



**T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**RIEMANN VE RIEMANN OLMAYAN GEOMETRİLER ÜZERİNDE
JEODEZİK DÖNÜŞÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hazırlayan
Cansu ANIL BAYRAKTAR**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Deniz TÜRKOĞLU**

**İSTANBUL
Eylül 2023**



**T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**RİEMANN VE RİEMANN OLMAYAN GEOMETRİLER ÜZERİNDE
JEODEZİK DÖNÜŞÜMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hazırlayan
Cansu ANIL BAYRAKTAR**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Deniz TÜRKOĞLU**

**İSTANBUL
Eylül 2023**



LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Cansu ANIL BAYRAKTAR tarafından hazırlanan "*Riemann ve Riemann Olmayan Geometrilere Üzerinde Jeodezik Dönüşümler*" konulu çalışması jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 19/09/2023

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı, Soyadı ve Kurumu:

İmzası

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üy. Mustafa Deniz TÜRKOĞLU
Haliç Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Sinem GÜLER
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üy. Müge ÇERÇİ
Haliç Üniversitesi

Bu tez yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Zafer UTLU
Müdür

%4

BENZERLİK ENDEKSİ

%1

İNTERNET KAYNAKLARI

%3

YAYINLAR

%0

ÖĞRENCİ ÖDEVLERİ

BİRİNCİL KAYNAKLAR

1

Zhouliang Chen, Aifang Xie, Qianrong Yang.
"On the distributivity property for S-
uninorms", Fuzzy Sets and Systems, 2022
Yayın

%1

2

Herzig, A.. "Propositional belief base update
and minimal change", Artificial Intelligence,
199911
Yayın

%1

3

dspace.vutbr.cz
İnternet Kaynağı

%1

4

dias.library.tuc.gr
İnternet Kaynağı

%1

5

Barbara Opozda. "A classification of locally
homogeneous connections on 2-dimensional
manifolds", Differential Geometry and its
Applications, 2004
Yayın

%1

6

Ali I. Abdul-Latif, J. B. Diaz. " Dirichlet,
Neumann, and mixed boundary value
problems for the wave equation — =0 for a
rectangle ", Applicable Analysis, 1971

<%1

19/09 /2023

TEZ ETİK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum ‘‘Riemann ve Riemann Olmayan Geometrilere Üzerinde Jeodezik Dönüşümler’’ başlıklı bu çalışmayı başından sonuna kadar danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Deniz TÜRKOĞLU’ nun sorumluluğunda tamamladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Cansu ANIL BAYRAKTAR

ÖNSÖZ

Tez yazım sürecinde bana destek olan engin bilgi birikimini esirgemeyen, değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Mustafa Deniz TÜRKOĞLU ‘na teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Her kararında arkamda duran ve desteklerini esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Sevgili kızım ve eşim bu yolda sabırla bana destek oldukları için minnettarım.

Eylül, 2023

Cansu ANIL BAYRAKTAR

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
TEZ ETİK BEYANI	i
ÖNSÖZ.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	iv
KISALTMALAR	v
SEMBOLLER	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR.....	3
2.1. Temel Tanım ve Teoremler.....	3
2.2. Riemann Uzayları.....	9
2.3. Weyl Uzayları.....	13
3. JEODEZİKLER.....	16
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ.....	26

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1. $ds^2 = e^x dx^2 + dy^2$ Metriğinin Jeodeziğik Grafiği22



KISALTMALAR

$W_n(g, w)$: Metrik tensör g ve 1-form w ile n boyutlu Weyl uzayı manifoldu

$\nabla_{V_p} W$: W differansiyel vektör alanının V_p tanjant vektörü doğrultusundaki türevi

$X(\mathcal{M})$: Tüm teğet vektörleri kümesi

SEMBOLLER

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu reel değerli vektör uzayı
M_n	: n - boyutlu diferansiyellenebilir M manifoldu
$g_p(\mathbf{X}_p, \mathbf{Y}_p)$	: (0,2) tipindeki metrik tensör alanına
g_{ij}	: Metrik tensör
$\bar{g}$	: Normalleştirilmiş metrik tensör
Γ_{jk}^i	: Riemann uzayının koneksiyon katsayısı
$\Gamma_{(jk)}^i$	: Riemann uzayının koneksiyon katsayısının simetrisi
$\Gamma_{[jk]}^i$	: Riemann uzayının koneksiyon katsayısının anti-simetrisi
$[jk,h]$	: Birinci tip Christoffel sembolü
$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$	: İkinci tip Christoffel sembolü
Λ^1	: 1- form uzayı
W_{ijk^h}	: Weyl uzayının kovaryant eğrilik tensörü
W	: Weyl uzayında skaler tensörü

ÖZET

RIEMANN VE RIEMANN OLMAYAN GEOMETRİLER ÜZERİNDE JEODEZİK DÖNÜŞÜMLER

“Riemann ve Riemann olmayan geometriler üzerinde jeodezik dönüşümler” adlı çalışma üç bölüm halinde tamamlanmıştır. Bu çalışmanın birinci bölümünde giriş kısmı yer almaktadır. Giriş bölümünde Riemann geometrinin çıkış noktası, manifold teorisi ve Weyl geometrisi verilerek, jeodezik dönüşümler hakkında genel bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde temel kavramlar ve tanımlar yer almaktadır. Bu bölümde eğik uzay, eğik çatı, eğik koordinat, Öklid uzayı, Öklid çatısı, Öklid koordinatı tanımlarına yer verilmiştir. Yüzey üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon ve eğriler incelenmiştir. Sonrasında Riemann uzayında koneksiyonlar incelenmiş olup Riemann eğrilik tensörü, konform eğrilik tensörü gibi temel tanım ve teoremler, Riemann eğrilik tensörü için birinci ve ikinci tip Bianchi özdeşlikleri ve Einstein uzayının tanımına yer verilmiştir. Benzer şekilde Weyl uzayı üzerinde analoji kurularak; Weyl uzayının eğrilik tensörleri ve ilgili özdeşlikleri sunulmuştur. Weyl uzayına dair konformal dönüşümlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise jeodezik, jeodezik yol, jeodezik ışın ve jeodezik uzayın tanımlarına yer verilmiştir. Son olarak seçilen bir örneğin jeodezik denklemleri ve bu denklemlerin çözümleri hem Riemann hem de Weyl uzayı altında incelenerek karşılaştırılmıştır. Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçlara dair genel bir değerlendirme verilerek, yeni çalışmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: *Riemann uzayı, Jeodezik dönüşümler, Weyl uzayı.*

ABSTRACT

In this thesis Geodesics transformations on Riemann and non-Riemann geometries has been studied in three parts. The first part of this study includes the introduction. In the introduction, the starting point of Riemann geometry, manifold theory and Weyl geometry are given and general information about geodesic transformation is given. The second part includes basic concepts and definitions. In this section, the definitions of curved space, curved frame, curved coordinate, Euclidean space, Euclidean frame and Euclidean coordinate are given. Differentiable functions and curves on surfaces are studied. Then, by examining the connections on Riemannian space, basic definitions and theorems such as Riemannian curvature tensor, conformal curvature tensor, first and second type Bianchi identities for Riemannian curvature tensor, and Einstein space; definition are given. Similarly, curvature tensors of Weyl space and their corresponding identities are presented by making an analogy on the Weyl space. Conformal transformations related to Weyl space are mentioned. In the third chapter, definitions of geodesic, geodesic path, geodesic beam and geodesic space are given. Finally, geodesic equations and their solutions for an example are analyzed and compared under both Riemannian and Weyl spaces. In the last chapter of the thesis, the results obtained and suggestions for further studies are presented.

