

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MANİFOLDLAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER

Yılmaz MARMARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2018

Tezin Başlığı : MANİFOLDLAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER

Tezi Hazırlayan : Yılmaz MARMARA

Sınav Tarihi : 21.12.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erol KILIÇ _____

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Sadık KELEŞ _____

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet GÜLBAHAR _____

Harran Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Manifoldlar Üzerinde Eşitlilikler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yılmaz MARMARA



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MANİFOLDLAR ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER

Yılmaz MARMARA

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

87+iv sayfa

2018

Danışman : Prof. Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Riemann manifoldlar üzerinde eşitsizlikler hakkında bilgi verildi. Ayrıca bu bölümde tezde göz önüne alınacak olan manifoldlar üzerinde eşitsizlikler konusunun tarihsel gelişiminden bahsedildi.

İkinci bölüm, diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldlar ve altmanifoldları, eğrilikler ve Hermityen manifoldlar hakkında temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldların ve Riemann altmanifoldların Ricci eğrilikleri kullanılarak eşitsizlikler kurulmuştur ve bu eşitsizliklerle ilgili geometrik sonuçlar verilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise kompleks uzay formların ve genelleştirilmiş kompleks uzay formların altmanifoldları üzerinde eşitsizlikler incelendi. Ayrıca Riemann ve Kaehler Çarpım manifoldları üzerinde eşitsizlikler incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Riemann Manifoldlar, Hermityen Manifoldlar, Ricci Eğriligi, Riemann Altmanifoldlar Üzerinde Eşitsizlikler, Quasi Sabit Eğrilikli Uzaylar, Kompleks Uzay Form

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INEQUALITIES ON MANIFOLDS

Yılmaz MARMARA

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

87+iv pages

2018

Supervisor : Prof. Dr. Erol KILIÇ

This study, which is prepared as a master thesis, consists of four chapters. In the first chapter, some information is given about inequalities of manifolds. Also, in this section, the historical development of inequalities on manifolds to be considered in the thesis was mentioned.

The second part is devoted to the basic concepts of differentiable manifolds, Riemann manifolds, submanifolds, the curvatures and Hermitian manifolds.

In the third chapter, inequalities are established by using Ricci curvatures of Riemannian manifolds and Riemann submanifolds and geometrical results are given about these inequalities.

In the fourth part of the thesis, inequalities on submanifolds of complex space forms and generalized complex space forms were examined. In addition, inequalities on Riemannian and Kaehler product manifolds were examined.

KEYWORDS: Riemann Manifolds, Hermitian Manifolds, Ricci Curvature, Inequalities on the Riemann Manifolds, Complex Space Form

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ'a, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğüň üstesinden gelme konusunda bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ayrıca yüksek lisans sürecinde üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e ve diğer bölüm hocalarıma ve bilhassa maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürü borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar	4
2.2 Riemannian Manifoldlar	9
2.3 Hermityen Manifoldlar	22
3. RİCCİ EĞRİLİĞİ VE RİEMANN ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNDE TEMEL EŞİTSİZLİKLER	32
3.1 Riemann Manifoldların Ricci Eğriliği	32
3.2 Riemann Altmanifoldların Ricci Eğriliği	35
3.3 Riemann Eğrilik İnvaryantları	36
3.4 Riemann Altmanifoldları Üzerinde Temel Eşitsizlikler	41
3.5 Quasi-Sabit Eğrilikli ve Nearly Quasi-Sabit Eğrilikli Uzayların Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler	47
4. KOMPLEKS UZAY FORMLARININ ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER	54
4.1 Kompleks Uzay Formların Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler	54
4.2 Genelleştirilmiş Kompleks Uzay Formların Altmanifoldları Üzerinde Chen Eşitsizlikleri	61
4.3 Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifoldlarının Slant Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler	66
4.4 Kaehlerian Çarpım Manifoldlarının Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler	77
KAYNAKLAR	84
ÖZGEÇMİŞ	87

1. GİRİŞ

Modern diferensiyel geometrinin en geniş teorilerinden birisi Riemann manifoldlarıdır. Manifoldlar üzerinde Riemann metriğinin kullanılması manifoldlar ve altmanifoldların incelenmesinde önemli rol oynar. Riemann manifoldlar ve altmanifoldları incelenirken genel olarak eğriliklerden faydalanılır, bu eğrilikler yardımıyla sınıflandırmalar yapılır ve eğriliklere bağlı olarak karakterizasyon teoremleri ve sonuçlar verilir. Riemann manifoldlar ve altmanifoldları incelenirken, yeni yöntemlerden biride eşitsizliklerden faydalanmaktadır.

1873 yılında L. Schlöfli m - boyutlu bir \widetilde{M} Riemann manifoldunun $\frac{m(m+1)}{2}$ boyutlu Öklid uzayının bir altmanifoldu olarak gözönüne alınabileceği fikrini ortaya attı[23]. Bu iddia 1926 yılında M. Janet [24] ve E. Cartan [25] tarafından tekrar gözönüne alındı ve iddia lokal olarak ispatlandı. 1956 yılında J. F. Nash [26], bu iddianın global ve düzgün bir şekilde ispatını yaptı. Yani her Riemann manifoldunun Öklidyen uzayın içine izometrik olarak gömülebileceğini ispatladı. Nash' in Embedding Teoremi olarak bilinen bu teoremin bir başka sonucu da bir Riemann manifoldunun, başka bir Riemann manifoldunun altmanifoldu olabileceğidir. Nash'in Embedding Teoreminden sonra, bu sonuç farklı uzaylarda araştırılmaya başlandı. 1905 yılında A. Friedmann, Nash'in bu teoremini semi-Riemannian manifoldlara taşıdı . Nash'in Embedding Teoremi ile birlikte, Riemann manifoldlarının içsel (intrinsic) ve dışsal (extrinsic) invariantlarının belirlenmesi problemi ortaya çıktı. Bir Riemann manifoldunun altmanifoldu için, Riemann eğriliği, Ricci eğriliği, skalar eğrilik gibi kavramlar içsel invariantlar, ortalama eğrilik vektörünü ve ortalama eğrilik gibi kavramlarda dışsal invariantlardır.

1990 ların başlarında B.Y. Chen bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun bir (M, g) Riemann altmanifoldunun içsel ve dışsal invariantlarını kullanarak eşitsizlikler

kurdu [8], [14], [27]. Riemann manifoldu üzerinde,

$$\delta_{\widetilde{M}} = \widetilde{\tau} - \inf \widetilde{K}(\underline{P})$$

ile tanımladığı ve daha sonra Chen İnvayantı olarak adlandırılan yeni bir invaryant tanımladı, burada $\widetilde{\tau}(p)$, $p \in M$ noktasında M nin skalar eğriliği, $\widetilde{K}(\underline{P})$ ise kesit eğriliğidir.

Literatürde, reel uzay formların, quasi-sabit eğrilikli Riemann manifoldların, kompleks uzay formların ve genelleştirilmiş uzay formlarının altmanifoldları üzerinde Ricci eğriliği ve ortalama eğriliğin karesini içeren bir çok eşitsizlik kurulmuştur. 1999 yılında B. Y. Chen sabit c eğrilikli bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun bir M altmanifoldu üzerinde

$$Ric(X) \leq \frac{n-1}{4}c + \frac{n^2}{4}\|H^2\|$$

eşitsizliğini kurdu ve bu eşitsizlik literatürde Chen-Ricci eşitsizliği olarak adlandırıldı, burada X , M üzerinde birim vektör alanı öyleki $e_1 = X$ olmak üzere $\{e_1, \dots, e_n\}$, M üzerinde bir ortonormal çatı ve H , M nin ortalama eğrilik vektörüdür. Chen'in bu makalesinden sonra, bir çok yazar tarafından, farklı manifoldların, farklı altmanifoldları üzerinde Chen-Ricci eşitsizliğinin karşılığı arandı ve bu eşitsizlikten yararlanılarak bir çok geometrik sonuç verildi. Bu çalışmalardan sonra, farklı yazarlar tarafından altmanifoldun skalar eğriliği, üst manifoldun skalar eğriliği, Chen'in tanımladığı Chen invaryantı, Ricci eğriliği kullanılarak oldukça farklı eşitsizlikler kuruldu ve bu eşitsizliklerden faydalanılarak altmanifoldlar karakterize edildi [14], [15], [18], [28], [39].

Son zamanlarda, altmanifoldlar üzerinde kurulan bu eşitsizlikler, bir çok geometri tarafından kompleks uzay formlar, Sasakian uzay formlar ve çarpım manifoldlarının altmanifoldları üzerine taşındı ve altmanifoldların karakterizasyonları ile ilgili bir çok teorem ve sonuçlar verildi [28], [35], [38], [39].

Dört bölüm halinde hazırlanan bu yüksek lisans tezinde birinci bölüm konunun

tarihçesi ve gelişimi ile ilgili bilgilere ayrılmıştır. İkinci bölüm diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemannian manifoldlar, hemen hemen kompleks manifoldlarla ilgili temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde ise altmanifoldların Ricci eğriliği tanıtılmış ve Ricci eğriliğini içeren eşitsizlikler kurulmuştur. Ayrıca bu bölümde, uzay-form, quasi-uzay form ve nearly quasi-uzay formların altmanifoldları üzerinde kurulan eşitsizlikler verildi ve bunlarla ilgili geometrik sonuçlar ifade edildi. Son bölümde ise hemen hemen Hermityen manifoldların altmanifoldları üzerinde eşitsizlikler kurularak teorem ve sonuçlar verildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diferensiyellenebilir manifoldlar, Riemann manifoldları, Riemannian altmanifoldları, Riemann çarpım manifoldları ve hemen hemen kompleks manifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

2.1 Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. Bir $M \neq \emptyset$ ve M nin alt kümelerinin bir Ω ailesi verilsin;

(i) \emptyset ve M , Ω ya aittir,

(ii) Ω nin herhangi bir sayıdaki elemanın birleşimi Ω ya aittir,

(iii) Ω nin herhangi sonlu sayıdaki elemanın kesişimi Ω nin elemanıdır,

özellikleri sağlanıyorsa Ω ya M üzerinde bir topoloji, (M, Ω) ikilisine bir topolojik uzay denir. Ω nin elemanı olan M nin alt kümelerine açık küme denir [1].

Tanım 2.1.2. $p \in M$ olmak üzere $p \in U$ olacak şekilde M de bir U açık kümesi var ise U ya p noktasının bir açık komşuluğu denir [1].

Tanım 2.1.3. Bir M topolojik uzay, $A, B \in \Omega$ ve $A \cap B = \emptyset$ olmak üzere, $M = A \cup B$ şeklinde ifade edilemiyorsa M ye bağlantılı uzay denir [2].

Tanım 2.1.4. Bir topolojik uzayın herhangi iki farklı noktasının ayrık komşulukları bulunabiliyorsa bu topolojik uzaya bir Hausdorff uzay denir [1].

Tanım 2.1.5. M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ noktasının bir U komşuluğu \mathbb{R}^n de bir V açık kümesine homeomorf ise M ye bir topolojik manifold denir. Bu durumda $\psi : U \rightarrow V$ bir homeomorfizmi vardır. Bu (U, ψ) ikilisine koordinat komşuluğu veya harita denir. Her $p \in M$ noktası için bir U_p açık komşuluğu var olduğundan

$$M = \bigcup_{p \in M} U_p$$

olur yani $\{U_p\}_{p \in M}$ ailesi M nin bir açık örtüsüdür. Buna göre eğer $\{U_i\}_{i \in I}$, M nin bir açık örtüsü ve her $i \in I$ için $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$, (U_i, ψ_i) ailesine bir koordinat komşuluğu sistemi veya atlas denir [1].

Tanım 2.1.6. M bir topolojik manifold $p \in M$ ve $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ da bir koordinat komşuluğu sistemi olsun. $p \in U_i \cap U_j$ olmak üzere

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

dönüşümleri k . mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise $\{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ koordinat komşuluğu sistemine M topolojik manifoldunun C^k sınıfından diferensiyellenebilir bir koordinat komşuluğu sistemi M ye de bir C^k - sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir. Eğer M her $k \in \mathbb{N}$ için C^k - manifold ise M ye C^∞ - manifold denir [1].

Tanım 2.1.7. M manifoldu üzerinde C^k - sınıfından diferensiyellenebilir bir koordinat sistemi $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$ olsun. U , M de bir açık küme ve f , U üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. $p \in U$ noktasının, bir $\alpha \in I$ indisi için $V \subset U_\alpha \cap U$ olacak şekilde yeterince küçük bir V komşuluğu bulunabilir. Eğer $\psi_i(V) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde tanımlı $f \circ \psi_i^{-1}$ fonksiyonu, $\psi_i(p)$ nin bir komşuluğunda C^r - sınıfından ($r \leq k$) diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında C^r sınıfından diferensiyellenebilir denir. M , C^∞ - manifoldunun $p \in M$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı reel değerli C^∞ - sınıfından bütün fonksiyonların kümesi $C^\infty(p)$ ve M manifoldunun tamamı üzerinde tanımlı reel değerli C^∞ sınıfından bütün fonksiyonların kümesi de $C^\infty(M)$ ile gösterilir [4].

Tanım 2.1.8. $\alpha(t)$, $\alpha \leq t \leq b$, M diferensiyellenbilir manifoldu üzerinde $\alpha(t_0) = p$ olacak şekilde bir eğri ve $f \in C^\infty(p)$ olsun.

$$X_p f = (df(\alpha(t))/dt)_{t_0}$$

olacak şekilde, $X_p : C^\infty(p) \rightarrow R$ dönüşümüne $\alpha(t)$ eğrisinin p noktasındaki bir tanjant vektörü denir. Tanjant vektörler, $\lambda, \mu \in R$ ve $f, g \in C^\infty(p)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(a) X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g),$$

$$(b) X_p(fg) = X_p(f)g(p) + X_p(g)f(p).$$

Bir $p \in M$ noktasındaki bütün tanjant vektörlerin kümesi,

$$(X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$$

$$(\lambda X_p)(f) = \lambda X_p(f)$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre R üzerinde bir vektör uzayı olup, $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır ve $T_p(M)$ ile gösterilir. Eğer $p \in U$, $\psi : U \rightarrow V \subset R$ bir homeomorfizm ise

$$\psi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

şeklinde dir. Böylece,

$$x^i : U \rightarrow R$$

reel değerli fonksiyonlardır. Bu (x^1, \dots, x^n) 'e, p noktasında lokal koordinat sistemi denir. Ayrıca her i için

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : U \rightarrow R$$

bir dönüşümdür ve Tanım 2.1.8 i sağlar.

O halde $\alpha(t_0) = p$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\alpha(t)$ eğrisi için $x^i = \alpha^i(t)$, $1 \leq i \leq n$ yazarsak her X_p tanjant vektörü için zincir kuralı yardımıyla

$$X_p(f) = (df(\alpha(t))/dt)_{t_0} = \sum_i (\partial f / \partial x^i)_p (d\alpha^i(t)/dt)_{t_0}$$

yazılabilir. Böylece her tanjant vektör, $\{(\partial / \partial x^i)_p\}_{1 \leq i \leq n}$ kümesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi şeklinde yazılır. Ayrıca $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{1 \leq i \leq n}$ vektör kümesi lineer bağımsız bir kümedir, yani $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{1 \leq i \leq n} T_p(M)$ nin bir bazıdır. Böylece, $T_p(M)$ n - boyutlu bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.1.9. Her $p \in M$ noktasına bir $X_p \in T_p(M)$ karşılık getiren $X : p \rightarrow X_p$ dönüşümüne M üzerinde bir tanjant vektör alanı denir. M üzerindeki tüm C^∞ -sınıftan tanjant vektör alanlarının kümesini $\Gamma(TM)$ ile göstereceğiz [3].

Tanım 2.1.10. M bir n - boyutlu C^∞ - manifold olsun. Eğer,

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$$

aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşüm ise ∇ ya M üzerinde bir lineer konneksiyon denir [3]. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $f, g \in C^\infty(M)$ için,

$$i) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$$

$$iii) \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$$

dir.

Tanım 2.1.11. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklinde tanımlı $[X, Y] : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümüne X, Y vektör alanlarının braketi adı verilir [3].

Teorem 2.1.1. $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ $a, b \in R$ ve $f, g \in C^\infty(M)$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır [3].

$$(a) [X, Y] = -[Y, X] \text{ (antikomutatiflik),}$$

$$(b) [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \text{ (lineerlik),}$$

$$(c) [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (Jacobi özdeşliği),}$$

$$(d) [fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Tanım 2.1.12. $T_p(M)$ den R ye bütün lineer dönüşümlerin kümesi $T_p^*(M)$ şeklinde gösterilir ve $\omega_p, \nu_p \in T_p^*(M)$, $X_p \in T_p(M)$ ve $\lambda \in R$ olmak üzere,

$$(\omega_p + \nu_p)(X_p) = \omega_p(X_p) + \nu_p(X_p) \text{ ve } (\lambda\omega_p)(X_p) = \lambda(\omega_p(X_p))$$

şeklinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemine göre R üzerinde lineer bir vektör uzayı teşkil eder. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayının duali olan bu uzaya $p \in M$ noktasındaki kotanjant uzay ve bu uzayın bir elamanına da kotanjant vektör (kovektör) denir. Kotanjant vektörler, $\lambda, \mu \in R$ ve $X_p, Y_p \in T_p(M)$ olmak üzere,

$$\omega_p(\lambda X_p + \mu Y_p) = \lambda\omega_p(X_p) + \mu\omega_p(Y_p)$$

özelliği sağlanır.

Tanım 2.1.13. V, R üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, bir $T : V^k \rightarrow R$ fonksiyonu her i ($1 \leq i \leq k$) için,

$$T(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k),$$

$$T(v_i, \dots, av_i, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

koşullarını sağlıyor ise çok lineer olarak adlandırılır. Bir $T : V^k \rightarrow R$ çok lineer fonksiyonuna V üzerinde bir k - tensör denir ve bütün k - tensörlerin kümesi $J^k(V)$ ile gösterilir. $S, T \in J^k(V)$ ve $a \in R$ için,

$$(S + T)(v_1, \dots, v_k) = S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k),$$

$$(aS)(v_1, \dots, v_k) = a.S(v_1, \dots, v_k)$$

şeklinde tanımlı işlemlerle birlikte R üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.1.14. $S \in J^k(V)$ ve $T \in J^\ell(V)$ ise $S \otimes T \in J^{k+\ell}(V)$ tensör çarpımı,

$$S \otimes T(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}) = S(v_1, \dots, v_k).T(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell})$$

şeklinde tanımlanır. S ve T çarpanlarınının sırası önemli olup, \otimes tensör çarpımı işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2,$$

$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T),$$

$$(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U).$$

$(S \otimes T) \otimes U$ ve $S \otimes (T \otimes U)$ nun ikisi de genellikle basit olması için $S \otimes T \otimes U$ şeklinde gösterilir ve daha yüksek mertebeden $T_1 \otimes \dots \otimes T_r$ çarpımları benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.15. E , n - boyutlu bir reel vektör uzayı ve E^* ise E nin dual uzayı olmak üzere, $\underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_r \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_s$ üzerindeki bir tensöre (r, s) - tensör veya r . mertebeden kontravaryant ve s . mertebeden kovaryant tensör denir.

2.2 Riemannian Manifolds

Tanım 2.2.1. M , n -boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde $\forall p \in M$ noktası için

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbf{R}$$

şeklinde tanımlanan simetrik, pozitif tanımlı g bilinear formuna M üzerinde bir Riemann metriği ve M manifolduna ise Riemann manifoldu denir [5].

Eğer bir M manifoldun $\forall p \in M$ noktasının bir U komşuluğu üzerinde g formu C^r sınıftan ise g Riemann metriğine C^r sınıftandır denir [5].

Bir Riemann metriği verildiğinde herhangi bir $v_p \in T_p M$ tanjant vektörünün boyu

$$g_p(v_p, v_p) = \|v_p\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p)v_i v_j$$

dır ve dolayısıyla Riemann metriği

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

şeklinde ifade edilir [5].

Tanım 2.2.2. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$\nabla_X g = 0 \text{ ve } T = 0$$

olacak şekilde lineer konneksiyon ∇ var ise bu konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir, burada, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

dir ve T ye torsiyon tensörü denir.

$\nabla_X g = 0$ ise ∇ ya metrik konneksiyon, $T = 0$ ise de ∇ ya torsiyonsuz (free torsiyon) denir [3].

Teorem 2.2.1. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Bu durumda M üzerinde bir tek Levi-Civita konneksiyonu vardır [3].

Tanım 2.2.3. (M, g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ , her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z, X) &= Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z]) \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar ve buna Koszul eşitliği denir [7].

Tanım 2.2.4. R eğrilik tensör alanı, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan tensör alanına Riemann eğrilik tensör alanı denir. Bunun yanında Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere,

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

ifadesine de Riemann eğriliği denir. Riemann eğriliği,

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, W, Z)$$

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Z, W, X, Y)$$

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.2.5. Eğer (X, d) ve (X', d') iki metrik uzay ise $\forall x, y \in X$ için,

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

eşitliğini sağlayan, yani metriği koruyan bir $f : X \rightarrow X'$ fonksiyonuna izometri ya da uzaklığı koruyan fonksiyon denir [2].

