

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

SALKOWSKI EĞRİSİ VE FRENET VEKTÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN
REGLE YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS

Ebru ÇAKIL

EKİM-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**SALKOWSKI EĞRİSİ VE FRENET VEKTÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN
REGLE YÜZEYLER**

**RULED SURFACES GENARETED BY THE SALKOWSKI CURVE AND ITS
FRENET VECTORS**

YÜKSEK LİSANS

Ebru ÇAKIL

**EKİM-2023
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**SALKOWSKI EĞRİSİ VE FRENET VEKTÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN
REGLE YÜZEYLER**

**RULED SURFACES GENERATED BY THE SALKOWSKI CURVE AND ITS
FRENET VECTORS**

YÜKSEK LİSANS

Ebru ÇAKIL

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM

**EKİM-2023
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Salkowski Eğrisi ve Frenet Vektörleri Tarafından Üretilen Regle Yüzeyle**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmalarını kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

19/10/2023

Ebru ÇAKIL

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitiminin boyunca, ders ve tez aşamalarında, akademik bilgilerini ve tecrübelerini benimle içtenlikle paylaşan, özverisi ve sevgisiyle beni motive eden, bana inanarak ve beni destekleyerek ilgimi her daim güncel tutan, saygıdeğer danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sümeyye GÜR MAZLUM'a, bu süreçte bana destek olan ÇAKIL ailesine ve son günlerimde yanımda olan sevgili nişanlım Anıl HALİŐEELİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ebru ÇAKIL
GÜMÜŞHANE – 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasının Giriş Bölümünde, geometrinin kısa tarihçesinden, çalışmaya konu olan eğri ve yüzeylerin günlük hayattaki ve teknolojiadaki yerlerinden ve bu alanda yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Genel Bilgiler bölümünde, çalışmanın orijinal kısmında kullanılmış olan Öklid uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde, çalışmanın ana karakteri olan Öklid uzayında Salkowski eğrisi ve bu eğriye ait bazı geometrik özellikler ifade edilmiştir. Bulgular bölümü çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ise dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü bu eğrinin Frenet vektörlerinin lineer bileşiminden oluşan regle yüzeyler tanımlanmış ve bu yüzeylerin parametrik denklemleri verilmiştir. Dahası bu yüzeylerin, normal vektörleri, striksiyon eğrileri, dağılma parametreleri, teğet ve asimptotik düzlem denklemleri hesaplanmış ve grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dağılma parametresi, Frenet çatısı, Regle yüzey, Salkowski eğrisi, Striksiyon eğrisi.

SUMMARY

In the Introduction of this thesis, the brief history of geometry, the place of the curves and surfaces in daily life and technology, and the studies carried out in this field are mentioned. In the General Information section, basic concepts about curves and surfaces in Euclidean space, which have used in the original part of the study, are included. In the Materials and Methods section, Salkowski curve in Euclidean space, which is the main character of the study, and some geometric properties of this curve are expressed. The Findings section constitutes the original part of the study. In this section, ruled surfaces whose main curve is the Salkowski curve and whose direction vector consists of linear combination of Frenet vectors of this curve have defined and the parametric equations of these surfaces have given. Moreover, the normal vectors, striction curves, distribution parameters, tangent and asymptotic plane equations of these surfaces have calculated and their graphs have drawn.

Keywords: Distribution parameter, Frenet frame, Regle surface, Salkowski curve, Striction curve.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	8
2.1. Öklid Uzayında Eğriler	8
2.2. Öklid Uzayında Yüzeyler.....	10
2.3. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler	12
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	16
3.1. Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi	16
4. BULGULAR.....	19
4.1. Salkowski eğrisi ve $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler.....	19
4.2. Salkowski eğrisi ve $T(t)$ teğet vektöründen elde edilen regle yüzeyler.....	48
4.3. Salkowski eğrisi ve $N(t)$ asli normal vektöründen elde edilen regle yüzeyler	60
4.4. Salkowski eğrisi ve $B(t)$ binormal vektöründen elde edilen regle yüzeyler	71
4.5. Salkowski eğrisi ve $bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler.....	85
4.6. Salkowski eğrisi ve $aT(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler	98
4.7.Salkowski eğrisi ve $aT(t) + bN(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler	104
4.8. Salkowski eğrisi ve $T(t) + N(t) + B(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler .	115
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	121
KAYNAKÇA.....	127
ÖZGEÇMİŞ	131

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 1. $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar.....	121
Tablo 2. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar.....	122
Tablo 3. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar.....	122
Tablo 4. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar.....	123
Tablo 5. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar	124
Tablo 6. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar	124
Tablo 7. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar.....	125
Tablo 8. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar	126

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Öklid (M.Ö. 330-275) (URL-1)	1
Şekil 2. Öklid'in Elemanları kitabı (URL-2)	1
Şekil 3. Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz tarafından Türkçeye çevrilen Öklid'in Elemanları kitabı (URL-3)	2
Şekil 4. Gaspard Monge (1746-1818) (URL-4).....	3
Şekil 5. Silindir, koni ve küre (URL-5)	4
Şekil 6. Sarmal merdiven, DNA modeli ve vida (URL-6, URL-7, URL-8)	5
Şekil 7. M.A. Lancret ve B. de Sain Venant (URL-9, URL-10).....	5
Şekil 8. Sırasıyla, slant helis, Salkowski eğrisi ve Anti-Salkowski eğrisi (URL-11, URL-12, URL-13).....	6
Şekil 9. Yüzey	11
Şekil 10. Yüzeyin parametre eğrileri	11
Şekil 11. Regle yüzey.....	12
Şekil 12. Silindir	13
Şekil 13. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ için Salkowski eğrileri.....	16
Şekil 14. Salkowski eğrisi ve $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(a = b = c = m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$	21
Şekil 15. Salkowski eğrisi ve $T(t)$ teğet vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(a = 1, b = c = 0, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$	49
Şekil 16. Salkowski eğrisi ve $N(t)$ asli normal vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(b = 1, a = c = 0, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$	61
Şekil 17. Salkowski eğrisi ve $B(t)$ binormal vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(c = 1, a = b = 0, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$	72
Şekil 18. Salkowski eğrisi ve $bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(a = 0, b = c = m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$	87

Şekil 19. Salkowski eğrisi ve $aT(t)+cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(b=0, a=c=\frac{1}{6}, m=\frac{1}{5} \text{ için} \right) \dots\dots\dots 99$$

Şekil 20. Salkowski eğrisi ve $aT(t)+bN(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(c=0, a=b=\frac{1}{3}, m=\frac{1}{5} \text{ için} \right) \dots\dots\dots 105$$

Şekil 21. Salkowski eğrisi ve $T(t)+N(t)+B(t)$ vektöründen elde edilen regle

$$\text{yüzeyler } \left(a=b=c=1, m=\frac{1}{5} \text{ için} \right) \dots\dots\dots 116$$



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\gamma(t)$: Salkowski eğrisi
$\gamma'(t)$: Salkowski eğrisinin türevi
$T(t)$: Teğet vektör
$N(t)$: Asli normal vektör
$B(t)$: Binormal vektör
$\kappa(t)$: Eğrilik
$\tau(t)$: Burulma (Torsiyon)
$\varphi(t, v)$: Regle yüzey
$\varphi_X(t, v_X)$: X vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_T(t, v_T)$: X_T vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_N(t, v_N)$: X_N vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_B(t, v_B)$: X_B vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_{NB}(t, v_{NB})$: X_{NB} vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_{TB}(t, v_{TB})$: X_{TB} vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_{TN}(t, v_{TN})$: X_{TN} vektöründen elde edilen regle yüzey
$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$: X_{TNB} vektöründen elde edilen regle yüzey
$\eta(t)$: $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin normali
$\eta_X(t)$: $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin normali
$\eta_T(t)$: $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin normali
$\eta_N(t)$: $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin normali
$\eta_B(t)$: $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin normali
$\eta_{NB}(t)$: $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin normali
$\eta_{TB}(t)$: $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin normali
$\eta_{TN}(t)$: $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin normali
$\eta_{TNB}(t)$: $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin normali

v	:	$\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin parametresi
v_X	:	$\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin parametresi
v_T	:	$\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin parametresi
v_N	:	$\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin parametresi
v_B	:	$\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin parametresi
v_{NB}	:	$\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin parametresi
v_{TB}	:	$\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin parametresi
v_{TN}	:	$\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin parametresi
v_{TNB}	:	$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin parametresi
$\psi(t)$:	$\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_X(t)$:	$\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_T(t)$:	$\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_N(t)$:	$\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_B(t)$:	$\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_{NB}(t)$:	$\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_{TB}(t)$:	$\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_{TN}(t)$:	$\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\psi_{TNB}(t)$:	$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi
$\rho(t)$:	$\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_X(t)$:	$\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_T(t)$:	$\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_N(t)$:	$\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_B(t)$:	$\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_{NB}(t)$:	$\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_{TB}(t)$:	$\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_{TN}(t)$:	$\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi
$\rho_{TNB}(t)$:	$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

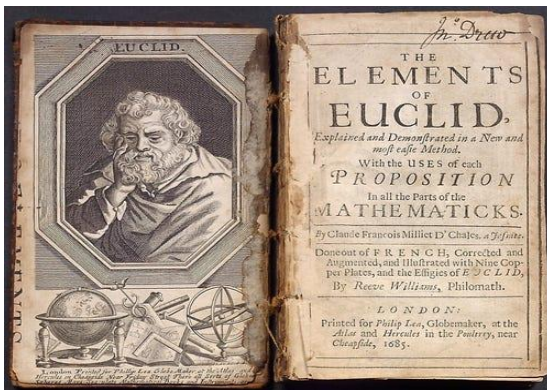
1.GİRİŞ

Öklid, milattan önce 330-275 yılları arasında, Mısır'ın İskenderiye şehrinde yaşamış Yunan bir matematikçidir, (Şekil 1). Öklid, Platon'un Atina'daki ünlü akademisinde eğitimini tamamladıktan sonra İskenderiye Kraliyet Enstitüsü'nde büyük bir matematik okulu kurmuştur.



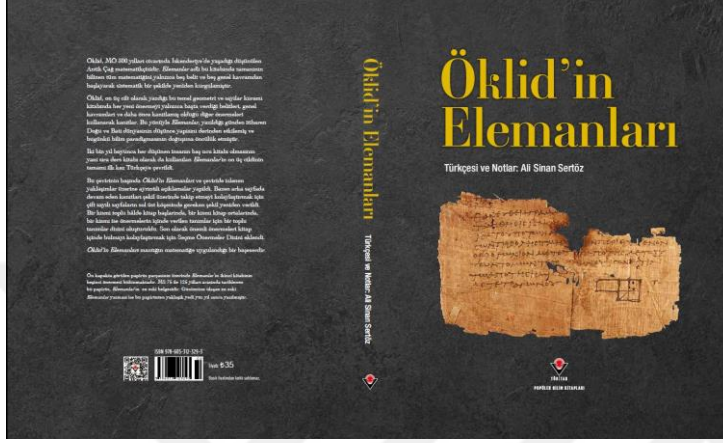
Şekil 1. Öklid (M.Ö. 330-275) (URL-1)

Belki de bütün zamanların en önemli ve başarılı kitabı olan Öklid'in Elemanları adlı eserin yazarı olması nedeniyle, Öklid sık sık geometrinin babası olarak adlandırılır, (Şekil 2). Öklid'in Elemanları; günümüze kadar ulaşan ve güncelliğini koruyan nadir eserlerden biri olmanın yanı sıra matbaa icat edildikten sonra basılan ilk kitaplardandır. Yayınlanan nüsha sayısı açısından ise ikinci sırada gelmektedir.



Şekil 2. Öklid'in Elemanları kitabı (URL-2)

Öklid'in Elemanları kitabı, 13 ciltten oluşan Yunanca bir eserdir. Bu kitap zamanla farklı dillere çevrilmiştir. Kitabın parça parça Türkçe çevirileri de yapılmış olmakla birlikte, ilk tam Türkçe çevirisi Prof. Dr. Ali Sinan SERTÖZ tarafından, 2019 yılında yapılmıştır. Kitabın ön kapağında görülen papirüs parçası kitaba ait en eski belge olmakla birlikte, üzerinde Elemanların ikinci kitabının beşinci önermesi bulunmaktadır, (Şekil 3).



Şekil 3. Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz tarafından Türkçeye çevrilen Öklid'in Elemanları kitabı (URL-3)

Elemanlar kitabı; nokta, doğru, açı, düzlem gibi tanımlarla başlar. Bu tanımları, beş postulat ve beş aksiyom takip eder.

Öklid'in Postulatları şunlardır:

1. Herhangi iki noktayı birleştirerek düz bir doğru parçası çizilebilir.
2. Bir doğru parçası, düz bir hat boyunca sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşdeğerdir.
5. İki doğru parçası üçüncü ile kesişecek şekilde çizilirse bir taraftaki iç açılardan toplamı iki dik açıdan daha azdır. Bu iki doğru parçası yeteri kadar uzatıldığında, o tarafta birbirleriyle kesişmelidir (Paralel Postulatu olarak da bilinir).

Öklid'in Aksiyomları ise şunlardır:

1. Aynı "maddeye" eşit olan şeyler birbirine de eşittir.
2. Eşit olanlara eşit olan miktarlar eklenirse toplamlar da eşit olur.

3. Eşit olanlardan eşit olan miktarlar çıkarılırsa kalan da eşittir.
4. Birbirine denk olan maddeler birbirine eşittir.
5. Bütün, kendisini oluşturan parçalardan büyüktür.

Kitap; piramitler, koniler, küreler ve silindirler gibi üç boyutlu cisimlerin hacim formüllerini de içerir. Bunun yanı sıra kitapta geometrik diziler, asal sayılar, iki sayının en büyük ortak bölenini ve en küçük ortak katını bulmaya ilişkin kanıtlar da bulunur. Dahası kitapta tam sayıların özellikleri üzerine bir dizi teoreme de yer alır. Bu da sayı teorisinin ilk gerçek başlangıcına işaret eder.

Öklid sonsuz sayıda asal sayının olduğunu kanıtlayan ilk matematikçidir. Çoğunlukla Öklid Teoremi olarak bilinen kanıtının dayanağı, herhangi bir sonlu asal sayı dizisi birbiriyle çarpılıp sonra 1 sayısı eklenirse, sonucun yeni bir asal sayı olduğudur. Asal sayıların sonsuzluğuna ilişkin bu kanıtı da Elemanların 11. kitabının, 20. önermesinde bulunmaktadır.

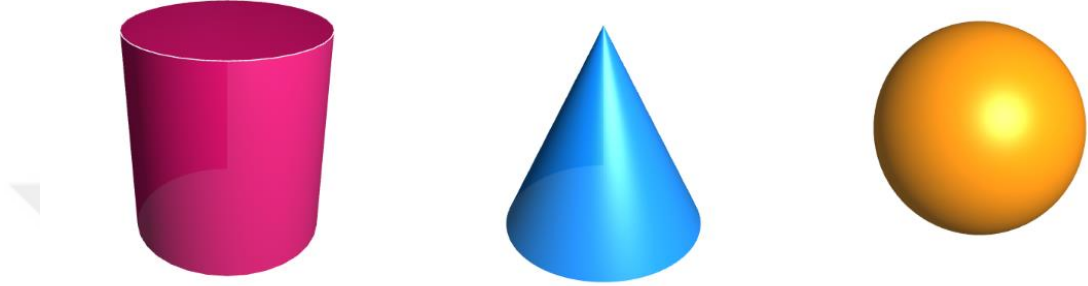
Öklid'in geometrisinin 3-boyutlu uzayı olan ve geçmişten günümüze üzerinde pek çok akademik çalışma yapılan Öklid uzayı, Öklid'in adıyla anılmaktadır.

Diferansiyel geometrinin en önemli konularından birisi Öklid uzayında yüzeylerdir. Yüzeyler kavramı, mühendislik, fizik, mimari, bilgisayar grafikleri gibi çeşitli disiplinlerde önemli bir yere sahiptir. Yüzeylerin iyi bilinen örneklerinden olan regle yüzeyler, 19. yüzyıl Fransız matematikçisi G. Monge tarafından ortaya konmuştur, (Şekil 4).



Şekil 4. Gaspard Monge (1746-1818) (URL-4)

Regle yüzeyler, bir eğri boyunca bir doğrunun hareket etmesiyle meydana gelirler. Bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi ve doğruya ise regle yüzeyin doğrultman vektörü (ana doğrusu) denir. Örneğin; silindir ve koni birer regle yüzey belirtirken, küre bir regle yüzey değildir, (Şekil 5). Regle yüzeyler kinematik, bilgisayar destekli tasarım, mimari gibi çeşitli yerlerde uygulama alanına sahiptir. Bu yüzeylerin açılabilir veya minimal yüzey gibi sınıflandırılmasına ilişkin çalışmalar klasik diferansiyel geometrinin temel konularındandır.



Şekil 5. Silindir, koni ve küre (URL-5)

Regle yüzeyler ile ilgili temel kavramlar ve uygulamalar pek çok kaynakta mevcuttur, (Aksar, 2017; Altın vd., 2019; Altın vd., 2020; Alegre vd., 2010; Ali vd., 2013; Biran, 1975; Çakmak, 2018; Gray vd., 2006; Güven, 2020; Gür, 2015; Gür Mazlum vd., 2020; Hacısalihoğlu, 1998; Hacısalihoğlu, 2012; Izumiya ve Takeuchi, 2003; Ouarab ve Chahdi 2019; Ouarab vd., 2018; Ouarab vd., 2020; O'Neill, 1983; Öncü, 2005; Önder, 2018; Önder ve Kaya, 2017; Özdemir, 2020; Sabuncuoğlu, 2016; Saçlı, 2013; Sarioğlugil ve Tutar, 2007; Şenatalar, 1978; Tunçer ve Ekmekçi, 2013; Yaylı ve Saraçoğlu, 2012; Yıldız vd., 2021; Yu vd., 2014; Yüce, 2020).

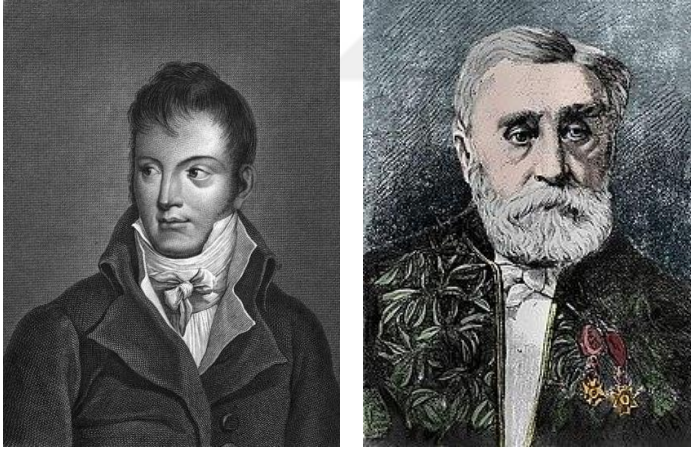
Diferansiyel geometride önemli bir diğer konu ise eğrilerdir. I , \mathbb{R} nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna, 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2016). \mathbb{R}^3 teki diferansiyellenebilir bir α eğrisinin Frenet büyüklükleri $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$ dir, burada T teğet vektör, N normal vektör, B binormal vektör, κ eğrilik ve τ burulmadır. Eğrinin karakterizasyonunun belirlenmesinde eğrilik ve burulma önemli bir rol oynamaktadır. Eğriliğin sıfır olması eğrinin doğrusal olması, burulmanın sıfır olması ise eğrinin düzlemsel olması demektir.

3-boyutlu Öklid uzayında bulunan eğrilerin en bilindik örneklerinden birisi helislerdir. Helisler günlük yaşantımızda sıkça karşımıza çıkar. Bir ağaca veya duvara sarılarak çıkan sarmaşık, DNA modeli, sarmal merdivenler veya bir vidanın üzerine işlenmiş yivler ve setler birer helis örneğidir, (Şekil 6).



Şekil 6. Sarmal merdiven, DNA modeli ve vida (URL-6, URL-7, URL-8)

Helisler, sıfırdan farklı sabit eğrilik ve sıfırdan farklı sabit torsiyon fonksiyonlarına sahip eğriler olarak tanımlanırlar. Helis kavramı 1802 yılında Lancret tarafından ortaya koyulmuş ve 1845 yılında B. de Sain Venant tarafından ispatlanmıştır, (Şekil 7).

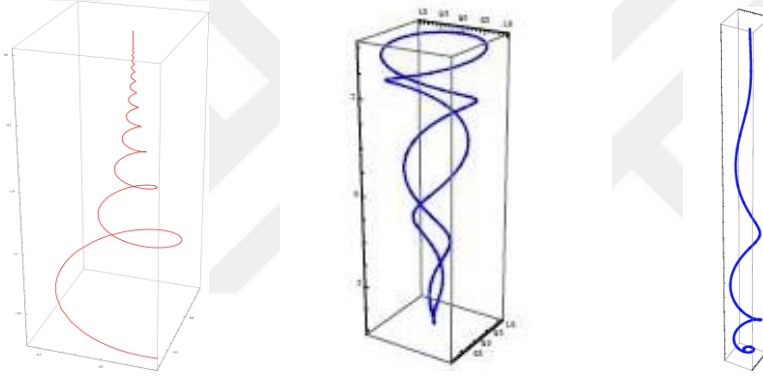


Şekil 7. M.A. Lancret ve B. de Sain Venant (URL-9, URL-10)

Bir eğrinin genel helis olması için gerek ve yeter şartın sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonlarının oranının sabit olmasıdır. Ali, 3-boyutlu Öklid uzayında genel helislerin konum vektörleri üzerinde çalışmıştır (Ali, 2011). Deshmukh vd., eğrilik-burulma ilişkileri ile tanımlanmış uzay eğrileri ve bağlantılı helisleri incelemiştir (Deshmukh vd., 2019).

Bir diğerk bilindik eğri örneği ise slant helislerdir. Slant helis kavramı ilk olarak, Izumiya ve Takeuchi tarafından yayınlanan "New Special Curves and Developable Surfaces (2004)" isimli makalede tanımlanmıştır. Ali, 3-boyutlu Öklid uzayında slant helislerin konum vektörlerini incelemiştir (Ali, 2012). Kula ve Yaylı, Küresel gösterge ve Slant helis üzerine çalışmışlardır (Kula ve Yaylı, 2005). Kula vd., 3-boyutlu Öklid uzayında Slant helislerin karakterizasyonları üzerine çalışmışlardır (Kula vd., 2009).

Slant helislerin bir örneğini teşkil eden Salkowski eğrileri ise E. Leopold Salkowski'nin, "Zur Transformation von Raumkurven (1909)" adlı çalışmasında, sabit eğrilikli ve sabit olmayan torsiyonlu eğri ailesi olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde eğriliği sabit olmayan ve torsiyonu sabit olan eğriler de anti-Salkowski eğrileri olarak bilinmektedir, (Şekil 8). Juan Monterde çalışmasında Salkowski eğrisinin parametrik denklemini ve Frenet vektörlerini vermiştir (Monterde, 2009).



Şekil 8. Sırasıyla, slant helis, Salkowski eğrisi ve Anti-Salkowski eğrisi (URL-11, URL-12, URL-13)

3-boyutlu Öklid ve Lorentz uzaylarında Salkowski eğrisi ile pek çok çalışma bulunmaktadır. Aksan ve Gür Mazlum, timelike asal normalli spacelike Salkowski eğrisi üzerinde çalışmışlardır (Aksan ve Gür Mazlum, 2022). Ali, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike asli normalli, spacelike Salkowski ve anti-Salkowski eğrilerini incelemiştir (Ali, 2009). Coşanoğlu ve Bayram, çalışmalarında Salkowski eğrisi, anti-Salkowski ve helis eğrilerinden bahsetmişlerdir (Coşanoğlu ve Bayram, 2020). Genç Güzel, Salkowski eğrilerinin geometrik uygulamasını yapmıştır (Genç Güzel, 2020). Gür ve Şenyurt, Salkowski eğrilerinin küresel göstergelerinin Frenet vektörleri ve jeodezik eğrilikleri ile ilgili çalışma yapmışlardır (Gür ve Şenyurt, 2010). Gür Mazlum vd., 3-boyutlu Öklid uzayında Salkowski eğrilerinin bazı özelliklerini ve modifiye

ortogonal çatılarını hesaplanmışlardır (Gür Mazlum vd., 2022). Yazarlar, Salkowski eğrisi ve anti-Salkowski eğrisine ait Smarandache eğrilerini incelemişlerdir (Öztürk, 2019; Şenyurt ve Uzun, 2020). Şenyurt vd., 3-boyutlu Minkowski uzayında timelike Salkowski eğrisinin küresel gösterge eğrilerinin Frenet vektörleri ve jeodezik eğrilikleri üzerine hesaplamalar yapmışlardır (Şenyurt vd., 2015).