Keywords : *Geodesic transforms, Riemannian space, Weyl space.*

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin matematiğin bir alt dalı olarak oluşumu Carl Friedrich Gauss ve Bernhard Riemann ile temellendirilmiştir. Riemann 1854'te Göttingen'de bir açılış konuşmasında ilk olarak manifold kavramını tanımlamıştır. Carl Friedrich Gauss, "Theorema Egregium" teoremi ile yüzeyin eğriliğinin intristik bir özellik olduğunu kanıtlamıştır. Manifold teorisi de bu intristik özelliklere dayanmaktadır. Burada bir diferansiyellenebilir manifold yerel olarak Öklid uzayına benzeyen bir topolojik uzaydır. (Folland, 1970; Türkoğlu ve Özdemir, 2019).

Hermann Weyl 1918 yılında fizikteki birleştirilmiş alan teorisini formüle etmek için Riemann geometrisini genelleştirerek konform metrik ve simetrik koneksiyona sahip Weyl manifoldlarını tanımlamıştır. (Weyl, 1921).

İlk olarak kütleçekimi ve elektromanyetik teorilerini birleştirerek bir teori yazmıştır. Weyl'in teorisi fizikte çok ilgi görmemesine rağmen matematikçilerin ilgisini çekmiştir. Ve diferansiyel geometri de bazı önemli özellikleri ortaya çıkarmıştır. Fiziksel olarak kabul görmeyen bu teori, metriği bir katına götüren (konformal) dönüşümler altında elde edilen yeni koneksiyonun Riemann koneksiyonları cinsinden ifade edildiğinde, metrik olmayan simetrik bir koneksiyonla ifade edilebildiği gösterilmiştir. Uygun bir ω 1-formu, burulmasız D koneksiyonu ve konform metrikler sınıfından alınan herhangi bir g Riemann metriği için $Dg = 2\omega \otimes g$ uygunluk koşulunu sağlayan manifoldda Weyl manifoldu denir. $W(n,g,\omega)$ ile verilen manifold için, Friedmann ve Schouten, 1924 yılında diferansiyellenebilir manifoldlarda yarı-simetrik koneksiyon kavramını tanımlamışlardır. Daha sonra Hayden, 1932 yılında Riemann manifoldlarında burulmalı metrik konneksiyon kavramını incelemiştir (Ünal ve Uysal, 2005; Suhendro, 2007).

1970 yılında, Yano yarı-simetrik metrik konneksiyonlu Riemann manifoldlarını incelemiş ve bu konneksiyona göre eğrilik tensörü ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Çalışılan bu uzaylar üzerinde büyüklükleri koruyan farklı

dönüşümler literatürde çalışılmış olup halen çalışılarak güncelleğini korumaktadır. Bunlar arasında ilgi çekici bir yere sahip olan jeodezik dönüşümler, fiziksel dünyamızda da geniş çaplı bir uygulamaya sahiptir. Üzerinde bulunan iki nokta arasındaki uzaklık, iki noktayı birleştiren yollardan herhangi birine ait olan yol uzunluğuna eşit olan metrik uzaya Jeodezik uzay denir. (Çoban, 2011) Kısaca, uzaydaki iki nokta arasındaki en kısa mesafe olarak tanımlanan bu denklem, farklı metrik ve yapılar arasında kimi zaman invaryant kalmakla beraber değişime de uğramaktadır. Metrik uzaylarda jeodezik yol uzunluğu, uç noktalar arasındaki yolun uzunluğuna eşit olur. Genel olarak, jeodezik denklemi literatürde,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(c(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0$$

ifadesi ile verilir. (Bridson & Haefliger, 1999).

Bu denklemin çözümlerinin kurulan geometriye uygulanmasıyla beraber, var olan geometrimizin zamansal, uzaysal veya ışınsal olarak jeodezik anlamda tam olup, olmadığı araştırılmaktadır.

2. LİTERATÜR

Bu bölümde Afin uzay, Öklid uzayı, Öklid uzayında eğrilik ,Riemann uzayı, Weyl uzayı, üzerinde tanım ve teoremler verilecek olup jeodezikler incelenecektir.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım A kümesi; $A \neq \emptyset$ ve $V, \mathbb{R}$ cismi üzerinde n- boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere;

$$i) f: A \times A \rightarrow V; (P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \quad (2.1)$$

fonksiyonu ;

$$ii) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R) \text{ [ya da } \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}] \quad (2.2)$$

iii) $\forall P \in A$ için, her $\alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ eşitliğini sağlayacak şekilde tek bir $Q \in A$ vardır.

Yukarıdaki verilen özellikler sağlanırsa A kümesine V vektör uzayıyla birleşen n – boyutlu bir eğik (afin) uzay denir. i ve ii şıkları afin (eğik) aksiyomları olarak ifade edilir.

Tanım V n- boyutlu bir vektör uzayı ve A, V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay olmak üzere, $p_0, p_1, p_2 \dots p_n$ noktaları A nın elemanı için $\{ \overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2} \dots \overrightarrow{p_0 p_n} \}$ vektör sistemi V vektör sisteminin bir bazı ise $\{ p_0, p_1, p_2 \dots p_n \}$ kümesine A afin uzayının, afin çatısı denir. Afin çatısının başlangıç noktası " p_0 " dır. $p_1, p_2 \dots p_n$ noktaları ise afin çatısının uç noktaları denir (Yüce,2006).

Tanım $V, \xi = (\mathbb{R}, \mathbb{C})$ kümesi üzerinde vektör uzayı ; A, V vektör uzayı ile birleşen n- boyutlu afin uzay ve $K = \{ p_0, p_1, p_2 \dots p_n \}$, A afin uzayında afin çatısı olsun.

$$x_i : A \rightarrow \xi \ (i = 1, 2, 3, \dots, n) \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0 P} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{P_0 P_i}, \ a_i \in \xi \quad (2.3)$$

$p \rightarrow x_i(P) = a_i$ olmak üzere $x_i(P)$ ($i=1,2,\dots,n$) sıralı n-lisine P noktasının $K = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ afin çatısına göre afin koordinatları ve her bir $x_i(P)$ ye P noktasının i -inci afin koordinatı, x_i fonksiyonuna da A afin uzayında K afin çatısına göre i -inci afin koordinat fonksiyonu denir. Sonuç olarak ifade ettiğimiz tanım gereği, A afin uzayında ξ^n uzayında bir sıralı n -li ve her bir sıralı n -li için de A afin uzayında bir nokta karşılık gelir. Karşılık gelen bu sıralı n -liye $P \in A$ noktasının afin koordinatları, x_i afin koordinat fonksiyonlarının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine de afin koordinat sistemi denir.

Tanım $A \in \mathbb{R}^n$ ve A, V vektör uzayı ile birleşen n boyutlu afin uzayı olsun. V vektör uzayı iç çarpım uzayı ise A afin uzayına Öklid uzayı denir (Yüce,2006; Hacısalihoglu, 2006).

Tanım $P_i \in E^n$, $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi n -lisine karşılık gelen $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının ortonormal bazı ise $P_i, \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ sistemine E^n uzayında bir Öklid Çatısı denir. (Yüce,2006; Hacısalihoglu, 2006)

Tanım E^n n -boyutlu Öklid uzayında $\{E_0, E_1, E_2, \dots, E_n\}$ çatısı ve $K = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\}$ afin çatısı verilsin. $\{\overrightarrow{p_0p_i} | i=1, \dots, n\}$ sistemi $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında ortonormal bazı ise K afin çatısına bir Öklid çatı ve karşılık gelen afin koordinat sistemine Öklid koordinat sistemi denir. Bu sistemin fonksiyonlarına da Öklid koordinat fonksiyonları denir (Yüce, 2006).

