



**ZAMAN SKALASINDA P -KONVEKS
FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

Mehmet Selim YILDIZ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Dr. Öğretim Üyesi Alper Ekinci
AĞRI-2019
Her hakkı saklıdır**

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Mehmet Selim YILDIZ

ZAMAN SKALASINDA P-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Alper EKİNCİ

AĞRI-2019

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ZAMAN SKALASINDA P -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Mehmet Selim YILDIZ

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Alper EKİNCİ

Bu çalışmada öncelikle Kuramsal Temeller adlı bölümde eşitsizlik teorisi konvekslik ve zaman skalası kavramları ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir. Materyal ve Yöntem kısmında teknik ile ilgili sonuçlar ve bu tezin sonuçlarına benzer eşitsizlikler verilmiştir. 4. Bölüm Araştırma bulguları 3 farklı tipte eşitsizlik içermektedir. Bu çalışmada p -konveks fonksiyonlar için Simpson, Ostrowski ve Hermite-Hadamard tipi integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu eşitsizlikleri elde etmek için zaman skalası kalkülüsü kullanılmış ve Δ - integraller içeren sonuçlar bulunmuştur. Ayrıca tez çalışmasında bir yeni Lemma kullanılmıştır.

2019, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, Hölder eşitsizliği, Konveks fonksiyonlar, Ostrowski eşitsizliği, Simpson eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Üçgen eşitsizliği, Zaman Skalası.

ABSTRACT

Master

INTEGRAL INEQUALITIES FOR P-CONVEX FUNCTIONS IN TIME

SCALE

Mehmet Selim YILDIZ

Ağrı İbrahim Çeçen University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Alper EKİNCİ

In this study, firstly theoretical information about inequality theory, convexity and time scale concepts are given. In the Materials and Methods section, technical results and inequalities similar to the results of this thesis are given. In fourth chapter our results include 3 different types of inequalities. In this study, Simpson, Ostrowski and Hermite-Hadamard type integral inequalities were obtained for p-convex functions. To obtain these inequalities, time scale calculus was used and results containing Δ -integrals were found. In addition, a new Lemma was used in the thesis.

2019, 59 pages

Keywords: Inequality, Hölder inequality, Convex functions, Ostrowski inequality, Simpson inequality, Hermite-Hadamard inequality, Triangle inequality, Time Scale.

TEŞEKKÜR

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü desteği sunan aileme, yüksek lisans eğitimim boyunca da çalışmalarım için ortam hazırlayan ve manevi desteğini sunan sevgili eşime ve oğluma teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca, akademik bilgi ve deneyimleriyle yardımcı olan ve çalışmalarım esnasında her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğretim Üyesi Alper Ekinci' ye teşekkürlerimi sunarım.

.../.../2019

Mehmet Selim YILDIZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Zaman Skalası ve Özellikleri	4
Diferensiyellenebilme	7
İntegrasyon	13
Zaman Skalasında Polinomlar.....	22
2.2. Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	31
3.1. Konveks Fonksiyonlar için Temel Eşitsizlikler	31
3.2. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri.....	32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	35
4.1. P – Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler	35
4.2. P – Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler.....	46
4.3. P – Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	50
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	55
KAYNAKÇA.....	56
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}}$	Zaman Skalası Kümesi
$f^\Delta, f^{\tilde{\Delta}}$	Zaman Skalasında Delta Türevi
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı Değildir
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I°	I 'nın İçi
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.2.1. Konveks Fonksiyon.....	25
Şekil 2.2.2. Aralık üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = x $).....	27



1. GİRİŞ

Matematiğin hemen hemen tüm dallarında önemli bir yere sahip olan konvekslik çok eski bir kavramdır. M.Ö. 250 yıllarında Archimedes'in π sayısının hesaplanmasına kadar dayanmasına rağmen 19. Yüzyılın sonlarına doğru matematikte yerini almıştır. Konveks fonksiyonlar, matematiğin birçok alanında önemli bir rol oynar. Özellikle optimizasyon problemlerinin çalışmasında önemlidir. Sonsuz boyutlu uzaylarda bile, uygun ek hipotezler altında, konveks fonksiyonlar bu özellikleri karşılamaya devam eder ve sonuç olarak, varyasyonların kalkülüsünde en iyi anlaşılan fonksiyonlardır. Bu kavram ilk olarak Hermit tarafından ortaya atılsa bile O. Hölder ve O. Stolz gibi araştırmacıların da çalışmaları bulunmaktadır. Fakat konvekslik kavramının sistematik olarak kullanılması ilk defa 19. Yüzyılın sonlarında J.L.W.V. Jensen tarafından olmuştur. Sonraki dönemlerde de bu konuyla ilgili çalışmalar hızlı bir şekilde artmıştır. Konveks fonksiyonlar konusunun popüler olmasını sağlayan çalışmalardan biri G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Polya tarafından 1934 yılında basılan 'Inequalities' adlı kitaptır.

Matematiğin önemli alanlarından biri de aynı şekilde matematiğin tüm dallarında geniş çalışma alanına sahip olan eşitsizlik teorisidir. Eşitsizlikler konusu bir çok bilimsel alanda yeni uygulamaların ortaya çıkmasına sebep olduğu için hem araştırmacıların dikkatini çekmekte hem de bir çok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmaktadır. Bu nedenle eşitsizlikler konusu sürekli gelişmekte olan bir konudur. Eşitsizlikler Teorisi gelişimine, sadece en önemlisinden bahsetmek gerekirse C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.I. Chebyshev' in yaklaşım yöntemleri için teorik alt yapısı temellerini attığı zaman başladı. 19. yüzyılın sonu ve 20. yüzyılın başları civarı, çok sayıda eşitsizlik kanıtlandı. Bunlardan çoğu soyut ve bağlantısız sonuçlar olarak kalırken bazıları klasik haline geldi. 1934' te ortaya çıkan, Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından hazırlanan 'Inequalities' klasik eseri, eşitsizlikler alanını soyutlanmış formül derlemesinden sistematik bir disipline dönüştürdü. Bu alana devam eden ve büyüyen ilgiyle birlikte, eşitsizlikler modern teorisi şüphesiz bu eserden geldi. 1952' de yayımlanan bu kitabın ikinci İngilizce baskısı, kitabın sonuna eklenen toplamda 10 sayfa olan 3 eki dışında değiştirilmedi

Bu çalışmayı da R Bellman ve E. F. Beckenbach tarafından hazırlanan ‘İnequalities’ adlı kitap takip eder. Daha sonra Mitrinović’in farklı konulara da değindiği “Analytic Inequalities” kitabı gelmektedir. Son zamanlarda ise R. P. Agarwal V. Lakshmikantham, S.S. Dragomir gibi araştırmacılar bu konuyla ilgili bir çok makale, kitap yazmışlar.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle yazılabildiğinden eşitsizlikler konusunun Konveks Fonksiyonlar Teorisinde önemli bir yeri vardır. Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlik Teorisi’ni bir arada inceleyen bir çok araştırmacı vardır. Bunlardan bazıları; Hardy, Bellman, Pólya, Pachpatte, Littlewood, Beckenbach, Mitrinović, Pečarić ve Fink gibi matematikçilerdir. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Funtions: Inequalities) J. Pecaric tarafından 1987 yılında kaleme alınmıştır. Bunun yanında konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için Hermit-Hadamard, Simpson ve Ostrowski eşitsizlikleri gibi bir çok çalışma yapılmıştır. Hermit-Hadamard eşitsizliği klasik konveks fonksiyonlarda başka p –konveks, h –konveks, s –konveks, quasi konveks gibi farklı fonksiyon sınıfları için de elde edilmiştir. Hermit-Hadamard, Simpson ve Ostrowski ve diğer eşitsizlik türleri için hem diğer ülkelerde hem de ülkemizde bir çok çalışma mevcuttur. Eşitsizlik ve konveks fonksiyonları ilişkilendirerek çalışma yapan araştırmacılardan birkaçı şunlardır: G. Anastassiou, J. Pečarić, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg, R. Agarwal, N.S. Barnett, S. Varošanec, P.S. Bullen, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce, M.E. Özdemir, A.O. Akdemir, E. Set, U.S. Kırmacı, A. Ekinici, H. Yıldırım, M. Avcı Ardiç, M.Z. Sarıkaya, H. Kavurmacı Önalın, M. Gürbüz.

Zaman skalası teorisi de son zamanların dikkat çeken çalışmaları arasında yer almaktadır. Bu teori, 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger’in bu teoriyi ifade etmesinin amacı, diskret analiz ile sürekli analizi birleştirmektir. Bunun için de diskret analiz ile sürekli analizi kapsayan bir küme alıp bu kümeye zaman skalası adını verdi. Sürekli analiz ve diskret analizdeki bir çok kavram örneğin, süreklilik, türev, integral, sınır değer problemi gibi, zaman skalasında yeniden tanımlanmıştır. Bu da zaman skalasının bildiklerimizi daha genele taşıdığını gösterir. Yani zaman skalasında $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ birer özel haldir.