Bu tez çalışmasında, dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü bu eğrinin Frenet vektörlerinden üretilen vektörler olan regle yüzeyler üretilmiştir. Elde edilen regle yüzeylerin parametrik ifadeleri verilmiş, grafikleri çizilmiş ve bu yüzeylere ait bazı geometrik özellikler incelenmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.1.1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$

reel değerli fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bu fonksiyona \mathbb{R}^3 üzerinde Öklid iç çarpım fonksiyonu denir. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^3$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için;

i) Bilineerlik Aksiyomu:

$$\langle ax + by, z \rangle = a \langle x, z \rangle + b \langle y, z \rangle,$$

$$\langle x, ay + bz \rangle = a \langle x, y \rangle + b \langle x, z \rangle$$

ii) Simetri Aksiyomu:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

iii) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu:

$$\langle x, x \rangle > 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

dır. Böylece $\{\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine de 3 - boyutlu Öklid uzayı denir (O'neill, 1983).

Tanım 2.1.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna \mathbb{R}^3 te bir eğri denir. Eğer $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise eğriye birim hızlı eğri ve eğrinin parametresine de yay parametresi denir.

Tanım 2.1.3. \mathbb{R}^3 uzayında verilen bir α eğrisi boyunca elde edilen $T(t), N(t), B(t)$ vektörlerine sırasıyla α eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Ayrıca $\{T(t), N(t), B(t)\}$ çatısına α eğrisinin Frenet çatısı denir (Hacısalıhoğlu, 1998; Yüce, 2020).

Tanım 2.1.4. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Bu eğrinin $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet vektörleri $T(t), N(t), B(t)$ olmak üzere, bu vektörler;

i) t yay parametresi ise,

$$\begin{cases} T(t) = \alpha'(t), \\ N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}, \\ B(t) = T(t) \wedge N(t), \end{cases}$$

ii) t keyfi parametre ise,

$$\begin{cases} T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \\ N(t) = T(t) \wedge B(t), \\ B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1998; Sabuncuoğlu, 2016).

Tanım 2.1.5. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir eğrisinin eğrilik ve burulması;

i) t yay parametresi ise,

$$\kappa(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle \quad \text{ve} \quad \tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle$$

ii) t keyfi parametre ise,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha''(t)\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihöğlü, 1998; Sabuncuoğlü, 2016).

Tanım 2.1.6: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir eğrisinin Frenet vektörleri $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ olmak üzere, $Sp\{T(t), N(t)\}$ kümesine α eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki oskülatör düzlemi, $Sp\{T(t), B(t)\}$ kümesine α eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki rektifiyan düzlemi, $Sp\{N(t), B(t)\}$ kümesine α eğrisinin, $\alpha(t)$ noktasındaki normal düzlemi denir, (Hacısalihöğlü, 1998).

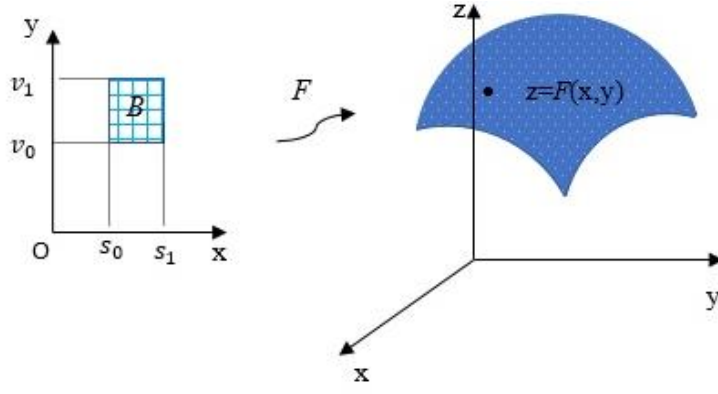
Teorem 2.1.7. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir eğri olsun. $T(t), N(t), B(t)$ vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} T'(t) = \|\alpha'(t)\| \kappa(t) N(t), \\ N'(t) = \|\alpha'(t)\| (-\kappa(t) T(t) + \tau(t) B(t)), \\ B'(t) = -\|\alpha'(t)\| \tau(t) N(t) \end{cases}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntıya Frenet türev formülleri denir (Hacısalihöğlü, 1998; Sabuncuoğlü, 2016).

2.2. Öklid Uzayında Yüzeyler

Tanım 2.2.1. xoy düzleminin bir (B) bölgesindeki her bir (x, y) noktasının F diffeomorfizmi altındaki resmi $z = F(x, y)$ olsun. Böylece (x, y) noktaları düzlemde (B) bölgesini tararken (x, y, z) noktaları da uzayda bir yüzey meydana getirir. Bu yüzeyin denklemi $z = F(x, y)$ şeklindedir. Bu yazılış şekline yüzeyin açık denklemi veya yüzeyin Monge gösterimi denir. Yüzeyin kapalı formdaki yazılışı ise $F(x, y, z) = 0$ şeklinde verilir (Şenatarlar, 1978; Sabuncuoğlü, 2006), (Şekil 9).

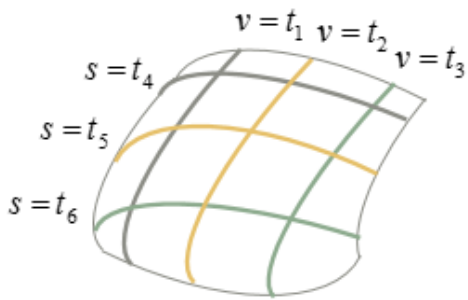


Şekil 9. Yüzey

$s_0 \leq s \leq s_1$, $v_0 \leq v \leq v_1$ olmak üzere s, v bağımsız parametreleri bu aralıklarda sürekli ve sürekli türevlere sahipse, bu durumda

$$x = x(s, v) \quad , \quad y = y(s, v) \quad , \quad z = z(s, v)$$

ifadesine yüzeyin parametrik denklemini denir. Burada $v = t_1$ sabit değeri için sadece s değişeceğinden bu denklemler bir t_1 eğrisi gösterir. Aynı şekilde $v = t_2$ sabit değeri için t_2 eğrisi elde edilir. Sonuç olarak v parametreleri sürekli değiştikçe bu eğriler de sürekli olarak değişeceğinden bir yüzey meydana getirir. Benzer şeyler s parametresi için de söylenebilir (Şekil 10).



Şekil 10. Yüzeyin parametre eğrileri

Başka bir deyişle (s, v) bağımsız parametrelerinin ikisinin de değişmeleri bir yüzey meydana getirir. Yani yukarıdaki denklemler arasından (s, v) parametreleri yok edilirse

$F(x, y, z) = 0$ gibi bir denklem elde edilir. Bu ise bir yüzey gösterir. Eğer (s, v) aralarında lineer bağımlı ise bu durumda denklemin bir eğri göstereceği açıktır.

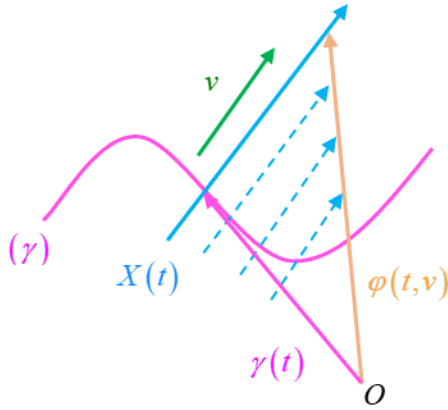
Tanım 2.2.2. M , \mathbb{R}^3 de bir yüzey olsun. M nin bir P noktasından geçen bütün eğrilerin bu noktadaki teğetleri aynı düzlem içinde kalır. Bu düzleme M nin P noktasındaki teğet düzlemi denir. Teğet düzlem, parametre eğrilerinin X_t ve X_v teğet vektörlerine paralel olduğundan $\eta = X_t \wedge X_v$ ile tanımlanan η vektörü, M nin P noktasındaki teğet düzlemine diktir. Bu vektöre M nin P noktasındaki normal vektörü ve

$$\|\eta\| = \frac{X_t \wedge X_v}{\|X_t \wedge X_v\|}$$

vektörüne de birim normal vektörü denir (Kasap, 1996; Şenatalar, 1978).

2.3. Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 2.3.1. (γ) eğrisi boyunca, eğriye bağlı bir $X(t)$ ana doğrusunun eğri boyunca hareketiyle meydana gelen yüzeye regle yüzey denir (Hacısalıhoğlu, 2012), (Şekil 11).



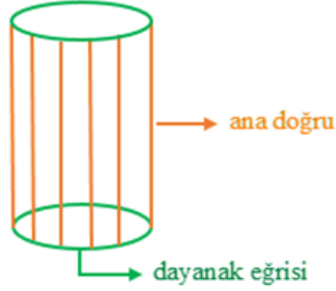
Şekil 11. Regle yüzey

Burada (γ) eğrisine regle yüzeyin dayanak eğrisi, $X(t)$ doğrusuna da regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) denir. Böylece bir regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\varphi: I \wedge \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, (t, v) \rightarrow \varphi(t, v) = \gamma(t) + vX(t) \quad (1)$$

şeklinde verilir (Hacısalıhoğlu, 2012).

Örnek 2.3.2. $\varphi(t, v) = (r \cos t, r \sin t, v)$ parametrik denklemi ile silindir bir regle yüzeydir (Şekil 12).



Şekil 12. Silindir

Tanım 2.3.3. Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu, 2012; Yüce,2020).

Tanım 2.3.4. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin $X(t)$ doğrultmanına sonsuz yakın doğrultmanın ortak dikmesinin $X(t)$ doğrultmanı üzerindeki ayağına striksiyon (boğaz) noktası, bu noktaların geometrik yerine ise striksiyon (boğaz) eğrisi denir. Striksiyon eğrisinin v parametresi

$$v = -\frac{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle}, \quad \|X'(t)\|^2 \neq 0 \quad (2)$$

olmak üzere, striksiyon eğrisi

$$\psi(t) = \gamma(t) - \frac{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle} X(t) \quad (3)$$

ile hesaplanır (Hacısalıhoğlu, 2012; Şenatalar, 1978).

Teorem 2.3.5. Regle yüzey açılabilirse striksiyon eğrisi ve dayanak eğrisi çakışır (Hacısalihoglu, 2012; Şenatalar, 1978).

Tanım 2.3.6. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin komşu iki doğrultmanı arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu doğrultman arasındaki açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve bu parametre $\rho(t)$ ile gösterilirse

$$\rho(t) = \frac{\det(\gamma'(t), X(t), X'(t))}{\|X'(t)\|^2} \quad (4)$$

dir (Hacısalihoglu, 2012; Şenatalar, 1978).

Teorem 2.3.7. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (Hacısalihoglu, 2012; Şenatalar, 1978).

Tanım 2.3.8. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin bir M noktasından geçen ve yüzeyin normaline dik olan düzleme regle yüzeyin teğet düzlemi denir. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin normali $\eta(t)$ ile gösterilirse;

$$\eta(t) = \varphi_t(t) \wedge \varphi_v(t) = (\gamma'(t) + vX'(t)) \wedge X(t) \quad (5)$$

dir. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D(x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere, bu regle yüzeyin teğet düzlem denklemi

$$\det(DM(t), X(t), \gamma'(t) + vX'(t)) = 0$$

veya $\eta(t) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ olmak üzere,

$$\langle DM(t), \eta(t) \rangle = (x - x_0)\eta_1 + (y - y_0)\eta_2 + (z - z_0)\eta_3 = 0 \quad (6)$$

şeklinde elde edilir (Hacısalıhoğlu, 2012; Şenatalar, 1978).

Tanım 2.3.9. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin bir M noktasından geçen ve yüzeyin sonsuzdaki normal doğrultusuna karşılık gelen teğet düzleme asimptotik düzlem denir. $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin sonsuzdaki normali $\mu(t)$ ile gösterilirse;

$$\mu(t) = X(t) \wedge X'(t) \quad (7)$$

dir. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D(x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere, bu regle yüzeyin asimptotik düzlem denklemi,

$$\det(DM(t), X(t), X'(t)) = 0$$

veya $X(t) \wedge X'(t) = \mu(t) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ve $DM(t) = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ olmak üzere,

$$\langle DM(t), \mu(t) \rangle = (x - x_0)\mu_1 + (y - y_0)\mu_2 + (z - z_0)\mu_3 = 0 \quad (8)$$

şeklinde elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

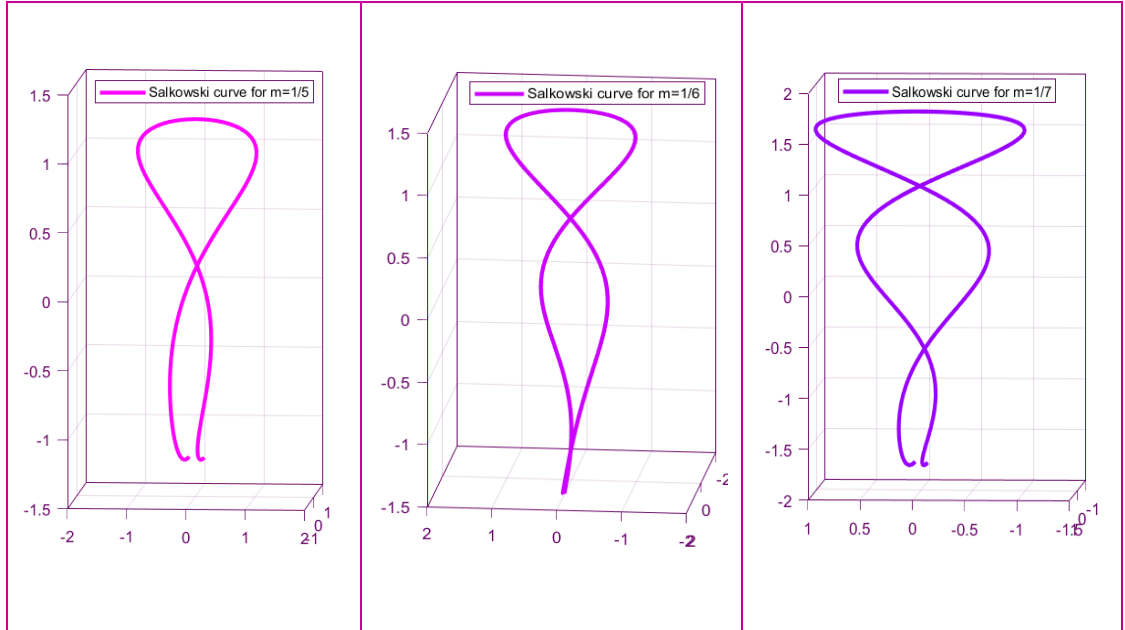
3.1. Öklid Uzayında Salkowski Eğrisi

Tanım 3.1.1. $m \neq \pm \frac{1}{3}, 0 \in \mathbb{R}$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$ olmak üzere, 3-boyutlu Öklid uzayında

Salkowski eğrisinin parametrik denklemleri aşağıdaki şekildedir (Salkowski, 1909), (Şekil 13):

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t, \right. \\ & \left. \frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t, \right. \\ & \left. \frac{1}{m} \cos(2nt) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Bu eğri $\left(-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right)$ aralığında regülerdir. Ayrıca $\|\gamma'(t)\| = \frac{n}{m} \cos(nt)$.



Şekil 13. $m = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ için Salkowski eğrileri

$\gamma(t)$ nin t ye göre birinci türevi

$$\gamma'(t) = \left(\begin{aligned} &-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \cos(nt) \sin t \sin(nt), \\ &-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos(nt) \cos t \sin(nt), \\ &-\frac{n^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned} \right) \quad (10)$$

şeklindedir. Salkowski eğrisinin Frenet çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere;

$$\left\{ \begin{aligned} T(t) &= \left(-S(t), -R(t), -\frac{n}{m} \sin(nt) \right), \\ N(t) &= \left(\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, -n \right), \\ B(t) &= \left(-P(t), -Q(t), \frac{n}{m} \cos(nt) \right), \end{aligned} \right. \quad (11)$$

burada kısalığın hatrına

$$\left\{ \begin{aligned} P(t) &= \cos t \sin(nt) - n \sin t \cos(nt), \\ R(t) &= \sin t \cos(nt) - n \cos t \sin(nt), \\ S(t) &= \cos t \cos(nt) + n \sin t \sin(nt), \\ Q(t) &= \sin t \sin(nt) + n \cos t \cos(nt) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

olarak alınmıştır. Ayrıca eğriliği $\kappa(t)$ ve burulması $\tau(t)$ ise

$$\kappa(t) = 1 \quad \text{ve} \quad \tau(t) = -\tan(nt)$$

dir (Monterde 2009).

Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinin t ye göre birinci türevleri ise

$$\left\{ \begin{array}{l} T'(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt), -\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right), \\ N'(t) = \left(\frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin t, 0 \right), \\ B'(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt), -\frac{n^2}{m} \sin(nt) \right). \end{array} \right. \quad (13)$$

şeklindedir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü katsayıları reel sayılar olan ve Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinin lineer bileşiminden elde edilen $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ vektörleri olan regle yüzeyler elde edilmiştir. Bu genel durumun dışında, a, b, c nin özel olarak seçildiği $X(t) = T(t)$, $X(t) = N(t)$, $X(t) = B(t)$, $X(t) = bN(t) + cB(t)$, $X(t) = aT(t) + cB(t)$, $X(t) = aT(t) + bN(t)$ ve $X(t) = T(t) + N(t) + B(t)$ özel durumları da incelenmiştir. Burada a, b, c katsayılarının t nin bir fonksiyonu olması durumu da ayrıca incelenebilir.

4.1. Salkowski eğrisi ve $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

Öncelikle $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ vektörünü tanımlayalım. Salkowski eğrisinin Frenet çatısı $\{T(t), N(t), B(t)\}$ olmak üzere, (11) ifadesi $X(t)$ vektöründe yerine yazılırsa;

$$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-a \cos t \cos(nt) - an \sin t \sin(nt) + cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t, \right. \\ &\quad \left. - a \sin t \cos(nt) + an \cos t \sin(nt) - cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t, \right. \\ &\quad \left. - \frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \end{aligned}$$

veya (12) ifadesinden

$$X(t) = \left(-aS(t) - cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t, -aR(t) - cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{n}{m} C(t) - bn \right) \quad (14)$$

elde edilir, burada

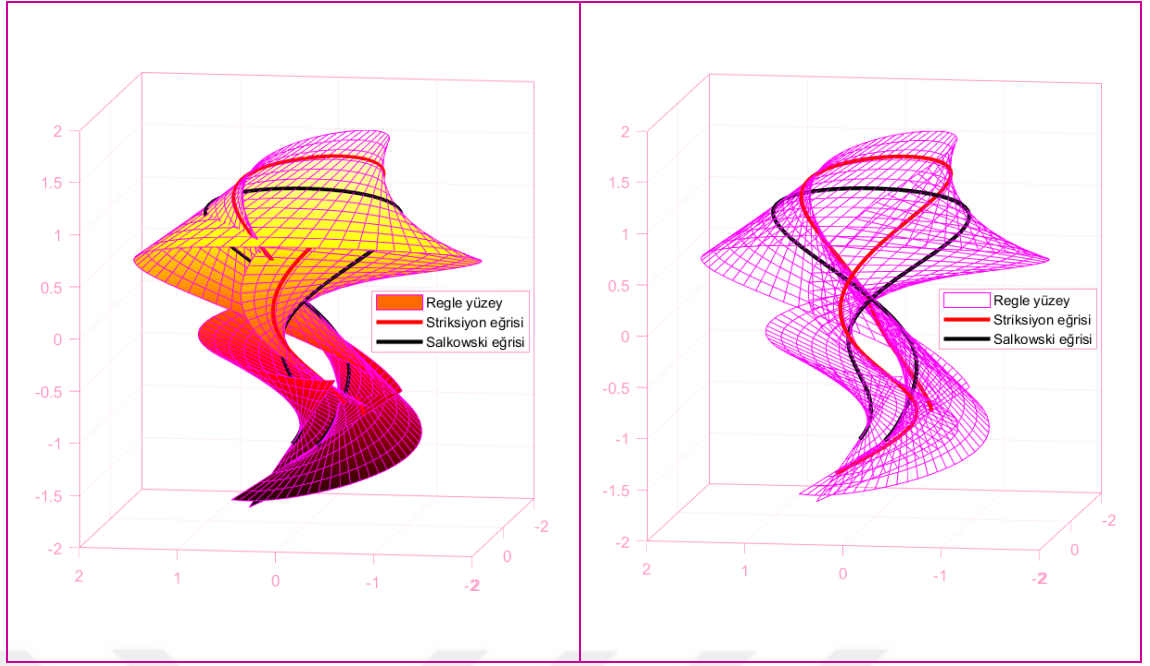
$$C(t) = a \sin(nt) - c \cos(nt). \quad (15)$$

(14) ifadesinin t ye göre türevi

$$\begin{aligned} X'(t) = & \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t, \right. \\ & - \frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t, \\ & \left. - \frac{an^2}{m} \cos(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Teorem 4.1.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ vektörü olan regle yüzey $\varphi_x(t, v_x)$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemini aşağıdaki şekildedir, (Şekil 14):

$$\begin{aligned} \varphi_x(t, v_x) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\ & + v_x \left(-aS(t) - cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right), \\ & \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\ & + v_x \left(-aR(t) - cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right), \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) - v_x \left(\frac{n}{m} C(t) \sin(nt) + bn \right) \right). \end{aligned} \quad (17)$$



Şekil 14. Salkowski eğrisi ve $X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(a = b = c = m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_X(t, v_X) = \gamma(t) + v_X X(t) \quad (18)$$

olarak yazılır. (9) ve (14) ifadeleri (18) ifadesinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2. $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_X(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \eta_X(t) = & -\frac{n}{m} \left(\cos(nt) \left(bP(t) + \frac{cn}{m} \sin t \right) \right. \\ & + v_X \left(bns \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) - A(t) (aP(t) - cS(t)) \right), \\ & \left. \cos(nt) \left(bQ(t) - \frac{cn}{m} \cos t \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v_x \left(bn \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) + A(t)(aQ(t) - cR(t)) \right), \\
& -\cos(nt) \left(\frac{bn}{m} \cos(nt) + cn \right) - v_x n \left(b \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) - \frac{1}{m} A^2(t) \right) \Bigg). \tag{19}
\end{aligned}$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_x(t) = \varphi_{x_t}(t) \wedge \varphi_{x_{v_x}}(t) \tag{20}$$

olarak yazılır. (20) ifadesindeki $\varphi_{x_t}(t)$ vektörü $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{x_t}(t) = \gamma'(t) + v_x X'(t) \tag{21}$$

olarak elde edilir. (21) ifadesinde (10) ve (16) ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_t}(t) = & \frac{n}{m} \left(\cos t + \cos t \sin^2(nt) - n \sin t \sin(nt) \cos(nt), \right. \\
& - \sin t + \sin t \sin^2(nt) + n \cos t \cos(nt) \sin(nt), \\
& \left. - \frac{n}{m} \sin(nt) \cos(nt) \right) \\
& + v_x \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t, \right. \\
& - \frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t, \\
& \left. - \frac{an^2}{m} \cos(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{av_x n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \right. \\
&\quad + \frac{cv_x n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bv_x n}{m} \cos t, \\
&\quad - \frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{av_x n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \\
&\quad - \frac{cv_x n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bv_x n}{m} \sin t, \\
&\quad \left. - \frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m} \cos(nt) - \frac{cv_x n^2}{m} \sin(nt) \right), \\
\varphi_{X_t}(t) &= \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \sin t + \frac{bv_x n}{m} \cos t, \right. \\
&\quad - \frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \cos t + \frac{bv_x n}{m} \sin t, \\
&\quad \left. - \frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m} A(t) \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

elde edilir, burada

$$A(t) = a \cos(nt) + c \sin(nt). \tag{23}$$

(20) ifadesindeki $\varphi_{X_{v_x}}(t)$ vektörü $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyinin v_X e göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{X_{v_x}}(t) = X(t) \tag{24}$$

olarak elde edilir. (24) ifadesinde (14) ifadesi yerine yazılırsa,

$$\varphi_{X_{v_x}}(t) = \left(-aS(t) - cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t, -aR(t) - cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{n}{m} C(t) - bn \right) \quad (25)$$

elde edilir. Şimdi (22) ve (25) ifadelerini vektörel çarpalım.

$$\varphi_{X_t}(t) = \left((\varphi_{X_t})_1, (\varphi_{X_t})_2, (\varphi_{X_t})_3 \right) \quad \text{ve} \quad \varphi_{X_{v_x}}(t) = \left((\varphi_{X_{v_x}})_1, (\varphi_{X_{v_x}})_2, (\varphi_{X_{v_x}})_3 \right) \quad \text{olmak üzere}$$

bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(t) \wedge \varphi_{X_{v_x}}(t) = & \left((\varphi_{X_t})_2 (\varphi_{X_{v_x}})_3 - (\varphi_{X_t})_3 (\varphi_{X_{v_x}})_2, (\varphi_{X_t})_3 (\varphi_{X_{v_x}})_1 - (\varphi_{X_t})_1 (\varphi_{X_{v_x}})_3, \right. \\ & \left. (\varphi_{X_t})_1 (\varphi_{X_{v_x}})_2 - (\varphi_{X_t})_2 (\varphi_{X_{v_x}})_1 \right) \end{aligned} \quad (26)$$

