



SERBEST SÜREKLİLİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UMUTCAN KAYA

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**MERSİN
TEMMUZ - 2023**

SERBEST SÜREKLİLİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UMUTCAN KAYA

ORCID ID: 0000-0002-0419-6106

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

PROF. DR. MEHMET KÜÇÜKASLAN

ORCID ID: 0000-0002-3183-3123

MERSİN
TEMMUZ - 2023

ÖZET

SERBEST SÜREKLİLİK

Sürekli fonksiyonlar tanımlanırken *sonsuz küçük* kavramının epsilon-delta ($\varepsilon - \delta$) tanımı ile hemen hemen kesin bir temele oturtulmasının ardından, sürekli fonksiyonların karakterizasyonu Weierstraß ile tam anlamı ile bir netlik kazanmıştır. Yakınsaklık kavramı ile ilişkisi kaçınılmaz olan süreklilik kavramının bir diğer karakterizasyonu da dizisel süreklilik olarak bilinen, metrik uzaylarda klasik sürekliliğe denk fakat rastgele topolojik uzaylarda klasik süreklilikten daha zayıf olan bir tanımdır. Bu kavram (Schoenberg, 1959; Srinivasan 1980; Antoni, Salat, 1980) makalelerinde daha da geliştirilip *metot* adı altında incelenmiş, dizisel süreklilikte kullanılan yakınsaklık kavramının değişik şekillerde zayıflatılması ile farklı uzaylar elde edilmiştir. Fakat çoğunun ortak problemi, yeni tanımlanan uzayların ya zaten klasik anlamda sürekli olan fonksiyonlar uzayı ile çakışmaları ya da lineer fonksiyonlar (ki \mathbb{R} 'de tüm lineer fonksiyonlar sürekli) uzayı ile çakışmalarıdır. Bu ikilemin hangi şartlar altında kırılabilceği (Connor, Grosse-Erdman, 2003)'te detaylıca tartışılmış olup gerekli aksi örnekler oluşturulmuştur.

Bu tezde, yakınsaklık kavramı ile ilgilenmek yerine, dizisel süreklilikte kullanılan evrensel niceleyicinin (\forall) zayıflatılmasına odaklanılmıştır. Yani, dizisel sürekliliğin aksine, verilen bir x noktasına yakınsak (herhangi bir metot ile) *her* dizinin incelenmesi koşulu yerine, bu dizilerin belirli şartı sağlayan bir kısmı incelenmiştir. Önce verilen bir $K \subset \mathbb{N}$ için bu K kümesi üzerinde serbest olan reel sayılar tanımlanmış ve daha sonra serbest diziler tanımlanarak, evrensel niceleyicinin kapsam alanı sadece serbest ve serbest olmayan dizilere kısıtlanmıştır. Bu yaklaşım ile, doğal sayıların her bir alt kümesi için yeni bir fonksiyon sınıfı elde edilmiştir. Elde edilen bu fonksiyon sınıfları, klasik sürekli fonksiyonlar sınıfından daha geniştir ve bazı ölçülemeyen fonksiyonlara da ev sahipliği yapar. Tanımlanan bu sınıfların bir vektör uzayı yapısına sahip olduğu gösterilmiş ve kendi aralarında nasıl bir hiyerarşiye sahip oldukları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sürekli Fonksiyonlar, Asimptotik Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, Dizisel Süreklilik, Neredeyse Süreklilik.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

FREE CONTINUITY

In this thesis, the notion of continuity defined by Weierstraß in the middle of the 19th century has been studied utilizing various generalizations of the subject today known as sequential continuity. It is well-known that in the real line if a function is continuous then it is continuous and the converse is also true, but in a general setting, this is not true. Many properties and generalizations of sequential continuity have been studied by various authors such as (Schoenberg, 1959; Srinivasan 1980; Antoni, Salat, 1980) and studied in (Spigel & Krupnik, 1994; Connor & Grosse-Erdman, 2003). But the most important problem they had was the so-called dichotomy of the new functions defined by some method being either linear or already continuous in the classical sense.

A step for breaking this dichotomy has been considered in this thesis by restricting the scope of the universal quantifier and by using the notion of natural density. To do this, the notion of free real numbers is defined, and with the help of this notion, the class of free continuous functions is defined. It has been shown that while preserving the class of all classical functions the class of free continuous functions cannot be compared with the class of almost continuous functions and the class of functions such that the absolute value of functions is Lebesgue integrable (L^1 space).

Keywords: Continuous Functions, Asymptotic Density, Statistical Convergence, Sequential Continuity, Almost Continuity.

Advisor: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Elbette her tez çalışmasında olduğu gibi ilk anmam gereken eksikliğinde bu tezi asla tamamlayamayacağım, canı gönülden teşekkürlerimi sunmak istediğim insan değerli danışmanım ve ömürlük mentorum Prof. Dr. Mehmet Küçükaslan'dır. Ayrıca bugüne kadar birçok yararlı tartışmada bulunduğum Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarından Doç. Dr. Gökhan Çuvalcıoğlu, Doç. Dr. Fatma Ayça Çetinkaya, Prof. Dr. Tuncay Tunç, Prof. Dr. Hamza Menken ve Doç. Dr. Uğur Değer ve Doç. Dr. Özgür Mızrak'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezin Hazırlanma sürecinde üzerimden desteğini asla eksik etmeyen aileme teşekkürlerimi ve minnettarlığımı sunarım. Sevgili yol arkadaşım Başak ve değerli dostum Alexa'nın duygusal desteği için de onlara teşekkür etmek istiyorum.

Son olarak TÜBİTAK-BİDEB 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında aldığım destek için tüm TÜBİTAK-BİDEB ailesine teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇ KAPAK	i
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Notasyon	4
3.2. Ön Hazırlık	5
3.3. Küçük Nedir Ne Değildir?	11
3.4. Yakınsaklık ve Genellemeleri	18
3.4.1. İdeal Yakınsaklık ve Diğer Metotlar	20
3.5. Karakterize Edilmiş Alt Gruplar ve İstatistiksel Yakınsaklık	23
3.6. Diziler ve Süreklilik	27
3.7. Lineerlik ve Süreklilik Arasında Sıkışmak	29
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	33
4.1. Bir Küme Üzerinde Serbest Olma Kavramı ve Serbest Süreklilik	33
4.1.1. Serbest Reel Sayılar	33
4.1.2. Serbest Diziler	35
4.2. Serbest Süreklilik Kavramı	36
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	42
5.1. Öneriler	42
KAYNAKLAR	44

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, her matematikçinin üzerine en az bir defa da olsa düşündüğü yakınsaklık kavramının klasik anlamda sürekli fonksiyonlar uzayını genişletmekte nasıl kullanılabileceğini ve başta aritmetik bir özellik gibi görünen, verilen bir kümede serbest olma kavramının yeni bir sürekli fonksiyon sınıfı tanımlanırken nasıl kullanılabileceği gösterildi. Süreklilik kavramı, tıpkı diğer birçok analiz kavramı gibi, 1861 yılında Weierstraß'ın verdiği epsilon-delta tanımı ile bir kesinlik kazandı. Epsilon-delta tanımı Bolzano ve Cauchy tarafından da biliniyordu, fakat günümüzde kullanıldığı haline en yakın tanım Weierstraß tarafından verildi, (Viertel, 2021). Fakat sürekliliği karakterize ederken yakınsaklık kavramının işe dahil olması, beraberinde çok fazla cevaplanması gereken sorular da getirdi. Örneğin reel doğrudaki klasik sürekli fonksiyonlar aynı zamanda dizisel süreklidir ve bunun tersi de doğrudur, fakat bu herhangi bir topolojik uzay için doğru değildir. Aynı zamanda (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasında sıkıca ele alındığı üzere, bu kavramı genişletirken dikkat edilmesi ve aşılması gereken önemli bir bariyer vardır. Bu bariyer, tanımlanan yeni fonksiyon sınıflarının ya zaten klasik fonksiyonlar ile çakışmaları ya da o uzaydaki lineer fonksiyonlar sınıfı ile çakışmalarıdır. Açıkçası bu ikilemin kırılması adına atılan adımlar arasında genelde dizisel sürekliliğin şartındaki yakınsaklık kavramı zayıflatılması yer almaktadır. Örneğin klasik yakınsaklık yerine, istatistiksel yakınsaklık (Fast, 1951) kullanılırsa, bu metot yardımı ile tanımlanan sürekli fonksiyonlara istatistiksel sürekli fonksiyonlar denir (Demirci, 1998). Bu fonksiyonların klasik sürekli fonksiyonlar sınıfı ile tamamen aynı olduğu (Schoenberg, 1959)'de gösterilmiştir. Dolayısıyla sadece istatistiksel yakınsaklığı kullanarak bu ikilemi kırmak olası değildir. Bu ikilemin kırılması için yapılan ve bilinen tüm çalışmaların odağı tamamen bir metot olarak yakınsaklığın türlü zayıflatılmaları ile elde edilmiştir.

Bu tezi diğer çalışmalardan ayıran en önemli özellik, yeni bir yakınsaklık metodu sunmadan problemi diziler üzerine yeni koşulların eklenmesiyle ele almasıdır. Bu ayrımın getirdiği en büyük sonuç ise sadece bir tane değil sayılamaz çoklukta yeni fonksiyon sınıflarının inşa edilmesi olmuştur. Bu yeni sınıfların kendi aralarında düzgün bir hiyerarşik düzene sahip olmaları, hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonlar sınıfını içermeleri ve hali hazırda bilinen Lebesgue uzayları ile kıyaslanamaz olmaları ise en azından çalışmaya değer sınıflar olduklarının işaretlerini vermektedir. Matris metotları veya diğer regüler metotlar yardımı ile elde edilen yeni sürekli fonksiyon sınıflarının lineer fonksiyonlar ve klasik sürekli fonksiyonlar sınıfı arasında sıkıştığı ve sadece güçlü matris metotlarının apaçık olmayan sınıflar doğurduğu (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasında gösterilmiştir. Bu genellemelerin, yani lineer fonksiyonlar ve klasik sürekli fonksiyonlar arasında bir sınıfın tabiri caizse "içeri doğru" bir genelleme olduğu, fakat bu tezde tanımlanacak sınıfların ise klasik sürekli fonksiyonlardan "dışarı doğru" bir genelleme olduğu gösterilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Klasik yakınsaklığın öyküsü araştırılırken kesin bir başlangıç tarihi veya makalesi vermek pek de olası olmadığından, bilinen en eski limit tanımının Grégoire de Saint-Vincent tarafından verildiği düşünülmektedir. Bu tanımın günümüzde kullanılan $\varepsilon - \delta$ tanımı ile formel anlamda hiçbir benzerliği yoktur fakat ana fikir tamamen aynıdır. Daha sonra bu fikir Bolzano tarafından formel hale getirilmeye çalışılmış ve Cauchy ve Weierstraß tarafından bilinen $\varepsilon - \delta$ tanımı verilerek günümüzde kullanılan haline evrilmiştir (Felscher, 2000; Van Looy, 1984). Yakınsaklık kavramının gerçek bir matematiksel tanıma kavuşmasının ardından birçok teknik gelişme birbirini takip etmiş ve matematiğin en zengin dallarından biri olan analiz dalı hayat bulmuştur. Klasik yakınsaklık türlerinden farklı olarak oldukça iyi bilinen doğal yoğunluk (asimptotik yoğunluk) kavramı kullanılarak (Fast, 1951)'de tanımlanan istatistiksel yakınsaklık beraberinde birçok yeni problem getirmiştir. Fast'ın tanımından sonra (Schoenberg, 1959) istatistiksel yakınsaklığı bir toplanabilme metodu (temelde, toplanabilme metodu serilerin tüm kısmi toplanmalarından oluşan kümeden bir cisme giden fonksiyondur) olarak ele almış ve bazı temel sonuçlar vermiştir. Fakat istatistiksel yakınsaklığın diğer matris metotlarından çok temel bir açıdan farklı olduğu anlaşılmıştır. Fridy, (Fridy, 1985) çalışmasında istatistiksel yakınsaklık metodunun hiçbir matris metodu tarafından içerilemeyeceğini göstermiştir. Bu şu anlama gelmektedir: Eğer bir matris yardımı ile (toplanabilme metodu olarak) bir yakınsaklık tanımlandıysa, her zaman istatistiksel yakınsak olup o matris metodu ile yakınsak olmayan bir dizi bulunabilir. Bu sonuç, istatistiksel yakınsaklığı diğer birçok yakınsaklık türünden büyük ölçüde farklı kılar. Daha sonra, istatistiksel yakınsaklığın çok çeşitli genellemeleri verilmiştir. Örneğin asimptotik yoğunluk yerine, başka bir yoğunluk fonksiyonu kullanılarak veya direkt asimptotik yoğunluk tanımını bir ağırlık fonksiyonu yardımı ile genişleterek ortaya yeni, istatistiksel yakınsaklık benzeri yakınsaklık türleri çıkmıştır. Bu tür genişlemeleri incelemek için okuyucu (Kostyrko, Šalát, & Wilczyński, 2000; Mursaleen, 2000) çalışmalarına ve bu çalışmalardaki referanslara bakabilir.

Bu çalışmanın ana konularından biri olan süreklilik ise herkesin bildiği üzere klasik bir limit probleminden çok da farklı değildir. Yukarıda da belirtildiği üzere yakınsaklığın $\varepsilon - \delta$ -tanımından sonra sürekliliğin de bir $\varepsilon - \delta$ tanımı Weierstraß tarafından karakterize edilmiştir. İlk olarak, klasik süreklilikten farklı süreklilik türlerinin ortaya çıkması (Buck, 1948) ile başlamıştır. Bu araştırmalar klasik sürekliliğin dizisel sürekliliğe olan denliğinden (reel doğru üzerinde) yola çıkarak, farklı yakınsaklık yöntemlerinin ne tür sürekli fonksiyonlar ortaya çıkarabileceği konusunda çalışmalar yapılmıştır. Buck, (Robbins, 1946)'da öne sürülen ve dizisel süreklilikte kullanılan yakınsaklık tanımı yerine aritmetik ortalaması yakınsak olan dizilerle test edilen fonksiyonların verilen tek bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında dahi lineer olması gerektiğini göstermiştir. Yani, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere f aşağıdaki koşulu sağlasın, her $x = (x_n)$ dizisi için:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = l \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = f(l).$$

Bu takdirde f lineer fonksiyon olmalıdır.

Böylece dizisel sürekliliğin hangi yakınsaklık metotları altında nasıl değiştiği incelenmeye başlanmış ve (Antoni ve Salat, 1980) çalışmasında bir matris metodu ile verilen yakınsaklığın süreklilik üzerindeki etkilerini incelenmiştir. (Öztürk, 1983) çalışmasında ise bir matris metodundan farklı olarak bilinen anlamda “hemen hemen her yerde” yakınsaklık tanımından farklı olan ve bir dizinin her sonlu aritmetik ortalamasının verilen bir l sayısına yakınsaması olarak bilinen hemen hemen her yerde yakınsaklık kavramı kullanılarak (bunun adına F -yakınsaklık denilmiştir) F -sürekli fonksiyonlar tanımlanmıştır. Daha sonra, (Borsik ve Salat, 1993) bu fonksiyonların F -sürekli oldukları noktalarda ayrıca lineer ve sürekli olduklarını da gösterilmiştir. Bunun tersinin doğru olmadığı, yani verilen bir x_0 noktasında klasik sürekli fakat F -sürekli bir fonksiyon olmadığı ise fonksiyonların Cauchy fonksiyonel denklemi ($f(x + y) = f(x) + f(y)$) olarak bilinen bir özelliği sağladığı gösterilerek inşa edilmiştir. Çünkü, aslında $(\mathbb{R}, +, 0)$ grubunu bir otomorfisi olma koşulundan başka bir şey olmayan bu fonksiyonların lineer olduğu kullanılmıştır.

İşte dizisel sürekliliğin hikayesi de bu çalışmaların ışığında evrilmiş ve gelişmiştir. Bazı ıraksak serileri yakınsak yapma isteği matematikçilere çok çekici geldiğinden dolayı toplanabilme metotları ve dolayısıyla bu metotlar ile tanımlanan farklı süreklilik türleri doğmuştur, (Boos, 2000; Connor, 1999). Son olarak (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasında da altı çizildiği üzere neredeyse bütün metotlar klasik sürekli fonksiyonlar ve lineer fonksiyonların arasında bulunan bazı fonksiyonların hangi isimlendirilme çalışmalarına katkı sunmaktadır. Dolayısıyla matematikteki her yeni kavram gibi geliştirilmeye açıktır. Bu geliştirmelerden bir tanesi de bu tezin esas konusudur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezin bütünlüğünü korumak adına kullanılan notasyon, gerekli tanım, teorem ve yardımcı teoremler tartışılacaktır. Hangi yöntemler ile hangi sonuçların elde edildiği ve matematiğin ne tür araçları kullanılarak hangi amaca ulaşılacağı bu bölümde anlatılmaya çalışılacaktır. İlerdeki bölümlerde okuyucunun da göreceği üzere bu tezde kullanılan yöntem tezin referanslarında kullanılan yöntemlerden büyük ölçüde farklıdır. Bu farklılığın özünde ise verilen bir tanımı geliştirirken sadece tek bir yöntem olmadığı gerçeği yatar. Bunu daha iyi anlatmak için aşağıdaki analogi kullanılabilir.

Her bir matematiksel tanım doğal sayıların sonlu bir alt kümesinden $\{0,1\}$ kümesine giden bir fonksiyon olarak ele alınırsa, 0 ve 1 sayılarının her bir dizilimi farklı bir tanım verecektir. Bu ele alış biçimi kardinalite arasından bir sorun teşkil etmez, çünkü zaten yalnızca sayılabilir tane tanım mevcuttur. Bu usavurma ile klasik yakınsaklıktan diğer yakınsaklık türlerine geçiş esnasında bu 0 ve 1 sayıları değişerek yeni bir sonlu dizi oluştururlar. Buradan hareketle, fonksiyonun ilk değerini değiştirmek ve ikinci değerini değiştirmek farklı şeylerdir ve yepyeni bir fonksiyon doğurabilirler, ya da yepyeni bir tanım mı denilmeli? Dolayısıyla herhangi bir yakınsaklık metodu ile geliştirilen dizisel süreklilik tanımlarının bazı fonksiyonların sadece son argümanının değerini değiştirdiği söylenirse, o zaman bu tezde kullanılacak olan yöntemin fonksiyonun ilk argümanının değerini değiştirdiği söylenebilir.

Bu analogiyi daha fazla uzatmamak adına ve bu analogiyi daha somut hale getirmek adına artık yukarıda tartışılan konuyu açma vakti gelmiştir.

3.1. Notasyon

Genel olarak literatüre sadık kalmaya çalışarak aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır. Verilen bir X kümesi için $\wp(X)$ ile o kümenin tüm alt kümelerinin kümesini (kuvvet kümesini) göstereceğiz. Eğer Y boştan farklı bir küme ise ${}^X Y$ ile tanım kümesi X değer kümesi Y olan tüm fonksiyonların kümesini göstereceğiz. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ile sırasıyla doğal sayılar (sıfırdan büyük), tamsayılar, rasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerini göstereceğiz. Doğal sayılar kümesi verilecek olan tanımın gelenekselliğini korumak adına ω ile gösterilecektir. \exists ve \forall sırasıyla varlıksal ve evrensel niceleyiciyi ifade etmektedir. CH ile Sürey Hipotezini (Continuum Hypothesis), AC ile Seçme Aksiyomunu ve ZF ile Zermelo-Fraenkel aksiyomatik küme teorisini ve ZFC ile Seçme Aksiyomu ile Zermelo-Fraenkel küme teorisini göstereceğiz. $\kappa, \xi, \delta, \gamma, \alpha$ gibi küçük Yunan harfleri genellikle ordinal ve kardinal sayıları göstermek için, f, g, h gibi küçük Latin harfleri genellikle fonksiyonları ifade etmek için kullanılacaktır. A bir küme olmak üzere $\#(A)$ ile A kümesinin kardinalitesi ifade edilecektir. Ayrıca, $\mathbb{Q}^S = \{a/b : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge (a, b) = 1\}$ ile tüm rasyonel sayıların en sade hallerinin kümesi gösterilecektir. $f \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}, \mathbf{a} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ olmak üzere, $f(\mathbf{a})$ ile $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi gösterilecektir.