Tanım $X \neq \emptyset$ olmak üzere; $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ $(x,y) \rightarrow d(x,y)$ fonksiyonu

$$i) d(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X \quad (2.4)$$

$$ii) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (2.5)$$

$$iii) d(x,y) \Leftrightarrow d(y,x) \quad (2.6)$$

$$iv) d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad (2.7)$$

özellikleri sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayında;

$$U: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(X,Y) \rightarrow U(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| \quad (2.8)$$

fonksiyonu E^n uzayında uzaklık fonksiyonudur. Ve bu uzaklık E^n uzayında metriktir. Bu metriğe Öklid metriği denir (Yüce,2006).

Öklid uzayında $U \subset E^3$ alt kümesi olsun. $\forall P = (P_1, P_2, P_3) \in S$ noktası için $\|X - P\| < \varepsilon$ olacak şekilde $X \in U$ için $\varepsilon > 0$ sayısı varsa E^3 Öklid uzayında U kümesine bir açık küme denir (Yüce, 2006).

Tanım $\forall x \in \mathbb{N}$ için; f fonksiyonu $f \in C^x$ ise o fonksiyona C^∞ sınıfındadır denir. C^∞ sınıfına ait olan fonksiyonların kümesi $C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile de gösterilir. ve $C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid U \subset E^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^x, x \in \mathbb{N}\}$ (Yüce, 2006).

Tanım $\phi : U \subset E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonunda $P \in U$ ise $\phi(P) \in E^m$ olur. Ve $\phi(P)$ sıralı bir m -lidir. Dolayısıyla; $\phi(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$ biçimde ifade edilir. f_i fonksiyonlarına ϕ fonksiyonunun koordinat fonksiyonları denir (Yüce,2006).

ϕ fonksiyonunun f_i Öklid koordinat fonksiyonları ve Öklid koordinat sisteminin diyagramını $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ kümesi oluşturabilir.

$f_i \in C^x(E^n, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq m$ ise $\phi : U \subset E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonuna C^x sınıfından diferansiyellenebilir denir. ve $\phi \in C^x(E^n, E^m)$ şeklinde gösterilir.

Tanım E^n uzayında U ve T iki açık alt küme olsun. $\phi : U \rightarrow T$ dönüşümü için;

$$i) \phi \in C^k(U, T) \quad (2.9)$$

$$ii) \phi^{-1} \text{ vardır ve } \phi^{-1} \in C^k(T, U) \quad (2.10)$$

ise ϕ fonksiyonu U ile T arasında bir diffeomorfizm denir. U ve T açık kümelerine diffeomorfiktirler denir (Sabuncuoğlu,2016).

Tanım $I, \mathbb{R}$ nın açık bir aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ biçiminde C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayında eğri denir. (Sabuncuoğlu, 2016)

Tanım $\alpha : I \rightarrow E^n$, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ differansiyellenebilir dönüşüm olmak üzere $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n uzayında parametrik eğri denir.

$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right) \Big|_{\alpha(t)}$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir (Yüce, 2006).

Tanım

$$W = (f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial V_i} \in V^{(E^n)} \quad (2.11)$$

verilsin. $f_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ sınıfına dahil ise $W \in V^{(E^n)}$ vektör alanına C^∞ -sınıftadır denir.

Tanım W diferansiyellenebilir vektör alanının V_p tanjant vektörü doğrultusundaki türevi

$$W(P + tV)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{W(P+tV) - W(P)}{t} = \frac{d}{dt} W(P + tV)|_{t=0} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir. $D_{V_p} W$ ya da $\nabla_{V_p} W$ olarak gösterilir. (Yüce, 2006)

E^n Öklid uzayının U açığının üzerinde ki W diferansiyellenebilir bir vektör alanının X vektör alanı doğrultusunda ki $D_X W$ kovaryant türevi noktaya karşılık nokta prensibiyle ;

$$(D_X W)(P) = D_{X_p} W, \in E^n \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla D fonksiyonu alınarak;

$$D : X^{(E^n)} \times X^{(E^n)} \rightarrow X^{(E^n)} \quad (2.14)$$

$$(X, W) \rightarrow D_X W : E^n \rightarrow \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}(P) \quad (2.15)$$

$P \rightarrow (D_X W)_P = D_{X_p} W$ şeklinde olur. $D_X W|_P = D_{X_p} W = (X[f_1], X[f_2], \dots, X[f_n])$ demektedir.

Buradan;

$$W = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (2.16)$$

olmak üzere

$$D_X W = \sum_{i=1}^n X[f_i] \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan D operatörüne $X^{(E^n)}$ vektör alanları uzayında bir koneksiyondur denir (Yüce, 2006).

Teorem E^n uzayında $X, T \in X^{(E^n)}$ iki vektör alanı ve $W, Z \in X^{(E^n)}$ ise C^∞ sınıfından iki vektör alanı olsun;

Dolayısıyla;

$$D_X(W + Z) = D_X W + D_X Z \quad (2.18)$$

$$D_{X+T} W = D_X W + D_T W \quad (2.19)$$

$$D_{f(p)X}W = f(p)D_XW, f: E^n \rightarrow \mathbb{R}, p \in E^n \quad (2.20)$$

$$D_X(fW) = X(f)W + fD_XW, f \in C(E^n, \mathbb{R}) \quad (2.21)$$

eşitlikleri ifade edilebilir.

Tanım $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ fonksiyonu ; C^∞ eğrisi ve α eğrisine kısıtlanmış C^∞ vektör alanı $W \in X(E^n)$ verilsin. Eğrinin hız vektör alanı da K olmak üzere α eğrisi boyunca $D_KW = 0$ ise W vektör alanına paralel vektör alanı denir.

$D_KK = 0$ ise α eğrisine jeodezik eğri denir. Buradan;

$$D_KK \text{ için } \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)), K_p = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_p = \left(\left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_p, \dots, \left. \frac{d\alpha_n}{dt} \right|_p \right) \text{ olmak üzere;}$$

$$D_KK|_p = \left(K_p \left[\frac{d\alpha_1}{dt} \right], \dots, K_p \left[\frac{d\alpha_n}{dt} \right] \right) = \left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha_n}{dt^2} \right) \Big|_p = \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \Big|_p = \alpha''(t)|_p = \quad (2.22)$$

elde edilir (Yüce ,2006).

Tanım $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ fonksiyonu ve $\alpha(t) = ((\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)))$ eğrisi olsun. $X \in X(E^n)$ olmak üzere $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t)) = X_{\alpha(t)}$ eşit ise $\alpha(t)$ eğrisine X vektör alanının bir integral eğrisi denir(Yüce, 2006).

Tanım D, E^n Öklid uzayında kovaryant türev operatörü olsun. Ve $[,]$ ise $X(E^n)$ üzerinde Lie operatörü olsun. $\forall X, W, Z \in X(E^n)$ diferansiyellenebilir vektör alanları için; $\{ u_1, u_2, \dots, u_n \}$ Öklid uzayında, Öklid koordinat sistemi ve,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial u_i}, W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial u_i} \in X(E^n) \quad \text{olmak üzere,}$$

$$i \quad [X, W] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial w_i}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} - w_i \frac{\partial v_i}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \quad (2.24)$$

$$ii \quad D_XW - D_WX = [X, W] \quad (2.25)$$

$$iii \quad X_p[\langle X, W \rangle] = \langle D_{X_p}W, Z \rangle \Big|_p + \langle W, D_{X_p}Z \rangle \Big|_p \quad (2.26)$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım E^n Öklid uzayında $D: X(E^n) \times X(E^n) \rightarrow X(E^n)$ kovaryant türev operatörüne, (2.18), (2.19), (2.20) (2.21) ‘denklemlerini sağlandığından dolayı afin koneksiyonu

denir. (2.25) ve (2.26) denklemleri sağlandığından dolayı Riemann koneksiyonu denir (Yüce, 2016).