şeklindedir. (22) ve (25) ifadelerinin bileşenleri (26) ifadesinde yerine yazılırsa, (26) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} (\varphi_{X_t})_2 (\varphi_{X_{v_x}})_3 = & \left(-\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \cos t + \frac{bvn}{m} \sin t \right) \\ & \cdot \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \\ = & \frac{an^2}{m^2} R(t) \sin(nt) \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} R(t) \cos^2(nt) + \frac{bn^2}{m} R(t) \cos(nt) \\ & + \frac{Aav_x n^3}{m^3} \cos t \sin(nt) - \frac{Acv_x n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) + \frac{Abv_x n^3}{m^2} \cos t \\ & - \frac{abv_x n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bcv_x n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \sin t \end{aligned}$$

ve

$$(\varphi_{X_t})_3 (\varphi_{X_{v_x}})_2 = \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m} A(t) \right) \cdot \left(-aR(t) - cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) \left(aR(t) + cQ(t) + \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
&+ \frac{av_x n^2}{m} A(t)R(t) + \frac{cv_x n^2}{m} A(t)Q(t) + \frac{bv_x n^3}{m^2} A(t) \cos t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_2 (\varphi_{x_{v_x}})_3 - (\varphi_{x_t})_3 (\varphi_{x_{v_x}})_2 &= -\frac{cn^2}{m^2} \cos(nt) (R(t) \cos(nt) + Q(t) \sin(nt)) \\
&+ \frac{bn^2}{m} R(t) \cos(nt) + \frac{v_x n^3}{m^3} A(t) C(t) \cos t - \frac{bv_x n^2}{m^2} C(t) \sin t - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \\
&- \frac{bn^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_x n^2}{m} A^2(t) \sin t + \frac{v_x n^2}{m} A(t) C(t) \cos t \\
&= -\frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{bn^2}{m} R(t) \cos(nt) + \frac{v_x n^3}{m^3} A(t) C(t) \cos t \\
&- \frac{bv_x n^2}{m^2} C(t) \sin t - \frac{bn^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_x n^2}{m} A^2(t) \sin t \\
&+ \frac{v_x n^3}{m} A(t) C(t) \cos t - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \sin t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_2 (\varphi_{x_{v_x}})_3 - (\varphi_{x_t})_3 (\varphi_{x_{v_x}})_2 &= -\frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{v_x n}{m} A(t) C(t) \cos t \\
&- \frac{bv_x n^2}{m^2} C(t) \sin t - \frac{bn}{m} P(t) \cos(nt) \\
&- \frac{v_x n^2}{m} \sin t (A^2 + b^2)
\end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (26) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_3 (\varphi_{x_{v_x}})_1 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m} A(t) \right) \cdot \left(-aS(t) - cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\
&= \frac{an^2}{m^2} S(t) \sin(nt) \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} P(t) \sin(nt) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m} A(t) S(t) \\
&\quad - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{cv_x n^2}{m} A(t) P(t) - \frac{bv_x n^3}{m^2} A(t) \sin t \\
&= \frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) (A(t) \cos t + C(t) n \sin t) - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad + \frac{v_x n^2}{m} (A^2(t) \cos t + A(t) C(t) n \sin t) - \frac{bv_x n^3}{m^2} A(t) \sin t \\
&= \frac{n^2}{m^2} A(t) \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{n^3}{m^2} C(t) \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_x n^2}{m} A^2(t) \cos t \\
&\quad + \frac{v_x n^3}{m} A(t) C(t) \sin t - \frac{bv_x n^3}{m^2} A(t) \sin t
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_1 (\varphi_{x_{v_x}})_3 &= \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \sin t + \frac{bv_x n}{m} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} C(t) - bn \right) \\
&= \frac{n^2}{m^2} C(t) \cos t \cos^2(nt) + \frac{n^3}{m^2} C(t) \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad + \frac{bn^2}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \cos t + \frac{bn^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{v_x n^3}{m^3} A(t) C(t) \sin t - \frac{bv_x n^3}{m^2} A(t) \sin t - \frac{bv_x n^2}{m^2} C(t) \cos t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
(\varphi_{X_t})_3 (\varphi_{X_{v_x}})_1 - (\varphi_{X_t})_1 (\varphi_{X_{v_x}})_3 &= \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos^2(nt) - \frac{bn}{m} Q(t) \cos(nt) \\
&+ \frac{v_x n}{m} A(t) C(t) \sin t + \frac{bv_x n^2}{m^2} C(t) \cos t \\
&+ \frac{v_x n^2}{m} \cos t (A^2(t) + b^2)
\end{aligned} \tag{28}$$

olarak elde edilir. Son olarak (26) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{X_t})_1(t) (\varphi_{X_{v_x}})_2(t) &= \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \sin t + \frac{bv_x n}{m} \cos t \right) \\
&\cdot \left(-aR(t) - cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
&= \frac{an}{m} S(t) R(t) \cos(nt) + \frac{cn}{m} S(t) Q(t) \cos(nt) \\
&+ \frac{bn^2}{m^2} S(t) \cos t \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m^2} A(t) R(t) \sin t \\
&- \frac{cv_x n^2}{m^2} A(t) Q(t) \sin t - \frac{bv_x n^3}{m^3} A(t) \sin t \cos t - \frac{abv_x n}{m} R(t) \cos t \\
&- \frac{cbv_x n}{m} Q(t) \cos t - \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \cos^2 t
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{X_t})_2 (\varphi_{X_{v_x}})_1 &= \left(-\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_x n^2}{m^2} A(t) \cos t + \frac{bv_x n}{m} \sin t \right) \\
&\cdot \left(-aS(t) - cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{an}{m} S(t)R(t)\cos(nt) + \frac{cn}{m} P(t)R(t)\cos(nt) - \frac{bn^2}{m^2} R(t)\sin t \cos(nt) \\
&+ \frac{av_x n^2}{m^2} A(t)S(t)\cos t + \frac{cv_x n^2}{m^2} A(t)P(t)\cos t - \frac{bv_x n^3}{m^3} A(t)\sin t \cos t \\
&- \frac{abv_x n}{m} S(t)\sin t - \frac{cbv_x n}{m} P(t)\sin t + \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \sin^2 t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_1 (\varphi_{x_x})_2 - (\varphi_{x_t})_2 (\varphi_{x_x})_1 &= \frac{cn}{m} \cos(nt)(S(t)Q(t) - P(t)R(t)) \\
&+ \frac{bn^2}{m^2} \cos(nt)(S(t)\cos t + R(t)\sin t) - \frac{av_x n^2}{m^2} A(t)(R(t)\sin t + S(t)\cos t) \\
&- \frac{cv_x n^2}{m^2} A(t)(Q(t)\sin t + P(t)\cos t) - \frac{abv_x n}{m} (R(t)\cos t - S(t)\sin t) \\
&- \frac{cbv_x n}{m} (Q(t)\cos t - P(t)\sin t) - \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \\
&= \frac{cn^2}{m} \cos(nt) + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{av_x n^2}{m^2} A(t)\cos(nt) \\
&- \frac{cv_x n^2}{m^2} A(t)\sin(nt) + \frac{abv_x n^2}{m} \sin(nt) - \frac{cbv_x n^2}{m} \cos(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_{x_t})_1 (\varphi_{x_x})_2 - (\varphi_{x_t})_2 (\varphi_{x_x})_1 &= \frac{cn^2}{m} \cos(nt) + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{bv_x n^2}{m} C(t) \\
&- \frac{v_x n^2}{m^2} (A^2(t) + b^2)
\end{aligned} \tag{29}$$

şeklinde elde edilir. (27), (28) ve (29) ifadeleri (26) ifadesinde yerine yazılırsa ve (20) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_0(x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere, $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & (x - x_0) \left(-\frac{cn}{m} \sin t \cos(nt) - bP(t) \cos(nt) + v_x A(t) C(t) \cos t \right. \\ & \quad \left. - \frac{bv_x n}{m} C(t) \sin t - v_x n \sin t (A^2(t) + b^2) \right) \\ & + (y - y_0) \left(\frac{cn}{m} \cos t \cos(nt) - bQ(t) \cos(nt) + v_x A(t) C(t) \sin t \right. \\ & \quad \left. + \frac{bv_x n}{m} C(t) \cos t + v_x n \cos t (A^2(t) + b^2) \right) \\ & + (z - z_0) \left(cn \cos(nt) + \frac{bn}{m} \cos^2(nt) + bv_x n C(t) - \frac{v_x n}{m} (A^2(t) + b^2) \right) = 0. \end{aligned}$$

İspat: (19) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.4. $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin v_x parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_x = \frac{b \cos^2(nt)}{A^2(t) + b^2}. \quad (30)$$

İspat: (2) ifadesinden $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin v_x parametresi

$$v_x = -\frac{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle} \quad (31)$$

olarak yazılır. $X(t) = (X_1, X_2, X_3)$ ve $\gamma'(t) = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X(t) \wedge \gamma'(t) = (X_2\gamma_3' - X_3\gamma_2', X_3\gamma_1' - X_1\gamma_3', X_1\gamma_2' - X_2\gamma_1') \quad (32)$$

şeklindedir. (10) ve (14) ifadeleri (32) ifadesinde yazılırsa, (32) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} X_2\gamma_3' &= \left(-a \sin t \cos(nt) + an \cos t \sin(nt) - cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{an^3}{m^2} \cos t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{cn^3}{m^2} \cos t \sin(nt) \cos^2(nt) \\ &\quad + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{bn^3}{m^3} \cos t \sin(nt) \cos(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_3\gamma_2' &= \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos^3(nt) + \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) \\ &\quad - \frac{an^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{cn^3}{m^2} \cos t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{bn^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned} X_2\gamma_3' - X_3\gamma_2' &= \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{bn^3}{m^3} \cos t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos^3(nt) \\ &\quad - \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt), \end{aligned}$$

$$X_2\gamma_3' - X_3\gamma_2' = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(\frac{cn}{m} \sin t + bP(t) \right) \quad (33)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (32) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned} X_3\gamma_1' &= \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos^3(nt) + \frac{bn^2}{m} \cos t \cos^2(nt) \\ &\quad + \frac{an^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) - \frac{cn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_1\gamma_3' &= \left(-a \cos t \cos(nt) - an \sin t \sin(nt) + cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) + \frac{an^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) - \frac{cn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) \\ &\quad + \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned} X_3\gamma_1' - X_1\gamma_3' &= -\frac{cn}{m} \cos t \cos^3(nt) + bn \cos t \cos^2(nt) + bn^2 \sin t \cos(nt) \sin(nt) \\ &\quad - \frac{cn}{m} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{bn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \sin(nt), \end{aligned}$$

$$X_3\gamma_1' - X_1\gamma_3' = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{cn}{m} \cos t + bQ(t) \right) \quad (34)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (32) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} X_1\gamma_2' &= \left(-a \cos t \cos(nt) - an \sin t \sin(nt) + cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &= \frac{an}{m} \sin t \cos t \cos^3(nt) + \frac{an^2}{m} \sin^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin^2 t \cos^3(nt) \\ &\quad + \frac{cn}{m} \sin t \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{bn^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) - \frac{an^2}{m} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) \\ &\quad - \frac{an^3}{m} \sin t \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{cn^3}{m} \sin t \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) \\ &\quad - \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \sin t \cos t \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_2\gamma_1' &= \left(-a \sin t \cos(nt) + an \cos t \sin(nt) - cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{an}{m} \sin t \cos t \cos^3(nt) + \frac{an^2}{m} \sin^2 t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{an^3}{m} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos(nt) \\ &\quad - \frac{an^2}{m} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) + \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos^3(nt) + \frac{cn^3}{m} \sin t \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{cn}{m} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) + \frac{cn^2}{m} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt) \\
& + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
X_1\gamma_2' - X_2\gamma_1' = & -\frac{cn^2}{m} \sin^2 t \cos^3(nt) - \frac{bn^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) - \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
& - \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos^3(nt) - \frac{bn^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin^2 t \cos(nt) \sin^2(nt),
\end{aligned}$$

$$X_1\gamma_2' - X_2\gamma_1' = \frac{n}{m} \cos nt \left(-cn - \frac{bn}{m} \cos(nt) \right) \quad (35)$$

şeklinde elde edilir. (33), (34) ve (35) ifadeleri, (32) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X(t) \wedge \gamma'(t) = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(bP(t) + \frac{cn}{m} \sin t, bQ(t) - \frac{cn}{m} \cos t, -cn - \frac{bn}{m} \cos(nt) \right) \quad (36)$$

olur. Diğer taraftan $X(t) = (X_1, X_2, X_3)$ ve $X'(t) = (X_1', X_2', X_3')$ olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X(t) \wedge X'(t) = \left(X_2X_3' - X_3X_2', X_3X_1' - X_1X_3', X_1X_2' - X_2X_1' \right) \quad (37)$$

şeklinindedir. (14) ve (16) ifadeleri (37) ifadesinde yerine yazılırsa, (37) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned}
X_2X_3' = & \left(-a \sin t \cos(nt) + an \cos t \sin(nt) - cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
& \cdot \left(-\frac{an^2}{m} \cos(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 n^2}{m} \sin t \cos^2(nt) - \frac{a^2 n^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{acn^3}{m} \cos t \cos^2(nt) \\
&+ \frac{acn^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{abn^3}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{acn^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&- \frac{acn^3}{m} \cos t \sin^2(nt) + \frac{c^2 n^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{c^2 n^2}{m} \sin t \sin^2(nt) \\
&+ \frac{bcn^3}{m^2} \cos t \sin(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_3 X_2' &= \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \\
&\cdot \left(-\frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\
&= \frac{a^2 n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{acn^3}{m^3} \cos t \sin^2(nt) - \frac{abn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \\
&- \frac{acn^3}{m^3} \cos t \cos^2(nt) - \frac{c^2 n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{bcn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \\
&+ \frac{abn^3}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{bcn^3}{m^2} \cos t \sin(nt) - \frac{b^2 n^2}{m} \sin t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
X_2 X_3' - X_3 X_2' &= -\frac{an}{m} (a \cos(nt) + c \sin(nt)) P(t) \\
&+ \frac{cn}{m} (a \cos(nt) + c \sin(nt)) S(t)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{bn^2}{m^2} \sin t (a \sin(nt) - c \cos(nt)) + \frac{b^2 n^2}{m} \sin t ,$$

$$X_2 X_3' - X_3 X_2' = \frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \quad (38)$$

veya

$$X_2 X_3' - X_3 X_2' = \frac{n}{m} A(t) (cS(t) - aP(t)) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (37) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned} X_3 X_1' &= \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) + \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \cdot \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t \right) \\ &= -\frac{a^2 n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{acn^3}{m^3} \sin t \sin^2(nt) - \frac{abn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \\ &\quad + \frac{acn^3}{m^3} \sin t \cos^2(nt) + \frac{c^2 n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{bcn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \\ &\quad - \frac{abn^3}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{bcn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) - \frac{b^2 n^2}{m} \cos t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_1 X_3' &= \left(-a \cos t \cos(nt) - an \sin t \sin(nt) + cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{an^2}{m} \cos(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right) \\ &= \frac{a^2 n^2}{m} \cos t \cos^2(nt) + \frac{acn^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{a^2 n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{acn^3}{m} \sin t \sin^2(nt) - \frac{acn^3}{m} \sin t \cos^2(nt) - \frac{c^2n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
& + \frac{acn^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{c^2n^2}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{abn^3}{m^2} \sin t \cos(nt) \\
& - \frac{bcn^3}{m^2} \sin t \sin(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
X_3 X_1' - X_1 X_3' &= -\frac{n}{m} \sin t (a \cos(nt) + c \sin(nt)) (a \sin(nt) - c \cos(nt)) \\
& - \frac{n^2}{m} \cos t (a \cos(nt) + c \sin(nt)) (a \cos(nt) + c \sin(nt)) \\
& - \frac{b^2 n^2}{m} \cos t - \frac{bn^2}{m^2} \cos t (a \sin(nt) - c \cos(nt)), \\
X_3 X_1' - X_1 X_3' &= -\frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \quad (39)
\end{aligned}$$

veya

$$X_3 X_1' - X_1 X_3' = \frac{n}{m} A(t) (cR(t) - aQ(t)) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)$$

şeklindedir. Son olarak (37) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
X_1 X_2' &= \left(-a \cos t \cos(nt) - an \sin t \sin(nt) + cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\
& \cdot \left(-\frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) + \frac{acn^2}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{abn}{m} \sin t \cos t \cos(nt) \\
&+ \frac{a^2 n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{acn^3}{m^2} \cos t \sin t \sin^2(nt) - \frac{abn^2}{m} \sin^2 t \sin(nt) \\
&- \frac{acn^3}{m^2} \cos t \sin t \cos^2(nt) - \frac{c^2 n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{bcn^2}{m} \sin^2 t \cos(nt) \\
&+ \frac{acn^2}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{c^2 n^2}{m^2} \cos^2 t \sin^2(nt) - \frac{bcn}{m} \cos t \sin t \sin(nt) \\
&- \frac{abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) - \frac{bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{b^2 n^2}{m^2} \sin^2 t
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
X_2 X_1' &= \left(-a \sin t \cos(nt) + an \cos t \sin(nt) - cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
&\cdot \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a^2 n^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) - \frac{acn^2}{m^2} \sin^2 t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{abn}{m} \sin t \cos t \cos(nt) \\
&- \frac{a^2 n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{acn^3}{m^2} \cos t \sin t \sin^2(nt) + \frac{abn^2}{m} \cos^2 t \sin(nt) \\
&- \frac{acn^3}{m^2} \cos t \sin t \cos^2(nt) - \frac{c^2 n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) - \frac{bcn^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \\
&- \frac{acn^2}{m^2} \sin^2 t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{c^2 n^2}{m^2} \sin^2 t \sin^2(nt) - \frac{bcn}{m} \cos t \sin t \sin(nt) \\
&- \frac{abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) - \frac{bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) - \frac{b^2 n^2}{m^2} \cos^2 t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
X_1 X_2' - X_2 X_1' &= \frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{acn^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) - \frac{abn^2}{m} \sin(nt) + \frac{bcn^2}{m} \cos(nt) \\
&\quad + \frac{acn^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) + \frac{c^2 n^2}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{b^2 n^2}{m^2} \\
&= \frac{cn^2}{m^2} \sin(nt) (a \cos(nt) + c \sin(nt)) + \frac{an^2}{m^2} \cos(nt) (a \cos(nt) + c \sin(nt)) \\
&\quad - \frac{bn^2}{m} (a \sin(nt) - c \cos(nt)) + \frac{b^2 n^2}{m^2},
\end{aligned}$$

$$X_1 X_2' - X_2 X_1' = \frac{n^2}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^2}{m} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) \quad (40)$$

şeklinde elde edilir. (38), (39) ve (40) ifadeleri (37) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
X(t) \wedge X'(t) &= \left(\frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right), \\
&\quad - \frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right), \\
&\quad + \frac{n^2}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^2}{m} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right)
\end{aligned} \quad (41)$$

olur. (36) ve (41) ifadelerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge \gamma'(t) \rangle &= \frac{n}{m} \cos(nt) \left(bP(t) + \frac{cn}{m} \sin t \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right) \\
& \cdot \left(bQ(t) - \frac{cn}{m} \cos t \right) \\
& + \frac{n}{m} \cos(nt) \left(\frac{n^2}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^2}{m} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) \right) \cdot \left(-cn - \frac{bn}{m} \cos(nt) \right) \\
& = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(\frac{bn}{m} A(t) C(t) P(t) \cos t - \frac{cn^2}{m^2} A(t) C(t) \sin t \cos t \right. \\
& \quad + \frac{bn^2}{m} A^2(t) P(t) \sin t + \frac{cn^3}{m^2} A^2(t) \sin^2 t + \frac{b^3 n^2}{m} P(t) \sin t + \frac{b^2 cn^3}{m^2} \sin^2 t \\
& \quad \left. + \frac{b^2 n^2}{m^2} C(t) P(t) \sin t + \frac{bcn^3}{m^3} C(t) \sin^2 t \right) \\
& = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(\frac{bn}{m} A(t) C(t) P(t) \cos t - \frac{cn^2}{m^2} A(t) C(t) \sin t \cos t \right. \\
& \quad + \frac{bn^2}{m} A^2(t) P(t) \sin t + \frac{cn^3}{m^2} A^2(t) \sin^2 t + \frac{b^3 n^2}{m} P(t) \sin t + \frac{b^2 cn^3}{m^2} \sin^2 t \\
& \quad \left. + \frac{b^2 n^2}{m^2} C(t) P(t) \sin t + \frac{bcn^3}{m^3} C(t) \sin^2 t \right) \\
& + \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} A(t) C(t) Q(t) \sin t + \frac{cn^2}{m^2} A(t) C(t) \sin t \cos t \right. \\
& \quad - \frac{bn^2}{m} A^2(t) Q(t) \cos t + \frac{cn^3}{m^2} A^2(t) \cos^2 t - \frac{b^3 n^2}{m} Q(t) \cos t + \frac{b^2 cn^3}{m^2} \cos^2 t \\
& \quad \left. - \frac{b^2 n^2}{m^2} C(t) Q(t) \cos t + \frac{bcn^3}{m^3} C(t) \cos^2 t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{cn^3}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^3}{m^3} A^2(t) \cos(nt) + \frac{bcn^3}{m} C(t) \right. \\
& \left. + \frac{b^2 n^3}{m^2} C(t) \cos(nt) - \frac{b^2 cn^3}{m^2} - \frac{b^3 n^3}{m^3} \cos(nt) \right) \\
& = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} A(t) C(t) (P(t) \cos t + Q(t) \sin t) \right. \\
& \left. + \frac{bn^2}{m} A^2(t) (P(t) \sin t - Q(t) \cos t) + \frac{b^3 n^2}{m} (P(t) \sin t - Q(t) \cos t) \right. \\
& \left. + \frac{b^2 n^2}{m^2} C(t) (P(t) \sin t - Q(t) \cos t) - \frac{cn^3}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^3}{m^3} A^2(t) \cos(nt) \right. \\
& \left. + \frac{bcn^3}{m} C(t) + \frac{b^2 n^3}{m^2} C(t) \cos(nt) - \frac{b^2 cn^3}{m^2} - \frac{b^3 n^3}{m^3} \cos(nt) \right. \\
& \left. + \frac{cn^3}{m^2} A^2(t) + \frac{b^2 cn^3}{m^2} + \frac{bcn^3}{m^3} C(t) \right) \\
& = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} A(t) C(t) \sin(nt) - \frac{bn^3}{m} A^2(t) \cos(nt) \right. \\
& \left. - \frac{b^3 n^3}{m} \cos(nt) - \frac{b^2 n^3}{m^2} C(t) \cos(nt) + \frac{bcn}{m} C(t) - \frac{bn^3}{m^3} A^2(t) \cos(nt) \right. \\
& \left. + \frac{b^2 n^3}{m^2} C(t) \cos(nt) - \frac{b^3 n^3}{m^3} \cos(nt) \right) \\
& = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} A(t) C(t) \sin(nt) - \frac{bn^3}{m} A^2(t) \cos(nt) \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{b^3 n^3}{m} \cos(nt) \left(1 + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{bcn}{m} C(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} A(t) C(t) \sin(nt) - \frac{bn}{m} A^2(t) \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. - \frac{b^3 n}{m} \cos(nt) + \frac{bcn}{m} C(t) \right) \\
&= \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-\frac{bn}{m} (a^2 \cos(nt) + ac \sin(nt)) - \frac{b^3 n}{m} \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{abcn}{m} \sin(nt) - \frac{bc^2 n}{m} \cos(nt) \right),
\end{aligned}$$

$$\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge \gamma'(t) \rangle = -\frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) (a^2 + b^2 + c^2) \quad (42)$$

