BELİRLİ BİR SINIFTAKİ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN SINIRDA SCHWARZ LEMMASI

Hande ALTINAY
21 14 09 101

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı
Danışman: Doç. Dr. Tuğba AKYEL

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Eylül, 2023

BELİRLİ BİR SINIFTAKİ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN SINIRDA SCHWARZ LEMMASI

Hande ALTINAY
21 14 09 101
ORCID: 0009-0008-6831-6710

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı
Danışman: Doç. Dr. Tuğba AKYEL

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Eylül, 2023

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulu tarafından 19.01.2021 tarihli "Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge" ile bildirilen 6698 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.

ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulu tarafından 19.01.2021 tarihli "Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge" ile bildirilen 6698 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım tez danışmanım sayın Doç. Dr. Tuğba AKYEL'e teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Değerli önerileriyle tezimize katkıda bulunan sayın Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK hocamıza çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen canım anneme, babama ve kardeşime, çalışmalarım sırasında yanımda olan sevgili eşime ve biricik kızıma, bana her anlamda yardımcı olan kayınvalideme teşekkür ediyorum.

Hande ALTINAY

Eylül, 2023

ÖZET

BELİRLİ BİR SINIFTAKİ ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN SINIRDA SCHWARZ LEMMASI

Hande Altınay
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı Adı
Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı
Danışman: Doç. Dr. Tuğba Akyel
Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 2023

Bu tez çalışmasında, genel olarak, birim dairede analitik, sınırlı fonksiyonların sınır davranışları incelenmiş olup, Sınırda Schwarz Lemması'nın farklı versiyonları ele alınmıştır. Tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır ve bu bölümde genel bir literatür bilgisi verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçları anlaşılır kılmak için konuya ait temel tanımlar, teoremler ve sonuçlar sunulmuştur. İkinci bölümde ise birim dairede analitik ve belirli bir sınıfa ait olan fonksiyonlar için elde ettiğimiz yeni sonuçlara yer verilmiştir. Bu bölümde, ilk olarak, bu sınıfa ait fonksiyonlar için Schwarz Lemması'nın özel bir hali elde edilmiştir. Daha sonra birim dairenin sınır noktasında, ele alınan sınıfa ait olan fonksiyonun üzerine açısal limitin mevcutluğu koşulu konulmuştur ve sınırda açısal türevin modülünün aşağıdan değerlendirildiği eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu bölümde yer alan teoremlerde, fonksiyonun sıfırları hakkındaki farklı durumlar ayrı ayrı incelenmiştir ve elde edilen bazı eşitsizliklerin kesinliği de ispatlanmıştır. Son bölüm olan üçüncü bölümde, incelediğimiz sınıfa ait fonksiyon örnekleri yer almaktadır.

Anahtar Sözcükler: Analitik Fonksiyon, Açısal Türev, Sınırda Schwarz Lemması, $\lambda-$spirallike Fonksiyon.

ABSTRACT

BOUNDARY SCHWARZ LEMMA FOR A CERTAIN CLASS OF ANALYTIC FUNCTIONS

Hande Altınay
Master Thesis
Department of Mathematics
Master of Science in Mathematics with Thesis
Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Tuğba Akyel
Maltepe University Graduate School, 2023

In general, in this thesis, the boundary behavior of analytic, bounded functions in the unit disc is examined, and different versions of the Boundary Schwarz Lemma are discussed. This thesis includes three main sections. The first section is the introduction and in this section, a general knowledge of the literature is given. Also, basic definitions, theorems, and corollaries are presented to make the obtained results more clear. In the second section, new results are mentioned for a certain class of analytic functions in the unit disc. In this section, a version of Schwarz Lemma is obtained for the functions belonging to that class. Next, on the boundary point of the unit disc, the existence of the angular limit of the function belonging to the class discussed is considered and the inequalities which are estimated from below the modulus of the angular derivative are obtained on the boundary. In the theorems in this section, different cases about the zeroes of the function are examined separately and the sharpness of some of the obtained inequalities is proved. In the third section, which is the last section, the examples of the functions belonging to the examined class are given.

Keywords: Analytic Function, Angular Derivative, Boundary Schwarz Lemma, λ −spirallike Function.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
$\overline{\mathbb{C}}$	Genişletilmiş Kompleks Düzlem
$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{z}: \lvert\boldsymbol{z}\rvert < \mathbf{1}\}$	Birim Daire
$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\partial D} = \{\boldsymbol{z}: \lvert\boldsymbol{z}\rvert = \mathbf{1}\}$	Birim Dairenin Sınırı
$\boldsymbol{S}^{\lambda}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha})$	$p - değerli\ (p - valent)\ \lambda -$*spirallike* Fonksiyon
Δ	Stolz Açısı

1. GİRİŞ

1.1 Problem

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem, $D = \{z: |z| < 1\}$ birim daire ve $T = \partial D = \{z: |z| = 1\}$ birim dairenin sınırı olsun. Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinin temel teoremlerinden birisi maksimum modül ilkesidir. Günümüzdeki ifadesi Constantin Caratheodory tarafından yazılan Schwarz Lemması maksimum modül ilkesinin önemli bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır. Analizin birçok alanının gelişmesinde kaynak olarak kullanılan Schwarz Lemması aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

Lemma 1.1 (Schwarz Lemması): D bölgesinde tanımlı analitik bir f fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1, |z| < 1$ olsun. Bu takdirde

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in D \tag{1.1}$$

ve

$$|f'(0)| \leq 1 \tag{1.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerde (birinci eşitsizlikte herhangi bir $z \neq 0$ noktası için) eşitlik durumu yalnızca $|\lambda| = 1$ olmak üzere $f(z) = \lambda z$ olduğunda mümkündür (Markushevich, 1965; Ahlfors, 1979; Dineen, 1989).

Bu lemma, f fonksiyonu rotasyon (dönme) değilse her bir $|z| \leq r < 1$ dairesinin kesin olarak daha küçük bir daireye tasvir edildiğini ifade etmektedir. Ayrıca lemmanın ifadesinden de anlaşıldığı üzere Schwarz Lemması, sıfırı sıfıra götüren, birim daire üzerinde tanımlı ve değerleri de birim dairede olan analitik fonksiyonların aldığı değerler üzerine kestirimler veren önemli bir sonuçtur (Shoikhet vd., 2014; Krantz, 2011). Birçok önemli teoremin ispatında Schwarz Lemması'nın etkisi görülmektedir. Bu teoremlerden birisi, sınırlı tam (tüm kompleks düzlemde analitik) fonksiyonun sabit olduğu sonucunu veren Liouville Teoremi'dir (Boas, 2010).

Tanım 1.2 (Möbius Dönüşümü): Birim dairenin kendi kendisine konform tasvirleri, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere

$$\mu(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \qquad |z| < 1 \tag{1.3}$$

şeklindeki kesir lineer dönüşümlerdir. (1.3) dönüşümüne Möbius Dönüşümü denir.

Tanım 1.3 (Pseudo-Hiperbolik Mesafe): $z, w \in D$ için

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|$$

şeklinde tanımlanan ifadeye z ve w arasında Psedo-Hiperbolik Mesafe denir.

Schwarz Lemması'nın ilk genellemesi Schwarz-Pick Lemması'dır. Bu genelleme Schwarz Lemması'ndaki $f(0) = 0$ koşulunun kaldırabileceğini göstermektedir.

Lemma 1.4 (Schwarz-Pick Lemması): D dairesinde tanımlı olan analitik f fonksiyonu için $|f(z)| < 1, |z| < 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|, z \neq z_0 \tag{1.4}$$

ve

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \tag{1.5}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (1.4) ve (1.5) eşitsizliklerinde eşitlik durumları f fonksiyonunun birim dairenin kendi kendine konform tasviri olması durumunda mümkündür (Ahlfors, 1979).

Tanım 1.3 dikkate alınırsa Schwarz–Pick Lemması

$$\rho(z, w) \geq \rho(f(z), f(w))$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Schwarz-Pick Lemması geometrik fonksiyonlar teorisinin ileri gitmesinde önemli bir rol oynamıştır (Golusin, 1966; Beardon ve Carne, 1992; Mercer, 1997, 2006; Osserman, 1999a, 1999b; Beardon ve Minda, 2004; Krantz, 2006; Boas, 2010).

Schwarz Lemması'nın uygulama alanı çok geniş olduğundan çalışmalar sınıra da taşınmıştır. Aşağıdaki lemma Schwarz Lemması'nın sınır versiyonu olarak bilinmektedir. Bu lemmada, temel olarak, Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlayan f fonksiyonunun türevinin modülü, birim dairenin $|f(c)| = 1$ koşulunun sağlandığı sınır noktalarında aşağıdan değerlendirilmektedir (Dubinin, 2004, 2015; Mateljevic, 2006; Jeong, 2011, 2014; Mercer, 2018; Mateljevic vd., 2022).