Tanım $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (x,y)$ bir açık aralık olmak üzere; $\alpha: I \rightarrow E^n$ $t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n uzayında diferansiyellenebilir eğri (veya parametrik eğri) denir. (I, α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu denir. I alt kümesi parametre aralığıdır. $t \in I$ reel sayısına eğrinin parametresi denir. E^n uzayında eğri $M = \alpha(I) \subset E^n$ şeklinde gösterilir. $\alpha: I \rightarrow E^n$, C^k sınıfına dahil ise α eğrisine C^k sınıfından eğri denir. $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ olmak üzere $\alpha_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ $t \rightarrow \alpha_i(t)$, $1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına α eğrisinin koordinat fonksiyonları denir (Yüce, 2016).

Tanım U, E^3 Öklid uzayında açık alt küme olmak üzere, $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemi ile tanımlanan

$$\mathcal{M} = \{X = \{x_1, x_2, x_3\} \in E^3\}, \quad f: U \subset E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall P \in \mathcal{M}, \vec{\nabla} f|_P \neq \vec{0},$$

$$X \rightarrow f(x_1, x_2, x_n) = c, \quad (c = \text{sabit}) \quad (2.27)$$

Kümesi E^3 uzayında 2-boyutlu yüzey veya sadece yüzey denir. (Yüce, 2016).

Tanım $\mathcal{M}$, E^3 Öklid uzayında bir yüzey olmak üzere, vektör vektör alanı $X \in X(E^3)$ verildiğinde $\forall P \in \mathcal{M}$ için $\vec{X}_P \in T_p(P)$ oluyorsa $X \in x^{(E^3)}$ vektör alanına $\mathcal{M}$ üzerine tanımlanan bir teğet vektör alanı denir. Tüm teğet vektörlerinin kümesi $X(\mathcal{M})$ ile gösterilir. (Yüce, 2016).

Tanım E^3 Öklid uzayında ki bir $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde tanımlı $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun, $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde bir $\phi: U \rightarrow \mathcal{M}$ gerçek yaması için $f \circ \phi = f(\phi)$ bileşke fonksiyonuna f için koordinat yaması gösterimi denir. Eğer $P \in \phi(U)$ için $f \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\phi^{-1}(P)$ noktasında diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna P noktasında diferansiyellenebilir denir. Eğer f bütün koordinat gösterimlerinde, Öklid anlamında $\forall P \in \mathcal{M}$ türevlenebilirse f fonksiyonuna $\mathcal{M}$ yüzeyi üzerinde diferansiyellenebilir denir. (Yüce, 2016).

Tanım $\mathcal{M}, E^3$ Öklid uzayında bir yüzey olsun,

$$\bar{D}: X(\mathcal{M}) \times X(\mathcal{M}) \rightarrow X(\mathcal{M}), \quad (X, Y) \rightarrow \bar{D}_X Y \text{ dönüşümü} \quad (2.28)$$

$$1) \bar{D}_{fX+gY}Z = f\bar{D}_X Z + g\bar{D}_Y Z \quad (2.29)$$

$$2) \bar{D}_X(fY) = (\bar{D}_X f)Y + f\bar{D}_X Y$$

1. ve 2. Özellikleri sağlanıyorsa $\bar{D}$ dönüşümüne $\mathcal{M}$ yüzeyinde afin koneksiyonu denir. Ayrıca,

$$3) \bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X = [X, Y] \quad (2.30)$$

$$4) X[< Y, Z >] = < \bar{D}_X Y, Z > + < \bar{D}_X Z, Y > \quad (2.31)$$

özellikleri sağlanıyorsa $\bar{D}$ operatörüne $\mathcal{M}$ yüzeyinde Riemann koneksiyonu denir (Yüce, 2016).

Tanım: M bir topolojik uzay olsun. M için verilen önermeler doğru ise M bir n -boyutlu topolojik manifold ya da kısaca n -manifold denir.

- i M bir Hausdorff uzayıdır.
- ii M , n -boyutlu lokal öklidyendir.
- iii M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilirdir (Boothby, 1986).

Tanım: M bir l - manifold ve $\bar{M}$ de bir n -manifold olsun. $l \leq n$ ve $M \subseteq \bar{M}$ olmak üzere M ve $\bar{M}$ manifoldları C^∞ manifoldlar olsun, $i: M \rightarrow \bar{M}$ olacak şekilde tanımlı bir i , C^∞ dönüşümü $\forall m \in M$ için; $i(m) = m \in \bar{M}$ şeklinde tanımlanırsa i özdeşlik dönüşümüne ‘inclusion’ fonksiyonu adı verilir. (Hacısalıhoğlu, 1998)

Tanım M bir C^∞ manifold olsun. $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_M(P)$ olmak üzere

$$G_p : T_M(P) \times T_M(P) \rightarrow \mathbb{R}, (X_p, Y_p) \rightarrow g_p(X_p, Y_p) \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlı indeksli, simetrik, bilineer $(0,2)$ tipindeki tensör alanına M üzerinde metrik tensör denir. (O’Neill, 1983)

2.2. Riemann Uzayları

n -boyutlu bir Riemann uzayında verilen herhangi bir x^i ($i=1,2, \dots, n$) için, birbirine minimum yakın olan x^i ve $x^i + dx^i$ noktaları arasındaki sonsuz küçük mesafe

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (i,j=1, 2, \dots, n) \quad (2.33)$$

ile verilir.

(2.33) denkleminde g_{ij} katsayısı x^i nin koordinat fonksiyonudur, Riemann metrik tensörü olarak ifade edilir. Böyle bir metrik ile karakterize edilmiş olan uzaya Riemann uzayı denir (Norden,1976; Jones ve Tod,1985; Boothby, 2003).

Bir A vektörü, x^i , dx^i gibi iki yakın nokta arasında bir eğri boyunca paralel taşınırsa, bu vektörün bileşenleri ;

$$DA^i = -\Gamma_{jk}^i A^j dx^k \quad (2.34)$$

şeklini alır. Γ_{jk}^i koneksiyonun katsayısını ifade eder.

Tanım M_n , g_{ij} “bir metrik tensörüne sahip bir Riemann uzayı olsun. M_n , g_{ij} metrik tensörleri ile uyumlu tek bir koneksiyonu vardır (Riemann, 1921; Türkoğlu ve Özdemir, 2019).

Γ_{jk}^i , x ve $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ de x' sırasıyla x ve x' 'na ait koordinat fonksiyonları olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifade sağlanır. (Einsenhart, 1927)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial x^i}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\beta}} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial x^j}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^k}{\partial x'^{\beta}} \quad (2.35)$$

Burada Γ_{jk}^i ifadesi tensör değildir. (Türkoğlu, Özdemir, 2019)

Γ_{jk}^i konneksiyonu Riemann uzayına ait ise,

$$g^{ih} g_{jh} = \delta_h^i, \delta_h^i = \begin{cases} 1, & i = h \\ 0, & i \neq h \end{cases} \quad (2.36)$$

eşitliklerinden,

$$\Gamma_{jk}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{ij} [jk, h] \quad (2.37)$$

$$[jk, h] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \right) \quad (2.38)$$

(2.37) ve (2.38) denklemlerinde $[jk, h]$ ve $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ sembolleri sırasıyla 1. tip ve 2. tip Christoffel sembolleri olarak isimlendirir. Bu sembollerin alt iki indise göre simetrik olduğu görülmektedir. (Carmo, 1992)

Konneksiyon Levi-Civita'dan farklıysa, konneksiyon katsayısı Γ_{jk}^i , n-boyutlu M_n Riemann uzayı üzerinde simetrik ve anti-simetrik kısımlarından oluşur. Γ_{jk}^i konneksiyon katsayısının simetrik ve anti-simetrik kısımları sırasıyla,

$$\Gamma_{(jk)}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i) \quad (2.39)$$

$$\Gamma_{[jk]}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) \quad (2.40)$$

verilir.