şeklinde bulunur. (41) ifadesini kendisiyle iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle &= \left(\frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) \right. \\
&\quad \left. + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{n^2}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^2}{m} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) \right)^2 \\
&= \frac{n^2}{m^2} A^2(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t)^2 \\
&\quad + \frac{2bn^3}{m^2} A(t) \sin t (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b^2 n^4}{m^2} \sin^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)^2 + \frac{n^2}{m^2} A^2(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t)^2 \\
& + \frac{2bn^3}{m^2} A(t) \cos t (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \\
& + \frac{b^2 n^4}{m^2} \cos^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)^2 \\
& + \frac{n^4}{m^4} A^4(t) - \frac{2bn^4}{m^3} A^2(t) \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) + \frac{b^2 n^4}{m^2} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right)^2 \\
& = \frac{n^2}{m^2} A^2(t) C^2(t) \cos^2 t - \frac{2n^3}{m^2} A^3(t) C(t) \sin t \cos t + \frac{n^4}{m^2} A^4(t) \sin^2 t \\
& - \frac{2bn^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \\
& + \frac{2bn^4}{m^2} A^2(t) \sin^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \\
& + \frac{b^2 n^4}{m^2} \sin^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)^2 + \frac{n^2}{m^2} A^2(t) C^2(t) \sin^2 t \\
& + \frac{2n^3}{m^2} A^3(t) C(t) \sin t \cos t + \frac{n^4}{m^2} A^4(t) \cos^2 t \\
& + \frac{2bn^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \\
& + \frac{2bn^4}{m^2} A^2(t) \cos^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) + \frac{b^2 n^4}{m^2} \cos^2 t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)^2 \\
& + \frac{n^4}{m^4} A^4(t) - \frac{2bn^4}{m^3} A^2(t) C(t) + \frac{2b^2 n^4}{m^4} A^2(t) + \frac{b^2 n^4}{m^2} C^2(t) \\
& - \frac{2b^3 n^4}{m^3} C(t) + \frac{b^4 n^4}{m^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n^2}{m^2} A^2(t) C^2(t) + \frac{n^4}{m^2} A^4(t) + \frac{2bn^4}{m^2} A^2(t) \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \\
&+ \frac{b^2 n^4}{m^2} \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right)^2 + \frac{n^4}{m^4} A^4(t) \\
&- \frac{2bn^4}{m^3} A^2(t) C(t) + \frac{2b^2 n^4}{m^4} A^2(t) + \frac{b^2 n^4}{m^2} C^2(t) - \frac{2b^3 n^4}{m^3} C(t) + \frac{b^4 n^4}{m^4} \\
&= \frac{n^2}{m^2} A^2(t) C^2(t) + \frac{n^2}{m^2} A^4(t) + \frac{2b^2 n^2}{m^2} A^2(t) + \frac{b^4 n^2}{m^2} + \frac{b^2 n^2}{m^2} C^2(t) \\
&= \frac{n^2}{m^2} (A^2(t) + b^2) (A^2(t) + C^2(t) + b^2)
\end{aligned}$$

$$\langle X(t) \wedge X'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle = \frac{n^2}{m^2} (A^2(t) + b^2) (a^2 + c^2 + b^2) \quad (43)$$

şeklinde elde edilir. (42) ve (43) ifadeleri (31) ifadesinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.5. $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_x(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\psi_x(t) &= \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\
&- \frac{b \cos^2(nt)}{A^2(t) + b^2} \left(aS(t) + cP(t) - \frac{bn}{m} \sin t \right), \\
&\frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\
&- \frac{b \cos^2(nt)}{A^2(t) + b^2} \left(aR(t) + cQ(t) + \frac{bn}{m} \cos t \right), \\
&\left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) - \frac{bn \cos^2(nt)}{A^2(t) + b^2} \left(\frac{1}{m} C(t) + b \right) \right).
\end{aligned}$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_x(t) = \gamma(t) + v_x X(t) \quad (44)$$

olarak yazılır. (9), (14) ve (30) ifadeleri (44) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6. $b=0$ olması durumunda $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.1.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_1(x_1, y_1, z_1)$ olmak üzere, $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & (x - x_1) \cdot \left(A(t) \left(-C(t) \cos t + nA(t) \sin t \right) + bn \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right) \\ & - (y - y_1) \cdot \left(A(t) \left(C(t) \sin t + nA(t) \cos t \right) + bn \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right) \\ & + (z - z_1) \cdot \left(\frac{n}{m} A^2(t) - bn \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

İspat: (41) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.8 . $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi ρ_x aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_x(t) = - \frac{\cos(nt) \left((b^2 + c^2) \sin(nt) + ac \cos(nt) \right)}{A^2(t) + b^2}. \quad (45)$$

İspat: (4) ifadesinden $\varphi_x(t, v_x)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_x(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle}{\|X'(t)\|^2} \quad (46)$$

olarak yazılır. (10) ve (41) ifadeleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \gamma'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle &= \frac{n}{m} \left(-\cos t \cos^2(nt) - n \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\
&\cdot \left(\frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right) \\
&+ \frac{n}{m} \left(-\sin t \cos^2(nt) + n \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\
&\cdot \left(-\frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{1}{m} C(t) \right) \right) \\
&+ \frac{n}{m} \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} A^2(t) - \frac{bn^2}{m} \left(C(t) - \frac{b}{m} \right) \right) \\
&= \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \cos^2 t \cos^2(nt) - \frac{n^3}{m^2} A^2(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
&- \frac{b^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{bn^3}{m^3} C(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
&+ \frac{n^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&- \frac{n^4}{m^2} A^2(t) \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{b^2 n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
&- \frac{bn^4}{m^3} C(t) \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \sin^2 t \cos^2(nt) \\
&+ \frac{n^3}{m^2} A^2(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) + \frac{b^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
&+ \frac{bn^3}{m^3} C(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} A^2(t) \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
&- \frac{n^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{bn^4}{m^3} C(t) \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \sin^2 t \cos^2(nt) \\
& + \frac{n^3}{m^2} A^2(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) + \frac{b^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
& + \frac{bn^3}{m^3} C(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} A^2(t) \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{n^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
& - \frac{b^2 n^4}{m^2} \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{bn^4}{m^3} C(t) \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^4} A^2(t) \sin(nt) \cos(nt) + \frac{bn^4}{m^3} C(t) \sin(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{b^2 n^4}{m^4} \sin(nt) \cos(nt), \\
\langle \gamma'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle &= \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) (A^2(t) + b^2)
\end{aligned}$$

veya

$$\langle \gamma'(t), X(t) \wedge X'(t) \rangle = -\frac{n^2}{m^2} \cos(nt) \left((b^2 + c^2) \sin(nt) + ac \cos(nt) \right) \quad (47)$$

elde edilir. (16) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\|X'(t)\|^2 &= \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t \right)^2 \\
&+ \left(-\frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{an^2}{m} \cos(nt) - \frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right)^2 \\
& = \frac{a^2n^4}{m^4} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{c^2n^4}{m^4} \sin^2 t \sin^2(nt) + \frac{b^2n^2}{m^2} \cos^2 t \\
& + \frac{2acn^4}{m^4} \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{2abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) \\
& + \frac{2bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{a^2n^4}{m^4} \cos^2 t \cos^2(nt) \\
& + \frac{c^2n^4}{m^4} \cos^2 t \sin^2(nt) + \frac{b^2n^2}{m^2} \sin^2 t \\
& + \frac{c^2n^4}{m^4} \cos^2 t \sin^2(nt) + \frac{b^2n^2}{m^2} \sin^2 t \\
& + \frac{2acn^4}{m^4} \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{2abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) \\
& - \frac{2bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{a^2n^4}{m^2} \cos^2(nt) \\
& + \frac{c^2n^4}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{2acn^4}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \\
& = \frac{a^2n^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{c^2n^2}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{2acn^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) + \frac{b^2n^2}{m^2},
\end{aligned}$$

$$\|X'(t)\|^2 = \frac{n^2}{m^2} (A^2(t) + b^2) \tag{48}$$

olur. (47) ve (48) ifadeleri (46) ifadesinde yerine yazılırsa, (45) ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.1.9. $b = c = 0$ olması durumunda $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyi açılabilir.

4.2. Salkowski eğrisi ve $T(t)$ teğet vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $a = 1$ ve $b = c = 0$ seçilirse, (14) ifadesinden,

$$X_T(t) = T(t) = \left(-S(t), -R(t), -\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \quad (49)$$

elde edilir.

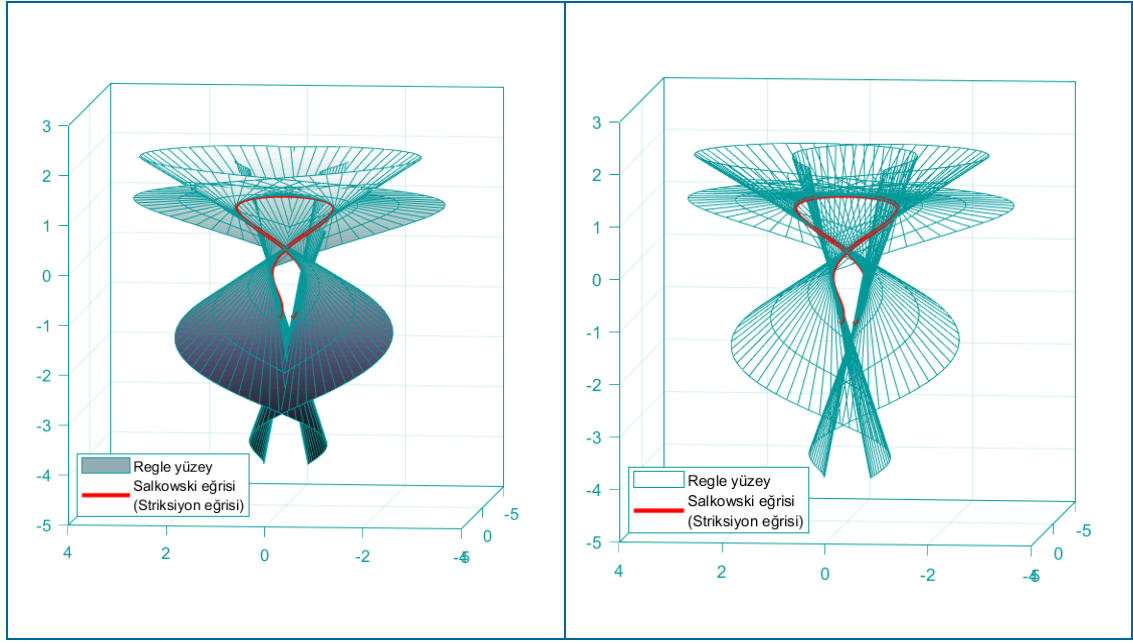
Teorem 4.2.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin $T(t)$ teğet vektörü olan regle yüzey $\varphi_T(t, v_T)$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir, (Şekil 15):

$$\begin{aligned} \varphi_T(t, v_T) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\ & + v_T (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)), \\ & \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\ & + v_T (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)), \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) - v_T \left(\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \right) \end{aligned} \quad (50)$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_T(t, v_T) = \gamma(t) + v_T X_T(t) \quad (51)$$

olarak yazılır. (9) ve (49) ifadeleri (51) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.



Şekil 15. Salkowski eğrisi ve $T(t)$ teğet vektöründen elde edilen regle yüzeyler
 $\left(a = 1, b = c = 0, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$

Teorem 4.2.2. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_T(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\eta_T(t) = \left(\frac{v_T n}{m} P(t) \cos(nt), \frac{v_T n}{m} Q(t) \cos(nt), -\frac{v_T n^2}{m^2} \cos^2(nt) \right). \quad (52)$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_T(t) = \varphi_{T_t}(t) \wedge \varphi_{T_{v_T}}(t) \quad (53)$$

olarak yazılır. (53) ifadesindeki $\varphi_{T_t}(t)$ vektörü $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{T_t}(t) = \gamma'(t) + v_T X'_T(t) \quad (54)$$

olarak elde edilir. (16) ifadesinde $a = 1$ ve $b = c = 0$ yerine yazılırsa,

$$X'_T(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt), -\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right) \quad (55)$$

olur. (10) ve (55) ifadesi (54) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{T_i}(t) = & \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_T n^2}{m^2} \sin t \cos(nt), \right. \\ & -\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_T n^2}{m^2} \cos t \cos(nt), \\ & \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_T n^2}{m} \cos(nt) \right) \end{aligned} \quad (56)$$

elde edilir. (53) ifadesindeki $\varphi_{T_{v_T}}(t)$ vektörü $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin v_T ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{T_{v_T}}(t) = X_T(t) \quad (57)$$

olarak elde edilir. (49) ifadesi (57) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_{T_{v_T}}(t) = \left(-S(t), -R(t), -\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \quad (58)$$

elde edilir. Şimdi (56) ve (58) ifadelerini vektörel çarpalım.

$\varphi_{T_i}(t) = \left((\varphi_{T_i})_1, (\varphi_{T_i})_2, (\varphi_{T_i})_3 \right)$ ve $\varphi_{T_{v_T}}(t) = \left((\varphi_{T_{v_T}})_1, (\varphi_{T_{v_T}})_2, (\varphi_{T_{v_T}})_3 \right)$ olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{T_i}(t) \wedge \varphi_{T_{v_T}}(t) = & \left((\varphi_{T_i})_2 (\varphi_{T_{v_T}})_3 - (\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_{v_T}})_2, (\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_{v_T}})_1 - (\varphi_{T_i})_1 (\varphi_{T_{v_T}})_3, \right. \\ & \left. (\varphi_{T_i})_1 (\varphi_{T_{v_T}})_2 - (\varphi_{T_i})_2 (\varphi_{T_{v_T}})_1 \right) \end{aligned} \quad (59)$$

şeklindedir. (56) ve (58) ifadelerinin bileşenleri (59) ifadesinde yerine yazılırsa, (59) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_2 (\varphi_{T_v})_3 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_T n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \\
&= \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
&\quad + \frac{v_T n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_v})_2 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_T n^2}{m} \cos(nt) \right) \cdot (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin t(nt)) \\
&= \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{v_T n^2}{m} \sin t \cos^2(nt) \\
&\quad - \frac{v_T n^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(\varphi_{T_i})_2 (\varphi_{T_v})_3 - (\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_v})_2 = \frac{v_T n}{m} P(t) \cos(nt) \tag{60}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (59) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_v})_1 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_T n^2}{m} \cos(nt) \right) \cdot (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)) \\
&= \frac{n^2}{m^2} S(t) \cos(nt) \sin(nt) + \frac{v_T n^2}{m} S(t) \cos(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_1 (\varphi_{T_v})_3 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_T n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \\
&= \frac{n^2}{m^2} S(t) \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_T n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt),
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(\varphi_{T_i})_3 (\varphi_{T_v})_1 - (\varphi_{T_i})_1 (\varphi_{T_v})_3 = \frac{v_T n}{m} \cos(nt) Q(t) \tag{61}$$

ve (59) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_1 (\varphi_{T_v})_2 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_T n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \right) \\
&\quad \cdot (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)) \\
&= \frac{n}{m} S(t) \sin t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} S(t) \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\
&\quad - \frac{v_T n^2}{m^2} R(t) \sin t \cos(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_i})_2 (\varphi_{T_v})_1 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_T n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \right) \\
&\quad \cdot (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{m} S(t) \sin t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} S(t) \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\
&+ \frac{v_T n^2}{m^2} S(t) \cos t \cos(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(\varphi_T)_1 (\varphi_{v_T})_2 - (\varphi_T)_2 (\varphi_{v_T})_1 = -\frac{v_T n^2}{m^2} \cos^2(nt) \quad (62)$$

şeklinde elde edilir. (60), (61) ve (62) ifadeleri (59) ifadesinde yerine yazılırsa ve (53) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_2(x_2, y_2, z_2)$ olmak üzere, $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_2)P(t) + (y - y_2)Q(t) - (z - z_2) \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) = 0.$$

İspat: (52) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_T parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_T = 0. \quad (63)$$

İspat: (2) ifadesinden $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin v_T parametresi

$$v_T = -\frac{\langle X_T(t) \wedge X'_T(t), X_T(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X_T(t) \wedge X'_T(t), X_T(t) \wedge X'_T(t) \rangle} \quad (64)$$

olarak yazılır. $X_T(t) = ((X_T)_1, (X_T)_2, (X_T)_3)$ ve $X_T'(t) = ((X_T')_1, (X_T')_2, (X_T')_3)$

olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_T(t) \wedge X_T'(t) = \left((X_T)_2(X_T')_3 - (X_T)_3(X_T')_2, (X_T)_3(X_T')_1 - (X_T)_1(X_T')_3, \right. \\ \left. (X_T)_1(X_T')_2 - (X_T)_2(X_T')_1 \right) \quad (65)$$

şeklinindedir. (49) ve (55) ifadeleri (65) ifadesinde yazılırsa, (65) ifadesinin birinci bileşeni

$$(X_T)_2(X_T')_3 = (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right) \\ = \frac{n^2}{m} R(t) \cos(nt)$$

ve

$$(X_T)_3(X_T')_2 = \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \right) = \frac{n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_2(X_T')_3 - (X_T)_3(X_T')_2 = -\frac{n}{m} P(t) \cos(nt) \quad (66)$$

elde edilir. Benzer şekilde (65) ifadesinin ikinci bileşeni

$$(X_T)_3(X_T')_1 = \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \right) = -\frac{n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt)$$

ve

$$\begin{aligned} (X_T)_1 (X_T')_3 &= (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n^2}{m} S(t) \cos(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_3 (X_T')_1 - (X_T)_1 (X_T')_3 = -\frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) \quad (67)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (65) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} (X_T)_1 (X_T')_2 &= (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n^2}{m^2} S(t) \cos t \cos(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (X_T)_2 (X_T')_1 &= (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} R(t) \sin t \cos(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_1 (X_T')_2 - (X_T)_2 (X_T')_1 = \frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \quad (68)$$

şeklinde elde edilir. (66), (67) ve (68) ifadeleri, (65) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_T(t) \wedge X_T'(t) = \frac{n}{m} \cos(nt) \left(-P(t), -Q(t), \frac{n}{m} \cos(nt) \right) \quad (69)$$

olur. Diğer taraftan $X_T(t) = ((X_T)_1, (X_T)_2, (X_T)_3)$ ve $\gamma'(t) = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_T(t) \wedge \gamma'(t) = \left((X_T)_2 \gamma'_3 - (X_T)_3 \gamma'_2, (X_T)_3 \gamma'_1 - (X_T)_1 \gamma'_3, (X_T)_1 \gamma'_2 - (X_T)_2 \gamma'_1 \right) \quad (70)$$

şeklindedir. (10) ve (49) ifadeleri (70) ifadesinde yazılırsa, (70) ifadesinin birinci bileşeni

$$(X_T)_2 \gamma'_3 = (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right)$$

$$= \frac{n^2}{m^2} R(t) \sin(nt) \cos(nt)$$

ve

$$(X_T)_3 \gamma'_2 = \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right)$$

$$= \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) - \frac{n^2}{m^2} Q(t) \sin^2(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_2 \gamma'_3 - (X_T)_3 \gamma'_2 = 0 \quad (71)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (70) ifadesinin ikinci bileşeni

$$(X_T)_3 \gamma'_1 = \left(-\frac{n}{m} \sin(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t + \frac{n}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right)$$

$$= \frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) - \frac{n^2}{m^2} P(t) \sin^2(nt)$$

ve

$$\begin{aligned}(X_T)_1 \gamma_3' &= (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n^2}{m^2} S(t) \cos(nt) \sin(nt)\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_3 \gamma_1' - (X_T)_1 \gamma_3' = 0 \quad (72)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (70) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}(X_T)_1 \gamma_2' &= (-\cos t \cos(nt) - n \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &= \frac{n}{m} S(t) R(t) \cos(nt)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(X_T)_2 \gamma_1' &= (-\sin t \cos(nt) + n \cos t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n}{m} S(t) R(t) \cos(nt)\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_T)_1 \gamma_2' - (X_T)_2 \gamma_1' = 0 \quad (73)$$

şeklinde elde edilir. (71), (72) ve (73) ifadeleri, (70) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_T(t) \wedge \gamma'(t) = (0, 0, 0) \quad (74)$$

olur. (69) ve (74) ifadelerinin iç çarpımı

$$\langle X_T(t) \wedge X_T'(t), X_T(t) \wedge \gamma'(t) \rangle = 0 \quad (75)$$

şeklinde bulunur. (75) ifadesi (64) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.5. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_T(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\psi_T(t) = \frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t, \right.$$

$$\left. \frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t, \right.$$

$$\left. \frac{1}{m} \cos(2nt) \right).$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_T(t) = \gamma(t) + v_T X_T(t) \quad (76)$$

olarak yazılır. (9), (49) ve (63) ifadeleri (76) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin $\psi_T(t)$ striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.2.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_3(x_3, y_3, z_3)$ olmak üzere, $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_3)P(t) + (y - y_3)Q(t) - (z - z_3) \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) = 0.$$

İspat: (69) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.8. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_T(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_T(t) = 0. \quad (77)$$

İspat: (55), (65) ve (4) ifadesinden $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_T(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_T(t) \wedge X_T'(t) \rangle}{\|X_T'(t)\|^2} \quad (78)$$

olarak yazılır. (10) ve (69) ifadeleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), X_T(t) \wedge X_T'(t) \rangle &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} P(t) \cos(nt) \right) \\ &+ \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) \right) \\ &+ \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \right) \\ &= \frac{n^2}{m^2} P(t) \cos t \cos^3(nt) + \frac{n^3}{m^2} P(t) \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) \\ &+ \frac{n^2}{m^2} Q(t) \sin t \cos^3(nt) - \frac{n^3}{m^2} Q(t) \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{n^4}{m^4} \sin(nt) \cos^3(nt) \\ &= \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin t(nt) - \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^4(nt) \\ &+ \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) \\ &+ \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) - \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^4(nt) - \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt) - \frac{n^4}{m^4} \sin(nt) \cos^3(nt) \\
& = \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin t(nt) + \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) - \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^4} \sin(nt) \cos^3(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle \gamma'(t), X_T(t) \wedge X'_T(t) \rangle = 0 \quad (79)$$

elde edilir. (79) ifadesi (78) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.9. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyi açılabilir.

4.3. Salkowski eğrisi ve $N(t)$ asli normal vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $a = c = 0$ ve $b = 1$ seçilirse (14) ifadesinden,

$$X_N(t) = N(t) = \left(\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, -n \right) \quad (80)$$

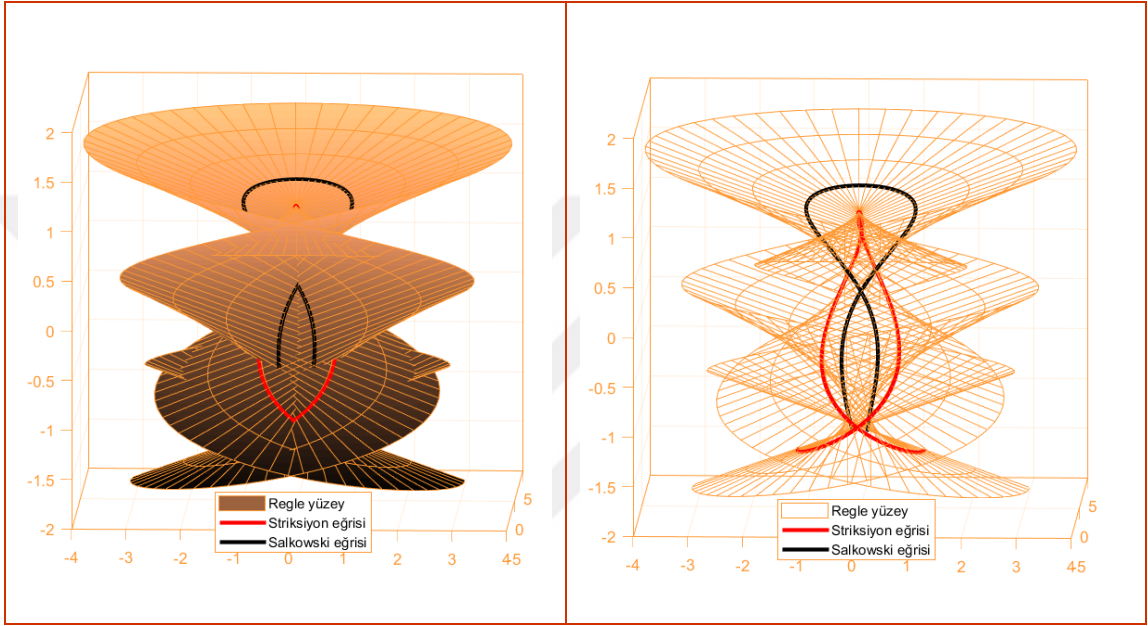
elde edilir.

Teorem 4.3.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin $N(t)$ asli normal vektörü olan regle yüzey $\varphi_N(t, v_N)$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir, (Şekil 16):

$$\varphi_N(t, v_N) = \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) + \frac{nv_N}{m} \sin t, \right.$$

$$\left. \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) - \frac{nv_N}{m} \cos t, \right. \quad (81)$$

$$\left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) - nv_N \right).$$



Şekil 16. Salkowski eğrisi ve $N(t)$ asli normal vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(b=1, a=c=0, m=\frac{1}{5} \text{ için} \right)$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_N(t, v_N) = \gamma(t) + v_N X_N(t) \quad (82)$$

olarak yazılır. (9) ve (80) ifadeleri (82) ifadesinde yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_N(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\eta_N(t) = \left(-\frac{n}{m} P(t) \cos(nt) - \frac{v_N n^2}{m} \sin t, -\frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) + \frac{v_N n^2}{m} \cos t, \right. \\ \left. + \frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{v_N n^2}{m^2} \right). \quad (83)$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_N(t) = \varphi_{N_t}(t) \wedge \varphi_{N_{v_N}}(t) \quad (84)$$

olarak yazılır. (84) ifadesindeki $\varphi_{N_t}(t)$ vektörü $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{N_t}(t) = \gamma'(t) + v_N X'_N(t) \quad (85)$$

olarak elde edilir. (16) ifadesinde $a = c = 0$ ve $b = 1$ yerine yazılırsa,

$$X'_N(t) = \left(\frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin t, 0 \right) \quad (86)$$

şeklindedir. (10) ve (86) ifadesi (85) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\varphi_{N_t}(t) = \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_N n}{m} \cos t, -\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) + \frac{v_N n}{m} \sin t, \right. \\ \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \quad (87)$$

elde edilir. (84) ifadesindeki $\varphi_{N_{v_N}}(t)$ vektörü $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin v_N ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{N_{v_N}}(t) = X_N(t) \quad (88)$$

olarak elde edilir. (80) ifadesi (88) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_{N_{vN}}(t) = \left(\frac{n}{m} \sin t, -\frac{n}{m} \cos t, -n \right) \quad (89)$$

elde edilir. Şimdi (87) ve (89) ifadelerini vektörel çarpalım.