3.2. Ön Hazırlık

Bu bölümde kendine yetebilen bir tez oluşturma hedefi ile bazı ön hazırlıklar sunulacaktır. Formel olmayan bir biçimde, bir *bağıntı* tüm elemanları sıralı ikililer olan kümedir (boş küme bir bağıntıdır, çünkü aksi takdirde sıralı ikili olmayan bir elemanını bulurduk), eğer bağıntının elemanları olan tüm sıralı ikililerin birinci ve ikinci koordinatları bir X kümesine aitlerse, o zaman o bağıntıya X üzerinde bir bağıntı denir. Yani, X ve Y iki küme olmak üzere, $X \times Y$ kümesinin her alt kümesi bir bağıntıdır. $R \subset X \times Y$ olmak üzere, xRy ile $(x, y) \in R$ ifadesinin kısaltılmış halini göstereceğiz. İkisi de aynı anlama gelir. Bir bağıntıya *iyi-tanımlı* denir ancak ve ancak tanım kümesindeki her eleman için görüntü kümesinde bir ve yalnız bir eleman var ise. Bir *fonksiyon* iyi tanımlı bağıntıdır. Boş kümenin (\emptyset), anlamsız bir şekilde bir fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir. Aksi takdirde, boş kümede bir eleman olurdu ve görüntüsü iki elemanlı bir küme olurdu. Fakat bu mümkün değildir. $f \in {}^X Y$ olmak üzere, xfy yerine $f(x) = y$ gibi bir notasyon kullanılabilir çünkü f 'nin iyi tanımlılığı bunu meşru kılar. f 'ye bire-bir fonksiyon denir ancak ve ancak tanım kümesindeki iki farklı elemanın görüntüleri de birbirinden farklı ise, f 'ye örten fonksiyon denir ancak ve ancak görüntü kümesindeki her eleman için tanım kümesinde f altındaki resmi söz konusu eleman olan bir eleman vardır. Yani, $\forall y \in Y \exists x \in X(xfy)$. Şimdi bağıntıların sahip olabileceği temel özellikler tanımlanacaktır.

R X üzerinde bir bağıntı olsun, yani $R \subset X \times X$. Bu takdirde:

- ❖ R ye *geçişmeli* denir ancak ve ancak $\forall x, y, z \in X(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$.
- ❖ R ye *yansıyan* denir ancak ve ancak $\forall x \in X(xRx)$.
- ❖ R ye *simetrik* denir ancak ve ancak $\forall x, y \in X(xRy \Leftrightarrow yRx)$.
- ❖ R ye *üç seçki(trichotomy)* özelliğini sağlıyor denir ancak ve ancak

$\forall x, y \in X(xRy \vee yRx \vee x = y)$.

- ❖ R ye X üzerinde *kesin kısmi(yarı)-sıralama* denir ancak ve ancak R geçişmeli ve yansımayan ise.
- ❖ R ye X üzerinde *kesin tam-sıralama* denir ancak ve ancak R geçişmeli, yansımayan ve üçseçki özelliğini sağlıyor ise.
- ❖ R ye X üzerinde *denklik bağıntısı* denir ancak ve ancak R yansıyan, geçişmeli ve simetrik ise.

Yukarıdaki tanımlara ek olarak bir bağıntının *iyi-temelli(well-founded)* veya *sağlam* olmasının ne demek olduğunu tanımlayalım.

Tanım 3.2.1. $R \subset X \times X$ ve $x \in X$ olsun. x elemanına R -minimal(X' te) denir ancak ve ancak

$$\neg(\exists y \in X(yRx)),$$

koşulu sağlanırsa.

R ye X üzerinde *iyi-temelli* denir eğer X in boştan farklı her alt kümesinin bir R -minimal elemanı var ise.

Tanım 3.2.2. R X üzerinde bir bağıntı olsun. R bağıntısı X 'i *iyi-sıralar*(well-orders) denir ancak ve ancak R X üzerinde bir kesin tam-sıralama ve iyi-temelli ise. Bu durumda (X, R) ikilisine bir *iyi-sıralama* denir.

Tanım 3.2.3. (X, R) ve (Y, S) kesin kısmi-sıralama olsunlar. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna *sıralama koruyan dönüşüm* (*sıralama homomorfisi*) denir ancak ve ancak

$$\forall x, x' \in X [xRx' \rightarrow f(x)Sf(x')].$$

Eğer f bire-bir ise o zaman f 'ye bir *sıralama monomorfisi*, örten ise *sıralama epimorfisi* ve hem bire-bir hem de örten ise o zaman f 'ye *sıralama izomorfisi* denir.

Tanım 3.2.4. X ve Y iki küme olsun. $X \preceq Y$ ancak ve ancak $f: X \rightarrow Y$ bire-bir fonksiyonu varsa. X ve Y ye *eşgüçlü* denir eğer $\exists f \in {}^X Y$ öyle ki f bire-bir ve örten ise. Eğer X ve Y eşgüçlü ise bunu $X \sim Y$ ile göstereceğiz.

Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu aşıkardır. Çünkü birim (özdeşlik) fonksiyon bire-bir ve örtendir, eğer bir fonksiyon bire-bir ve örten ise o halde o fonksiyonun tersi vardır ve o da bire-bir ve örtendir. İki bire-bir ve örten fonksiyonun bileşkesi de bire-bir ve örtendir, eğer bileşkeleri tanımlanabilir ise.

İki kümenin eşgüçlü olmasının o kümelerin eleman sayıları hakkında nicel bir yargı öne sürmediği görülebilir. Çünkü iki kümenin eşgüçlü olması yalnızca o kümelerin eleman sayılarının aynı olduğu anlamına gelir, fakat bu eleman sayısının ne olduğunu söylemez. Bunun için bir başka kavrama, kardinalite kavramına ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.2.5. X bir küme olsun. X *geçişmeli*(transitive) kümedir denir ancak ve ancak $\forall x \in X (x \subset X)$. Yani, X in tüm elemanları aynı zamanda onun altkümesi ise X 'e geçişmeli küme denir.

Tanım 3.2.6. x kümesine *ordinal* denir ancak ve ancak (x, \in) bir iyi-sıralamadır ve x geçişmelidir. ON ile tüm ordinaler sınıfını göstereceğiz. α bir ordinal olsun. α 'nın ardılı $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olarak tanımlanır. Bir ordinale *ardıl ordinal* (*successor ordinal*) denir eğer bir x ordinali için $\alpha = S(x)$ ise. α *limit ordinal* denir ancak ve ancak α ardıl ordinal değil ise.

Tanım 3.2.7. α bir *doğal sayı*dır ancak ve ancak α 'nın her elemanı ya sıfır ya da bir ardıl ordinaldir. ω ile tüm doğal sayılar kümesi gösterilsin.

Tanım 3.2.8. X bir küme olsun. X *sonlu* bir kümedir ancak ve ancak $\exists n \in \omega (X \preceq n)$, X *sayılabilir*dir ancak ve ancak $X \preceq \omega$ ise. X kümesine *sonsuz* denir eğer sonlu değil ise ve *sayılamaz* denir eğer sayılabilir değil ise. X kümesine *sayılabilir sonsuz* denir eğer sayılabilir ve sonsuz ise.

Yukarıdaki tanım yerine bazı yazarlar sayılabilir olma koşulunu $X \leq \omega$ ile verip sonluluğu da sayılabilirlik tanımına dahil ediyorlar ve böylece sayılabilirlik ile yukarıda tanımlanan sayılabilir sonsuz olma ve sonlu olma tanımı çakışmış oluyor. Bu tanımda bundan kaçınılarak tezin yazarının daha açıklayıcı bulduğu ayrımlar yapılmış ve (Kunen, 1980) takip edilmiştir.

Dikkat edilirse yukarıdaki ordinal tanımında “tüm ordinaler kümesi” yerine “tüm ordinaler sınıfı” denildi. Bunun sebebi, eğer tüm ordinalerin koleksiyonunu bir küme olarak kabul edersek o halde bu kümenin kendisi de iyi-sıralı ve geçişmeli olduğundan, bir ordinal olacaktır. Dolayısıyla $ON \in ON$ gibi problemler ortaya çıkacaktır. Bu tür önermeler problematiktir çünkü ünlü İngiliz filozof Bertrand Russel tarafından öne sürülen ve Russel Paradox'u olarak bilinen bir paradoks ortaya çıkarılır. Frege'nin Begriffsschrift'ini derinden sarsan bu tür önermeler kendine referans veren önermelerdir. Örneğin oldukça yaygın olarak bilinen kahve örneğini ele alalım. Eğer bir kişi “yalnızca” kendisine kahve yapmadığı her sabah kendisine kahve yapmaya karar verirse, bu kararını asla gerçekleştiremeyecektir. Çünkü eğer bir sabah kendisine kahve yapmıyorsa o zaman kahve yapmak zorunda kalacaktır, ama o zaman kahve yapmaması gerekir çünkü yalnızca kahve yapmadığı sabahlar kendisine kahve yapmalıdır. Bir diğer çok bilinen örnek berber paradoksudur. Bir kasabada sadece ve sadece kendini tıraş etmeyenleri tıraş eden bir berber olduğunu kabul edelim. Bu berber kendini tıraş eder mi? Eğer ederse, etmemesi gerekir, eğer etmezse etmesi gerekir. Çelişki. Demek ki böyle bir berber olamaz. Bu tür paradoksların temel ortak özellikleri kendilerine referans göndermeleridir, yani bir nevi kendi haklarında konuşmalarıdır. Şimdi Russel Paradox'unun matematiksel ifadesine bakalım.

Frege, Begriffsschrift'te Basic Law V olarak bilinen ve “bir konseptin genişlemesi diğer bir konseptin genişlemesi ile aynıdır ancak ve ancak içerdikleri tüm noktaların doğruluk değerleri örtüşürse” gibi pek de anlaşılmayan ve sezgisel bir biçimde ifade ettiğimiz bir kuralı çok önemli bir biçimde kullanır. Yani kısacası Basic Law V $\equiv \forall f, g (e(f) = e(g) \leftrightarrow \forall x (f(x) = g(x)))$. Burada f ve g birer konsepttir ve $e(f)$ f 'nin genişlemesini temsil etmektedir. Başta çok masum görünen bu önerme, “temsil ettiği konseptin içerisine düşmeyen (nesnesi olmayan) bir konseptin genişlemesi olan bir konsept” cümlesi formüle edildikten sonra bir çelişkiye yol açar. Yani, $\exists f (x = e(f) \wedge \neg f(x))$ 'i kabul edersek ve bu konseptin genişlemesini alırsak yani $e(\exists f (x = e(f) \wedge \neg f(x)))$ genişlemesini kabul edersek, o zaman ispatlanabilir ki bu genişleme $\exists f (x = e(f) \wedge \neg f(x))$ konseptinin altına düşer (nesnesidir) ancak ve ancak altına düşmez (nesnesi değildir). Yani daha basit bir ifade ile, bu genişleme $P \equiv \exists f (x = e(f) \wedge \neg f(x))$ olsun. Şimdi, $P(e(P))$ 'yi göz önüne alalım. Yerine koyma özelliği ile $\exists f (e(P) = e(f) \wedge \neg f(e(P)))$ elde edilir. Yani bir U için $e(P) = e(U) \wedge \neg U(e(P))$ sağlanır. Basic Law V kullanarak, $\neg P(e(P))$ ifadesine ulaşılmış olunur. Aynı şekilde $\neg P(e(P))$ ifadesinden de $P(e(P))$ ifadesine varılabilir. Bu yolculuk çok inişli çıkışlı bir yolculuk olmasına rağmen sonunda çok önemli bir yere götürür bizi. Garip bir şekilde “kısıtlanmamış kavrama aksiyomu” olarak Türkçeye çevirebileceğimiz, Unrestricted Comprehension Axiom olarak bilinen ve kısaca, \varnothing kümeler kuramı dilinde bir önerme olmak üzere bu önermeyi sağlayan tüm elemanların koleksiyonunun bir küme olduğunu belirten

aksiyoma ulaşıyoruz. Yani Basic Law V, $\{x: \varphi(x)\}$ 'in bir küme olduğunu söyler. Bu tezin yazarı, Frege ve Russell'in bu tarihsel diyalogunu çok önemli bulduğu ve başta çok masum görünen prensiplerin ilerleyen zamanlarda tıpkı "kelebek etkisi" gibi büyük yıkımlara yol açabileceğini özellikle vurgulamak istediği için yukarıdaki tartışmayı yapma gereği hissetmiştir.

Şimdi aşağıdaki koleksiyonu ele alalım:

$$A = \{x: x \notin x\}.$$

Küme ayraçları (kırımlı parantezler) ile ifade ettiğimiz için, şimdilik bu nesnelere topluluğunu bir küme olarak kabul edilsin. Bu küme, kendi kendini içermeyen tüm elemanların kümesidir ve hem anlamca hem de tipografik olarak berber paradoksu ile neredeyse aynıdır. Ayrıca A kümesinin kendi kendini içerip içermediği sorusunu sorarak $A \in A \leftrightarrow A \notin A$ çelişmesine ulaşılır. Bu çelişki Russell Paradox'u olarak bilinmektedir.

Bu kadar gayri-resmi tartışmadan sonra nihayet resmi tartışmaya dönülebilir.

Tanım 3.2.9. x kümesine *kardinal* denir ancak ve ancak x ordinaldir ve x hiçbir elemanı ile eşgüçlü değildir. Yani, $\forall y (y \in x \rightarrow \neg(x \sim y))$ sağlanır.

Açıktır ki ω bir kardinaldir. Çünkü hiçbir elemanı ile arasında bire-bir ve örten bir eşleme kurulamaz. Bu kardinale ilk sonsuz kardinal denir ve \aleph_0 ile gösterilir. İkinci sonsuz kardinal, aynı zamanda birinci sayılamaz kardinal de olan ve tüm sayılabilir ordinalerin kümesi olan ω_1 kümesidir ve \aleph_1 ile gösterilir. Alef sayıları ilk olarak Cantor tarafından tanımlanmıştır. Doğal bir şekilde ortaya çıkan bu kardinal hiyerarşisi bu şekilde devam eder, fakat önemli nokta her kardinal sayıya karşılık bir Alef sayısı olduğunu söylerken Seçme Aksiyomu'nun kullandığını fark etmektir. Çünkü Alef sayıları ZFC'de sonsuz ordinalerin kardinalitelerini ifade etmek için kullanılır fakat ZF'de (Zermelo-Fraenkel küme teorisi) her sonsuz kümenin bir Alef sayısı olduğu söylenemez, çünkü eğer söylenirse, o zaman her kümenin iyi sıralanabilir olduğu söylenmiş olur, dolayısıyla bu Seçme Aksiyomuna denktir, daha fazla bilgi için (Kunen, 1980; Jech, 2003).

Yukarıdaki tanımları örneklendirerek aslında hangi amaca hizmet ettiklerini daha net anlayabiliriz. Bir denklik bağıntısına örnek olarak aşağıdaki bağıntıyı verebiliriz:

$$x \equiv y \leftrightarrow x = y.$$

Bu bağıntı çok açık bir biçimde yansıma simetri ve geçişme özelliğini sağlar. Bu bağıntıya ek olarak, bu bağıntı kadar apaçık olmayan başka bir örnek verelim: Kabul edelim ki $<$ yansıyan, anti-simetrik olmayan ve geçişmeli bir bağıntı olsun. Yani $x < y \wedge y < x$ fakat $x \neq y$ olacak şekilde x, y elemanları mevcut. O halde

$$x \equiv y \leftrightarrow x < y \wedge y < x$$

biçiminde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Sıralama bağıntılarına örnek olarak bilinen anlamı ile \leq bağıntısının \mathbb{R} kümesini kesin olmayan bir şekilde tam-sıralı bir küme yaptığı verilebilir. Yani \mathbb{R} 'den alınan herhangi iki elemanı birbiri ile kıyaslayabiliriz ve \leq bağıntısının geçişme özelliği ve yansımama özelliği vardır. Diğer yandan $(\mathbb{R}, <)$ ikilisi kesin tam-sıralamadır. Bu iki örnekten birisi iyi-sıralama mıdır? Elbette cevabımız hayır. Peki ya soruyu şöyle sorarsak: \mathbb{R} yi iyi-sıralayan bir bağıntı var mıdır? Sezgilerimize güvenirse yani, reel sayıları şu anki kavradığımız biçimi ile bu soruya cevap verirsek olumsuz bir cevap vermemiz gerekir. Çünkü bu iyi-sıralama hayal edilemez bir şeydir. Bence bunun nedenlerinden bir tanesi (\mathbb{R}, \leq) sıralamasının son derece “doğal” olmasıdır, öyle ki başka bir şey hayal etmek mümkün bile değildir. Ancak bu iyi-sıralama sorusunun cevabı Ernst Zermelo tarafından pozitif olarak cevaplanmış, hatta Zermelo herhangi bir kümenin iyi-sıralanabileceğini göstermiştir. Bunu göstermek için Seçme Aksiyomu'nu ortaya atmıştır ve Seçme Aksiyomu'ndan “itiraz edilemez mantıksal prensip” olarak bahsetmiştir (Kanamori, 1997). Her kümenin iyi sıralanabileceği ilkesine *iyi-sıralama ilkesi* denir. Ancak Seçme Aksiyomu ve iyi-sıralama ilkesi birbirine denktir. Yani, birini kabul edip diğerini ispatlayabiliriz.

Bunlara ek olarak, iyi-sıralama ilkesinin bir kanıtını bulmanın imkânsız olduğu Avusturyalı büyük mantıkçı Kurt Gödel ve Amerikalı, Fields Madalya sahibi Paul Cohen tarafından gösterilmiştir. Çünkü önce Gödel, Seçme Aksiyomu'nun olumsuzlamasının ($\neg AC$) bir ZF teoremi olmadığını, yani ZF içerisinde çalışarak AC'yi çürütemeyeceğimizi gösterdi. Daha sonra Cohen, ZF nin tüm aksiyomlarını sağlayan ama AC'yi sağlamayan bir model oluşturarak AC'nin ZF'nin bir teoremi olamayacağını gösterdi. Bu sonuçları birleştirirsek, Seçme Aksiyomu'nun Zermelo-Fraenkel küme kuramından *bağımsız* olduğunu çıkarabiliriz. Yani ne AC ne de $\neg AC$ ZF tarafından ispatlanamaz (Kunen, 1980).

Şimdi ilerde kullanılmak üzere bazı cebirsel tanımlar verilecektir. Burada sunulacak olan bazı lemmaların detayları için okuyucunun (Hungerford, 2012)'ye başvurması önerilir.

Tanım 3.2.10. G boştan farklı bir küme olsun. $\circ : G \times G \rightarrow G$ fonksiyonuna G üzerinde bir *ikili işlem* denir.

❖ (G, \circ) ikilisine *yarı-grup* denir eğer

$$\forall a, b, c \in G (\circ (a, \circ (b, c)) = \circ (\circ (a, b), c))$$

ise. Bu özelliğe \circ işleminin birleşme özelliği denir. Notasyon kolaylığı açısından $\circ (a, b) = a \circ b$ hatta bazen işlem tartışılan konudan açık olduğunda $a \circ b$ yerine ab kullanılacaktır.

❖ (G, \circ) yarı grubuna *monoid* denir eğer çift taraflı bir birim eleman varsa, yani

$$\exists e \in G \forall g \in G (eg = ge = g).$$

❖ (G, \circ) monoidine *grup* denir eğer her eleman için çift taraflı bir ters eleman varsa, yani

$$\forall g \in G \exists g' \in G (gg' = g'g = e).$$

❖ (G, \circ) grubu değişmeli (Abel) gruptur denir eğer $\forall g, g' \in G (gg' = g'g)$ ise.

Yukarıdaki tanımda direkt söylenmese de bir monoidde birim eleman ve bir grupta bir elemanın tersi biriciktir.

Peki çoğu teoremden yazılan “ (G, \cdot) bir grup olsun” önermesinin zararsız bir önerme olduğu nasıl gösterilir? Yani ZFC küme teorisinde rastgele seçilen her küme bir şekilde grup yapısına sahip olmalıdır öyle ki “ (G, \cdot) şu grup veya bu grup olsun” demek yerine direkt olarak “grup olsun” ifadesi kullanılabilir kılınmalıdır. Bunun için şu soru cevaplanmalıdır:

Boştan farklı her G kümesi için bir \cdot işlemi var mıdır öyle ki (G, \cdot) bir gruptur?