Ayrıca zaman skalası diferensiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. $\mathbb{R}$ de tanımlı diferensiyel denklemler ya da $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için bir sonuç vermek yerine, reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem ifade edilebilir. Bunun için zaman skalası sadece $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ için değil aynı zamanda başka uzaylar için de sonuç bulmamızı sağlar. Zaman skalası literatürünün gelişimine katkı sağlayan bir çok araştırmacı bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; M. Bohner, A. Peterson, G. Anastassiou, B. Karpuz, R. Agarwal dir. Bu çalışmada da zaman skalası için temel olarak; *Advances in Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2003), *Dynamic Equations on Time Scales* (Bohner and Peterson 2001) adlı kaynaklar kullanılmıştır. Bunun yanında Zaman skalasındaki bazı eşitsizlikler için de “Frontiers In Time Scales and Inequalities” (Anastassiou 2015) kaynağından yararlanılmıştır.

Bu çalışma genel olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremler örneklerle birlikte verilmiştir. İkinci bölümde konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde bu konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard, Ostrowski, Simpson, Hölder eşitsizlikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise çalışmalar sonucu elde edilen lemmalardan faydalanarak p -konveks fonksiyon sınıfı için Simpson, Ostrowski, Hölder, ve Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler ispatları ile verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Zaman Skalası ve Özellikleri

“Zaman skalası (Time scale) reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi bir alt kümesidir.

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

Kümeleri sırasıyla, reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar olarak adlandırılır. Zaman skalasına örnek olarak, $[0, 1] \cup [2, 3]$, $[0, 1] \cup \mathbb{N}$ ve Cantor kümesi gibi kapalı alt kümeler verilebilir. $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0, 1)$ kümeleri zaman skalası değildir. Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası, reel sayıların standart topolojisine sahiptir. Zaman skalasının ilk ele alınışı Stefan Hilger tarafından yapılmıştır. $\mathbb{T}$ üzerinde f^Δ delta türevi

- i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f^\Delta = f'$
- ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f^\Delta = f^\Delta$ şeklinde tanımlanır.
- i. deki türev bilinen reel sayılardaki adi türevdir. (ii) deki türev ise, tam sayılar üzerindeki fark operatörüdür.”

Tanım 2.1.1. “ $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

ile, $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü ise,

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

ile tanımlanır. Bu tanımda,

$$\inf \theta = \sup (\text{ yani } \sigma(t) = t \text{ eğer } \mathbb{T} , \text{ bir } t \text{ minimuma sahipse})$$

$$\sup \theta = \inf (\text{ yani } \rho(t) = t, \text{ eğer } \mathbb{T} , \text{ bir } t \text{ maksimuma sahipse})$$

şeklindedir. Burada θ boş küme olarak tanımlanır. Noktaların sınıflandırılması ise

$$\sigma(t) > t \text{ ise } t \text{ sağ yayılmış}$$

$$\rho(t) < t \text{ ise } t \text{ sol yayılmış}$$

$$\sigma(t) = t \text{ ise } t \text{ sağ yoğun}$$

$$\rho(t) = t \text{ ise } t \text{ sol yoğun}$$

$$\rho(t) < t < \sigma(t) \text{ ise } t \text{ izole}$$

$$\rho(t) = t = \sigma(t) \text{ ise } t \text{ yoğun}$$

olarak tanımlanır.

$$t < \sup \mathbb{T} \text{ ve}$$

$$\sigma(t) = t \text{ ise } t \text{ sağ yoğun,}$$

$$t > \inf \mathbb{T} \text{ ve } \rho(t) = t$$

İse t sol yoğundur. Eğer bir nokta aynı zamanda hem sol yoğun hem de sağ yoğun ise bu noktaya yoğun nokta denir.

Graininess fonksiyonu,

$$\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$$

$$t \rightarrow \mu(t) := \sigma(t) - t$$

ile tanımlanır.

Şimdi $\mathbb{T}$ kümesinden türetilen $\mathbb{T}^k$ kümesi,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\} & , \text{ eğer } \mathbb{T}, \text{ sol yayılmış } \max m \text{ noktasına sahipse } (\sup \mathbb{T} < \infty) \\ \mathbb{T} & , \text{ diğer durumlarda } (\sup \mathbb{T} = \infty) \end{cases}$$

Şeklinde tanımlıdır. (Bazı fonksiyonların zaman skalası üzerindeki türevi, tüm zaman skalaları üzerindeki her noktada özellikle zaman skalasının sonlu en küçük üst sınır noktasında tanımlı olmayabilir. Bununla birlikte, $\mathbb{T}^k$ nın tüm noktalarında zaman skalası türevi tanımlıdır. İleride vereceğimiz zaman skalasında türev için $\mathbb{T}^k$ kümesine ihtiyacımız olacaktır). Son olarak eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $t \in \mathbb{T}$ için,

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

Şeklinde tanımlayacağız. Burada $f^\sigma = f \circ \sigma$ şeklinde ifade edilen bileşke fonksiyonudur." (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.1. “Şimdi en iyi bilinen zaman skalaları olan reel ve tam sayılarda ileri sıçrama, geri sıçrama ve Graininess fonksiyonuna bakalım.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise tanımdan $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf (t, \infty) = t \text{ (sağ yoğun)}$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup (-\infty, t) = t \text{ (sol yoğun)}$$

olarak bulunur. Her $t \in \mathbb{R}$, t sol yoğun ve sağ yoğun nokta olduğundan yoğundur.

Graniniess μ fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t \equiv 0$$

şeklinde olup, bu eşitlik $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağladığından $\mu(t) = 0$ dır.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup \{\dots, t-3, t-2, t-1\} = t-1$$

$\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\rho(t) < t < \sigma(t)$$

sağladığından t izole noktadır. Graniniess μ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t+1 - t = 1$$

eşitliği sağlandığından $\mu(t) \equiv 1$.

Yukarıdaki iki durumda da (i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve (ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için μ fonksiyonu sabit fonksiyondur. Bu μ fonksiyonu zaman skalasında çok önemli rol oynar. Birçok formülde μ çarpanı içeren terimler vardır.”

Tanım 2.1.2. " $f: \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha_1 \in \mathbb{T}_1$ için $f(\alpha_1, t_1)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_2$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun sürekli dir.

Eğer her $\alpha_2 \in \mathbb{T}_2$ için $f(t_1, \alpha_2)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_1$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun sürekli.” (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.3. " $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ üzerinde tanımlı $f(t_1, t_2)$ fonksiyonlarının sınıfı C_{rd} ile gösterilir ve $f(t_1, t_2)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun sürekli.
- ii. f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun sürekli.
- iii. x_1 ve x_2 sağ-yoğun veya maksimum noktalar olmak üzere, eğer $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ ise f fonksiyonu (x_1, x_2) noktasında sürekli.
- iv. Eğer (x_1, x_2) ve noktalarının her ikisinde sol-yoğun noktalar ise (x_1, x_2) noktası (t_1, t_2) noktasına yaklaşırken $f(t_1, t_2)$ fonksiyonunun limiti

$$\mathbb{R}_{LL(x_1, x_2)} = \{(t_1, t_2): t_1 \in [\alpha, x_1] \cap \mathbb{T}_1, t_2 \in [c, x_2] \cap \mathbb{T}_2\}$$

bölgesinin herhangi bir kısmında mevcuttur.” (Bohner and Peterson 2001).

Diferensiyellenebilme

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve bir $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında f fonksiyonun delta türevini (Hilger türevini) tanımlayalım.

Tanım 2.1.4. “Kabul edelim ki

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ ve t nin bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ nin $\delta > 0$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$|[f(\sigma(t) - f(s)) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

Olacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte $t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}^k$ da delta diferensiyellenebilirdir denir.

$$f^\Delta: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonksiyonu f in $\mathbb{T}^k$ daki türevi (delta türevi) olarak adlandırılır.” (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.2. " $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2$$

olarak tanımlanan fonksiyonun $\forall t \in \mathbb{T}$ için delta türevini bulalım.

Çözüm. $\forall \varepsilon > 0, \forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon), \sigma(t) \neq s$ için

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| &= |(\sigma^2(t) - s^2) - f^\Delta(t) \cdot (\sigma(t) - s)| \\ &\leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \\ &= |\sigma(t) - s| \cdot |(\sigma(t) + s) - f^\Delta(t)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \\ &= |(\sigma(t) + s) - f^\Delta(t)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

dir. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$ olarak bulunur.”

Teorem 2.1.1. “Kabul edelim ki

$$f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir.

- i. f, t de diferensiyellenebilir ise f, t de sürekli.
- ii. f, t de sürekli ve t sağ yayılmış ise o zaman f, t de

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

şeklinde diferensiyellenebilirdir.