Tanım 2.2.6. (M, g) n - boyutlu bir Riemann manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının 2- boyutlu lineer alt uzayına $T_p M$ nin bir alt düzlem kesiti denir. $T_p M$ nin bir $\pi = Sp\{X, Y\}$ düzlem kesiti ve

$$Q(\pi) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$$

reel sayısı verilsin. $|Q(\pi)|$ pozitif reel sayısı X ve Y vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanını verir [4].

(M, g) , n - boyutlu Riemann manifold ve bir $p \in M$ noktasındaki düzlem kesiti $\pi = Sp\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K_M(\pi_2) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

reel sayısına π düzleminin kesit eğriliği denir. π nin kesit eğriliği $K(\pi)$, π nin $\{X, Y\}$ bazının seçilşinden bağımsızdır. Eğer, $K = 0$ ise M ye flatdır denir.

$\{e_1, \dots, e_n\}, T_p M$ nin ortonormal bazı olmak üzere

$$K_{ij} = K_M(e_i \wedge e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = R(e_j, e_i, e_j, e_i)$$

dır [6]. Levi Civita konneksiyonu ∇ ya göre kesit eğriliği simetriktir yani $K_{ij} = K_{ji}$ dir.

Tanım 2.2.7. (M, g) n - boyutlu bir Riemann manifold ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ nin ortonormal bir bazı olsun. Her $X, Y \in T_p M$ için

$$Ric(X, Y) = iz(Z \rightarrow R(Z, X))Y$$

ifadesine M nin Ricci tensörü denir. Buna göre

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

dir. $Ric(X, Y)$, $T_p M$ nin ortonormal bazının seçilmesinden bağımsızdır [4].

Eğer M üzerinde $Ric \equiv 0$ ise M ye Ricci flattır denir.

Tanım 2.2.8. (M, g) bir n - boyutlu Riemann manifold olsun. Eğer her $p \in M$, her $X, Y \in T_p M$ için

$$Ric(X, Y) = cg(X, Y)$$

olacak şekilde bir c sabiti var ise (M, g) ye bir Einstein Manifold denir [4].

(M, g) Riemann manifoldunun bir p noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının birim vektörlerinin kümesini

$$T_p^1 M = \{X \in T_p M : g(X, X) = 1\}$$

ile gösterelim. $e_1 \in T_p^1 M$ vektörü için Ricci eğriliği

$$\begin{aligned} Ric(e_1) &= Ric(e_1, e_1) = \sum_{j=1}^n g(R(e_j, e_1)e_1, e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n K_{1j} \end{aligned}$$

olarak yazılır, burada K_{1j} , $\pi = Sp\{e_1, e_j\}$ düzlem kesitinin kesit eğriliğidir [4].

Tanım 2.2.9. (M, g) , bir n - boyutlu Riemann manifold ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda

$$\tau(p) = \sum_{i < j}^n K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n K_{ij}$$

reel sayısına M nin $p \in M$ noktasındaki skalar eğriliği denir. Skalar eğrilik T_pM nin ortanormal bazının seçilişinden bağımsızdır.

Tanım 2.2.10. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Eğer her $p \in M$ noktasının kesit eğriliği sabit ise M ye sabit eğrilikli uzay veya uzay formu denir.

c sabit kesit eğriliğe sahip bir uzay formu $M(c)$ ile gösterilir. Eğer $M(c)$ bir uzay form ise M nin bir Riemann eğrilik tensör alanı her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (2.2.1)$$

eşitliğini sağlar. Burada c sabittir. Dahası, bu durumda τ skalar eğrilik olmak üzere,

$$\tau = \frac{n(n-1)}{2}c$$

eşitliğini sağlar.

X, T_pM de bir birim vektör olsun. X deki Ricci eğriliği $S(X, X)$ ile verilir. Burada S Ricci tensörü gösteririr. Eğer, p deki $S(X, X)$ Ricci tensörü X den bağımsız ise S Ricci tensörü,

$$S = \tau g$$

şeklinde olur.

Tanım 2.2.11. $(M, g), (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ iki Riemann manifoldu ve

$$f : M \longrightarrow \widetilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $(f_*)_p$ bire-bir ise f ye immersiyon denir. $f^*(\widetilde{g}) = g$ yani $g(X, Y) = \widetilde{g}(f_*X, f_*Y)$ ise M manifolduna \widetilde{M} manifoldunun izometrik immersiyonu ve M manifolduna \widetilde{M} nin bir altmanifoldu denir.

Tanım 2.2.12. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifold ve M de \widetilde{M} nin bir altmanifoldu olsun. Bu durum $p \in M$ ve $X, Y \in T_pM$ için,

$$g(X, Y) = \widetilde{g}(f_*X, f_*Y)$$

dersek g , M üzerinde bir Riemann metriği olur ve g ye \tilde{g} dan indirgenmiş metrik denir. Böylece (M, g) de bir Riemann manifoldudur.

Eğer her $p \in M$ noktasında $X \in T_pM$ için

$$\tilde{g}(X, \xi) = 0$$

olacak şekildeki ξ vektörüne M nin normal vektörü denir.

M ye teğet vektörlerin demetini TM , normal vektörlerin demetini de TM^\perp ile gösterelim. Bu durumda

$$T\tilde{M} = TM \oplus TM^\perp$$

olarak yazılır. (\tilde{M}, \tilde{g}) nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olmak üzere, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y) \quad (2.2.2)$$

olarak yazabiliriz, burada $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$ ve $\sigma(X, Y) \in \Gamma(TM^\perp)$ dir. (2.2.2) ile tanımlı ∇ , (M, g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonudur ve ∇ ya indirgenmiş konneksiyon denir. σ ya M nin ikinci temel formu denir ve

$$\sigma : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^\perp)$$

dönüşümü simetrik, bilinear ve $(0, 2)$ tipinde formdur. (2.2.2) eşitliğine Gauss formülü denir.

$X \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^\perp N \quad (2.2.3)$$

olarak yazabiliriz, burada $A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $\nabla_X^\perp N \in \Gamma(TM^\perp)$ dir. A_N , TM üzerine bir dönüşümdür ve A_N ye N ye göre şekil operatörü denir veya Weingarten dönüşümü denir. Ayrıca (2.2.3) ifadesine de Weingarten formülü denir.

$X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^\perp)$ için $X\tilde{g}(Y, N) = 0$ dir. Buradan

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X N) = 0$$

elde edilir. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\tilde{g}(\sigma(X, Y), N) = g(A_N X, Y) \quad (2.2.4)$$

olduğu görülür. Bundan sonra \tilde{g} ve g metriği yerine \langle, \rangle gösterimini kullanacağız.

Teorem 2.2.2. M, \tilde{M} Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M ve \tilde{M} eğrilik tensörleri sırasıyla R, \tilde{R} ve M nin ikinci temel formu σ olsun. Bu durumda $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ olmak üzere Gauss denklemi

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) \rangle - \langle \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) \rangle \quad (2.2.5)$$

dir [7].

İspat. $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

dir. Burada (2.2.2) ve (2.2.3) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \sigma(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \sigma(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z - \sigma([X, Y], Z) \\ &= \tilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \tilde{\nabla}_X \sigma(Y, Z) - \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z - \tilde{\nabla}_Y \sigma(X, Z) - \nabla_{[X, Y]} Z - \sigma([X, Y], Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) - A_{\sigma(Y, Z)} X + \nabla_X^\perp \sigma(Y, Z) - \nabla_Y \nabla_X Z - \sigma(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + A_{\sigma(X, Z)} W - \nabla_Y^\perp \sigma(X, Z) - \nabla_{[X, Y]} Z - \sigma([X, Y], Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\nabla_X \sigma(Y, Z) = \nabla_X^\perp \sigma(Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)$$

olarak alınırsa,

$$R(X, Y)Z = \tilde{R}(X, Y)Z + A_{\sigma(X, Z)} Y - A_{\sigma(Y, Z)} X + \nabla_X \sigma(Y, Z) - \nabla_Y \sigma(X, Z) + \sigma([X, Y], Z)$$

elde edilir. $W \in \Gamma(TM)$ ile eşitliğin her iki tarafı çarpılır ve (2.2.4) eşitliğide kullanılırsa

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) \rangle - \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, Z) \rangle$$

sonucuna ulaşılır. □

Tanım 2.2.13. M, \widetilde{M} Riemann manifoldunun altmanifoldu ve σ , M nin ikinci temel formu olsun. Burada $\sigma = 0$ ise M ye total geodeziktir denir [7].

Tanım 2.2.14. \widetilde{M} bir Riemann manifoldu olsun. M, \widetilde{M} bir altmanifoldu olsun. Eğer $X, Y \in T_p M$ için,

$$\sigma(X, Y) = \langle X, Y \rangle Z$$

şartını sağlayan bir $Z \in T_p M^\perp$ normal vektör alanı varsa $p \in M$ noktasına umbilik denir. Eğer M nin her noktası umbilik ise M ye total umbilik denir [7].

Tanım 2.2.15. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ m - boyutlu Riemann manifoldu ve (M, g) de n - boyutlu Riemann altmanifoldu olsun. (e_1, \dots, e_n) , $T_p M$ nin ortonormal bazı olmak üzere

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(e_i, e_i)$$

vektörüne M nin ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer her $p \in M$ için $H(p) = 0$ ise M ye minimal altmanifold denir.

Tanım 2.2.16. M , n boyutlu bir Riemann manifold olsun. $T_p M$ deki birim vektörlerin kümesini $T_p^1 M$ ile gösterelim, yani

$$T_p^1 M = \{X \in T_p M : \langle X, X \rangle = 1\}$$

olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $p \in M$ noktasında $T_p M$ nin herhangi bir ortonormal bazı olsun.

$X, Y \in T_p M$ için,

$$S(X, Y) = \sum_{j=1}^n R(e_j, X, Y, e_j) \quad (2.2.6)$$

tensörüne M nin Ricci tensörü denir [3].

$X, Y \in T_p M$ için $S(X, Y) = S(Y, X)$ dir. $X \in T_p M$ için

$$S(X, X) = Ric X$$

ile gösterilir [6].

Buna göre, herhangi bir $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned}
Ric(e_i) &= S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^n R(e_j, e_i, e_i, e_j) \\
&= R(e_1, e_i, e_i, e_1) + R(e_2, e_i, e_i, e_2) + \dots + R(e_n, e_i, e_i, e_n) \\
&= \sum_{j=1}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i) \\
&= \sum_{j \neq i}^n R(e_i, e_j, e_j, e_i) \\
&= \sum_{j \neq i}^n K_M(e_i \wedge e_j)
\end{aligned}$$

dır ve burada $X = e_1$ ise

$$Ric(X) = \sum_{j=2}^n K_M(e_1 \wedge e_j) \quad (2.2.7)$$

yani her sabit e_i için

$$Ric(e_i) = \sum_{j \neq i}^n K_M(e_i \wedge e_j)$$

ile tanımlıdır [3].

Tanım 2.2.17. \widetilde{M} bir diferensiyel manifold, F de \widetilde{M} üzerinde $(1,1)$ - tipinde bir tensör alanı olsun. Eğer $F^2 = I$ ise F ye \widetilde{M} üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı, (\widetilde{M}, F) ikilisine bir hemen hemen çarpım manifold denir [16].

$F^2 = I$ olduğundan F nin öz değerleri ± 1 dir. Eğer

$$P = \frac{1}{2}(I + F), \quad Q = \frac{1}{2}(I - F) \quad (2.2.8)$$

denilirse bu durumda

$$P + Q = I, \quad P^2 = P, \quad Q^2 = Q, \quad PQ = QP = 0, \quad F = P - Q \quad (2.2.9)$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 2.2.18. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifold ve F , \widetilde{M} üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı olmak üzere, her $X, Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{g}(FX, FY) = \widetilde{g}(X, Y) \quad (2.2.10)$$

sağlanıyor ise \widetilde{M} ya bir hemen hemen Riemann çarpım manifoldu denir [16].
 \widetilde{M}_1 ve \widetilde{M}_2 iki diferensiyellenebilir manifold ve $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ olmak üzere \widetilde{M} ya lokal çarpım manifold denir, her zaman doğal bir F çarpım yapısı vardır ve

$$F = \begin{bmatrix} \delta_b^a & 0 \\ 0 & -\delta_b^a \end{bmatrix}$$

matrisiyle verilir, aynı zamanda $F^2 = I$ şartını sağlar [34].

Önerme 2.2.1. $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ bir lokal çarpım manifoldu olsun. Bu durumda \widetilde{M}_1 ve \widetilde{M}_2 , \widetilde{M} nın total geodezik altmanifoldlarıdır.

Bir lokal çarpım manifoldu bu önerme ile karakterize edilir.

Tanım 2.2.19. $(\widetilde{M}_1, \widetilde{g}_1), (\widetilde{M}_2, \widetilde{g}_2)$ ile Riemann manifold ve $\widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ üzerindeki Riemann metriği

$$\widetilde{g} = \widetilde{g}_1 \times \widetilde{g}_2 \quad (2.2.11)$$

şeklinde ise \widetilde{M} ya lokal ayrıştırılabilir Riemann manifold denir [34].

Tanım 2.2.20. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir lokal ayrıştırılabilir Riemann manifold olsun. Eğer \widetilde{M} nın eğrilik tensörü \widetilde{R} , her $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y, Z, W) = & a\{(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\ & + (\langle X, FW \rangle \langle Y, FZ \rangle - \langle X, FZ \rangle \langle Y, FW \rangle)\} \\ & + b\{(\langle X, FW \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, FZ \rangle \langle Y, W \rangle) \\ & + (\langle X, W \rangle \langle Y, FZ \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, FW \rangle)\} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

ile verilmiş ise \widetilde{M} ya hemen hemen sabit eğriliklidir denir ve $\widetilde{M}(a, b)$ ile gösterilir. Burada a, b reel sabitlerdir [16].

Önerme 2.2.2. Bir lokal çarpım Riemann manifoldunun lokal ayrıştırılabilir olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{\nabla}F = 0$ olmasıdır, burada $\widetilde{\nabla}$, \widetilde{M} nın Levi-Civita konneksiyonudur [16].

Önerme 2.2.3. $M, \widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$ Riemann çarpım manifoldunun F - anti-invariant altmanifoldu olsun. Bu durumda $A_{FX}Y = 0$ dir. Üstelik $\text{boy}\widetilde{M} = 2\text{boy}M$ ise bu durumda M total geodeziktir [16].

Lemma 2.2.1. a_1, a_2, \dots, a_n, c ($n \geq 2$) olmak üzere $n + 1$ tane reel sayı olsun öyleki

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + c\right) \quad (2.2.13)$$

dir. Burada $2a_1a_2 \geq c$ dir ve eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$a_1 + a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

dir.

İspat. Cauchy Schwarz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) \end{aligned}$$

olup $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (1, 1, \dots, 1)$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 &\leq n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \\ ((a_1 + a_2) + a_3 + \dots + a_n)^2 &\leq n(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 &\leq (n-1)((a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

olur. (2.2.13) ve (2.2.14) den

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + c \leq (a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \quad (2.2.15)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + c \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + c \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade gözönüne alınırsa c değeri, karesi alınmış ifadelerin haricinde kalan kısmın toplamına eşit olan sabit bir sayıyı ifade etmektedir. O halde, (2.2.15) den $2a_1a_2 \geq c$ olur. Eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a_1 + a_2 = a_3 = \dots = a_n$ dir [36]. \square

Lemma 2.2.2. (x_1, \dots, x_n) R^n nin bir noktası olsun. Eğer $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$ ise

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq na^2$$

dir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ olmasıdır [39].

İspat. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = na$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = na^2$ küresine (a, a, \dots, a) noktasında teğet olan bir düzlemdir. Düzlemdeki herhangi bir noktanın orijine olan uzaklığı ya kürenin yarıçapına eşittir ya da büyüktür. Böylece ispat tamamlanır. \square

Lemma 2.2.3. $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, R^n üzerinde tanımlı ve

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \sum_{j=2}^n x_j - \sum_{j=2}^n x_j^2$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olsun. Eğer $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2na$ ise

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{n-1}{4n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

elde edilir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart,

$\frac{1}{n+1}x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ olmasıdır [39].

İspat. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2na$ olduğundan

$$(x_1 - na) + x_2 + x_3 + \dots + x_n = na$$

olarak yazılır. Lemma 2.2.2 den,

$$(x_1 - na)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq na^2$$

ye sahip oluruz. Eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak, $\frac{1}{n+1}x_1 = x_2 = \dots = x_n = a$ dır. Ayrıca üsteki kare açılırsa

$$(x_1^2 - 2nax_1 + n^2a^2) + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq na^2$$

ve buradan

$$(n^2 - n)a^2 \geq x_1(2na - x_1) - x_2^2 - \dots - x_n^2$$

yani

$$x_1 \sum_{j=2}^n x_j - \sum_{j=2}^n x_j^2 \leq (n^2 - n)a^2 = \frac{n-1}{4n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lemma 2.2.4. R^n üzerinde

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \sum_{j=2}^n x_j - x_1^2$$

şeklinde tanımlanan f_2 fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 4a$ ise

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

dir. Eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart,

$x_1 = a, x_2 + x_3 + \dots + x_n = 3a$ olmasıdır.

İspat. $u = x_1, v = x_2 + \dots + x_n - 2a$ olsun. Buradan

$$u + v = x_1 + x_2 + \dots + x_n - 2a = 2a$$

olur. Lemma 2.2.2 den,

$$u^2 + v^2 = x_1^2 + (x_2 + \dots + x_n - 2a)^2 \geq 2a^2$$

elde edilir. Burada eşitlik sağlanır ancak ve ancak $x_1 = a, x_2 + \dots + x_n = 3a$ dır.

Ayrıca buradan

$$(x_2 + \dots + x_n - 2a)^2 \geq 2a^2 - x_1^2$$

veya

$$(x_2 + \cdots + x_n)^2 - 4a(x_2 + \cdots + x_n) + 4a^2 \geq 2a^2 - x_1^2$$

ya da

$$(x_2 + \cdots + x_n)[(x_2 + \cdots + x_n) - 4a] + 2a^2 \geq -x_1^2$$

elde edilir. $x_1 = 4a - (x_2 + \cdots + x_n)$ olduğundan

$$2a^2 \geq x_1(x_2 + \cdots + x_n) - x_1^2$$

elde edilir. Buradan ise

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2 + \cdots + x_n) &= x_1(x_2 + \cdots + x_n) - x_1^2 \\ &\leq 2a^2 = \frac{1}{8}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

2.3 Hermityen Manifoldlar

Tanım 2.3.1. V , n - boyutlu reel vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ için,

$$V^C = \{z = x + iy \mid x, y \in V, i^2 = -1\}$$

kümesine V nin kompleksleştirilmiş denir. $x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$ ve $a, b \in R$ için

i) $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

ii) $(a + ib)(x_1 + iy_1) = (ax_1 - by_1) + i(ay_1 + bx_1)$

işlemleri ile V^C , C üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.3.2. V reel bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$J : V \longrightarrow V$$

endomorfizmi $\forall x \in V$ için $J^2x = -x$ şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir kompleks yapı, V ye de J - kompleks yapısı ile belirlenen vektör uzayı denir. Bu vektör uzayı (V, J, R) ile gösterilecektir [17].

Örnek 2.3.1. $V = R^4$ ve $J : R^4 \rightarrow R^4$,

$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$ ile tanımlı dönüşüm olsun. $J^2 = -I$ dir ve J bir kompleks yapıdır.

Teorem 2.3.1. J kompleks yapısına sahip bir (V, R, J) vektör uzayı çift boyutludur [17].

(V, J, R) bir vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$\cdot : C \times V \rightarrow V$$

$$\begin{aligned} (\alpha, x) &\rightarrow \alpha \cdot x = (\alpha_1 + i\alpha_2)x \\ &= \alpha_1 x + \alpha_2 Jx \end{aligned}$$

dış işlemi ile V, C üzerinde bir vektör uzayıdır.

$\text{boy}_R V = 2n$ ise $\text{boy}_C V = n$ dir.

(V, C, J) vektör uzayının iki alt uzayı

$$W(J) = \{z | z = x - iJ(x), x \in V\}$$

$$\bar{W}(J) = \{z | z = x + iJ(x), x \in V\}$$

olmak üzere $V^C = W(J) \oplus \bar{W}(J)$ olarak yazılır. Buna göre $z \in W(J)$ olması için gerek ve yeter şart $Jz = iz$ olmasıdır. Benzer şekilde $z \in \bar{W}(J)$ ancak ve ancak $Jz = -iz$ dir. $W(J) = V^{(0,1)}$, $\bar{W}(J) = V^{(1,0)}$ ile de gösterilir.

Tanım 2.3.3. $W \subset C^n$ olmak üzere $f : W \rightarrow C$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\Delta z_k \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z_k) - f(z_0)}{\Delta z_k}$$

limiti var ve $\Delta z_k \rightarrow 0$ yaklaşımı Δx_k ve Δy_k nın sifira yaklaşımından bağımsız ise f fonksiyonuna $z_0 \in W$ noktasında holomorfik fonksiyon denir, burada $\Delta z_k =$

$\Delta x_k + i\Delta y_k$ dır [16].

$f(p) = u(p) + iv(p)$ olmak üzere f holomorftir ancak ve ancak

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_k} = -\frac{\partial v}{\partial x_k}$$

dır. Bu denklemlere *Couchy-Riemann denklemleri* denir.

Tanım 2.3.4. M bir Hausdorff uzay, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ M nin bir açık örtüsü, $\psi : U_\alpha \subset M \rightarrow U_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ bir homeomorfizm ve $U_\alpha \cup U_\beta \neq \emptyset$ için $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ ve $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ dönüşümleri holomorftir ise M ye n - boyutlu kompleks manifold ve $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yada holomorftir koordinat komşuluğu sistemi denir [16].