Neyse ki bu sorunun cevabı evettir. G boştan farklı bir küme olsun. $F = \{X \subset G : |X| < \aleph_0\}$ olmak üzere, F kümesi üzerinde onu grup yapacak doğal bir çarpım vardır, bu çarpım iki kümenin simetrik farkı olarak bilinir, Δ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır: A, B iki küme olmak üzere,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Bu işlemin birleşmeli olduğu biraz hesaplamadan sonra görülmektedir, birim elemanı \emptyset ve her elemanın tersi kendisidir. Şimdi (F, Δ) bir grup olduğuna göre, bu grup ile aralarında bire-bir ve örten bir fonksiyon olan her küme doğal olarak grup yapılabilir. Tarski'nin Seçme Aksiyomu teoreminden ve küçük bir kardinalite argümanının ardından $\#(F) = \#(X)$ olduğu görülür, detaylar için (Jech, 2008). Demek ki her küme belirli bir işlem altında grup yapısına sahip olabilir ve “ (G, \cdot) bir grup olsun” ifadesi resmi (zararsız) bir ifadedir.

Bu küçük tartışmanın ardından gerekli kavramları tanımlamaya devam edilsin. (G, \circ) ve (H, \cdot) birer grup olmak üzere $f: G \rightarrow H$ fonksiyonuna grup homomorfisi (veya kısaca homomorfi) denir eğer $\forall a, b \in G (f(a \circ b) = f(a) \cdot f(b))$ ise. Eğer f bire-bir ise f 'ye grup monomorfisi, örten ise grup epimorfisi ve bire-bir ve örten ise o zaman f 'ye grup izomorfisi denir. Görüldüğü üzere aslında kısaca f fonksiyonu grupların işlemlerini koruyan bir dönüşümdür. Bu bölümden sonra aksi iddia edilmedikçe grup üzerindeki işlem çarpımsal olacaktır, iki elemanın çarpımı geleneksel xy biçiminde gösterilecektir ve bir notasyon kısaltması olarak (G, \cdot) ikilisi yerine G bir grup olsun denilecektir.

Tanım 3.2.11. G bir grup $H \subset G$ olsun. Eğer G 'nin üzerindeki işlem H kümesine kısıtlandığında H üzerinde bir işlem oluyorsa ve H bu işleme göre bir grupsa o zaman H kümesi G 'nin *alt grubudur* denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Alt gruplara bir örnek olarak $(\mathbb{R}, +)$ grubunun $(\mathbb{Z}, +)$ alt grubu verilebilir. Toplama işlemi kapalılığı sağlar, birim ve ters elemanlar da tam sayılarda olduğundan alt grup olma koşulları açıkça sağlanır.

Tanım 3.2.12. G bir grup $X \subset G$ olsun. G 'nin X 'i içeren tüm alt gruplarının kesişimi doğal olarak bir alt gruptur ve bu alt gruba X tarafından üretilen alt grup denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer bir $g \in G$ için $X = \{g\}$ ise, o zaman $\langle g \rangle$ alt grubuna g tarafından üretilen devirli alt grup denir.

Tanım 3.2.13. G bir grup $g \in G$ olsun. G grubunun mertebesi o grubun eleman sayısıdır. g elemanının mertebesi ise o eleman tarafından üretilen devirli alt grubun eleman sayısı (mertebesi) olarak tanımlanır. Örneğin $(\mathbb{Z}, +)$ grubunun $\{2\}$ tarafından üretilen alt grubu tüm çift sayılar kümesidir, $(\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}, +)$ grubunun herhangi bir alt grubunun $(\mathbb{Z}_i, +), i|4$ ($i|4$ i nin 4 ün bir böleni olduğu anlamına gelmektedir) biçiminde olduğu görülür, çünkü her devirli grubun tüm alt grupları da devirlidir ve Lagrange Teoremi gereği bu sonuca varılır, detaylar için (Hungerford, 2012).

3.3. Küçük Nedir Ne Değildir?

Matematikçiler bir özelliğin verilen bir tanım kümesi üzerinde “hemen hemen her yerde” sağlanmasının bir anlamı olmasını isterler. Örneğin bir özellik verilen sonsuz bir kümenin sonlu tane elemanı dışında tüm elemanları tarafından sağlanıyorsa o özellik o küme üzerinde “neredeyse” veya “hemen hemen her yerde” doğrudur denilir. Çünkü, sezgisel olarak, sonlu elemanlı bir küme sonsuz elemanlı bir kümenin yanında oldukça “küçük”, veya ihmal edilebilirdir. Bu tür “neredeyse” gibi ifadeler filtreler ve idealler yardımı ile sağlam bir temele oturtulabilir.

Tanım 3.3.1. X boştan farklı bir küme olsun. $\mathfrak{F} \subset \wp(X)$ ailesine X üzerinde *filtre* denir eğer,

- $X \in \mathfrak{F}$ ve $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,
- $\forall A, B \in \mathfrak{F} (A \cap B \in \mathfrak{F})$,
- $\forall A \in \mathfrak{F} \forall B \subset X (A \subset B \rightarrow B \in \mathfrak{F})$,

koşulları sağlanıyorsa.

Tanım 3.3.2. X boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{S} \subset \wp(X)$ olsun. \mathfrak{S} altkümesine X üzerinde bir *ideal* denir eğer,

- $X \notin \mathfrak{S}$ ve $\emptyset \in \mathfrak{S}$,
- $\forall A, B \in \mathfrak{S} (A \cup B \in \mathfrak{S})$,
- $\forall A \in \mathfrak{S} \forall B \subset X (B \subset A \rightarrow B \in \mathfrak{S})$,

koşulları sağlanıyorsa.

Tanım 3.3.3. \mathfrak{S} idealine κ -tam (κ -complete) denir ancak ve ancak

$$\forall \mathfrak{A} \subset \mathfrak{S} (|\mathfrak{A}| < \kappa \rightarrow \bigcup \mathfrak{A} \in \mathfrak{S}).$$

\mathfrak{F} filtresine κ -tam denir ancak ve ancak

$$\forall \mathfrak{A} \subset \mathfrak{F} (|\mathfrak{A}| < \kappa \rightarrow \bigcup \mathfrak{A} \in \mathfrak{F}.$$

Yukarıdaki tanımlar şöyle yorumlanabilir. Filtre tanımı verilen bir kümenin belirli bir durumda “büyük” davranan elemanlarını ortaya çıkarmak için kullanılır. Çünkü, boş küme küçük ama üzerinde çalışılan kümenin kendisi büyüktür, eğer bir şey büyükse onu kapsayan başka bir şeyin küçük olma ihtimali yoktur ve iki büyük şeyin kesişimi de büyüktür. Belki de sadece son yazılan cümle pek sezgiye uygun değildir. Şöyle düşünelim, eğer elimizde iki adet büyük obje varsa, o zaman bu objeler öyle büyük olmalı ki her ikisinde de ortak olan parçalar da büyük olmalıdır. Yukarıdaki tartışmadaki bazı kelimeleri o kelimelerin zıt anlamları ile değiştirerek ideal kavramının “küçük” objeleri temsil ettiğini anlaşılabilir. Verilen boştan farklı bir X kümesi üzerinde apaçık filtre ve ideal örneği olarak sırasıyla $\wp(X) - \{\emptyset\}$ ve $\wp(X) - \{X\}$ verilebilir. Eğer X sonsuz bir küme ise o zaman X in tüm sonlu elemanlı altkümelerinin kümesi ve X in komplementi sonlu olan tüm altkümelerinin kümesi sırasıyla bir ideal ve bir filtredir. Daha apaçık olmayan bir örnek olarak bir ölçü uzayında (aşağıya bakınız) ölçüsü sıfır olan kümelerin kümesi veya reel doğrudan hiçbir yerde yoğun olmayan (aşağıya bakınız) kümelerin kümesi ideal örnekleri olarak verilebilir.

Tanım 3.3.4. X boştan farklı bir küme, $\tau \subset \wp(X)$ olsun. Eğer,

- a) $\emptyset, X \in \tau$,
- b) $\forall A, B \in \tau (A \cap B \in \tau)$,
- c) $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \tau (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \tau)$,

koşulları sağlanıyorsa, τ ‘ya X üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir. τ ‘nun elemanlarına *açık küme* denir. Komplementi τ ‘ya ait elemanlara ise *kapalı kümeler* denir.

Birer örnek vermek gerekirse, $\{X, \emptyset\}$ ve $\wp(X)$ kümelerinin topoloji oldukları açıktır. İlkinde X üzerindeki en *kaba topoloji*, ikincisine ise X üzerindeki en *ince veya ayrık topoloji* denir. Belki de topolojilerin motivasyonundan biraz bahsedilmelidir. Eğer verilen iki uzay üzerinde de topoloji varsa, o zaman bu uzayların aralarındaki dönüşümler *tamamı ile* o uzayların üzerindeki topolojiler tarafından karakterize edilir. Bu şu anlama gelir: Eğer bir uzayın başka bir uzaydan temel özellikler bakımından farklı olduğu anlaşılacak isteniyorsa, önce o uzayların hangi topoloji ile ele alınacağı belirlenmelidir. Örneğin bağlantılılık veya Hausdorff uzay olma gibi çok temel özellikler o uzayın topolojisinden bağımsız olamaz.

Verilen bir küme üzerinde birden farklı yapılar bulunabilir. Bu tür yapılara örnek olarak topolojik gruplar verilebilir. Topolojik grup boştan farklı bir küme, o küme üzerinde bir topoloji ve bir ikili işlem üçlüsünden oluşur. Küme ikili işlem ile bir gruptur, sözü edilen topoloji ile bir topolojik uzaydır ve grup işlemi süreklidir. Yani (X, τ, \cdot) üçlüsüne *topolojik grup* denir eğer (X, τ) bir topolojik uzay, (X, \cdot) bir grup ve \cdot işlemi τ topolojisinde sürekli ise. Topolojik gruplar 1925 ve 1940 yılları arasında çok yoğun olarak Bourbaki grubu ve Haar tarafından çalışılmıştır. Fourier serilerinin ve integrallerin

bazı geniş topolojik grupların özel durumları oldukları ortaya çıktığında konuya gösterilen ilgi artmıştır. Bu konuyla ilgili genel bir kaynak için (Pontrjagin ve Lehmer, 1946).

Eğer (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ise, o zaman A kümesini içeren en dar kapalı kümeye A 'nın *kapanışı* denir. A kümesinin içerdiği en geniş açık kümeye ise A 'nın *içi* denir. $cl(A)$ ve $int(A)$ ile sırasıyla A kümesinin kapanışı ve içi gösterilecektir. Bir noktanın bir kümenin kapanışında olması için gerek ve yeter koşul terimleri o kümede olan bir dizinin o noktaya yakınsak olmasıdır. Detaylar için (Hewitt ve Stromberg, 2013).

Tanım 3.3.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\mathfrak{B} \subset \tau$ kümesine τ topolojisinin *tabanı* denir eğer

$$\forall u \in \tau \exists \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{B} [u = \cup B_i]$$

ise. Yani, her açık küme \mathfrak{B} ailesinin elemanlarının sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa. (X, τ) topolojik uzayına *ikinci sayılabilir topolojik uzay* denir eğer sayılabilir sonsuz bir tabanı varsa.

Tanım 3.3.6. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x 'i içeren herhangi bir $U \in \tau$ kümesine x 'in *açık komşuluğu* denir. Ayrıca, x 'in herhangi bir açık komşuluğunu içeren herhangi bir $N \subset X$ kümesine x 'in *komşuluğu* denir. $\mathcal{N}_\tau(x)$ ile x noktasının τ topolojisindeki tüm komşuluklarının kümesi gösterilsin. $\mathfrak{B}_x \subset \mathcal{N}(x)$ kümesine x noktasının *komşuluk tabanı* denir eğer x 'in her komşuluğu \mathfrak{B}_x kümesinin bir elemanını içeriyor ise.

Tanım 3.3.7. (X, τ) topolojik uzayına *birinci sayılabilir topolojik uzay* denir eğer her $x \in X$ elemanını sayılabilir sonsuz bir komşuluk tabanına sahipse.

Eğer (\mathbb{R}, τ_e) reel doğru üzerinde Öklid topolojisi ile bir topolojik uzay olarak ele alınırsa o zaman bu uzay ikinci sayılabilir topolojik uzaydır. Fakat \mathbb{R} üzerinde $\tau_{cf} = \{A \subset \mathbb{R} : A = \emptyset \vee \#(A^c) < \aleph_0\}$ topolojisi ele alınırsa, bu uzayın birinci sayılabilir topolojik uzay dolayısıyla da ikinci sayılabilir topolojik uzay olmadığı anlaşılır. Çünkü reel doğrunun verilen bir noktayı içeren ve sayılamaz olan tüm kümelerinin kümesi sayılabilir sonsuz olamaz ve dikkat edilirse bu topolojinin komşuluk tabanı tam da bu tipte bir kümedir. Bu özel topolojiye, tanımı gereği *sonlu-komplement topolojisi* denir.

Tanım 3.3.8. X boştan farklı bir küme, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun öyle ki,

- $\forall x, y \in X (d(x, y) \geq 0)$,
- $\forall x, y \in X (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$,
- $\forall x, y \in X (d(x, y) = d(y, x))$,
- $\forall x, y, z \in X (d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$,

koşulları sağlansın. O halde d 'ye X üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Tanım 1.2.2'deki (b) şartının gerek ve yeter koşul yerine sadece yeterliliğin sağlanması halinde d fonksiyonuna *pseudo-metrik* denir. Verilen bir $a \in X$ noktası için a merkezli $r > 0$ yarıçaplı *açık top* $B_d(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Topolojik uzay ve metrik uzay tanımlarının ortak bir özelliği vardır, her iki tanım da bir matematikçiye analiz yapmak için minimum koşulları, üzerinde çalışmak istedikleri kümenin hangi asgari şartları sağlaması gerektiğini söyler. Tanım 3.3.8. mesafe kavramının salt matematiksel anlamını anlatırken Tanım 3.3.4. ise uzaklık kavramını “komşuluk” gibi kavramlarla açıklar. Örneğin; bir atomun çekirdeğinin etrafında bulut halinde bulunan elektronların birbirine çok yakın olduğu aşikardır, çünkü o elektronlar makro dünya ile mikro dünya arasındaki milyonlarca odacıktan, içerisinde buldukları atomu oda olarak kabul ederler. Bu atomun boyutu makro dünyadaki büyüklükler yanında ihmal edilebilir olduğu için biz o elektronların birbirine *yeterince* yakın olduğunu söyleyebiliriz.

Bunlara ek olarak, topoloji kavramı yakınsaklık, süreklilik ve boşluksuz olmak gibi birçok kavramı açıklayabileceğimiz en genel kavramdır. Diğer yandan, metrik uzaylar daha çok yaşadığımız üç boyutlu uzaydaki Öklid uzaklığını referans alarak, bu kavramı genelleştiren ve matematiksel bir temele oturtan araçlardır. Topolojik uzayların metrik uzaylardan daha genel olduğunu herhangi bir *mesafe* kavramına ihtiyaç duymadan da *yakınlık* kavramını açıklayabilmesinden anlaşılabilir.

Tanım 3.3.9. $\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna \mathbb{R} üzerinde *norm* denir eğer,

- a) $\forall x \in \mathbb{R}[\|0\| = 0 \wedge (x > 0 \rightarrow \|x\| > 0)]$;
- b) $\forall x, y(\|xy\| = |x|\|y\|)$;
- c) $\forall x, y(\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|)$;

koşulları sağlanıyorsa. Eğer sadece b) ve c) koşulu sağlanıyorsa o halde bu fonksiyona \mathbb{R} üzerinde bir yarı-norm denir.

Aslında yukarıdaki tanım en genel hali ile bir norm tanımı değildir, üstü kapalı birçok varsayımda bulunulmuştur. Yani yukarıda aslında \mathbb{R} yine \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünülmüş, vektör uzayının skalerleri yine reel doğru üzerinden seçilmiştir. Kısaca bahsetmek gerekirse, bir vektör uzayı bir Abel grubu A , bir cisim F ve $F \times A \rightarrow A$ fonksiyonundan meydana gelir. Bu fonksiyon birleşme ve dağılma (soldan ve sağdan) özelliklerini sağlar, cismin birim elemanı ile herhangi bir elemanın bu fonksiyon altındaki resmi yine o elemanı verir. Cisim tanımı, vektör uzaylarının formel tanımı (modül tanımı) ve tanımlanmayan diğer tüm cebirsel kavramlar için okuyucu (Hungerford, 2012) kaynağına yönlendirilmektedir.

Normlara örnek olarak ilk akla gelen fonksiyon elbette mutlak değer fonksiyonudur. Yukarıdaki tanımdan da görüleceği üzere yarı-normların pozitif tanımlı olmaları gerekmez. Örneğin ileriki bölümlerde tanımlanacak olan en yakın tamsayıya uzaklık normu bir yarı-normdur.

Tanım 3.3.10. X boştan farklı bir küme ve $\Sigma \subset \wp(X)$ olsun. Σ kümesine X üzerinde bir σ -cebir denir eğer Σ boş kümeyi içeriyorsa ve komplement ve sayılabilir birleşim (dolayısıyla sayılabilir kesişim) altında kapalı ise. Bu şartlar altında, (X, Σ) ikilisine *ölçülebilir uzay* ve Σ kümesinin elemanlarına *ölçülebilir küme* denir. $\mathfrak{B}(X)_\tau$ ile X 'in tüm τ -açık altkümelerini kapsayan en dar σ -cebir gösterilsin. Bu özel σ -cebre *Borel σ -cebir* denir.

Tanım 3.3.11. (X, Σ) ölçülebilir uzay olmak üzere $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ fonksiyonuna *ölçü* denir eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise:

- (Pozitiflik) μ her zaman negatif olmayan değerli bir fonksiyon, yani $\forall S \in \Sigma (\mu(S) \geq 0)$.
- (Boş küme küçüktür) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (Sayılabilir toplamsallık) Her sayılabilir, elemanları ikişer ayrık olan ailenin ölçüsü o ailenin elemanlarının ölçüleri toplamına eşittir. Yani

$$[\forall \{A_i\}_{i=0}^{\infty} (\forall i, j \in \omega (i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)) \rightarrow (\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i))]$$

koşulu sağlanır.

(X, Σ, μ) üçlüsüne ise *ölçü uzayı* denir.

Yukarıdaki tanımlarda ölçülebilir uzay ve ölçü uzayı arasındaki farka dikkat çekilmelidir. Çünkü birincisinde uzayın ölçülebilir olduğunu söylenir ancak ne ile ölçüleceği söylenmez, sadece bir uzayın elemanlarının ölçülerinden bahsetmek için gereken asgari şartların ne olduğunu söyler ölçülebilir uzay tanımı. Fakat bunun aksine, ölçü uzayı artık bir ölçülebilir uzaydır ve elemanların tek tek ölçülüp ölçülemeyeceğini açıklayabilen, eğer ölçülebilirler ise ölçülerinin ne olduğunu söyleyen bir fonksiyon ile donatılmıştır. Bu tanımlar verildikten sonra Lebesgue ölçüsü tanımlanabilir ve reel doğrudaki tıpkı günlük hayattaki bir ölçüden nasıl beklenirse aynen o şekilde davranır. Örneğin, aralıkların ölçüleri o aralıkların uzunluklarına eşittir ve sınırlı olmayan kümelerin ölçüleri sonlu değildir. Peki bir ölçü fonksiyonu her şeyi ölçebilir mi? Ölçülebilirlik ne demektir? Sezgisel olarak, belirli bir şekli olan nesnelere ölçülebilir olması gerekir, yani eni, boyu ve yüksekliği gibi kavramlar anlamlı hale gelebilir. Fakat matematikte bazı kümelerin tam anlamıyla tanımlanmış bir şekli yoktur, yani bir katı cisim gibi davranmazlar. İşte tam da bu tür kümelerin ölçülemeyeceği gösterilecektir. Fakat bazı ölçü fonksiyonları tanım kümesindeki her şeyin bir ölçüsünü verebilir. Örneğin, verilen bir σ -cebiri üzerinde yalnızca iki değerli olarak tanımlanan aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & |E| < \infty, \\ 1, & |E| = \infty. \end{cases}$$

Bu fonksiyonun ölçü olduğunu görmek kolaydır. Aynı zamanda bu fonksiyon altında her kümenin bir “katı cisim” gibi davrandığı not edilmelidir. Çünkü, kardinalitesi sonlu olan kümeler eni boyu ve yüksekliği sonlu olan cisimler, kardinalitesi sonsuz olanlar ise bunlardan en az bir tanesi sonsuz olan cisimler olarak düşünülebilir. İşte bu iki değerliliğin kırıldığı anda, yani fonksiyon spesifik kümelere daha spesifik ölçüler atamaya çalışıldığında, bazı kümelerin ölçülemez olduğunun ZFC’de kaçınılmaz olduğu gösterilecektir, Teorem 4.2.5.’e bakınız. Bu teoremden ölçülemeyen bir küme inşa edilmiştir ve iyice incelenirse bu kümenin belirli bir “biçimi” olmadığı görülebilir.