$\varphi_{N_t}(t) = \left((\varphi_{N_t})_1, (\varphi_{N_t})_2, (\varphi_{N_t})_3 \right)$ ve $\varphi_{N_{vN}}(t) = \left((\varphi_{N_{vN}})_1, (\varphi_{N_{vN}})_2, (\varphi_{N_{vN}})_3 \right)$ olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{N_t}(t) \wedge \varphi_{N_{vN}}(t) = & \left((\varphi_{N_t})_2 (\varphi_{N_{vN}})_3 - (\varphi_{N_t})_3 (\varphi_{N_{vN}})_2, (\varphi_{N_t})_3 (\varphi_{N_{vN}})_1 - (\varphi_{N_t})_1 (\varphi_{N_{vN}})_3, \right. \\ & \left. (\varphi_{N_t})_1 (\varphi_{N_{vN}})_2 - (\varphi_{N_t})_2 (\varphi_{N_{vN}})_1 \right) \end{aligned} \quad (90)$$

şeklindedir. (87) ve (89) ifadelerinin bileşenleri (90) ifadesinde yerine yazılırsa, (90) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} (\varphi_{N_t})_2 (\varphi_{N_{vN}})_3 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{v_N n}{m} \sin t \right) \cdot (-n) \\ &= \frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_N n^2}{m} \sin t \end{aligned}$$

ve

$$(\varphi_{N_t})_3 (\varphi_{N_{vN}})_2 = \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t \right) = \frac{n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(\varphi_{N_t})_2 (\varphi_{N_{vN}})_3 - (\varphi_{N_t})_3 (\varphi_{N_{vN}})_2 = -\frac{n}{m} P(t) - v_N \frac{n^2}{m} \sin t \quad (91)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (90) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\left(\varphi_{N_t}\right)_3 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_1 = \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt)\right) \cdot \left(\frac{n}{m} \sin t\right) = -\frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{N_t}\right)_1 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_3 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_N n}{m} \cos t\right) \cdot (-n) \\ &= \frac{n}{m} S(t) \cos(nt) - \frac{v_N n^2}{m} \cos t \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\left(\varphi_{N_t}\right)_3 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_1 - \left(\varphi_{N_t}\right)_1 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_3 = -\frac{n}{m} Q(t) - v_N \frac{n^2}{m} \cos t \quad (92)$$

olarak elde edilir. Son olarak (90) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{N_t}\right)_1 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_2 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_N n}{m} \cos t\right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t\right) \\ &= \frac{n^2}{m^2} S(t) \cos t \cos(nt) - \frac{v_N n^2}{m^2} \cos^2 t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{N_t}\right)_2 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_1 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{v_N n}{m} \sin t\right) \cdot \left(\frac{n}{m} \sin t\right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} R(t) \sin t \cos(nt) + \frac{v_N n^2}{m^2} \sin^2 t \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\left(\varphi_{N_t}\right)_1 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_2 - \left(\varphi_{N_t}\right)_2 \left(\varphi_{N_{v_N}}\right)_1 = \frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{v_N n^2}{m^2} \quad (93)$$

şeklinde elde edilir. (91), (92) ve (93) ifadeleri (90) ifadesinde yerine yazılırsa ve (84) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_4(x_4, y_4, z_4)$ olmak üzere, $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_4)(P(t) \cos(nt) + v_N n \sin t) + (y - y_4)(Q(t) \cos(nt) - v_N n \cos t) - (z - z_4) \left(\frac{n}{m} \cos^2(nt) - \frac{v_N n}{m} \right) = 0.$$

İspat: (83) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_N parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_N = \cos^2(nt). \quad (94)$$

İspat: (2) ifadesinden $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_N parametresi

$$v_N = - \frac{\langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle} \quad (95)$$

olarak yazılır. $X_N(t) = ((X_N)_1, (X_N)_2, (X_N)_3)$ ve $X'_N(t) = ((X'_N)_1, (X'_N)_2, (X'_N)_3)$

olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_N(t) \wedge X'_N(t) = \left((X_N)_2 (X'_N)_3 - (X_N)_3 (X'_N)_2, (X_N)_3 (X'_N)_1 - (X_N)_1 (X'_N)_3, (X_N)_1 (X'_N)_2 - (X_N)_2 (X'_N)_1 \right) \quad (96)$$

şeklindedir. (80) ve (86) ifadeleri (96) ifadesinde yazılırsa, (96) ifadesinin birinci bileşeni

$$(X_N)_2 (X_N')_3 = \left(-\frac{n}{m} \cos t\right) \cdot 0 = 0$$

ve

$$(X_N)_3 (X_N')_2 = (-n) \cdot \left(\frac{n}{m} \sin t\right) = -\frac{n^2}{m} \sin t$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_2 (X_N')_3 - (X_N)_3 (X_N')_2 = \frac{n^2}{m} \sin t \quad (97)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (96) ifadesinin ikinci bileşeni

$$(X_N)_3 (X_N')_1 = (-n) \cdot \left(\frac{n}{m} \cos t\right) = -\frac{n^2}{m} \cos t$$

ve

$$(X_N)_1 (X_N')_3 = \left(\frac{n}{m} \sin t\right) \cdot 0 = 0$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_3 (X_N')_1 - (X_N)_1 (X_N')_3 = -\frac{n^2}{m} \cos t \quad (98)$$

olarak elde edilir. Son olarak (96) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$(X_N)_1 (X_N')_2 = \left(\frac{n}{m} \sin t\right) \cdot \left(\frac{n}{m} \sin t\right) = \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t$$

ve

$$(X_N)_2 (X_N')_1 = \left(-\frac{n}{m} \cos t \right) \cdot \left(\frac{n}{m} \cos t \right) = -\frac{n^2}{m^2} \cos^2 t$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_1 (X_N')_2 - (X_N)_2 (X_N')_1 = \frac{n^2}{m^2} \quad (99)$$

şeklinde elde edilir. (97), (98) ve (99) ifadeleri, (96) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_N \wedge X_N' = \left(\frac{n^2}{m} \sin t, -\frac{n^2}{m} \cos t, \frac{n^2}{m^2} \right) \quad (100)$$

olur. Diğer taraftan $X_N(t) = ((X_N)_1, (X_N)_2, (X_N)_3)$ ve $\gamma'(t) = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_N(t) \wedge \gamma'(t) = ((X_N)_2 \gamma'_3 - (X_N)_3 \gamma'_2, (X_N)_3 \gamma'_1 - (X_N)_1 \gamma'_3, (X_N)_1 \gamma'_2 - (X_N)_2 \gamma'_1) \quad (101)$$

şeklinindedir. (10) ve (80) ifadeleri (101) ifadesinde yazılırsa, (101) ifadesinin birinci bileşeni

$$(X_N)_2 \gamma'_3 = \left(-\frac{n}{m} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) = \frac{n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt)$$

ve

$$(X_N)_3 \gamma'_2 = (-n) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right)$$

$$= \frac{n^2}{m} \sin t - \frac{n^2}{m} Q(t) \sin(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_2 \gamma_3' - (X_N)_3 \gamma_2' = \frac{n}{m} P(t) \cos(nt) \quad (102)$$

elde edilir. Benzer şekilde (101) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned} (X_N)_3 \gamma_1' &= (-n) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t + \frac{n}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n^2}{m} \cos t - \frac{n^2}{m} P(t) \sin(nt) \end{aligned}$$

ve

$$(X_N)_1 \gamma_3' = \left(\frac{n}{m} \sin t \right) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) = -\frac{n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_3 \gamma_1' - (X_N)_1 \gamma_3' = \frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) \quad (103)$$

olarak elde edilir. Son olarak (101) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} (X_N)_1 \gamma_2' &= \left(\frac{n}{m} \sin t \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} \sin^2 t + \frac{n^2}{m^2} Q(t) \sin t \sin(nt) \end{aligned}$$

ve

$$(X_N)_2 \gamma_1' = \left(-\frac{n}{m} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t + \frac{n}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right)$$

$$= \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t - \frac{n^2}{m^2} P(t) \cos t \sin(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_N)_1 \gamma'_2 - (X_N)_2 \gamma'_1 = -\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \quad (104)$$

şeklinde elde edilir. (102), (103) ve (104) ifadeleri, (101) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_N(t) \wedge \gamma'(t) = \left(\frac{n}{m} P(t) \cos(nt), \frac{n}{m} Q(t) \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \right) \quad (105)$$

olur. (100) ve (105) ifadelerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge \gamma'(t) \rangle &= \frac{n^3}{m^2} \cos(nt) \left(P(t) \sin t - \frac{n^3}{m^2} Q(t) - \frac{n}{m^2} \cos(nt) \right) \\ &= \frac{n^3}{m^2} \cos(nt) (-n \cos(nt)) - \frac{n^4}{m^4} \cos^2(nt), \end{aligned}$$

$$\langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge \gamma'(t) \rangle = -\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) \quad (106)$$

şeklinde bulunur. (100) ifadesinin kendisiyle iç çarpımı

$$\langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle = \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t + \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t + \frac{n^4}{m^4},$$

$$\langle X_N(t) \wedge X'_N(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle = \frac{n^2}{m^2} \quad (107)$$

olur. (106) ve (107) ifadeleri (95) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.5. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_N(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \psi_N(t) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) + \frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt), \right. \\ & \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) - \frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt), \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) - n \cos^2(nt) \right). \end{aligned}$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_N(t) = \gamma(t) + v_N(t) X_N(t) \quad (108)$$

olur. (9), (80) ve (94) ifadeleri (108) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.6. $\cos(nt) \neq 0$ olduğundan $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi, Salkowski eğrisinden farklıdır.

Teorem 4.3.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_5(x_5, y_5, z_5)$ olmak üzere, $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_5)m \sin t - (y - y_5)m \cos t + (z - z_5) = 0.$$

İspat: (100) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.8. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_N(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_N(t) = -\sin(nt) \cos(nt). \quad (109)$$

İspat: (55), (65) ve (4) ifadesinden $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_N(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle}{\|X'_N(t)\|^2} \quad (110)$$

olarak yazılır. (10) ve (69) ifadelerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle &= -\frac{n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\ &\quad + \frac{n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{n^4}{m^4} \sin(nt) \cos(nt), \\ \langle \gamma'(t), X_N(t) \wedge X'_N(t) \rangle &= -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \end{aligned} \quad (111)$$

şeklinde bulunur. (86) ifadesinin kendisiyle iç çarpımı

$$\langle X'_N(t), X'_N(t) \rangle = \frac{n^2}{m^2} \quad (112)$$

olur. (111) ve (112) ifadeleri (110) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.9. $\cos(nt) \neq 0$ ve $\sin(nt) \neq 0$ olduğundan $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyi açılabilir değildir.

4.4. Salkowski eğrisi ve $B(t)$ binormal vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $a = b = 0$ ve $c = 1$ seçilirse (14) ifadesinden,

$$X_B(t) = B(t) = \left(-P(t), -Q(t), \frac{n}{m} \cos(nt) \right) \quad (113)$$

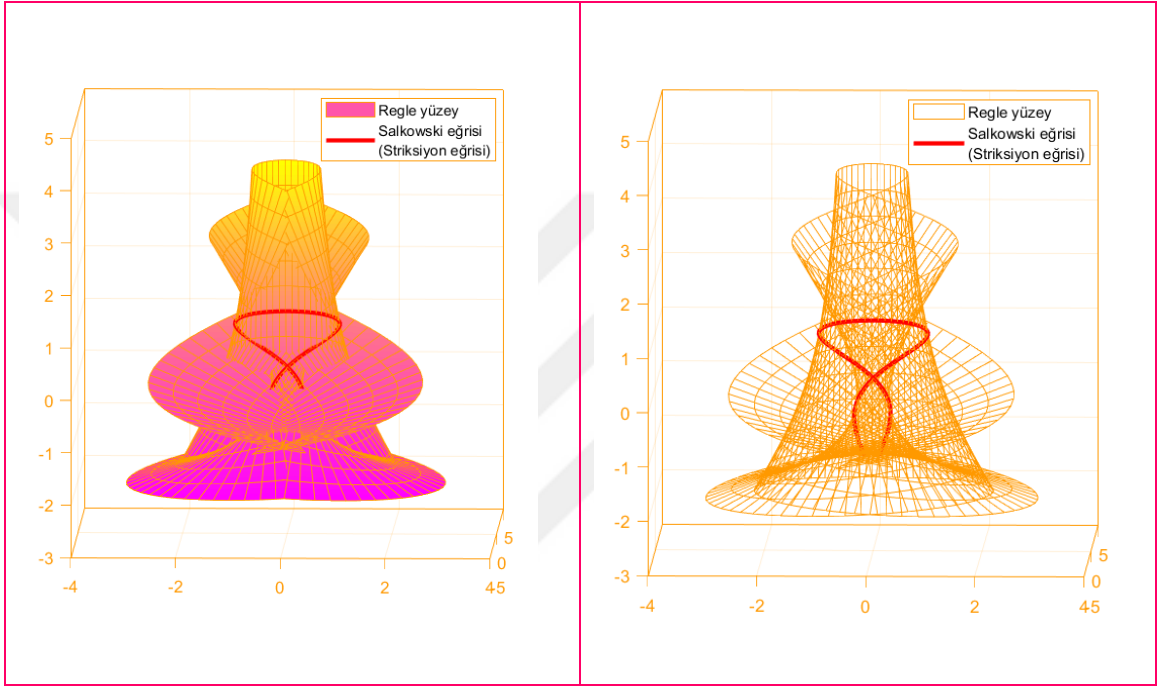
elde edilir.

Teorem 4.4.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin $B(t)$ binormal vektörü olan regle yüzey $\varphi_B(t, v_B)$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir, (Şekil 17):

$$\varphi_B(t, v_B) = \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) - v_B P(t), \right.$$

$$\left. \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) - v_B S(t), \quad (114) \right.$$

$$\left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + v_B \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \right).$$



Şekil 17. Salkowski eğrisi ve $B(t)$ binormal vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(c = 1, a = b = 0, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_B(t, v_B) = \gamma(t) + v_B X_B(t) \quad (115)$$

olarak yazılır. (9) ve (113) ifadeleri (115) ifadesinde yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.2. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_B(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\eta_B(t) = \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{v_B n}{m} S(t) \sin(nt), \right. \\ \left. \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{v_B n}{m} R(t) \sin(nt), \right. \\ \left. \frac{n^2}{m} \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \sin^2(nt) \right). \quad (116)$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_B(t) = \varphi_{B_t}(t) \wedge \varphi_{B_{v_B}}(t) \quad (117)$$

olur. (117) ifadesindeki $\varphi_{B_t}(t)$ vektörü $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir.

Bu vektör

$$\varphi_{B_t}(t) = \gamma'(t) + v_B X'_B(t) \quad (118)$$

olarak elde edilir. (16) ifadesinde $a = b = 0$ ve $c = 1$ yerine yazılırsa,

$$X'_B(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt), -\frac{n^2}{m} \sin(nt) \right) \quad (119)$$

şeklindedir. (10) ve (119) ifadesi (118) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\varphi_{B_t}(t) = \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{v_B n^2}{m^2} \sin t \sin(nt), \right. \\ \left. -\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \cos t \sin(nt), \right. \\ \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m} \sin(nt) \right) \quad (120)$$

elde edilir. (117) ifadesindeki $\varphi_{B_{v_B}}(t)$ vektörü $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin v_B ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{B_{v_B}}(t) = X_B(t) \quad (121)$$

olarak elde edilir. (113) ifadesi (121) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_{B_{v_B}}(t) = \left(-P(t), -S(t), \frac{n}{m} \cos(nt) \right) \quad (122)$$

elde edilir. Şimdi (120) ve (122) ifadelerini vektörel çarpalım.

$\varphi_{B_i}(t) = \left((\varphi_{B_i})_1, (\varphi_{B_i})_2, (\varphi_{B_i})_3 \right)$ ve $\varphi_{B_{v_B}}(t) = \left((\varphi_{B_{v_B}})_1, (\varphi_{B_{v_B}})_2, (\varphi_{B_{v_B}})_3 \right)$ olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{B_i}(t) \wedge \varphi_{B_{v_B}}(t) = & \left((\varphi_{B_i})_2 (\varphi_{B_{v_B}})_3 - (\varphi_{B_i})_3 (\varphi_{B_{v_B}})_2, (\varphi_{B_i})_3 (\varphi_{B_{v_B}})_1 - (\varphi_{B_i})_1 (\varphi_{B_{v_B}})_3, \right. \\ & \left. (\varphi_{B_i})_1 (\varphi_{B_{v_B}})_2 - (\varphi_{B_i})_2 (\varphi_{B_{v_B}})_1 \right) \end{aligned} \quad (123)$$

şeklinindedir. (120) ve (122) ifadelerinin bileşenleri (123) ifadesinde yerine yazılırsa, (123) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} (\varphi_{B_i})_2 (\varphi_{B_{v_B}})_3 = & \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \right) \\ & \cdot \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \\ = & -\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos^3(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) \\ & - \frac{v_B n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{B_t})_3 (\varphi_{B_{v_B}})_2 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m} \sin(nt) \right) \cdot (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt)) \\
&= \frac{n^3}{m^2} \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) \\
&\quad + \frac{v_B n^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{v_B n^2}{m} \sin t \sin^2(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(\varphi_{B_t})_2 (\varphi_{B_{v_B}})_3 - (\varphi_{B_t})_3 (\varphi_{B_{v_B}})_2 = -\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{v_B n}{m} S(t) \sin(nt) \quad (124)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (123) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned}
(\varphi_{B_t})_3 (\varphi_{B_{v_B}})_1 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m} \sin(nt) \right) \cdot (n \sin t \cos(nt) - \cos t \sin(nt)) \\
&= -\frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
&\quad - \frac{v_B n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_B n^2}{m} \cos t \sin^2(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\varphi_{B_t})_1 (\varphi_{B_{v_B}})_3 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_B n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \\
&= -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos^3(nt) - \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{v_B n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\left(\varphi_{B_t}\right)_3 \left(\varphi_{B_{v_B}}\right)_1 - \left(\varphi_{B_t}\right)_1 \left(\varphi_{B_{v_B}}\right)_3 = \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{v_B n}{m} R(t) \sin(nt) \quad (125)$$

olarak elde edilir. Son olarak (123) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\left(\varphi_{B_t}\right)_1 \left(\varphi_{B_{v_B}}\right)_2 = \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{v_B n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \right)$$

$$\cdot (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt))$$

$$= \frac{n^2}{m} \cos^2 t \cos^3(nt) + \frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt)$$

$$+ \frac{n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt)$$

$$- \frac{v_B n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \sin^2 t \sin^2(nt)$$

ve

$$\left(\varphi_{B_t}\right)_2 \left(\varphi_{B_{v_B}}\right)_1 = \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \right)$$

$$\cdot (n \sin t \cos(nt) - \cos t \sin(nt))$$

$$= -\frac{n^2}{m} \sin^2 t \cos^3(nt) + \frac{n}{m} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt)$$

$$+ \frac{n^3}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) - \frac{n^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt)$$

$$- \frac{v_B n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{v_B n^2}{m^2} \cos^2 t \sin^2(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$\varphi_{(B)_1} \varphi_{B(v_B)_2} - \varphi_{(B)_2} \varphi_{B(v_B)_1} = \frac{n^2}{m} \cos(nt) - \frac{v_B n^2}{m^2} \sin^2(nt) \quad (126)$$

şeklinde elde edilir. (124), (125) ve (126) ifadeleri (123) ifadesinde yerine yazılırsa ve (117) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_6(x_6, y_6, z_6)$ olmak üzere, $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & (x - x_6)(n \sin t \cos(nt) + v_B m S(t) \sin(nt)) \\ & - (y - y_6)(n \cos t \cos(nt) - v_B m R(t) \sin(nt)) \\ & - (z - z_6)(nm \cos(nt) - v_B n \sin^2(nt)) = 0. \end{aligned}$$

İspat: (116) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.4. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_B parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_B = 0. \quad (127)$$

İspat: (2) ifadesinden $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_B parametresi

$$v_B = - \frac{\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge \gamma'(t) \rangle}{\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge X'_B(t) \rangle} \quad (128)$$

olur. $X_B(t) = ((X_B)_1, (X_B)_2, (X_B)_3)$ ve $X'_B(t) = ((X'_B)_1, (X'_B)_2, (X'_B)_3)$ olmak üzere

bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_B(t) \wedge X'_B(t) = \left((X_B)_2 (X'_B)_3 - (X_B)_3 (X'_B)_2, (X_B)_3 (X'_B)_1 - (X_B)_1 (X'_B)_3, \right. \\ \left. (X_B)_1 (X'_B)_2 - (X_B)_2 (X'_B)_1 \right), \quad (129)$$

$$(X_B)_1 (X'_B)_2 - (X_B)_2 (X'_B)_1$$

şeklindedir. (113) ve (119) ifadeleri (129) ifadesinde yazılırsa, (129) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} (X_B)_2 (X_B')_3 &= (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m} \sin(nt) \right) \\ &= \frac{n^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{n^2}{m} \sin t \sin^2(nt) \end{aligned}$$

ve

$$(X_B)_3 (X_B')_2 = \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \right) = -\frac{n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt)$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_2 (X_B')_3 - (X_B)_3 (X_B')_2 = \frac{n}{m} S(t) \sin(nt) \quad (130)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (129) ifadesinin ikinci bileşeni

$$(X_B)_3 (X_B')_1 = \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \right) = \frac{n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt)$$

ve

$$(X_B)_1 (X_B')_3 = -\frac{n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \sin^2(nt),$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_3 (X_B')_1 - (X_B)_1 (X_B')_3 = \frac{n}{m} R(t) \sin(nt) \quad (131)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (129) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned} (X_B)_1 (X_B')_2 &= (n \sin t \cos(nt) - \cos t \sin(nt)) \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \right) \\ &= -\frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) + \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t \sin^2(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (X_B)_2 (X_B')_1 &= (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt)) \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \right) \\ &= -\frac{n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) - \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \sin^2(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_1 (X_B')_2 - (X_B)_2 (X_B')_1 = \frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \quad (132)$$

şeklinde elde edilir. (130), (131) ve (132) ifadeleri, (129) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_B(t) \wedge X_B'(t) = \left(\frac{n}{m} S(t) \sin(nt), \frac{n}{m} R(t) \sin(nt), \frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \right) \quad (133)$$

olur. Diğer taraftan $X_B(t) = ((X_B)_1, (X_B)_2, (X_B)_3)$ ve $\gamma'(t) = (\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ olmak üzere bu iki vektörün vektörel çarpımı

$$X_B(t) \wedge \gamma'(t) = \left((X_B)_2 \gamma'_3 - (X_B)_3 \gamma'_2, (X_B)_3 \gamma'_1 - (X_B)_1 \gamma'_3, (X_B)_1 \gamma'_2 - (X_B)_2 \gamma'_1 \right) \quad (134)$$

şeklindedir. (10) ve (113) ifadeleri (134) ifadesinde yazılırsa, (134) ifadesinin birinci bileşeni

$$(X_B)_2 \gamma'_3 = (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right)$$

$$= \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) + \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt)$$

ve

$$\begin{aligned} (X_B)_3 \gamma_2' &= \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{n^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_2 \gamma_3' - (X_B)_3 \gamma_2' = \frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \quad (135)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde (134) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned} (X_B)_3 \gamma_1' &= \left(\frac{n}{m} \cos(nt) \right) \cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t + \frac{n}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) - \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (X_B)_1 \gamma_3' &= (n \sin t \cos(nt) - \cos t \sin(nt)) \cdot \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &= -\frac{n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_3 \gamma_1' - (X_B)_1 \gamma_3' = -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \quad (136)$$