Lemma 1.5 (Sınırda Schwarz Lemması): f fonksiyonu D dairesinde analitik, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1, |z| < 1$ olsun. Ayrıca varsayalım ki f fonksiyonunun $c \in T$ noktasına sürekli devamı mümkündür; $|f(c)| = 1$ ve $f'(c)$ mevcuttur. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \tag{1.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (1.6) eşitsizliğinde eşitlik hali $(c = 1)$ olduğunda

$$f(z) = z\,\frac{z + a}{1 + az}\,, \quad 0 \leq a < 1$$

fonksiyonu için gerçeklenir (Osserman, 2000).

(1.6) eşitsizliği V.N. Dubinin tarafından kuvvetlendirilmiştir (Dubinin, 2004).

Sonuç 1.6: Teorem 1.5'in koşulları sağlansın. O halde

$$|f'(c)| \geq 1 \tag{1.7}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.7) eşitsizliğinde eşitlik hali $f(z) = e^{i\alpha}z \ (\alpha - reel)$ olduğunda mümkündür (Osserman, 2000).

(1.7) eşitsizliğinin geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli uygulamaları mevcuttur. Lemma 1.5'in koşullarına ilaveten, f fonksiyonunun D dairesinde yer alan sıfırdan farklı

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ noktalarında da sıfıra dönüştüğü varsayılırsa (1.7) eşitsizliğinden daha kesin bir eşitsizlik olan

$$|f'(c)| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{|c-z_k|^2}$$

eşitsizliğine ulaşılır (Caratheodory, 1954).

Lemma 1.7: f fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlasın. O halde

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|}, \quad |z| < 1 \tag{1.8}$$

eşitsizliği sağlanır.

(1.8) eşitsizliği Schwarz-Pick Lemması kullanılarak elde edilmektedir. Gerçekten, (1.4) eşitsizliğinde $z_0 = 0$ alalım. Bu takdirde (1.4) eşitsizliği

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leq |z|$$

formuna dönüşür. Son eşitsizliğin gerekli düzenlemelerle

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |f(0)||z|} \tag{1.9}$$

eşitsizliğine denk olduğu görülür. Şimdi Lemma 1.7'nin koşullarını göz önüne alalım ve $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ fonksiyonunu dahil edelim. (1.9) eşitsizliği $g(z)$ fonksiyonu için yazılırsa

$$|g(z)| \leq \frac{|z| + |g(0)|}{1 + |g(0)||z|}$$

olur ve $|g(0)| = |f'(0)|$ olduğundan

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |f'(0)||z|}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi (1.6) ve (1.7) eşitsizliklerinin nasıl elde edildiğini inceleyelim. Lemma 1.7 (1.6) eşitsizliğinin ispatında önemli bir rol oynamaktadır. f'nin Lemma 1.5'in koşullarını sağladığını varsayalım. Herhangi $b, c \in T$ için

$$\left|\frac{f(z) - b}{|z| - |c|}\right| \geq \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|}$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. (1.8) eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geq \frac{1 + |z|}{1 + |f'(0)||z|}$$

elde edilir ve buradan da $|z| \to 1$ koşulunda limite geçilirse

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca f'nin Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığı göz önüne alınırsa $|f'(0)| \leq 1$ ve buradan da

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \geq 1,$$

yani $|f'(c)| \geq 1$ elde edilir (Osserman, 2000).

$f(0) = 0$ koşulu kaldırılırsa Sınırda Schwarz Lemması'nın aşağıdaki genellemesi alınır.

Lemma 1.8: f fonksiyonu D dairesinde analitik, $|f(z)| < 1,\ |z| < 1$ olsun. Varsayalım ki f fonksiyonunun bir $c \in T$ noktasına sürekli devamı mümkündür; $|f(c)| = 1$ ve $f'(c)$ mevcuttur. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |F'(0)|} \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} \tag{1.10}$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $F(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$ şeklindedir (Osserman, 2000).

(1.9) ve (1.10) eşitsizliklerinden daha güçlü eşitsizlikler de mevcuttur. $f(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlasın ve $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$ olsun. O halde

$|z| < 1$ için $|f(z)| \leq |z|^p$ ve $|a_p| \leq 1$ eşitsizlikleri doğrudur. Bu eşitsizliklerde eşitlik elde etmek için gerek ve yeter koşul

$$f(z) = \lambda z^p, \qquad |\lambda| = 1 \tag{1.11}$$

olmasıdır.

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \cdots \tag{1.12}$$

formundaki f fonksiyonu için (1.8) eşitsizliğinin daha kuvvetli formu

$$|f(z)| \leq |z^p| \frac{|z| + |a_p|}{1 + |a_p||z|} \tag{1.13}$$

eşitsizliğidir. (1.12)'deki fonksiyonun üzerine $|f(c)| = 1$ olmak üzere $c \in T$ noktasına sürekli devam ve de $f'(c)$ mevcutluğu koşulları konulursa

$$|f'(c)| \geq p + \frac{1 - |a_p|}{1 + |a_p|}$$

ve dolayısıyla

$$|f'(c)| \geq p$$

eşitsizlikleri elde edilir. Eşitlik hali yine (1.11)'deki fonksiyon için mümkündür (Osserman, 2000).

Bunların yanında farklı tipteki sınır Schwarz lemmaları ve yukarıda verilenlerle ilişkili sonuçlar için (Caratheodory, 1954; Polya ve Szegö, 1972; Pommerenke, 1992; Burns ve Krantz, 1994) referansları da önemli kaynaklardır.

Daha sonraki çalışmalarda Lemma 1.5'in koşulunda yer alan f fonksiyonunun $c \in T$ noktasına sürekli devamı koşulu yerine, bu koşuldan daha genel olan $c \in T$ noktasında açısal limitin mevcutluğu koşulu konularak, incelenen fonksiyonun açısal türevinin aşağıdan değerlendirildiği sonuçlar elde edilmiştir (Caratheodory, 1954; Örnek, 2013; Akyel ve Örnek, 2016, 2017; Akyel, 2021; Akyel, 2022). Ayrıca son yıllarda mühendislik alanlarında da Sınırda Schwarz Lemması'nın uygulamalarını içeren çalışmalar yapılmaktadır (Örnek ve Düzenli, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b; Kursun vd., 2018; Örnek vd., 2022a, 2022b).

Tezdeki sonuçlarımızda da açısal limit ve açısal türev kullanılmaktadır. O halde açısal limit ve açısal türevin tanımları ile tez sonuçlarımızı elde ederken kullandığımız tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 1.9: $c \in T$ noktası için

$$\Delta = \{z \in D \colon |arg(1-\bar{c}z)| < \alpha,\ \ |z-c| < \rho\}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2cos\alpha\right)$$

kümesine Stolz Açısı denir. $f\colon D \to \bar{\mathbb{C}}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $z \in \Delta$ noktası c noktasındaki herhangi Stolz açısının içinde c noktasına yaklaştığında $f(z)$ fonksiyonu da a sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonu $c \in T$ noktasında a açısal limitine sahiptir denir. Δ açısının genişliği olan 2α sayısı π'den küçük herhangi bir sayı olabilir.

Tanım 1.10: $f\colon D \to D$ fonksiyonu c noktasında a açısal limitine sahip olsun. Eğer c noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$\lim_{\zeta \to c, c \in \Delta} \frac{f(\zeta)-a}{\zeta - c} = \beta$$

olacak şekilde β sayısı mevcut ise β'ya f fonksiyonunun c noktasında açısal türevi denir ve $f'(c)$ ile işaretlenir (Pommerenke, 1992).

Lemma 1.11 (Julia-Wolff): $\varphi\colon D \to D$ fonksiyonu $c \in T$ noktasında $\varphi(c) \in T$ açısal limitine sahip olsun. Bu takdirde $\varphi'(c)$ açısal türevi mevcuttur ve $1 \leq |\varphi'(c)| \leq \infty$'dir (Pommerenke, 1992).

Tanım 1.12 (Blaschke Çarpımı): $z_1, z_2, \dots, z_{k,}\ |z_m| < 1, m = 1,2,\dots,k$ olmak üzere

$$B(z) = z^n \prod_{m=1}^{k} \frac{z_m - z}{1 - \overline{z_m} z}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Sonlu Blaschke Çarpımı denir. Burada n negatif olmayan bir tam sayıdır. $B(z)$ fonksiyonu birim daireyi kendisine tasvir eden analitik bir fonksiyondur. Ayrıca $|z| = 1$ için $|B(z)| = 1$ eşitliği sağlanır. Burada z_m'lerin bazıları tekrar edebilir. Örneğin, eğer z_m p kez tekrar ediyorsa $B(z)$ fonksiyonunun z_m noktasında $p.$ mertebeden sıfırı vardır denir. Blaschke çarpımı sınırlı analitik fonksiyonun çarpım şeklindeki gösterimini ifade etmektedir. Blaschke çarpımı sonsuz çarpım şeklinde de tanımlanabilmektedir. Tezde sonlu Blaschke çarpımı kullanıldığı için sonsuz Blaschke çarpımına değinilmemiştir (Markushevich, 1965; Collingwood ve Lohwater, 1966; Nevalinna, 1970).