Tanım 2.3.5. M , $2m$ - boyutlu bir manifold olsun. $\forall p \in M$ için $J_p : T_p M \rightarrow T_p M$, $J_p^2 = -I_{2m}$ olacak şekilde bir J_p endomorfizmi var ise M ye hemen hemen kompleks manifold J ye de hemen hemen kompleks yapı denir [16].

$\text{rank}(J) = 2m$ dir ve J nin karakteristik değerlerinin m - tanesi i , m - tanesi ise $-i$ dir.

Böylece $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p M$ olmak üzere

$$T_p^{\mathbb{C}} M = T_p^{(0,1)} M \oplus T_p^{(1,0)} M$$

olarak yazılır. Benzer şekilde

$$\Gamma^{\mathbb{C}}(TM) = \Gamma^{(0,1)}(TM) \oplus \Gamma^{(1,0)}(TM)$$

olarak ifade edilebilir.

Tanım 2.3.6. (M, J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma^{(1,0)}(TM)$ iken $[X, Y] \in \Gamma^{(1,0)}(TM)$ ise J ye integrallenebilir denir [20].

Tanım 2.3.7. (M, J) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. Bu durumda

$$N_j(X, Y) = J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y]$$

ile tanımlı tensör alanına *Nijenhuis tensör alanı* denir [20].

Teorem 2.3.2. (M, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. J integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $N_J = 0$ dır [10].

Tanım 2.3.8. V bir kompleks vektör uzayı olsun. $H : V \times V \rightarrow C$ fonksiyonu tanımlansın. $x, y, z \in V$ için H fonksiyonu

$$1) H(x, y + z) = H(x, y) + H(x, z)$$

$$2) H(x, \alpha y) = \bar{\alpha}H(x, y), \alpha \in C$$

$$3) H(x, y) = \overline{H(x, y)}$$

şartlarını sağlıyorsa H fonksiyonuna V üzerinde bir Hermityen fonksiyon denir [10]. V üzerinde bir H hermityen fonksiyonu varsa V ye Hermityen iç çarpım uzayı denir [17].

$H = g + i\Omega$ şeklinde reel ve imajiner kısımlarına ayrılabilir. Bu durumda g bir iç çarpım fonksiyonu ve Ω da anti-simetrik bilinear form olur. Ayrıca

$$H(x, y) = \overline{H(x, y)} = g(x, y) - i\Omega(x, y)$$

olacağından

$$g(x, y) = g(y, x), \quad \Omega(x, y) = -\Omega(y, x)$$

olarak elde edilir ve

$$\Omega(x, y) = g(x, Jy)$$

olur.

(M, J) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şartını sağlayan bir g Riemann metriği var ise g ye M üzerinde Hermityen metrik, M ye de hemen hemen Hermityen manifold denir.

Eğer (M, J) kompleks manifold ise M ye Hermityen manifold denir. Yani hemen hemen Hermityen manifoldun Nijenhuis tensör alanı $N_J = 0$ ise (M, J, g) bir Hermityen manifold olur.

Tanım 2.3.9. (M, J) hemen hemen kompleks bir manifold olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{g}(JX, JY) = g(X, Y)$ olacak şekilde M üzerinde g Riemann metriği varsa g ye Hermityen metrik, M manifolduna ise hemen hemen Hermityen manifold veya almost Hermityen manifold denir [17].

V , $2m$ - boyutlu J kompleks yapısı ile birlikte bir reel vektör uzayı olsun.

a) $B(X, Y, Z, W) = -B(Y, X, Z, W) = B(X, Y, W, Z)$

b) $B(X, Y, Z, W) = B(Z, W, X, Y)$

c) $B(X, Y, Z, W) + B(X, Z, W, Y) + B(X, W, Y, Z) = 0$

d) $B(JX, JY, Z, W) = B(X, Y, JZ, JW) = B(X, Y, Z, W)$

şartlarını sağlayan V üzerinde bir $B : V \times V \times V \times V \rightarrow R$ dönüşümü tanımlansın.

Lemma 2.3.1. B ve T (a), (b), (c) şartlarını sağlayan 4-lineer dönüşüm olsunlar $\forall X, Y \in V$ için $B(X, Y, X, Y) = T(X, Y, X, Y)$ ise $B = T$ dir [16].

Lemma 2.3.2. B ve T yukarıdaki (a), (b), (c), (d) şartlarını sağlayan 4- lineer dönüşüm olsunlar. Bu durumda $\forall X \in V$ için

$$B(X, JX, X, JX) = T(X, JX, X, JX)$$

ise $B = T$ dir [16].

Kabul edelim ki g , V üzerinde Hermityen iç çarpım olsun. Bu durumda

$$B_0(X, Y, Z, W) = \frac{1}{4} \{g(X, Z), g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) + g(X, JZ) \\ + g(Y, JW) - g(X, JW)g(Y, JZ) + 2g(X, JY)g(X, JW)\}$$

dönüşümü (a), (b), (c) ve (d) özelliklerini sağlar.

Tanım 2.3.10. V Hermityen vektör uzayı, P , V uzayında bir düzlem ve X, Y ise P nin ortonormal bazları olsun. $K(P)$ kesit eğriliği

$$K(P) = R(X, Y, X, Y)$$

ile tanımlanır [1]. $K(P)$ kesit eğriliği, ortonormal baz seçiminden bağımsızdır.

Eğer P , J -invariant ise $P = Sp\{X, JX\}$ olmak üzere

$$K(P) = R(X, JX, X, JX)$$

kesit eğriliğine M manifoldunun holomorfik kesit eğriliği denir [16].

Tanım 2.3.11. \widetilde{M} , bir hemen hemen Hermityen manifold olsun.

a) Ω temel 2-formu kapalı ise \widetilde{M} manifolduna hemen hemen Kaehler manifoldu,

b) $X \in T\widetilde{M}$ için $(\widetilde{\nabla}_X J)X = 0$ manifolduna nearly Kaehler manifold,

c) $\widetilde{\nabla}J = 0$ manifolduna Kaehler manifoldu denir [16].

Tanım 2.3.12. \widetilde{M} bir Kaehler manifold, \widetilde{R} , \widetilde{M} nin eğrilik tensörü ve P de $\{X, JX\}$ tarafından gerilen düzlem olsun. $K(P)$ holomorfik kesit eğriliği sabit ise \widetilde{M} ye sabit holomorfik kesit eğrilikli Kaehler manifoldu denir [16]. Basit bağlantılı sabit holomorfik kesit eğrilikli bir Kaehler manifolduna kompleks uzay form denir [16]. $\widetilde{M}(c)$ ile gösterilir ve $\widetilde{M}(c)$ nin Riemann eğrilik tensörü \widetilde{R} ,

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y, Z, W) &= \frac{c}{4} \{ \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\ &\quad + \langle X, JZ \rangle \langle JY, W \rangle - \langle Y, JZ \rangle \langle JX, W \rangle \\ &\quad + 2 \langle X, JY \rangle \langle JZ, W \rangle \} \end{aligned}$$

ile tanımlanır [1].

$\widetilde{M}(c)$ kompleks uzay form olsun. $c = 0$ ise $\widetilde{M}(c)$ ye kompleks Öklidyen uzay denir ve C^n ile gösterilir. $c > 0$ ise CP^n kompleks projektif uzay, $c < 0$ ise CH^n kompleks hiperbolik uzaydır [16].

Tanım 2.3.13. \widetilde{M} , hemen hemen Hermityen manifold olsun. $X, Y, Z, W \in T\widetilde{M}$ için

$$\widetilde{R}(JX, JY, JZ, JW) = \widetilde{R}(X, Y, Z, W)$$

şartı sağlanıyorsa yani \widetilde{M} manifoldu J -invariant \widetilde{R} eğrilik tensörüne sahipse \widetilde{M} ya Kaehler manifoldu denir [20].

Tanım 2.3.14. \widetilde{M} RK - manifold olsun. $\forall p \in M$ ve $\forall X, Y, Z \in T_p\widetilde{M}$ için

$$\widetilde{R}(X, Y, JX, JY) - \widetilde{R}(X, Y, X, Y) = \widetilde{R}(X, Z, JX, JZ) - \widetilde{R}(X, Z, X, Z)$$

ise \widetilde{M} manifolduna (noktasal) sabit tiplidir denir [19].

Teorem 2.3.3. \widetilde{M} noktasal hemen hemen Hermityen manifoldudur gerek ve yeter koşul \widetilde{M} üzerinde öyle bir α diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır ki $\forall X, Y, Z \in T_p\widetilde{M}$ için

$$\widetilde{R}(X, Y, X, Y) - \widetilde{R}(X, Y, JX, JY) = \alpha(g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 - g(X, JX)^2)$$

dir [19].

Buradaki α fonksiyonuna \widetilde{M} , hemen hemen Hermityen manifoldunun sabit tipi denir [8]. Sabit α tipli ve sabit holomorfik kesit eğrilikli bir RK - manifoldu $\widetilde{M}(c, \alpha)$ ile gösterilir.

$\widetilde{M}(c, \alpha)$ manifoldu için

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y)Z &= \frac{(c + 3\alpha)}{4}(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &+ \frac{c - 4}{4}(g(X, JZ)JY - g(Y, JZ)JX + 2g(X, JY)JZ) \end{aligned}$$

dir [19].

$\alpha = 0$ ise $\widetilde{M}(c, \alpha)$ manifoldu $\widetilde{M}(c)$ uzay formu olur. Böylece $\widetilde{M}(c)$, $\widetilde{M}(c, \alpha)$ nın bir alt sınıfına aittir.

Tanım 2.3.15. \widetilde{M} hemen hemen bir Hermityen manifold, $\forall X, Y, Z \in T\widetilde{M}$, f_1 ve f_2 \widetilde{M} üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere \widetilde{R} eğriliği

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y, Z, W) &= f_1\{\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle\} \\ &+ f_2\{\langle X, JZ \rangle \langle JY, W \rangle - \langle Y, JZ \rangle \langle JX, W \rangle + 2\langle X, JY \rangle \langle JZ, W \rangle\} \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa \widetilde{M} ya genelleştirilmiş kompleks uzay form denir ve $\widetilde{M}(f_1, f_2)$ ile gösterilir [20].

$f_1 = \frac{(c+3\alpha)}{4}$ ve $f_2 = \frac{(c-\alpha)}{4}$ ise $\widetilde{M}(f_1, f_2)$, $\widetilde{M}(c, \alpha)$ olur. Eğer $\alpha = c$ ise $\widetilde{M}(c, \alpha)$, c sabit eğrilikli bir uzay olur.

Bir hemen hemen Hermityen manifoldda, J kompleks yapısı bir vektörü kendisine dik olan bir vektöre dönüştürür. Buna göre bir hemen hemen Hermityen manifoldda iyi bilinen iki sınıf vardır. Bunlar invaryant (holomorfik) ve anti-invaryant (total reel) altmanifoldlardır.

Tanım 2.3.16. M , $(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$ hemen hemen Hermityen manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Her bir $X \in T_p M$ için

$$JX = PX + FX, \quad PX \in T_p M, \quad FX \in T_p(M^\perp) \quad (2.3.1)$$

dır ve burada $PX \in T_p(M)$ ve $FX \in T_p(M^\perp)$

Eğer $F = 0$ ise M ye invaryant ve $P = 0$ ise M ye anti-invaryant altmanifold denir [20]. Bu durumda M invaryant ise $J(TM) \subset TM$, anti-invaryant ise $J(TM) \subset TM^\perp$ olur.

Tanım 2.3.17. M , hemen hemen hermityen bir manifoldun bir alt manifoldu olsun. Eğer, M nin TM tanjant demeti invaryant ve anti- invaryant distribüsyonların direkt toplamı olarak yazılabiliyorsa yani $J(D^1) = D^1$ ve $J(D^0) \subset TM^\perp$ olmak üzere

$$TM = D^1 \oplus D^0$$

ise M altmanifolduna CR- altmanifold denir [20].

Tanım 2.3.18. M , hemen hemen Hermityen bir manifoldun bir altmanifoldu olsun. Bir $0 \neq X_p \in T_p M$ vektörü için JX_p ile tanjant uzayı $T_p(M)$ arasındaki $\theta(X_p)$ açısına X_p nin Wirtinger açısı denir. Eğer Wirtinger açısı $p \in M$ ve $X_p \in T_p M$ nin seçiminden bağımsız ise M altmanifolduna slant altmanifold denir. $\lambda \in [0, 1]$ ve PX, JX in teğet kısmı olmak üzere hemen hemen Hermityen bir manifoldun slant bir altmanifoldu

$$P^2 + \lambda^2 I = 0$$

ile karakterize edilir [20].

Tanım 2.3.19. \widetilde{M} hemen hemen hermityen manifold ve M, \widetilde{M} nin bir altmanifoldu olsun. $p \in M$ nin tanjant uzayı $T_p M$ ve $-\lambda_1^2, \dots, -\lambda_q^2, p \in M$ noktasında P^2 nin birbirinden farklı karakteristik değerleri olmak üzere

$$i) T_p M = D_p^1 \oplus D_p^0 \oplus D_p^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus D_p^{\lambda_q}$$

$$D_p^1 = \text{çek}\{F_p\}, D_p^0 = \text{çek}\{P_p\}, D_p^{\lambda_i} = \text{çek}(P^2 + \lambda_i^2(p)l)_p$$

ii) $D_p^1, D_p^0, D_p^{\lambda_1}, \dots, D_p^{\lambda_q}$ lar $p \in M$ nin seçiminden bağımsızdır.

özellikleri sağlanıyorsa M ye \widetilde{M} nin generik altmanifoldu denir [18].

M generik altmanifoldu için λ_i değerleri $p \in M$ noktasının seçiminden bağımsız ise M manifolduna anti-generik altmanifoldu denir [18].

Önerme 2.3.1. M, \widetilde{M} hemen hemen Hermityen manifoldun bir generik altmanifoldu olsun. $T_p(M) = D_p^1 \oplus D_p^0 \oplus D_p^{\lambda_1} \oplus \dots \oplus D_p^{\lambda_q}$ olmak üzere,

1) $q = 0$ ise M bir CR- altmanifold,

2) $q = 0, D^0 = \{0\}$ ise M bir invaryant (holomorfik) altmanifold,

3) $q = 0, D^1 = \{0\}$ ise M bir anti-invaryant (total reel) altmanifold,

4) $D^1 = \{0\} = D^0, k = 1$ ve $\lambda_1 = \text{sabit}$ ise M bir slant altmanifold olur [18].

Örnek 2.3.2. $\nu : R^8 \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$ diferensiyellenbilir fonksiyon $e_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, (j = 1, \dots, 8)$ R^8 in standart bazları için

$$Je_1 = -e_2, \quad Je_2 = e_1, \quad Je_3 = -e_8, \quad Je_8 = -e_3$$

$$Je_4 = \cos v(x)e_5 + \sin v(x)e_6, \quad Je_5 = \cos v(x)e_4 + \sin v(x)e_7$$

$$Je_6 = -\sin v(x)e_4 + \cos v(x)e_7, \quad Je_7 = -\sin v(x)e_5 + \cos v(x)e_6$$

olsun. g, R^8 in kanonik metriği olmak üzere (J, g) , bir hemen hemen Hermityen yapıdır.

$$R^5 = \{x \in R^8 : x^6 = x^7 = x^8 = 0\} \subset R^8$$

altmanifoldunda

$$D^1 = sp\{e_1, e_2\}, \quad D^0 = sp\{e_3\}, \quad D^\lambda = sp\{e_4, e_5\}, \quad \lambda(x) = \cos \nu(x)$$

alnırsa R^5, R^8 in generik bir altmanifoldudur [18].

$(\widetilde{M}, J, \widetilde{g})$ bir Kaehler manifold, M de \widetilde{M} nin bir has (proper) slant alt manifoldu olsun. $p \in M$ için $T_p M$ nin 2- düzlem kesiti π ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ nin bir ortonormal bazı öyleki $\pi = Sp\{e_1, e_2\}$ olsun. Eğer M Lagrangian altmanifold ise yani $boy T_p M = boy T_p M^\perp$ ise

$$e_k^* = \frac{1}{\sin \theta} w e_k \quad k = 1, \dots, n$$

olmak üzere $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ $T_p M^\perp$ nin bir bazıdır.

Bir Kaehlerian slant altmanifold için

$$A_{WX}Y = A_{WY}X, \quad \forall X, Y \in T_p M$$

sağlanır veya buna denk olarak

$$\sigma_{ij}^k = \sigma_{ik}^j = \sigma_{jk}^i$$

dır, burada A şekil operatörü ve $\sigma_{ij}^k = \langle \sigma(e_i, e_j), e_k^* \rangle$, $i, j, k = 1, \dots, n$ dir [28]

3. RİCCİ EĞRİLİĞİ VE RIEMANN ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNDE TEMEL EŞİTSİZLİKLER

3.1 Riemann Manifolrların Ricci Eğriliği

(\tilde{M}, \tilde{g}) , n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $T_p M$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere $\{e_i, e_j\}$ düzleminin kesit eğriliği

$$K_{ij} = R(e_i, e_j, e_j, e_i) \quad (3.1.1)$$

dir. Buna göre (2.2.7) ve (3.1.1) den

$$Ric(e_i) = \sum_{j \neq i}^n K_{ij} \quad (3.1.2)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.1.1. (\tilde{M}, \tilde{g}) , n -boyutlu bir Riemann manifold olsun.

$$\tau(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_M(e_i \wedge e_j) \quad (3.1.3)$$

ile tanımlı $\tau(p)$ ye p noktasında \tilde{M} manifoldunun skalar eğriliği denir [14].

Ayrıca 2- boyutlu bir Riemann manifoldu için skalar eğrilik Gauss eğriliği ile aynıdır. Gerçekten,

$$\tau(p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_M(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Ric(e_i)$$

dir. Buradan 2- boyutlu bir Riemann manifoldu için $\tau(p) = \frac{1}{2}(K_{12} + K_{21}) = K_{12}$ dir.

Skalar eğrilik;

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i)$$

ile de gösterilir. Buna göre $r = 2\tau$ dur.

M nin p deki skalar eğriliği $\tau(p)$;

$$\tau(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Ric(e_i) \quad (3.1.4)$$

ile tanımlanır. Ayrıca (3.1.2) ve (3.1.4) den,

$$Ric(e_1) = \tau - \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \tau - \frac{1}{2} \sum_{2 \leq i \neq j \leq n} K_{ij} \quad (3.1.5)$$

elde ederiz.

X , k düzlem kesiti π_k ' da bir birim vektör olsun ve $e_1 = X$ olmak üzere π_k için, bir $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ortonormal bazını seçebiliriz. π_k nin Ricci eğriliği Ric_{π_k} olmak üzere

$$Ric_{\pi_k}(X, X) = Ric_{\pi_k}(X) = K_{13} + \dots + K_{1k} \quad (3.1.6)$$

ile tanımlanır [14].

$Ric_{\pi_k}(X)$, bir k - Ricci eğriliği olarak adlandırılır. Böylece, $i \in \{1, \dots, k\}$ olmak üzere herhangi bir e_i sabiti için,

$$Ric_{\pi_k}(e_i) = \sum_{j \neq i}^k K_{ij} \quad (3.1.7)$$

olarak alabiliriz. Buna göre k düzlem kesiti π_k ' nin skalar eğriliği $\tau(\pi_k)$

$$\tau(\pi_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} K_{ij}, \quad (3.1.8)$$

ile verilir.

$\{e_1, \dots, e_k\}$ π_k k - düzlemi kesitinin herhangi bir ortonormal bazı olmak üzere

$$2\tau(\pi_k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j \neq i}^k K_{ij} = \sum_{i=1}^k Ric_{\pi_k}(e_i) \quad (3.1.9)$$

olarak yazılır.

M ' nin p ' deki skalar eğriliği $\tau(p)$, M ' nin tanjant uzayı $T_p M$ ' nin p ' deki skalar eğriliği ile özdeştir ve $\tau(p) = \tau(T_p M)$ dir.

Tanım 3.1.2. M , n boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_p^1 M, p$ noktasında birim tanjant vektörlerin kümesi olmak üzere

$$\widetilde{Ric}(p) = \max\{Ric(X) : X \in T_p^1 M\}$$

ile tanımlanan $\widetilde{Ric}(p)$ ye p noktasındaki maksimum Ricci eğriliği denir [6].

Tanım 3.1.3. M , n boyutlu bir Riemann manifold olsun. Ayrıca $p \in M$ için $K(\pi)$, $\pi \subset T_p M$ düzlem kesitinin kesit eğriliği olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ $T_p M$ için bir ortonormal baz olmak üzere,

$$\tau_N(p) = \frac{2\tau(p)}{n(n-1)}$$

ile tanımlanan $\tau_N(p)$ ye p noktasında normalize edilmiş skalar eğrilik denir [6].

(2.2.7) ve (3.1.3) eşitliklerinden

$$\tau(p) = K_{12} + \dots + K_{1n} + K_{23} + \dots + K_{2n} + \dots + K_{(n-1)n}$$

olduğundan (3.1.5) denklemi

$$Ric(e_1) = \tau - \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_M(e_i \wedge e_j) = \tau - \frac{1}{2} \sum_{2 \leq i \neq j \leq n} K_M(e_i \wedge e_j) \quad (3.1.10)$$

olarak yazılır.