şeklinde elde edilir. Son olarak (134) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
(X_B)_1 \gamma_2' &= (n \sin t \cos(nt) - \cos t \sin(nt)) \\
&\cdot \left(-\frac{n}{m} \sin t + \frac{n}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\
&= -\frac{n^2}{m} \sin^2 t \cos(nt) + \frac{n^2}{m} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{n^3}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) \\
&\quad + \frac{n}{m} \cos t \sin t \sin(nt) - \frac{n}{m} \cos t \sin t \sin^3(nt) - \frac{n^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(X_B)_2 \gamma_1' &= (-n \cos t \cos(nt) - \sin t \sin(nt)) \\
&\cdot \left(-\frac{n}{m} \cos t + \frac{n}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\
&= \frac{n^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) - \frac{n^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt) + \frac{n^3}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) \\
&\quad + \frac{n}{m} \cos t \sin t \sin(nt) - \frac{n}{m} \cos t \sin t \sin^3(nt) + \frac{n^2}{m} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$(X_B)_1 \gamma_2' - (X_B)_2 \gamma_1' = -\frac{n^2}{m} \cos(nt) \quad (137)$$

şeklinde elde edilir. (135), (136) ve (137) ifadeleri, (134) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X_B(t) \wedge \gamma'(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt), -\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt), -\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right) \quad (138)$$

olur. (133) ve (138) ifadelerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge \gamma'(t) \rangle &= \left(\frac{n}{m} S(t) \sin(nt) \right) \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos nt \right) \\
&+ \left(\frac{n}{m} R(t) \sin(nt) \right) \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos nt \right) + \left(\frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \right) \left(-\frac{n^2}{m} \cos(nt) \right) \\
&= \frac{n^3}{m^3} S(t) \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{n^3}{m^3} R(t) \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\
&- \frac{n^4}{m^3} \cos(nt) \sin^2(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge \gamma'(t) \rangle = 0 \tag{139}$$

şeklinde bulunur. (133) ifadesinin kendisiyle iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge X'_B(t) \rangle &= \left(\frac{n}{m} S(t) \sin(nt) \right)^2 + \left(\frac{n}{m} R(t) \sin(nt) \right)^2 \\
&+ \left(\frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \right)^2 \\
&= \frac{n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin^2(nt) \\
&+ \frac{2n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin^3(nt) \\
&+ \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t \sin^4(nt) + \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos^2(nt) \\
&+ \frac{n^4}{m^4} \sin^4(nt) - \frac{2n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin^3(nt)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t \sin^4(nt),$$

$$\langle X_B(t) \wedge X'_B(t), X_B(t) \wedge X'_B(t) \rangle = \frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \quad (140)$$

elde edilir. (139) ve (140) ifadeleri (128) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.5. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_B(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\psi_B(t) = \frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t, \right. \\ \left. \frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t, \frac{1}{m} \cos(2nt) \right).$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_B(t) = \gamma(t) + v_B(t) X_B(t) \quad (141)$$

olur. (9), (113) ve (127) ifadeleri (141) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4.6. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.4.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası

$D_7(x_7, y_7, z_7)$ olmak üzere, $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_7)mS(t) + (y - y_7)mR(t) + (z - z_7)n \sin(nt) = 0.$$

İspat: (133) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.8. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_B(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_B(t) = -\frac{\cos(nt)}{\sin(nt)}. \quad (142)$$

İspat: (4), (119) ve (133) ifadesinden $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin dağılıma parametresi

$$\rho_B(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_B(t) \wedge X_B'(t) \rangle}{\|X_B'(t)\|^2} \quad (143)$$

olarak yazılır. (10) ve (133) ifadelerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), X_B(t) \wedge X_B'(t) \rangle &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{n}{m} S(t) \sin(nt) \right) \\ &+ \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \cdot \left(\frac{n}{m} R(t) \sin(nt) \right) \\ &+ \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \right) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} S(t) \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{n^3}{m^2} S(t) \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) \\ &- \frac{n^2}{m^2} R(t) \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{n^3}{m^2} R(t) \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \\ &- \frac{n^4}{m^4} \sin^3(nt) \cos(nt) \\ &= -\frac{n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt) - \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \\ &- \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin^2 t \sin^3(nt) \cos(nt) \\ &- \frac{n^2}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) + \frac{n^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos^2(nt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) - \frac{n^4}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin^3(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^4} \sin^3(nt) \cos(nt) \\
& = -\frac{n^2}{m^2} \cos^3(nt) \sin(nt) - \frac{n^4}{m^2} \sin^3(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^4} \sin^3(nt) \cos(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle \gamma', X_B(t) \wedge X_B'(t) \rangle = -\frac{n^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) \quad (144)$$

şeklinde bulunur. (119) ifadesinin kendisiyle iç çarpımı

$$\begin{aligned}
\langle X_B'(t), X_B'(t) \rangle & = \left(\frac{n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \right)^2 + \left(-\frac{n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \right)^2 + \left(-\frac{n^2}{m} \sin(nt) \right)^2 \\
& = \frac{n^4}{m^4} \sin^2 t \sin^2(nt) + \frac{n^4}{m^4} \cos^2 t \sin^2(nt) + \frac{n^4}{m^2} \sin^2(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle X_B'(t), X_B'(t) \rangle = \frac{n^2}{m^2} \sin^2(nt) \quad (145)$$

olarak elde edilir. (144) ve (145) ifadeleri (143) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.9. $\cos(nt) \neq 0$ olduğundan $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyi açılabilir değildir.

4.5. Salkowski eğrisi ve $bN(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $a = 0$ seçilirse, (14) ifadesinden

$$X_{NB}(t) = bN(t) + cB(t) = \left(\frac{bn}{m} \sin t - cP(t), -\frac{bn}{m} \cos t - cQ(t), -bn + \frac{cn}{m} \cos(nt) \right) \quad (146)$$

elde edilir. Bu vektör Salkowski eğrisinin normal düzleminde yatmaktadır.

Teorem 4.5.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin normal düzleminde yatan $bN(t) + cB(t)$ vektörü olan regle yüzey $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir, (Şekil 18):

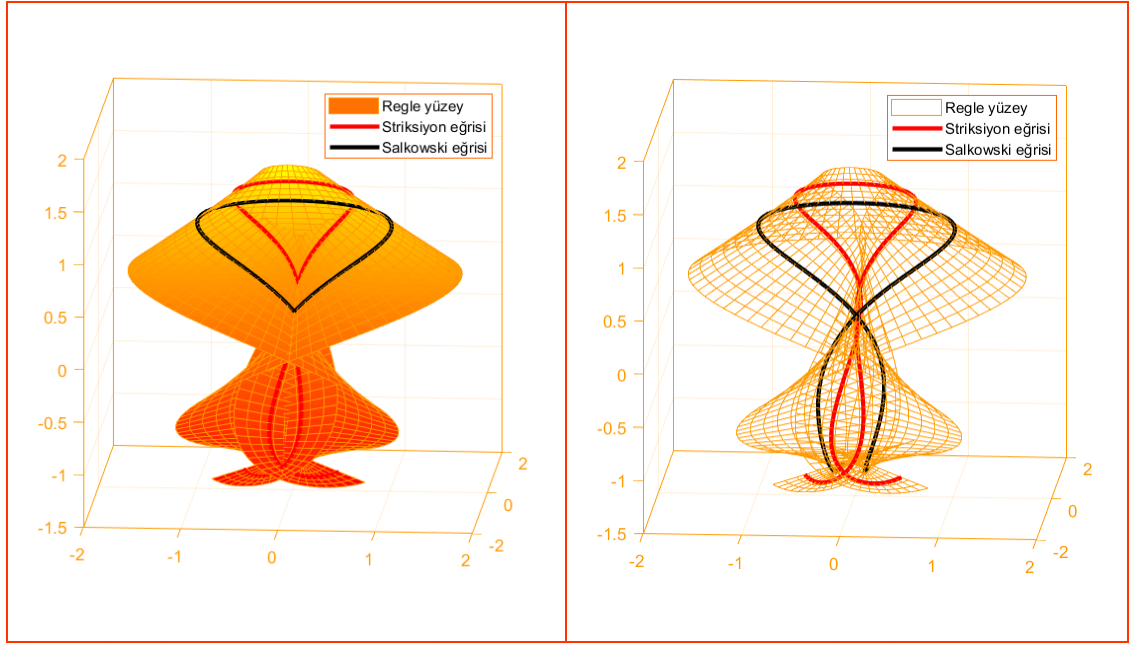
$$\begin{aligned} \varphi_{NB}(t, v_{NB}) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\ & + v_{NB} \left(\frac{bn}{m} \sin t + cP(t) \right), \\ & \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\ & + v_{NB} \left(-\frac{bn}{m} \cos t - cQ(t) \right), \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + v_{NB} \left(-bn + \frac{cn}{m} \cos(nt) \right) \right). \end{aligned} \quad (147)$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_{NB}(t, v_{NB}) = \gamma(t) + v_{NB} X_{NB}(t) \quad (148)$$

olarak yazılır. (9) ve (146) ifadeleri (148) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.2. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_{NB}(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:



Şekil 18. Salkowski eğrisi ve $bN(t)+cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(a=0, b=c=m=\frac{1}{5} \text{ için} \right)$$

$$\begin{aligned} \eta_{NB}(t) = & \left(-\frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{c^2 v_{NB} n}{m} S(t) \sin(nt) \right. \\ & + \frac{bcv_{NB}n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{bn}{m} P(t) \cos(nt) - \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m} \sin t, \\ & \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{c^2 v_{NB} n}{m} R(t) \sin(nt) - \frac{bn}{m} Q(t) \cos(nt) \\ & - \frac{bcv_{NB}n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m} \cos t, \\ & - \frac{bcv_{NB}n^2}{m} \cos(nt) + \frac{cn^2}{m} \cos(nt) - \frac{c^2 v_{NB} n^2}{m^2} \sin^2(nt) \\ & \left. + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (149)$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_{NB}(t) = \varphi_{(NB)_t}(t) \wedge \varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t) \quad (150)$$

olarak yazılır. (150) ifadesindeki $\varphi_{(NB)_t}(t)$ vektörü $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{(NB)_t}(t) = \gamma'(t) + v_{NB} X'_{NB}(t) \quad (151)$$

olarak elde edilir. (16) ifadesinde $a = 0$ yerine yazılırsa,

$$X'_{NB}(t) = \left(\frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t, -\frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right) \quad (152)$$

bulunur. (10) ve (152) ifadeleri (151) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \varphi_{(NB)_t}(t) = & \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{cv_{NB}n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bv_{NB}n}{m} \cos t, \right. \\ & -\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{cv_{NB}n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bv_{NB}n}{m} \sin t, \\ & \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{cv_{NB}n^2}{m} \sin(nt) \right) \quad (153) \end{aligned}$$

elde edilir. (150) ifadesindeki $\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t)$ vektörü $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin v_{NB} ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t) = X_{NB}(t) \quad (154)$$

olarak elde edilir. (146) ifadesi (154) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t) = \left(-cP(t) + \frac{bn}{m} \sin t, -cQ(t) - \frac{bn}{m} \cos t, \frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \quad (155)$$

elde edilir. Şimdi (153) ve (155) ifadelerini vektörel çarpalım.

$$\varphi_{(NB)_t}(t) = \left(\left(\varphi_{(NB)_t} \right)_1, \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_2, \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_3 \right) \text{ ve}$$

$\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t) = \left(\left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_1, \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_2, \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_3 \right)$ olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{(NB)_t}(t) \wedge \varphi_{(NB)_{v_{NB}}}(t) = & \left(\left(\varphi_{(NB)_t} \right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_3 - \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_2, \right. \\ & \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_1 - \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_3, \right. \\ & \left. \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_2 - \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_1 \right) \end{aligned} \quad (156)$$

şeklindedir. (153) ve (155) ifadelerinin bileşenleri (156) ifadesinde yerine yazılırsa, (156) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_3 = & \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right. \\ & \left. - \frac{cv_{NB}n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bv_{NB}n}{m} \sin t \right) \cdot \left(\frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \\ = & -\frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos^3(nt) + \frac{cn^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) \\ & - \frac{c^2v_{NB}n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{bcv_{NB}n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \\ & + \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) - \frac{bn^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\ & + \frac{bcv_{NB}n^3}{m^2} \cos t \sin(nt) - \frac{b^2v_{NB}n^2}{m} \sin t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{vNB}}\right)_2 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{cv_{NB}n^2}{m} \sin(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(-cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
&= \frac{cn^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) + \frac{c^2v_{NB}n^3}{m} \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&\quad + \frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{c^2v_{NB}n^2}{m} \sin t \sin^2(nt) \\
&\quad + \frac{bn^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{bcv_{NB}n^3}{m^2} \cos t \sin(nt)
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{vNB}}\right)_3 - \left(\varphi_{(NB)_t}\right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{vNB}}\right)_2 &= -\frac{c^2v_{NB}n}{m} \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&\quad - \frac{c^2v_{NB}n^2}{m} \sin t \sin^2(nt) + \frac{bcv_{NB}n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) \\
&\quad + \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\
&\quad - \frac{b^2v_{NB}n^2}{m} \sin t - \frac{cn^2}{m^2} \sin t \cos(nt)
\end{aligned} \tag{157}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (156) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{vNB}}\right)_1 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{cv_{NB}n^2}{m} \sin(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{cn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) + \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
&\quad - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{c^2 v_{NB} n^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad + \frac{c^2 v_{NB} n^2}{m} \cos t \sin^2(nt) - \frac{bcv_{NB} n^3}{m^2} \sin t \sin(nt)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}\right)_3 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{cv_{NB} n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bv_{NB} n}{m} \cos t \right) \cdot \left(\frac{cn}{m} \cos(nt) - bn \right) \\
&= -\frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos^3(nt) - \frac{cn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) \\
&\quad + \frac{c^2 v_{NB} n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) + \frac{bcv_{NB} n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) \\
&\quad + \frac{bn^2}{m} \cos t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{bcv_{NB} n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) - \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m} \cos t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_3 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}\right)_1 - \left(\varphi_{(NB)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}\right)_3 &= -\frac{c^2 v_{NB} n}{m} R(t) \sin(nt) - \frac{bn}{m} Q(t) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{bcv_{NB} n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m} \cos t + \frac{cn^2}{m^2} \cos t \cos(nt)
\end{aligned} \tag{158}$$

elde edilir. Son olarak (156) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}\right)_2 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{cv_{NB}n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bv_{NB}n}{m} \cos t \right) \\
&\quad \cdot \left(-cn \cos t \cos(nt) - c \sin t \sin(nt) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\
&= \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos^3(nt) + \frac{cn^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) \\
&\quad - \frac{c^2v_{NB}n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) - \frac{bcv_{NB}n^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \\
&\quad + \frac{cn}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{cn^2}{m} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{c^2v_{NB}n^2}{m^2} \sin^2 t \sin^2(nt) - \frac{bcv_{NB}n}{m} \cos t \sin t \sin(nt) \\
&\quad + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&\quad - \frac{bcv_{NB}n^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) - \frac{b^2v_{NB}n^2}{m^2} \cos^2 t
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t}\right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}}\right)_1 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right. \\
&\quad \left. - \frac{cv_{NB}n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bv_{NB}n}{m} \sin t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(cn \sin t \cos(nt) - c \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\
&= -\frac{cn^2}{m} \sin^2 t \cos^3(nt) + \frac{cn^3}{m} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) \\
&\quad - \frac{c^2 v_{NB} n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) + \frac{bcv_{NB} n^2}{m} \sin^2 t \cos(nt) \\
&\quad + \frac{cn}{m} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) - \frac{cn^2}{m} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
&\quad + \frac{c^2 v_{NB} n^2}{m^2} \cos^2 t \sin^2(nt) - \frac{bcv_{NB} n}{m} \cos t \sin t \sin(nt) \\
&\quad - \frac{bn^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) \\
&\quad - \frac{bcv_{NB} n^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m^2} \sin^2 t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(NB)_t} \right)_1 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_2 - \left(\varphi_{(NB)_t} \right)_2 \left(\varphi_{(NB)_{v_{NB}}} \right)_1 &= -\frac{bcv_{NB} n^2}{m} \cos(nt) + \frac{cn^2}{m} \cos(nt) \\
&\quad - \frac{c^2 v_{NB} n^2}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_{NB} n^2}{m^2}
\end{aligned} \tag{159}$$

şeklinde elde edilir. (157), (158) ve (159) ifadeleri (156) ifadesinde yerine yazılırsa ve (150) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_8(x_8, y_8, z_8)$ olmak üzere, $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
& (x - x_8) \left(-cn \sin t \cos(nt) - bmP(t) \cos(nt) - b^2 v_{NB} nm \sin t \right. \\
& \quad \left. - c^2 v_{NB} mS(t) \sin(nt) + bc v_{NB} n \sin t \cos(nt) \right) \\
& + (y - y_8) \left(cn \cos t \cos(nt) - bmQ(t) \cos(nt) + b^2 v_{NB} nm \cos t \right. \\
& \quad \left. - c^2 v_{NB} mR(t) \sin(nt) - bc v_{NB} n \cos t \cos(nt) \right) \\
& + (z - z_8) \left(cnm \cos(nt) + bn \cos^2(nt) - bc v_{NB} nn \cos(nt) \right. \\
& \quad \left. - b^2 v_{NB} n - c^2 v_{NB} n \sin^2(nt) \right) = 0.
\end{aligned}$$

İspat: (149) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.4. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_{NB} parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_{NB} = \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + c^2 \sin^2(nt)}. \quad (160)$$

İspat: İlk dört bölümde açıkça ispat yapıldığından dolayı bu teoremin ispatı için (30) ifadesinde $a = 0$ yazılması yeterlidir.

Teorem 4.5.5. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_{NB}(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\psi_{NB}(t) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\
& + \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + c^2 \sin^2(nt)} \left(\frac{bn}{m} \sin t - cP(t) \right), \\
& \left. \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + c^2 \sin^2(nt)} \left(-\frac{bn}{m} \cos t - cQ(t) \right),$$

$$\frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + c^2 \sin^2(nt)} \left(-bn + \frac{cn}{m} \cos(nt) \right) \Bigg).$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_{NB}(t) = \gamma(t) + v_{NB}(t) X_{NB}(t) \quad (161)$$

olarak yazılır. (9), (146) ve (160) ifadeleri (161) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.6. $b = 0$ olması durumunda $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.5.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_9(x_9, y_9, z_9)$ olmak üzere, $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_9)(c^2 m S(t) \sin(nt) - bcn \sin t \cos(nt) + b^2 n m \sin t)$$

$$+ (y - y_9)(c^2 m R(t) \sin(nt) + bcn \cos t \cos(nt) - b^2 n m \cos t)$$

$$+ (z - z_9)(c^2 n \sin^2(nt) + bcn m \cos(nt) + b^2 n) = 0.$$

İspat: (41) ifadesinde $a = 0$ yerine yazılırsa

$$X_{NB}(t) \wedge X'_{NB}(t) = \left(\frac{c^2 n}{m} S(t) \sin(nt) - \frac{bcn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{b^2 n^2}{m} \sin t, \right.$$

$$\left. \frac{c^2 n}{m} R(t) \sin(nt) + \frac{bcn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{b^2 n^2}{m} \cos t, \right.$$

$$\left. \frac{c^2 n^2}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{bcn^2}{m} \cos(nt) + \frac{b^2 n^2}{m^2} \right). \quad (162)$$

elde edilir. (162) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.8. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_{NB}(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_{NB}(t) = -\frac{(b^2 + c^2) \cos(nt) \sin(nt)}{c^2 \sin^2(nt) + b^2}. \quad (163)$$

İspat: (4), (152) ve (162) ifadesinden $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_{NB}(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_{NB}(t) \wedge X'_{NB}(t) \rangle}{\|X'_{NB}(t)\|^2} \quad (164)$$

olarak yazılır. (10) ve (162) ifadeleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), X_{NB}(t) \wedge X'_{NB}(t) \rangle &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{c^2 n}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{c^2 n^2}{m} \sin t \sin^2(nt) - \frac{bcn^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{b^2 n^2}{m} \sin t \right) \\ &\quad + \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{c^2 n}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{c^2 n^2}{m} \cos t \sin^2(nt) + \frac{bcn^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{b^2 n^2}{m} \cos t \right) \\ &\quad + \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{c^2 n^2}{m^2} \sin^2(nt) + \frac{bcn^2}{m} \cos(nt) + \frac{b^2 n^2}{m^2} \right) \\ &= -\frac{c^2 n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt) - \frac{c^2 n^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos^2(nt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{bcn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos^3(nt) - \frac{b^2n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
& - \frac{c^2n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) - \frac{c^2n^4}{m^2} \sin^2 t \sin^3(nt) \cos(nt) \\
& + \frac{bcn^4}{m^3} \sin^2 t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{b^2n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{c^2n^2}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) + \frac{c^2n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \\
& - \frac{bcn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos^3(nt) + \frac{b^2n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
& + \frac{c^2n^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos^2(nt) - \frac{c^2n^4}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin^3(nt) \\
& + \frac{bcn^4}{m^3} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{b^2n^4}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin(nt) \\
& - \frac{c^2n^4}{m^4} \sin^3(nt) \cos(nt) - \frac{bcn^4}{m^3} \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{b^2n^4}{m^4} \sin(nt) \cos(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle \gamma'(t), X_{NB}(t) \wedge X'_{NB}(t) \rangle = -\frac{n^2}{m^2} \cos(nt) \sin(nt) (b^2 + c^2) \quad (165)$$

elde edilir. (152) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\|X'_{NB}(t)\|^2 &= \left(\frac{cn^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \cos t \right)^2 + \left(-\frac{cn^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{bn}{m} \sin t \right)^2 \\
&+ \left(-\frac{cn^2}{m} \sin(nt) \right)^2 \\
&= \frac{c^2n^4}{m^4} \sin^2 t \sin^2(nt) + \frac{2bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) + \frac{b^2n^2}{m^2} \cos^2 t + \frac{b^2n^2}{m^2} \sin^2 t
\end{aligned}$$

$$+ \frac{c^2 n^4}{m^4} \cos^2 t \sin^2(nt) - \frac{2bcn^3}{m^3} \cos t \sin t \sin(nt) - \frac{c^2 n^4}{m^2} \sin^2(nt),$$

$$\|X'_{NB}(t)\|^2 = \frac{n^2}{m^2} (b^2 + c^2 \sin^2(nt)) \quad (166)$$

bulunur. (165) ve (166) ifadeleri (164) ifadesinde yerine yazılırsa, (163) ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.5.9. $a=0$ olduğu için b ve c nin aynı anda sıfır olması mümkün değildir.

Bu yüzden $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyi açılabilir değildir.

4.6. Salkowski eğrisi ve $aT(t) + cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

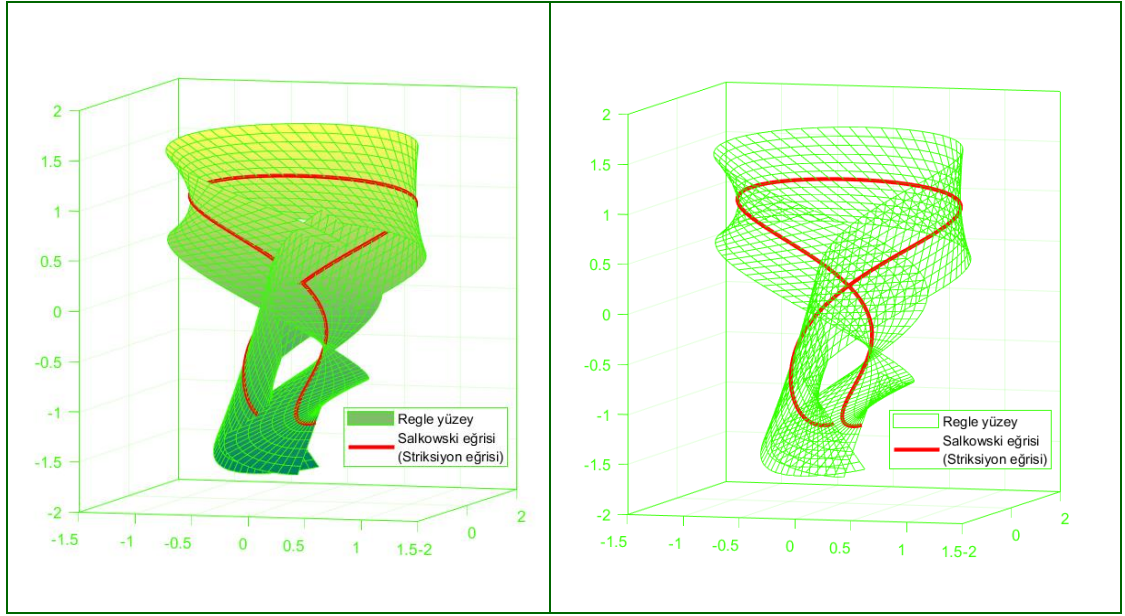
$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $b=0$ seçilirse, (14) ifadesinden

$$X_{TB}(t) = aT(t) + cB(t) = \left(-aS(t) - cP(t), -aR(t) - cQ(t), -\frac{n}{m}C(t) \right) \quad (167)$$

elde edilir. Bu vektör Salkowski eğrisinin rektifiyan düzleminde yatmaktadır.