Teorem 1.13: f $(f \neq 0)$, 0 merkezli kapalı bir daireyi kendisine tasvir eden analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Ayrıca $|f|$ maksimum değerini 0 merkezli kapalı diskin α sınır noktasında alsın. O halde $\alpha f'(\alpha)/f(\alpha)$ oranı 1'den küçük veya eşit bir reel sayıdır (Polya ve Szegö, 1972).

Şimdi problemimizin temel materyali olan α mertebeden $p-değerli$ $\lambda-spirallike$ fonksiyonlar sınıfının tanımını verelim.

p pozitif tam sayı olsun. $\mathcal{A}$ ile birim dairede analitik olan

$$g(z) = z^p + b_{p+1}z^{p+1} + b_{p+2}z^{p+2} + \cdots = z^p + \sum_{k=1}^{\infty} b_{p+k}z^{p+k}$$

şeklindeki fonksiyonları içeren sınıfı işaretleyelim. $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| \leq |z|$, $z \in D$ koşullarını sağlayan, birim dairede analitik olan, sınırlı $\varphi(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfı da $\mathcal{M}$ ile gösterelim.

Tanım 1.14: $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ için

$$Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right)\right] > 0, \qquad z \in D$$

veya

$$Re\left(e^{i\lambda}\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > \alpha cos\lambda\,, \qquad z \in D$$

eşitsizliğini sağlayan $g(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna α $(0 \leq \alpha < p)$ mertebeden $p - değerli$ $(p - valent)$ $\lambda -spirallike$ fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $S^{\lambda}(p, \alpha)$ ile gösterilir (Patil ve Thakare, 1979; Aouf, 1987).

Birim dairede analitik olan, $P(0) = p$ ve $ReP(z) > \alpha$ $(0 \leq \alpha < p)$ koşullarını sağlayan

$$P(z) = p + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

şeklindeki fonksiyonları içeren sınıf $P(p, \alpha)$ olsun.

Lemma 1.15: $P \in P(p, \alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$P(z) = \frac{p - (p - 2\alpha)\varphi(z)}{1 + \varphi(z)}$$

olmasıdır. Burada $\varphi(z) = z\phi(z)$ ve $|\phi(z)| \leq 1, |z| < 1$ (Patil ve Thakare, 1979).

Aşağıdaki lemma $S^{\lambda}(p, \alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlar ile $P(p, \alpha)$ sınıfındaki fonksiyonların arasındaki ilişkiyi ifade etmektedir.

Lemma 1.16: $g \in S^{\lambda}(p, \alpha)$ olsun. Bu takdirde

$$e^{i\lambda} sec\lambda \frac{zg'(z)}{g(z)} - iptan\lambda = \frac{p - (p - 2\alpha)\varphi(z)}{1 + \varphi(z)} \tag{1.14}$$

eşitliği sağlanır (Patil ve Thakare, 1979).

İspat: $g \in S^{\lambda}(p, \alpha)$ olsun.

$$\phi(z) = \frac{e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) - ipsin\lambda}{cos\lambda}$$

fonksiyonunu dahil edelim. Açıktır ki $\phi(0) = p$’dir ve

$$Re\phi(z) = Re\left[\frac{e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) - ipsin\lambda}{cos\lambda}\right] = \frac{1}{cos\lambda} Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)\right] > \alpha$$

doğrudur. O halde g fonksiyonunun α mertebeden $\lambda -spirallike$ fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul

$$e^{i\lambda}\frac{zg'(z)}{g(z)} = cos\lambda\, P(z) + ipsin\lambda$$

olacak şekilde bir $P \in P(p,\alpha)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Bu takdirde Lemma 1.15 ile (1.14) eşitliği elde edilir.

Çalışmamızda, birçok önemli alanda etkinliği olan $\frac{zg'(z)}{g(z)}$ fonksiyonunu kullanıyoruz. Burada $g(z)$ yukarıda tanımını verdiğimiz $S^{\lambda}(p,\alpha)$ sınıfına ait olan analitik bir fonksiyondur. Temel kaynak olarak, sırasıyla, Schwarz Lemması ve Sınırda Schwarz Lemması'nı alarak, $g(z)$ fonksiyonunun b_{p+1} katsayısı yukarıdan değerlendirilecektir ve $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha,p)$ olmak üzere birim dairenin sınır noktasında $\frac{zg'(z)}{g(z)}$ fonksiyonunun açısal türevinin modülünün aşağıdan değerlendirilmesi neticesinde yeni eşitsizlikler elde edilecektir. Başka bir değişle, $S^{\lambda}(p,\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için Sınırda Schwarz Lemması'nın sınıfa uygun versiyonlarını yazmayı hedefliyoruz. Bu kestirimlerde $g(z)$ fonksiyonu için genel hal, $g(z)-z^p$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırı olmaması durumu ve de $g(z)-z^p$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırlarının da olması durumu göz önüne alınacaktır. Elde edeceğimiz teoremlerimizde, $g(z) \in S^{\lambda}(p,\alpha)$ fonksiyonunun açısal limite sahip olması koşulu mevcut olacaktır. Burada Julia-Wolff Lemması açısal limitin mevcutluğu koşulu altında açısal türevin varlığını garanti etmektedir. Ayrıca elde edeceğimiz kestirimlerin kesinliklerini de incelemeyi ve çalıştığımız sınıfa ait fonksiyon örnekleri vermeyi planlıyoruz.

1.2 Amaç

Bu çalışmanın amacı birim dairede analitik olan fonksiyonların yeni bir sınıfında fonksiyonun Taylor açılımındaki ikinci katsayı için bir üst sınır tanımlamaktır. Ayrıca bu yeni sınıfa ait $g(z)$ fonksiyonu için birim dairenin sınır noktasında açısal limitin mevcutluğu koşulu altında $\frac{zg'(z)}{g(z)}$ oranının açısal türevinin modülü için aşağıdan değerlendirmeler elde etmektir.

1.3 Önem

Kompleks analizin temel taşlarından olan Schwarz Lemması'nın uygulanabilirlik alanı çok geniş olduğundan bu konu her zaman araştırmacıların dikkat merkezinde olmuştur. Son yıllarda uygulama alanında da Schwarz Lemması ile ilgili çok önemli sonuçlar elde edilmiştir (Örnek ve Düzenli, 2018a, 2018b, 2019a, 2019b; Kursun vd., 2018; Örnek vd., 2022a, 2022b). Bu bağlamda çalışmada elde edilen sonuçlar Schwarz Lemması ile ilgili çalışmalara katkı sağlaması ve de yeni uygulama alanlarına yol gösterici olması açısından önem taşımaktadır.

1.4 Varsayımlar

Tezdeki hedef $\frac{zg'(z)}{g(z)}$ fonksiyonunun açısal türevi üzerinde çalışmaktır. Açısal türevden bahsedebilmek için incelenecek olan sınıfa ait $g(z)$ fonksiyonunun açısal limitinin mevcut olduğu varsayılacaktır. Böylelikle Julia-Wolff Lemma olarak isimlendirilen yardımcı teorem sayesinde açısal türevin mevcutluğu garanti edilecektir. $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$'dan farklı sıfırlarının olması ve olmaması varsayımları ayrı ayrı ele alınacak ve birbirleri ile kıyaslanabilen eşitsizlikler elde edilecektir.

1.5 Sınırlıklar

Tez çalışması kapsamında, ikincil kaynaklardan istifade edilmek suretiyle, konuya ilişkin basılı eserler, teorik çerçeveye ilişkin kitaplar, akademik tezler ve makaleler kullanılmaktadır.

2. TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde $g(z) \in S^{\lambda}(p,\alpha)$ olmak üzere $\frac{zg'(z)}{g(z)}$ fonksiyonunun birim çember üzerindeki bir c noktasında açısal türevinin modülünün aşağıdan değerlendirildiği eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 1.16'dan

$$e^{i\lambda} sec\,\lambda \frac{zg'(z)}{g(z)} - iptan\lambda = \frac{p-(p-2\alpha)\varphi(z)}{1+\varphi(z)}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan, temel işlemlerle $h(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)}$ olmak üzere

$$\varphi(z) = e^{i\lambda}\frac{p-h(z)}{e^{i\lambda}h(z)+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda} \tag{2.1}$$

elde edilir. Açıktır ki $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. O halde $|\varphi'(0)| \leq 1$'dir. Bu durumda

$$h(z) = \frac{p+(p+1)b_{p+1}z+(p+2)b_{p+2}z^2+\cdots}{1+b_{p+1}z+b_{p+2}z^2+\cdots},$$

$$\varphi(z) = e^{i\lambda}\frac{\left[p-p-b_{p+1}z-\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]}{e^{i\lambda}\left[p+b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda}$$

$$= -e^{i\lambda}\frac{b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots}{e^{i\lambda}\left[p+b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda},$$

$$\frac{\varphi(z)}{z} = -e^{i\lambda}\frac{b_{p+1}+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z+\cdots}{e^{i\lambda}\left[p+b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda},$$

$$|\varphi'(0)| = \frac{\left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda} \leq 1$$

ve buradan da

$$|b_{p+1}| \leq 2(p-\alpha)cos\lambda \tag{2.2}$$

sonucuna ulaşılır. (2.2) eşitsizliği kesindir. Gerçekten

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

olsun. Bu takdirde

$$z^p + b_{p+1}z^{p+1} + b_{p+2}z^{p+2} + \cdots = \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}},$$

$$1 + b_{p+1}z + b_{p+2}z^2 + \cdots = \frac{1}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}},$$

$$b_{p+1}z + b_{p+2}z^2 + \cdots = \frac{1-(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}},$$

$$b_{p+1} + b_{p+2}z + \cdots = \frac{1-(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}{z(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

alınır. Sonuncu eşitlikte $z \to 0$ koşulunda limite geçersek

$$|b_{p+1}| = 2(p-\alpha)cos\lambda \tag{2.3}$$

bulunur. Böylelikle aşağıdaki lemmayı ispatlamış olduk.

Lemma 2.1: $g(z) \in S^\lambda(\alpha,p)$ olsun. Bu takdirde $|b_{p+1}| \leq 2(p-\alpha)cos\lambda$ elde edilir; öyle ki (2.2) ilişkisinde

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

Teorem 2.2: $g(z) \in S^\lambda(\alpha,p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ip\sin\lambda + 2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right| \geq \frac{(p-\alpha)\cos\lambda}{2} \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4) ilişkisinde

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}} \tag{2.5}$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olduğundan

$$\varphi(z) = e^{i\lambda}\frac{p-h(z)}{e^{i\lambda}h(z)+pe^{-i\lambda}-2\alpha\cos\lambda}, \qquad h(z) = \frac{zg(z)}{g'(z)}$$

yazabiliriz. $\varphi(z)$ fonksiyonu $|\varphi(z)| < 1, |z| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ koşullarını sağlamaktadır. $c \in T$ noktası ve $h(c) = \frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ip\sin\lambda+2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ için

$$|\varphi(c)| = \left|e^{i\lambda}\frac{p-h(c)}{e^{i\lambda}h(c)+pe^{-i\lambda}-2\alpha\cos\lambda}\right|$$

$$= \left|e^{i\lambda}\frac{p-\frac{2ip\sin\lambda+2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}}{e^{i\lambda}\frac{2ip\sin\lambda+2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}+pe^{-i\lambda}-2\alpha\cos\lambda}\right|$$

$$= \left|e^{i\lambda}\frac{\frac{2pe^{i\lambda}-2ip\sin\lambda-2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}}{ip\sin\lambda+\alpha\cos\lambda+pe^{-i\lambda}-2\alpha\cos\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{pe^{i\lambda}-ip\sin\lambda-\alpha\cos\lambda}{ip\sin\lambda+\alpha\cos\lambda+pe^{-i\lambda}-2\alpha\cos\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{p\cos\lambda+ip\sin\lambda-ip\sin\lambda-\alpha\cos\lambda}{ip\sin\lambda-\alpha\cos\lambda+p\cos\lambda-ip\sin\lambda}\right|$$

$$= \left|\frac{(p-\alpha)\cos\lambda}{(p-\alpha)\cos\lambda}\right| = 1$$

eşitliği sağlanır. Böylelikle φ fonksiyonunun Sonuç 1.6'nın koşullarını sağladığı görülür. Bu takdirde

$$1 \leq |\varphi'(c)| \tag{2.6}$$

elde edilir.

$$\varphi'(z) = e^{i\lambda} \frac{-h'(z)\left(e^{i\lambda}h(z) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda\right) - \left(p - h(z)\right)e^{i\lambda}h'(z)}{(e^{i\lambda}h(z) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda)^2}$$

ve

$$\varphi'(c) = e^{i\lambda} \frac{-h'(c)\left(e^{i\lambda}h(c) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda\right) - \left(p - h(c)\right)e^{i\lambda}h'(c)}{(e^{i\lambda}h(c) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda)^2}$$

$$= e^{i\lambda} \frac{-h'(c)\left(pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda + pe^{i\lambda}\right)}{(e^{i\lambda}h(c) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda)^2}$$

$$= e^{i\lambda} \frac{-h'(c)[2(p - \alpha)cos\lambda]}{(e^{i\lambda}h(c) + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda)^2}$$

$$= e^{i\lambda} \frac{-h'(c)[2(p - \alpha)cos\lambda]}{(ipsin\lambda + \alpha cos\lambda + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda)^2}$$

$$= e^{i\lambda} \frac{-2h'(c)}{(p - \alpha)cos\lambda}$$

olduğundan

$$|\varphi'(c)| = \frac{2|h'(c)|}{(p - \alpha)\cos\lambda} \tag{2.7}$$

bulunur. (2.7) eşitliğini (2.6) eşitsizliğinde göz önüne alırsak (2.4) eşitsizliğine ulaşırız.

Şimdi (2.4) eşitsizliğinin kesinlik halini inceleyelim.

$$g(z) = \frac{z^p}{(1 - z)^{2(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

olsun. Logaritmik türev alalım. Bu takdirde

$$\ln g(z) = \ln \frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

$$= \ln z^p - \ln(1-z)^{2(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}$$

$$= p\ln z - 2(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}\ln(1-z)\,,$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{p}{z} + 2(p-\alpha)\cos\lambda\, e^{-i\lambda}\frac{1}{(1-z)}$$

ve

$$h(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)} = p + 2(p-\alpha)\cos\lambda\, e^{-i\lambda}\frac{z}{1-z}$$

elde edilir. Buradan da

$$h'(z) = \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda\, e^{-i\lambda}}{(1-z)^2}$$

ve

$$|h'(-1)| = \frac{(p-\alpha)\cos\lambda}{2}$$

alınır.

Teorem 2.3: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ip\sin\lambda + 2\alpha\cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right| \geq \frac{2(p-\alpha)^2\cos^2\lambda}{2(p-\alpha)\cos\lambda + |b_{p+1}|} \tag{2.8}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.8) ilişkisinde (2.5) fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat: $\varphi(z)$ fonksiyonu (2.1)'deki gibi olsun. Açıktır ki $\varphi(z)$ Lemma 1.5'in koşullarını sağlamaktadır. O halde $\varphi(z)$ fonksiyonuna (1.6) eşitsizliğini uygularsak

$$\frac{2}{1+|\varphi'(0)|} \leq |\varphi'(c)| = \frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda} \tag{2.9}$$

elde ederiz.

$$|\varphi'(0)| = \frac{|b_{p+1}|}{2(p-\alpha)cos\lambda} \tag{2.10}$$

eşitliği (2.9)'da göz önüne alınırsa

$$\frac{2}{1+\frac{|b_{p+1}|}{2(p-\alpha)cos\lambda}} \leq \frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda}$$

ve son eşitsizlik uygun şekilde yeniden düzenlenirse

$$|h'(c)| \geq \frac{2(p-\alpha)^2cos^2\lambda}{2(p-\alpha)cos\lambda + |b_{p+1}|}, \quad h(c) = \frac{cg'(c)}{g(c)}$$

elde edilir. Şimdi gösterelim ki (2.8) eşitsizliği kesindir. (2.5)'deki $g(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 2.1'in ispatındaki gibi $g(z)$ fonksiyonuna logaritmik türev uygulandığında

$$h'(z) = \frac{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}{(1-z)^2}$$

türev fonksiyonunun elde edildiğini biliyoruz. Buradan

$$|\mathrm{h}'(-1)| = \frac{(\mathrm{p}-\alpha)\cos\lambda}{2}$$

elde edilir. Ayrıca $|b_{p+1}| = 2(p-\alpha)cos\lambda$ eşitliğiyle

$$\frac{2(p-\alpha)^2cos^2\lambda}{2(p-\alpha)cos\lambda + |b_{p+1}|} = \frac{2(p-\alpha)^2cos^2\lambda}{2(p-\alpha)cos\lambda + 2(p-\alpha)cos\lambda}$$

$$= \frac{2(p-\alpha)^2cos^2\lambda}{4(p-\alpha)cos\lambda}$$

$$\frac{2(p-\alpha)^2cos^2\lambda}{2(p-\alpha)cos\lambda+|b_{p+1}|}=\frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}$$

alınır.