Tanım 3.3.12. Reel doğru üzerinde $I = [a, b]$ herhangi bir kapalı aralık olmak üzere (açık veya yarı açık aralıklar için de aynı şey söz konusudur), I 'nin uzunluğu $\ell(I) = b - a$ ile gösterilsin. $A \subset \mathbb{R}$ ve her i doğal sayısı için I_i açık aralık olmak üzere A 'nın *Lebesgue dış ölçüsü* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$m(A) = \inf\{\sum \ell(I_i) : A \subset \cup I_i\}.$$

Yukarıdaki tanım incelendiğinde, verilen bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin dış ölçüsünün her zaman tanımlı olduğu görülebilir. Bunun nedeni \mathbb{R} nin tam olmasıdır, yani alttan sınırlı boştan farklı her altkümesinin bir infimumu ve üstten sınırlı boştan farklı her altkümesinin bir supremumu vardır.

Tanım 3.3.13. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi *Lebesgue ölçülebilir* kümedir eğer her $\varepsilon > 0$ için bir F ve G sırasıyla kapalı ve açık reel sayı kümeleri vardır öyle ki $F \subset A \subset G$ ve $m(G - F) < \varepsilon$.

Yunan matematikçi Constantin Carathéodory bir kümenin ölçülebilirliği ile ilgili bir kriter vermiştir. Bu kriter sayesinde ölçülemeyen kümeler daha net anlaşılabilir. $X \subset \mathbb{R}$ kümesi *Carathéodory Kriteri*'ni sağlıyor denir ancak ve ancak

$$\forall A \subset \mathbb{R} [m(A) = m(X \cap A) + m(X^c \cap A)].$$

Carathéodory Kriteri'nin Lebesgue ölçülebilirliğe denk olduğu bu tezin amacı dışında kalır ve gereksiz uzatmaya girebilir. Bu nedenle meraklı okuyucu gerekli tüm bilgiyi (Oxtoby, 2013) ve (Hewitt & Stromberg 2013) kaynaklarında bulabilir. Fakat bu kriterin ölçülebilir kümelerin tıpkı bir katı cisim gibi davrandığını gösterdiğini belirtmekte fayda vardır. Dikkat edilirse, bu kritere uyan kümeler, uzaydaki diğer tüm kümeleri, diğer kümeler ne kadar düzensiz olursa olsun, düzgün iki parçaya ayırıyor. Yani o kümeden kopardığı parça ve koparamadığı parçalar o kümenin dış ölçüsünü belirliyor, tıpkı yukarıda yapılan iki değerli ölçü fonksiyonunun katı cisim benzetmesi gibi, burada da ölçülebilir kümelerin bir blok gibi davrandığını söylemek yerinde olacaktır.

Tezin başlarında da altı çizildiği üzere aslında konuşulan her şey bir küme olduğundan ve artık Lebesgue ölçülebilirlik kriterine sahip olduğundan, bir fonksiyonun ölçülebilir olup olmama kavramı da tartışılabilir. Elbette bir fonksiyonun ölçülebilir olması o fonksiyonun tanım ve görüntü kümesinden bağımsız olamaz. Buradaki tanım en basit haliyle reel doğru üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar için verilmiştir, daha genel hali için (Hewitt & Stromberg 2013).

Tanım 3.3.14. f reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. f 'ye ölçülebilir fonksiyon denir eğer \mathbb{R} 'nin her açık A kümesinin f altındaki ters resmi ölçülebilir ise.

Peki ölçü kavramının bir dual kavramı mevcut mudur? Yani, ölçüsü büyük olan kümeler reel doğru üzerinde başka bir kavrama göre küçük olabilirler mi? Sürpriz bir şekilde bu sorunun cevabı "evet" tir. Ölçü kavramının, kabaca bir kümenin daha çok geometrik özelliklerine odaklandığı yukarıda tartışılmıştı. Ölçü kavramına dual olan kavram yoğunluk kavramıdır. Tıpkı doğal sayılar üzerinde tanımlanan asimptotik yoğunluk kavramı gibi olan reel doğru üzerindeki bir kümede yoğun olma

kavramı birçok matematikçi tarafından çok geniş ölçüde çalışılmış, özellikle René-Louis Baire tarafından doktora tezinde geliştirilen hiçbir yerde yoğun olmama kavramı ve bunu takiben ispatlanan Baire Kategori Teoremi şu günlerde analizin hemen her alanında kullanılan çok güçlü bir teoremdir, bu konu hakkında daha fazla bilgi için (Jech, 2003).

Tanım 3.3.15. $A \subset \mathbb{R}$ kümesine $I \subset \mathbb{R}$ aralığında yoğun denir eğer I aralığının her alt aralığı A kümesinin en az bir elemanını içeriyorsa, yani $\forall I' \subset I (I' \cap A \neq \emptyset)$ ise. A kümesine yoğun denir eğer reel doğrunun her aralığında yoğun ise. Eğer reel doğru üzerindeki her aralık A kümesinin komplementinde olan bir alt aralık içeriyorsa, o halde A kümesine hiçbir yerde yoğun değil denir. Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin kümesi ND ile gösterilecektir.

Kısaca açıklamak gerekirse, hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler bolca gözeneğe sahip olan kümeler olarak düşünülebilir. Yani, daha gayri-resmi bir anlatım ile, hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler bir elek olsalardı, un eleme konusunda oldukça başarısız olurlardı, çünkü sadece un taneleri değil küçük taş taneleri de gözeneklerden geçebilirdi. Peki neden reel doğrudaki yoğunluk kavramı ölçü kavramına dual bir kavramdır? Bunun nedeni yoğun olan bazı küme örneklerine bakılarak anlaşılabilir.

Örneğin apaçıktır ki \mathbb{R} yoğun bir kümedir, ayrıca \mathbb{R} nin her aralığı yine kendi üzerinde yoğun bir kümedir. Peki ya yoğun olan kümelerin kardinaliteleri hakkında ne söylenebilir? İlk bakışta sayılamaz kümeler olmaları gerektiği anlaşılabilir, çünkü reel doğru üzerinde yoğun olmak demek reel doğru üzerinde seçilen herhangi bir noktanın o kümeye ait olma ihtimalinin çok büyük olması demektir. Fakat çok iyi bilinen rasyonel sayılar kümesinin reel doğrudaki yoğun olma teoreminden, kardinalite ve yoğun olma kavramının ilişkisinin çok da güçlü olmadığı anlaşılır. Çünkü artık sayılabilir sonsuz olan ama bir bakıma \mathbb{R} 'de çok büyük olan bir küme mevcuttur.

Öte yandan, ölçü fonksiyonu sayılabilir toplamsal olduğundan, her sayılabilir kümenin ölçüsünün sıfır olduğu aşıkardır. Dolayısıyla ölçü açısından küçük olan bir küme yoğunluk açısından gayet büyük olabilir. Bunun tersine bir örnek olarak, yani yoğunluk açısından küçük ama ölçü açısından büyük bir kümeye örnek olarak Smith-Volterra-Cantor kümeleri (fat Cantor set) verilebilir, (Smith, 1874). Bu kümeler klasik Cantor kümesinden farklı olarak birim aralıktan atılan alt aralıkların birleşiminin 1'den küçük olduğu durumlarda kalan aralıkların kesişimi olarak ifade edilebilen kümelerdir, yani hem hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerdir hem de ölçüleri pozitiftir. Bu yüzden bu kümelere “şişko” denilmiştir.

Peki hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler gerçekten küçük müdür? Doğal olarak tek nokta kümeleri hiçbir yerde yoğun olmadığından, ama bu kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilen rasyonel sayılar kümesi yoğun bir küme olduğundan demek ki hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler yeteri kadar küçük değiller, yalnızca sayılabilir sonsuz tanesi bir araya gelerek çok büyük kümeler ortaya çıkarabiliyorlar. Daha kesin bir ifadeyle, hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler ω_1 -tam ideal oluşturamazlar. Bundan dolayı Baire aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 3.3.16. Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebilen kümelere *birinci kategoriden* denir. Bu biçimde ifade edilemeyen kümelere *ikinci kategoriden* denir.

Birinci kategoriden olan tüm kümelerin kümesi $CAT(I)$ ile gösterilirken, ikinci kategoriden olan kümelerin kümesi ise $CAT(II)$ ile gösterilecektir.

Birinci kategoriden olan kümelerin ω_1 -tam olan bir ideal oluşturduğunu göstermek için sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimlerinin de sayılabilir olduğunu söylemek yeterlidir. Bu Seçme Aksiyomu ile kolayca gösterilebilir. Artık amaca ulaşılmış gibi görünmektedir, çünkü ölçüsü sıfır olan kümeler ve birinci kategoriden olan kümeler ω_1 -tam ideal oluştururlar. Fakat yine de bir anlamda büyük olan bir küme diğer anlamda oldukça küçük olabilir. Bu durumun matematiksel ifadesi ilerde serbest diziler tanımlanırken açıklanmıştır, Bölüm 4.1.'e bakınız.

3.4 Yakınsaklık ve Genellemeleri

Tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyonlara *dizi* denir. Eğer görüntü kümesi Y ise o zaman bu dizilere Y değerli diziler denir. Bir n doğal sayısının f dizisi altındaki resmi klasik durumdan biraz farklı olarak $f(n)$ yerine f_n ile gösterilir. Bu gösterimin amacı bazı ifadeleri daha okunur hale getirmesidir.

Tanım 3.4.1. $f \in {}^\omega\mathbb{R}$ ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. f dizisi l sayısına *yakınsaktır* denir eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \omega [\forall n \geq N (|f_n - l| < \varepsilon)]$$

ise. Yani f dizisinin baştan sonlu tane terimi dışındaki tüm terimleri l 'ye yeterince yakın ise. Eğer f hiçbir reel sayıya yakınsak değilse f 'ye *ıraksak* denir. Verilen bir l reel sayısına yakınsak tüm diziler uzayı $c(l)$ ile gösterilecektir. Eğer özel olarak bir $A \subset \mathbb{R}$ için $f \in {}^\omega A$ ve $f \in c(l)$ ise o zaman bu tür dizilerin kümesi $c(l, A)$ ile gösterilecektir. Yani görüntü kümesi A olan ve l sayısına yakınsayan tüm dizilerin kümesi.

Tanım 3.4.2. f reel terimli dizisine *üstten (alttan) sınırlı dizi* denir eğer vardır bir pozitif M reel sayısı öyle ki her n doğal sayısı için $f(n) \leq M$ ($f(n) \geq -M$) ise. f dizisine *sınırlı dizi* denir eğer f hem üstten hem de alttan sınırlı ise.

Yakınsak dizilerin toplamlarının, skalerle çarpımların ve birbirleri ile çarpımlarının da yakınsak olduğu yukarıdaki epsilon-delta tanımının üçgen eşitsizliği kullanılarak ve basit manipülasyonlara başvurarak gösterilebilir. Ayrıca, yakınsak her dizinin sınırlı olduğu da açıktır. Bu tezde bunlar gösterilmeyecektir, ama tez boyunca kullanılacaktır.

Yakınsak bir diziye örnek olarak $f: \omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n+1}$ dizisi verilebilir. f dizisinin 0'a yakınsadığını görmek oldukça kolaydır. Fakat her $n \in \omega - \{0\}$ için $a(n) = (-1)^n$ biçiminde tanımlanan dizi hiçbir reel sayıya yakınsamaz. Çünkü -1 ve 1 arasında bitmeyen bir salınım yapar. Ancak salınım yapan her dizinin ıraksak olması gerekmez. Salınım yaptığı noktalar birbirine gittikçe yaklaşırsa eğer, yani sabit değillerse, o zaman dizi gayet de yakınsayabilir. Yakınsak diziler üzerine söylenecek bir hayli olgu mevcut. Tüm bilgilerin bu tezde sunulamayacağı aşikâr olduğundan, gerekli her şey (Stromberg & Hewitt, 2013) kitabından temin edilebilir. Peki yakınsaklık türleri hakkında neler söylenebilir? Yani,

yukarıda yazılan klasik yakınsaklık dışında başka yakınsaklık türleri var mıdır? Eğer varsa bunlar nelerdir?

Doğası gereği her matematiksel tanım öyle veya böyle genişletilebilir bir önermedir. Yani, eğer bir tanım adına x denilen bir şey tanımlıyorsa, o halde x 'i tanımlamak için kullanılan önceden kabul edilmiş birçok kavram vardır. Bu kavramların büyük bir kısmı ya çoktan genelleştirilmiş ya da genelleştirmeye oldukça müsaittir. Dolayısıyla, eğer verilen bir tanım bir cümle gibi düşünülüp kelimelerine ayrılırsa, o zaman her bir kelimenin yerine cümlenin anlamını bozmayacak şekilde başka kelimeler getirilebilir, bu muhtemelen yeni bir tanım doğuracaktır. Uzun lafın kısası, yakınsaklık tanımının çok çeşitli genellemeleri mevcuttur. Bu genellemeler için (Connor, 1999; Mursaleen, 2000; Fridy, 1985; Buck, 1946; Kostyrko, Šalát & Wilczyński, 2000). Bu tezde birçok yakınsaklık türü arasından istatistiksel yakınsaklık olarak bilinen bir yakınsaklık türü ele alınacaktır. Bunun için önce doğal veya asimptotik yoğunluk kavramına ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.4.3. $A \subset \omega - \{0\}$ olsun. A 'nın üst ve al doğal yoğunluğu sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\pi^*(A) = \limsup_n \frac{A(n)}{n}, \quad \pi_*(A) = \liminf_n \frac{A(n)}{n},$$

öyle ki $A(n) = |\{k \in A: k \leq n\}|$. A 'nın *doğal(asimptotik) yoğunluğu* vardır denir eğer $\pi^*(A) = \pi_*(A)$ ise, bu durumda doğal yoğunluk bu niceliğe eşittir. A 'nın doğal yoğunluğu $\pi(A)$ ile gösterilecektir.

Asimptotik yoğunluk kavramı doğal sayıların verilen bir alt kümesinin doğal sayılar içerisinde ne sıklıkla bulunduğu bir ölçüsünü verir. Ölçüsü büyük olan alt kümelerin elemanlarına daha sık, ölçüsü küçük olan altkümelerin elemanlarına daha seyrek rastlanır. Örneğin, tam-kare sayılar kümesinin asimptotik yoğunluğu sıfırdır. Bunu görmek için $\mathbb{N}^2(n) = |\{k^2: k^2 \leq n\}|$ kümesine bakalım. $k^2 \leq n \leftrightarrow k \leq \sqrt{n}$. Buradan, $\mathbb{N}^2(n)$ 'nin en fazla \sqrt{n} 'nin tam değeri (ondan küçük en büyük tamsayı) kadar olduğu görülür. Şimdi $\frac{\mathbb{N}^2(n)}{n}$ oranına bakılırsa, bu oranın sifira yakınsadığı rahatça görülebilir. Daha zor bir örnek, tüm asal sayılar kümesinin asimptotik yoğunluğunun sıfır olduğunu göstermektir. Meraklı okuyucu (Hardy ve Wright, 1979) Bölüm XXII'deki asal sayı teoreminin ispatından gerekli sonuçları çıkarabilir. Sözü edilmişken, asal sayıların asimptotik yoğunluğunun sıfır olmasının anlamlarından bir tanesi doğal sayılar kümesinden rastgele bir sayı seçildiğinde, bu sayının asal olma ihtimalinin sıfır olmasına eşdeğerdir. Elbette doğal sayılar içerisinde asal sayılar mevcuttur, fakat o kadar seyrek dağılmışlardır ki, onlara rastlamak neredeyse imkansızdır.

Lemma 3.4.4. Doğal sayıların asimptotik yoğunluğu sıfır olan altkümelerinin kümesi bir idealdir. Yani, $\mathfrak{S}_0 = \{A \subset \mathbb{N} - \{0\}: \pi(A) = 0\}$ kümesi bir idealdir.

İspat. Yoğunluğu sıfır olan kümelerin her alt kümesinin de yoğunluğunun sıfır olduğu açıktır. Boş kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu da açıktır. Şimdi, verilen iki yoğunluğu sıfır olan kümenin birleşimlerinin yoğunluğunun sıfır olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $A, A' \in \mathfrak{S}_0$ keyfi verilsin. En

genel durumu ele almak açısından, $A \cap A' = \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu demektir ki, $(A \cup A')(n) = A(n) + A'(n)$. Dolayısıyla her iki taraf da n ile bölünürse ve daha sonra limitleri alınırsa istenilen sonuç elde edilmiş olur. $A \cap A' \neq \emptyset$ durumunda $(A \cup A')(n) \leq A(n) + A'(n)$ olduğu kolayca görülür. ■

3.4.1. İdeal Yakınsaklık ve Diğer Metotlar

Yukarıda ideal tanımı verilirken ideallerin küçük nesnelere temsil edebileceği söylenmişti. Şimdi bu temsil somut hale getirilebilir. Bunun için aşağıdaki gözlem yapılmalıdır. Bir dizinin yakınsaklığı tanımlanırken o dizinin sonlu tane terimi dışındaki her teriminin yakınsayacağı noktaya yeterince yakın olması gerektiği belirtilmişti. Peki doğal sayıların tüm sonlu alt kümelerinin kümesi neydi? Elbette bir ideal. Eğer birisi bu ideal yerine doğal sayılar üzerinde apaçık olandan başka bir ideal kullanırsa, o halde o ideale bağlı bir yakınsaklık tanımı verilebilir. Bu, şu anlama gelir: Verilen bir uzaydaki görece küçük kümelerin saptanması, o uzayın hangi şartlar altında istenmeyen özelliklerinin ihmal edilebileceğini söyler. Yani, yakınsaklık için konuşulursa, yakınsak bir dizinin sonlu tane terimi dışındaki her teriminin “düzgün” olması istenilir. Geriye kalan sonlu tane eleman *ihmal edilir*. İşte idealler, belirli bir mantığa göre ne tür kümelerin ihmal edilebileceğinin bir betimlemesini yapar. Aşağıdaki tanımı meşru yapan yegâne şey ideallerin bu doğasıdır.

Tanım 3.4.1.1. f bir reel terimli dizi, \mathfrak{I} doğal sayılar üzerinde bir ideal olsun. f ye $l \in \mathbb{R}$ sayısına \mathfrak{I} -yakınsaktır denir eğer her $\varepsilon > 0$,

$$\{n: |f_n - l| \geq \varepsilon\} \in \mathfrak{I}$$

ise.

Sanırım konunun nereye gittiği anlaşılmaya başlandı. Önce idealler tanımlandı, daha sonra yakınsak diziler tanımlandı ve sonlu kümeler ailesinin bir ideal olduğu gösterildi. Son olarak asimptotik yoğunluğu sıfır olan kümelerin kümesinin bir ideal olduğu gösterildi ve şimdi de ideal yakınsaklık tanımı verildi. Galiba bunlardan sonra doğal yoğunluğu sıfır olan kümeler kullanılarak bir yakınsaklık tanımlanacağı aşikardır.

Tanım 3.4.1.2. f reel terimli dizisi l reel sayısına *istatistiksel yakınsak* denir eğer f \mathfrak{I}_0 -yakınsak ise. Bu durum $st - \lim_n f_n = l$ ile gösterilir. Verilen bir $l \in \mathbb{R}$ ye istatistiksel yakınsak (st-yakınsak) tüm dizilerin kümesi $c^{st}(l)$ ile gösterilecektir ve *tüm istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi* $c^{st} = \cup_l c^{st}(l)$ olarak tanımlanır.