$\Gamma_{[jk]}^i$ konneksiyonun burulma tensörü adını alır. (2.39) ve (2.40) denklemlerinden yola çıkarak,

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{(jk)}^i + \Gamma_{[kj]}^i \quad (2.41)$$

denklemi elde edilir. Riemann uzayında Γ_{jk}^i simetrik bir tensördür; bu uzay burulmasızdır. yani $\Gamma_{[kj]}^i = 0$ dir. v^i , v_i ve T_{ji}^h , sırasıyla bir kontravaryant, bir kovaryant vektör alanlarının ve bir tensör alanlarının bileşenleri olsunlar. ∇ Riemann konneksiyonuna göre bu büyüklüklerin kovaryant türevleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır (Einsenhart, 1927).

$$\nabla_k T_{ji}^h = \frac{\partial T_{ji}^h}{\partial x^k} + T_{ij}^a \Gamma_{ka}^h - T_{ai}^h \Gamma_{kj}^a - T_{ja}^h \Gamma_{ki}^a \quad (2.42)$$

g_{ij} metrik tensörünün Levi- Civita konneksiyonun kovaryant türevi aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} a \\ kj \end{matrix} \right\} g_{ai} - \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} g_{aj} = 0 \quad (2.43)$$

Genel olarak M_n uzayına ait eğrilik tensörü;

$$R_{kji}^h = \partial_k \Gamma_{ji}^h - \partial_j \Gamma_{ki}^h + \Gamma_{kt}^h \Gamma_{ji}^t - \Gamma_{jt}^h \Gamma_{ki}^t, \quad (\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}) \quad (2.44)$$

olarak ifade edilir. Γ_{ji}^h katsayıları 2. tip Christoffel sembolleri cinsinden alınırsa, g_{ij} metrik tensörünü sahip Riemann uzayının eğrilik tensörü,

$$R_{kji}^h = \partial_k \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} - \partial_j \left\{ \begin{matrix} h \\ ki \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} h \\ ka \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ji \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} h \\ ja \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a \\ ki \end{matrix} \right\} \quad (2.45)$$

ile elde edilir.

M_n , üzerinde $v^i, f, T_{li}^h, S_{kj}^t$ bunlar sırasıyla bir kontravaryant, bir kovaryant vektör alanları, bir skaler fonksiyonu, (1, 2) tip tensör alanın ve burulma tensörünün bileşenleri olsun. R_{kji}^h kovaryant tensörünün Ricci özdeşlikleri şu şekildedir;

$$\nabla_k \nabla_j v^i - \nabla_j \nabla_k v^i = R_{kjh}^i v^h - 2S_{kj}^t \nabla_t v^i, \quad (2.46)$$

$$\nabla_k \nabla_j v^i - \nabla_j \nabla_k v^i = -R_{kji}^h v_h - 2S_{kj}^t \nabla_t v_i \quad (2.47)$$

$$\nabla_k \nabla_j f - \nabla_j \nabla_k f = -2S_{kj}^t \nabla_t f \quad (2.48)$$

$$\nabla_k \nabla_j T_{li}^h - \nabla_j \nabla_k T_{li}^h = R_{kji}^h T_{li}^t - R_{kjl}^t T_{ti}^h - R_{kji}^t T_{lt}^h - 2S_{kj}^t \nabla_t T_{li}^h \quad (2.49)$$

ile ifade edilir. M_n uzay Riemann uzayı ise, burulma tensörü $S_{kj}^t = 0$ dır. (Schouten, 1954).

Kovaryant eğrilik tensörü,

$$R_{kjih} = R_{kji}^a g_{ah} \quad (2.50)$$

olarak tanımlanır.

(2.45) denkleminde yola çıkarak, aşağıda Riemann eğriliğinin özellikleri

$$R_{kjih} + R_{jikh} + R_{ikjh} = 0 \quad (2.51)$$

$$R_{kjih} = -R_{jkhi} \quad (2.52)$$

$$R_{kjih} = -R_{kjhi} \quad (2.53)$$

$$R_{kjih} = R_{ihkj} \quad (2.54)$$

$$R_{kkih} = -R_{kjh} = 0 \quad (2.55)$$

verilmiştir. (2.51) denkleminde Birinci Bianchi Özdeşliği denir. Ek olarak bu denklemin kovaryant türevi alınır;

$$\nabla_l R_{kji}^h + \nabla_k R_{jli}^h + \nabla_j R_{lki}^h = 0 \quad (2.56)$$

(2.56) denkleminde ikinci Bianchi Özdeşliği denir. (2.45) denkleminde, h ve k indisleri üzerinde daraltma yapılarak,

$$R_{ji} = R_{aji}^a \quad (2.57)$$

Ricci eğrilik tensörü elde edilir.

$$R_{ji} = R_{aji}^a = g^{ab} R_{ajib} = g^{ba} R_{ibaj} = g^{ba} R_{bija} = R_{ij} \quad (2.58)$$

Eşitlikleri Ricci eğrilik tensörünün simetrik olduğunu ifade edilir. Ricci eğrilik tensörü ile metrik tensör işleme alınırsa Riemann uzayının skaler eğriliği ,

$$R = g^{ji} R_{ji} \quad (2.59)$$

elde edilir.

2.3. Weyl Uzayları

g ve $\bar{g}$ iki Riemann metriği olmak üzere, bu iki arasında $\bar{g} = e^{2\lambda} g$; $\lambda > 0$ olma koşulu sağlanırsa, bu iki metriğe “birbirine konformaldır” denir. Bu yapıya sahip olan n-boyutlu manifolda Weyl manifoldu denir. $W_n(g, w)$ olarak gösterilir. n-boyutlu Weyl manifoldu için, konformal yapıyı koruyan ve burulmasız tek bir ∇ koneksiyon vardır (Eisenhart, 1927; Özdemir ve Türkoğlu, 2013).

Lokal koordinatlarda metrik tensörünün kovaryant tüveri,

$$\nabla_k \bar{g}_{ij} = 2\bar{w}_k \bar{g}_{ij} , \quad (2.60)$$

formuna dönüşür. Burada w 1- formdur (Hlavaty, 1949).

∇ Weyl konneksiyonu ve ∇^g Riemann konneksiyonu arasında

$$\nabla_x Y = \nabla_x^g Y - w(X) + g(X, Y)\psi \quad (2.61)$$

ilişkisi vardır. X ve Y ifadeleri W_n uzayı üzerinde vektör alanları, ψ ise $w(X) = g(X, \psi)$ eşitliğini sağlayan w dual vektördür. (2.61) denkleminin yerel koordinatlardaki ifadesi,

$$\Gamma_{ji}^l = \left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} - (w_j \delta_i^l + w_i \delta_j^l - w^l g_{ij}) \quad (2.62)$$

Weyl uzayının katsayısı Γ_{ji}^l ile gösterilir. ∇^g Levi-Civita konneksiyonun katsayısı;

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}) \quad (2.63)$$

olarak hesaplanır (Eisenhart, 1927 ; Norden, 1976).