(2.8) eşitsizliği, $g(z)$ fonksiyonunun açılımındaki hem birinci katsayı b_{p+1} hem de ikinci katsayı olan b_{p+2} göz önüne alınarak aşağıdaki şekilde kuvvetlendirilmiştir.

Teorem 2.4: $g(z)\in S^{\lambda}(\alpha,p)$ olsun. Varsayalım ki $c\in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)}=\frac{2ipsin\lambda+2\alpha cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right|\geq\frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}$$

$$\times\left(1+\frac{2\left(2(p-\alpha)cos\lambda-|b_{p+1}|\right)^2}{4(p-\alpha)^2cos^2\lambda-|b_{p+1}|^2+\left|2cos\lambda(p-\alpha)\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}\right)\qquad(2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.11) ilişkisinde

$$g(z)=\frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}\qquad(2.12)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

İspat: $\varphi(z)$ fonksiyonu (2.1)'deki gibi olsun ve $m(z)=z$ fonksiyonunu dahil edelim. Her bir $z\in D$ için maksimum prensibinden $|\varphi(z)|\leq|m(z)|$ eşitsizliği alınır.

$$t(z)=\frac{\varphi(z)}{m(z)}$$

fonksiyonunu ele alalım. $t(z)$ fonksiyonu D'de analitiktir ve $|z|<1$ için $|t(z)|<1$ olur. (2.1)'den

$$t(z)=-e^{i\lambda}\frac{b_{p+1}+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z+\cdots}{e^{i\lambda}\left[p+b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda}$$

yazılır.

$$t'(z) = -e^{i\lambda}\left\{\frac{[(2b_{p+2} - b_{p+1}^2) + \cdots]\{e^{i\lambda}[p + b_{p+1}z + (2b_{p+2} - b_{p+1}^2)z^2 + \cdots] + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda\}}{[e^{i\lambda}[p + b_{p+1}z + (2b_{p+2} - b_{p+1}^2)z^2 + \cdots] + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda]^2}\right.$$

$$\left. - \frac{e^{i\lambda}[b_{p+1} + (2b_{p+2} - b_{p+1}^2)z + \cdots][b_{p+1} + 2(2b_{p+2} - b_{p+1}^2)z + \cdots]}{[e^{i\lambda}[p + b_{p+1}z + (2b_{p+2} - b_{p+1}^2)z^2 + \cdots] + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda]^2}\right\}$$

olduğundan özel halde

$$|t(0)| = \frac{|b_{p+1}|}{2(p-\alpha)cos\lambda} \leq 1 \tag{2.13}$$

ve

$$|t'(0)| = \frac{|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2} - b_{p+1}^2) - e^{i\lambda}b_{p+1}^2|}{4(p-\alpha)^2cos^2\lambda} \tag{2.14}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 1.13'ten

$$\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \left|\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right| = |\varphi'(c)|$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $|\varphi(z)| \leq |m(z)|$ olduğundan

$$\frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} \geq \frac{1 - |m(z)|}{1 - |z|}$$

yazılabilir. Son eşitsizlikte açısal limite geçilerek

$$|\varphi'(c)| \geq |m'(c)|$$

sonucuna ulaşılır. O halde

$$\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)} = \left|\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\right| = |\varphi'(c)| \geq |m'(c)| = \left|\frac{cm'(c)}{m(c)}\right| = \frac{cm'(c)}{m(c)}$$

sağlanır.

$$k(z) = \frac{t(z) - t(0)}{1 - \overline{t(0)}t(z)}$$

fonksiyonu D dairesinde analitiktir. Ayrıca $|z|<1$ için $|k(z)|<1$, $k(0)=0$ ve $c\in T$ için $|k(c)|=1$ koşulları sağlanır. O halde Lemma 1.5'e göre

$$\frac{2}{1+|k'(0)|}\leq|k'(c)| \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$k'(z)=\frac{t'(z)\left(1-\overline{t(0)}t(z)\right)+\overline{t(0)}t'(z)\big(t(z)-t(0)\big)}{\left(1-\overline{t(0)}t(z)\right)^2}$$

$$=t'(z)\frac{(1-|t(0)|^2)}{\left(1-\overline{t(0)}t(z)\right)^2}$$

ve

$$t'(c)=\frac{\varphi'(c)m(c)-\varphi(c)m'(c)}{m^2(c)}=\frac{\varphi'(c)}{m(c)}-\frac{\varphi(c)m'(c)}{m^2(c)}$$

$$=\frac{c\varphi'(c)}{\varphi(c)}\frac{\varphi(c)}{cm(c)}-\frac{cm'(c)}{m(c)}\frac{\varphi(c)}{cm(c)}$$

$$=|\varphi'(c)|\frac{\varphi(c)}{cm(c)}-|m'(c)|\frac{\varphi(c)}{cm(c)}$$

$$=\frac{\varphi(c)}{cm(c)}\{|\varphi'(c)|-|m'(c)|\}$$

olduğundan sırasıyla

$$|k'(z)|=\frac{1-|t(0)|^2}{\left|1-\overline{t(0)}t(z)\right|^2}|t'(z)| \tag{2.16}$$

ve

$$|t'(c)|=|\varphi'(c)|-1 \tag{2.17}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.13) ve (2.14) eşitliklerini aşağıdaki eşitlikte göz önüne alırsak

$$|k'(0)| = \frac{|t'(0)|}{1-|t(0)|^2} \quad = \frac{\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}{4(p-\alpha)^2cos^2\lambda-\left|b_{p+1}\right|^2} \tag{2.18}$$

bulunur. Bu takdirde (2.13), (2.17) ve (2.18) eşitlikleri (2.15) eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$\frac{2}{1+|k'(0)|} \leq |k'(c)| = \frac{1-|t(0)|^2}{\left|1-\overline{t(0)}t(c)\right|^2}|t'(c)| \leq \frac{(1-|t(0)|)(1+|t(0)|)}{(1-|t(0)|)(1-|t(0)|)}|t'(c)|$$

$$= \frac{1+|t(0)|}{1-|t(0)|}\{|\varphi'(c)|-1\}$$

ve

$$\frac{2}{1+\frac{\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}{4(p-\alpha)^2cos^2\lambda-\left|b_{p+1}\right|^2}} \leq \frac{2(p-\alpha)cos\lambda+\left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda-\left|b_{p+1}\right|}\left\{\frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda}-1\right\}$$

elde edilir. Buradan da temel işlemlerle

$$|h'(c)| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}$$

$$\times\left(1+\frac{2(2(p-\alpha)cos\lambda-\left|b_{p+1}\right|)^2}{4(p-\alpha)^2cos^2\lambda-\left|b_{p+1}\right|^2+\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

(2.11) eşitsizliğinin keskin olduğunu göstermek için

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

fonksiyonunu ele alalım. $g(z)$ fonksiyonunun logaritmik türevini alalım. Bu takdirde

$$ln\, g(z) = ln\frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}} = p\, ln\, z-(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\, ln(1-z^2),$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{p}{z} + 2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{z}{1-z^2}$$

ve

$$h(z) = \frac{zg'(z)}{g(z)} = p + 2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{z^2}{1-z^2}$$

bulunur. Buradan da

$$h'(z) = 4(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{z}{(1-z^2)^2}$$

ve

$$|h'(i)| = (p-\alpha)cos\lambda$$

elde edilir. Diğer yandan

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

olduğundan

$$z^p + b_{p+1}z^{p+1} + b_{p+2}z^{p+2} + \cdots = \frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}},$$

$$z^p\left(1 + b_{p+1}z + b_{p+2}z^2 + \cdots\right) = \frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}},$$

$$b_{p+1}z + b_{p+2}z^2 + \cdots = \frac{1}{(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}} - 1\,,$$

$$b_{p+1} + b_{p+2}z + \cdots = \frac{1-(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}}{z(1-z^2)^{(p-\alpha)\cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

alınır ve son eşitliğin her iki tarafında $z \to 0$ koşulunda limite geçersek

$$\left|b_{p+1}\right| = 0 \tag{2.19}$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$b_{p+2}z^2 + b_{p+3}z^3 + \cdots = \frac{1-(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

$$z^2\left(b_{p+2} + b_{p+3}z + \cdots\right) = \frac{1-(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

$$b_{p+2} + b_{p+3}z + \cdots = \frac{1-(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}{z^2(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

alınır ve yine sonuncu eşitlikte $z \to 0$ koşulunda limite geçersek

$$\left|b_{p+2}\right| = (p-\alpha)cos\lambda \tag{2.20}$$

elde ederiz. (2.19) ve (2.20) eşitlikleri (2.11)'de göz önüne alınırsa eşitliğin sağlandığı görülür.