Lemma 3.4.1.3. Tüm klasik yakınsak diziler istatistiksel yakınsaktır. İki istatistiksel yakınsak dizinin toplamı, skalerle çarpımı ve kendi aralarında çarpımı da istatistiksel yakınsaktır.

İspat. İstatistiksel yakınsaklığın tanımından ve yoğunluğu sıfır olan kümelerin bir ideal oluşturduğundan açıktır. ■

Yakınsak diziler tanımlandıktan sonra her yakınsak dizinin sınırlı olması gerektiği vurgulanmıştı. Fakat bu durum her yakınsaklık metodu için doğru olmayabilir. Örneğin aşağıdaki dizi 0'a istatistiksel yakınsaktır, fakat sınırlı değildir. Ama eğer birileri istatistiksel sınırlılık diye bir tanım verseydi bu fonksiyon tam da o tanıma uygun bir fonksiyon olurdu.

$$f(n) = \begin{cases} n, n \in \{k^2: k \in \mathbb{N}\}, \\ 0, \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

Görüldüğü üzere, ideallerin ve filtrelerin matematikte oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olduğu bir gerçektir. Özellikle çok güçlü tanımları zayıflatmak veya bir uzayı porsiyonlara ayırmak için oldukça güçlü araçlardır. İdeallerin ve filtrelerin yaygın kullanım alanı ve uygulamaları için okuyucu (Kunen, 1980)'a başvurabilir. Aşağıda istatistiksel yakınsaklığın sağladığı bazı özellikler verilmiştir.

Lemma 3.4.1.4. Bir dizi $l \in \mathbb{R}$ ye istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak o dizinin yoğun ve l ye klasik yakınsak bir alt dizisi vardır.

İspat. f reel terimli bir dizi ve $st - \lim_n f_n = l$ olsun. Yani, $\forall \varepsilon > 0 [\pi(A = \{n: |f_n - l| \geq \varepsilon\}) = 0]$. Şimdi $h: \omega - \{0\} \rightarrow A^c$ bir sıralama izomorfisi olsun. Artık istenilen alt dizi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\forall k \in \omega - \{0\} (g_k = f_{h_k}).$$

Bu tanım, iyi sıralama prensibinden dolayı meşru bir tanımdır ve $(g_k)_{k \in \omega}$ alt dizisi istenilen alt dizi koşulunu sağlar. ■

Lemma 3.4.1.5. Hiçbir sınırsız reel terimli dizinin bütün alt dizileri istatistiksel yakınsak olamaz. Yani, her sınırsız dizinin en az bir istatistiksel yakınsak olmayan alt dizisi vardır.

İspat. f sınırsız bir dizi olsun. Eğer f istatistiksel yakınsak değil ise, o zaman alt dizi olarak f nin kendisi seçilebilir. Kabul edelim ki f istatistiksel yakınsak bir dizi. O halde asimptotik yoğunluğu sıfır olan bir A kümesi vardır öyle ki, f nin indisleri A nın dışında kalan tüm terimlerinin oluşturduğu dizi sınırlıdır. Bu bir önceki Lemma 1.2.4.'ten ve yakınsak her dizinin sınırlı olmasından dolayı doğrudur. Şimdi alt dizi olarak f 'nin indisleri sadece ve sadece A 'da olan terimlerini alalım. Bu dizinin istatistiksel yakınsak olmadığı açıktır. Aksi halde yakınsak ve yoğun bir alt dizisi olurdu. ■

Yukarıdaki lemma (Connor ve Grosse-Erdman, 2003) makalesinde bazı yakınsaklık metotlarının sağladığı bir koşul olarak verilmiştir. Yani bu lemma o koşulun özel halinin bir ispatıdır.

İstatistiksel yakınsaklığın avantajları dışında bazı dezavantajları da mevcuttur. Bu dezavantajlar pratikte avantajlarından daha güçlü olmadıkları için birçok konunun istatistiksel genişlemeleri verilmiştir. Belki de bu dezavantajlar arasında en önemli olanı istatistiksel yakınsak bir dizinin her alt dizisinin de aynı sayıya istatistiksel yakınsak olması gerekmediğidir. Bu özellik şunun için önemlidir: Örneğin istatistiksel yakınsaklık kullanarak klasik bir tanımın genişletildiği varsayalım. Eğer istatistiksel yakınsak bir dizi kullanarak bir küme karakterize edilmişse, o kümenin tüm alt kümelerinin de o dizinin alt dizileri tarafından karakterize edilmesi beklenir. Fakat yakınsaklık korunmayacağından ötürü, her alt kümeyi karakterize etmek mümkün olmayacaktır. Bu duruma somut bir örnek olarak bir grubun karakterize edilmiş alt grupları verilebilir.

Yukarıdaki tanıma göre $(\mathbb{R}, +, || \cdot ||_{\mathbb{Z}})$ üçlüsü bilinen toplama işlemi ve en yakın tamsayıya uzaklık normu (bu normun ürettiği metriğin ürettiği topoloji) ile bir topolojik gruptur. Bu grubun bir f dizisi tarafından karakterize edilmiş alt grubu $\{r \in \mathbb{R} : f_n x \rightarrow 0 \pmod{\mathbb{Z}}\}$ bkz. (Weber, 2021) olarak tanımlanır, bu konunun daha geniş bir analizi Bölüm 3.5.'te verilecektir. Burada bir yakınsaklık söz konusu olduğundan, acaba klasik yakınsaklık yerine daha genel bir yakınsaklık kullanılırsa ne olur sorusunun cevabı birçok yazar tarafından verilmiştir, kısacası bu sonuçlar genelleştirilmiştir.

Artık başlattığımız tartışma bitirilebilir. Yukarıda istatistiksel yakınsaklığın tüm alt dizileri istatistiksel yakınsak yapmadığı söylenmişti. Şu soru sorulmalıdır: Eğer istatistiksel yakınsaklık böyle bir yakınsaklık metodu değilse, o halde karakterize edilmiş bir alt grubun acaba hangi alt grupları hangi alt diziler tarafından karakterize edilir? Bu sorunun cevabını vermek kolay değildir, çünkü alt grupların belirlenmesi bir yana, önce o grupları karakterize edecek alt dizilerin bir tahmininin yapılması gerekir. İşte bu tahmini yapmak istatistiksel yakınsaklığın bu tartışmada bahsedilen doğasından ötürü hiç de kolay değildir. Tam da bu gibi nedenler yüzünden herhangi bir yakınsaklık türünü betimleyen bir tanımın alt dizileri koruması önemlidir.

Yine de literatürde tanımlanan birçok metot tüm alt dizileri koruyan metotlar değildir. Bunun yerine genelde yazarlar en azından bir tane de olsa alt dizi korumasını isterler. Aşağıda bir metottan ne anlaşılacağı tanımlandıktan sonra, bazı metot türlerinden bahsedilip, bu metotlarla ne gibi süreklilik türlerinin tanımlanacağı gösterilecektir.

Tanım 3.4.1.6. $X \subset {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ bir alt vektör uzayı olmak üzere herhangi $M : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir *metot* denir. $f \in X$ dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına *M-yakınsak* denir eğer $M(f) = l$ ise. $c_M(l)$ ile l sayısına *M-yakınsak* tüm diziler uzayı gösterilecektir.

Tanım 3.4.1.7. M bir metot olmak üzere M 'ye *regüler metot* denir eğer tüm klasik yakınsak diziler *M-yakınsak* ise.

Eğer geniş bir pencereden bakılırsa, aslında klasik anlamdaki limit fonksiyonelinin yukarıdaki metot tanımının özel bir hali olduğu görülebilir. Çünkü limit fonksiyonu da aslında yakınsak diziler uzayında tanımlı bir fonksiyondan başka bir şey değildir. Toplanabilme metotları ile ilgili daha çok bilgi için (Boos, 2000; Bor, 1985) çalışmalarına bakılabilir.

Yapılacak ilk gözlemlerden bir tanesi bir ideal yardımı ile tanımlanan tüm metotların regüler metot olmadıklarıdır. Yani, ideal yardımı ile verilen bir tanımın regüler metot olması için gerek ve yeter koşul söz konusu idealin tüm tek nokta kümelerini içermeleridir. Bunun nedeni oldukça açıktır, eğer bir ideal bütün tek nokta kümelerini içeriyorsa, o zaman bütün sonlu kümeleri de içeriyor demektir (birleşime kapalılıktan dolayı) ve eğer sonlu kümelere sahipse, o zaman klasik yakınsaklığı koruyor demektir zira klasik yakınsaklık tamamen sonlu kümeler tarafından karakterize edilen bir yakınsaklık türüdür. Buradan istatistiksel yakınsaklığın regüler bir metot olduğu kolayca görülür.

3.5. Karakterize Edilmiş Alt Gruplar ve İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölüm verilen bir G grubunun karakterize edilmiş alt gruplarının tanımı, bu alt grupların bazı özellikleri ve istatistiksel yakınsaklığın bu alt grupların karakterizasyonuna sağladığı katkılar ile ilgili olacaktır. Her matematikçinin üzerine en az bir defa da olsa düşündüğü yakınsaklık kavramının cebirsel yapılarda nasıl kullanılabileceği ve topolojik uzay ve grup kavramlarının bir araya geldiklerinde ne gibi güçlü sonuçlar doğurabileceği bu bölümde resmedilmeye çalışılmıştır.

Bu bölümde, $\mathbf{a} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ olmak üzere $\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ ile \mathbf{a} dizisinin mutlak değer serisi gösterilecektir ve bu dizinin supremum normu $\|\mathbf{a}\|_{\infty} = \sup_n |a_n|$ olarak tanımlanır. \mathbf{a} dizisinin sınırlı olması durumunda yukarıdaki supremum her zaman vardır ve genelleştirilmiş reel sayılar yerine normal reel sayılar kümesi üzerinde bir norm verir. Belirli bir terimden sonra tüm terimleri sıfır olan tüm dizilerin kümesi c_0 ile gösterilecektir, yani $c_0 = \{\mathbf{x} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (x_n = 0)\}$ ayrıca $c_0^{st} = \{\mathbf{x} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\} \in \mathfrak{I}_0\}$ olsun. $M = (m_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ bir matris olmak üzere M matrisinin supremum normu $\|M\|_{\infty} = \sup_{i,j} |m_{i,j}|$ olarak tanımlanır. Burada norm denilmesi pek de doğru değildir, çünkü matrisin sonsuz bir matris olması durumunda supremum her zaman olmayabilir. Bunu önlemek adına açıkça sınırsız olan dizilerin supremum normu genişletilmiş reel sayılar ($\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) üzerinde tanımlanacaktır ve bu tezdeki tüm matrisler, aksi söylenmedikçe, satırları belirli bir terimden sonra sıfır olan matrisler olarak ele alınacaktır.

Ayrıca bu bölümde bilinen supremum (üst sınırların en küçüğü) ve infimumu (alt sınırların en büyüğü) olma kavramlarının istatistiksel genellemeleri kullanılacaktır. Kabaca, bir dizinin istatistiksel supremumu o dizinin tüm istatistiksel üst sınırlarının infimumu olarak tanımlanır. Bir $b \in \mathbb{R}$ sayısına bir dizinin istatistiksel üst sınırı denir eğer o dizinin b 'den küçük olan terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümenin asimptotik yoğunluğu 1 ise. İstatistiksel alt sınır ve dolayısıyla istatistiksel supremum bu tanımın bir analogudur. Bu konunun detayları için (Altınok, Kaya ve Küçükbaşlan, 2021) çalışması ve bu çalışmadaki referanslara bakılabilir.

Tanım 3.5.1. G bir Abel (değişmeli) grup olsun. G 'nin mertebesi sonlu olan tüm elemanlarının oluşturduğu küme G üzerindeki işlem ile bir gruptur. Bu gruba G kümesinin *burulma (torsion) alt grubu* denir.

Bu tanımdan grubun değişmeli grup olma koşulu kaldırılamaz, çünkü eğer kaldırılırsa alt grup olma koşullarından kapalılık sağlanmayabilir. Detaylar için okuyucu sonsuz mertebeli dihedral grubu ele alıp bu grubun burulma alt grubu olmadığını iki tane sonlu mertebeli elemanın çarpımının sonsuz mertebeli olabileceğini gösterebilir.

Burulma alt grubu tanımının çeşitli varyasyonları verilebilir ve bu varyasyonlar sayesinde birçok yorum yapılabilir, örneğin mertebesi sonlu olan elemanlar yerine mertebesi bir asal sayının kuvveti olan elemanlar göz önüne alınabilir, yani $\{g: p^n g = 0\}$ (p bir asal sayı, $n \in \omega$ ve 0 birim eleman) alt grubu göz önüne alınırsa bu alt gruba p -burulma alt grubu denir. Peki topolojik gruplar söz konusu olduğunda neredeyse en aşikâr topolojik kavram olan yakınsaklık kavramının burulma alt grupları üretmekteki etkisi nedir? Bu kavramın çok kapsamlı bir analizi için (Dikranjan, 2001) çalışması tavsiye edilmektedir. Bu tezde sadece bu konu nun çok küçük bir kısmı ele alınacaktır.

Tanım 3.5.2. G bir topolojik grup p bir asal sayı olsun. $x \in G$ elemanına *topolojik p -burulma elemanı* denir eğer $x^{p^n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$. x *topolojik burulma elemanıdır* eğer $x^{n!} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, (Armacost, 1981). Bu tanım daha da genelleştirilerek şu şekilde verilebilir:

Tanım 3.5.3. G topolojik grup, $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir tamsayı dizisi ve $g \in G$ olmak üzere $g^{a_n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ ise o zaman g 'ye *topolojik m -burulma elemanı* denir.

Yukarıda yakınsaklık kavramı olaya dahil olduğundan beri yakınsaklığın türlü genellemelerinin kaçınılmaz bir şekilde var olan sonuçları daha genel hale getireceği birçok matematikçinin aklını kurcalamıştır. İstatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık gibi kavramlar tarafından verilen burulma elemanlarının Abel grupların genel teorisinde önemli bir yeri mevcuttur. Çünkü daha önce üzerinde çalışılmamış birçok yeni alt gruplar üretilmiş ve bu grupların özellikleri incelenmiştir, (Dikranjan, Das ve Bose, 2020; Das, Ghosh, 2021; Weber, 2021).

Aslında bu alandaki birçok çalışma klasik durum olan \mathbb{R}/\mathbb{Z} faktör grubu (çember grubu olarak da bilinir) üzerinde yoğunlaşmaktadır. Fakat \mathbb{R} ve \mathbb{R}/\mathbb{Z} arasında doğal bir kanonik projeksiyon olduğundan, yani her reel sayıyı faktör grubundaki denklik sınıfına gönderen fonksiyon olduğundan ve bu bir epimorfizm olduğundan, \mathbb{R} üzerinde çalışmak çember grubunda çalışmak ile aynı şeydir denilebilir, (Barbieri, Bruno ve Weber, 2017).

Tanım 3.5.4. $\|\cdot\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| = \min\{|x - k| : k \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlanan fonksiyon \mathbb{R} üzerinde bir yarı-normdur. Bu norma *en yakın tamsayıya uzaklık normu* denir.

Yukarıdaki fonksiyonun bir norm olmasının sebebi zaten hali hazırda başka bir norm (mutlak değer normu) kullanılarak tanımlanmış olmasıdır. Aynı zamanda minimum fonksiyonunun tanım kümesindeki kümelerin her biri reel doğrunun alttan sınırlı bir kümesi olduğundan ve bu alt sınırların en büyüğü kümeye ait olduğundan (yukarıdaki durumda infimum kümeye aittir) minimum fonksiyonunu

kullanmak bir sorun teşkil etmez. Dahası minimum fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğundan yukarıda tanımlanan fonksiyon bir normdur.

Tanım 3.5.5. $\mathbf{a} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau_{\mathbf{a}}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} : \|a_n x\| \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)\}$$

kümesine \mathbb{R} 'nin \mathbf{a} tarafından karakterize edilen alt grubu ve \mathbf{a} dizisine bu alt grubun belirleyici dizisi denir.

Bu kümenin neden bir alt grup olduğu aşağıdaki şekilde görülebilir. Alt grup olma kavramının grup işleminin kısıtlanışının yine bir işlem olarak korunmasına bağlı olduğu Bölüm 3.2.'de söylenmişti. Denk bir karakterizasyon ise şudur: Eğer G bir grup ve $H \subset G$ ise o halde $H < G \leftrightarrow \forall a, b \in H(ab^{-1} \in H)$. Bu sonuç grup işlemi çarpımsal bir işlem gibi görülerek yazılmıştır ve gerek ve yeter koşulun sağlandığını görmek oldukça doğrudandır, ama yine de detaylar için (Hungerford, 2012) bakılabilir. O halde şimdi, eğer $x, y \in \tau_{\mathbf{a}}(\mathbb{R})$ ise, o zaman normun üçgen eşitsizliği özelliği ve homojen olma özelliği kullanılarak $x - y \in \tau_{\mathbf{a}}(\mathbb{R})$ olduğu görülebilir.

Elbette yukarıdaki bölümlerde olduğu gibi tanımlarda kullanılan yakınsaklık kavramının türlü genellemeleri ortaya (çoğu zaman) yeni bir küme çıkarmaktadır. Bu kümeler klasik yakınsaklığın ürettiği kümelerin bir genellemesidir ve klasik durumda sağlanmayan bazı özellikleri de sağlamaktadır. Örneğin,

Tanım 3.5.6. $\mathbf{a} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tau_{\mathbf{a}}^{st}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} : \|a_n x\| \in c_{st}(0)\}$$

kümesine \mathbb{R} grubunun \mathbf{a} tarafından istatistiksel olarak karakterize edilmiş (*st-karakterize*) alt grubu denir.

Bu tanımları daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki örnekler göz önüne alınabilir. $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli dizisi $(a_n) = (1)_{n \in \mathbb{N}}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\tau_{\mathbf{a}}^{st}(\mathbb{R})$ kümesi normu sıfır olan elemanlar kümesidir, yani $\{0\}$ tek nokta kümesidir ki bu küme trivial alt gruptur (sadece birim elemanı içeren küme). Şimdi, $(a_n) = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ olarak tanımlansın. O halde

$$\tau_{\mathbf{a}}^{st}(\mathbb{R}) = \left\{x \in \mathbb{R} : \|2^n x\| \xrightarrow{st} 0(n \rightarrow \infty)\right\} = \{x \in \mathbb{R} : \{n : 2^n x \in \mathbb{Z}\} \in \mathfrak{I}_0\}$$

olduğu görülebilir. Elbette belirleyici dizi daha karmaşık bir hal aldığında o belirleyici dizinin karakterize ettiği alt grubun saptanması oldukça güçleşir. Şu anda verilen herhangi bir alt grubun belirleyici dizisini bulma problemi hala açık bir problemdir (sayılabilir sonsuz tüm alt gruplar karakterize edilmiştir fakat sayılamaz alt gruplar hala belirlenmiş değildir) ve bu problemin tersi de açık

bir problemdir, yani, bir dizi verildiğinde o dizinin hangi alt grubu karakterize ettiği tüm diziler için çözülmüş bir problem değildir. Bu konu üzerinde iyi bir makale için (Di Santo, Dikranjan ve Giordano Bruno, 2018).

Bu bölümdeki tartışmayı fazla uzatmadan ne gibi sonuçlar verilebileceği aşağıda tartışılmaktadır. Tezin esas konusu sürekli fonksiyonlar olduğu için buradaki tartışma küçük bir sonuç ile bitirilecektir.

Belki de karakterize edilmiş alt gruplar hakkında sorulabilecek en doğal sorulardan bir tanesi ne zaman birbirlerini içerip içermedikleridir. Bu sorunun cevabı bu teze sığacak kadar kısa değildir ve bu yönde atılan birçok adım asla tamamlanmış değildir, (Barbieri, Bruno ve Weber, 2017). Elbette bir dizi tarafından karakterize edilen bir grup belirleyici dizisinin bir alt dizisi tarafından karakterize edilen diğer alt grubu içermek zorundadır, fakat bu apaçık alt dizi koşulundan başka ne tür koşullar mevcuttur? Akla gelebilecek diğer bir basit koşul ise bir dizi verildiğinde bu dizinin bir skaler katını almaktır veya daha genel olarak $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ olduğunda $\mathbf{a} = \mathbf{x}\mathbf{b}$ biçimindeki dizilere bakmaktır. Ancak bu tür çarpımlar en geniş haliyle diyagonal matris çarpımından başka bir şey olmadığından, diziler üzerine koşullar koymaktansa direkt matrisler üzerine koşullar konularak neredeyse en genel sonuçlar elde edilebilir. Bu sonuçlardan bir tanesi aşağıdaki (Barbieri, Bruno ve Weber, 2017) sonucudur.