Teorem 4.6.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin rektifiyan düzleminde yatan $aT(t) + cB(t)$ vektörü olan regle yüzey $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki gibidir, (Şekil 19):

$$\begin{aligned} \varphi_{TB}(t, v_{TB}) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\ & + v_{TB} (-aS(t) - cP(t)), \\ & \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1+2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\ & + v_{TB} (-aR(t) - cQ(t)), \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + v_{TB} \left(-\frac{n}{m}C(t) \right) \right) \end{aligned} \quad (168)$$



Şekil 19. Salkowski eğrisi ve $aT(t)+cB(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(b=0, a=c=\frac{1}{6}, m=\frac{1}{5} \text{ için} \right)$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_{TB}(t, v_{TB}) = \gamma(t) + v_{TB} X_{TB}(t) \quad (169)$$

olarak yazılır. (9) ve (167) ifadeleri (169) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.2. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_{TB}(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \eta_{TB}(t) = & -\frac{n}{m} \left(\frac{cn}{m} \sin t \cos(nt) - v_{TB} A(t) (aP(t) - cS(t)), \right. \\ & -\frac{cn}{m} \cos t \cos(nt) - v_{TB} A(t) (aQ(t) - cR(t)), \\ & \left. -cn \cos(nt) + \frac{v_{TB} n}{m} A^2(t) \right). \end{aligned} \quad (170)$$

İspat: (19) ifadesinde $b=0$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{10}(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ olmak üzere, $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & (x - x_{10}) \left(-cn \sin t \cos(nt) + v_{TB} mA(t) (aP(t) - cS(t)) \right) \\ & + (y - y_{10}) \left(cn \cos t \cos(nt) + v_{TB} mA(t) (aQ(t) - cR(t)) \right) \\ & + (z - z_{10}) \left(cnm \cos(nt) - v_{TB} nA^2(t) \right) = 0. \end{aligned}$$

İspat: (170) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.4. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_{TB} parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_{TB} = 0. \quad (171)$$

İspat: (30) ifadesinde $b = 0$ yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.5. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_{TB}(t)$ ile gösterilsin. Bu eğrinin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \psi_{TB}(t) = \frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t, \right. \\ \left. \frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t, \frac{1}{m} \cos(2nt) \right). \end{aligned}$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_{TB}(t) = \gamma(t) + v_{TB}(t) X_{TB}(t) \quad (172)$$

olarak yazılır. (9), (167) ve (171) ifadeleri (172) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.6. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.6.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{11}(x_{11}, y_{11}, z_{11})$ olmak üzere, $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemini aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_{11})m(C(t)\cos t - nA(t)\sin t) + (y - y_{11})m(C(t)\sin t + nA(t)\cos t) - (z - z_{11})nA(t) = 0.$$

İspat: (41) ifadesinde $b = 0$ yazıldığında

$$X_{TB}(t) \wedge X'_{TB}(t) = \left(\frac{n}{m} A(t)(-C(t)\cos t + nA(t)\sin t), -\frac{n}{m} A(t)(C(t)\sin t + nA(t)\cos t), \frac{n^2}{m^2} A^2(t) \right) \quad (173)$$

elde edilir. (173) ifadesi (8) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.6.8. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_{TB}(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_{TB}(t) = -\frac{c \cos(nt)}{A(t)}. \quad (174)$$

İspat: (4) ifadesinden $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_{TB}(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_{TB}(t) \wedge X'_{TB}(t) \rangle}{\|X'_{TB}(t)\|^2} \quad (175)$$

olarak yazılır. (10) ve (173) ifadeleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \gamma'(t), X_{TB}(t) \wedge X'_{TB}(t) \rangle &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{n}{m} A(t) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) \right) \\
&\quad + \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\
&\quad \cdot \left(-\frac{n}{m} A(t) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) \right) \\
&\quad - \left(\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{n^2}{m^2} A^2(t) \right) \\
&= -\frac{n^2}{m^2} A(t) \cos t \cos^2(nt) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) \\
&\quad - \frac{n^3}{m^2} A(t) \sin t \sin(nt) \cos(nt) (-C(t) \cos t + nA(t) \sin t) \\
&\quad + \frac{n^2}{m^2} A(t) \sin t \cos^2(nt) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) \\
&\quad - \frac{n^3}{m^2} A(t) \cos t \cos(nt) \sin(nt) (C(t) \sin t + nA(t) \cos t) \\
&\quad - \frac{n^4}{m^4} A^2(t) \sin(nt) \cos(nt) \\
&= \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \cos^2 t \cos^2(nt) - \frac{n^3}{m^2} A^2(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
&\quad + \frac{n^3}{m^2} A(t) C(t) \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&\quad - \frac{n^4}{m^2} A^2(t) \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{n^3}{m^2} A^2(t) \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
& - \frac{n^3}{m^2} A(t) C(t) \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) \\
& - \frac{n^4}{m^2} A^2(t) \cos^2 t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{n^4}{m^4} A^2(t) \sin(nt) \cos(nt) \\
& = \frac{n^2}{m^2} A(t) C(t) \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m^2} A^2(t) \sin(nt) \cos(nt),
\end{aligned}$$

$$\langle \gamma'(t), X_{TB}(t) \wedge X'_{TB}(t) \rangle = -\frac{n^2}{m^2} \cos(nt) (ac \cos(nt) + c^2 \sin(nt)) \quad (176)$$

elde edilir. (16) ifadesinde $b = 0$ yazılırsa,

$$X'_{TB}(t) = \left(\frac{n^2}{m^2} A(t) \sin t, -\frac{n^2}{m^2} A(t) \cos t, -\frac{n^2}{m} A(t) \right) \quad (177)$$

şeklindedir. (177) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\|X'_{TB}(t)\|^2 &= \left(\frac{n^2}{m^2} A(t) \sin t \right)^2 + \left(-\frac{n^2}{m^2} A(t) \cos t \right)^2 + \left(-\frac{n^2}{m} A(t) \right)^2 \\
&= \frac{n^4}{m^4} A^2(t) \sin^2 t + \frac{n^4}{m^4} A^2(t) \cos^2 t + \frac{n^4}{m^2} A^2(t),
\end{aligned}$$

$$\|X'_{TB}(t)\|^2 = \frac{n^2}{m^2} A^2(t) \quad (178)$$

bulunur. (176) ve (178) ifadeleri (175) ifadesinde yerine yazılırsa (174) ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.6.9. $c = 0$ olması durumunda $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyi açılabilir.

4.7.Salkowski eğrisi ve $aT(t)+bN(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t) \text{ vektöründe özel olarak } c = 0 \text{ seçilirse, (14)}$$

ifadesinden

$$X_{TN}(t) = aT(t) + bN(t) = \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t, -aR(t) - \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \quad (179)$$

elde edilir. Bu vektör Salkowski eğrisinin oskulator düzleminde yatmaktadır.

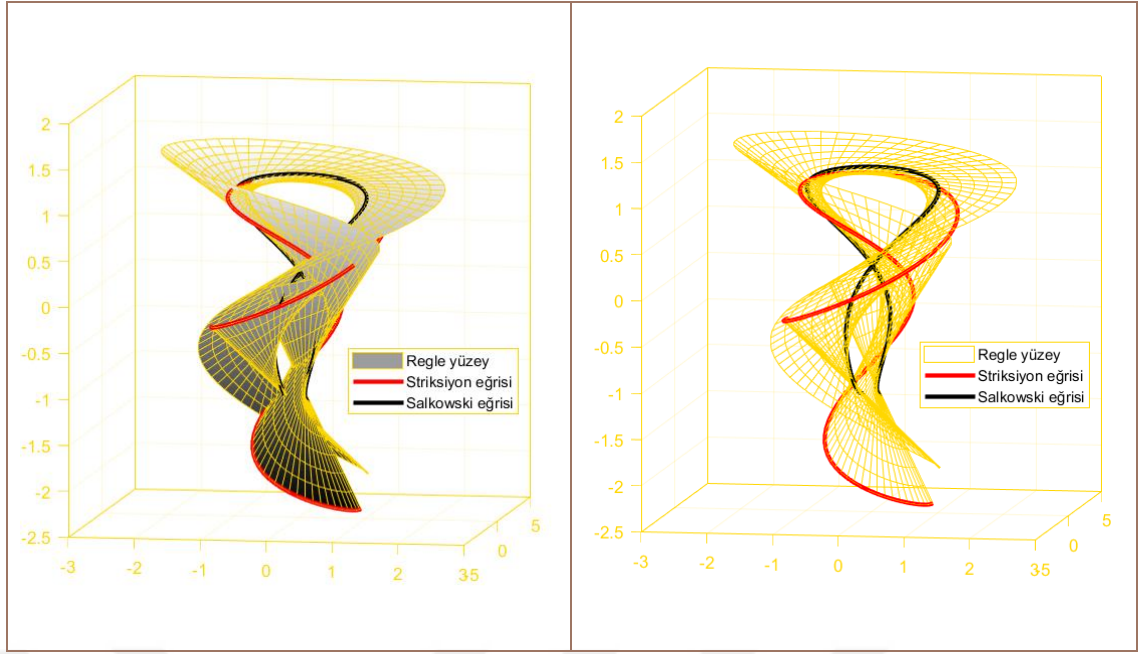
Teorem 4.7.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin oskulator düzleminde yatan $aT(t)+bN(t)$ vektörü olan regle yüzey $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki gibidir, (Şekil 20):

$$\begin{aligned} \varphi_{TN}(t, v_{TN}) = & \left(\frac{n}{m} \left(\frac{n-1}{4(1+2n)} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{4(1-2n)} \sin((1-2n)t) - \frac{1}{2} \sin t \right) \right. \\ & \left. + v_{TN} \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right), \right. \\ & \left. \frac{n}{m} \left(\frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{4(1-2n)} \cos((1-2n)t) + \frac{1}{2} \cos t \right) \right. \quad (180) \\ & \left. + v_{TN} \left(-aR(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right), \right. \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + v_{TN} \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \right). \end{aligned}$$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_{TN}(t, v_{TN}) = \gamma(t) + v_{TN} X_{TN}(t) \quad (181)$$

olarak yazılır. (9) ve (179) ifadeleri (181) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.



Şekil 20. Salkowski eğrisi ve $aT(t)+bN(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$$\left(c = 0, a = b = \frac{1}{3}, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$$

Teorem 4.7.2. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_{TN}(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \eta_{TN}(t) = & \left(-\frac{bn}{m} P(t) \cos(nt) + \frac{a^2 v_{TN} n}{m} P(t) \cos(nt) \right. \\ & - \frac{abv_{TN} n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) - \frac{b^2 v_{TN} n^2}{m} \sin t, \\ & - \frac{bn}{m} Q(t) + \frac{a^2 v_{TN} n}{m} Q(t) \cos(nt) \\ & - \frac{abv_{TN} n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{b^2 v_{TN} n^2}{m} \cos t, \\ & \left. + \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{abv_{TN} n^2}{m} \sin(nt) - \frac{a^2 v_{TN} n^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_{TN} n^2}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (182)$$

İspat: (5) ifadesinden $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin normali

$$\eta_{TN}(t) = \varphi_{(TN)_t}(t) \wedge \varphi_{(TN)_{v_{TN}}}(t) \quad (183)$$

olarak yazılır. (183) ifadesindeki $\varphi_{(TN)_t}(t)$ vektörü $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin t ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{(TN)_t}(t) = \gamma'(t) + v_{TN} X'_{TN}(t) \quad (184)$$

olarak elde edilir. (16) ifadesinde $c = 0$ yerine yazılırsa,

$$X'_{TN}(t) = \left(\frac{an^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{an^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{bn}{m} \sin t, -\frac{an^2}{m} \cos(nt) \right) \quad (185)$$

şeklindedir. (10) ve (185) ifadesi (184) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_{(TN)_t}(t) = & \left(-\frac{n}{m} S(t) \cos(nt) + \frac{av_x n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \cos t, \right. \\ & -\frac{n}{m} R(t) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \sin t, \\ & \left. -\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m} \cos(nt) \right) \quad (186) \end{aligned}$$

elde edilir. (183) ifadesindeki $\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}(t)$ vektörü $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin v_{TN} ye göre türevidir. Bu vektör

$$\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}(t) = X_{TN}(t) \quad (187)$$

olarak elde edilir. (179) ifadesi (187) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varphi_{(TN)_{vTN}}(t) = \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t, -aR(t) - \frac{bn}{m} \cos t, -\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \quad (188)$$

elde edilir. Şimdi (186) ve (188) ifadelerini vektörel çarpalım.

$$\varphi_{(TN)_i}(t) = \left(\left(\varphi_{(TN)_i} \right)_1, \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2, \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \right) \text{ ve}$$

$\varphi_{(TN)_{vTN}}(t) = \left(\left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_1, \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_2, \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_3 \right)$ olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$\begin{aligned} \varphi_{(TN)_i}(t) \wedge \varphi_{(TN)_{vTN}}(t) = & \left(\left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_3 - \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_2, \right. \\ & \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_1 - \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_3, \right. \\ & \left. \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_2 - \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_1 \right) \end{aligned} \quad (189)$$

şeklindedir. (186) ve (188) ifadelerinin bileşenleri (189) ifadesinde yerine yazılırsa, (189) ifadesinin birinci bileşeni

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_3 = & \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right. \\ & \left. - \frac{av_x n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \sin t \right) \cdot \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \\ = & \frac{an^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{an^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin^2(nt) \\ & + \frac{a^2 v_x n^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{abv_x n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) \\ & + \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) - \frac{bn^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned}$$

$$+ \frac{abv_x n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \sin t$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}} \right)_2 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m} \cos(nt) \right) \cdot \left(-aR(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} R(t) \sin(nt) \cos(nt) + \frac{a^2 v_x n^2}{m} R(t) \cos(nt) \\ &\quad + \frac{bn^3}{m^3} \cos t \cos(nt) \sin(nt) + \frac{abv_x n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}} \right)_3 - \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}} \right)_2 &= -\frac{abv_{TN} n^2}{m^2} \sin t \sin(nt) + \frac{bn^2}{m} \sin t \cos^2(nt) \\ &\quad - \frac{bn}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \\ &\quad - \frac{b^2 v_{TN} n^2}{m} \sin t - \frac{a^2 v_{TN} n^2}{m} \sin t \cos^2(nt) \\ &\quad + \frac{a^2 v_{TN} n}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \end{aligned} \tag{190}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (189) ifadesinin ikinci bileşeni

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(TN)_i} \right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}} \right)_1 &= \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{av_x n^2}{m} \cos(nt) \right) \cdot \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\ &= \frac{an^2}{m^2} S(t) \sin(nt) \cos(nt) + \frac{a^2 v_x n^2}{m} S(t) \cos(nt) \\ &\quad - \frac{bn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{abv_x n^3}{m^2} \sin t \cos(nt) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(TN)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_3 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{av_x n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \\
&= \frac{an^2}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin(nt) + \frac{an^3}{m^2} \sin t \sin^2(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{a^2 v_x n^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{abv_x n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) \\
&\quad + \frac{bn^2}{m} \cos t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{abv_x n^3}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m} \cos t
\end{aligned}$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(TN)_t}\right)_3 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_1 - \left(\varphi_{(TN)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_3 &= +\frac{a^2 v_x n^2}{m} \cos t \cos^2(nt) + \frac{b^2 v_x n^2}{m} \cos t \\
&\quad + \frac{abv_x n^2}{m^2} \cos t \sin(nt) + \frac{a^2 v_x n}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \\
&\quad - \frac{bn}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) - \frac{bn^2}{m} \cos t \cos^2(nt)
\end{aligned} \tag{191}$$

elde edilir. Son olarak (189) ifadesinin üçüncü bileşeni

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(TN)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_2 &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right. \\
&\quad \left. + \frac{av_x n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \cos t \right) \cdot \left(-aR(t) - \frac{bn}{m} \cos t \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{an}{m} \sin t \cos t \cos^3(nt) - \frac{an^2}{m} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) \\
&+ \frac{an^2}{m} \sin^2 t \sin(nt) \cos^2(nt) - \frac{an^3}{m} \sin t \sin^2(nt) \cos t \cos(nt) \\
&- \frac{a^2 v_x n^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{a^2 v_x n^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&- \frac{abv_x n}{m} \sin t \cos t \cos(nt) + \frac{abv_x n^2}{m} \cos^2 t \sin(nt) \\
&+ \frac{bn^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \sin t \sin(nt) \cos t \cos(nt) \\
&- \frac{abv_x n^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \cos^2 t
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_{(TN)_i} \right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{vTN}} \right)_1 &= \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right. \\
&\quad \left. - \frac{av_x n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) + \frac{bv_x n}{m} \sin t \right) \cdot \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right) \\
&= \frac{an}{m} \sin t \cos t \cos^3(nt) + \frac{an^2}{m} \sin^2 t \sin(nt) \cos^2(nt) \\
&\quad - \frac{an^2}{m} \cos^2 t \cos^2(nt) \sin(nt) - \frac{an^3}{m} \cos t \cos(nt) \sin t \sin^2(nt) \\
&\quad + \frac{a^2 v_x n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^2(nt) + \frac{a^2 v_x n^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt) \\
&\quad - \frac{abv_x n}{m} \sin t \cos t \cos(nt) - \frac{abv_x n^2}{m} \sin^2 t \sin(nt)
\end{aligned}$$

$$-\frac{bn^2}{m^2} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{bn^3}{m^2} \cos t \cos(nt) \sin t \sin(nt)$$

$$-\frac{abv_x n^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) + \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \sin^2 t$$

ifadelerinin farkından

$$\begin{aligned} \left(\varphi_{(TN)_t}\right)_1 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_2 - \left(\varphi_{(TN)_t}\right)_2 \left(\varphi_{(TN)_{v_{TN}}}\right)_1 &= -\frac{a^2 v_x n^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{abv_x n^2}{m} \sin(nt) \\ &+ \frac{bn^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_x n^2}{m^2} \end{aligned} \quad (192)$$

şeklinde elde edilir.(190), (191) ve (192) ifadeleri (189) ifadesinde yerine yazılırsa ve (183) ifadesi göz önünde bulundurulursa ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{12}(x_{12}, y_{12}, z_{12})$ olmak üzere, $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} &\left((x - x_{12}) \left(-bP(t) \cos(nt) - b^2 v_{TN} n \sin t + a^2 v_{TN} P(t) \cos(nt) - \frac{abv_{TN} n}{m} \sin t \sin(nt) \right) \right. \\ &+ (y - y_{12}) \left(-bQ(t) \cos(nt) + b^2 v_{TN} n \cos t + a^2 v_{TN} Q(t) \cos(nt) - \frac{abv_{TN} n}{m} \cos t \sin(nt) \right) \\ &\left. + (z - z_{12}) \left(\frac{bn}{m} \cos^2(nt) + abv_{TN} n \sin(nt) - \frac{a^2 v_{TN} n}{m} \cos^2(nt) - \frac{b^2 v_{TN} n}{m} \right) = 0. \right. \end{aligned}$$

İspat: (182) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.4. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_{TN} parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_{TN} = \frac{b \cos^2(nt)}{a^2 \cos^2(nt) + b^2}. \quad (193)$$

İspat: (30) ifadesinde $c = 0$ yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.7.5. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi $\psi_{TN}(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} \psi_{TN}(t) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1+2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\ & \left. + \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + a^2 \cos^2(nt)} \left(-aS(t) + \frac{bn}{m} \sin t \right), \right. \\ & \left. \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \right. \\ & \left. - \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + a^2 \cos^2(nt)} \left(aR(t) + \frac{bn}{m} \cos t \right), \right. \\ & \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + a^2 \cos^2(nt)} \left(-\frac{an}{m} \sin(nt) - bn \right) \right). \end{aligned}$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_{TN}(t) = \gamma(t) + v_{TN}(t) X_{TN}(t) \quad (194)$$

olarak yazılır. (9), (179) ve (193) ifadeleri (194) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.7.6. $b = 0$ olması durumunda $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.

Teorem 4.7.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{13}(x_{13}, y_{13}, z_{13})$ olmak üzere, $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} & (x - x_{13}) \left(-a^2 P(t) \cos(nt) + \frac{abn}{m} \sin t \sin(nt) + b^2 n \sin t \right) \\ & - (y - y_{13}) \cdot \left(a^2 Q(t) \cos(nt) + \frac{abn}{m} \cos t \sin(nt) + b^2 n \cos t \right) \\ & + (z - z_{13}) \cdot \left(\frac{a^2 n}{m} \cos^2(nt) - abn \sin(nt) + \frac{b^2 n}{m} \right) = 0. \end{aligned} \quad (195)$$

İspat: (41) ifadesinde $c = 0$ yazılırsa, (195) elde edilir.

Teorem 4.7.8. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_{TN}(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_{TN}(t) = -\frac{b^2 \sin(nt) \cos(nt)}{a^2 \cos^2(nt) + b^2}. \quad (196)$$

İspat: (4) ve (179) ifadesinden $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\rho_{TN}(t) = \frac{\langle \gamma'(t), X_{TN}(t) \wedge X'_{TN}(t) \rangle}{\|X'_{TN}(t)\|^2} \quad (197)$$

olarak yazılır. (10) ve (195) ifadeleri iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), X_{TN}(t) \wedge X'_{TN}(t) \rangle &= \left(-\frac{n}{m} \cos t \cos^2(nt) - \frac{n^2}{m} \sin t \sin(nt) \cos(nt) \right) \\ & \cdot \left(\frac{an}{m} \cos(nt) (-a \cos t \sin(nt) + an \sin t \cos(nt)) + \frac{bn^2}{m} \sin t \left(b + \frac{a \sin(nt)}{m} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{n}{m} \sin t \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos t \cos(nt) \sin(nt) \right) \\
& \cdot \left(-\frac{an}{m} \cos(nt) (a \sin t \sin(nt) + an \cos t \cos(nt)) - \frac{bn^2}{m} \cos t \left(b + \frac{a \sin(nt)}{m} \right) \right) \\
& + \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \right) \cdot \left(\frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^2(nt) - \frac{bn^2}{m} \left(a \sin(nt) - \frac{b}{m} \right) \right) \\
& = \frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt) - \frac{a^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^4(nt) - \frac{b^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) \\
& - \frac{abn^3}{m^3} \sin t \sin(nt) \cos t \cos^2(nt) + \frac{a^2 n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \\
& - \frac{a^2 n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos^3(nt) - \frac{b^2 n^4}{m^2} \sin^2 t \sin(nt) \cos(nt) \\
& - \frac{abn^4}{m^3} \sin^2 t \sin^2(nt) \cos(nt) + \frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^3(nt) \sin^2 t \sin(nt) \\
& + \frac{a^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^4(nt) + \frac{b^2 n^3}{m^2} \sin t \cos t \cos^2(nt) - \frac{a^2 n^4}{m^4} \sin(nt) \cos^3(nt) \\
& + \frac{abn^3}{m^3} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin(nt) - \frac{a^2 n^3}{m^2} \cos t \cos^2(nt) \sin t \sin^2(nt) \\
& - \frac{b^2 n^4}{m^2} \cos^2 t \cos(nt) \sin(nt) - \frac{abn^4}{m^3} \cos^2 t \cos(nt) \sin^2(nt) \\
& + \frac{abn^4}{m^3} \sin^2(nt) \cos(nt) - \frac{b^2 n^4}{m^4} \sin(nt) \cos(nt) - \frac{a^2 n^4}{m^2} \cos^2 t \cos^3(nt) \sin(nt)
\end{aligned}$$

$$\langle \gamma'(t), X_{TN}(t) \wedge X'_{TN}(t) \rangle = -\frac{b^2 n^2}{m^2} \sin(nt) \cos(nt) \quad (198)$$

elde edilir. (185) ifadesi kendisiyle iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\|X'_{TN}(t)\|^2 &= \frac{a^2 n^4}{m^4} \sin^2 t \cos^2(nt) + \frac{2abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) + \frac{b^2 n^2}{m^2} \cos^2 t \\ &+ \frac{a^2 n^4}{m^4} \cos^2 t \cos^2(nt) - \frac{2abn^3}{m^3} \sin t \cos t \cos(nt) \\ &+ \frac{b^2 n^2}{m^2} \sin^2 t + \frac{a^2 n^4}{m^2} \cos^2(nt).\end{aligned}$$

$$\|X'_{TN}\|^2 = \frac{b^2 n^2}{m^2} + \frac{a^2 n^2}{m^2} \cos^2(nt) \quad (199)$$

bulunur. (198) ve (199) ifadeleri (197) ifadesinde yerine yazılırsa, (196) ifadesi elde edilir.

Sonuç 4.7.9. $b = 0$ olması durumunda $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyi açılabilir.