Teorem 2.5: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ipsin\lambda + 2\alpha cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Ayrıca $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$ dışında sıfırı olmasın ve $b_{p+1} > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}$$

$$\times\left(1 - \frac{4(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1} ln^2\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}{4(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1} ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right) - \left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2} - b_{p+1}^2) - e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}\right) \tag{2.21}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $b_{p+1} > 0$ olsun. (2.13)'ü ve $g(z) - z^p$ fonksiyonunun D'de $z = 0$ dışında sıfıra sahip olmaması varsayımını göz önüne alalım ve $ln\, t(z)$ ile

$$ln\, t(0) = ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right) < 0$$

koşulu ile sınırlandırılmış logaritmanın analitik dalını işaretleyelim.

$$r(z) = \frac{ln\, t(z) - ln\, t(0)}{ln\, t(z) + ln\, t(0)}$$

bileşke fonksiyonu D dairesinde analitiktir. $r(0) = 0, z \in D$ için $|r(z)| < 1$ ve $c \in T$ için $|r(c)| = 1$ sağlanır. Gerçekten

$$|r(c)| = \left|\frac{ln|t(c)| + iargt(c) - ln|t(0)| - iargt(0)}{ln|t(c)| + iargt(c) + ln|t(0)| + iargt(0)}\right| = \frac{|ln|t(0)| - iargt(c)|}{|ln|t(0)| + iargt(c)|} = 1.$$

O halde Lemma 1.5 ile

$$\frac{2}{1 + |r'(0)|} \le |r'(c)| \tag{2.22}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$r'(z) = \frac{\frac{t'(z)}{t(z)}(ln\, t(z) + ln\, t(0)) - \frac{t'(z)}{t(z)}(ln\, t(z) - ln\, t(0))}{(ln\, t(z) + ln\, t(0))^2}$$

olmak üzere

$$|r'(c)| = \left|\frac{t'(c)}{t(c)}\right| \frac{|2\, ln\, t(0)|}{|ln\, t(c) + ln\, t(0)|^2} = \{|\varphi'(c)| - 1\} \frac{-2\, ln\, t(0)}{ln^2 t(0) + arg^2 t(c)} \tag{2.23}$$

ve

$$|r'(0)| = \left|\frac{t'(0)}{2t(0)\, ln\, t(0)}\right|$$

$$= -\frac{\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2} - b_{p+1}^2) - e^{i\lambda} b_{p+1}^2\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}} \frac{1}{2\, ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)} \tag{2.24}$$

olduğu görülür. (2.23) ve (2.24) eşitlikleri (2.22)'de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{1 - \frac{\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2} - b_{p+1}^2) - e^{i\lambda} b_{p+1}^2\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}} \frac{1}{2\, ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}} \le \frac{-1}{ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)} \left(\frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda} - 1\right)$$

ve buradan da gerekli düzenlemelerle $|h'(c)|$ fonksiyonunun aşağıdan değerlendirildiği

$$|h'(c)| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}$$

$$\times\left(1-\frac{4(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}ln^2\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}{4(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}\,ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)-\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}\right)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu da istenilen değerlendirmedir.

Teorem 2.6'da, Teorem 2.5'in ispatında kullanılan (1.6) eşitsizliği yerine (1.7) sonucu kullanılarak (2.21)'den daha zayıf fakat daha basit bir eşitsizlik sunulmaktadır. Bu eşitsizlikte b_{p+2} katsayısı yer almamaktadır.

Teorem 2.6: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha,p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ipsin\lambda+2\alpha cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Ayrıca $g(z)-z^p$ fonksiyonunun $z=0$ dışında sıfırı olmasın ve $b_{p+1}>0$ olsun. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}\left[1-\frac{1}{2}ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)\right] \qquad (2.25)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $b_{p+1}>0$ olsun. Teorem 2.5'in ispatından hareketle (1.7) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. O halde (2.23) eşitliği $1 \leq |r'(c)|$ eşitsizliğinde göz önüne alınırsa

$$1 \leq \frac{-2}{ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}\left(\frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda}-1\right),$$

$$ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)(p-\alpha)cos\lambda \geq -2[2|h'(c)|-(p-\alpha)cos\lambda],$$

$$4|h'(c)| \geq 2(p-\alpha)cos\lambda - ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)(p-\alpha)cos\lambda,$$

$$|h'(c)| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}\left[1-\frac{1}{2}ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)\right]$$

bulunur.

Teorem 2.7'de, $g(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki b_{p+1} ve b_{p+2} katsayıları arasındaki ilişkiyi ifade eden bir eşitsizlik sunulmaktadır. Bu eşitsizlikteki ifade (2.11) ve (2.21) eşitsizliklerinde karşılaşılan $\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|$ ifadesidir ve bu ifade yukarıdan değerlendirilmektedir.

Teorem 2.7: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ipsin\lambda+2\alpha cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Ayrıca $g(z)-z^p$ fonksiyonunun $z=0$ dışında sıfırı olmasın ve $b_{p+1} > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right| \leq 4(p-\alpha)cos\lambda\left|b_{p+1}\,ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)\right| \tag{2.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: $b_{p+1} > 0$ olsun. $r(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağladığı için $1 \geq |r'(0)|$ eşitsizliği doğrudur. (2.24) son eşitsizlikte göz önüne alınırsa

$$1 \geq |r'(0)| = \frac{-1}{2\,ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}\left|\frac{2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2}{2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}}\right|$$

ve

$$\frac{-1}{2\,ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}\left|\frac{2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2}{2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}}\right| \leq 1\,,$$

$$\left|\frac{1}{ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)}\right|\frac{\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right|}{4(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}} \leq 1$$

elde edilir. Son eşitsizlik uygun şekilde düzenlenirse

$$\left|2cos\lambda(p-\alpha)(2b_{p+2}-b_{p+1}^2)-e^{i\lambda}b_{p+1}^2\right| \leq 4(p-\alpha)cos\lambda\left|b_{p+1}\,ln\left(\frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda}\right)\right|$$

bulunur.

Aşağıdaki lemmada $g(z)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olan $z_k \in D$ $(k = 1,2, \dots, n)$ sıfırları göz önüne alınarak (2.2) eşitsizliği kuvvetlendirilmiştir.

Lemma 2.8: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olsun. $z_k \in D$ $(k = 1,2, \dots, n)$ noktaları $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasından farklı sıfırları olsun. Bu takdirde

$$|b_{p+1}| \leq 2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n} |z_k| \tag{2.27}$$

elde edilir. Eşitlik hali

$$g(z) = z^p e^{\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)} dt}$$

fonksiyonu için sağlanır.

İspat:

$$\tilde{B}(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$$

ile işaretleyelim ve

$$w(z) = \frac{\varphi(z)}{\tilde{B}(z)}$$

fonksiyonunu dahil edelim. $\varphi(z)$ fonksiyonunun ifadesini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\varphi(z)}{\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}} \\ &= -e^{i\lambda} \frac{b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots}{e^{i\lambda}\left[p + b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots\right] + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\frac{w(z)}{z} = -e^{i\lambda}\frac{b_{p+1}+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z+\cdots}{e^{i\lambda}\left[p+b_{p+1}z+\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)z^2+\cdots\right]+pe^{-i\lambda}-2\alpha cos\lambda}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}$$

oranından hareketle

$$|w'(0)| = \frac{\left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}|z_k|}$$

alırız. $\varphi(z) \in \mathcal{M}$ olduğundan $w(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. O halde

$$|w'(0)| = \frac{\left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}|z_k|} \leq 1$$

ve dolayısıyla

$$\left|b_{p+1}\right| \leq 2(p-\alpha)cos\lambda\prod_{k=1}^{n}|z_k|$$

eşitsizliğine ulaşırız. Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim.

$$g(z) = z^p e^{\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}dt}$$

olsun. Logaritmik türevi kullanırsak

$$lng(z) = lnz^p e^{\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}dt},$$

$$\ln g(z) = \ln z^p + \ln e^{\int_0^z \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}dt}$$

$$= p\ln z + \int_0^z \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}dt\,,$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{p}{z} + \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{e^{i\lambda}\left(1-z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

ve

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = p + \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \left(z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1-z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$p + b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots = p + \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \left(z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1-z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}\,,$$

$$b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots = \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \left(z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1-z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}\,,$$

$$b_{p+1} + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z + \cdots = \frac{2(p-\alpha)\cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{e^{i\lambda}\left(1-z\prod_{k=1}^{n} \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

olduğundan $z \to 0$ koşulunda limite geçersek $\left|b_{p+1}\right| = 2(p-\alpha)\cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|$ elde ederiz.