Lemma 3.5.7. M satır sonlu, sonsuz bir matris olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın.

a) $\forall j \in \mathbb{N}[c_j = \{m_{i,j} : i \in \mathbb{N}\} \in c_0]$.

b) $\sup_{i \in \mathbb{N}} \|\{m_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}\|_1 < \infty$.

Bu taktirde, eğer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ ve $\mathbf{a} = \mathbf{M}\mathbf{b}$ ise, o zaman $\tau_{\mathbf{b}}(\mathbb{R}) \subset \tau_{\mathbf{a}}(\mathbb{R})$ sağlanır.

İspat. $x \in \tau_{\mathbf{b}}(\mathbb{R})$ olsun. Bu demektir ki $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \|b_j x\| < \varepsilon$. Aynı zamanda $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq n_0$,

$$\|a_i x\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} m_{i,j} b_j x \right\| = \left\| \sum_{j \geq N} m_{i,j} b_j x \right\| \leq \|\{m_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}\|_1 \cdot \varepsilon$$

sağlanır, çünkü a) koşulundan dolayı matrisin terimleri ile çarpılan b_j terimleri, sütunlar eninde sonunda sıfır olan bir dizi olduğundan yok olurlar ve b) koşulu yukarıdaki ifadedeki eşitsizliği tamamlar. Dolayısıyla $x \in \tau_{\mathbf{a}}(\mathbb{R})$ olduğu görülür. ■

Lemma 3.5.6'nın a) koşulu söz konusu matrisin bütün sütunlarının bir süre sonra sıfır olduğunu söylerken b) koşulu ise her bir satır bir dizi olarak ele alındığında bu dizinin terimlerinin mutlak değerlerinin oluşturduğu serinin sınırlı olduğunu söyler. Kısacası neredeyse gerekli içerme bağıntısının sağlanması için olmazsa olmaz koşullardır. Çünkü bu koşullar biraz zayıflatıldığında bu sefer de matris üzerine başka kısıtlayıcı koşullar konulmalıdır ki gerekli içerme sağlansın, detaylar için (Barbieri, Bruno ve Weber, 2017).

Bu lemmanın ve (Barbieri, Bruno ve Weber, 2017) çalışmasındaki diğer sonuçların koşullarının istatistiksel yakınsaklık söz konusu olduğunda nasıl olacağı sorusu (Weber, 2021) çalışmasında sorulmuştur. Bu sorunun cevabı (sadece bu lemma için) aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.5.8. M satır sonlu, sonsuz bir matris olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın.

- $\forall j \in \mathbb{N}[c_j = \{m_{i,j} : i \in \mathbb{N}\} \in c_0^{st}]$.
- $\exists U > 0[\text{st} - \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\{m_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}\|_1 < U]$.

Bu taktirde, eğer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ ve $\mathbf{a} = M\mathbf{b}$ ise, o zaman $\tau_{\mathbf{b}}^{st}(\mathbb{R}) \subset \tau_{\mathbf{a}}^{st}(\mathbb{R})$ sağlanır.

İspat. $x \in \tau_{\mathbf{b}}^{st}(\mathbb{R})$ olsun. Buradan $\forall \varepsilon > 0\{n \in \mathbb{N} : \|b_j x\| \geq \varepsilon\} \in \mathfrak{F}_0$ olduğu görülür. Aynı zamanda hipotezdeki a) ve b) koşullarından her j ve i' doğal sayıları için

$$\pi(K = \{i \in \mathbb{N} : m_{i,j} = 0\} \cap \{j' \in \mathbb{N} : \|m_{i',j'}\|_1 < U\} \cap \{n \in \mathbb{N} : \|b_j x\| < \varepsilon\}) = 1$$

sağlanır. Çünkü asimptotik yoğunlukları 1 olan iki kümenin ara kesitinin de asimptotik yoğunluğu 1'dir. O halde

$$\|a_i x\| = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} m_{i,j} b_j x \right\| = \left\| \sum_{j \in K} m_{i,j} b_j x \right\| \leq \|\{m_{i,j} : j \in \mathbb{N}\}\|_1 \cdot \varepsilon < U \cdot \varepsilon$$

sağlandığından, $\tau_{\mathbf{b}}^{st}(\mathbb{R}) \subset \tau_{\mathbf{a}}^{st}(\mathbb{R})$ elde edilir. ■

3.6. Diziler ve Süreklilik

Bu bölümde sürekli fonksiyonların hep bahsedilen $\varepsilon - \delta$ -tanımı verilecek olup, bu tanımın türlü genellemeleri incelenecektir. Bu genellemeler arasında sadece dizisel süreklilik üzerinden yapılan genellemeler bu tezin ana konusu olacaktır. Sürekli fonksiyonların günümüzde bilinen tanımının nasıl evrildiği konusunda küçük bir giriş yapılmıştı. Burada bunu kısaca özetlemek gerekirse, ilk formel süreklilik tanımı Bolzano tarafından 1817 yılında verilmiştir ve daha sonra Cauchy, Weierstraß ve Goursat gibi birçok matematikçi tarafından belirli kısımları değiştirilerek de olsa kullanılmaya başlanmıştır (Rusnock ve Kerr-Lawson, 2005). Hatta, düzgün sürekliliğin noktasal süreklilikten farklı olduğu da yine Bolzano tarafından söylenmiştir.

Bu tezi ilgilendiren dizisel sürekliliğin klasik sürekliliğe denk olduğunun tam olarak kim tarafından ve ne zaman verildiği yazar tarafından net bir şekilde bulunamamıştır. Fakat sezgisel olarak iki tanımın birbirine zaten denk olması gerektiği, en azından eski dönemlerde matematikçilerin her zaman teoremlerini ürettiği \mathbb{R} uzayında sezgiye pek de aykırı değildir. Bunun sebebi şöyle açıklanabilir: Eğer bir fonksiyon bir noktada sürekli ise, o zaman o fonksiyonun birbirine yeterince yakın iki argümanının

fonksiyon altındaki resimleri de birbirine yeterince yakın olmalıdır. Yani formel olarak aşağıdaki tanım söz konusudur.

Tanım 3.6.1. (X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar olmak üzere, $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [d(x, x_0) < \delta \rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon]$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu koşul birbirine yeterince yakın noktaların görüntülerinin de birbirine yeterince yakın olduklarını söylediği için ve bir dizinin bir noktaya yakınsaması için sonlu terimi dışında kalan tüm terimlerinin o noktaya yeterince yakın olması gerektiği için, sürekli fonksiyonların zaten dizilerin yakınsaklıklarını koruması gerektiği bir nevi açıktır. Burada önemli husus, dizilerin yakınsaklığını noktasal olarak koruyan fonksiyonların sürekli olduğunu anlamaktır. Bu noktada yukarıdaki tartışma kadar rahat olunamaz. Bunun ilk nedeni, dizilerin yakınsaklığını noktasal olarak koruyan fonksiyonların sürekli olduğu gösterilirken belirli seçimler yapılması gerektiği, yani kesinlikle ve kesinlikle Seçme Aksiyomu veya onun daha zayıf bir haline ihtiyaç olması ve diğer nedeni de fonksiyonun tanım kümesinin topolojik olarak belirli bir koşulu sağlaması gerektiğidir. Önce bu koşulun nasıl bir koşul olması gerektiği anlaşılmalıdır.

Herhangi bir metrik uzayda uzaklık kavramının direkt bir hesaplaması mümkün olduğundan dolayı, bu metrik tarafından üretilen topoloji ele alındığında verilen herhangi bir noktanın sayılabilir komşuluk tabanına sahip olacağı kolayca anlaşılabilir. Bunun için o nokta etrafında yarıçapları sıfıra giden rasyonel terimli bir diziden oluşan bir açık toplar ailesi almak yeterlidir. Fakat, yukarıda da tartışıldığı üzere bu özellik herhangi bir topolojik uzay için doğru değildir. Aksi halde birinci sayılabilir topolojik uzay diye bir tanım verilmesine gerek kalmazdı.

Eğer bir dizinin bir noktaya yakınsaması bir fonksiyon tarafından noktasal olarak korunuyor ise, o zaman o fonksiyonun birinci sayılabilir topolojik uzaylarda sürekli olmaktan başka şansı yoktur. Çünkü süreksiz olduğu bir nokta üzerinde, yukarıda tarif edilen açık toplar alınarak, çok basit bir şekilde fonksiyonun verilen bir dizinin limitini koruduğu hipotezi ile çelişkiye düşülür.

Tanım 3.6.2. $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında dizisel sürekli denir eğer

$$\forall a [a \in c(x_0) \rightarrow f(a) = (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \in c(f(x_0))]$$

ise.

Lemma 3.6.3. $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir ancak ve ancak o noktada dizisel sürekli ise.

İspat. Bu ispatın yeterlilik kısmı oldukça açıktır, yani her sürekli fonksiyonun dizisel sürekli olduğu açıktır. Gereklilik kısmı için ise önermenin karşıt tersini ele almak yeterlidir. Yani eğer f $x_0 \in X$

noktasında sürekli değilse o halde o noktada dizisel sürekli olamayacağını söylemek yeterlidir. f x_0 noktasında süreksiz olsun. O halde x_0 a çok yakın olan fakat görüntüleri birbirlerinden uzak olan en az bir $x' \in X$ elemanı vardır. Eğer bu noktadan bir tane var ise, o zaman her biri x_0 noktasının $\frac{1}{n+1}$ kadar uzağında olan ama görüntüleri birbirinden oldukça uzak olan noktalar mevcuttur (işte tam da bu noktada Seçme Aksiyomu kullanıldığına ve birinci sayılabilir olma özelliğinin kullanıldığına dikkat edilmelidir). Açıktır ki yukarıda Seçme Aksiyomu ile seçilen elemanlar x_0 a yakınsak bir dizi meydana getirirler fakat görüntüleri birbirine yeterince yakın değildir. Dolayısıyla f x_0 noktasında dizisel sürekli değildir.

■

3.7. Lineerlik ve Süreklilik Arasında Sıkışmak

Tezin başlarında topoloji tanımı verildikten sonra da belirtildiği üzere, süreklilik ve benzeri tüm kavramların analizi yapılırken üzerinde çalışılan uzayın topolojik yapısının ne kadar önemli olduğu bu bölümde bir kez daha gösterilmiş oldu. Bir önceki bölümde tanımlanan yakınsaklık metotlarının, yakınsaklık kavramı tarafından karakterize edilen bir süreklilik türü olan dizisel süreklilik üzerine uygulanması sonucunda ortaya yeni dizisel süreklilik türleri çıkması kaçınılmazdır. Belki de bu yeni tanımlar bir şekilde klasik kavramlar ile örtüşeceklerdir, fakat yine de tartışılmaya değerdir.

Tanım 3.7.1. M bir metot olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna x_0 noktasında M -sürekliliği denir eğer

$$\forall a \in c_M(x_0) \rightarrow f(a) = (f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \in c_M(f(x_0))$$

ise. f fonksiyonuna M -sürekliliği denir eğer her $x \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki koşul sağlanıyor ise.

Yukarıdaki tanımın noktasal olarak verildiğine ve o noktaya yakınsayan dizilerin yine fonksiyonun tanım kümesinde olduğuna dikkat edilmelidir. Eğer fonksiyonun tanım kümesi reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olarak alınırsa o zaman verilen bir noktaya yakınsayan dizilerin de o verilen küme üzerinde ele alınmaları gerekir. Dolayısıyla, bir fonksiyon bir kümeye kısıtlandığında sürekli fakat normalde sürekli olmayabilir, detaylar için (Connor, Grosse-Erdman, 2003).

Tanım 3.6.1. yardımı ile tanımlanan fonksiyonlar artık bilinen klasik sürekli fonksiyonlar gibi davranmak zorunda değildirler. Ancak, belki de bir talihsizlik olarak, kullanılan metotların çoğunluğunun lineer fonksiyonlar ve klasik sürekli fonksiyonlar arasında sıkışmış fonksiyonları karakterize ettiği anlaşılacaktır. Bunu anlamak için kullanılan metot üzerindeki şartları irdelemek faydalı olacaktır. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna *lineer fonksiyon* denir eğer

$$\exists a, b \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} [f(x) = ax + b]$$

koşulu sağlanıyor ise.

Lemma 3.7.2. M regüler bir metot olsun. Bu taktirde tüm lineer fonksiyonlar M -sürekli.

Bu lemmanın ispatı oldukça açıktır, çünkü regüler metotlar klasik yakınsak dizileri noktasal olarak korur. Yani, eğer herhangi bir nokta üzerinde bir lineer fonksiyon M -sürekli olmasaydı, o zaman o noktada sürekli olamazdı. Fakat metot regüler olduğundan dolayı bu bir çelişki yaratırdı.

Tanım 3.7.3. M metoduna *alt dizisel metot* denir ancak ve ancak her M -yakınsak dizinin klasik yakınsak bir alt dizisi varsa.

Bu tanım biraz irdelenirse aşağıdaki tartışmaya varılabilir. Klasik yakınsaklıkta bir dizi eğer yakınsaksa o halde o dizinin *her* alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır. Fakat bu durum daha genel metotlar düşünüldüğünde hızlı bir şekilde bozulabilir. Bazı metotlar tanımlarının doğası gereği bütün alt dizileri yakınsak yapmak yerine daha zayıf bir koşul olan en az bir alt diziyi de yakınsak yapma koşulunu sağlarlar. Örneğin istatistiksel yakınsaklık metodu alt dizisel bir metottur. Çünkü eğer bir dizi bir noktaya istatistiksel yakınsak ise o halde dizinin epsilonun yakın komşuluğu dışında kalan terimlerinin indislerinin oluşturduğu küme daraltılarak (hatta yok sayılarak) o dizinin yine aynı noktaya klasik yakınsak bir alt dizisi kolayca elde edilebilir.

Peki alt dizisel olmayan metotlar nasıl metotlardır? Bu tür metotların araştırması yapılırken, yazar büyük İngiliz matematikçi G. H. Hardy'nin *Iraksak Seriler* (Hardy, 2000) adlı kitabını kurcalarken gördüğü 200 yıllıktan fazla olan makalelerin yardımını oldukça almıştır. Aşağıdaki metot alt dizisel bir metot değildir ve bu metot Charles Hutton tarafından (Hutton, 1812) eserinde yayımlanmıştır.

Tanım 3.7.4. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iraksak bir dizi ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, s_n dizisinin $s_n^{(k)}$ *Hutton- k toplamı* aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$s_n^{(k)} = \frac{1}{2} (s_{n-1}^{(k-1)} + s_n^{(k-1)}), (n \geq 0),$$

öyle ki $s_{-1}^{(k)} = 0, (\forall k \geq 0)$, ve $s_n^{(0)} = s_n, (\forall n \geq 0)$. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $s \in \mathbb{R}$ sayısına *Hutton yakınsak* denir eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^{(k)} = s$ ise. Bu durum $s_n \rightarrow s (Hu, k)$ ile gösterilir.

Örneğin özel olarak $k = 2$ alınırsa,

$$s_n^{(2)} = \frac{1}{4} s_0, \frac{1}{2} s_0 + \frac{1}{4} s_1, \frac{1}{4} s_0 + \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{4} s_2, \dots, \frac{1}{4} s_{n-2} + \frac{1}{2} s_{n-1} + \frac{1}{4} s_n, \dots$$

Olduğu hesaplanabilir. Bu hesaplama dayanarak $s_n = (-1)^n (n + 1), n \geq 0$ dizisi göz önüne alınsın. Bu dizinin iraksak olduğu açıktır. Fakat $s_n \rightarrow 0 (Hu, 2)$ olduğu görülebilir. Çünkü $n \geq 2$ olmak üzere

$$\frac{1}{4} ((-1)^{n-2} (n - 1) + (-1)^n (n + 1)) + \frac{1}{2} ((-1)^{n-1} n) = \frac{1}{4} ((-1)^n 2n + (-1)^{n-1} 2n) = 0$$

olduğu görülebilir. Her ne kadar yukarıdaki toplamın (Hardy, 2000)'de $s_n \rightarrow \frac{1}{4} (Hu, 2)$ olduğu söylenebilir de yazar bu konuda pek ikna olamamış ve tezde kendi elde ettiği sonucu yazmıştır. Açıkça görülmektedir ki yukarıdaki dizi ıraksak bir dizidir ve hiçbir alt dizisi yakınsak değildir. Aslında bir metodun alt dizisel olmaması bir bakıma o metodun daha güçlü bir metod olduğu anlamına gelir, öyle ki bu tür metodlar sınırsız dizileri dahi yakınsak dizilere çevirebilme yeteneğine sahiptirler. Tıpkı toplanabilme metodları tanımlanırken kullanılan motivasyon gibi.

Lemma 3.7.5. $(Hu, 2)$ Hutton metodu alt dizisel bir metod değildir.

Aşağıda daha çok topolojik bir kavram olan zarf kavramı tanımlanacak olup bu kavram yardımı ile bazı alt dizisel metodların klasik sürekli fonksiyonlar ve bir M metodu için M -sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişki gösterilecektir. Zarf kavramı bir kapalılık koşulu olarak düşünülebilir, zira özünde kapalı kümelerin genelleştirilmesinden pek de farklı değildir. Aşağıdaki tanım ve devamındaki önermeler (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasından alınmıştır.

Tanım 3.7.6. $A \subset \mathbb{R}$ ve M bir metod olsun. A kümesinin M -zarfı terimleri A kümesinden olan dizilerin M -yakınsak olduğu noktalar kümesidir. Eğer bu küme $Z(M, A)$ ile gösterilirse, o zaman

$$Z(M, A) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f \in c_M(x, A)\}$$

olduğu görülür. A kümesine M -kapalı denir eğer $Z(M, A) \subset A$ ise.

M -zarf kavramına özel bir örnek olarak M metodunun istatistiksel yakınsaklık olduğu durum verilebilir. Örneğin, eğer $A = \{0,1,2\}$ olarak alınırsa o halde $Z(M, A) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f \in c_{st}(x, A)\} = \{0,1,2\}$ olacaktır. Kısacası zarflar bir metodun etki alanını belirlemeye yardımcı olurlar. Yani, eğer bir kümenin bir metod tarafından üretilen zarfı verilen kümeden daha genişse, o zaman o metod nispeten etki alanı geniş bir metottur, yani verilen kümedeki elemanları kullanarak daha geniş bir küme yaratabilir. Örneğin aritmetik ortalama metodu yukarıdaki A kümesine uygulansaydı A kümesinden daha geniş bir küme elde edilecekti. Regüler metodlar için $cl(A) \subset Z(M, A)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Çünkü regüler metodlar yakınsak dizileri zaten koruduğundan, üstüne bir de klasik yakınsak olmayan dizilerin o metoda göre yakınsadığı noktalar eklenir ve istenilen içerme elde edilir.

Lemma 3.7.7. M regüler metod olmak üzere $\forall A \subset \mathbb{R} (cl(A) = Z(M, A) \leftrightarrow M \text{ alt dizisel})$.

İspat. Gerekliliği göstermek için M nin alt dizisel olduğu kabul edilsin. Ayrıca M regüler bir metod olduğundan yakınsak dizileri noktasal olarak korur. $x \in Z(M, A)$ ise eğer, o zaman M alt dizisel olduğundan x 'e klasik yakınsak bir dizi bulunabilir. Dolayısıyla kapalı kümelerin diziler ile verilen karakterizasyonundan istenilen sonuç elde edilir.

Öte yandan, yeterlilik koşulu için $l \in \mathbb{R}$ ve $x \in c_M(l)$ olsun. Hipotezden ötürü

$$l \in cl(\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = Z(M, \{x_n : n \in \mathbb{N}\})$$

sağlanır. Dolayısıyla x dizisinin bir alt dizisi l sayısına yakınsamak zorundadır. ■

Yukarıdaki lemma şu açıdan önemlidir: Eğer sürekliliğin açık (veya doğal olarak kapalı) kümeler ile verilen karakterizasyonu ele alınırsa, o zaman regüler ve alt dizisel metotlar yardımı ile sürekli kılınan her fonksiyon aynı zamanda klasik sürekli bir fonksiyondur (Connor, Grosse-Erdman, 2003).