- iii. Eğer, t sağ yoğun ise f, t de diferensiyellenebilir olması ancak ve ancak,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olmasıyla mümkündür. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

- iv. f, t de diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^\Delta(t)$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.3. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarına bakalım

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise Teorem 2.1.1. (iii) den $t \in \mathbb{R}$ için

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^\Delta(t)$$

limitinin var olmasından delta diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder. O halde f nin delta türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olarak bulunur.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

Fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de delta diferensiyellenebilir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

Örnek 2.1.4. Teorem 2.1.1. yardımıyla, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımı kullanarak $f^\Delta(t)$ yi bulalım.

$$f(t) = \sigma(t), \mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, t \in \mathbb{T}$$

Çözüm. $f(t) = \sigma(t)$, $\mathbb{T} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$ için her nokta izole olduğundan sağ yayılmıştır.

$$\sigma(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

$$\sigma(\sigma(t)) = \frac{\frac{t}{1-t}}{1-\frac{t}{1-t}} = \frac{t}{1-2t}$$

olur. Teorem 2.1.1. in (ii) kısmından,

$$\sigma^\Delta(t) = \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\frac{t}{1-2t} - \frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}}$$

$$= \frac{1}{1-2t}$$

bulunur. Özel olarak $t = 0$ için

$$\sigma^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sigma(s)}{s}$$

$$= \frac{\frac{s}{1-s}}{s}$$

$$= 1$$

Teorem 2.1.2. “Kabul edelim ki $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ de diferensiyellenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta + g^\Delta$$

dir.

ii. $\forall \alpha$ sabiti için $\alpha f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t de diferensiyellenebilir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha \cdot f^\Delta(t)$$

dir.

iii. $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, t de diferensiyellenebilir ve

$$\begin{aligned}(f.g)^\Delta(t) &= f^\Delta(t).g(t) + f(\sigma(t)).g^\Delta(t) \\ &= f(t).g^\Delta(t) + f^\Delta(t).g(\sigma(t))\end{aligned}$$

dir.

iv. Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{1}{f}$, t de diferensiyellenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t).f(\sigma(t))}$$

dir.

v. Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$, t de diferensiyellenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t).g(t) - f(t).g^\Delta(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.3. “ α keyfi bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ için

i. $f(t) = (t - \alpha)^m$ ise

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^v . (t - \alpha)^{m-v-1}$$

dir.

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$ ise

$$g^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t) - \alpha)^{m-v} . (t - \alpha)^{v+1}}$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.5. “Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun ikinci delta türevinden bahsetmek için, f^Δ nın $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki delta türevinden bahsedeceğiz. f^Δ nın $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki

delta türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler, $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\sigma(\sigma(t)) = \sigma^2(t)$$

ve

$$\rho(\rho(t)) = \rho^2(t)$$

veya genel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $p^n(t)$ ve $\sigma^n(t)$ yukarıda ifade edildiği gibi tanımlanabilir. Ayrıca yukarıdaki tanımlamalar için,

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$$

$$f^{\Delta^0} = f$$

$$\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

eşitlikleri vardır.” (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.5. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = N_0 : = \left\{ \frac{n}{2} : n \in N_0 \right\}, t \in \mathbb{T}$ fonksiyonun ikinci türevini bulalım.

Çözüm. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = N_0^{\frac{1}{2}}, f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2}, \sigma(t) = t + \frac{1}{2}$

$$f^{\Delta^2}(t) = [f^{\Delta}(t)]^{\Delta}$$

$$= \left[2t + \frac{1}{2} \right]^{\Delta}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

Teorem 2.1.4. (Leibniz Formülü) . “ $S_k^{(n)}$ ile k tane σ , $n - k$ tane Δ içeren tüm kombinasyonların kümesini gösterelim. Eğer , $\forall \Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^Δ mevcut ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(f \cdot g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^\Lambda \right) g^{\Delta^k}$$

sağlanır.” (Bohner and Peterson 2001).

İntegrasyon

Bu başlık altında integrallenebilen fonksiyonları tanımlamak için, iki temel tanım vereceğiz.

Tanım 2.1.6. “Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun $\mathbb{T}$ deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve $\mathbb{T}$ deki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna regulated fonksiyon denir.”

Tanım 2.1.7. “Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f ye rd-continuous fonksiyon denir.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-continuous fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi, türevlenebilir ve türevi rd-continuous fonksiyonlardır. Bu küme ise,

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.5. “ $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- i. f sürekli ise, f rd-sürekli dir.
- ii. f rd-sürekli di ise, f regulated tir.
- iii. σ operatörü rd-sürekli dir.
- iv. Eğer f regulated veya rd-sürekli ise o zaman f^σ aynı özelliklere sahiptir.
- v. Kabul edelim ki f sürekli olsun. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated veya sürekli ise, $f \circ g$ bileşke fonksiyonu aynı özelliğe sahiptir.” (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.8. “ $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, D (diferensiyellenebilme bölgesi) bölgesinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbb{T}^k \setminus D$ kümesi sayılabilir ve sağ yayılmış nokta içermiyorsa f ye $t \in D$ de pre-diferensiyellenebilir denir. ($D \subset \mathbb{T}^k$).” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.6. “Kompakt bir aralık üzerinde tanımlı her regulated fonksiyon sınırlıdır.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.7. (Ortalama Değer Teoremi). “Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ de tanımlı ve ikisi de D de pre-diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonlar olsunlar.

Bu durumda $\forall t \in D$ için

$$|f^\Delta(t)| \leq g^\Delta(t)$$

den her $r, s \in \mathbb{T}$, $r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

eşitsizliği sağlanır.” (Bohner and Peterson 2001).

Sonuç 2.1.1. “ Farzedelim ki f ve g , D bölgesinde pre-diferensiyellenebilir olsun.

- i. Eğer U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise , o zaman

$$|f(t) - f(s)| \leq \left\{ \sup_{r \in U^k \cap D} |f^\Delta(t)| \right\} |s - r|$$

dir.

- ii. $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = 0$ ise, f sabit bir fonksiyondur.
- iii. $\forall t \in D$ için $f^\Delta(t) = g^\Delta(t)$ ise, o zaman tüm $t \in \mathbb{T}$ için

$$g(t) = f(t) + C$$

dir. Burada C sabittir.”

Teorem 2.1.8. (Pre-Anti Türevin Varlığı). “Kabul edelim ki f regulated olsun.

O zaman $\forall t \in D$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

Olacak şekilde D diferensiyellenebilme bölgesine sahip pre-diferensiyellenebilen bir F fonksiyonu vardır.” (Bohner and Peterson 2001).

Tanım 2.1.9. “Kabul edelim ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated olsun. O zaman Teorem 2.1.8. de ifade edildiği gibi, F fonksiyonuna f nin pre-anti türevi denir. Bu durumda bir regulated belirsiz integrali,

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki C keyfi bir sabit, F de f nin pre-anti türevidir.

Cauchy integralini tüm $r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t) \Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak tanımlayacağız. Bir

$$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^\Delta(t) = f(t)$$

sağlıyorsa F fonksiyonuna $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun anti türevi denir.” (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.6. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini hesaplayalım.

Çözüm. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan

$$F^\Delta(t) = \Delta f(t)$$

yazılır. Buna göre $\alpha \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

eşitliği yardımıyla,

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

olur. Burada C keyfi bir sabittir.

Teorem 2.1.9. (Anti Türevin Varlığı). “Her rd-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir.

Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonun anti türevi olan F fonksiyonu,

$$F^\Delta(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau$$

şeklinde tanımlanır.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.10. “Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise o zaman

$$\int_{t_0}^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta \tau = \mu(t) f(t)$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.11. “Eğer $f^\Delta(t) \geq 0$ ise f azalmayandır.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.12. “Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ ise o zaman

i.

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$$

ii.

$$\int_a^b (\alpha f)(t) \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t$$

iii.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

iv.

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

v.

$$\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t$$

vi.

$$\int_a^b f(t) g^\Delta(t) \Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\Delta(t) g(\sigma(t)) \Delta t$$

vii.

$$\int_a^a f(t) \Delta t = 0$$

viii. Eğer, $[a, b)$ üzerinde

$$|f(t)| \leq g(t)$$

ise

$$\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

eşitsizliği doğrudur.

ix. Eğer, tüm $a \leq t < b$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.13. “ $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. Eğer $[a, b]$ yalnızca izole noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ - \sum_{t \in [a, b)} \mu(t) f(t) & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

iii. Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

iv. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \text{ ise} \\ 0 & a = b \text{ ise} \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & a > b \text{ ise} \end{cases}$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Örnek 2.1.7. $\alpha \in \mathbb{T}$ alalım. Burada, $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere, $\int_a^t 1\Delta s$ integralinin değeri,

$$\int_a^t 1\Delta s = t - a \quad ((t - a)^\Delta = t^\Delta - a^\Delta = 1 - 0 = 1)$$

dir. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$, olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, için