W_n eğrilik tensörü yerel koordinatlarda

$$(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) v_k = - W_{kji}^t v_t , \quad (2.64)$$

ifadesinden yararlanılarak;

$$W_{kji}^l = \partial_k \Gamma_{ji}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l - \Gamma_{ki}^t \Gamma_{jt}^l - \Gamma_{ji}^t \Gamma_{kt}^l, \quad (2.65)$$

elde edilir. (2.62) ve (2.63) denklemde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} W_{kji}^l = & \partial_k \left[\left\{ \begin{matrix} l \\ ji \end{matrix} \right\} - (w_j \delta_i^l + w_i \delta_j^l - g_{ij} w^l) \right] - \partial_j \left[\left\{ \begin{matrix} l \\ ki \end{matrix} \right\} - (w_k \delta_i^l + w_i \delta_k^l - g_{ki} w^l) \right] \\ & + \left[\left\{ \begin{matrix} t \\ ji \end{matrix} \right\} - (w_i \delta_j^t + w_j \delta_i^t - g_{ji} w^t) \right] \left[\left\{ \begin{matrix} l \\ kt \end{matrix} \right\} - (w_k \delta_t^l + w_t \delta_k^l - g_{kt} w^l) \right] \\ & - \left[\left\{ \begin{matrix} t \\ ki \end{matrix} \right\} - (w_k \delta_i^t + w_i \delta_k^t - g_{ki} w^t) \right] \left[\left\{ \begin{matrix} l \\ jt \end{matrix} \right\} - (w_j \delta_t^l + w_t \delta_j^l - g_{jt} w^l) \right] \end{aligned} \quad (2.66)$$

ifadesine ulaşılır. Belirli işlemlerden sonra

$$W_{kji}^l = R_{kji}^l - \delta_j^l w_{ki} + \delta_k^l w_{ji} + \delta_i^l (w_{jk} - w_{kj}) + g^{ls} (g_{ji} w_{ks} - g_{ki} w_{js}), \quad (2.67)$$

$$w_{jk} = \nabla_j w_k + w_j w_k - \frac{1}{2} g_{jk} w_t w^t \quad (2.68)$$

Riemann eğrilik tensörü R_{kji}^l cinsinden hesaplanmış olunur.

Eğrilik tensörü, kovaryant eğrilik tensörü, Ricci tensörü, skaler eğrilik sırayla

$$W_{kji}^h = W_{kjil} g^{lh} \quad (2.69)$$

$$W_{kjil} = W_{kji}^m g_{ml} \quad (2.70)$$

$$W_{ji} = g^{kl} w_{kjil} = W_{kji}^k \quad (2.71)$$

$$W = g^{ji} W_{ji} \quad (2.72)$$

verilir (Einsenhart, 1927).

(2.67) ifadesi g^{ij} ile işleme alınırsa,

$$\begin{aligned} W_{kjim} = & R_{kji}^l g_{lm} - \delta_j^l w_{ki} g_{lm} + \delta_k^l w_{ji} g_{lm} + \delta_i^l (w_{jk} - w_{kj}) g_{lm} + g^{ls} (g_{ji} w_{ks} - \\ & g_{ki} w_{js}) g_{lm} \end{aligned} \quad (2.73)$$

(2.36) ve (2.48) özellikleri (2.73) denkleminde uygulanırsa, W_n kovaryant eğrilik tensörü

$$W_{kjim} = R_{kjim} - g_{jm} w_{kj} + g_{mk} w_{ji} + g_{im} (w_{jk} - w_{kj}) + (g_{ji} w_{km} - g_{ki} w_{jm}) \quad (2.74)$$

olarak elde edilir (Eisenhart, 1927).

W_n uzayının kovaryant eğrilik tensörünün simetrik özellikleri aşağıda verilen ifadeleri sağlar,

$$W_{kjim} = -W_{jkim}, W_{kjim} + W_{kjmi} = 2g_{im} (\nabla_j w_k - \nabla_k w_j) = 4g_{im} \nabla_{[j} w_{k]} \quad (2.75)$$

(2.74) denkleminde k ve j indislerini üzerinde simetri uygulanıp, Riemann tensörünün kovaryant eğriliğinin simetri özelliği kullanılarak

$$W_{kjim} + W_{kjmi} = 2g_{im} (w_{jk} - w_{kj}), \quad (2.76)$$

özdeşliği elde edilir. Burada w_{jk} büyüklüğü (2.68) denkleminde tanımlanmıştır.

W_n uzayının Ricci eğrilik tensörünün R_{ji} Riemann uzayının Ricci eğriliği cinsinden ifadesi,

$$W_{ji} = R_{ji} + (n - 2)w_{ji} + (w_{ji} - w_{ij}) + g_{ji} g^{km} w_{km}, \quad (2.77)$$

şeklinde ifade edilir. ∇ Weyl koneksiyonu metrik olmadığından, W_n uzayında (2.77) denkleminde verilen W_{ji} Ricci eğrilik tensörü, simetrik ve anti-simetrik olmak üzere kısımlara ayrılır,

$$W_{ji} = W_{(ji)} + W_{[ji]} \quad (2.78)$$

Ayrıca (2.77) denklemini g^{ji} ile daraltılarak, (2.56) ifadesini kullanarak, W_n uzayının W skaler eğriliği ; R Riemann skaler eğriliği ve w cinsinden ifadesi şu şekilde gösterilir;

$$W = R + 2(n - 1) \nabla_j w^j - (n - 1)(n - 2) w^j w_j \quad (2.84)$$

3. JEODEZİKLER

Tanım X metrik uzay olmak üzere, $\forall t_1, t_2 \in [x_1, x_2]$ için $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| = |t_1 - t_2|$ şartını sağlayan ve $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$ yoluna jeodezik yol denir.

$\gamma: [0, \infty) \rightarrow X$ uzaklığını değiştirmeyen dönüşüme jeodezik ışın olarak ifade edilir. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow X$ uzaklığını değiştirmeyen dönüşüme de jeodezik çizgi olarak ifade edilir.

Jeodezik yol, jeodezik ışın, jeodezik çizgi dönüşümleri bire-bir dönüşümlerdir te (Çoban, 2011).

Tanım $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$ yol olsun. $x_1 \leq u \leq v \leq x_2$ koşulunu sağlayan $\forall u, v \in [x_1, x_2]$ için,

$v - u = L(\gamma[u, v])$ oluyorsa γ' ya yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol denir.

Özel olarak $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olduğundan $L(\gamma) = x_2 - x_1$ yazılabilir. (Çoban, 2011).

Tanım $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$, $x_1 < x_2$, yol olsun. γ sabit yol veya öyle bir $\gamma': [x_3, x_4] \rightarrow X$ yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol vardır ki $\psi: [x_1, x_2] \rightarrow [x_3, x_4]$,

$\psi(x) = (x_4 - x_3)x + \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2 - x_1}$ şeklinde bu iki aralık arasında afin homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \psi$ bulunabilsin. Bu durumda γ' ya afin yolla parametrize edilmiş yol denir (Çoban, 2011).

Tanım X metrik uzay ve $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$, bu metrik uzay üzerinde γ sabit yol olmak üzere, bir $\gamma': [x_3, x_4] \rightarrow X$ jeodezik yol vardır ki $\psi: [x_1, x_2] \rightarrow [x_3, x_4]$ ve $\psi(x) = (x_4 - x_3)x + \frac{x_2x_3 - x_1x_4}{x_2 - x_1}$ ifadesi şeklinde iki aralık arasında tek afin homeomorfizm olarak $\gamma = \gamma' \circ \psi$ bulunabilir. γ ifadesine afin yolla parametrik edilmiş bölgesel jeodezik denir (Papadopoulos, 2005).

Tanım X metrik uzay olmak üzere, X' e ait bir jeodezik yolun görüntüsüne bir jeodezik parça denir (Çoban, 2011).

Tanım X metrik uzayında seçilen iki noktayı birleştiren jeodezik yola sahip geometrik uzayına jeodezik uzay denir (Çoban, 2011).

