T)^{-1}$ vardır ve her $y \in X$ için

$$(I \overset{\Diamond}{-} T)^{-1}(y) = \Delta\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} T^k(y)$$

olur.

Son sonuçta yalnız T α -operatörüne bakarsak eğer $\|T\|_\alpha \stackrel{\alpha}{<} 1_\alpha$ ise

$$(I \overset{\Diamond}{-} T)^{-1}(y) = \Diamond\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

olur. Bu ise geometrik serilerdeki çözümlerin $|t|_\alpha < 1_\alpha$ iken

$$(1 - t)^\alpha = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

olan genel sonucuna benzer.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, reel sayılar cismine eşdeğer olan sıralı cisimlerde değer alan normlar ile elde edilen uzaylar arasındaki operatörlerin seçilen üreteçlere göre lineerlikleri, sınırlılıkları ve normları tanımlandı ve bu kavramlar üzerine birtakım sonuçlar verildi. İki vektör uzayı arasındaki operatörlerin cebirsel ve topolojik kavramları seçilen üreteçlere göre bu uzayların üretilen normları ile doğrudan ilişkilendirildi. Üretilen normların yapısı operatörlerin karakteristik özelliklerini belirledi. Elde edilenlerden yararlanılarak çalışmalara devam edilip normlu uzaylar ve üzerlerinde tanımlı operatörlerin bu tezde verilen genişletilmiş yorumuna katkı sağlanabilir.



KAYNAKLAR

1. Grossman, M. and Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. Pigeon Cove, Massachusetts: Lee Press, 32-51, 75-88.
2. Bashirov, A. E., Kurpinar Mısırlı E. and Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 337(1), 36-48.
3. Bashirov, A.E., Mısırlı, E., Tandoğdu and Y., Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425-438.
4. Çakmak, A. F. and Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(228), 17 pages.
5. Çakmak, A. F. and Başar, F. (2014). Certain spaces of functions over the field of non-Newtonian complex numbers. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014, Article ID 236124, 12 pages.
6. Mısırlı, E. and Gurefe, Y. (2011). Multiplicative Adams-Bashforth-Moulton methods. *Numerical Algorithms*, 57(4), 425-439.
7. Kadak, U. and Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2015, Article ID 594685, 10 pages.
8. Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S. and Türkoğlu, D. (2016). Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18(1), 213-224.
9. Tekin, S. and Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 739319, 11 pages.
10. Grossman, M. (1983). *Bigeometric Calculus: A System with A Scale-Free Derivative*. Rockport, Massachusetts: Archimedes Foundation, 54-93.
11. Aliprantis, C. D. and Border, K. C. (1999). *Infinite Dimensional Analysis* (Third edition). Berlin: Springer-Verlag, 225-232.

12. Kılıç, S. A. ve Erdem, M., (1987). *Fonksiyonel Analize Giriş*. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No 11., 62-120.
13. Çakar, Ö. (2010). *Fonksiyonel Analize Giriş*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No 13., 35-84.
14. Cohen, G., (2003). *A Course in Modern Analysis and its Applications*. Cambridge University Press Australian Mathematical Society Lecture Series 17., 174-250.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : YILMAZ, Nazlı Büşra
 Uyruğu : T.C
 Doğum tarihi ve yeri : 11.09.1992 Ankara
 Medeni hali : Bekar
 Telefon : 0538 324 38 44
 e-mail : nazlbusra@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Böl.	2015
Yan Dal	Ankara Üniversitesi/İstatistik Böl.	2015
Lise	Alparslan Anadolu Lisesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2017-Halen	Ortadoğulular Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Sınav Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Yılmaz, N. B. (2017, Mayıs). *Üretilen Normlu Uzaylar Arasındaki Operatörler*. Hacettepe Üniversitesi 12. Ankara Matematik Günlerinde sunuldu, Ankara.

Hobiler

Kitap okuma, müzik dinleme.



GAZİ GELECEKTİR..