π_k , $T_p M$ nin k -düzlemi ve X , π_k da birim vektör olsun. $k = n$ ise $\pi_n = T_p M$ ve $k = 2$ ise π_2 , $T_p M$ nin bir düzlem kesitidir. $e_1 = X$ olacak şekilde π_k nin $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını seçelim. X de Π_k kesitinin k - Ricci eğriliği

$$Ric_{\pi_k}(X) = K_M(e_1 \wedge e_2) + \dots + K_M(e_1 \wedge e_k) \quad (3.1.11)$$

ile tanımlanır [6]. Bir e_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ vektörü için,

$$Ric_{\pi_k}(e_i) = \sum_{j \neq i}^k K_M(e_i \wedge e_j) = \sum_{j \neq i}^k K_{ij} \quad (3.1.12)$$

dır. k - düzlem kesiti π_k nin skalar eğriliği

$$\tau(\pi_k) = K_M(e_1 \wedge e_2) + \dots + K_M(e_1 \wedge e_k) + \dots + K_M(e_{n-1} \wedge e_k)$$

veya

$$\tau(\pi_k) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} K_M(e_i \wedge e_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k}^k K_{ij}$$

ile tanımlanır [6]. k - düzlem kesiti π_k nın skalar eğriliği $\tau_{1\dots k}$ ile gösterilir.

π_k nın normalize edilmiş skalar eğriliği ise

$$\tau(\pi_k) = \frac{2\tau(\pi_k)}{k(k-1)}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $k = n$ ise $\pi_k = T_p M$ olduğundan

$$\tau_N(p) = \tau_N(T_p M)$$

dır. $k = 2$ için ortonormal bazının bir düzlem kesiti $\{e_1, e_2\}$ ise

$$Ric_{\pi_2}(e_1) = K_{12} = K_{21} = Ric_{\pi_2}(e_2) = \tau(\pi_2) = \tau_N(\pi_2)$$

dir [6].

3.2 Riemann Altmanifoldların Ricci Eğriliği

M , m - boyutlu \widetilde{M} Riemann manifoldunun n boyutlu bir Riemann altmanifoldu olsun. $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $T_p M$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun ve e_r , $r \in \{n+1, \dots, m\}$ için, $T_p^\perp M$ normal uzayının ortonormal bir bazıda $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ olsun. Bu durumda,

$$\sigma_{ij}^r = \langle \sigma(e_i, e_j), e_r \rangle \quad \text{ve} \quad \|\sigma\|^2 = \sum_{i=j=1}^n \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle$$

olmak üzere

$$\sigma(e_i, e_j) = \sum_{r=n+1}^m \sigma_{ij}^r e_r, \quad i, j = 1, \dots, n$$

olarak yazılabilir.

K_{ij} ve \widetilde{K}_{ij} sırasıyla, M altmanifoldundaki ve \widetilde{M} ambient manifoldundaki p noktasında e_i ve e_j tarafından gerilen düzlem kesitinin kesit eğriliğini gösterir. Böylece K_{ij} ve \widetilde{K}_{ij} , p ' de $Sp\{e_1, e_2\}$ nin içsel (intrinsic) ve dışsal (extrinsic) kesit

eğrilikleridir.

Gauss'un (2.2.5) denklemi kullanılırsa $Sp\{e_i, e_j\}$ düzleminde,

$$K_{ij} = \tilde{K}_{ij} + \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \quad (3.2.1)$$

denklemini elde ederiz.

(3.2.1) den,

$$2\tau(p) = 2\tilde{\tau}(T_p M) + n^2 \|H\|^2 - \|\sigma\|^2, \quad (3.2.2)$$

olduğu görülür. Burada

$$\tilde{\tau}(T_p M) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \tilde{K}_{ij}$$

dir. Böylece, $\tau(p)$ ve $\tilde{\tau}(T_p M)$ sırasıyla p 'deki altmanifoldun içsel (intrinsic) ve dışsal (extrinsic) skaler eğrilikleridir. Buradan, 2. temel formun normunun karesini

$$\begin{aligned} \|\sigma\|^2 &= \frac{1}{2} n^2 \|H\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \dots - \sigma_{nn}^r)^2 \\ &+ 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{2 \leq i < j \leq n} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

olarak elde ederiz.

$p \in M$ noktasında ikinci temel form σ 'nın çekirdeği olarak bilinen null uzayı

$$N_p = \{X \in T_p M : \sigma(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_p M\}$$

denklemini ile tanımlanır.

3.3 Riemann Eğrilik İnvaryantları

Tanım 3.3.1. \tilde{M} , n boyutlu bir Riemann manifold olsun. $2 \leq k \leq n - 1$ için

$$\inf \tau(\pi_k)(p) = \inf \{\tau(\pi_k) \mid \pi_k \in T_p M\}$$

olmak üzere p noktasında k -Chen invaryantı

$$\delta_M^k(p) = \tau(p) - (\inf \tau(\pi_k))(p)$$

ile tanımlanır [6].

$k = 2$ için Chen invaryantı

$$\delta_M(p) = \tau(p) - (\inf K)(p)$$

dir.

Tanım 3.3.2. $n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tamsayıları $S(n, k)$ ile $n_1 < n$, $n_j \geq 2$, $j = 1, \dots, k$ ve $n_1 + \dots + n_k \leq n$ koşulunu sağlayan bütün (n_1, \dots, n_k) k -lılarından oluşan sonlu kümeyi ve $S(n)$ ile de $k \geq 0$ olmak üzere bütün $S(n, k)$ ların birleşimini gösterelim. $\pi_{n_1}, \dots, \pi_{n_k}$, boy $\pi_{n_j} = n_j$, ($j = 1, \dots, k$) $\forall (n_1, \dots, n_k) \in S(n, k)$ k -lısı için $T_p M$ nin ortogonal alt uzayları olmak üzere

$$S(n_1, \dots, n_k) = \inf\{\tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k})\}$$

$$\tilde{S}(n_1, \dots, n_k) = \sup\{\tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k})\}$$

şeklinde tanımlansın. Riemann eğrilik invaryantları $\delta(n_1, \dots, n_k)(p)$ ve $\tilde{\delta}(n_1, \dots, n_k)(p)$

$$\delta(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1, \dots, n_k)(p)$$

$$\tilde{\delta}(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - \tilde{S}(n_1, \dots, n_k)(p)$$

ile tanımlanır [9].

Tanım 3.3.3. $S(n_1, \dots, n_k) = \tilde{S}(n_1, \dots, n_k)$ ise M manifolduna $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı denir [10]. M nin Riemann manifoldunun $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı olması için gerek ve yeter şart $(\tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k}))$ nin ortogonal k düzleminin seçiminden bağımsız olmasıdır [10].

Teorem 3.3.1. M , n boyutlu bir Riemann manifold olsun. M nin $S(n-1)$ uzayı olması için gerek ve yeter şart M manifoldunun bir Einstein uzayı olmasıdır [9].

İspat. $\pi_{n-1} \subset T_p M$, $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq n$ ve $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n$ ler birbirinden farklı olmak üzere $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}\}$ ortonormal bazını nasıl seçersek seçelim $\tau(\pi_{n-1})$

sabit ve $\tau(\pi_{n-1}) = \tau - Ric(e_{i_n})$ olacaktır. O halde $\tau - Ric(e_1) = \tau - Ric(e_2) = \dots = \tau - Ric(e_n)$ olur. Bu ise M nin Einstein uzayı olduğunu gösterir.

Tersine M bir Einstein uzay ise M manifoldunun $S(n-1)$ uzayı olduğu açıktır. \square

Lemma 3.3.1. $2 \leq j \leq n - 2$ tamsayısı için M bir $S(j)$ uzay ise $S(j + 1)$ uzaydır [9].

İspat. Öncelikle $j = 3$ özel durumu için iddiannın doğruluğunu gösterelim.

M bir $S(3)$ uzayı ise τ_{123} , $T_p M$ deki 3- düzlemin seçiminden bağımsız olarak bir c sabitine eşittir. Skalar eğriliğin tanımından

$$\tau_{234} = \tau_{1234} - K_{12} - K_{13} - K_{14} = c \quad (3.3.1)$$

dir. Diğer taraftan M bir $S(3)$ uzayı olduğundan

$$K_{12} + K_{13} + K_{23} = c \quad (3.3.2)$$

$$K_{13} + K_{14} + K_{34} = c \quad (3.3.3)$$

$$K_{12} + K_{14} + K_{24} = c \quad (3.3.4)$$

olup (3.3.2), (3.3.3) ve (3.3.4) taraf tarafa toplanırsa

$$K_{12} + K_{13} + K_{14} + K_{23} + K_{24} + K_{34} + K_{12} + K_{13} + K_{14} = 3c \quad (3.3.5)$$

olur. Buradan

$$\tau_{1234} + K_{12} + K_{13} + K_{14} = 3c \quad (3.3.6)$$

dır. (3.3.2) ile (3.3.6) den $\tau_{1234} = 2c$ elde edilir. Bu ise M nin $S(4)$ uzayı olduğunu gösterir.

Genel durumda M bir $S(j)$ uzayı ise

$$\tau_{2\dots j+1} = \tau_{1\dots j+1} - K_{12} - K_{1j+1} = c \quad (3.3.7)$$

dir. Diğer taraftan (3.3.5) ye benzer olarak

$$(j - 2)\tau_{1\dots j+1} - K_{12} - K_{1j+1} = jc \quad (3.3.8)$$

elde edilir. (3.3.7) ile (3.3.8) den

$$(j - 1)\tau_{1\dots j+1} = (j + 1)c$$

olup M bir $S(j + 1)$ uzaydır. □

M bir $S(n - 2)$ uzayı ise Lemma 3.3.1. den $S(n - 1)$ uzaydır. Ayrıca Teorem 3.3.1. den M bir Einstein uzaydır. e_{n-1}, e_n bir p noktasında herhangi bir ortonormal iki vektör ve $\pi_{n-2}, T_p M$ tanjant uzayının e_{n-1} ve e_n dik olan $(n - 2)$ boyutlu altuzayı olsun. Bu durumda

$$\tau_p = \frac{1}{2}(K_{12} + \dots + K_{1n} + K_{21} + \dots + K_{2n} + \dots + K_{n-11} + \dots + K_{n-1n} + K_{n1} + \dots + K_{nn-1})$$

olduğundan

$$\tau_{12\dots n-2} = \tau - Ric(e_{n-1}) - Ric(e_n) + K_{n-1n} = c \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. Burada c, π_{n-2} nin seçiminden bağımsızdır. Bu ise M nin Riemannian uzay formu olduğunu gösterir.

Tanım 3.3.4. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifoldu olsun. Eğer \widetilde{M} nin eğrilik tensörü her $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{R}(X, Y, Z, W) = a[\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle] \quad (3.3.10)$$

$$+ b[\langle X, W \rangle T(Y)T(Z) - \langle X, Z \rangle T(Y)T(W) + \langle Y, Z \rangle T(X)T(W) - \langle Y, W \rangle T(X)T(Z)]$$

şartını sağlıyor ise $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ yarı(quasi)- sabit eğrilikli Riemann manifoldu denir.

Burada a, b \widetilde{M} üzerinde skalar fonksiyonlar ve T de

$$\langle X, P \rangle = T(X) \quad (3.3.11)$$

şeklinde tanımlı 1- formdur ve P ise T 1- formuna karşılık gelen birim vektör alanıdır.

Eğer (3.3.10) sağlanıyor ise bu durumda $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ konformal flat olur. Eğer $b = 0$ ise $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sabit eğrilikli uzaya indirgenir. Böylece yarı(quasi)- sabit eğrilikli uzaylar, uzay formların bir genelleştirilmesidir [11].

Tanım 3.3.5. *Bir non-flat Riemann manifoldu Ricci tensörü, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\tilde{S}(X, Y) = \widetilde{Ric}(X, Y) = a\langle X, Y \rangle + bA(X)A(Y) \quad (3.3.12)$$

şartını sağlıyor ise $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ ya quasi-Einstein manifold denir, Burada a, b \widetilde{M} üzerinde skalar fonksiyonlar öyleki $b \neq 0$ ve A sıfırdan farklı 1- form ve $A(X) = \langle X, U \rangle$ dur, U birim vektör alanıdır [12].

Eğer $b = 0$ ise $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Einstein manifolduna indirgenir.

Kolayca gösterilebilirki bir quasi-sabit eğrilikli uzay bir quasi-Einstein manifoldudur.

Bir $(n + m)$ - boyutlu quasi-sabit eğrilikli uzay $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ nin n - boyutlu altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü R , (2.2.2), (2.2.3) ve (3.3.10) den

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) = & a[\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle] \\ & + b[\langle X, W \rangle T(Y)T(Z) - \langle X, Z \rangle T(Y)T(W) \\ & + \langle Y, Z \rangle T(X)T(W) - \langle Y, W \rangle T(X)T(Z) \\ & + g(\sigma(X, W), \sigma(Y, Z)) - g(\sigma(X, Z), \sigma(Y, W))] \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.3.6. *$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir Riemann manifold olsun. \widetilde{M} nin Riemann eğrilik tensörü \tilde{R} , her $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için*

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y, Z, W) = & c\{\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle\} \\ & + d[\langle X, W \rangle B(Y, Z) - \langle X, Z \rangle B(Y, W) \\ & + B(X, W) \langle Y, Z \rangle - B(X, Z) \langle Y, W \rangle] \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

şartını sağlıyor ise \widetilde{M} ya nearly quasi sabit eğrilikli uzay denir, burada c ve d , \widetilde{M} üzerinde skalar fonksiyonlar ve B , $(0, 2)$ - tipinde simetrik tensör alanıdır. Eğer c sabit ve $d = 0$ ise bu durumda \widetilde{M} reel uzay formu olur.

Bir nearly quasi-sabit eğrilikli uzayın Ricci eğriliği

$$\widetilde{Ric}(X, Y) = c\langle X, Y \rangle + d\langle X, Y \rangle$$

şartını sağlar ve $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir nearly quasi-Einstein manifoldudur [13].

3.4 Riemann Altmanifoldları Üzerinde Temel Eşitsizlikler

Bu alt bölümde bir m - boyutlu $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Riemann manifoldunun n - boyutlu (M, g) altmanifoldu üzerinde temel eşitsizlikleri kurulacak ve altmanifoldlarla ilgili

karakterizasyonlar elde edilecektir.

Gauss'un (2.2.5) denkleminde

$$R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \widetilde{R}(e_i, e_j, e_j, e_i) + \langle \sigma(e_i, e_i), \sigma(e_i, e_i) \rangle - \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle$$

olduğundan

$$K_{ij} = \widetilde{K}_{ij} + \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \quad (3.4.1)$$

dir. Ayrıca

$$2\tau(\pi) = 2\widetilde{\tau}(T_p M) + n^2 \|H\|^2 - \|\sigma\|^2 \quad (3.4.2)$$

elde edilir.

Şimdi $n = 3$ için

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \langle \sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j) \rangle \\
&= \langle \sigma(e_1, e_1), \sigma(e_1, e_1) \rangle + \langle \sigma(e_2, e_1), \sigma(e_2, e_1) \rangle + \langle \sigma(e_3, e_1), \sigma(e_3, e_1) \rangle \\
&= \langle \sigma(e_1, e_1), \sigma(e_1, e_1) \rangle + \langle \sigma(e_1, e_2), \sigma(e_1, e_2) \rangle + \langle \sigma(e_1, e_3), \sigma(e_1, e_3) \rangle \\
&+ \langle \sigma(e_2, e_1), \sigma(e_2, e_1) \rangle + \langle \sigma(e_2, e_2), \sigma(e_2, e_2) \rangle + \langle \sigma(e_2, e_3), \sigma(e_2, e_3) \rangle \\
&= \sum_{r=n+1}^m \{(\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r)^2 - 2(\sigma_{11}^r \sigma_{22}^r + \sigma_{22}^r \sigma_{33}^r) + 2(\sigma_{12}^r)^2 \\
&+ (\sigma_{13}^r)^2 + (\sigma_{23}^r)^2\} \\
&= \sum_{r=n+1}^m \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r + \sigma_{33}^r)^2 - 2(\sigma_{11}^r \sigma_{22}^r + \sigma_{22}^r \sigma_{33}^r) \right. \\
&+ 2((\sigma_{12}^r)^2 + (\sigma_{13}^r)^2 + (\sigma_{23}^r)^2) \left. \right\} \\
&= \frac{1}{2}n^2 \|H\|^2 + \sum_{r=n+1}^m \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \sigma_{33}^r)^2 - 2\sigma_{22}^r \sigma_{33}^r \right. \\
&+ 2(\sigma_{12}^r)^2 + 2(\sigma_{13}^r)^2 + 2(\sigma_{23}^r)^2 \left. \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. $n = 3$ özel haline benzer yolla

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|^2 &= \sum_{r=n+1}^m \{(\sigma_{11}^r + (\sigma_{22}^r + \dots + \sigma_{nn}^r))^2 + \sum_{r=n+1}^m 2 \sum_{i<j} (\sigma_{ij}^r)^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} \sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r\} \\
\|\sigma\|^2 &= \sum_{r=n+1}^m \{(\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r + \dots + \sigma_{nn}^r)^2 + (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \dots + \sigma_{nn}^r)^2 + 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{i<j} (\sigma_{ij}^r)^2 \\
&- 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{2 \leq i < j \leq n} \sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r
\end{aligned}$$

dir. buradan

$$\begin{aligned}
\|\sigma\|^2 &= \frac{1}{2}n^2 \|H\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \dots - \sigma_{nn}^r)^2 \quad (3.4.3) \\
&+ 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{2 \leq i < j \leq n} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2)
\end{aligned}$$

elde edilir [14].

Teorem 3.4.1. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, m - boyutlu bir Riemann manifoldu ve (M, g) , n - boyutlu Riemann altmanifoldu olsun. Bu durumda;

a) $X \in T_p^1 M$ için

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_p M}(X) \quad (3.4.4)$$

dir, burada $\widetilde{Ric}_{T_p M}(X)$, $X \in T_p^1 M$ de \widetilde{M} nin n - Ricci eğriliğidir.

b) $X \in T_p^1 M$ için (3.4.4) un eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & Y \in T_p M, \quad Y \perp X, \\ \sigma(X, X) = \frac{n}{2}H(p) \end{cases} \quad (3.4.5)$$

olmasıdır.

c) (3.4.4) un eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart, ya p noktası total geodezik noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik noktadır.

İspat. (3.2.2) eşitliğinde $\|\sigma\|^2$ nin (3.2.3) deki ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 &= \tau(p) - \widetilde{\tau}(T_p M) + \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \dots - \sigma_{nm}^r)^2 \\ &+ \sum_{r=n+1}^m \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^m \sum_{2 \leq i < j \leq n} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.2.1) den $K_{ij} = \widetilde{K}_{ij} + \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2)$ olup

$$\sum_{r=n+1}^m \sum_{2 \leq i < j \leq n} (\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) = \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} - \widetilde{K}_{ij} \quad (3.4.7)$$

dir. Burada

$$\sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \tau(p) - Ric(e_1) \text{ ve } \sum_{2 \leq i < j \leq n} \widetilde{K}_{ij} = \widetilde{\tau}(p) - \widetilde{Ric}_{T_p M}(e_1)$$

olduğundan (3.4.6) ve (3.4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} Ric(e_1) &= \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_p M}(e_1) - \sum_{r=n+1}^m \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^r)^2 \\ &- \frac{1}{4} \sum_{r=n+1}^m (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \dots - \sigma_{nm}^r)^2 \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

elde edilir. $X \in T_p^1 M$ için $e_1 = X$ yazılarak (3.4.4) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Kabul edelim ki $e_1 = X$ olsun. (3.4.8) eşitliğinden (3.4.4) eşitliği sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\sigma_{12}^r = \cdots = \sigma_{1n}^r = 0, \sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \cdots = \sigma_{nn}^r, r \in \{n+1, \dots, m\}. \quad (3.4.9)$$

dir.

$$n = \|H(p)\| = \sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r = 2\sigma_{11}^r$$

olur. Bu ise (3.4.4) ifadesine denktir ve böylece (b) ispatlanmış olur.

Kabul edelim ki her $X \in T_p^1 M$ için (3.4.4) nın eşitlik durumu (3.4.5) den, $r \in \{n+1, \dots, m\}$ için

$$\sigma_{ij}^r = 0, i \neq j. \quad (3.4.10)$$

olur, buradan

$$2\sigma_{ii}^r = \sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.4.11)$$

elde edilir. (3.4.11) den $2\sigma_{11}^r = 2\sigma_{22}^r = \cdots = 2\sigma_{nn}^r = n(\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \cdots = \sigma_{nn}^r)$ olur ve buradan

$$(n-2)(\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \cdots = \sigma_{nn}^r)$$

yazılabilir. Bu nedenle ya $\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \cdots = \sigma_{nn}^r = 0$ ya da $n = 2$ dir. Eğer $\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \cdots = \sigma_{nn}^r$ ise (3.4.11) den her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $\sigma_{ii}^r = 0$ dir. Bununla birlikte (3.4.10) den her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $\sigma_{ij}^r = 0$ olur ki p bir total geodezik noktadır. Eğer $n = 2$ ise (3.4.11) den $\sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = (\sigma_{11}^r + \sigma_{22}^r)$ olur. Böylece p bir total umbulic noktadır. \square

Sonuç 3.4.1. M , bir Riemann manifoldunun n - boyutlu bir altmanifoldu olsun.