$\int_a^t s\Delta s$ integralinin değeri,

$$\int_a^t s\Delta s = \frac{t^2}{2}$$

dir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned} \int_a^t s\Delta s &= \sum_{s=0}^{t-1} s \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (t-2) + (t-1) \\ &= \frac{(t-1).(t-1+1)}{2} = \frac{t.(t-1)}{2} \end{aligned}$$

dir. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ iken

$$\int_a^t s \Delta s = \sum_{s=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)h$$

$$= \sum_{s=0}^{\frac{t}{h}-1} s h^2$$

$$= h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s$$

$$= h^2 \left[0 + 1 + 2 + 3 + \dots + \left(\frac{t}{h} - 1\right) \right]$$

$$= h^2 \left(\frac{t}{h} - 1\right) \frac{\frac{t}{h} + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (t - h)t.$$

Tanım 2.1.10. “ $\alpha \in \mathbb{T}$, $\sup \mathbb{T} = \infty$ ve $f, [a, \infty)$ da rd-sürekli ise $[a, \infty)$ aralığında has olmayan integral

$$\int_a^\infty f(t) \Delta t = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \Delta t$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki limit sonlu ise integrale yakınsak, sonsuz ise integrale ıraksaktır denir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.14. (Zincir Kuralı). “Farz edelim ki $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(f \circ g)^\Delta(t) = f'(g(c)) g^\Delta(t)$$

olacak şekilde $[t, \sigma(t)]$ aralığında bir c sayısı vardır.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.15. (Zincir Kuralı). “ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir olsun ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun delta türevlenebilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f \circ g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta diferensiyellenebilir ve

$$(f \circ g)^\Delta(t) = \left\{ \int_0^1 f' \left(g(t) + h\mu(t)g^\Delta(t) \right) dh \right\} g^\Delta(t)$$

formülü sağlanır.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.16. (Zincir Kuralı). “Farz edelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası ve $\omega: \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $t \in \mathbb{T}^k$ için $v^\Delta(t)$ ve $\omega^{\tilde{\Delta}}(v(t))$ mevcut ise

$$(\omega \circ v)^\Delta = (\omega^{\tilde{\Delta}} \circ v) v^\Delta$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.17. (Ters Fonksiyonun Türevi). “Kabul edelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}}: v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{v^\Delta} = (v^{-1})^{\tilde{\Delta}} \circ v$$

dir. Burada $v^\Delta \neq 0$ dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Teorem 2.1.18. (Değişken Değiştirme). “Farzedelim ki $v: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rd-sürekli bir fonksiyon ve v de rd-sürekli diferensiyellenebilir ise $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^b f(t) v^\Delta(t) \Delta t = \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s) \tilde{\Delta} s$$

dir.” (Bohner and Peterson 2001).

Zaman Skalasında Polinomlar

“0 ın bir anti türevi 1, 1 in bir anti türevi t , fakat keyfî bir zaman skalası için t nin anti türevini bulmak neredeyse imkansızdır. t nin anti türevinin $\frac{t^2}{2}$ olduğu kesin değildir. $\frac{t^2}{2}$ nin türevi

$$\left(\frac{t^2}{2}\right)^\Delta = \frac{t + \sigma(t)}{2} = t + \frac{\mu(t)}{2}$$

dir. Burada $\mu(t), \sigma(t)$ ye bağlı $\sigma(t)$ de zaman skalasının tanımına bağlı olarak değişir. $\frac{t^2}{2}$ fonksiyonu

$$\int_0^t \sigma(\tau) \Delta\tau$$

şeklinde mi ya da

$$\int_0^t \sigma \Delta\tau$$

şeklinde mi olacak. Şimdi aşağıdaki tanımlara bakalım.

g_2 ve h_2 fonksiyonları sırasıyla

$$g_2(t, s) = \int_0^t (\sigma(\tau) - s) \Delta\tau$$

ve

$$h_2(t, s) = \int_0^t (\tau - s) \Delta\tau$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda g_2 ve h_2 fonksiyonları arasında,

$$\begin{aligned}
g_2(t, s) &= \int_0^t (\sigma(\tau) - s) \Delta \tau \\
&= \int_0^t [(\sigma(\tau) + \tau) - \tau - s] \Delta \tau \\
&= \int_0^t (\sigma(\tau) + \tau) \Delta \tau - \int_0^t \tau \Delta \tau - \int_s^t s \Delta \tau \\
&= \int_s^t (\tau^{2^\Delta}) \Delta \tau + \int_s^t \tau \Delta \tau - s(t - s) \\
&= \int_t^s \tau \Delta \tau + t^2 - s^2 - s(t - s) \\
&= \int_t^s (\tau - t) \Delta \tau \\
&= h_2(s, t)
\end{aligned}$$

şeklinde bir ilişki buluruz.”

“Genelleştirilmiş polinomlar , Taylor formülünden ortaya çıkmıştır. Bu fonksiyonlar $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$g_k, h_k: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklindedir. g_0 ve h_0 her $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_0(t, s) = h_0(t, s) = 1$$

olup, $k \in \mathbb{N}_0$ için g_k ve h_k verilsin. Bu durumda g_{k+1} ve h_{k+1} fonksiyonları her $s, t \in \mathbb{T}$ için

$$g_{k+1}(s, t) = \int_s^t g_k(\sigma(\tau), s) \Delta \tau$$

ve

$$h_{k+1}(s, t) = \int_s^t h_k(\tau, s) \Delta \tau$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

s yi sabit düşünüp $h_k(t, s)$ nin t ye göre türevi $h_k^\Delta(t, s)$ ve $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}^k$ için

$$h_k^\Delta(t, s) = h_{k-1}(t, s)$$

dir. Benzer şekilde $k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}^k$ için

$$g_k^\Delta(t, s) = g_{k-1}(\sigma(t), s). \text{ (Bohner and Peterson 2001).}$$

Örnek 2.1.8. Yukarıdaki tanımlara göre aşikâr olarak her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$$g_1(t, s) = h_1(t, s) = t - s$$

eşitliği sağlanır.

2.2. Konveks Fonksiyonlar ve Eşitsizlikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.1. (Konveks Fonksiyon). “ $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

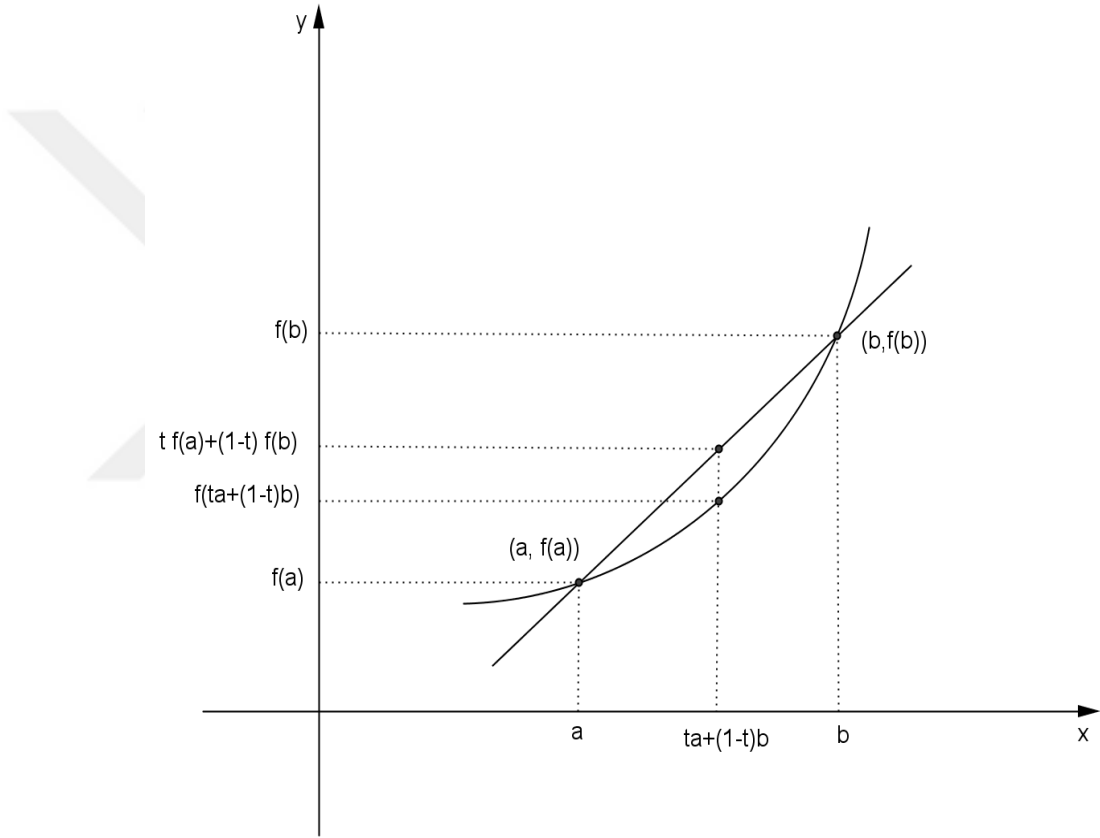
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.” (Pečarić et al. 1992).

“Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ’ye konkav (strictly konkav) denir.” (Pečarić *et al.* 1992).



Şekil 2.2.1. Konveks fonksiyon

“Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f ’nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.2.1. den de görüldüğü gibi $t \in [0,1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1-t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1-t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için f' nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.”