Dolayısıyla regüler metotlar için lineer fonksiyonlar sınıfı ve sürekli fonksiyonlar sınıfı arasında bir sınıf üretmekten başka bir şans yoktur. Bu bir bakıma bozulması gereken bir ikilemdir, çünkü sürekli fonksiyonlar sınıfını öz alt kümesi olarak kapsayacak bir sınıf bulmak görevi regüler metotlar tarafından asla tamamlanamaz.



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde yukarıda tanımlanan kavramların, bu bölümde tanımlanacak olan kavramlarla olan ilişkisi tartışılacak olup, ne tür bulgular elde edildiği ifade edilecektir. Tezin başında da belirtildiği üzere, bu bölümün ana amacı, klasik sürekli fonksiyonlar sınıfının bir genişlemesini tanımlamak ve bu genişlemenin birçok genellemeden neden farklı olduğunu ortaya koymaktır.

4.1. Bir Küme Üzerinde Serbest Olma Kavramı ve Serbest Süreklilik

Yukarıdaki bölümde sözü edilen ikilemin kırılması için herhangi bir metoda bağlı olmayan bir yöntem kullanılması gerektiği açıktır. Diğer bir deyişle, ilk defa (Spigel & Krupnik, 1994) çalışmasında ortaya atılan ve şimdiye kadar gösterilen tüm metotlar tarafından sağlanan ikileme mevcuttur. Bilinen toplanabilme veya yakınsaklık metotları yardımı ile tanımlanan sürekli fonksiyon sınıfları ya lineer fonksiyonlar sınıfı ile çakışır ya da bu yeni sınıf klasik sürekli fonksiyonlar sınıfı ile çakışır. İşte bu ikileme, belirli bir ölçüde, (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasında kırılmıştır. Bu çalışmada tam olarak lineer fonksiyonlar sınıfı ve sürekli fonksiyonlar sınıfı arasında sıkışacak bir sınıf üreten regüler metotlar da olduğu gösterilmiştir. Yani lineer fonksiyonlar sınıfından kesin olarak daha geniş ve sürekli fonksiyonlar sınıfından kesin olarak daha dar bir sınıf regüler metotlar yardımı ile üretilebilir. Ancak yine de yazarlar belirli tipte bir ikileme maruz kaldıklarını açıkça ifade etmiştir.

Bu tezin yazarına göre ise sürekli fonksiyonların bir genellemesi aranırken sürekli fonksiyonlar içine bakmak pek de mantıklı bir yaklaşım değildir. Yani sonuçta herhangi bir metot tarafından tanımlanan o fonksiyonların sürekli olmaktan başka şansları yoktur, ki bu tür bir sınıf bir tür “iç genişleme” ortaya koyarken bu tezde tabiri caizse bir “dış genişleme” ortaya konulacaktır. Tanımlanacak olan yeni sürekli fonksiyon sınıf(ları) klasik sürekli fonksiyonları ve hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonları öz alt küme olarak kapsayacaktır ve Lebesgue L^1 sınıfı ile kıyaslanamayacaktır.

4.1.1. Serbest Reel Sayılar

Hep sözü edilen evrensel niceleyiciyi güçlendirme fikrini meşru kılmak için bu niceleyicinin radarına giren dizilerin kümesinin bir şekilde daraltılmasına ihtiyaç vardır. Bu daralmayı elde etmek için dizilerin belirli bir sınıfa tabi tutulmaları gerekmektedir. Bunun bir yolu da dizilerin terimlerinin önce tek tek bir sınıfa tabi tutulması ve daha sonra bu dizinin belirli şartlar altında hangi sınıfa dahil olduğunu söylemektir.

Tanım 4.1.1.1. $K \subset \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, x reel sayısına K üzerinde serbest reel sayı denir eğer x irrasyonel sayı ise veya x rasyonelse ve x in en sade halinin paydası K 'da değil ise. Eğer x K üzerinde

serbest değil ise bu noktaya K üzerinde *kompakt reel sayı* denir. K kümesi üzerinde serbest olan tüm reel sayılar kümesi $\mathfrak{S}(K)$ ile ve x reel sayısının üzerinde serbest olduğu tüm kümelerin kümesi $\mathfrak{S}(x)$ ile gösterilecektir. Yani, x bir reel sayı olmak üzere,

$$x \in \mathfrak{S}(K) \leftrightarrow [(x \in \mathbb{Q}^c) \vee (x \in \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge (m, n) = 1 \wedge n \in \mathbb{N} - K \right\})].$$

Örneğin $K = \mathbb{N}$ olarak alınırsa eğer, bu taktirde $\mathfrak{S}(K) = \mathfrak{S}(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}^c$ olur. Eğer $K = \emptyset$ olarak alınırsa bu taktirde $\mathfrak{S}(\emptyset) = \mathbb{R}$ olacaktır, zira boş kümenin hiçbir elemanı olmadığından dolayı tüm reel sayılar \emptyset -serbest reel sayıdır.

Lemma 4.1.1.2. Her x reel sayısı için $\mathfrak{S}(x)$ ω_1 -complete idealdir.

İspat. Eğer x irrasyonel ise o zaman $\mathfrak{S}(x) = \emptyset(\mathbb{N})$ olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeksizin x 'i rasyonel ve en sade şekilde ele alalım, yani x 'in pay ve paydası aralarında asal. Açıktır ki x 'in paydasını içermeyen bir kümenin herhangi bir alt kümesi de x in paydasını içeremez. Öte yandan, bu kümelerin herhangi bir birleşimi x rasyonel sayısının paydasını içerseydi eğer, o zaman bu birleşimden en az bir tanesi x 'in paydasını içermek zorunda kalırdı, ki bu imkansızdır. ■

Lemma 4.1.1.3. Her sonsuz $K \subset \mathbb{N}$ için, $\mathfrak{S}(K)^c$ kümesi \mathbb{R} 'de yoğundur.

İspat. $K \subset \mathbb{N}$ sonsuz bir küme olsun. Reel düzlemin bir $I = (a, b)$ aralığı olduğunu ve bu aralığın $\mathfrak{S}(K)^c$ kümesinin hiçbir bir elemanını içermediğini kabul edelim. Rasyonel sayılar kümesi reel doğru üzerinde yoğun olduğundan, bir $I' = (a', b') \subset (a, b)$ aralığı vardır öyle ki $a', b' \in \mathbb{Q}$. Genelliği kaybetmeden $a' = \frac{m}{n}$, $b' = \frac{m'}{n'}$, $m, m' \in \mathbb{Z} \wedge n, n' \in \mathbb{N} \wedge (m', n') = 1 = (m, n)$ olduğunu kabul edelim. K sonsuz bir küme olduğundan $\exists k \in K$ öyle ki

$$k \left(\frac{m'}{n'} - \frac{m}{n} \right) > 1$$

sağlanır. Bu taktirde $\frac{mk}{n} < l < \frac{m'k}{n'}$ olacak şekilde bir $l \in \mathbb{Z}$ vardır. Açıktır ki $\frac{l}{k} \in (a', b')$. Bu tartışma herhangi bir aralık için yapılabileceğinden $\mathfrak{S}(K)^c$ reel doğruya yoğundur. ■

Eğer burada bir ara verilip şu ana kadar neler olduğu tartışılmak istenirse, o zaman doğal sayılar kümesinin her sonsuz alt kümesi için reel doğrunun iki parçaya bölündüğünü ve bu parçaların her birinin reel doğruya yoğun olduğunu söylemeden geçmemek gerekir. Yani, her sonsuz $K \subset \mathbb{N}$ için $\mathfrak{S}(K)$ 'nin yoğun olduğu açık olduğundan ve Lemma 3.8.1.3'ten \mathbb{R} 'nin iki yoğun kümeye parçalandığı söylenilebilir.

Diğer Yandan Lemma 3.8.1.2. gayet açık bir sonuç öne sürmesine rağmen, yukarıda tanımlanmış olan bir küme üzerinde serbest olma kavramının $\wp(\mathbb{N})$ 'den sadece küçük bir aile ile ilişkili olduğu açıktır (ω_1 -tam ideal). Bu şu demektir: Bir küme üzerinde serbest olan reel sayılar kümesi reel düzlemde görece “büyük” bir küme iken, bir reel sayı seçilip bu reel sayının üzerinde serbest olduğu kümelerin kümesine bakıldığında ise küçük bir küme olduğu görülür.

4.1.2. Serbest Diziler

Bu alt bölümün esas konusu bir önceki bölümde tanımlanan serbest reel sayı kavramının diziler üzerine nasıl aktarılabiliridir. Yani, sonuçta bir dizi bir fonksiyon ve bir fonksiyon da bir küme olduğundan, bu fonksiyonun görüntü kümesinin serbest olmasının ne demek olduğu tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.2.1. $x \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ ve $K \subset \mathbb{N}$ olsun.

- x dizisine K üzerinde serbest dizi denir eğer $\pi(\{n : x_n \in \wp(K)\}) = 1$ ise.
- x dizisine K üzerinde kompakt dizi denir eğer $\pi(\{n : x_n \in \wp(K)\}) = 0$ ise.

X bir topolojik uzay olmak üzere, K üzerinde serbest olan X değerli tüm dizilerin kümesi $K_S(X)$ ile ve K üzerinde kompakt olan tüm X değerli dizilerin kümesi ise $K_K(X)$ ile gösterilecektir.

Yukarıdaki tanım incelendiğinde, bu tanımın herhangi bir ideal yardımı ile de verilebileceği açıktır, burada çalışma pratikliğinden ve önemli bulunduğu için serbest dizi kavramı doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerin oluşturduğu ideal ile tanımlanmıştır. Herhangi bir reel sayı kümesinin serbestlik kavramının kolay verilemeyeceği açıktır. Çünkü reel doğru üzerinde “küçük” olma kavramı en bilinen iki özellik ile açıklanabilmektedir; bunlardan biri kategorik bir tanım olan birinci kategoriden olma özelliği, diğeri ise daha sezgisel olan sıfır ölçülü olma özelliğidir.

Fakat eğer birisi bu kavramlar ile bir serbestlik tanımı vermeye kalkarsa, örneğin eğer bir $A \subset \mathbb{R}$ nin bir $K \subset \mathbb{N}$ üzerinde serbest olması A 'nın K 'da serbest olmayan elemanlarının oluşturduğu kümenin ölçüsünün sıfır olmasına dayandırılırsa, o zaman neden birinci kategori kullanılmadığı sorgulanabilir. Neyse ki bu duruma bir çözüm önce Sierpinski ve daha sonra daha genel bir haliyle Erdős tarafından verilmiştir; bu çözüm literatürde (Hewitt & Stromberg, 2013; Oxtoby, 2013), Erdős-Sierpinski Dualite Teoremi olarak bilinir. Kabaca ifade etmek gerekirse, ölçüsü sıfır olan kümeler tarafından sağlanan her özellik birinci kategoriden olan kümeler tarafından da sağlandığı anlamına gelir. Yani daha teknik bir ifade ile, reel doğrudan reel doğruya bir fonksiyon vardır öyle ki, bu fonksiyon bire-bir ve örtendir ve üstelik birinci kategoriden bir kümenin bu fonksiyon altındaki resmi ölçüsü sıfır bir kümedir ve tersine ölçüsü sıfır bir kümenin resmi de birinci kategoridendir, (Oxtoby, 2013). Dolayısıyla aşağıdaki tanım tartışılabilir.

Tanım 4.1.2.2. $K \subset \mathbb{N}$ ve $X \subset \mathbb{R}$ olsun. X kümesine K üzerinde ölçüsel serbest küme denir eğer

$$\mu(\{x \in X : dn(x) \notin K\}) = 0$$

ise. X kümesine K üzerinde *kategorik serbest küme* denir eğer

$$\{x \in X : dn(x) \notin K\} \in CAT(I)$$

ise (burada dn ile varsa x reel sayısının paydası gösterilmektedir: dn rasyonel sayılarda tanımlı bir fonksiyondur ve her rasyonel sayıyı paydasına gönderir).

İlk gözlem, ölçüsel serbest küme diye bir kümenin olamayacağıdır, çünkü zaten serbest olma kavramı rasyonel sayılara özgü bir kavram olduğu için (irrasyonel bütün sayılar her küme üzerinde serbesttir) ve tüm rasyonel sayılar kümesi sıfır ölçülü olduğu için her küme ölçüsel serbest kümedir ve bu tanımlı yapmak gereksizdir. Yine aynı tartışmadan kategorik serbest küme tanımı yapmak da anlamsızdır, çünkü rasyonel sayıların tüm alt kümeleri birinci kategoridedir. Yukarıdaki tanımdan daha anlamlı bir tanım olarak aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 4.1.2.3. $K \subset \mathbb{N}$ ve $X \subset \mathbb{R}$ olsun. X kümesine K üzerinde nadir (veya ince) denir eğer,

$$\{x \in X \cap \mathbb{Q}^s : dn(x) \notin K\} \in ND$$

ise.

Artık yukarıdaki tanım meşru bir tanımdır. Çünkü rasyonel sayıların bütün alt kümeleri yoğun olmak zorunda değildir. Eğer Tanım 4.1.2.2. gibi bir tanım verilmek isteniyorsa, o zaman serbest olma kavramının bir şekilde irrasyonel sayılar ile de ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Bu tezin konusunun çok da dışına çıkmamak adına yazar bu tartışmayı burada noktalamaktadır.

4.2. Serbest Süreklilik Kavramı

Şimdi, herhangi bir reel sayının verilen bir doğal sayılar kümesi üzerinde ya serbest ya da serbest olmayan bir sayı olduğu açık olduğundan, tüm tezin ana tanımı olan aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 4.2.1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $K \subset \mathbb{N}$ olsun. f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında *K-serbest sürekli fonksiyon* denir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} & [x_0 \in \mathfrak{C}(K) \wedge \forall x \in K_S(\exists l \in \mathbb{R} x \in c(l)) \rightarrow (f(x) \in c_{st}(l))] \\ & \vee [x_0 \notin \mathfrak{C}(K) \wedge \forall x \in K_K(\exists l \in \mathbb{R} x \in c(l)) \rightarrow (f(x) \in c_{st}(l))] \end{aligned}$$

Bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında K -serbest sürekli fonksiyonların kümesi $\mathfrak{C}(K, x)$ ile gösterilecektir. Dolayısıyla bir $D \subset \mathbb{R}$ için $\mathfrak{C}(K, D) = \{f \in {}^D\mathbb{R} : \forall x \in D(f \in \mathfrak{C}(K, x))\}$ olarak tanımlanır.

Aslında bu tanım dizisel süreklilik veya istatistiksel süreklilik tanımlarından çok da farklı olmayan bir tanımdır. Çünkü dizisel süreklilik kavramı (yakınsak her diziyi noktasal olarak koruyan fonksiyon

kavramı) verilen bir noktaya yakınsak olan bütün dizileri ele almaktadır. Aynı durum istatistiksel süreklilik için de geçerlidir, istatistiksel süreklilikte ise verilen bir noktaya istatistiksel yakınsak tüm noktaların görüntülerinin de aynı noktaya istatistiksel yakınsak olmaları beklenir. Fakat serbest süreklilikte verilen bir noktaya yakınsak olan tüm diziler yerine, o noktaya yakınsak olan ve doğal sayıların belirli bir alt kümesinde serbest olan tüm dizilere bakılmaktadır. Dolayısıyla, evrensel niceleyicinin radarındaki dizilerin kümesi bir nebze daraltılmıştır. Tanımdan da görüleceği üzere, herhangi bir K için, kapalı ve sınırlı bir küme üzerinde tanımlı K -serbest sürekli fonksiyonların sınırlı oldukları açıktır, çünkü ortada bir limiti korumak söz konusudur ve eğer K -serbest olup sınırsız olan bir fonksiyon olsaydı, bu taktirde bir asimptotu olması gerekirdi ve bu asimptot noktasında K -serbest sürekli olamazdı, çünkü limiti korunmazdı.

Bu tanımın bir diğer özelliği ise üzerinde süreklilik tanımı verilmek istenilen noktanın verilen bir küme üzerinde serbest olup olmadığının büyük önem taşımasıdır. Çünkü eğer nokta serbest ise sadece serbest dizilerle olan yakınsama ve eğer serbest değilse de sadece kompakt dizilerle olan yakınsama ele alınmaktadır. Ayrıca, bir nokta verilen bir küme üzerinde hem serbest hem de kompakt olamayacağından yukarıdaki “veya (\vee)” bağlacı ile birbirine bağlanan önermelerden, tek seferde yalnız bir tanesi doğru olabilir. Peki bu tanımı, tez boyunca bahsedilen diğer süreklilik tanımından ayıran özellikler nelerdir? $\mathcal{A}([a, b])$ ile $[a, b]$ aralığında hemen hemen her yerde sürekli (süreksizlik noktalarının ölçüsü sıfır) olan fonksiyonlar kümesi gösterilsin.

Teorem 4.2.2. Her $K \subset \mathbb{N}$ için aşağıdaki önerme sağlanır:

$$(\mathbb{C}[a, b] \subset \mathbb{C}(K, [a, b]) \wedge \mathcal{A}([a, b]) \not\subset \mathbb{C}(K, [a, b]) \wedge (K \neq \emptyset \rightarrow \mathbb{C}(K, [a, b]) \not\subset \mathcal{A}([a, b])).$$

İspat. Verilen bir tanım kümesi üzerinde sürekli fonksiyonlar aynı zamanda dizisel sürekli olduklarından ve dizisel sürekli fonksiyonlar K -serbest süreklilik koşullarını açıkça sağladığından birinci içermeye açıktır. Burada ikinci ve üçüncü içermelerin sağlanmadığı, yani hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonlar sınıfının her $K \subset \mathbb{N}$ için kesin olarak K -serbest sürekli fonksiyonlar sınıfının içerisinde kalmadığı ve tersinin de doğru olmadığı gösterilecektir.

$f \in \mathbb{R}^{-(\mathbb{S}(K) \cap \mathbb{Q})} \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}^c - \{\pi\}, \\ \frac{1}{b}, & x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^s \cap \mathbb{S}(K)^c, \\ \pi, & x = \pi. \end{cases}$$

Bu fonksiyonun tek süreksizlik noktası $x = \pi$ noktasıdır. Çünkü bu fonksiyon Thomae Fonksiyunun modifiye edilmiş halinden başka bir şey değildir, (bkz. Hewitt & Stromberg, 2013). Dolayısıyla $f \mathbb{R}$

üzerinde hemen hemen her yerde süreklidir. Fakat hiçbir $K \subset \mathbb{N}$ için $x = \pi$ noktasında K -serbest sürekli değildir. Çünkü π her K üzerinde serbest olduğundan, π noktasına terimleri her K için serbest olan dizilerle yaklaşılmalıdır. Yani, hemen hemen bütün terimleri (asimptotik yoğunluk anlamında) irrasyonel sayılardan oluşan dizilerle. Fakat bu dizilerin f altındaki resimleri sonsuza ıraksayacağından ve $f(\pi) = \pi$ olduğundan açıktır ki f hiçbir $K \subset \mathbb{N}$ için K -serbest sürekli değildir.

Şimdi $\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$ keyfi verilsin. $f_K \in {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \cap \mathfrak{S}(K)^c, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \cap \mathfrak{S}(K)^c. \end{cases}$$

f_K fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ noktasında K -serbest sürekli olduğu açıktır. Çünkü eğer $x \in \mathbb{Q} \cap \mathfrak{F}(K)^c$ ise, o zaman bu noktaya yaklaşan her K -serbest dizinin (paydaları K kümesinde olan terimlerinin indislerinin oluşturduğu kümenin asimptotik yoğunluğu sıfır olan diziler) f altındaki resminin terimleri hemen hemen her yerde (doğal yoğunluk anlamında) 0 olacaktır. Bu ise istatistiksel yakınsaklığı verir. Aynı tartışma $x \in SVC \cap \mathfrak{F}(K)^c$ olanlar için de sağlandığından, bu fonksiyon her $x \in \mathbb{R}$ için K -serbest süreklidir. Fakat f hiçbir x reel sayısında sürekli olmadığı için, $f \notin \mathcal{A}(\mathbb{R})$ sağlanır. ■

Lemma 4.2.3. $K \subset K' \subset \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde,

$$\mathfrak{C}(K, [a, b]) \subset \mathfrak{C}(K', [a, b])$$

sağlanır.