Teorem 2.9: $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında g fonksiyonu $g(c)$ açısal limitine sahiptir ve $\frac{cg'(c)}{g(c)} = \frac{2ipsin\lambda + 2\alpha cos\lambda}{2e^{i\lambda}}$ şeklindedir. Ayrıca $z_k \in D(k = 1,2, \dots, n)$ noktaları $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasından farklı sıfırları olsun. Bu takdirde

$$\left|\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'_{z=c}\right| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} + A\right) \qquad (2.28)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A := \frac{2\left[(2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|^2) - |b_{p+1}|\right]^2}{(2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|)^2 - |b_{p+1}|^2 + \prod_{k=1}^{n}|z_k||B|},$$

$$B := 2\left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)(p-\alpha)cos\lambda - b_{p+1}^2 e^{i\lambda} + 2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{z_k}.$$

Ayrıca (2.28) eşitsizliğinde eşitlik hali

$$g(z) = z^p e^{-\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1 + t^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)} dt} \qquad (2.29)$$

fonksiyonu için sağlanır; burada $z_1, z_2, \dots, z_n$ pozitif reel sayılardır.

İspat: $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - z^p$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları olsun. (2.1)'deki $\varphi(z)$ fonksiyonunu ve

$$B(z) = z \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}$$

Blaschke çarpımını göz önüne alalım. Maksimum prensibine göre her bir $z \in D$ noktası için $|\varphi(z)| \leq |B(z)|$ eşitsizliği sağlanır.

$$\omega(z) = \frac{\varphi(z)}{B(z)}$$

fonksiyonunu ele alalım. Açıktır ki

$$\omega(z) = \frac{\varphi(z)}{B(z)}$$

$$= -e^{i\lambda} \frac{b_{p+1} + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z + \cdots}{e^{i\lambda}\left[p + b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots\right] + pe^{-i\lambda} - 2\alpha cos\lambda} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}}$$

şeklindedir. $\omega(z)$ fonksiyonu D'de analitiktir ve $|z| < 1$ için $|\omega(z)| < 1$ eşitsizliği doğrudur. Özel halde

$$\omega(0) = -e^{i\lambda} \frac{b_{p+1}}{2(p-\alpha)cos\lambda} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(-z_k)}$$

ve dolayısıyla

$$|\omega(0)| = \frac{|b_{p+1}|}{2(p-\alpha)cos\lambda} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}|z_k|}$$

elde edilir.

$$\tilde{B}(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}$$

ile işaretleyelim. O halde

$$\tilde{B}'(z) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(z - z_k)(1 - \overline{z_k}z)}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k}z}\right)$$

veya

$$\tilde{B}'(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(1 - \overline{z_k}z)^2} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i}z}$$

ve özel halde

$$\tilde{B}'(0) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{(-z_k)}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(-z_k)\right)$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\omega'(0) = -e^{i\lambda}\frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)-b_{p+1}^2e^{i\lambda}+2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)}{[2(p-\alpha)cos\lambda]^2\prod_{k=1}^{n}(-z_k)}$$

ve

$$|\omega'(0)| = \frac{\left|2(p-\alpha)cos\lambda\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)-b_{p+1}^2e^{i\lambda}+2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{[2(p-\alpha)cos\lambda]^2\prod_{k=1}^{n}|z_k|}$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\psi(z) = \frac{\omega(z)-\omega(0)}{1-\overline{\omega(0)}\omega(z)}$$

fonksiyonunu dahil edelim. $\psi(z)$ yardımcı fonksiyonu D'de analitiktir. Ayrıca $\psi(0) = 0$ ve $|z| < 1$ için $|\psi(z)| < 1$ koşullarını sağlar. Bununla birlikte $c \in T$ için

$$|\psi(c)| = \frac{|\omega(c)-\omega(0)|}{\left|1-\overline{\omega(0)}\omega(c)\right|} = \frac{|\omega(c)-\omega(0)|}{|\omega(c)|\left|\overline{\omega(c)}-\overline{\omega(0)}\right|} = \frac{|\omega(c)-\omega(0)|}{\left|\overline{\omega(c)-\omega(0)}\right|} = \frac{|\omega(c)-\omega(0)|}{|\omega(c)-\omega(0)|} = 1$$

alınır. Bu takdirde $\psi(z)$ fonksiyonu Sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. O halde

$$\frac{2}{1+|\psi'(0)|} \leq |\psi'(c)| \tag{2.30}$$

sağlanır.

$$\psi'(z) = \frac{\omega'(z)(1-|\omega(0)|^2)}{\left(1-\overline{\omega(0)}\omega(z)\right)^2}$$

olduğundan özel halde

$$|\psi'(0)| = \frac{|\omega'(0)|}{1-|\omega(0)|^2} \tag{2.31}$$

ve

$$|\psi'(c)| = \frac{|\omega'(c)|(1-|\omega(0)|^2)}{\left|1-\overline{\omega(0)}\omega(c)\right|^2} \tag{2.32}$$

alınır. (2.32) eşitliği (2.30)'da göz önüne alınırsa

$$\frac{2}{1+|\psi'(0)|} \leq |\psi'(c)| = \frac{1-|\omega(0)|^2}{\left|1-\overline{\omega(0)}\omega(c)\right|^2}|\omega'(c)| \leq \frac{1-|\omega(0)|^2}{\left[1-\left|\overline{\omega(0)}\right||\omega(c)|\right]^2}|\omega'(c)|$$

$$= \frac{(1-|\omega(0)|)(1+|\omega(0)|)}{(1-|\omega(0)|)^2}|\omega'(c)| = \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}|\omega'(c)| \tag{2.33}$$

elde edilir ve

$$\omega'(c) = \frac{\varphi'(c)B(c)-\varphi(c)B'(c)}{B^2(c)} = \frac{\varphi'(c)}{B(c)} - \frac{\varphi(c)B'(c)}{B^2(c)}$$

$$= \frac{c\varphi'(c)}{B(c)}\frac{\varphi(c)}{cB(c)} - \frac{cB'(c)}{B(c)}\frac{\varphi(c)}{cB(c)} = \frac{\varphi(c)}{cB(c)}(|\varphi'(c)| - |B'(c)|)$$

$$\omega'(c) = \frac{\varphi(c)}{cB(c)}(|\varphi'(c)| - |B'(c)|) \tag{2.34}$$

olduğundan (2.34) eşitliği (2.33)'de yerine yazılırsa

$$\frac{2}{1+|\psi'(0)|} \leq \frac{1+|\omega(0)|}{1-|\omega(0)|}(|\varphi'(c)| - |B'(c)|) \tag{2.35}$$

olur. Ayrıca

$$|\psi'(0)| = \frac{\dfrac{\left|2(p-\alpha)cos\lambda\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)-b_{p+1}^2e^{i\lambda}+2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}{(2(p-\alpha)cos\lambda)^2\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}{1-\left(\dfrac{|b_{p+1}|}{2(p-\alpha)cos\lambda\prod_{k=1}^{n}|z_k|}\right)^2}$$

$$= \prod_{k=1}^{n}|z_k|\frac{\left|2(p-\alpha)cos\lambda\left(2b_{p+2}-b_{p+1}^2\right)-b_{p+1}^2e^{i\lambda}+2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right|}{\left(2(p-\alpha)cos\lambda\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-\left|b_{p+1}\right|^2} \tag{2.36}$$

olduğu açıktır. $\omega(0)$ değeri, (2.36) ve

$$|B'(c)| = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2}$$

eşitliği (2.35) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{2}{1 + \frac{\prod_{k=1}^{n}|z_k| \left| 2(p-\alpha)cos\lambda\left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right) - b_{p+1}^2 e^{i\lambda} + 2(p-\alpha)cos\lambda b_{p+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{z_k} \right|}{\left(2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 - \left|b_{p+1}\right|^2}}$$

$$\leq \frac{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k| + \left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k| - \left|b_{p+1}\right|} \left(\frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} \right),$$

$$\frac{2\left[(2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|^2)^2 - \left|b_{p+1}\right|^2\right]}{\left(2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2 - \left|b_{p+1}\right|^2 + \prod_{k=1}^{n}|z_k||B|}$$

$$\leq \frac{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k| + \left|b_{p+1}\right|}{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n}|z_k| - \left|b_{p+1}\right|} \left(\frac{2|h'(c)|}{(p-\alpha)cos\lambda} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} \right)$$

elde edilir. Buradan da basit işlemlerle

$$|h'(c)| \geq \frac{(p-\alpha)cos\lambda}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} + A \right)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ pozitif reel sayılar olmak üzere

$$g(z) = z^p e^{-\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1 + t^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)} dt}$$

olsun. Logaritmik türevle

$$lng(z) = lnz^p e^{-\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1 + t^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{t - z_i}{1 - \overline{z_i} t}\right)} dt}$$

$$lng(z) = lnz^p + ln\, e^{-\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t\prod_{i=1}^{n}\frac{t-z_i}{1-\overline{z_i}t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+t^2\prod_{i=1}^{n}\frac{t-z_i}{1-\overline{z_i}t}\right)}dt}$$

$$= plnz - \int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+t^2\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z_k}t}\right)}dt,$$