Tanım 2.2.2. (P –Fonksiyonu): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir.” (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 2.2.1. (Üçgen Eşitsizliği): “Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir.” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.2.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu). “ $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir.” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.2.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

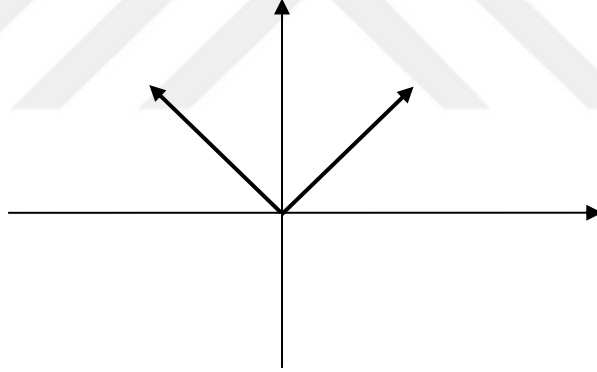
Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \\ &\leq |\alpha x| + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden}) \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur. $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeğe sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.2.2. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.2.1. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

dir. (Mitrinović 1993).

Teorem 2.2.3. (Hölder Eşitsizliği): “ $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.2.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): “ $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.2.2. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a & , \quad t = 0 \\ bt^s + c & , \quad t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

- (i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.
- (ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir. (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.3. (Starshaped Fonksiyon): “ $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her

$x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir.” (Toader 1984).

Tanım 2.2.4. (Geometrik Konveks Fonksiyon): “ $f: I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$f(x^t y^{1-t}) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna geometrik konveks fonksiyon denir.” (Zhang et al. 2012).

Tanım 2.2.5. (Harmonik Konveks Fonksiyon): “ $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bir açık aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere eğer $\forall x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{\alpha x + (1-\alpha)y}\right) \leq \alpha f(y) + (1-\alpha)f(x)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir.”

Tanım 2.2.6. (Ortalama Fonksiyonu): “ M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer

- (1) $M(x, y) = M(y, x)$
- (2) $M(x, x) = x$
- (3) $x < M(x, y) < y, x < y$
- (4) $M(ax, ay) = aM(x, y), a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonuna ortalama fonksiyonu denir.” (Anderson *et al.* 2007).

Örnek 2.2.3.

- (1) $M(x, y) = A(x, y) = \frac{x+y}{2}$ Aritmetik ortalama
 - (2) $M(x, y) = G(x, y) = \sqrt{xy}$ Geometrik ortalama
 - (3) $M(x, y) = H(x, y) = 1/A(1/x, 1/y)$ Harmonik ortalama
 - (4) $M(x, y) = L(x, y) = \frac{x-y}{\log x - \log y}, x \neq y$ için ve $L(x, x) = x$ Logaritmik ortalama
 - (5) $M(x, y) = I(x, y) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{x^x}{y^y}\right)^{\frac{1}{x-y}}, x \neq y$ ve $I(x, x) = x$ Identrik ortalama
- (Anderson *et al.* 2007).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar için Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard eşitsizliği): “ $I, \mathbb{R}$ ’ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.” (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 3.1.2. (Ostrowski Eşitsizliği): “ $f: I \subset [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $I^0(I'nin içi)$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliğe Ostrowski Eşitsizliği denir.” (Alomari *et al.* 2010).

Teorem 3.1.3. (Simpson Eşitsizliği): “ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde dördüncü mertebeden türevi sürekli olan bir fonksiyon ve $\|f^{(4)}\|_{\infty} = \sup_{x \in (a,b)} \|f^{(4)}\|_{\infty} < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik literatürde Simpson Eşitsizliği olarak bilinmektedir.” (Dragomir *et al.* 2000).

3.2. Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 3.2.1. (Hölder Eşitsizliği). $h, f, g \in C_{rd}([a, b], [0, \infty))$ ve

$$\int_a^b h(x)g^q(x)\Delta x > 0$$

olsun. Eğer

$$p > 1 \text{ ve } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ise

$$\int_a^b h(x)f(x)g(x)\Delta x \leq \left(\int_a^b h(x)f^p(x)\Delta x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b h(x)g^q(x)\Delta x \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. (Wong *et al.* 2006).

Lemma 3.2.1. $a, b, s, t \in \mathbb{T}, a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t)\Delta t + \frac{1}{b-a} \int_0^1 k(t, s)f^\Delta(s)\Delta s$$

eşitliği elde edilir ve

$$k(t, s) = \begin{cases} s & 0 \leq s < \frac{t-a}{b-a} \\ s-1 & \frac{t-a}{b-a} < s < 1 \end{cases} \quad \text{dir.}$$

(Ekinici 2018).

Teorem 3.2.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{s-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a <$

b ve $a, b, s \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^{\Delta}|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(u) \Delta u \right| \leq f_1 \left[\frac{t-a}{b-a} \right] |f^{\Delta}(b)| + f_2 \left[\frac{t-a}{b-a} \right] |f^{\Delta}(a)|$$

Ve her $c \in \mathbb{T}$ için

$$f_1(c) = T_2^c + T_1^{1-c} - T_2^{1-c}$$

$$f_2(c) = T_1^c - T_2^c - T_2^{1-c} \text{ dir. (Ekinci 2018).}$$

Teorem 3.2.3. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$, $\nu = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere,

$f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

Eğer $a < b$, $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^{\Delta}|^p$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(t) \Delta t \right| \leq \left(T_q^{\frac{t-a}{b-a}} + T_q^{\frac{b-t}{b-a}} \right)^{\frac{1}{q}} \{ T_1^1 [|f^{\Delta}(b)|^p + |f^{\Delta}(a)|^p] \}^{\frac{1}{p}}$$

(Ekinci 2018).

Lemma 3.2.2. (Montgomery eşitliği). “ $a, b, s, t \in \mathbb{T}$, $a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$f(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(s) \Delta s + \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, s) f^{\Delta}(s) \Delta s \quad \text{ve}$$

$$p(t, s) = \begin{cases} s - a & a \leq s < t \\ s - b & t < s < b \end{cases}$$

dir.”(Bohner and Matthews 2008).

Teorem 3.2.4. (Ostrowski Eşitsizliği). “ $a, b, s, t \in \mathbb{T}, a < b$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(s) \Delta s \right| \leq \frac{M}{b-a} (h_2(t, a) + h_2(t, b))$$

eşitsizliği elde edilir ve $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ dir.” (Bohner and Matthews 2008).

Lemma 3.2.3. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ ve $a < b$ ise

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s & \mu_1 &= \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ \lambda_2 &= \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s & \mu_2 &= \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s. \end{aligned} \quad (3.2.)$$

olmak üzere,

$$f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(t) \Delta t = \frac{1}{b-a} \int_0^1 K(t, s). f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s$$

eşitliği sağlanır (Salman 2018).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Notasyon 4.1. $T_k = \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T_k(x)$ fonksiyonu tüm $x, s \in \mathbb{T}$ için $T_k(x) = \int_0^x s^k \Delta s$ olarak tanımlanacak ve bundan sonraki kısımda $T_k(x) = T_k^x$ şeklinde gösterilecektir.

4.1. P – Konveks Fonksiyonlar için Simpson Tipi Eşitsizlikler

Bazı sonuçların ispatı için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 4.1.1. $\mathbb{T}$, $\tilde{\mathbb{T}}$ zaman skalaları ve $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ –differansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{t-a}{b-a}$ olduğunu varsayalım. $f^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ ile $a < b$ ise

$$p(t) = \begin{cases} t - \frac{1}{6} & 0 < t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{5}{6} & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta t \right] = (b-a) \int_0^1 p(t) f^\Delta(t) \tilde{\Delta} t$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $x \in [a, b]$ için,

$$K(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} & \frac{a+b}{2} < x < b \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\int_a^b K(x) f^\Delta(x) \Delta x$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f^{\Delta}(x) \Delta x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f^{\Delta}(x) \Delta x \\
&= \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f(x) \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f^{\sigma}(x) \Delta x + \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f(x) \Big|_{\frac{a+b}{2}}^b \\
&\quad - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f^{\sigma}(x) \Delta x \\
&= \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f^{\sigma}(x) \Delta x + \frac{1}{6} f(b) \\
&\quad + \frac{1}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f^{\sigma}(x) \Delta x \\
&= \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(x) \Delta x \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f^{\Delta}(x) \Delta x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f^{\Delta}(x) \Delta x
\end{aligned}$$

bu eşitlikte değişken değiştirme (Teorem 2.1.18) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&= (b-a) \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{1}{6} \right) f^{\Delta}(x) \cdot \frac{1}{b-a} \Delta x \\
&\quad + (b-a) \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{5}{6} \right) f^{\Delta}(x) \cdot \frac{1}{b-a} \Delta x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a) \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \\
&\quad + (b-a) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \\
&\quad \left[\frac{1}{6} \left[4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) + f(b) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (b-a) \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \\
&\quad + (b-a) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \\
&= (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \right].
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.1. $\mathbb{T}, \tilde{\mathbb{T}}$ zaman skalaları ve $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ -differansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{t-a}{b-a}$ olduğunu varsayalım. Eğer $|f^\Delta|$, $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde p -konveks; $f^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$, $a < b$ ve $a, \frac{a+b}{2}$ olursa aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \\
&\leq (b-a) (|f^\Delta(b)| + |f^\Delta(a)|) f_1 \left[\frac{1}{6} \right]
\end{aligned}$$