$X \in T_p^1 M$ için, aşağıdaki üç durumdan ikisi diğerini gerektirir.

- X , Teorem 3.4.1 deki (3.4.4) nın eşitlik durumunu sağlar.
- $H(p) = 0$ dir.
- $X \in N_p$ dir [15].

Teorem 3.4.2. $\Phi : M^n \rightarrow R^m$ Riemann manifoldundan $R^m(c)$ Riemann uzay formuna bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda

(a) $\|H\|^2 = \langle H, H \rangle$ ortalama eğriliğinin normunun karesi ve her bir birim vektör $X \in T_p M^n$ için $Ric(X)$, X de M^n nin Ricci eğriliği olmak üzere

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{4}{n^2} \{Ric(X) - (n-1)c\} \quad (3.4.12)$$

dir.

(b) $H(p) = 0$ ise p noktasındaki birim tanjant vektörü için (3.4.12) de eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul X vektörü, p de N_p kısmi null uzayında yatar.

(c) p noktasındaki tüm birim X vektörleri için (3.4.12) de eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul ya p total geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p total umbilik noktadır [14].

İspat. $X \in T_p M^n$, p noktasında birim tanjant vektör olsun. $e_1 = X$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ p noktasında M^n ye teğet olacak şekilde bir $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$ ortonormal bazı seçelim. Teorem 3.4.1 den

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4} n^2 \|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_p M}(X)$$

olup $R^m(c)$ uzay formunun Ricci eğriliği $(n-1)c$ olduğundan

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{4}{n^2} \{Ric(X) - (n-1)c\}$$

elde edilir. Böylece (a) ispatlanır.

(3.4.8) den (3.4.12) de eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\sigma_{12}^r = \dots = \sigma_{12} = 0 \text{ ve } \sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r = \dots = \sigma_{nn}^r, \quad r = n+1, \dots, m \quad (3.4.13)$$

dir. $H(p) = 0$ ise (3.4.8) den $X = e_1$, p noktasında kısmi null uzayında yatar.

Tersine $X = e_1$, p noktasının kısmi null uzayında ise $H(p) = 0$ dır. Böylece (b) ispatlanır.

Şimdi kabul edelim ki p noktasındaki tüm birim tanjant vektörleri tarafından (3.4.7) deki eşitlik sağlansın. Bu durumda her $r = n + 1, \dots, m$ için

$$\sigma_{ij}^r = 0, \quad i \neq j \quad (3.4.14)$$

$$\sigma_{11}^r + \dots + \sigma_{nn}^r - 2\sigma_{ii} \dots, n \quad (3.4.15)$$

dir.

(3.4.14) ve (3.4.15) durumunun sağlanması p nin bir total geodezik noktası olduğunu veya $n = 2$ ve p nin bir total umbilik nokta olduğunu gösterir. Böylece (c) ispatlanır. \square

Sonuç 3.4.2. $\phi : M^n \rightarrow E^m$, M^n Riemann manifoldundan E^m Öklidyen m -uzayına bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda $X \in T_p^\perp M$ için

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{4}{n^2} \max\{Ric(X)\}$$

dir [14].

İspat. Teorem 3.4.2 den

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{4}{n^2} \{Ric(X) - (n-1)c\}$$

olup E^m öklid uzayının Ricci eğriliği sıfır olduğundan

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{4}{n^2} \max\{Ric(X)\}$$

elde edilir. \square

Bir Öklidyen m - uzayı içindeki, bir n - boyutlu manifoldunun bir immersiyonu $X : M^n \rightarrow E^m$ için Beltramy formülü $\Delta X = -nH$ dir. Bu yüzden M minimaldir ancak ve ancak M kompakt değildir. k koordinat fonksiyonları, M üzerindeki indirgenmiş metriğe göre harmonik fonksiyonlardır. Eğer $X : M^n \rightarrow E^m$ bir minimal bir immersiyon ise, M kompakt değildir.

Teoremden eğer M bir Öklidyen uzayının bir minimal altmanifolduysa, M 'nin Ricci tensörü, negatif semi-definitir.

Örnek 3.4.1. N^{n-1} , bir öklidyen $(m-1)$ - uzay E^{m-1} 'in, $(n-1)$ boyutlu bir minimal altmanifoldu olsun. Çarpım altmanifoldu, $M^n = N^{n-1} \times E^1$, $Ric = 0$ için sağlandığında E^m nin bir minimal altmanifoldudur.

3.5 Quasi-Sabit Eğrilikli ve Nearly Quasi-Sabit Eğrilikli Uzayların Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler

Bu alt bölümde sabit eğrilikli, quasi-sabit eğrilikli ve nearly quasi sabit eğrilikli uzayların altmanifoldları üzerinde temel eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 3.5.1. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, $(m+n)$ - boyutlu quasi-sabit eğrilikli Riemann manifold ve M de n - boyutlu ($n \geq 3$) bir altmanifold olsun.

$$\delta_M(x) \leq (n-2) \left[\frac{n^2}{2(n-1)} \|H\|^2 + (n+1) \cdot \frac{a}{2} \right] + b[(n-1) \cdot \|P^T\|^2 - \|P_\pi\|^2] \quad (3.5.1)$$

dir. Burada, π , $T_x M$ nin bir 2- düzlem kesitidir ve $x \in M$ dir. Bir $x \in M$ noktasında eşitsizliğinin, (3.5.1) daki eşitlik durumu sağlanır, ancak ve ancak, burada $T_x M$ nin $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ şeklinde bir ortonormal bazı ve $T_x^\perp M$ nin $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ şeklindeki bir ortonormal bazı vardır, öyleki x in, N deki M nin şekil operatörleri,

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}, \quad a + b = \mu$$

$$A_{e_{n+i}} = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \dots & 0 \\ h_{12}^r & -h_{11}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 \leq i \leq m$$

Burada $h_{ij}^r = g(h(e_i, e_j), e_r)$, $1 \leq i, j \leq n$ ve $n+1 \leq r \leq n+m$ dir [37].

İspat. $x \in M$ ve $T_x M$ ve $T_x^\perp M$ nin sırasıyla ortonormal bazları $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ olsun.

$X = W = e_i$, $Y = Z = e_j$ için,

$$a + b[g(P^T, e_j)^2 + g(P^T, e_i)^2] = R(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ + g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) - g(h(e_i, e_i), h(e_j, e_j))$$

. olduğu görülür.

$1 \leq i, j \leq n$ için toplam ile, üstteki eşitlikten

$$2\tau + \tau\|h\|^2 - n^2\|H\|^2 = 2b(n-1)\|P^T\|^2 + (n^2 - n)a \quad (3.5.2)$$

sonucuna varılır.

Burada;

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j))$$

dir.

$$\varepsilon = 2\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1}\|H\|^2 - (n^2 - n)a - 2b(n-1)\|P^T\|^2 \quad (3.5.3)$$

almırsa,

(3.5.2) ve (3.5.3) den

$$n^2\|H\|^2 = (n-1)(\|h\|^2 + \varepsilon) \quad (3.5.4)$$

elde edilir.

$x \in M$, $\pi \subset T_x M$, $\text{boy}\pi = 2$, $\pi = \text{Sp}\{e_1, e_2\}$ alalım.

$e_{n+1} = \frac{H}{\|H\|}$ ve (3.5.4) eşitlikten

$$\left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left(\sum_{i,j=1}^n \sum_{r=n+1}^{n+m} (h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right),$$

elde edilir veya buna eşdeğer olarak,

$$\left(\sum_{i=1}^n h_{ii}^{n+1}\right)^2 = (n-1)\left\{\sum_{i=1}^n (h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=n+2}^{n+m} (h_{ij}^r)^2 + \varepsilon\right\} \quad (3.5.5)$$

elde edilir. Lemma 2.2.1. kullanılırsa, (3.5.5) den

$$2h_{11}^{n+1}h_{22}^{n+1} \geq \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=n+2}^{n+m} (h_{ij}^r)^2 + \varepsilon \quad (3.5.6)$$

elde edilir.

$X = W = e_1$, $Y = Z = e_2$ için Gauss denklemi,

$$\begin{aligned} K(\pi) &= R(e_1, e_2, e_2, e_1) = a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] \\ &+ \sum_{r=n+1}^m [h_{11}^r h_{22}^r - (h_{12}^r)^2] \\ &\geq a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] + \frac{1}{2} \left[\sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=n+2}^{n+m} (h_{ij}^r)^2 + \varepsilon \right] \\ &+ \sum_{r=n+2}^{n+m} h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{n+m} (h_{12}^r)^2 = a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=n+2}^{n+m} (h_{ij}^r)^2 + \frac{1}{2} \varepsilon + \sum_{r=n+2}^{n+m} h_{11}^r h_{22}^r - \sum_{r=n+1}^{n+m} (h_{12}^r)^2 \\ &= a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=n+2}^{n+m} \sum_{i,j>2} (h_{ij}^r)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=n+2}^{n+m} (h_{11}^r + h_{22}^r)^2 + \sum_{j>2} [(h_{1j}^{n+1})^2 + (h_{2j}^{n+1})^2] + \frac{1}{2} \varepsilon \\ &\geq a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

eşitliğini verir.

Bu da

$$K(\pi) \geq a + b[g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2] + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.5.7)$$

olduğunu gösterir. Ayrıca

$$g(P^T, e_1)^2 + g(P^T, e_2)^2 = \|P_\pi\|^2$$

dir.

(3.5.3) kullanıldığında, (3.5.7) den

$$K(\pi) \geq \tau - (n-2) \left[\frac{n^2}{2(n-1)} \|H\|^2 + (n-1) \frac{a}{2} \right] + b[\|P_\pi\|^2 - (n-1)\|P^T\|^2]$$

elde edilir. Bu ise iddiamın kendisidir. \square

Sonuç 3.5.1. *Teorem 3.5.1. deki gibi aynı kabuller altında, eğer P , M ye teğet ise*

$$\delta_M(x) \leq (n-2) \left[\frac{n^2}{2(n-1)} \|H\|^2 + (n+1) \frac{a}{2} \right] + b[(n-1) - \|P_\pi\|^2]$$

olur. Eğer P , M ye normal ise

$$\delta_M(x) \leq (n-2) \left[\frac{n^2}{2(n-1)} \|H\|^2 + (n+1) \cdot \frac{a}{2} \right]$$

olur.

Teorem 3.5.2. *$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, $(m+n)$ - boyutlu quasi-sabit eğrilikli Riemann manifold ve M de n - boyutlu ($n \geq 3$) bir altmanifold olsun. O halde,*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n \cdot (n-1)} - a - \frac{2b}{n} \|P^T\|^2 \quad (3.5.8)$$

dir [37].

İspat. $x \in M$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $T_x M$ bir ortonormal bazı olsun. (3.5.2) bağıntısı;

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \|h\|^2 - (n^2 - n)a - 2b(n-1) \|P^T\|^2 \quad (3.5.9)$$

ile eşdeğerdir.

$x \in M$ noktasında $e_{n+1} = \frac{H}{\|H\|}$ olmak üzere $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$ ortonormal bazını alalım. Bu durumda $A_{e_{n+1}}$ şekil operatörünü köşegenleştirilmiş,

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad (3.5.10)$$

şeklini alır.

$$Ae_r = (\sigma_{ij}^r), \quad i, j = 1, \dots, n; \quad r = n+2, \dots, n+m, \quad izA_r = 0 \quad (3.5.11)$$

olduğundan (3.5.9) dan,

$$n^2 \|H\|^2 = 2\tau + \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{r=n+2}^{n+m} \sum_{j=1}^n (\sigma_{ij}^r)^2 - n(n-1)a - 2b(n-1) \|P^T\|^2 \quad (3.5.12)$$

elde edilir. Ayrıca

$$0 \leq \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 = (n-1) \sum_i a_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i a_j$$

olduğundan,

$$n^2 \|H\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (3.5.13)$$

denklemini elde ederiz.

Bu da

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq n \|H\|^2$$

olması demektir.

(3.5.12) den

$$n^2 \|H\|^2 \geq 2\tau + n \|H\|^2 - n(n-1)a - 2b(n-1) \|P^T\|^2$$

eşitsizliğine sahip oluruz veya buna eşdeğer olarak

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - a - \frac{2b}{n} \|P^T\|^2 \quad (3.5.14)$$

yazabiliriz. Buda teoremi ispatlar. \square

Sonuç 3.5.2. *Teorem 3.5.2. deki gibi aynı varsayımlar altında, eğer P , M ye teğet ise;*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - a - \frac{2b}{n}$$

olur [37].

Lemma 3.5.1. *\widetilde{M} m - boyutlu bir nearly quasi- sabit eğrilikli manifold, M de n - boyutlu bir altmanifold olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı ve e_r de, $T_p^\perp M$ normal uzayının $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ ortonormal bazına ait bir vektör olsun. O halde*

$$\widetilde{K}_{ij} = c + d\{B(e_i, e_i) + B(e_j, e_j)\} \quad (3.5.15)$$

$$\widetilde{Ric}_{T_p M}(e_j) = (n-1)c + \text{diz}(B|_M) + (n-2)dB(e_j, e_j) \quad (3.5.16)$$

ve

$$\widetilde{\tau}(T_p M) = \frac{1}{2}n(n-2)c + (n-1)\text{diz}(B|_M) \quad (3.5.17)$$

olur [35].

İspat. (3.5.2) den (3.5.10) denklemini bulunur. $\widetilde{Ric}(T_p M)(e_i) = \sum_{j \neq i}^n \widetilde{K}_{ij}$ kullanılırsa (3.5.15) den (3.5.16) yı elde ederiz. Sonra $2\widetilde{\tau}(T_p M) = \sum_{i=1}^n \widetilde{Ric}(T_p M)(e_i)$ kullanılırsa (3.5.16) dan (3.5.17) yi elde ederiz. \square

Şimdi, nearly quasi-sabit eğrilikli bir manifoldun Chen Ricci eşitsizliklerini bulalım.

Teorem 3.5.3. \widetilde{M} m - boyutlu bir nearly quasi- sabit eğrilikli manifold, M de n - boyutlu bir altmanifold olsun. Böylece aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $X \in T_p^1 M$ ise,

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2 \|H\|^2 + (n-1)c + d(\text{iz}(B|_M) + (n-2)B(X, X)) \quad (3.5.18)$$

olur [35].

b) Eğer $H(P) = 0$ ise, $X \in T_p^1 M$ (3.5.18) nin eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.

c) (3.5.18) nin eşitlik durumu $\forall X \in T_p^1 M$ için sağlanır ancak ve ancak ya p bir total geodezik noktadır ya da $n = 2$ ve p bir total umbulik noktadır [35].

İspat. Lemma 3.5.1. deki Chen Ricci eşitsizliği olan (3.5.16) kullanılarak (3.5.18) eşitsizliği bulunur. İspatın geri kalan kısmı ise Teorem 3.4.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır. \square

(3.5.18) de $B = A \otimes A$ kullanılırsa, aşağıdaki sonuç bulunur.

Sonuç 3.5.3. \widetilde{M} m - boyutlu bir quasi- sabit eğrilikli manifold, M de n - boyutlu bir altmanifold olsun. Böylece aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Eğer $X \in T_p^1 M$ ise,

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c + d(iz(A \otimes A) + (n-2)A(X)A(X)) \quad (3.5.19)$$

olur.

b) Eğer $H(P) = 0$ ise, $X \in T_p^1 M$ (3.5.19) nin eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.

c) (3.5.19) nin eşitlik durumu $\forall X \in T_p^1 M$ için sağlanır ancak ve ancak ya p bir total geodezik noktadır ya da $n = 2$ ve p bir total umbilik noktadır.

(3.5.18) de, $d = 0$ alınırsa, reel bir uzay formunun altmanifoldları için, Teorem 3.4.2 elde edilir.

Teorem 3.5.4. Bir Riemann manifoldun n - boyutlu bir M altmanifoldu için

$$\tau_N(p) \leq \|H\|^2 + \tilde{\tau}_N(T_p M) \quad (3.5.20)$$

dir. Burada τ_N , M nin p deki normalize skalar eğriliğidir ve $\tau_N(T_p M)$, \tilde{M} ambient manifoldundaki $T_p M$ nin normalize skalar eğriliğini gösterir. (3.5.20) teki eşitlik ancak ve ancak p total bir umbilik nokta iken sağlanır [35].

Teorem 3.5.5. \tilde{M} nearly quasi sabit eğrilikli manifoldunun, n - boyutlu bir altmanifoldu için, herhangi bir $p \in M$ noktasında

$$\tau(p) \leq \frac{n(n-1)}{2}\|H\|^2 + \frac{1}{2}n(n-1)c + (n-1)d iz(B|_M) \quad (3.5.21)$$

$$\tau(p) \leq \|H\|^2 + c + \frac{2}{n}d iz(B|_M) \quad (3.5.22)$$

eşitsizlikleri vardır ancak ve ancak p total umbilik bir noktadır [35].

4. KOMPLEKS UZAY FORMLARININ ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNDE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde kompleks uzay formlarının ve genelleştirilmiş kompleks uzay formların altmanifoldları üzerinde eşitsizlikler kurularak altmanifoldların karakterizasyonları ile ilgili teoremler ve sonuçlar verildi.

4.1 Kompleks Uzay Formların Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $\widetilde{M}(4c)$ kompleks m - boyutlu kompleks uzay form ve M de n - boyutlu altmanifoldu olsun. Bu durumda

i) Her $X \in T_p^1 M$ için

$$Ric(X) \leq (n-1)c + \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + \frac{3}{2}c\|PX\|^2 \quad (4.1.1)$$

dır.

ii) Eğer $H(p) = 0$ ise p noktasında bir X tanjant vektörü eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.

iii) Her $X \in T_p^1 M$ için eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak p bir total geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p bir total umbilik noktadır [38].

İspat. $X \in T_p^1 M$ olsun. $e_1 = X$ olmak üzere $T_p M$ nin bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazını seçelim. (2.2.5) denkleminde

$$n^2\|H\|^2 = 2\tau + \|\sigma\|^2 - c[n(n-1) + 3\|P\|^2] \quad (4.1.2)$$

elde edilir. (4.1.2) den

$$\begin{aligned}
n^2\|H\|^2 &= 2\tau + \sum_{r=n+1}^{2m} [(\sigma_{11}^r)^2 + (\sigma_{22}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r)^2] \\
&+ 2 \sum_{i<j} (\sigma_{ij}^r)^2 - 2 \sum_{r=n+1}^{2m} \sum_{2\leq i<j\leq n} \sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - c[n(n-1) + 3\|P\|^2] \\
&= 2\tau + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{2m} [(\sigma_{11}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r)^2 + (\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \cdots - \sigma_{nn}^r)^2] \\
&+ 2 \sum_{r=n+1}^{2m} \sum_{i<j} (\sigma_{ij}^r)^2 - \sum_{r=n+1}^{2m} \sum_{2\leq i<j\leq n} \sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r \\
&- c[n(n-1) + 3\|P\|^2]
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir. (2.2.5) denkleminde

$$K_{ij} = \sum_{r=n+1}^{2m} [\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2] + c[3g^2(e_i, J e_j)] \tag{4.1.4}$$

olduğundan toplam alınırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} &= \sum_{r=n+1}^{2m} \sum_{2\leq i<j\leq n} [\sigma_{ii}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2] \\
&+ \frac{(n-1)(n-2)}{2} c + \frac{3c}{2} (\|P\|^2 - \|P e_1\|^2)
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. (4.1.5) i (4.1.3) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
n^2\|H\|^2 &\geq 2\tau + \frac{1}{2} n^2\|H\|^2 + 2 \sum_{r=n+1}^{2m} \sum_{J=2} (\sigma_{1j}^r)^2 \\
&- 2 \sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} - [(n-1)(n-2) - n(n-1)]c - 3c\|P e_1\|^2
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olur. Buradan ise

$$\frac{1}{2} n^2\|H\|^2 \geq 2Ric(X) - (n-1)c - 3c\|PX\|^2 \tag{4.1.7}$$

sonucuna ulaşılır bu (i) nin ispatıdır.

(ii) $H(p) = 0$ olsun. (4.1.1) da eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \sigma_{12}^r = \cdots = \sigma_{1n}^r = 0 \\ \sigma_{11}^r = \sigma_{22}^r + \cdots + \sigma_{nn}^r, \quad r \in \{n+1, \dots, 2m\} \end{cases} \tag{4.1.8}$$

dır. Bu durumda $\sigma_{1j}^r = 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $r \in \{n+1, \dots, 2m\}$ dır. Bu ise $X \in N_p$ olması demektir.

(iii) Her $X \in T_p^1 M$ için eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^r = 0 & i \neq j, r \in \{n+1, \dots, 2m\} \\ \sigma_{11}^r + \dots + \sigma_{nn}^r - 2\sigma_{ij}^r = 0, & i \in \{1, \dots, n\}, r \in \{n+1, \dots, 2m\} \end{cases} \quad (4.1.9)$$

dır. Burada iki farklı durum vardır:

a) $n \neq 2$, bu durumda p bir total geodezik noktadır.

b) $n = 2$ ve p bir total umbilik noktadır. Bu durumun tersinin ispatı aşıkardır. \square

Teorem 4.1.2. *M , holomorfik kesit eğriliği $4c$ olan bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(4c)$ nin n - boyutlu altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\|H\|^2 \geq \frac{2\tau}{n(n-1)} - c - \frac{3c\|P\|^2}{n(n-1)} \quad (4.1.10)$$

dir [38].