Jeodezik uzaylara bir kaç örnek vericek olursak ;

$\forall n \geq 1$, E^n Öklid uzayı için, $\forall x, y \in E^n$ ayrıca $t \in [0,1]$ $\gamma: [0,1] \rightarrow E^n$,

$\gamma(t) = (1-t)x + ty$ şeklinde tanımlanan afin yol eş zamanda E^n Öklid uzayında x ve y 'yi birleştiren jeodezik yol olmasından dolayı E^n uzayı jeodezik uzaydır.

E^n 'nin herhangi bir konveks alt kümesi yine jeodezik uzaydır. Örnek olarak; E^2 nin alt kümesi olan herhangi bir çember jeodezik uzay değildir. Ancak E^2 'nin alt kümesi olan herhangi bir disk konveks olduğundan jeodezik uzaydır.

Tanım X bir metrik uzay ve $\forall x, y \in X$ için $\gamma: [x_1, x_2] \rightarrow X$, ve $\gamma(x_1) = x$ ile $\gamma(x_2) = y$ ifadesi için γ düzeltilebilir yolu var ise X metrik uzayına düzeltilebilir yollar ile bağlantılı uzay denir (Bridson & Haefliger, 1999).

Tanım X bir metrik uzay ve $\forall x, y \in X$ için $|x - y| = \lim_{\gamma} L(\gamma)$ burada infimum x ve y yi birleştiren yollar kümesi üzerinden alınarak tanımlanır. Bu koşulu sağlayan metrik uzaya uzunluk uzayı denir. Bu uzay üzerinde tanımlanan metriğe uzunluk metriği denir (Papadopoulos, 2005).

Tanım $\forall n \geq 2$ için E^n Öklid uzayının bir elemanı olan t noktasının eksiltilmesi ile oluşan $\frac{E^n}{t}$ uzayı uzunluk uzayıdır. Fakat jeodezik uzay değildir. u ve w , E^n uzayındaki noktalar olsun. $[u, w]$, t noktasını içeren bir aralık olsun, bundan dolayı $\frac{E^n}{t}$ uzayı uzunluk uzayıdır ancak jeodezik uzay değildir. Ayrıca $\frac{E^n}{t}$ uzayında u ve v 'yi birleştiren bir jeodezik yol bulunamaz. (Bridson & Haefliger, 1999).

Teorem X bölgesel kompakt uzunluk uzayı olmak üzere, $u \in X$ olsun.

u 'nun öyle bir $G = G(u)$ komşuluğu vardır ki $\forall v, t \in G$ için bu noktaları birleştiren, jeodezik yol vardır (Papadopoulos, 2005).

Tanım G metrik uzay ve $\gamma: [u, v] \rightarrow G$ bir yol olmak üzere $\forall k \in [u, v]$ için öyle bir t 'yi içeren bir kapalı aralık $I(k)$ vardır ki γ 'nın $I(k) \cap [u, v]$ 'ye sınırlandırılmışı jeodezik olsun, bu durumda γ 'ya lokal jeodezik denir (Mercan, 2021).

$\gamma: [u, v] \rightarrow G$ lokal jeodezik olsun. γ yolu yol uzunluğu ile parametrize edilmiş yol olarak ifade edilir (Papadopoulos, 2005).

Tanım $\gamma: [u, v] \rightarrow G$ yol olsun. γ sabit dönüşüm $\gamma: [u, v] \rightarrow [y, z]$ bu iki aralık arasında tek bir afin homeomorfizm olmak üzere $\gamma = \gamma' \circ \gamma$ ifadesi olacak şekilde $\gamma': [y, z] \rightarrow G$ lokal jeodeziği varsa γ' ya afin yolla parametrize edilmiş olan lokal jeodezik denir (Papadopoulos, 2005).

Tanım X metrik uzay olsun. $\forall u, v \in X$ için noktaları birleştiren tek bir jeodezik var ise X metrik uzayına ‘tek jeodezik uzay’ denir (Bridson & Haefliger, 1999).

Lokal koordinat sisteminde $P = \bar{\nabla} - \nabla$ dönüşümünün olduğunu varsayalım ve bu dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x) \quad (3.1)$$

Burada $\bar{\Gamma}_{ij}^h(x)$ ve $\Gamma_{ij}^h(x)$, ortak koordinat sistemi x 'e göre ifade edilen A_n ve $\bar{A}_n$ uzaylarının sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ afin bağlantılarının bileşenleridir. Bir uzayda $l: x = x(t)$ eğrisi afin bağlantısı ∇ olan bir A_n uzayının teğet vektörü denklemi

$$\nabla_t \lambda = \rho(t) \cdot \lambda \quad (3.2)$$

sağlanırsa bu ifadeye jeodeziktir denir. Burada ∇_t , l boyunca kovaryant türevi belirtir ve $\rho(t)$ bir fonksiyondur. Bir A_n uzayının f nin bir $\bar{A}_n$ uzayına eşlenmesinin jeodezik olduğunu bilinir, ancak ve ancak bir ortak koordinat sistemi x tensörü şu şekildedir.

$$P_{ij}^h(x) = \psi_i(x) \delta_j^h + \psi_j(x) \delta_i^h, \quad (3.3)$$

Burada δ_i^h , Kronecker deltasıdır ve ψ_i bir kovektördür (Levi-Civita, 1896).

Riemann uzayında $X = X(t)$ eğrisi üzerinde t_1, t_2 noktaları arasındaki uzaklık olsun,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}} dt \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir. t_1, t_2 nokta arasında minimum uzaklığa sahip olan eğriye uzayın bir jeodeziği denir.

Jeodezikler,

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0 \quad (3.5)$$

tensörel diferansiyel denklemin çözümleri olarak bulunurlar.

Aşağıda verilen örnek metrik ile oluşturulmuş Riemann ve Weyl uzaylarının eodezik denklemlerinin çözümleri incelenecektir.

$$\textbf{Örnek } ds^2 = f(x)dx^2 + dy^2, \quad f(x) = e^x \text{ olmak üzere ;} \quad (3.6)$$

$ds^2 = e^x dx^2 + dy^2$ metriği verilsin. bu metrik ile verilen 1. ve 2. temel metrik formları sırasıyla

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } g^{ij} = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ile verilir. Bu metriğin konneksiyon katsayısı

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} = g^{km} [ij, m] = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (3.8)$$

formülü ile hesaplanır.

Öncelikli olarak (3.8) denkleminde indisler üzerinde hesaplamalar yapılırsa $k=m=1$ için ;

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir.

(3.9) denkleminde $i=j=1$ indisleri için gösterirsek,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} e^x \left(\frac{\partial e^x}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} e^{-x} e^x = \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde $i=1, j=2$ için koneksiyon katsayısını hesaplırsak,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{\partial e^x}{\partial y} + 0 - 0 \right) = 0 \quad (3.11)$$

sonucu elde edilir.

devirsel olarak i, j, k indisleri benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$i=2, j=1$ için ,

$$\Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} e^{-x} \left(0 + \frac{\partial e^x}{\partial y} - 0 \right) = 0 \quad (3.12)$$

$i=2, j=2$ için koneksiyon katsayıları benzer şekilde hesaplanırsa,

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} e^{-x} (0 + 0 - 0) = 0 \quad (3.13)$$

Şimdi, (3.8) denkleminde $k=m=2$ için konneksiyon katsayısı çözümü ,

$$\Gamma_{ij}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \quad (3.14)$$

bulunur.

(3.14) denkleminde indis değerleri $i=1, j=1$ yerine konulursa,

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + 0 - \frac{\partial e^x}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir.

aynı şekilde (3.14) denkleminde $i=1, j=2$ indis değerleri için,

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\partial 1}{\partial x} - 0 \right) = 0 \quad (3.16)$$

Sonucu elde edilir.