ve her $c \in \mathbb{T}$ için,

$$f_1(c) = -9 c T_0^c + T_0^{2c} ,$$

İspat. Lemma 4.1.1 ve modülün özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \\ & \leq (b-a) \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) \cdot f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) \cdot f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f^\Delta|$ fonksiyonu p -konveks fonksiyon olduğundan, eşitsizliğin sağ tarafına p konvekslik tanımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & (b-a) \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) \cdot f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t - \frac{5}{6}\right) \cdot f^\Delta(tb + (1-t)a) \tilde{\Delta}t \right| \\ & \leq (b-a) \int_0^{\frac{1}{2}} \left|t - \frac{1}{6}\right| \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta}t + (b-a) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|t - \frac{5}{6}\right| \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta}t \end{aligned}$$

bu integralleri kritik noktalarına göre hesaplayalım:

$$\begin{aligned} & = (b-a) \int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t\right) \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta}t \\ & \quad + (b-a) \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6}\right) \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta}t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& + (b-a) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t \right) \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta} t \\
& + (b-a) \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) \cdot |f^\Delta(b) + f^\Delta(a)| \tilde{\Delta} t \\
& = (b-a) (|f^\Delta(b)| + |f^\Delta(a)|) \left[-\frac{3}{2} T_0^{\frac{1}{6}} + T_0^{\frac{1}{3}} \right] \\
& = (b-a) (|f^\Delta(b)| + |f^\Delta(a)|) f_1 \left[\frac{1}{6} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.1. Teorem 4.1.1. de $M = \sup_{a < t < b} |f^\Delta(t)|$ olarak kabul edilirse, aşağıdaki sonuç ortaya çıkar :

$$\left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \leq 2M(b-a) f_1 \left[\frac{1}{6} \right]$$

Sonuç 4.1.2. (Süreklilik Durumu). Teorem 4.1.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \\
& \leq \frac{1}{12} (b-a) [|f'(b)| + |f'(a)|]
\end{aligned}$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğundan dolayı

$$T_0^{\frac{1}{6}} = \int_0^{\frac{1}{6}} 1 = \frac{1}{6}$$

$$T_0^{\frac{1}{3}} = \int_0^{\frac{1}{3}} 1 = \frac{1}{3}$$

olur. Böylece,

$$(b-a) (|f^\Delta(b)| + |f^\Delta(a)|) \left[-\frac{3}{2} T_0^{\frac{1}{6}} + T_0^{\frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{12} (b-a) [|f'(b)| + |f'(a)|]$$

Sonuç 4.1.3. (Kesikli durum).

Teorem 4.1.1. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{6} [x_0 + x_n] + \frac{2}{3} x_{\frac{n}{2}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq n \cdot (|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|) \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{2n} \right]$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan, $f(0) = x_0, f(k) = x_k$ ve $f\left(\frac{n}{2}\right) = x_{\frac{n}{2}}$ olur. Ayrıca,

$$T_0^{\frac{1}{3}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} \frac{1}{n} = \frac{n-3}{3n} \quad (1)$$

$$T_0^{\frac{1}{6}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{6}-1} \frac{1}{n} = \frac{n-6}{6n} \quad (2)$$

$$|f^\Delta(n)| = |x_{n+1} - x_n|, |f^\Delta(0)| = |x_1 - x_0| \quad (3)$$

(1), (2) ve (3) teoremde yerlerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.1.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere sonuç 4.1.3. de $a = 0$ ve $b = 12$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0, x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{6} [x_0 + x_n] + \frac{2}{3} \left| \frac{x_n}{2} \right| - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq (b-a)(|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|) \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{2n} \right] \\
& = \left| \frac{1}{6} [0 + 12^2] + \frac{2}{3} |x_6| - \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} x_k \right| \leq 12 (|x_{13} - x_{12}| + |x_1 - x_0|) \cdot \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{24} \right] \\
& = \left| \frac{144}{6} + \frac{2}{3} 36 - \frac{1}{12} \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{12}) \right| \\
& \leq 12 (|13^2 - 12^2| + |1^2 - 0^2|) \cdot \left[\frac{3}{24} \right] \\
& = \left| 24 + 24 - \frac{1}{12} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2) \right| \leq 39 \\
& = |-6,16666| \leq 39
\end{aligned}$$

Teorem 4.1.2. $\mathbb{T}$, $\tilde{\mathbb{T}}$ zaman skalaları ve $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$, $I_{\mathbb{T}}^K$ üzerinde Δ -differansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ile $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile eğer $|f^\Delta|^p$, $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde p - konveks ; $f^\Delta \in C_{rd}(I, R)$ ve $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$, $a < b$ ve $a, \frac{a+b}{2}$ olursa aşağıdaki eşitsizlik oluşur.

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \\
& \leq \left[\left(\lambda_1 \left[\frac{1}{6} \right] \right)^q + \left(\lambda_2 \left[\frac{1}{6} \right] \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} (T_1^1 \{|f^\Delta(b)|^p + |f^\Delta(a)|^p\})^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

ve her $c \in \mathbb{T}$ için,

$$\lambda_1(c) = cT_0^c - T_1^c + T_1^{2c} + 2cT_0^{2c} \text{ ve } \lambda_2(c) = 8cT_0^{2c} - T_1^{2c} + T_1^c - 10cT_0^c.$$

İspat. Hölder Eşitsizliği ve modülün özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(x) dx \right] \\ & \leq \left(\int_0^1 |k(r, t)|^q \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

yazılır ve

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |k(r, t)|^q \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right|^q \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right|^q \tilde{\Delta} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} \left| t - \frac{1}{6} \right|^q \tilde{\Delta} t &= \left(\int_0^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6} - t \right) \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{6} \right) \tilde{\Delta} t \right)^q = \left(\frac{1}{6} T_0^{\frac{1}{6}} - T_1^{\frac{1}{6}} + T_1^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} T_0^{\frac{1}{3}} \right)^q \end{aligned}$$

ve

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t - \frac{5}{6} \right|^q \tilde{\Delta} t = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}} \left(\frac{5}{6} - t \right) \tilde{\Delta} t + \int_{\frac{5}{6}}^1 \left(t - \frac{5}{6} \right) \tilde{\Delta} t \right)^q = \left(\frac{4}{3} T_0^{\frac{1}{3}} - T_1^{\frac{1}{3}} + T_1^{\frac{1}{6}} - \frac{5}{3} T_0^{\frac{1}{6}} \right)^q.$$

$|f^\Delta|^p$ fonksiyonu p -konveks fonksiyon olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\int_0^1 |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta} t \leq \int_0^1 \left[|f^\Delta(b)|^p + |f^\Delta(a)|^p \right] \tilde{\Delta} t$$

$$= T_1^1 \{ |f^{\tilde{\Delta}}(b)|^p + |f^{\tilde{\Delta}}(a)|^p \}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.2. de $M = \sup_{a < t < b} |f^{\Delta}(t)|$ olduğu kabul edilirse, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \\ \leq \left[\left(\lambda_1 \left[\frac{1}{6} \right] \right)^q + \left(\lambda_2 \left[\frac{1}{6} \right] \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} M \{ 2 T_1^1 \}^{\frac{1}{p}}$$

Sonuç 4.1.5. (Sürekli Durum).

$$\left[\frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} [f(a) + f(b)] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \\ \leq \left\{ \left(-\frac{3}{72} \right)^q + \left(\frac{5}{72} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left[\frac{|f'(b)|^p + |f'(a)|^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğundan,

$$T_1^6 = \int_0^6 x dx = \frac{1}{72}$$

$$T_1^3 = \int_0^3 x dx = \frac{1}{18}$$

$$T_0^6 = \int_0^6 1 dx = \frac{1}{6} \text{ ve}$$

$T_0^{\frac{1}{3}} = \int_0^{\frac{1}{3}} 1 dx = \frac{1}{3}$ dir. Bu sonuçlar teoremden yerine yazılırsa ve