İspat. $p \in M$ ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olsun. (2.2.5) denkleminde $X = Z = e_i$, $Y = W = e_j$ alınır ve toplam alınırsa

$$n^2\|H\|^2 = 2\tau + \|h\|^2 - c[n(n-1) + 3\|P\|^2] \quad (4.1.11)$$

elde edilir. $p \in M$ noktasında $T_p \widetilde{M}$ nin, e_{n+1} vektörü ortalama eğrilik vektörü $H(p)$ ye paralel olacak şekilde $(e_{n+1} = \frac{H}{\|H\|}) \{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2m}\}$ ortonormal bazını seçelim ve diyagonalleştirilmiş şekil operatörü A_{n+1}

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (4.1.12)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca,

$$A_{e_r} = [\sigma_{ij}^r]; \quad i, j = 1, \dots, n; \quad r = n+2, \dots, 2m; \quad I_z A_{e_r} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ii}^r = 0 \quad (4.1.13)$$

olur. (4.1.11) den

$$n^2\|H\|^2 = 2\tau + \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{r=n+2}^{2m} \sum_{i,j=1}^n (\sigma_{ij}^r)^2 - c[n(n-1) + 3\|P\|^2] \quad (4.1.14)$$

elde edilir. Ayrıca

$$0 \leq \sum_{i<j} (a_i + a_j) = (n-1) \sum_{i=1}^n (a_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j$$

olduğundan

$$n^2\|H\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n (a_i)^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j \leq n \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \quad (4.1.15)$$

olur. Buradan ise (4.1.14) den

$$n^2\|H\|^2 \geq 2\tau + n\|H\|^2 - c[n(n-1) + 3\|P\|^2]$$

veya buna eşdeğer olan (4.1.10) elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu teoremden θ - slant altmanifoldlar için aşağıdaki sonuç elde edilir. \square

Sonuç 4.1.1. M , kompleks uzay form $\widetilde{M}(4c)$ nin n - boyutlu θ - slant altmanifoldu olsun. Bu durumda

i) Her $X \in T_p M$ için

$$\text{Ric}(X) \leq (n-1)c + \frac{n^2}{4}\|H\|^2 + 3\cos^2\theta$$

dir.

ii) Eğer $H(p) = 0$ ise p noktasında bir birim tanjant vektör alanı eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.

iii) Her $X \in T_p^1 M$ için eşitlik durumu sağlanır ancak ve ancak ya p total bir geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p bir total umbilik noktadır.

Tanım 4.1.1. \widetilde{M} bir Kaehler manifold ve M de \widetilde{M} nin bir Lagrangian altmanifoldu olsun. Eğer M nin ikinci temel formu σ , bir ortonormal baz $\{e_1, \dots, e_n\}$ için

$$\sigma(e_1, e_1) = \lambda I e_1 = \lambda e_1^*, \quad \sigma(e_2, e_2) = \dots, \quad \sigma(e_n, e_n) = \mu J e_1 = \mu e_1^*$$

$$\sigma(e_1, e_j) = \mu J e_j, \quad \sigma(e_j, e_k) = 0, \quad j \neq k, \quad j, k = 2, \dots, n$$

şartını sağlıyor ise M ye Lagrangian H - umbilik altmanifold denir, burada λ ve μ reel sayılardır ve λ ve μ nin durumu alınan ortonormal bazlara göre değişir [39].

Teorem 4.1.3. M , bir kompleks uzay form $\widetilde{M}(4c)$ nin n - boyutlu ($n \geq 2$) bir Lagrangian altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in T_p^1 M$ için

$$Ric(X) \leq (n-1)\left(c + \frac{n}{4}\|H\|^2\right) \quad (4.1.16)$$

dir. Eşitlik durumunun p noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart ya p total geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p , $\lambda = 3\mu$ ile H - umbilik noktadır [39].

İspat. p , M de bir nokta ve $X \in T_p^1 M$ olsun. $e_1 = X$ olacak şekilde $T_p M$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{J e_1, \dots, J e_n\}$ de $T_p^1 M$ nin bir ortonormal bazı olsun. (2.2.5) Gauss denkleminde

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(e_1, e_j, e_1, e_j) &= R(e_1, e_j, e_1, e_j) - \langle \sigma(e_1, e_1) \sigma(e_j, e_j) \rangle \\ &\quad + \langle \sigma(e_1, e_j) \sigma(e_1, e_j) \rangle \end{aligned}$$

veya

$$\widetilde{R}(e_1, e_j, e_1, e_j) = R(e_1, e_j, e_1, e_j) - \sum_{r=1}^n (\sigma_{11}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{1j}^r)^2), \quad j = 2, \dots, n$$

elde edilir. \widetilde{M} nin holomorfik $4c$ - kesit eğrilikli olduğu gözönüne alınır ve $j = 2, \dots, n$ toplam alınır

$$(n-1)\frac{c}{4} = Ric(X) - \sum_{r=1}^n \sum_{j=2}^n (\sigma_{11}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{1j}^r)^2)$$

elde edilir. Bu son denklemden ise

$$\begin{aligned} Ric(X) - (n-1)\frac{c}{4} &= \sum_{r=1}^n \sum_{j=2}^n (\sigma_{11}^r \sigma_{jj}^r - (\sigma_{1j}^r)^2) \\ &\leq \sum_{r=1}^n \sum_{j=2}^n \sigma_{11}^r \sigma_{jj}^r - \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^1)^2 - \sum_{j=2}^n (\sigma_{1j}^j)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\sigma_{jk}^i = \sigma_{ik}^j$ olduğu gözönüne alınırsa

$$Ric(X) - (n-1)\frac{c}{4} = \sum_{r=1}^n \sum_{j=2}^n (\sigma_{11}^r \sigma_{jj}^r - \sum_{j=2}^n (\sigma_{11}^j)^2 - \sum_{j=2}^n (\sigma_{jj}^1)^2) \quad (4.1.17)$$

olarak yazabiliriz. Şimdi

$$f_1(\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \dots, \sigma_{nn}^1) = \sigma_{11}^1 \sum_{j=2}^n \sigma_{jj}^1 - \sum_{j=2}^n (\sigma_{jj}^1)^2$$

$$f_r(\sigma_{11}^r, \sigma_{22}^r, \dots, \sigma_{nn}^r) = \sigma_{11}^r \sum_{j=2}^n \sigma_{jj}^r - (\sigma_{11}^r)^2$$

diyelim. M nin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(e_i, e_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H^i J e_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n \sigma_{ii}^r J e_r$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$nH^1 = \sigma_{11}^1 + \sigma_{22}^1 + \dots + \sigma_{nn}^1$$

elde edilir. Lemma 2.2.3 ün uygulanmasıyla

$$f_1(\sigma_{11}^1, \sigma_{22}^1, \dots, \sigma_{nn}^1) \leq \frac{n-1}{4n} (nH^1)^2 = \frac{n(n-1)}{4} (H^1)^2 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Benzer şekilde Lemma 2.2.4 ün uygulanmasıyla $2 \leq r \leq n$ için

$$f_r(\sigma_{11}^r, \sigma_{22}^r, \dots, \sigma_{nn}^r) \leq \frac{1}{8} (nH^r)^2 = \frac{n^2}{8} (H^r)^2 \leq \frac{n(n-1)}{4} (H^r)^2 \quad (4.1.19)$$

elde edilir. (4.1.17), (4.1.18) ve (4.1.19) dan

$$Ric(X) - \frac{n-1}{4}c \leq \frac{n(n-1)}{4} \sum_{r=1}^n (H^r)^2 = \frac{n(n-1)}{4} \|H\|^2$$

sonucuna ulaşılır ve bu ise (4.1.16) eşitsizliğinin elde edilmesi demektir.

Şimdi kabul edelimki $n \geq 3$ ve bir $X \in T_p^1 M$ için (4.1.16) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlansın. Buna göre (4.1.19) dan $r \geq 2$ için $H^r = 0$ olur veya bu ortalama eğrilik vektörü $J e_1$ ' e paralel olur. Lemma 2.2.4 ve bu durum gözönüne alınırsa her $j \geq 2$ için,

$$\sigma_{1j}^1 = \sigma_{11}^j = \frac{nH^j}{4} = 0$$

elde edilir. (4.1.17) den $\sigma_{jk}^1 = 0$ matrisi, $\sigma_{11}^1 = (n+1)a$ ve $\sigma_{jj}^1 = a, \forall j \geq 2$ ile diagonaldır, burada $a = \frac{H^1}{2}$ dir.

(4.1.17) de $Ric(X) = Ric(e_1)$ de yaptığımız gibi $Ric(e_2)$ yi hesaplırsak, eşitsizliğin eşitlik durumunda $\sigma_{2j}^r = \sigma_{jr}^2 = 0, r \neq 2, j \neq 2, r \neq j$, elde edilir. Eşitlik durumu ve Lemma 2.2.3 den

$$\frac{\sigma_{11}^2}{n+1} = \sigma_{22}^2 = \dots = \sigma_{nn}^2 = \frac{H^2}{2} = 0$$

olduğu sonucuna varırız. Her $X \in T_p^1 M$ için eşitlik sağlandığından bu durum σ_{jk}^r matrisi için de geçerlidir. Sonuç olarak $\sigma_{2j}^2 = \sigma_{22}^j = \frac{H^j}{2} = 0, j \geq 3$, elde edilir.

Ayrıca (σ_{jk}^2) matrisinin sıfırdan farklı sadece iki bileşeni vardır ve bunlar

$$\sigma_{1r}^r = \sigma_{r1}^r = \sigma_{rr}^1 = \frac{H^1}{2}, r \geq 3$$

dir.

Şimdi $Ric(e_2)$ yi aşağıdaki şekilde hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(e_2, e_j, e_2, e_j) &= R(e_2, e_j, e_2, e_j) - \langle \sigma(e_2, e_2), \sigma(e_j, e_j) \rangle \\ &\quad + \langle \sigma(e_2, e_j), \sigma(e_2, e_j) \rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$\tilde{R}(e_2, e_j, e_2, e_j) = R(e_2, e_j, e_2, e_j) - \frac{H^1}{2}, j \geq 3 \quad (4.1.20)$$

elde edilir.

$$\tilde{R}(e_2, e_1, e_2, e_1) = R(e_2, e_1, e_2, e_1) - \langle \sigma(e_2, e_2), \sigma(e_1, e_1) \rangle + \langle \sigma(e_2, e_1), \sigma(e_2, e_1) \rangle$$

olduğundan

$$\tilde{R}(e_2, e_1, e_2, e_1) = R(e_2, e_1, e_2, e_1) - (n+1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2 + \left(\frac{H^1}{2}\right)^2 \quad (4.1.21)$$

elde edilir. (4.1.20) ve (4.1.21) den

$$Ric(e_2) - \frac{(n-1)c}{4} = (n+1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2 - \left(\frac{H^1}{2}\right)^2 + (n-2)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2$$

$$= 2(n-1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2$$

sonucuna varırız. Diğer taraftan eşitlik kabulünden

$$Ric(e_2) - \frac{(n-1)c}{4} = \frac{n(n-1)c}{4}\|H^2\| = n(n-1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2$$

bu son iki eşitlikten

$$n(n-1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2 = 2(n-1)\left(\frac{H^1}{2}\right)^2$$

ifadesine sahip oluruz. $n \neq 1$ olduğundan ya $H^1 = 0$ veya $n = 2$ dir.

Eğer $H^1 = 0$ ise (h_{jk}^r) lerin tamamı sıfırdır ve p bir total geodezik noktadır. Eğer $n = 2$ ise bu durumda, $\lambda = 3\mu = \frac{3H^1}{2}$ olmak üzere

$$\sigma(e_1, e_1) = \lambda J e_1, \quad \sigma(e_2, e_2) = \mu J e_1$$

$$\sigma(e_1, e_2) = \lambda J e_1 = \mu J e_2$$

dir ve bu ise p nin total umbilik nokta olması demektir. □

Bu teoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.2. *Bir $\widetilde{M}(c)$ kompleks uzay formun n - boyutlu Lagrangian altmanifoldu M ($n \geq 2$) olsun.*

Eğer herhangi bir $X \in T_p^1 M$, $p \in M$, için

$$Ric(X) = \frac{n-1}{4}(c + n\|H\|^2)$$

eşitliği sağlanıyor ise bu durumda ya M total geodezik veya $n = 2$ ve M , H -umbilik noktadır [39].

4.2 Genelleştirilmiş Kompleks Uzay Formlarının

Altmanifoldları Üzerinde Chen Eşitsizlikleri

Chen-Ricci Eşitsizliği

M , $\widetilde{M}(f_1, f_2)$ genelleştirilmiş kompleks uzay formunun n -boyutlu bir altmanifoldu

olsun. Bu durumda Gauss denkleminde

$$R(X, Y, Z, W) = f_1\{\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle\} \\ + f_2\{\langle X, PZ \rangle \langle PY, W \rangle - \langle Y, PZ \rangle \langle PX, W \rangle + 2\langle X, PY \rangle \langle PZ, W \rangle\}$$

dir [10]. Buradan $X \in T_p^1 M$ için

$$\widetilde{Ric}_{T_p M}(X) = \sum_{j=1}^n R(X, e_j, e_j, X) = \sum_{j=1}^n f_1\{\langle X, X \rangle \langle e_j, e_j \rangle - \langle X, e_j \rangle \langle e_j, X \rangle\} \\ + f_2\{\langle X, Pe_j \rangle \langle Pe_j, X \rangle - \langle e_j, Pe_j \rangle \langle PX, X \rangle + 2\langle X, Pe_j \rangle \langle Pe_j, X \rangle\}$$

olur. Burada $\|P\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \langle e_j, Pe_j \rangle^2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\widetilde{Ric}_{T_p M}(X) = (n-1)f_1 + 3f_2\|PX\|^2 \quad (4.2.1)$$

elde edilir.

Eğer M, \widetilde{M} hemen hemen Hermiten manifoldun bir generik altmanifoldu, $X \in TM$ için $U^1, U^0, U^{\lambda_1}, \dots, U^{\lambda_k}$ sırasıyla TM nin $D^1, D^0, D^{\lambda_1}, \dots, D^{\lambda_k}$ distribüsyonlarına taşıyan ortogonal projeksiyon operatörleri olmak üzere

$$X = U^1 X + U^0 X + U^{\lambda_1} X + \dots + U^{\lambda_k} X$$

olsun. $P^2 X + \lambda^2 X = 0$ olduğundan

$$P^2 X = U^1 X - \lambda_1^2(U^{\lambda_1} X) - \dots - \lambda_k^2(U^{\lambda_k} X)$$

olup

$$\|PX\|^2 = \langle PX, PX \rangle = -\langle P^2 X, X \rangle = \sum_{\lambda \in \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}} \lambda^2 \|U^\lambda X\|^2 \quad (4.2.2)$$

olur. Ayrıca M, θ -Slant altmanifold ise $D^1 = D^0 = \{O\}, k = 1$ dir. Bu durumda $\forall X \in T_p M$ vektörü için

$$\|PX\|^2 = \cos^2 \theta$$

dır [21].

Teorem 4.2.1. M , bir Riemann manifoldunun n -boyutlu altmanifoldu olsun. Bu durumda

(a) $X \in T_p^1 M$ için

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{(T_p M)}(X) \quad (4.2.3)$$

dır öyleki burada $\widetilde{Ric}_{(T_p M)}(X)$, $X \in T_p^1 M$ de M nin n - Ricci eğriliğidir.

(b) $X \in T_p^1 M$ için (4.2.3) nin eşitlik durumu sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & Y \in T_p M, \quad Y \perp X, \quad X \in T_p^1 M, \\ \sigma(X, X) = \frac{n}{2}H(p) \end{cases} \quad (4.2.4)$$

olmasıdır.

(c) (4.2.3) de eşitlik durumu her $X \in T_p^1 M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya p , M nin total geodezik noktasıdır veya $n = 2$ ve p , M nin total umbilik noktasıdır [22].

Teorem 4.2.2. \widetilde{M} nin n -boyutlu bir altmanifoldu M ve $X \in T_p^1 M$ olsun.

Aşağıdaki tablodaki eşitsizlikler sağlanır.

	<i>Manifold</i>	<i>Altmanifold</i>	<i>Eşitsizlik</i>
(1)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)f_1 + 3f_2\ PX\ ^2$
(2)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	<i>Generik</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)f_1$ $+3f_2 \sum_{\lambda \in \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}} \lambda^2\ U^\lambda X\ ^2$
(3)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	θ - <i>slant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)f_1 + 3f_2 \cos^2 \theta$
(4)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	<i>anti-invariant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)f_1$
(5)	$\widetilde{M}(f_1, f_2)$	<i>invariant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)f_1 + 3f_2$
(6)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\ H\ ^2 + (n-1)(c+3\alpha)$ $+3(c-\alpha)\ PX\ ^2\}$
(7)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	<i>Generik</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}\{n^2\ H\ ^2 + (n-1)(c+3\alpha)\}$ $+ \frac{1}{4}\{3(c-\alpha) \sum_{\lambda \in \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}} \lambda^2\ U^\lambda X\ ^2\}$
(8)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	θ - <i>slant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)(c+\alpha)$ $+3(c-\alpha) \cos^2 \theta$
(9)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	<i>anti-invariant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)(c+3\alpha)$
(10)	$\widetilde{M}(c, \alpha)$	<i>invariant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n+2)c + 3(n-2)\alpha$
(11)	$\widetilde{M}(4c)$		$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)c + 3c\ PX\ ^2$
(12)	$\widetilde{M}(4c)$	<i>Generik</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)c$ $+3c \sum_{\lambda \in \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}} \lambda^2\ U^\lambda X\ ^2$
(13)	$\widetilde{M}(4c)$	θ - <i>slant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)c + 3c \cos^2 \theta$
(14)	$\widetilde{M}(4c)$	<i>anti-invariant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + (n-1)c$

(b) Tablodaki eşitsizliklerin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & Y \in T_p M, \quad Y \perp X, \quad X \in T_p^1 M, \\ \sigma(X, X) = \frac{n}{2}H(p). \end{cases} \quad (4.2.5)$$

dır. $X \in T_p M$ için eğer $H(p) = 0$ ise tablodaki eşitsizliklerin eşitlik durumu

sağlanır gerek ve yeter koşul $X \in N_p$ dir

(c) Tablodaki eşitsizliklerin eşitlik durumu her $X \in T_pM$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya p , M nin total geodezik noktasıdır veya $n = 2$ ve p , M nin total umbilik noktasıdır [21].

İspat. (4.2.3) den

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \widetilde{Ric}_{T_pM}(X)$$

ve \widetilde{M} genelleştirilmiş kompleks uzay formunun bir altmanifoldu M ise

$$\widetilde{Ric}_{T_pM}(X) = (n-1)f_1 + 3f_2\|PX\|^2$$

olduğundan tablodaki (1) eşitsizliği elde edilir. M generik bir altmanifold olduğunda

$$\|PX\|^2 = \sum_{\lambda \in \{1, \lambda_1, \dots, \lambda_k\}} \lambda^2 \|U^\lambda X\|^2 \quad (4.2.6)$$

olup (4.2.6) ifadesi tablodaki (1) de yazılacak olursa (2) elde edilir. M , θ -slant altmanifold olduğunda

$$\|PX\|^2 = \cos^2 \theta \quad (4.2.7)$$

olup (4.2.7) ifadesi (1) de yazılacak olursa (3) elde edilir. (3) de sırasıyla $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta = 0$ yazılacak olursa (4) ve (5) elde edilir. $f_1 = \frac{c+3\alpha}{4}$ ve $f_2 = \frac{c-\alpha}{4}$ sırasıyla (1) ve (5) de yerine yazılacak olursa (6) ve (10) elde edilir. Benzer olarak $f_1 = f_2 = 4c$, sırasıyla, (1) ve (4) de yerine yazılırsa (11) ve (14) elde edilir. (6) da (4.2.6) ifadesi yazılırsa (7) elde edilir. Yine (6) da (4.2.7) yazılacak olursa (8) elde edilir. (8) de $\theta = \frac{\pi}{2}$ yazılacak olursa (9) elde edilir. Son olarak (11) de (4.2.6) ve (4.2.7) yazılacak olursa (12) ve (13) elde edilir. \square

(Nearly) Kaehler manifoldların her invaryant altmanifoldu minimal olduğunda bu manifoldlar için Chen-Ricci eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

Teorem 4.2.3. $\widetilde{M}(4c)$ kompleks uzay formunun n -boyutlu invaryant bir altmanifoldu M olsun

$$Ric(X) \leq (n+2)c \quad (4.2.8)$$

dir.

(a) (4.2.8) eşitliği $X \in T_p^1 M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $X \in N_p$ dir.

(b) (4.2.8) eşitliği $X \in T_p^1 M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul p total geodezik noktadır [21].

İspat. Teorem 4.2.2 deki tablonun (13) eşitsizliğinden

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)c + 3c\cos^2\theta$$

dır. $M, \widetilde{M}(4c)$ kompleks uzay formunun invaryant bir altmanifoldu olduğunda $\theta = 0$ ve Kaehler manifoldun her invaryant altmanifoldu minimal olduğundan

$$Ric(X) \leq (n+2)c$$

elde edilir. Teorem 4.2.1 den (b) ve (c) nin ispatı açıktır. \square

4.3 Hemen Hemen Çarpım Riemann Manifoldlarının Slant Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler

Bu alt bölümde Riemann çarpım manifoldları ve Kaehler çarpım manifoldlarının altmanifoldları üzerinde Chen-Ricci eşitsizlikleri kurulacak ve bu uzayların altmanifoldlarının geometrik özellikleri incelenecektir.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, F)$ bir hemen hemen Riemann çarpım manifoldu ve (M, g) de bir altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için

$$FX = fX + wX \quad (4.3.1)$$

olarak yazılabilir, burada fX ve wX , FX in sırasıyla, teğet ve normal kısımlarıdır.