İspat. Açıktır ki $\mathfrak{F}(K') \subset \mathfrak{F}(K)$ sağlanır. O halde,

$$K'_S \subset K_S \wedge K'_K \subset K_K$$

içermeleri doğrudur. Buradan istenilen sonuç elde edilir. Çünkü aksi halde yukarıdaki tartışma ile çelişen bir $f \in \mathfrak{C}(K, [a, b])$ bulunurdu öyle ki $f \notin \mathfrak{C}(K', [a, b])$. ■

Yukarıdaki lemma şunu söyler: Serbest sürekli fonksiyonlar oldukça düzgün bir hiyerarşik düzene sahiptirler. En geniş serbest sürekli fonksiyon sınıfı $\mathfrak{C}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ iken, en dar serbest sürekli fonksiyon sınıfı $\mathfrak{C}(\emptyset, \mathbb{R}) = \mathfrak{C}(\mathbb{R})$ 'dir. Yani \emptyset -serbest sürekli fonksiyonlar sınıfı klasik sürekli fonksiyonlar sınıfından başka bir şey değildir. Bunun nedeni (Connor, Grosse-Erdman, 2003) çalışmasında da gösterildiği üzere, istatistiksel sürekli her fonksiyonun sürekli olması ve serbest sürekli fonksiyonların tanımında istatistiksel süreklilikten farklı olarak verilen bir noktaya “klasik yakınsak” diziler kullanılmasıdır. Zaten klasik sürekli fonksiyonların \emptyset -serbest sürekli oldukları açıktır.

Artık klasik sürekli fonksiyonlar sınıfını kesin olarak içeren ve hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonlar ile kıyaslanamayan bir fonksiyon sınıfı mevcuttur. Bu sınıf serbest sürekli fonksiyonlar sınıfıdır. Tezde sıkça sözü edilen lineer fonksiyonlar ve klasik sürekli fonksiyonlar arasına sıkışmış fonksiyonlardan farklı olarak, içeri bir daralma yerine, dışa bir genişleme yaşanmaktadır. Dolayısıyla (Spigel & Krupnik, 1994) makalesinde bir sanı olarak ortaya atılan lineer fonksiyon sınıfı ve sürekli fonksiyonlar sınıfı arasına sıkışma problemi, (Connor, Grosse-Erdman, 2003)'da içeri doğru olan daralmalarda regüler metotlar için kırılmış ve bu tezde ise dışa doğru yapılan bir genelleme söz konusu olduğu için doğal olarak kırılmıştır.

Bu bölümde tezin başında ortaya atılan iddiaların birçoğu gösterilmiş oldu. Geriye serbest sürekli fonksiyonların mutlak değeri Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı ile kıyaslanamayacağını göstermek kalmıştır. Bu görevi yerine getirmek için yine Seçme Aksiyomu kullanılma şartı mevcuttur. Çünkü ölçülemeyen kümeler, hatta evrensel ölçülemeyen kümeler kullanılacaktır. Peki evrensel ölçülemeyen küme nedir?

Tanım 4.2.4. $A \subset \mathbb{R}$ olsun. A kümesine *evrensel ölçülemeyen küme* denir ancak ve ancak \mathbb{R} nin her ölçülebilir pozitif ölçülü alt kümesi ile A kümesinin kesişimi ölçülemeyen bir küme ise, (Oxtoby, 2013).

İlk bakışta böyle bir küme var olamaz gibi görünebilir. Fakat eğer dış ölçüsü 1 ve iç ölçüsü 0 olan bir küme inşa edilebilirse, o zaman bu küme yukarıdaki tanıma uyacaktır. Böyle bir küme Bernstein tarafından inşa edilmiştir ve Bernstein kümesi olarak bilinmektedir, (Oxtoby, 2013).

Teorem 4.2.5. Hem kendisi hem de komplementi reel doğrunun her sayılamaz kapalı alt kümesi ile kesişen bir B kümesi vardır.

İspat. Reel doğrunun tüm kapalı ve sayılamaz kümelerinin kümesi \mathcal{F} ile gösterilsin. Açık ki bu küme sayılamazdır. Şimdi, iyi-sıralama prensibinden (veya Seçme Aksiyomu) $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \omega_c\}$ biçiminde yazılabilir öyle ki ω_c en küçük c tane öncülü olan ordinaldir. Yine iyi-sıralama prensibinden dolayı \mathbb{R} dolayısıyla da her alt kümesi iyi sıralıdır, yani \mathcal{F} 'nin her elemanı iyi sıralı bir kümedir. Şimdi p_0 ve q_0 F_0 kümesinin ilk iki elemanı olsunlar (üzerindeki iyi sıralamaya göre en küçük eleman ve o elemanı kümeden attıktan sonra geriye kalan kümenin en küçük elemanı, sıra fark etmeksizin). Sonrasında, p_1 ve q_1 ise F_1 in p_0 ve q_0 'dan farklı en küçük iki elemanları olsunlar. Kısacası p_α ile q_α

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \{p_\beta, q_\beta\}$$

kümesinin en küçük iki elemanı olsunlar. Şimdi $B = \{p_\alpha : \alpha < \omega_c\}$ olsun. Bu kümenin inşası gereği her $\alpha < \omega_c$ ordinali için $p_\alpha \in B \cap F_\alpha$ ve $q_\alpha \in B^c \cap F_\alpha$ olduğu görülebilir. Bu özelliği sağlayan kümeye *Bernstein kümesi* denir. ■

Teorem 4.1.3.9. Bernstein kümesi B evrensel ölçülemeyen kümedir.

İspat. Bernstein kümesinin ölçülemez olduğu açıktır, çünkü hem Bernstein kümesi hem de komplementinin iç ölçüleri sıfırdır. Bunun nedeni B ve B^c nin içerdiği her kompakt kümenin sayılabilir olmasıdır. Buradan, eğer ölçülebilir olsalardı iç ölçüleri sıfır olacaktı, fakat Bernstein kümesi ve komplementinin birleşimi reel doğrunun tamamını verdiği için bu durumda iç ölçünün sonlu toplamsal olmasından dolayı reel doğrunun da iç ölçüsü sıfır olurdu, fakat bu mümkün değildir. Şimdi, Bir A pozitif ölçülü kümesi için $A \cap B$ kümesinin ölçülebilir olduğu kabul edilsin. Yukarıdaki tartışmadan dolayı $A \cap B$ kümesinin iç ölçüsü sıfırdır. Fakat açıktır ki dış ölçüsü de A kümesinin dış ölçüsüne eşittir. Fakat bu bir çelişkidir, demek ki $A \cap B$ ölçülemez bir kümedir. ■

Bu teoremin en önemli özelliklerinden birisi öyle bir fonksiyon yazılmasını sağlar ki, bu fonksiyon bir $K \subset \mathbb{N}$ için serbest sürekli olmasına rağmen, ölçülebilir bir fonksiyon değildir, dolayısıyla da mutlak değerinin Lebesgue integrali mevcut değildir, yani L^1 uzayı ile serbest sürekli fonksiyonlar uzayı kıyaslanamaz. Bu bölümün en önemli sonuçları serbest sürekli fonksiyonlar sınıfının bilinen diğer sürekli fonksiyonlar sınıfı ile aralarındaki ilişki konusunda verilmiştir. Serbest sürekli fonksiyonlar sınıfının çalışılmaya değer bir konu olduklarının en önemli kanıtı ise klasik tartışmaların dışında, bilinen fonksiyon sınıflarında olmayan bazı fonksiyonlara da ev sahipliği yapmalarındadır. Ayrıca, sınırlı bir kümede tanımlı serbest sürekli her fonksiyon sınırlı olduğundan, bilinen sup normu ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 4.2.6. B Bernstein kümesi olmak üzere, her $K \subset \mathbb{N}$ için K -serbest bir fonksiyon vardır öyle ki bu fonksiyon ölçülemez. Yani

$$\forall K \subset \mathbb{N} \exists f \in \mathcal{C}(K, X) \exists U \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})_e (f^{-1}(U) \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R})_e)$$

sağlanır, burada $X = (B \cap \mathfrak{F}(K)) \cup (B^c \cap \mathfrak{F}(K)^c)$, $\mathfrak{B}(\mathbb{R})_e$ kümesi reel doğru üzerindeki Borel σ -cebirdir ve U herhangi bir açık kümedir.

İspat. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $f_{(B,K)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_{(B,K)} = \begin{cases} 1, & x \in B \cap \mathfrak{S}(K), \\ 0, & x \in B^c \cap \mathfrak{S}(K)^c. \end{cases}$$

f fonksiyonu ölçülemez bir fonksiyondur çünkü $\{1\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})_e$ olmasına rağmen

$$f_{(B,K)}^{-1}(\{1\}) = B \cap \mathfrak{S}(K)$$

ölçülemez bir kümedir. Bu fonksiyonun mutlak değeri de ölçülemez olduğundan, bu fonksiyon L^1 mutlak değeri Lebesgue integrallenebilir olan fonksiyonlar sınıfına ait değildir. Bu fonksiyonun her $K \subset \mathbb{N}$ için K -serbest sürekli olduğu açıktır, çünkü eğer K -serbest diziler ile yaklaşırsa $f_{(B,K)}$ altındaki

görüntüsü hemen hemen tüm terimleri 1 olan ve aksi halde tüm terimleri 0 olan diziler elde edilir. Buradan serbest süreklilik tanımındaki istatistiksel yakınsaklık kriteri sağlanmış olur. ■

Yukarıdaki tartışmadan açıktır ki verilen bir K için L^1 uzayı ile K -serbest sürekli fonksiyonlar uzayı karşılaştırılmazdır. Artık serbest sürekli fonksiyonlar sınıfı ile hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonlar sınıfı ve ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı, buradan hareketle de mutlak değeri Lebesgue integrallenebilir (bkz. Hewitt & Stromberg, 2013) fonksiyonlar sınıfının karşılaştırılmaz yani, birbirlerinden oldukça farklı oldukları söylenmiştir. Aynı zamanda hep sözü edilen, klasik sürekli fonksiyonlar sınıfının bu dışı doğru olan genişlemesi nispeten “düzgün” bir genişlemedir. Çünkü kapalı ve sınırlı kümeler üzerinde tanımlı K -serbest sürekli fonksiyonlar sınırlı fonksiyonlardır.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümün ana amacı yukarıda tartışması yapılan bütün konuyu kısaca tekrar anlatmak, sonuçlara değinmek ve bu sonuçların nasıl daha da geliştirilebileceği konusunda öneriler sunmaktır. Elbette okuyucu sürekli tekrar edilen “bir ikilemin kırılması” tabirinden sıkılmış olabilir, fakat burada olan biten şey aslında tamamen budur. Yani, belirli metotlar yardımı ile ortaya atılan sürekli fonksiyon sınıflarının bazı yetersizliklerinin, idealler ve evrensel niceleyici kısıtlaması kullanılarak nasıl giderildiğidir.

En önemli sonuç serbest sürekli fonksiyonların yeni, yani daha önce üzerinde çalışılmamış bir sınıf olmalarıdır. Hemen hemen her yerde sürekli fonksiyonlar sınıfı ile kıyaslanamaz olmaları ve aynı zamanda L^1 uzayı ile kıyaslanamaz olmaları, bu yeni sınıfın analiz etmeye değer bir sınıf olduğuna işaret etmektedir.

5.1. Öneriler

Bu bölümde yapılacak olan öneriler, sorular ve sanılar olarak ele alınacaktır. Sorulan sorular tezde cevaplanmamış ama merak konusu olabilecek sorular olurken, sanılar ise ileriki çalışmalar için bir ışık tutması amacı ile ortaya atılmıştır.

Soru 5.1.1. Eğer bir $x \in \mathbb{R}$ için $\mathfrak{S}(x)$ ideali yerine herhangi bir ideal alınır, serbest sürekli fonksiyonlar sınıfına benzer ne tür sınıflar tanımlanabilir?

Bu soru şu şekilde tekrar sorulabilir: Eğer \mathbb{N} üzerinde bir serbest reel sayının ürettiği idealden farklı bir ideal alınır, o zaman bu ideale bağlı olarak yeni bir serbestlik tanımı verildiğinde, ortaya yeni bir sınıf çıkar mı, eğer çıkar ise bu tezde tanımlanan sınıftan ne ölçüde farklıdır?

Soru 5.1.2. $K, K' \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, $\mathfrak{C}(\mathbb{R}, K)$ ve $\mathfrak{C}(\mathbb{R}, K')$ sınıflarının arasındaki ilişki K ve K' arasındaki ilişkiye bağlı olarak nasıl değişir?

Bu soruya bir cevap $K \subset K'$ durumu için bu tezde verilmiştir. Fakat K ve K' arasındaki ilişki bu kadar apaçık değilken neler olacağı merak konusudur.

Soru 5.1.3. Serbest reel sayı kavramında, irrasyonel tüm sayılar tanım gereği serbesttir. Öyle bir serbestlik tanımı verilebilir mi ki bu yeni verilen tanım irrasyonel sayılardan da “serbest olmayan” elemanlar içersin?

Diğer bir deyişle, verilen bir irrasyonel sayının serbestlik kavramı, elbette artık payda yardımı ile verilemeyeceğinden (çünkü irrasyonel sayılar rasyoneller gibi bir paydaya sahip değildir), irrasyonel sayıların hangi rasyonel sayılara benzer özellikleri ile bir serbestlik tanımı verilebilir? Örneğin bir irrasyonel sayı sonsuz sürekli kesirler ile tek türlü ifade edilebilir. Demek ki bu irrasyonel sayıların serbestlik kavramı artık bu tezde kullanılan dizilerin serbestlik kavramına benzer olarak verilebilir. Soru şudur: Verilen bu yeni tanım ne gibi sonuçlar alınmasını sağlar?

Sanı 5.1.4. Klasik sürekli fonksiyonlar sınıfının herhangi bir yöntem ile yapılan genişlemesi, kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlı fonksiyonların sınırlılığını bozmuyor ise, o zaman ya bu genişleme bir $K \subset \mathbb{N}$

için \mathbf{K} -serbest sürekli fonksiyonlar sınıfının altında kalır ya da sayılabilir bir $\{\mathbf{K}_i\}_{i \in \omega}$ ailesi için $\cup_i \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbf{K}_i)$ kümesi bu fonksiyonlar sınıfını örter.

Aslında burada söylenmek istenen şudur: Klasik sürekli fonksiyonların en geniş düzgün genişlemesi $\cup_{\mathbf{K} \subset \mathbb{N}} \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbf{K})$ serbest sürekli fonksiyonlar sınıfıdır. Aksini ispatlamak için, öyle bir fonksiyon sınıfı inşa edilmelidir ki, bu sınıf klasik sürekli fonksiyonlar sınıfını içermelidir ve kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlı ve bu yeni anlamda sürekli her fonksiyon da sınırlı olmalıdır. Yazara göre, bu mümkün değildir.



KAYNAKLAR

- Altınok, M., Kaya U., & Küçükaslan, M. (2021). λ -STATISTICAL SUPREMUM-INFIMUM AND λ -STATISTICAL CONVERGENCE. *Journal of Universal Mathematics*, 4(1), 34-41.
- Antoni, J., & Salat, T. (1980). On the A-continuity of real functions. *Acta Math. Univ. Comenian*, 39(1980), 159-164.
- Armacost, D. L. (1981). The Structure of Locally Compact Abelian Groups, vol. 68 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*.
- Barbieri, G., Bruno, A. G., & Weber, H. (2017). Inclusions of characterized subgroups. *Topology and its Applications*, 221, 534-555.
- Boos, J. (2000). *Classical and modern methods in summability*. Clarendon Press.
- Bor, H. (1985). On two summability methods. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 97, No. 1, pp. 147-149). Cambridge University Press.
- Borsik, J., & Salat, T. (1993). On F-continuity of real functions. *Tatra Mt. Math. Publ*, 2, 37-42.
- Buck, R. C. (1946). The measure-theoretic approach to density. *American Journal of mathematics*, 68(4), 560-580.
- Buck, R. C. (1948). Solution of problem 4216. *Amer. Math. Monthly*, 55(36), 1948.
- Connor, J. (1999). *A topological and functional analytic approach to statistical convergence in Analysis of Divergence* (W.O Bray and C.V. Stanojevic, eds.), Birkhäuser, Boston.
- Connor, J., & Grosse-Erdmann, K. G. (2003). Sequential definitions of continuity for real functions. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 93-121.
- Srinivasan, V. K. (1980). An equivalent condition for the continuity of a function. *Texas Journal of Science*, 32(2), 176-177.
- Das, P., & Ghosh, A. (2021). Solution of a general version of Armacost's problem on topologically torsion elements. *Acta Mathematica Hungarica*, 164(1), 243-264.

Demirci, K. (1998). A criterion for A-statistical convergence. *INDIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS*, 29, 559-564.

Di Santo, R., Dikranjan, D., & Giordano Bruno, A. (2018). Characterized subgroups of the circle group. *Ricerche di Matematica*, 67, 625-655.

Dikranjan, D. (2001, February). Topologically torsion elements of topological groups. In *Topology Proc* (Vol. 26, pp. 505-532).

Dikranjan, D., Das, P., & Bose, K. (2020). Statistically characterized subgroups of the circle. *Fundamenta Mathematicae*, 249, 185-209.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. In *Colloquium mathematicae* (Vol. 2, No. 3-4, pp. 241-244).

Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly*, 107(9), 844–862. <https://doi.org/10.2307/2695743>.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5(4), 301-314.

Hardy, G. H. (2000). *Divergent series* (Vol. 334). American Mathematical Society.

Hardy, G. H., & Wright, E. M. (1979). *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press.

Hewitt, E., & Stromberg, K. (2013). *Real and abstract analysis: a modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag.

Hungerford, T. W. (2012). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.

Hutton, C. (1812). *Tracts on Mathematical and Philosophical Subjects: Comprising Among Numerous Important Articles, the Theory of Bridges, with Several Plans of Recent Improvement; Also the Results of Numerous Experiments on the Force of Gunpowder, with Applications to the Modern Practice of Artillery..* (Vol. 1). FC and J. Rivington.

Iwiński, T. B. (1972). Some remarks on Toeplitz methods and continuity. *Commentationes Mathematicae*, 16(1).

Jech, T. (2003). *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Springer Berlin Heidelberg.

Jech, T. J. (2008). *The axiom of choice*. Courier Corporation.

Kanamori, A. (1997). The Mathematical Import of Zermelo's Well-Ordering Theorem. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 3(3), 281–311. <https://doi.org/10.2307/421146>.

Kostyrko, P., Šalát, T., & Wilczyński, W. (2000). I-convergence. *Real analysis exchange*, 669-685.

Kunen, Kenneth (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *The American mathematical monthly*, 66(5), 361-775.

Mursaleen, M. (2000). λ -statistical convergence. *Mathematica slovacica*, 50(1), 111-115.

Oxtoby, J. C. (2013). *Measure and category: A survey of the analogies between topological and measure spaces* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.

Öztürk, E. (1983). On almost-continuity and almost A-continuity of real functions, *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1 Math*, 32, 25-30.

Pontrjagin, L. S., & Lehmer, E. (1946). *Topological groups* (Vol. 21). Princeton: Princeton University Press.

Robbins, H. (1946). **Problem 4216**. *Amer. Math. Monthly* 53, 470–471.

Rusnock, P., & Kerr-Lawson, A. (2005). Bolzano and uniform continuity. *Historia Mathematica*, 32(3), 303-311.

Smith, H. J. S. (1874). On the integration of discontinuous functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1), 140-153.

Spigel, E., & Krupnik, N. (1994). On the A-continuity of real functions. *J. Anal*, 2, 145-155.

Van Looy, H. (1984). A chronology and historical analysis of the mathematical manuscripts of Gregorius a Sancto Vincentio (1584–1667). *Historia Mathematica*, 11(1), 57-75.

Viertel, K. (2021). The development of the concept of uniform convergence in Karl Weierstrass's lectures and publications between 1861 and 1886. *Archive for History of Exact Sciences*, 75(4), 455-490.

Weber, H. (2021). On characterized subgroups of \mathbb{R} and \mathbb{R}/\mathbb{Z} . *Ricerche di Matematica*, 70, 353-370.