$|f'|^p$ fonksiyonu p -konveks fonksiyon olduğundan, aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\int_0^1 |f^\Delta(tb + (1-t)a)|^p \tilde{\Delta}t \leq \int_0^1 [|f^\Delta(b)|^p + |f^\Delta(a)|^p] \tilde{\Delta}t$$

$$= T_1^1 \{|f^\Delta(b)|^p + |f^\Delta(a)|^p\}$$

elde edilenler teoremden yerine yazılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6. (Kesikli durum). Teorem 4.1.2. de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, x = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{2}{3} x_{\frac{n}{2}} + \frac{1}{6} [x_0 + x_n] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \left[\left(\frac{n^2 - 4n + 4}{24n} \right)^q + \left(\frac{6n - n^2 + 8}{24n} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}} \left\{ \frac{n-1}{2} [|x_{n+1} - x_n|^p + |x_1 - x_0|^p] \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğu için,

$$T_1^{\frac{1}{6}} = \int_0^{\frac{1}{6}} s \Delta s = \sum_{j=0}^{\frac{n}{6}-1} \frac{j}{n} = \frac{n-6}{72} \quad (1)$$

$$T_0^{\frac{1}{3}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} \frac{1}{n} = \frac{n-3}{3n} \quad (2)$$

$$T_0^{\frac{1}{6}} = \sum_{j=0}^{\frac{n}{6}-1} \frac{1}{n} = \frac{n-6}{6n} \quad (3)$$

$$T_1^{\frac{1}{3}} = \int_0^{\frac{1}{3}} s \Delta s = \sum_{j=0}^{\frac{n}{3}-1} \frac{j}{n} = \frac{n-3}{18} \quad (4)$$

Olduğundan $\lambda_1 \left[\frac{1}{6} \right] = \frac{n^2-4n+4}{24n}$ ve $\lambda_2 \left[\frac{1}{6} \right] = \frac{6n-n^2+8}{24n}$ bulunur. Ayrıca

$$T_1^1 = \int_0^1 s \Delta s = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j}{n} = \left(\frac{n-1}{2} \right).$$

Bu değerler teoremda yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Örnek 4.1.2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^2$ olmak üzere sonuç 4.1.6 da $a = 0$ ve $b = 12$, $p = q = 1$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım:

Çözüm. $f(x) = x^2$ olduğundan, $x_0 = 0$, $x_6 = 36$ ve $x_{12} = 144$

$$\frac{1}{12} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6} \right) = 54,16$$

$n = 12$ için,

$$\lambda_1 \left[\frac{1}{6} \right] = \frac{25}{72} \text{ ve } \lambda_2 \left[\frac{1}{6} \right] = -\frac{16}{72}$$

$$|x_{13} - x_{12}| = 169 - 144 = 25 \text{ ve } |x_1 - x_0| = 1$$

hesaplanan tüm değerleri sonuç 4.1.6. da yerine yazalım:

$$\left| \frac{2}{3} \cdot 36 + \frac{1}{6} [0 + 144] - 54,16 \right| = 6,16 \text{ ve}$$

$6,16 \leq 17,875$ ifadesi elde edilir ve eşitsizliğin doğruluğu ispatlanmış olur.

4.2. P – Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski Tipi Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a} = c$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ve $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^{\Delta}|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(u) \Delta u \right| \leq (b-a)(\lambda_1 + \mu_1)[|f^{\Delta}(b)| + |f^{\Delta}(a)|]$$

İspat. Lemma 3.2.3. ve modülün özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\sigma}(t) \Delta t \right| \\ & \leq (b-a) \left(\int_0^c |sf^{\Delta}(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta}s + \int_c^1 |(s-1)f^{\Delta}(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta}s \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve $|f^{\Delta}|$ nın p -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^c |sf^{\Delta}(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta}s + \int_c^1 |(s-1)f^{\Delta}(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta}s \\ & \leq \int_0^c |s| \left[|f^{\Delta}(b)| + |f^{\Delta}(a)| \right] \tilde{\Delta}s + \int_c^1 |s-1| \left[|f^{\Delta}(b)| + |f^{\Delta}(a)| \right] \tilde{\Delta}s \\ & = \left(\int_0^c s \tilde{\Delta}s + \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta}s \right) |f^{\Delta}(b)| + \left(\int_0^c s \tilde{\Delta}s + \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta}s \right) |f^{\Delta}(a)| \\ & = (\lambda_1 + \mu_1) |f^{\Delta}(b)| + (\lambda_1 + \mu_1) |f^{\Delta}(a)| \end{aligned}$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1)[|f^\Delta(b)| + |f^\Delta(a)|]$$

böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1. (Kesikli durum) Teorem 4.2.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa,

$$g(v) = v(v - 1)$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{g(i) + g(i - n)}{2} [|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|]$$

İspat. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan, $f(t) = f(i) = x_i$ ve

$$|f^\Delta(b)| = |x_{n+1} - x_n|,$$

$$|f^\Delta(a)| = |x_1 - x_0|.$$

Eğer (3.2.) deki integraller $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için hesaplanırsa ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.1. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = x^3$ olmak üzere Sonuç 4.2.1 de $a = 0$ ve $b = 12$ değerleri için eşitsizliğin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

Çözüm. $f(x) = x^3$ olduğundan,

$$\left| i^3 - \frac{1}{12} \frac{12^2 \cdot 13^2}{4} \right| \leq \frac{i \cdot (i - 1) + (i - 12) \cdot (i - 13)}{2} [|x_{13} - x_{12}| + |x_1 - x_0|]$$

$$|i^3 - 507| \leq \frac{i \cdot (i - 1) + (i - 12) \cdot (i - 13)}{2} [|13^3 - 12^3| + |1^3 - 0^3|]$$

$$|i^3 - 507| \leq \frac{i \cdot (i - 1) + (i - 12) \cdot (i - 13)}{2} \cdot 470$$

$$|i^3 - 507| \leq [i \cdot (i - 1) + (i - 12) \cdot (i - 13)] \cdot 235$$

sonucu elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin sol tarafta aldığı değerin sağ tarafta aldığı değerden küçük olduğu görülür.

Teorem 4.2.2. . $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a} = c$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$, $a, b, t \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^q$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde p -konveks ise her $c \in \tilde{\mathbb{T}}$ için

$$\lambda_1 = \int_0^c s \tilde{\Delta} s \quad \mu_1 = \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s$$

$$\lambda_2 = \int_0^c s^2 \tilde{\Delta} s \quad \mu_2 = \int_c^1 (1-s)^2 \tilde{\Delta} s$$

olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \leq (b-a)(\lambda_1 + \mu_1) \cdot (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

İspat. Modülün özelliği ve lemmadan,

$$\left| f(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f^\sigma(u) \Delta u \right| \leq (b-a) \int_0^1 |k(t,s)| \cdot |f^\Delta(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta} s$$

eşitsizliği elde edilir. Zaman skalası için hölder eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |k(t,s)| \cdot |f^\Delta(sb + (1-s)a)| \tilde{\Delta} s \\ & \leq \left(\int_0^1 |k(t,s)| \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |k(t,s)| \cdot (|f^\Delta(sb + (1-s)a)|)^q \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |k(t,s)| \tilde{\Delta} s &= \int_0^c s \tilde{\Delta} s + \int_c^1 (1-s) \tilde{\Delta} s \\ &= \lambda_1 + \mu_1 \end{aligned}$$

$|f^\Delta|^q$ fonksiyonu p -konveks fonksiyon olduğu için aşağıdaki eşitsizlik yazılır,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (|k(t,s)| \cdot |f^\Delta(sb + (1-s)a)|)^q \tilde{\Delta} s \leq \int_0^1 |k(t,s)| \cdot [|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q] \\ & \left(\int_0^1 |k(t,s)| \cdot [|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q] \right)^{\frac{1}{q}} = (\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{q}} \cdot (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & = (\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{p}} \cdot (\lambda_1 + \mu_1)^{\frac{1}{q}} \cdot (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$= (\lambda_1 + \mu_1) \cdot (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

4.3. P – Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.3.1. $a, b, x \in \mathbb{T}$, $a < b$, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ve $t \in \tilde{\mathbb{T}}$ olmak üzere $v(t) = \frac{t-a}{b-a}$ dönüşümü için eğer $a, b \in I_{\mathbb{T}}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x = (b-a) \cdot \int_0^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s.$$

İspat. Öncelikle

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f^\Delta(x) \Delta x$$

ifadesine zaman skalası için kısmi integrasyon uygularsak,

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f^\Delta(x) \Delta x = \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x$$

$$= \frac{b-a}{2} f(b) + \frac{b-a}{2} f(a) - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x$$

$$= \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x$$

eşitliği elde edilir.