Eğer M, \widetilde{M} nin slant altmanifoldu ise bu durumda

$$\cos\theta = \frac{\langle FX, fX \rangle}{\|X\|\|fX\|} \quad (4.3.2)$$

ifadesi $\forall X \in \Gamma(TM)$ için sabittir.

Böylece hemen hemen Riemannian çarpım manifoldunun bir M altmanifoldu bir slant altmanifolddur ancak ve ancak

$$f^2 = \lambda I \quad (4.3.3)$$

şartını sağlayan bir $\lambda \in [0, 1]$ vardır. Eğer θ M nin slant açısı ise bu durumda

$$\lambda = \cos^2 \theta \quad (4.3.4)$$

dır. Bir slant altmanifoldda bir çarpım slant altmanifoldu denir. Şayet f endomorfizmi paralel ise, yani $\nabla f = 0$ ise, burada ∇ , M nin Levi-Civita konneksiyonudur [34], [40].

Örnek 4.3.1. 6 boyutlu öklid uzayı R^6 yı gözönüne alalım. Bu durumda,

$$F(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6) = (x^1, -x^2, x^3, -x^4, x^5, -x^6)$$

ile F , R^6 üzerinde bir hemen hemen çarpım yapıdır ve kolayca gösterilirki; $F^2 = I$ dir. R^6 nin bir M altmanifoldunu

$$x(u^1, u^2, u^3) = (u^1 \cos \theta, u^1 \sin \theta, u^2 \cos \theta, u^2 \sin \theta, u^3 \cos \theta, u^3 \sin \theta)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda u^i - lere göre kısmi türevler alınırsa

$$e_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 0, \cos \theta, \sin \theta, 0, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 0, 0, \cos \theta, \sin \theta)$$

ve

$$Fe_1 = (\cos \theta, -\sin \theta, 0, 0, 0, 0)$$

$$Fe_2 = (0, 0, \cos \theta, -\sin \theta, 0, 0)$$

$$Fe_3 = (0, 0, 0, 0, \cos \theta, -\sin \theta)$$

olur. Buradan,

$$\langle Fe_1, e_1 \rangle = \cos 2\theta, \quad \langle Fe_2, e_2 \rangle = \cos 2\theta, \quad \langle Fe_3, e_3 \rangle = \cos 2\theta,$$

$$\langle Fe_i, e_j \rangle = 0, \quad i \neq j \in \{1, 2, 3\}$$

ve

$$fe_1 = (\cos 2\theta)e_1, \quad fe_2 = (\cos 2\theta)e_2, \quad fe_3 = (\cos 2\theta)e_3,$$

elde edilir. Böylece M bir 2θ açılı θ - slant altmanifolddur.

Örnek 4.3.2. x^1, \dots, x^8 koordinatlarıyla belirli R^8 öklidyen uzayını düşünelim.

$$F(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1, x^2, x^3, x^4, -x^5, -x^6, -x^7, -x^8)$$

olmak üzere $F^2 = I$ dir ve F , R^8 üzerinde hemen hemen çarpım yapısıdır.

$$x(u^1, u^2, u^3, u^4) = (u^1 + u^2, u^1 + u^2, u^3 + u^4, u^3 + u^4, \sqrt{2}u^1, \sqrt{2}u^2, \sqrt{2}u^3, \sqrt{2}u^4)$$

ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Buradan

$$e_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, \sqrt{2}, 0, 0, 0),$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, \sqrt{2}, 0, 0),$$

$$e_3 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 0, 0, \sqrt{2}, 0),$$

$$e_4 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \sqrt{2}),$$

Böylece

$$Fe_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, -\sqrt{2}, 0, 0, 0),$$

$$Fe_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 0, -\sqrt{2}, 0, 0),$$

$$Fe_3 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 0, 0, -\sqrt{2}, 0),$$

$$Fe_4 = \frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, -\sqrt{2}),$$

$$\langle Fe_1, e_2 \rangle = \langle Fe_2, e_1 \rangle = \langle Fe_3, e_4 \rangle = \langle Fe_4, e_3 \rangle = \frac{1}{2}$$

ve

$$fe_1 = \frac{1}{2}e_2, \quad fe_2 = \frac{1}{2}e_1, \quad fe_3 = \frac{1}{2}e_4, \quad fe_4 = \frac{1}{2}e_3.$$

olur. Bundan dolayı M , $\theta = \frac{\pi}{3}$ slant açılı bir slant altmanifolddur.

Lemma 4.3.1. \widetilde{M} bir Riemann çarpım manifoldu ve M de bir slant altmanifoldu olsun.

Bu durumda, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\langle fX, fY \rangle = \cos^2 \theta \langle X, Y \rangle \quad (4.3.5)$$

ve

$$\langle wX, wY \rangle = \sin^2 \theta \langle X, Y \rangle \quad (4.3.6)$$

dir [40].

İspat. $\langle FX, Y \rangle = \langle X, FY \rangle$ olduğundan, burada (4.3.1) kullanılırsa

$$\langle fX, Y \rangle = \langle X, fY \rangle \quad (4.3.7)$$

elde edilir. Y yerine fY alınırsa

$$\langle fX, fY \rangle = \langle X, f^2Y \rangle$$

olur. (4.3.3) ve (4.3.4) ten (4.3.5) e ulaşılır.

Benzer şekilde

$$\langle FX, FY \rangle = \langle fX, fY \rangle + \langle wX, wY \rangle$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \langle wX, wY \rangle &= \langle X, Y \rangle - \langle fX, fY \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - \langle X, Y \rangle \cos^2 \theta \\ &= \langle X, Y \rangle \sin^2 \theta \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ise (4.3.6) nın ispatıdır. \square

Teorem 4.3.1. M bir hemen hemen çarpım Riemann manifoldunun n - boyutlu has (proper) slant altmanifoldu olsun. Bu durumda $p \in M$ için T_pM nin herhangi bir ortonormal bazı aşağıdaki şartları sağlar.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bazına ait herhangi bir e_a vektörü için, bu bazda bir e_b vektörü vardır öyleki

$$\langle fe_a, e_b \rangle = \langle e_a, fe_b \rangle = \cos \theta$$

$$\langle fe_a, e_c \rangle = \langle fe_b, e_c \rangle = 0 \quad c \neq a \text{ ve } c \neq b$$

dir [34].

İspat. İspatı tümevarım ile yapalım.

$n = 2$ için 2- boyutlu T_pM nin herhangi bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda

$$fe_1 = a_1e_1 + a_2e_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad (4.3.8)$$

olarak yazılır. Lemma 4.3.1 den

$$\langle fe_1, fe_2 \rangle = a_1^2 + a_2^2 = \cos^2 \theta \quad (4.3.9)$$

elde edilir. Böylece,

$$fe_1 = \cos \theta (\cos \varphi_1 e_1 + \sin \varphi_1 e_2), \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi] \quad (4.3.10)$$

olacak şekilde φ_1 vardır.

Benzer şekilde

$$fe_2 = \cos \theta (\cos \varphi_2 e_1 + \sin \varphi_2 e_2), \quad \varphi_2 \in [0, 2\pi] \quad (4.3.11)$$

olacak şekilde φ_2 vardır. $\langle fe_1, e_2 \rangle = \langle e_1, fe_2 \rangle$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\sin \varphi_1 = \cos \varphi_2 \quad (4.3.12)$$

elde edilir. $\langle fe_1, fe_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\cos^2 \theta (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = 0 \quad (4.3.13)$$

olur. M bir has (proper) slant altmanifold olduğundan,

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0 \quad (4.3.14)$$

olur. $\cos \varphi_2 = \sin \varphi_1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\sin \varphi_1 (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 0 \quad (4.3.15)$$

ve

$$\cos \varphi_2 (\cos \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 0 \quad (4.3.16)$$

elde edilir. Buradan ya $\varphi_1 = 0$ ve $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (veya $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$) veya $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\varphi_2 = 0$ olur.

Eğer $\varphi_1 = 0$ ve $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (veya $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$) ise,

$$fe_1 = \cos \theta e_1, \quad fe_2 = \cos \theta e_2 \quad \text{ve} \quad \langle fe_1, e_2 \rangle = \langle fe_2, e_1 \rangle = 0 \quad (4.3.17)$$

olur.

Eğer, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ (veya $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$) ve $\varphi_2 = 0$ ise,

$$fe_1 = \cos \theta e_2, \quad fe_2 = \cos \theta e_1 \quad \text{ve} \quad \langle fe_1, e_2 \rangle = \langle fe_2, e_1 \rangle = 0 \quad (4.3.18)$$

olur.

Böylece teoremin iddiası $n = 2$ için sağlandı.

$n = 3$ için $\{e_1, e_2, e_3\}$ $T_p M$ nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda

$$fe_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \quad (4.3.19)$$

olur. Burada $a_1, a_2, a_3 \in R$ dir. Lemma 4.3.1. den

$$\langle fe_1, fe_2 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \cos^2 \theta \quad (4.3.20)$$

olur.

Böylece, $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ ve $\alpha_1 \in [0, \pi]$ için,

$$fe_1 = \cos \theta (\cos \varphi_1 \sin \alpha_1 e_1 + \sin \varphi_1 \sin \alpha_1 e_2 + \cos \alpha_1 e_3) \quad (4.3.21)$$

olur. Benzer şekilde $\varphi_2, \varphi_3 \in [0, 2\pi]$ ve $\alpha_2, \alpha_3 \in [0, \pi]$ için,

$$fe_2 = \cos \theta (\cos \varphi_2 \sin \alpha_2 e_1 + \sin \varphi_2 \sin \alpha_2 e_2 + \cos \alpha_2 e_3) \quad (4.3.22)$$

$$fe_3 = \cos \theta (\cos \varphi_3 \sin \alpha_3 e_1 + \sin \varphi_3 \sin \alpha_3 e_2 + \cos \alpha_3 e_3) \quad (4.3.23)$$

yazılır.

(4.3.7) den görüldüğü gibi

$$\cos \alpha_1 = \cos \varphi_3 \sin \alpha_3, \quad \cos \alpha_2 = \cos \varphi_3 \sin \alpha_3 \quad (4.3.24)$$

dır.

(4.3.24) ve lemma 4.3.1. kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\sin^2 \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 + \sin^2 \varphi_2 \sin^2 \alpha_2 + \sin^2 \varphi_3 \sin^2 \alpha_3 = 1 \quad (4.3.25)$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 \quad (4.3.26)$$

$$\cos \varphi_1 \sin \alpha_1 = \sin \varphi_2 \sin \alpha_2, \quad (4.3.27)$$

$$\sin \varphi_1 \sin \alpha_1 = \cos \varphi_2 \sin \alpha_2. \quad (4.3.28)$$

(4.3.24), (4.3.26), (4.3.27) ve (4.3.28) gözönüne alınırsa

$$\cos \varphi_1 = \sin \varphi_2, \quad \sin \varphi_1 = \cos \varphi_2, \quad \sin \alpha_1 = \sin \alpha_2, \quad \sin \alpha_1 \neq 0 \quad (4.3.29)$$

$\langle fe_1, fe_2 \rangle = 0$ kullanılırsa

$$2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 0$$

elde edilir. Bu da $\sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = 0$ ve $\cos \alpha_2 = 0$ olduğunu gösterir. Eğer $n = 2$ için (4.3.17) ve (4.3.18) deki gibi analiz yapılırsa $n = 3$ için teoremin doğruluğu görülür.

$n = k$ için, $\{e_1, \dots, e_k\}$ olacak şekilde $T_p M$ nin bir ortonormal bazını alalım. O halde,

$$fe_\ell = \sum_{r=1}^k a_r^\ell e_r, \quad (4.3.30)$$

olur. Burada $a_r^\ell \in R$, $r, \ell \in \{1, \dots, k\}$ dir. Lemma 4.3.1. den

$$\langle fe_\ell, fe_\ell \rangle = \sum_{r=1}^k (a_r^\ell)^2 = \cos^2 \theta \quad (4.3.31)$$

elde edilir.

Böylece,

$$fe_\ell = \cos \theta \left(\prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^\ell e_1 + \left[\prod_{r=1}^{k-2} \sin \varphi_r^\ell \right] \cos \varphi_{r-1}^\ell e_2 + \dots + \right. \\ \left. \sin \varphi_1^\ell \sin \varphi_2^\ell \cos \varphi_3^\ell e_{k-2} + \sin \varphi_1^\ell \cos \varphi_2^\ell e_{k-1} + \cos \varphi_1^\ell e_k \right) \quad (4.3.32)$$

olur.

(4.3.7) den

$$\begin{aligned} \left[\prod_{r=1}^{k-2} \sin \varphi_r^1 \right] \cos \varphi_{k-1}^1 &= \prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^2, \\ \left[\prod_{r=1}^{k-3} \sin \varphi_r^1 \right] \cos \varphi_{k-2}^1 &= \prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^3, \\ &\dots \\ \sin \varphi_1^1 \sin \varphi_2^1 &= \prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^{k-1}, \\ \cos \varphi_1^1 &= \prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^k, \\ \left[\prod_{r=1}^{k-3} \sin \varphi_r^2 \right] \cos \varphi_{k-2}^2 &= \left[\prod_{r=1}^{k-1} \sin \varphi_r^3 \right] \cos^3 \varphi_{k-1}^3, \\ \sin \varphi_1^2 \sin \varphi_2^2 &= \left[\prod_{r=1}^{k-2} \sin \varphi_r^{k-1} \right] \cos \varphi_{k-1}^{k-1}, \\ \cos \varphi_1^2 &= \left[\prod_{r=1}^{k-2} \sin \varphi_r^k \right] \cos^k \varphi_{k-1}^k, \\ &\dots \\ \cos \varphi_1^{k-1} &= \sin \varphi_1^k \cos \varphi_1^k. \end{aligned}$$

olur. Lemma 4.3.1 ve yukarıdaki eşitlikler kullanıldığında

$$\sum_{\ell=1}^k \prod_{r=1}^{k-1} \sin^2 \varphi_r^\ell = 1, \quad \sum_{r=1}^{k-1} \cos^2 \varphi_r^\ell = 1$$

elde edilir. Basit bir hesaplama ile $\ell \neq s \in \{1, \dots, k\}$ ve $r \in \{1, \dots, k-1\}$ için $\cos \varphi_r^\ell = 1$ ve $\cos \varphi_r^s = 0$ olur. Eğer $n = 2$ ve $n = 3$ için olduğu gibi benzer bir analiz yapılırsa $n = k$ için teoremin iddiası doğrulanır. \square

Sonuç 4.3.1. *M, hemen hemen bir Riemannian çarpım manifoldu \widetilde{M} nin bir proper slant yüzeyi olsun. Eğer $\{e_1, e_2\}$, $p \in M$ için $T_p M$ nin bir ortonormal bazı ise aşağıdaki iki durumdan biri sağlanır [34].*

$$(a) \langle fe_1, e_1 \rangle = \langle fe_2, e_2 \rangle = \cos \theta \text{ ve } \langle fe_1, e_2 \rangle = 0,$$

$$(a) \langle fe_1, e_2 \rangle = \cos \theta \text{ ve } \langle fe_1, e_1 \rangle = \langle fe_2, e_2 \rangle = 0.$$

Sonuç 4.3.2. *M, hemen hemen bir Riemannian çarpım manifoldu \widetilde{M} nin n-boyutlu bir proper slant altmanifoldu olsun. Eğer $\{e_1, \dots, e_n\}$ M nin bir ortonormal bazı ise $\{fe_1, \dots, fe_n\}$ bir ortogonal bazdır öyleki $\{fe_1, \dots, fe_n\}$ nin elemanları karşılıklı olarak ortogonaldirler [34].*

İspat. $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\langle fe_i, fe_j \rangle = \cos^2 \theta \langle e_i, e_j \rangle$$

elde edilir ve bu ise iddiannın ispatını verir. \square

Teorem 4.3.2. *M, hemen hemen bir Riemannian çarpım manifoldu \widetilde{M} nin bir proper θ - slant altmanifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ M için herhangi bir ortonormal baz olsun. O halde her $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X f = 0$ dir ancak ve ancak her $i \in \{1, \dots, n\}$ için, ya $\langle fe_i, e_i \rangle = \cos \theta$ ya da e_i paraleldir [34].*

İspat. Sabit i bazı j için $\langle fe_i, e_j \rangle = \cos \theta$ dir. Böylece

$$0 = X \langle fe_i, e_j \rangle = \langle \nabla_X fe_i, e_j \rangle + \langle fe_i, \nabla_X e_j \rangle = \cos \theta \langle \nabla_X e_j, e_j \rangle \quad (4.3.33)$$

dir. Açıkça $\langle \nabla_X e_j, e_j \rangle = 0$ dır. Üstelik,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X f)e_i &= \nabla_X f e_i - f \nabla_X e_i \\
&= \cos \theta \nabla_X e_j \\
&\quad - f \{ \langle \nabla_X e_i, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle \nabla_X e_i, e_i \rangle e_i \\
&\quad + \cdots + \langle \nabla_X e_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1} + \langle \nabla_X e_i, e_{i+1} \rangle e_{i+1} \\
&\quad + \cdots + \langle \nabla_X e_i, e_n \rangle e_n \}
\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

dir.

(4.3.34) den $\nabla_X f = 0$ olduğu görülür ancak ve ancak ya $\langle f e_i, e_i \rangle = \cos \theta$ ya da e_i paraleldir. \square

Teorem 4.3.3. *M, bir hemen hemen çarpım Riemannian çarpım manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda $\nabla f = 0$ olması için gerek ve yeter şart ya $M, M_1 \times \cdots \times M_k, \nabla^i f_i = 0$ olacak şekilde bir lokal çarpım (burada M_i ler F - antiinvariant bir almanifoldlar ve $f_i = f|_{TM_i}, \nabla^i, M_i$ üzerindeki Riemann konneksiyonudur) ya da M bir \widetilde{M} nin bir çarpım slant altmanifolddur [34].*

Sonuç 4.3.3. *Farzedelimki M, hemen hemen bir Riemann çarpım manifoldu \widetilde{M} nin bir proper çarpım θ - slant altmanifoldudur. Eğer, $\{e_1, \dots, e_n\}$ $T_p M$ nin bir ortonormal bazı ve herhangi bir vektör alanı $e_i, i \in \{1, \dots, n\}$ için paralel ise her i için $\langle f e_i, e_i \rangle = \cos \theta$ dır [34].*

Lemma 4.3.2. *M, hemen hemen sabit eğrilikli bir $\widetilde{M}(a, b)$ manifoldunun altmanifoldu olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}, T_p M$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı olsun. O halde,*

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_{ij} &= a \{ 1 + \langle e_i, f e_i \rangle \langle e_j, f e_j \rangle - \langle e_i, f e_j \rangle^2 \} \\
&\quad + b \{ \langle e_i, f e_i \rangle + \langle e_j, f e_j \rangle \},
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ric}_{(T_p M)}(e_i) &= a \{ (n-1) + \langle e_i, f e_i \rangle iz(f) - \|f e_i\|^2 \} \\
&\quad + b \{ (n-2) \langle e_i, f e_i \rangle + iz(f) \}
\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(T_p M) &= \frac{1}{2}\alpha\{(n-1)n + (iz(f))^2 - \|f\|^2\} \\ &+ b(n-1)iz(f)\end{aligned}\quad (4.3.37)$$

dir [34].

İspat. (2.2.12) den (4.3.35) elde edilir. (4.3.35) de

$$\widetilde{Ric}_{(T_p M)}(e_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \widetilde{K}_{ij}$$

kullanılarak (4.3.36) elde edilir. Sonra (4.3.36) da

$$2\tilde{\tau}(T_p M) = \sum_{i=1}^n \widetilde{Ric}_{(T_p M)}(e_i)$$

kullanılarak (4.3.37) elde edilir. □

Teorem 4.3.4. *Eğer, M , hemen hemen sabit eğrilikli bir $\widetilde{M}(a, b)$ manifoldunun altmanifoldu ise*

a) *Her $X \in T_p^1 M$ için,*

$$\begin{aligned}Ric(X) &\leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 \\ &+ a\{(n-1) + \langle X, fX \rangle iz(f) - \|fX\|^2\} \\ &+ b\{(n-2)\langle XfX \rangle + iz(f)\}.\end{aligned}\quad (4.3.38)$$

b) *Sabit bir $X \in T_p^1 M$ için (4.3.38) teki eşitlik sağlanır ancak ve ancak (4.2.4) doğrudur. Eğer $H(p) = 0$ ise $X \in T_p^1 M$ (4.3.38) teki eşitlik sağlanır ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.*

c) *$X \in T_p^1 M$ için eşitlik sağlanır ancak ve ancak ya p total geodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [34].*

İspat. (4.2.3) de (4.3.36) kullanılırsa (4.3.38) bulunur ve ispat aşıkardır. □

Teorem 4.3.5. *Eğer; M , hemen hemen sabit eğrilikli bir $\widetilde{M}(a, b)$ manifoldunun n - boyutlu F - anti-invaryant bir altmanifoldu ise*

a) Her $X \in T_p^1 M$ için,

$$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)\alpha \quad (4.3.39)$$

dir [34].

b) sabit bir $X \in T_p^1 M$ için, (4.3.39) teki eşitlik sağlanır ancak ve ancak (4.2.4) doğrudur. Eğer $H(p) = 0$ ise $X \in T_p^1 M$ (4.3.39) in eşitlik durumunu sağlar ancak ve ancak $X \in N_p$ dir.

c) Her $X \in T_p^1 M$ için (4.3.39) teki eşitlik sağlanır ancak ve ancak ya p total geodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [34].