4.8. Salkowski eğrisi ve $T(t) + N(t) + B(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler

$X(t) = aT(t) + bN(t) + cB(t)$ vektöründe özel olarak $a = b = c = 1$ seçilirse, (14) ifadesinden

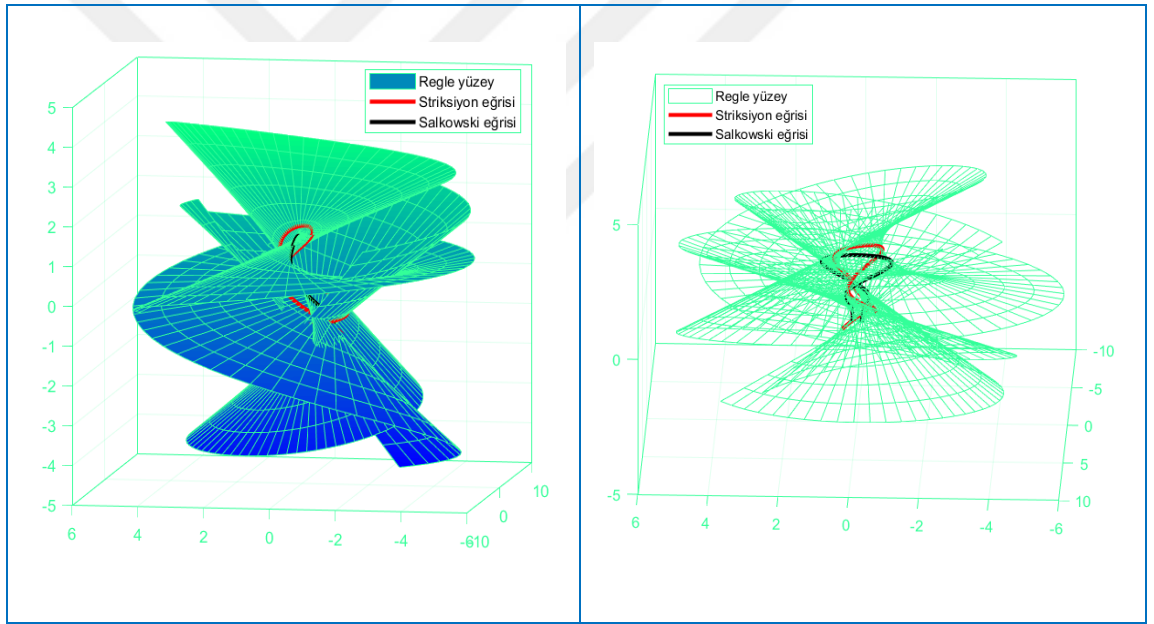
$$X_{TNB}(t) = T(t) + N(t) + B(t)$$

$$= \left(-S(t) - P(t) + \frac{n}{m} \sin t, -R(t) - Q(t) - \frac{n}{m} \cos t, \frac{n}{m} \sin(nt) + \frac{n}{m} \cos(nt) - n \right) \quad (200)$$

elde edilir.

Teorem 4.8.1. Dayanak eğrisi $\gamma(t)$ Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen $T(t) + N(t) + B(t)$ vektörü olan regle yüzey $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ ile gösterilsin. Bu yüzeyin parametrik denklemi aşağıdaki şekildedir, (Şekil 21):

$$\begin{aligned}
\varphi_{TNB}(t, v_{TNB}) = & \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\
& + v_{TNB} \left(-S(t) - P(t) + \frac{n}{m} \sin t \right), \\
& \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \\
& + v_{TNB} \left(-R(t) - Q(t) - \frac{n}{m} \cos t \right) \\
& \left. \frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + v_{TNB} \left(\frac{n}{m} \sin(nt) + \frac{n}{m} \cos(nt) - n \right) \right). \tag{201}
\end{aligned}$$



Şekil 21. Salkowski eğrisi ve $T(t)+N(t)+B(t)$ vektöründen elde edilen regle yüzeyler $\left(a = b = c = 1, m = \frac{1}{5} \text{ için} \right)$

İspat: (1) ifadesinden $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB}) = \gamma(t) + v_{TNB} X_{TNB}(t) \tag{202}$$

olarak yazılır. (9) ve (200) ifadeleri (202) ifadesinde yerine yazılırsa, ispat tamamlanır.

Teorem 4.8.2. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin normal vektörü $\eta_{TNB}(t)$ ile gösterilsin. Bu vektör aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\eta_{TNB}(t) = & \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{n}{m} P(t) \cos(nt) + \frac{v_{TNB}n}{m} \cos t (\sin^2(nt) - \cos^2(nt)) \right. \\
& - \frac{v_{TNB}n^2}{m^2} \sin t (\sin(nt) - \cos(nt)) - \frac{2v_{TNB}n^2}{m} \sin t (1 + \cos(nt) \sin(nt)), \\
& \frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) + \frac{v_{TNB}n}{m} \sin t (\sin^2(nt) - \cos^2(nt)) \\
& + \frac{v_{TNB}n^2}{m^2} \cos t (\sin(nt) - \cos(nt)) + \frac{2v_{TNB}n^2}{m} \cos t (1 + \cos(nt) \sin(nt)), \\
& \frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos(nt) + \frac{v_{TNB}n^2}{m} (\sin(nt) - \cos(nt)) \\
& \left. - \frac{2v_{TNB}n^2}{m^2} (1 + \cos(nt) \sin(nt)) \right). \tag{203}
\end{aligned}$$

İspat: (18) ifadesinde $a = b = c = 1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (203) ifadesi elde edilir.

Teorem 4.8.3. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{14}(x_{14}, y_{14}, z_{14})$ olmak üzere, $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin teğet düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
(x - x_{14}) & \left(-\frac{n^2}{m^2} \sin t \cos(nt) - \frac{n}{m} P(t) \cos(nt) + \frac{v_{TNB}n}{m} \cos t (\sin^2(nt) - \cos^2(nt)) \right. \\
& \left. - \frac{v_{TNB}n^2}{m^2} \sin t (\sin(nt) - \cos(nt)) - \frac{2v_{TNB}n^2}{m} \sin t (1 + \cos(nt) \sin(nt)) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (y - y_{14}) \left(\frac{n^2}{m^2} \cos t \cos(nt) - \frac{n}{m} Q(t) \cos(nt) + \frac{v_{TNB} n}{m} \sin t (\sin^2(nt) - \cos^2(nt)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{v_{TNB} n^2}{m^2} \cos t (\sin(nt) - \cos(nt)) + \frac{2v_{TNB} n^2}{m} \cos t (1 + \cos(nt) \sin(nt)) \right) \\
& + (z - z_{14}) \left(\frac{n^2}{m^2} \cos^2(nt) + \frac{n^2}{m} \cos(nt) + \frac{v_{TNB} n^2}{m} (\sin(nt) - \cos(nt)) \right. \\
& \quad \left. - \frac{2v_{TNB} n^2}{m^2} (1 + \cos(nt) \sin(nt)) \right) = 0.
\end{aligned}$$

İspat: (203) ifadesi (6) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.8.4. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin v_{TNB} parametresi aşağıdaki şekildedir:

$$v_{TNB} = \frac{\cos^2(nt)}{2(1 + \cos(nt) \sin(nt))}. \quad (204)$$

İspat: (21) ifadesinde $a = b = c = 1$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.8.5. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin $\psi_{TNB}(t)$ striksiyon eğrisi aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
\psi_{TNB}(t) & = \left(\frac{n}{4m} \left(\frac{n-1}{1+2n} \sin((1+2n)t) - \frac{n+1}{1-2n} \sin((1-2n)t) - 2 \sin t \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos^2(nt)}{2(1 + \cos(nt) \sin(nt))} \left(-S(t) - P(t) + \frac{n}{m} \sin t \right), \right. \\
& \quad \left. \frac{n}{4m} \left(\frac{1-n}{1+2n} \cos((1+2n)t) + \frac{n+1}{1-2n} \cos((1-2n)t) + 2 \cos t \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\cos^2(nt)}{2(1 + \cos(nt)\sin(nt))} \left(-R(t) - Q(t) - \frac{n}{m} \cos t \right),$$

$$\frac{n}{4m^2} \cos(2nt) + \frac{\cos^2(nt)}{2(1 + \cos(nt)\sin(nt))} \left(\frac{n}{m} \sin(nt) + \frac{n}{m} \cos(nt) - n \right).$$

İspat: (3) ifadesinden $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\psi_{TNB}(t) = \gamma(t) + v_{TNB}(t) X_{TNB}(t) \quad (205)$$

olarak yazılır. (9), (200) ve (204) ifadeleri (205) ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.8.6. $\cos(nt) \neq 0$ olduğundan $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi, Salkowski eğrisinden farklıdır.

Teorem 4.8.7. Düzlemin sabit noktası $M(x, y, z)$ ve değişken bir noktası $D_{15}(x_{15}, y_{15}, z_{15})$ olmak üzere, $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin asimptotik düzlem denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$(x - x_{15}) \left(S(t) \cos(nt) + 2n \sin t - P(t) \sin(nt) + \frac{n}{m} \sin t (\sin(nt) - \cos(nt)) \right)$$

$$+ (y - y_{15}) \left(R(t) \cos(nt) - 2n \cos t - Q(t) \sin(nt) + \frac{n}{m} \cos t (\cos(nt) - \sin(nt)) \right)$$

$$+ (z - z_{15}) \left(\frac{2n}{m} (1 + \cos(nt)\sin(nt)) + n (\cos(nt) - \sin(nt)) \right) = 0.$$

İspat: (41) ifadesinde $a = b = c = 1$ yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.8.8. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin dağılma parametresi $\rho_{TNB}(t)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\rho_{TNB}(t) = - \frac{\cos(nt)(2\sin(nt) + \cos(nt))}{2(\cos(nt)\sin(nt) + 1)}.$$

İspat: (45) ifadesinde $a = b = c = 1$ yazılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.8.9. $\cos(nt) \neq 0$ olduğundan $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyi açılabilir değildir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen regle yüzeyin; $\varphi_X(t, v_X)$ yüzey denklemi, η_X yüzey normali, teğet düzlem denklemi, v_X parametresi, ψ_X striksiyon eğrisi, asimptotik düzlem denklemi ve ρ_X dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu yüzey için Tablo 1’deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 1. $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyi	
v_X parametresi	$v_X = \frac{b \cos^2(nt)}{A^2(t) + b^2}$
Sonuç: $b = 0$ olması durumunda striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.	
ρ_X dağılma parametresi	$\rho_X = -\frac{\cos(nt)((b^2 + c^2)\sin(nt) + ac \cos(nt))}{A^2(t) + b^2}$
Sonuç: $b = c = 0$ olması durumunda $\varphi_X(t, v_X)$ regle yüzeyi açılabilir.	

4.2. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin teğet vektöründen elde edilen regle yüzeyin; $\varphi_T(t, v_T)$ yüzey denklemi, η_T normali, teğet düzlem denklemi, v_T parametresi, ψ_T striksiyon eğrisi, asimptotik düzlem denklemi ve ρ_T dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu yüzey için Tablo 2’deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 2. $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyi	
v_T parametresi	$v_T = 0$
Sonuç: $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışıdır.	
ρ_{x_T} dağılma parametresi	$\rho_{x_T} = 0$
Sonuç: $\varphi_T(t, v_T)$ regle yüzeyi açılabilirdir.	

4.3. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin normal vektöründen elde edilen $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin; yüzey denklemi, η_N normali, teğet düzlem denklemi, v_N parametresi, ψ_N striksiyon eğrisi ve ρ_N dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu yüzey için Tablo 3' teki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 3. $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyi	
v_N parametresi	$v_N = \cos^2(nt)$
Sonuç: $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi, Salkowski eğrisinden farklıdır.	
ρ_N dağılma parametresi	$\rho_N = -\sin(nt) \cos(nt)$
Sonuç: $\varphi_N(t, v_N)$ regle yüzeyi açılabilir değildir.	

4.4. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin binormal vektöründen elde edilen regle yüzeyin; $\varphi_B(t, v_B)$ yüzey denklemi, η_B normali, teğet düzlem denklemi, v_B parametresi, ψ_B striksiyon eğrisi, asimptotik düzlem denklemi ve ρ_B dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu yüzey için Tablo 4' teki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 4. $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyi	
v_B parametresi	$v_B = 0$
Sonuç: $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.	
ρ_B dağılma parametresi	$\rho_B = -\frac{\cos(nt)}{\sin(nt)}$
Sonuç: $\varphi_B(t, v_B)$ regle yüzeyi açılabilir değildir.	

4.5. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin rektifiyan düzleminde yatan $bN(t) + cB(t)$ vektörü olan regle yüzeyin; $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ yüzey denklemi, η_{NB} normali, teğet düzlem denklemi, v_{NB} parametresi, ψ_{NB} striksiyon eğrisi, asimptotik düzlem denklemi ve ρ_{NB} dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu regle yüzey için Tablo 5'teki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

4.6. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin teğet düzleminde yatan $aT(t) + cB(t)$ vektörü olan regle yüzeyin; $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ yüzey denklemi, η_{TB} normali, teğet düzlem denklemi, v_{TB} parametresi, ψ_{TB} striksiyon eğrisi ve ρ_{TB} dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu regle yüzey için Tablo 6'daki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 5. $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyi	
v_{NB} parametresi	$v_{NB} = \frac{b \cos^2(nt)}{b^2 + c^2 \sin^2(nt)}$
Sonuç: $b = 0$ olması durumunda striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.	
ρ_{NB} dağılma parametresi	$\rho_{NB} = -\frac{(b^2 + c^2) \cos(nt) \sin(nt)}{c^2 \sin^2(nt) + b^2}$
Sonuç: a , b ve c aynı anda sıfır olamayacağı için $\varphi_{NB}(t, v_{NB})$ regle yüzeyi açılabilir değildir.	

Tablo 6. $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyi	
v_{TB} parametresi	$v_{TB} = 0$
Sonuç: $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışır.	
ρ_{TB} dağılma parametresi	$\rho_{TB} = -\frac{\cos(nt)(c^2 \sin(nt) + ac \cos(nt))}{A^2(t)}$
Sonuç: $c = 0$ olması durumunda $\varphi_{TB}(t, v_{TB})$ regle yüzeyi açılabilirdir.	

4.7. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin oskulator düzleminde yatan $aT(t)+bN(t)$ vektörü olan regle yüzeyin; $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ yüzey denklemi, η_{TN} normali, teğet düzlem denklemi, v_{TN} parametresi, ψ_{TN} striksiyon eğrisi ve ρ_{TN} dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu regle yüzey için Tablo 7'deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 7. $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyi	
v_{TN} parametresi	$v_{TN} = \frac{b \cos^2(nt)}{a^2 \cos^2(nt) + b^2}$
Sonuç: $b = 0$ olması durumunda striksiyon eğrisi ve Salkowski eğrisi çakışıır.	
ρ_{TN} dağılma parametresi	$\rho_{TN} = -\frac{b^2 \sin(nt) \cos(nt)}{a^2 \cos^2(nt) + b^2}$
Sonuç: $b = 0$ olması durumunda $\varphi_{TN}(t, v_{TN})$ regle yüzeyi açılabiliridir.	

4.8. bölümünde dayanak eğrisi Salkowski eğrisi ve doğrultman vektörü Salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen $T(t)+N(t)+B(t)$ vektörü olan regle yüzeyin; $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ yüzey denklemi, η_{TNB} normali, teğet düzlem denklemi, v_{TNB} parametresi, ψ_{TNB} striksiyon eğrisi ve ρ_{TNB} dağılma parametresi hesaplanmıştır. Bu regle yüzey için Tablo 8' deki geometrik yorumlara ulaşılmıştır.

Tablo 8. $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyi için geometrik yorumlar

$\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyi	
v_{TNB} parametresi	$v_{TNB} = \frac{\cos^2(nt)}{2(1 + \cos(nt)\sin(nt))}$
Sonuç: $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisi, Salkowski eğrisinden farklıdır.	
ρ_{TNB} dağılma parametresi	$P_{TNB} = -\frac{\cos(nt)(2\sin(nt) + \cos(nt))}{2(\cos(nt)\sin(nt) + 1)}$
Sonuç: $\varphi_{TNB}(t, v_{TNB})$ regle yüzeyi açılabilir değildir.	

Bu tez çalışmasında, dayanak eğrisi olarak 3-boyutlu Öklid uzayında Salkowski eğrisinin ve doğrultman vektörü olarak da onun Frenet vektörlerinin lineer bileşiminden elde edilen vektörlerin alınmasıyla elde edilen regle yüzeylerin parametrik denklemleri hesaplanmış, geometrik özellikleri incelenmiş ve grafikleri çizilmiştir. Benzer çalışmalar farklı eğriler üzerinde veya farklı uzaylarda da yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Aksan, B. ve Gür Mazlum, S. (2022). On the pole indicatrix curve of the spacelike Salkowski curve with timelike principal normal in Lorentzian 3-space. *Gümüşhane üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 12(4), 1168-1179.
- Aksar, M. (2017). *Regle yüzeylerin karakterizasyonları. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Alegre, P., Arslan, K., Carriazo, A., Murathan, C. ve Öztürk G. (2010). Some special types developable ruled surface. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39(3), 319 – 325.
- Ali, A. T. (2009). Spacelike Salkowski and anti-Salkowski Curves With a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, *International Journal of Open Problems Computer Science and Mathematics*, 2(3), 451-460.
- Ali, A. T. (2011). Position vectors of general helices in Euclidean space. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 3(2), 198-205.
- Ali, A. T. (2012). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 20(1), 1–6.
- Ali, H. T., Abdel Aziz, H. S. ve Sorour, A. H. (2013). Ruled surfaces generated by some special curves in Euclidean 3-Space. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 21, 285- 294.
- Altın, M., Kazan, A. ve Karadağ, H. B. (2019). Ruled Surfaces in \mathbb{E}^3 with Density. *Honam Mathematical Journal*, 41(4), 683–695.
- Altın, M., Kazan, A. ve Karadağ, H. B. (2020). Ruled Surfaces Constructed by Planar Curves in Euclidean 3-Space with Density. *Celal Bayar University Journal of Science*, 16(1), 81–88.
- Biran, L. (1975). *Diferansiyel Geometri Dersleri*, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları, İstanbul.
- Coşanoğlu, H. ve Bayram, E. (2020). \mathbb{E}^3 te Verilen Bir Eğri Boyunca Sabit Ortalama Eğrilikli Yüzeylerin Oluşturulması. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24(3), 533-538.

- Çakmak, A. (2018). Striction Lines of Non-developable Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space. *Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(1), 219-227.
- Deshmukh, S., Alghanemi, A. ve Farouki, R. T. (2019). Space curves defined by curvature-torsion relations and associated helices. *Filomat*, 33(15), 4951-4966.
- Genç Güzel, A. (2020). *Salkowski eğrilerinin geometrik uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Gray, A., Abbena, E. ve Salamon, S. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Matbaacılık, New York.
- Gür, S. (2015). *Dual uzayda paralel equidistant regle yüzeyler. Doktora tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.*
- Gür, S. ve Şenyurt, S. (2010). Frenet Vectors and Geodesic Curvatures of Spheric Indicators of Salkowski Curves in \mathbb{E}^3 . *Hadronic Journal*, 33(5), 485–512.
- Gür Mazlum, S., Şenyurt, S. ve Bektaş, M. (2022). Salkowski curves and their modified orthogonal frames in \mathbb{E}^3 . *Journal of New Theory*, 40, 1226.
- Güven, İ. (2020). Ruled Surfaces with W-direction Curves. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 7(1), 21-33.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (1998). *Diferansiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.
- Hacısalıhoğlu, H.H. (2012). *Diferansiyel Geometri-II*, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Malatya.
- Izumiya, S. ve Takeuchi, N. (2003). Special curves and ruled surfaces. *Beitrage zur Algebra Und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry*, 44(1), 203-212.
- Izumiya, S. ve Takeuchi, N. (2004). New special curves and developable surfaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 28(2), 153-163.
- Kula, L. ve Yaylı, Y. (2005). On slant helix and spherical indicatrix. *Applied Mathematics and Computation*, 169, 600-607.
- Kula, L., Ekmekçi, N., Yaylı, Y. ve İlarslan, K. (2009). Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space. *Turkish Journal of Mathematics*, 33, 1-13.
- Monterde, J. (2009). Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 26(3), 271-278.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, California.

- Ouarab, S. ve Chahdi, A. O. (2019). Special Family of Ruled Surfaces in Euclidean 3-Space. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, 10(5), 320-327.
- Ouarab, S., Chahdı, A. O. ve Izıd, M. (2018). Ruled Surfaces with Alternative Moving Frame in Euclidean 3-Space. *International Journal of Mathematical Sciences and Engineering Applications*, 12, 43-58.
- Ouarab, S., Chahdı, A. O. ve Izıd, M. (2020). Ruled Surface Generated by a Curve Lying on a Regular Surface and its Characterizations, *Journal for Geometry and Graphics*, 24(2), 257-267.
- Öncü, İ. (2005). *Özel eğriler ve regle yüzeyler. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Önder, M. (2018). Slant ruled surfaces. *Transnational Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1(1), 63-82.
- Önder, M. ve Kaya, O. (2017). Characterizations of Slant Ruled Surfaces in the Euclidean 3-space. *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, 6(1), 31-46.
- Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel Geometri*, Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım, İzmir.
- Öztürk, B. (2019). *Salkowski eğrisi ve anti-salkowski eğrisinin Frenet vektörlerinden elde edilen Smarandache eğrileri. Yüksek Lisans tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.*
- Sabuncuoğlu, A. (2016). *Diferansiyel Geometri*, Nobel Yayınları, Ankara.
- Saçlı, G. Y. (2013). *Darboux çatılı regle yüzeylerin karakteristik özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.*
- Salkowski, E. (1909). Zur transformation von raumkurven. *Mathematische Annalen*, 66(4), 517-557.
- Sarioğlugil, A. ve Tutar, A. (2007). On Ruled Surfaces in Euclidean Space \mathbb{E}^3 . *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2(1), 1-11.
- Şenatalar, M. (1978). *Diferansiyel Geometri*, İstanbul Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi yayınları, İstanbul.
- Şenyurt, S. ve Uzun, M. (2020). Salkowski eğrisinin birim Darboux vektörünün Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrileri. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 10(3), 1966-1974.
- Şenyurt, S., Gür Mazlum, S. ve Grilli L. (2020). Gaussian curvatures of parallel ruled surfaces. *Applied Mathematical Sciences*, 14(4), 171–183.

- Şenyurt, S., Gür, S. ve Özyılmaz, E. (2015). The Frenet vectors and the geodesic curvatures of spherical indicatrix of the timelike Salkowski curve in Minkowski 3-space. *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, 7(4), 20-42.
- Tunçer, Y. ve Ekmekçi, N. (2013). A Study on Ruled Surface in Euclidean 3-Space. *Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories*, 8(1), 49-57.
- URL-1, <https://tr.mathigon.org/content/euclidean-geometry/images/euclid.jpg> . 8 Eylül 2023.
- URL-2, <https://uzayla.com/oklidin-elementleri-genel-bir-bakis/> . 8 Eylül 2023.
- URL-3, <http://sertoz.bilkent.edu.tr/depo/elemanlar-kapak.jpg/> .13 Eylül 2023.
- URL-4, <https://inovatifkimyadergisi.com/gaspard-monge/> . 9 Eylül 2023.
- URL-5, <https://tr.mathigon.org/course/circles/spheres-cones-cylinders/>. 13 Eylül 2023.
- URL-6, <https://wikimedia.org/commons/f/f0/VaticanMuseumStaircase.jpg> . 9 Eylül 2023.
- URL-7, <https://www.pxfuel.com/tr/desktop-wallpaper-sydkh/>. 13 Eylül 2023
- URL-8, <https://geometriogretimi.blogspot.com/2017/12/helis-egri-leri> . 11 Eylül 2023.
- URL-9, https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Ange_Lancret . 9 Eylül 2023.
- URL-10, https://wikimedia.org/wikipedia/commons/Barre_de_Saint-Venant.jpg . 10 Eylül 2023
- URL-11, <https://www.researchgate.net/publication/Some-slant-helices-for.png> . 10 Eylül 2023
- URL-12, <https://www.researchgate.net/publication/Salkowski-Curve.jpg> . 10 Eylül 2023.
- URL-13, <https://84f98a4904f3195787180a90b95add7738d7debb/14-Figure6-1.png> . 10 Eylül 2023
- Yaylı, Y. ve Saraçoğlu, S. (2012). Different approaches to ruled surfaces. *SDU Journal of Science*, 7(1), 56-68.
- Yıldız, Ö. G., Akyiğit, M. ve Tosun, M. (2021). On the trajectory ruled surfaces of framed base curves in the Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(9), 7463-7470.
- Yu, Y., Liu, H. ve Jung, S. D. (2014). Structure and characterization of ruled surfaces in Euclidean 3-space. *Applied Mathematics and Computation*, 233, 252-259.
- Yüce, S. (2020). *Diferansiyel Geometri*, Pegem Akademi Yayıncılık, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Eğitim hayatının ilk ve ortaöğretim yıllarını Mersin Tece İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise Mersin Davultepe Lisesi'nde tamamladı. 2020 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümünden mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği ana bilim dalında yüksek lisansa hak kazandı. Trabzon Belediyesine ve Halk eğitime bağlı olan Destekleme ve Yetiştirme kursunda matematik dersleri vermektedir.

Akademik Çalışmaları

Çakıl, E., ve Gür Mazlum, S. (2023). Ruled Surfaces Generated by Salkowski Curve and Its Frenet Vectors, 4th International Azerbaijan Congress on Life, Engineering, and Applied Sciences, September 15-18, Baku, Azerbaijan.