Benzer şekilde $i=2, j=1$ için hesaplanırsa,

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 1}{\partial x} + 0 - 0 \right) = 0 \quad (3.17)$$

indis değerleri $i=2, j=2$ için konneksiyon katsayıları hesaplanırsa,

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial 1}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Lokal koordinatlarda jeodezik dönüşüm

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 , \quad (3.19)$$

denkleminde hesaplanır.

(3.7) örneğinde hesaplamış olduğumuz Γ_{ij}^k konneksiyon katsayılarından

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \text{ dır;}$$

Böylece (3.18) denklemini,

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} = 0 \quad (3.20)$$

formuna dönüşür.

(3.19) denkleminde $k = 1$ için,

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} = \frac{d^2 x}{ds^2} = 0, \quad (3.21)$$

diferansiyel denklemin çözümü,

$$x(s) = cs + d, \quad (c, d \in \mathbb{R}) \quad (3.22)$$

doğru denklemleri ailesidir.

$i = j = k = 1$ için ve $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}$ için jeodezik denklemleri

$$\frac{d^2 x^1}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^1}{ds} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{2} \frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (3.24)$$

olarak hesaplanır. İkinci dereceden

$$x'' + \frac{1}{2} (x')^2 = 0, \quad (3.25)$$

diferansiyel denklemin çözümü

$$x(s) = 2\log(c_1 + s) + c_2, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \quad (3.26)$$

olarak hesaplanır.

Benzer şekilde bu metrik ile verilen Weyl uzayının gama koneksiyon katsayıları ve jeodezik denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi ,

$i = j = l = 1$ için ,

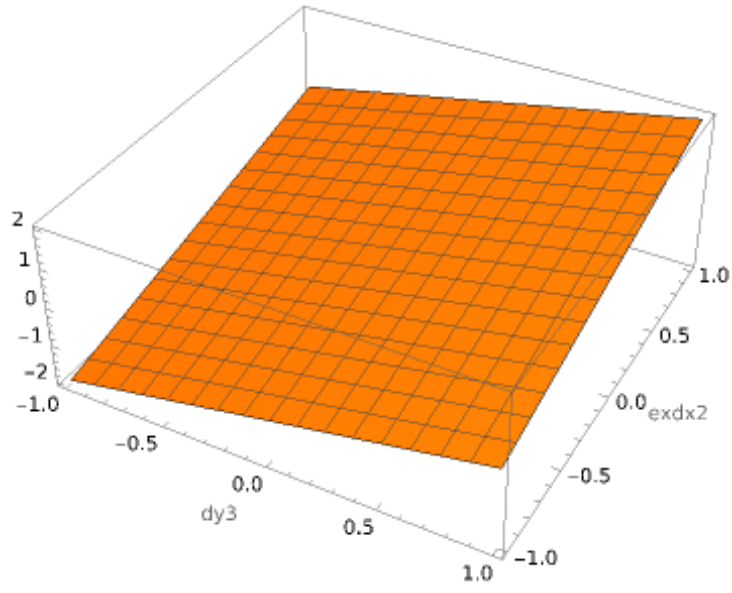
$$\Gamma_{11}^1 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} - (w_1 \delta_1^1 + w_1 \delta_1^1 - w^1 g_{11}), \quad (3.27)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} - (2 w_1 - w^1 e^x)$$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \left(\frac{1}{2} - 2w_1 + w^1 e^x \right) \frac{dx}{ds} \frac{dx}{ds} = 0 \quad (3.28)$$

bulunur.

Özel olarak w_i , w^i 1-formları sıfır seçilirse Riemann ve Weyl uzaylarının jeodeziklerinin aynı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.1. $ds^2 = e^x dx^2 + dy^2$ Metriğinin Jeodezik Grafiği

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde Öklid uzayı, Öklid çatısı, afin uzay ve bu uzayda eğrilerin tanımı, diferansiyellenebilir eğrilerin tanımlarına yer verilmiştir. Öklid uzayında kovaryant türev operatörü tanıtılmıştır.. İkinci bölümünde Riemann uzayında temel tanım ve teoremler yer verilmiştir. Bu uzayda Riemann metriği açıklandı. Riemann manifoldları üzerinde koneksiyon tanımlanmıştır. Bu koneksiyonlardan yola çıkılarak 1. ve 2. tip Christoffel sembolleri elde edildi. Yine bu uzayda eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve Riemann uzayının eğrilik tensörünün özellikleri; 1. ve 2. Bianchi özdeşlikleri ele alınarak, simetri özelliklerinden bahsedilmiştir. Sonrasında, benzer analogi üzerinden Weyl uzayı üzerinde bu büyüklükler verilerek, yapıların sahip olduğu bileşenler vurgulanmıştır. Üçüncü bölümde ise jeodezik uzay tanımı, ilgili teorem ve bu teoremlere dayalı tanımlar verilerek, Riemann uzayında jeodezik denklemin tanımı sunulmuştur. Bu bağlamda ele alınan problemi Riemann ve Weyl uzayındaki çözümleri karşılaştırılarak aradaki değişim sunulmuştur. Ortaya çıkan çalışmada yeni koneksiyonlara sahip olan uzaylar için eğriliklerinin ayrımlı dönüşümlerin altındaki değişimi ve yüksek boyutlu Öklid uzaylarında incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Bridson M.R. & Haefliger A.**, (1999). Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Carmo, M. P. D.** (1992). ‘Riemannian geometry, mathematics theory and applications. Birkhäuser, Basel
- Çoban H. Ü.** (2011). Geodezikler ve geodezik metrik uzaylar, Kırklareli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Eisenhart, L. P. (1927).** Non-Riemannian Geometry. The American Mathematical Society Publishing, New York
- Folland, G.B.** (1970). “Weyl Manifolds”, J. Differential Geometry, 4, 145-153.
- Hlavaty, V.** (1949) Theorie d'immersion d'une dans. Ann. Soc. Polon. Math., 21, 196-206
- Levi-Civita, T.** (1896) Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. Ann. di Mat. 1896, 24, 252–300
- Mercan, M.** (2021) Uzunluk uzayları ve geodezik uzaylar , Kırklareli Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü.
- Norden, A.** Affinely connected spaces, GRFML, (1976), Moscow, (in Russian).
- O’Neill, B.** (1983). Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity. Academic Press, New York and London
- Papadopoulos, A.** (2005) Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature, European Mathematical Society Publishing House, Zürich.
- Schouten, J. A.** (1954). Ricci Calculus, Springer, Berlin-Göttingen.
- Suhendro, I.**(2007). A new semi-symmetric unified field theory of the classical fields of gravity and electromagnetism, Special Report, Progress in Physics, 4,47-62

- Türkoğlu, M. D.** (2019). Geometry of Weyl Spaces with a special connection, PhD. Thesis. İstanbul: İstanbul Technical University.
- Ünal, F. & Uysal, A.** (2005). Weyl manifolds with semi-symmetric connection, Mathematical and Computational Applications, 10, 3, 351-358.
- Yüce, S. ve Hacısalihoğlu H. ,** (2006). Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri, 2, 2-6, 6,9.
- Yüce, S.** (2006). Öklid Uzayında Diferansiyel Geometri. 45, 55, 382 Journal of Mathematical Sciences, 217(5).
- Weyl, H.** (1921). Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der Projektiven und der Konformen Auffassung, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 99–112.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Cansu ANIL BAYRAKTAR

ÖĞRENİM DURUMU:

• **Lisans** : 2014, T.C Haliç Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

• **Yüksek Lisans** : 2023, Haliç Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümü

İlköğretim, ortaöğretim ve lise eğitimini İstanbul'da tamamladı. Lisans eğitimini T.C Haliç Üniversitesi Fen ve Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde 2014 yılında tamamladı. Yüksek lisans eğitimine 2022 yılında Haliç Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Uygulamalı Matematik bölümünde eğitim hayatına devam etmiştir.