İspat. (4.3.38) de $f = 0$ kullanılırsa (4.3.39) bulunur. İspat açıktır. \square

Bu teoremden aşağıdaki teorem çıkarılabilir.

Teorem 4.3.6. M , hemen hemen sabit eğrilikli bir $\widetilde{M}(a, b)$ manifoldunun n -boyutlu F - anti-invaryant bir altmanifoldu olsun. O halde S Ricci tensörü

$$S \leq \left(\frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)a\right)g \quad (4.3.40)$$

eşitsizliğini sağlar Burada g , M üzerinde indirgenmiş Riemann metriğidir. (4.3.40) daki eşitlik sağlanır ancak ve ancak ya M total geodezik bir altmanifolddur ya da $n = 2$ ve M total umbilik bir altmanifolddur.

Örnek 4.3.3. Hemen hemen sabit eğrilikli $2n$ - bir $\widetilde{M}(a, b)$ manifoldunun, n -boyutlu F - anti-invaryant her altmanifoldu (4.3.40) daki eşitlik durumunu sağlar:

$$S = \left(\frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + (n-1)a\right)g \quad (4.3.41)$$

dir [34].

4.4 Kaehlerian Çapım Manifoldlarının Altmanifoldları Üzerinde Eşitsizlikler

M_1 ve M_2 sırasıyla m_1 ve m_2 kompleks boyutlu Kaehlerian manifoldlar ve J_1 ve J_2 sırasıyla M_1 ve M_2 nin hemen hemen kompleks yapısı olsun. $\widetilde{M} = M_1 \times M_2$

Kaehlerian çarpımı olmak üzere \widetilde{M} üzerindeki herhangi bir vektör alanı için

$$JX = J_1PX + J_2QX$$

dir. Burada P ve Q projeksiyon operatörleridir. O halde

$$J_1P = PJ, \quad J_2Q = QJ, \quad FJ = JF,$$

dir. Burada F , \widetilde{M} üzerinde doğal hemen hemen çarpım yapısıdır. Eğer M_1 ve M_2 sırasıyla c_1 ve c_2 sabit holomorfik kesit eğriliğinin kompleks uzay formları ise bir \widetilde{M} Kaehlerian çarpım manifoldunun Riemann eğrilik tensörü \widetilde{R} , \widetilde{M} üzerindeki her X, Y, Z, W vektör alanları için,

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X, Y, Z, W) = & \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{\langle Y, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle \\ & + \langle JY, Z\rangle\langle JX, W\rangle - \langle JX, Z\rangle\langle JY, W\rangle \\ & + 2\langle X, JY\rangle\langle JZ, W\rangle + 2\langle FY, Z\rangle\langle FX, W\rangle \\ & - \langle FX, Z\rangle\langle FY, W\rangle + \langle FJY, Z\rangle\langle FJZ, W\rangle\} \\ & + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{\langle FY, Z\rangle\langle X, W\rangle - \langle FX, Z\rangle\langle Y, W\rangle \\ & + \langle Y, Z\rangle\langle FX, W\rangle - \langle X, Z\rangle\langle FY, W\rangle \\ & + \langle FJY, Z\rangle\langle JX, W\rangle - \langle FJX, Z\rangle\langle JY, W\rangle \\ & + 2\langle FX, JY\rangle\langle JZ, W\rangle + 2\langle Y, JY\rangle\langle JFZ, W\rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

ile verilir. Ayrıca \widetilde{M} nin kesit eğriliği \widetilde{M} üzerindeki her X, Y için,

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(X \wedge Y) = & \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{1 + 3\langle X, JY\rangle^2 + 2\langle FY, Y\rangle\langle FX, X\rangle \\ & - \langle FX, Y\rangle^2 + 3\langle X, JFY\rangle^2\} \\ & + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{\langle FY, Y\rangle + \langle FX, X\rangle + 6\langle FJX, Y\rangle\langle JX, Y\rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

ile verilir [16].

Teorem 4.4.1. *M , bir Kaehlerian çarpım manifoldu \widetilde{M} nin bir proper θ - slant altmanifoldu olsun.*

a) Her $X \in T_p^1 M$ için,

$$\begin{aligned} Ric(X) &\leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) + 3(1 + \cos^2 \theta)\|PX\|^2 \\ &\quad + 2\langle fX, X \rangle iz(f) - \langle fX, X \rangle^2 - \cos^2 \theta\} \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{iz(f) + 6\langle fPX, PX \rangle + (n-2)\langle fX, X \rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

dur.

b) Sabit bir $X \in T_p^1 M$ için (4.4.3) deki eşitlik sağlanır ancak ve ancak X e ortogonal her $Y \in T_p M$ için,

$$\sigma(X, X) = \frac{1}{2}nH(p) \quad \text{ve} \quad \sigma(X, Y) = 0$$

c) Her $X \in T_p^1 M$ için (4.4.3) deki eşitlik sağlanır ancak ve ancak ya p total geodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [34].

İspat. $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$, $T_p \widetilde{M}$ nin, $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olsun. (4.4.2) den ve $j \in \{2, \dots, n\}$ için,

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_{1j} &= \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{1 + 3\langle Pe_1, e_j \rangle^2 \\ &\quad + 2\langle fe_1, e_1 \rangle \langle fe_j, e_j \rangle - \langle fe_1, e_j \rangle^2 + 3\langle fPe_1, e_j \rangle^2\} \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{\langle fe_1, e_1 \rangle + \langle fe_j, e_j \rangle + 6\langle fPe_1, e_j \rangle \langle Pe_1, e_j \rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

olur. (4.4.4) kullanıldığında

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric}_{T_p M}(e_1) &= \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) \\ &\quad + 3 \sum_{j=1}^n \langle Pe_1, e_j \rangle^2 - 3\langle Pe_1, e_1 \rangle^2 + 2 \sum_{j=1}^n \langle fe_1, e_1 \rangle \langle fe_j, e_j \rangle - 2\langle fe_1, e_1 \rangle^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \langle fe_1, e_j \rangle^2 + \langle fe_1, e_1 \rangle^2 + 3 \sum_{j=1}^n \langle fPe_1, e_j \rangle^2 - 3\langle Pe_1, e_1 \rangle^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{(n-1)\langle fe_1, e_1 \rangle + \sum_{j=1}^n \langle fe_j, e_j \rangle - \langle fe_1, e_1 \rangle \\ &\quad + 6 \sum_{j=1}^n \langle fPe_1, e_j \rangle \langle Pe_1, e_j \rangle - 6\langle fPe_1, e_1 \rangle \langle Pe_1, e_1 \rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

olur.

$$\sum_{j=1}^n \langle fPe_1, e_j \rangle^2 = \cos^2 \theta \|Pe_1\|^2$$

eşitliğinde $e_1 = X$ alınır ve Teorem 4.3.1. kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric}_{T_p M}(X) &= \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) + 3(1 + \cos^2 \theta)\|PX\|^2 \\ &+ 2\langle fX, X \rangle iz(f) - \langle fX, X \rangle^2 - \cos^2 \theta\} \\ &+ \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{iz(f) + 6 \sum_{j=2}^n \langle fPX, e_j \rangle \langle PX, e_j \rangle \\ &+ (n-2)\langle fX, X \rangle \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

elde edilir.

(4.3.38) den (4.4.3) elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.4.2. \widetilde{M} bir Kaehlerian çarpım manifoldu, M de \widetilde{M} nin hemen hemen proper θ - slant bir altmanifoldu olsun. $\{e_i\}$, $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olsun ve $\{e_i\}$ nin paralel olmadığını varsayalım. Bu durumda

a) Her $X \in T_p^1 M$ için,

$$\begin{aligned} Ric(X) &\leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) \\ &+ 3(1 + \cos^2 \theta)\|PX\|^2 + 2(n-1)\cos^2 \theta \\ &+ \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{2(n-1)\cos \theta\|PX\|^2\} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

dir.

b) Sabit bir $X \in T_p^1 M$ için (4.4.7) deki eşitlik sağlanır ancak ve ancak

$$\sigma(X, X) = \frac{1}{2}nH(p) \quad \text{ve} \quad \sigma(X, Y) = 0$$

dır öyleki $\langle X, Y \rangle = 0$ dir.

(4.4.7) deki eşitlik her $X \in T_p^1 M$ için sağlanır ancak ve ancak ya p total geodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [34].

İspat. Eğer (4.4.5) de $\langle fX, X \rangle = \cos \theta$ ve $X = e_1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric}_{T_p M}(X) &= \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) + 3(1 + \cos^2 \theta)\|PX\|^2 \\ &\quad + 2(n-1)\cos^2 \theta + 2(n-1)\cos^2 \theta\} \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{2(n-1)\cos \theta + 6\cos \theta\|PX\|^2\} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

elde edilir.

(4.3.38) de (4.4.8) e bakıldığında (4.4.7) bulunur. \square

Teorem 4.4.3. \widetilde{M} bir Kaehlerian çarpım manifold ve M de onun n - boyutlu bir F - invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda

a) Her $X \in T_p^1 M$ için,

$$\begin{aligned} Ric(X) &\leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-2) + 6\|PX\|^2 + 2n\langle fX, X \rangle - \langle fX, X \rangle^2\} \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{n + (n-2)\langle fX, X \rangle + 6\langle fPX, PX \rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

b) Sabit bir $X \in T_p^1 M$ için, (4.4.9) daki eşitlik sağlanır ancak ve ancak

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & X \text{ e ortogonal her } Y \in T_p M \text{ için,} \\ \sigma(X, X) = \frac{1}{2}nH(p) \end{cases} \quad (4.4.10)$$

c) (4.4.9) daki eşitlik her $X \in T_p^1 M$ için sağlanır ancak ve ancak ya p bir geodezik noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır.

İspat. M, \widetilde{M} nın bir F - invaryant altmanifoldu olduğundan, herhangi bir $X \in T_p M$ için $FX = fX$, $iz(f) = n$ ve $\langle fPe_1, e_j \rangle^2 = \|fPe_1\|^2 = \|Pe_1\|^2$ dir. Eğer, $X = e_1$ ve (4.4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{Ric}_{T_p M}(X) &= \frac{1}{16}(c_1 + c^2)\{(n-2) + 3\|PX\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{n + (n-2)\langle fX, X \rangle + 6\sum_{j=1}^n \langle fPX, e_j \rangle \langle PX, e_j \rangle\} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

elde edilir. (4.3.38) de (4.4.11) e bakıldığında (4.4.9) bulunur. \square

Teorem 4.4.4. \widetilde{M} bir Kaehlerian çarpım manifoldu ve M de \widetilde{M} nin bir n -boyutlu F -total reel altmanifoldu olsun. Bu durumda:

a) Her $X \in T_p^1 M$ için

$$\text{Ric}(X) \leq \frac{1}{4}n^2\|H\|^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n-1) + 3\|PX\|^2\}. \quad (4.4.12)$$

b) Sabit bir $X \in T_p^1 M$ için (4.4.12) deki eşitlik sağlanır ancak ve ancak

$$\begin{cases} \sigma(X, Y) = 0 & X \text{ e ortogonal her } Y \in T_p M \text{ için,} \\ \sigma(X, X) = \frac{1}{2}nH(p) \end{cases} \quad (4.4.13)$$

c) Her $X \in T_p^1 M$ için (4.4.12) deki eşitlik sağlanır ancak ve ancak ya p total geodezik bir noktadır ya da $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır.

M , \widetilde{M} üzerinde bir anti-invaryant altmanifold olduğundan $f = 0$ dır. (4.4.5) ve (4.2.3) den (4.4.12) elde edilir [34].

Sonuç 4.4.1. M , bir Kaehlerian çarpım manifoldu olan \widetilde{M} nin n -boyutlu bir altmanifold ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olsun. $X \in T_p^1 M$ için aşağıdaki üç ifadeden herhangi ikisi sağlanıyorsa diğeri sağlanır [34].

a) $H(p)$ ortalama eğrilik vektörü sıfır olur.

b) X birim vektörü, relative null uzayı N_p ye aittir.

c) X birim vektörü, aşağıdaki tabloda verilen eşitsizliklerin eşitlik durumunu sağlar.

	M	$Eşitsizlik$
(1)	<i>proper θ- slant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n - 1)$ $+ 3(1 + \cos^2 \theta)\ PX\ ^2 + 2\langle fX, X \rangle iz(f)$ $- \langle fX, X \rangle^2 - \cos^2 \theta\}$ $+ \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{iz(f) + 6\langle fPX, PX \rangle + (n - 2)\langle fX, X \rangle\}$
(2)	<i>her e_i paralel olmamakla birlikte proper çarpım θ- slant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n - 1)$ $+ 3(1 + \cos^2 \theta)\ PX\ ^2 + 2(n - 1) \cos^2 \theta\}$ $+ \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{4(n - 1) \cos + 6 \cos \theta\ PX\ ^2\}$
(3)	<i>F- invaryant</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n - 2) + 6\ PX\ ^2$ $+ 2n\langle fX, X \rangle - \langle fX, X \rangle^2\}$ $+ \frac{1}{16}(c_1 - c_2)\{n + (n - 2)\langle fX, X \rangle + 6\langle fPX, PX \rangle\}$
(4)	<i>F- total reel</i>	$Ric(X) \leq \frac{1}{4}n^2\ H\ ^2 + \frac{1}{16}(c_1 + c_2)\{(n - 1) + 3\ PX\ ^2\}$

KAYNAKLAR

- [1] H. H. Hacısalihođlu, *Diferensiyel Geometri*, Ankara Ün. Fen Fakültesi, (2000).
- [2] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Ün. Fen Edb. Fakültesi, (1999).
- [3] B. Şahin, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayıncılık, Malatya, (2012).
- [4] M. Vozo, *Differentiable Manifolds*, Mancel Dekker, Inc. New York, (1972).
- [5] H. H. Hacısalihoğlu, *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*, Ankara Ün. Fen Fakültesi, (2003).
- [6] M.M. Tripathi, *Basic inequalities for submanifolds*, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi 221005, India.
- [7] B. O'Neill, *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, Department of Mathematics, University of California (1983).
- [8] B.Y. Chen, *Mean Curvature and Shape Operator of Isometric Immersions in Real Space Form*, **Glasgow Math. J.** 38, MR1373963 (96m:53066) (1996) 87-97.
- [9] B.Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen, L. Vrancken, *Characterizations of Riemannian Space Forms, Einstein Spaces and Conformally Flat Spaces*, **Proc. Amer. Math. Soc.**, Vol.128, 87-97. MR1373963(96m:53066), (2000) 589-598.
- [10] H. Yıldırım, *Chen eşitsizlikleri ve bazı uzay formlarına uygulamaları*, Yüksek lisans Tezi İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü (2006).
- [11] B.Y. Chen, K. Yano, *Hypersurfaces of a Conformally Flat Space*, *Tensor (N.S)*, 26, (1972) 318-322.
- [12] B.Y. Chen, R. K. Maity, *On Quasi Einstein Manifold*, **Publ. Math. Debrecen**, 57, (2008) 297-306.
- [13] U. C. De and A. K. Gazi, *On Nearly Quasi-Einstein Manifolds*, **Novvi Sad J. Math**, 38, (2009) 115-121.
- [14] B.Y. Chen, *Relations Between Ricci Curvature and Shape Operator for Submanifolds with Arbitrary Codimensions*, **Glasgow Math**, J.41 (1999), MR1689730, 33-41.

- [15] H. Sungpyo, K. Matsumoto, M.M. Tripathi, *Certain Basic Inequalities for Submanifolds of Locally Conformal Kaehler Space Forms*, **Sci. Univ. Tokyo J.Math**, 41, no.1, MR1373963(96m:53066) (2005) 75-94, 87-97.
- [16] K. Yano, M. Kon, *Structures on Manifolds*, World scientific publishing Co.Ptc.Ltd.(1984).
- [17] A. Bejancu, *Geometry of CR-Submanifolds*, Mathematics and its Applications (East European Series) 23, D. Reidel Publishing Co. Dordrecht. MR0861408 (1986).
- [18] M.M. Tripathi, *Certain Basic Inequalities for Submanifolds*, **Proceedings of The Tenth Int. Workshop on Dif. Geo.**, 10, (2006) 99-145.
- [19] R. Kumar, R.K. Nagaich, *Indefinite RK- Manifolds of Constant Holomorphic Sectional Curvature*, **Int. J. of Math. Analysis**, Vol:3, No:11, (2009) 527-534.
- [20] M.M. Tripathi, *Generic Submanifolds of Generalized Complex Space Forms*, **Publ. Math. Debrecen**, 50/3-4, (1997) 374-392.
- [21] S. Hong, M.M. Tripathi, *On Ricci Curvature of Submanifolds*, **Int. J. P. Apl. Math. Sci.**, Vol:2, No:2, (2005) 227-246.
- [22] H. Sungpyo, K. Matsumoto, M.M. Tripathi, *Certain Basic Inequalities for Submanifolds of Locally Conformal Kaehler Space Forms*, **Sci. Univ. Tokyo J. Math**, 41, MR1373963(96m:53066) (2005) No.1, pp.75-94, 87-97. No:3, pp.411-423.
- [23] S. Schlöfli, *Nota Alla Memoria Del Signor Beltrami Sugli spazi di curvatura costante*, **Ann. Math. Pure., Appl. Ser. 2**, 5 (1873) 178-193.
- [24] M. Janet, *Sur La Possibilit'e Plonger Un Espace Riemann Donn'e Dans Un Espace Euclidien*, **Ann. Soc. Pol. Mat.** 5, (1926) 38-43.
- [25] E. Cartan, *Sur La Possibilit'e Plonger Un Espace Riemann Donn'e Dans Un Espace Euclidien*, **Ann. Soc. Pol. Math** 6, (1927) 1-7.
- [26] J. Nash, *The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds*, **Ann. of Maths.** 63 (1), (1956) 20-63.
- [27] B.Y. Chen, *Some Pincing and Classification Theorems for Minimal Submanifolds*, **Arch. Math. J.** 38, (1993) 87-97.
- [28] A. Mihai and I. N. Radulescu, *An Improved Chen-Ricci Inequality for Kaehlerian Slant Submanifolds in Complex Space Forms*, **Taiwanese J. Math.** Vol. 16, No. 2. (2012) 761-770.

- [29] U. K. Kim, *On 4-dimensional Generalized Complex Space Forms*, **J. Australian Math. Soc. (Series A)** 66, MR1694210 (2000C:53093), (1999) 379-387..
- [30] Z. Olszak, *On The Existence of Generalized Complex Space Forms*, **Israel J. Math.** 65, MR0998671 (90C:53091), (1989) 214-218.
- [31] G. S. Ronsse, *Generic and skew CR- Submanifolds of a Kaehler Manifold*, **Bull Inst. Math. Acad. Sinicav** 18, MR1071229 (91F:53052) (1990) 127-141.
- [32] B.Y. Chen, *Differential Geometry of Real Submanifolds in a Kaehler Manifold*, **Monatsh Math.** 91, MR0627244(82I:53045) (1981) 257-274..
- [33] B.Y. Chen, *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Louvain, 123 pp. MR1099374(92d:53047) 1990.
- [34] E. Kılıç, M. M. Tripathi, M. Gülbahar, *Chen-Ricci Inequalities for Submanifolds of Riemann and Kaehlerian Product Manifolds*, **Ann. Pol. Math.** 116. 1, (2016) 37-56.
- [35] M. Gülbahar, E. Kılıç, S. Keleş, M. M. Tripathi, *Some Basic Inequalities for Submanifolds of Nearly Quasi-Constant Curvature Manifolds*, **Dif. Geo. Dyn. Systems**, vol. 16, (2014) 156-167.
- [36] C. Özgür, A. De, *Chen Inequalities for Submanifolds of a Riemannian Manifold of Nearly Quasi-Constant Curvature*, **Publ. Math. Debrecen** 82/2 (2013), 439450 DOI: 10.54 86/PMD.(2013) 53 72.
- [37] C. Özgür, B.Y. *Chen Inequalities for Submanifolds of a Riemannian Manifold of Quasi-Constant Curvature*, **Turk J Math** 35, Tubitak, doi:10.3906/mat-1001-73, (2011) 501-509 .
- [38] K. Matsumoto, I. Mihai and A. Oiaga, *Ricci Curvature of Submanifolds in Complex Space Forms*, **Rev. Roum. Math. Punes. Appl.** 46, (2001) 775-782 .
- [39] S. Deng, *An Improved Chen-Ricci Inequality*, **Int. Elec. J. of Geometry**, V. 2, No, 2, (2009) 39-45.
- [40] B. Şahin, *Slant Submanifolds of an Almost Product Riemannian Manifold*, **J. Korean Math. Soc.** 43, (2006) 717-732.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Yılmaz MARMARA
Doğum Yeri ve Yılı : Antakya, 1986
Medeni Hali : Evli
İletişim : marmara_ylmz01@hotmail.com

Eğitim

Lisans : Niğde Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2009)
Tezsiz Yüksek Lisans : Karadeniz Teknik Üniversitesi, (2010)