$a < b$, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$ ve $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, v fonksiyonunun tersi, v^{-1} elde edilir ve $x = v^{-1}$ olur. v fonksiyonunun tersi yukarıdaki eşitliğin sol tarafına uygulanırsa Teorem 2.1.18. (değişken değiştirme) den

$$\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x = (b-a) \cdot \int_0^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1 . $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = v(\mathbb{T})$, $v = \frac{t-a}{b-a}$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ve $a, b, \frac{a+b}{2} \in I_{\mathbb{T}}$ için $|f^\Delta|$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde konveks ise, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \leq (b-a) \cdot \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}}\right) \cdot [f^\Delta(b) + f^\Delta(a)]$$

İspat.

$$\int_0^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \cdot f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s \leq \int_0^1 \left|\frac{1}{2} - s\right| \cdot f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s$$

p -konvekslik kullanılırsa,

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{2} - s\right| \cdot f^\Delta(sb + (1-s)a) \tilde{\Delta} s$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \cdot [f^\Delta(b) + f^\Delta(a)] \tilde{\Delta} s + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \cdot [f^\Delta(b) + f^\Delta(a)] \tilde{\Delta} s$$

elde edilir.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \tilde{\Delta} s = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} s = \frac{1}{4} - T_1^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \tilde{\Delta} s = \int_{\frac{1}{2}}^1 s - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} = \int_0^1 s - \int_0^{\frac{1}{2}} s - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} = T_1^1 - T_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$$

çıkan iki sonuç toplanırsa, $T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}}$ elde edilir. Böylece,

$$\frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \leq (b-a) \cdot \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}} \right) \cdot [f^\Delta(b) + f^\Delta(a)]$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1. (Kesikli durum). Teorem 4.3.1 de $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ $a = 0, b = n, s = j, t = i$ ve $f(k) = x_k$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{n}{2} - (x_0 + x_n) - \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{n^2}{4} [|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|]$$

İspat.

$$T_1^1 = \int_0^1 s \tilde{\Delta} s = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n} \right) = \frac{n-1}{2}$$

$$T_1^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} s \tilde{\Delta} s = \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{j}{n} \right) = \frac{n-2}{8}$$

$$f^\Delta(b) = x_{n+1} - x_n, \quad f^\Delta(a) = x_1 - x_0$$

ifadeleri teoremden yerine yazılırsa,

$$\left| \frac{n}{2} - (x_0 + x_n) - \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \frac{n^2}{4} [|x_{n+1} - x_n| + |x_1 - x_0|]$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.2. $\mathbb{T}$ ve $\tilde{\mathbb{T}}$ birer zaman skalası, $\tilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ olmak üzere, $f: I_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde delta diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < b$, $a, b, \frac{a+b}{2} \in I_{\mathbb{T}}$ için $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartı ile $|f^\Delta|^q$ fonksiyonu $I_{\mathbb{T}}$ üzerinde p -konveks olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \\ & \leq (b-a) \cdot \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}} \right) \cdot (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

İspat. Modülün özelliği ve lemmadan,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f^\sigma(x) \Delta x \right| \\
& \leq (b-a) \left(\int_0^1 \left| s - \frac{1}{2} \right| \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| s - \frac{1}{2} \right| (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q) \tilde{\Delta} s \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = (b-a) \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \\
& = (b-a) \left(T_1^1 - 2T_1^{\frac{1}{2}} \right) (|f^\Delta(b)|^q + |f^\Delta(a)|^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. TARTIşMA VE SONUÇ

Bu çalışmada konvekslik, eşitsizlik teorisi ve zaman skalası ile ilgili temel bilgiler verilmiş daha sonra p -konveks fonksiyon sınıfı ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bulunan bu sonuçlar zaman skalasında p -konveks fonksiyonlar içeren integral eşitsizlikler şeklinde verilmiştir. Bu tez çalışması bahsi geçen konularla ilgili bir başvuru kaynağı olarak kullanılabilir. Aynı zamanda yeni elde edilen sonuçlar araştırmacılar için faydalı olabilir.



KAYNAKÇA

- Agarwal, R. P., Bohner, M., & Peterson, A. (2004). *Inequalities on Time scales: A Survey*. Math. Inequal. Appl. 4, 535-557.
- Agarwal, R., O'Regan, D., & Saker, S. (2014). *Dynamic Inequalities On Time Scales*. Springer International Publishing, Cham, Switzerland.
- Alhbrandt, C. D., & Morian, C. (2002). *Partial differential equations on time scales*. Journal of computational and Applied Mathematics 141, no.1-2, 35-55.
- Alomari, M. (2011). *Several Inequalities Of Hermite–Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s-Convex, Quasi-Convex and r-Convex Mappings With Some Applications*. Ph.D. Thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia Bangi, Malezya.
- Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S., & Cerone, P. (2010). *Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s-convex in the second sense*. Appl. Math. Lett., 23, 1071-1076.
- Anastassiou, G. (2015). *Frontiers In Time Scales And Inequalities*. World Scientific Publishing Company Inc.
- Anderson, G., Vamanamurthy, M., & Vuorinen, K. (2007). *Generalized convexity and Inequalities*. J. Math. Anal. Appl., 335, 1294-1308.
- Avcı Ardiç, M. (2013). *Konveks Fonksiyonların Çeşitli Sınıfları için Integral Eşitsizlikler*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Azpeitia, A. (1994). *Convex Functions and the Hadamard inequality*. Colombiana: Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Bayraktar, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. ISBN 975-442-035-1.
- Beckenbach, E. (1948). *Convex Functions*. Bull. Amer. Math. Soc.
- Beckenbach, E., & Bellman, R. (1961). *Inequalities*. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.
- Beckenbach, E., & Bellman, R. (1975). *An Introduction to Inequalities* (ISBN 0-394-01559-2 b.). Random House Inc.
- Bohner, M., & Guseinov, G. S. (2005). *Multiple integration on time scales*. Dynamic Systems and Applications 14, no. 3-4, 579-606.
- Bohner, M., & Matthews, T. (2008). *Ostrowski Inequalities on Time Scales*. Journal of Inequalities in pure and applied math., 1(9), 6-8.
- Bohner, M., & Peterson, A. (2001.). *Dynamic Equations on Time Scales*. Boston, MA: Birkhäuser Boston Inc.
- Bohner, M., & Peterson, A. (2003). *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*. Birkhäuser Basel.
- Breckner, W. (1978). *Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen*. Publ.Inst.Math.(23), 13-20.
- Bullen, P. (2003). *Handbook of Means and Their Inequalities*. Dordrecht: Kluwer Academic, 537 pp, The Netherlands.
- Dragomir, S., & Pearce, C. (1998). *Quasi-convex functions and Hadamard's inequality*. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

- Dragomir, S., & Pearce, C. (2000). *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S., Agarwal, R., & Barnett, N. (2000). Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl.*(5), 103-165.
- Ekinci, A. (2014). *Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Ekinci, A. (tarih yok). Inequalities for Convex Functions on Time Scales.
- Hardy, G., Littlewood, J., & Polya, G. (1952). *Inequalities*. 2 nd Ed, University Press, 324, United Kingdom.
- Hudzik, H., & Maligranda, L. (1994). *Some remarks on s-convex functions*. *A equations Math.*, 48, 100-111.
- K. S. Zhang, J. P. Wan, *p-convex functions and their properties*, *Pure Appl. Math.* 23(1) (2007), 130-133.
- M. A. Noor, K. I. Noor, M. V. Mihai, and M. U. Awan, *Hermite-Hadamard inequalities for differentiable p-convex functions using hypergeometric functions*, Researchgate doi: 10.13140/RG.2.1.2485.0648. Available online at <https://www.researchgate.net/publication/282912282>.
- Mitrinović, D. S. (1970). *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E., & Fink, A. M. (1991). *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivates*. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
- Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., & Fink, A. M. (1993.). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Orlicz, W. (1961). *A note on modular spaces*. I .*Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy.*, 9, 157-162.
- Özkan, U. M. (2007). *Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları*. Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi .
- Pachpatte, B. G. (2005). *Mathematical Inequalities*. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.
- Pečarić, J., Proschan, F., & Tong, Y. L. (1992). *Convex Functions, Partial Orderings and Stistical Applications*. Academic Press, Inc.
- Rehák, P. (2005). *Hardy Inequality on Time Scales and its Application to Half-Linear Dynamic Equations*. *J. Inequal. Appl.* 5, 495-507.
- Salman, G., (2018). *Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Zaman Skalasında İntegral Eşitsizlikler*, *A.İ.Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstit. Yüksek Lisans Tezi*
- Toader, G. (1984). *Some Generalisations of the Convexity*. *Proc. Colloq. Approx. Optim*, Cluj-Napoca, 329-338, Romania.
- Toader, G. (1988). *On a generalization of the convexity*. *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Toader, G. (1991). *Means and Convexity*. *Studia Univ.* , 4(36), 45-52.
- Wong, F., Yeh, C. and W.C., L. 2006. An Extension of Jensens Inequality on Time Scales. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 113-120.
- Yang, B. (2000). *On a generalization of Hardy–Hilbert's integral inequality with a best value*. *Ann. Math. Ser. A.*, Chinese.

Zhang, T., Ji, A. and Qi, F. 2012. On Integral Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s -Geometrically Convex Functions, *Abstract and Applied Analysis*. doi:10.1155/2012/560856



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Mehmet Selim YILDIZ
Doğum Yeri ve Tarihi	Hamur - 02/11/1983
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Fen .Edb. Fak.Matematik Bölümü(2008);Kafkas Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğiti, Tezsiz Yüksek Lisans(2009); Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü.(2016)
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak.
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
İş Deneyimi	
Stajlar	MEB
Çalıştığı Kurumlar	İŞKUR, MEB
İletişim	
E-posta Adresi	Selhat-774@hotmail.com
Mezuniyet Tarihi	
11/01/2019	