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{p}{z} - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)},$$

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = p - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

ve

$$h(z) = p - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left(1 - \frac{1}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$h'(z) = \frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left(\frac{-\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)'}{\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left[\frac{2z\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(z-z_k)(1-z\overline{z_k})}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)z^2}{\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)^2}\right],$$

$$h'(-1) = \frac{-2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left[\frac{-2\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{(-1-z_k)(1+\overline{z_k})}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)}{\left(1+\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)^2}\right]$$

$$h'(-1) = \frac{-2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left[\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\left[-2-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(1-|z_k|)(1+|z_k|)}{(1+z_k)(1+\overline{z_k})}\right)\right]}{\left(1+\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+\overline{z_k}}\right)^2}\right]$$

alınır. z_k'ların $(k = 1,2,\dots,n)$ pozitif reel sayılar olduğunu göz önüne alırsak

$$h'(-1) = \frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left[\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+z_k}\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-z_k}{1+z_k}\right)}{\left(1+\prod_{k=1}^{n}\frac{-1-z_k}{1+z_k}\right)^2}\right]$$

ve

$$|h'(-1)| = \frac{|p-\alpha|cos\lambda}{2}\left(2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-z_k}{1+z_k}\right) \qquad (2.37)$$

elde edilir. Öte yandan

$$p + b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots = p - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left(1 - \frac{1}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right),$$

$$b_{p+1}z + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z^2 + \cdots = -\frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left(\frac{z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right),$$

$$b_{p+1} + \left(2b_{p+2} - b_{p+1}^2\right)z + \cdots = -\frac{2(p-\alpha)cos\lambda}{e^{i\lambda}}\left(\frac{z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right)$$

olduğu açıktır. Son eşitlikte $z \to 0$ koşulunda limite geçilirse $|b_{p+1}| = 0$ elde edilir. Benzer yoldan ilerlenirse $|2b_{p+2} - b_{p+1}^2| = 2|p-\alpha|cos\lambda\prod_{k=1}^{n}|z_k|$ bulunur. Bu son iki eşitliği (2.28) eşitsizliğinde göz önüne alırsak (2.28) eşitsizliğinin sağ tarafının (2.37)'ye eşit olduğu görülür. Bu da (2.28) eşitsizliğinde eşitlik halinin (2.29) ile verilen $g(z)$ fonksiyonu için sağlandığını gösterir.

3. ÖRNEKLER

Bu bölümde $S^{\lambda}(\alpha,p)$ sınıfına ait fonksiyon örnekleri sunulmaktadır.

Örnek 3.1:

$$g(z)=\frac{z^p}{(1-z)^{2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

fonksiyonunu ele alalım. Teorem 2.2'den

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=p+2(p-\alpha)\cos\lambda\, e^{-i\lambda}\frac{z}{1-z}$$

olduğunu biliyoruz. $g(z)\in S^{\lambda}(\alpha,p)$ olduğunu gösterelim. Tanım 1.14'ten hareketle

$$Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\alpha\right)\right]>0 \tag{3.1}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\alpha\right)=e^{i\lambda}\left(p+2(p-\alpha)\cos\lambda\, e^{-i\lambda}\frac{z}{1-z}-\alpha\right)$$

$$=(p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+isin\lambda(p-\alpha)$$

olduğundan

$$Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\alpha\right)\right]=Re\left[(p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1+z}{1-z}\right)+isin\lambda(p-\alpha)\right]$$

$$=(p-\alpha)cos\lambda Re\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

elde edilir. $F(z)=\frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu birim daireyi sağ yarı düzleme tasvir ettiğinden dolayı $Re\ (f(z))$ pozitiftir. Ayrıca $0\le\alpha<p$ ve $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$ olduğundan (3.1) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Böylece $g(z) \in S^{\lambda}(\alpha, p)$ olduğu ispatlanmış olur. Şimdi bu sınıfa ait olan ikinci fonksiyon örneğini verelim.

Örnek 3.2:

$$g(z) = \frac{z^p}{(1-z^2)^{(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}}}$$

fonksiyonunu ele alalım. Teorem 2.4'ten

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = p + 2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{z^2}{1-z^2}$$

olduğunu biliyoruz. (3.1)'in sağlandığını gösterelim.

$$e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right) = e^{i\lambda}\left(p + 2(p-\alpha)cos\lambda e^{-i\lambda}\frac{z^2}{1-z^2} - \alpha\right)$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) + isin\lambda(p-\alpha)$$

olduğundan

$$Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right)\right] = Re\left[(p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right) + isin\lambda(p-\alpha)\right]$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda Re\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)$$

elde edilir. Örnek 3.1'e benzer olarak (3.1) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

Örnek 3.3:

$$g(z) = z^p e^{\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{t-z_k}{1-\overline{z}_k t}}{e^{i\lambda}\left(1-t\prod_{k=1}^{n}\frac{t-z_k}{1-\overline{z}_k t}\right)}dt}$$

fonksiyonunu ele alalım. Lemma 2.8'den

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = p + \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1 - z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right) = e^{i\lambda}\left(p + \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1 - z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)} - \alpha\right)$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1 + z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1 - z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right) + isin\lambda(p-\alpha),$$

$$Re\left[(p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1 + z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1 - z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right) + isin\lambda(p-\alpha)\right]$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda Re\left(\frac{1 + z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1 - z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right)$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda\frac{1-\left|z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|^2}{\left|1-z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|^2} > 0$$

bulunur.

Örnek 3.4:

$$g(z) = z^p e^{-\int_0^z \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(t\prod_{i=1}^{n}\frac{t-z_i}{1-\overline{z_i}t}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+t^2\prod_{i=1}^{n}\frac{t-z_i}{1-\overline{z_i}t}\right)}dt}$$

fonksiyonunu ele alalım. Teorem 2.9’dan

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = p - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\alpha\right) = e^{i\lambda}\left(p - \frac{2(p-\alpha)cos\lambda\left(z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)}{e^{i\lambda}\left(1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right)} - \alpha\right)$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right) + isin\lambda(p-\alpha)$$

elde edilir ve buradan da

$$Re\left[(p-\alpha)cos\lambda\left(\frac{1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right) + isin\lambda(p-\alpha)\right]$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda Re\left(\frac{1-z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}{1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}}\right)$$

$$= (p-\alpha)cos\lambda\frac{1-\left|z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|^2}{\left|1+z^2\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}\right|^2} > 0$$

bulunur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $|\lambda| < \frac{\pi}{2}$ ve α $(0 \leq \alpha < p)$ olmak üzere $Re\left[e^{i\lambda}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right)\right] > 0,\ z \in D$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı göz önüne alınmıştır. Burada p pozitif tam sayıdır ve $g(z) = z^p + b_{p+1}z^{p+1} + b_{p+2}z^{p+2} + \cdots$ şeklinde verilen, birim dairede analitik olan bir fonksiyondur. $c \in T$ noktasında $g(z)$ fonksiyonunun açısal limitinin mevcut olduğu varsayılarak $\left.\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)'\right|_{z=c}$ açısal türevinin modülü aşağıdan değerlendirilmiş ve orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlarda, genel hal, $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$ dışında sıfıra sahip olmaması ve $g(z) - z^p$ fonksiyonunun $z = 0$ noktasından farklı sıfırlara sahip olması durumları ayrı ayrı ele alınmıştır. Bununla birlikte $g(z)$ fonksiyonunun açılımındaki b_{p+1} ve b_{p+2} katsayılarını ilişkileyen bir sonuç elde edilmiştir. Elde edilen değerlendirmelerin bir kısmının kesinlikleri de gösterilmiştir. Ayrıca ele alınan sınıfa ait olan analitik fonksiyon örnekleri ile tez tamamlanmıştır.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Akyel, T. (2021). Some remarks for λ-spirallike function of complex order at the boundary of the unit disc. *Commun. Korean Math. Soc., 36*(4), 743-757.

Akyel, T. (2022). Estimates for λ-spirallike function of complex order on the boundary. *Ukrainian Mathematical Journal, 74*(1), 3-13.

Akyel, T. ve Örnek, B. N. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 126*, 69-78.

Akyel, T. ve Örnek, B. N. (2017). Some remarks on Schwarz Lemma at the boundary. *Filomat, 31*(13), 4139–4151.

Aouf, M. (1987). On coefficient bounds of a certain class p-valent λ-spiral functions of order α. *Internat J. Math. and Math. Sci., 10*(2), 259-266.

Beardon, A. F. ve Carne, T. K. (1992). A strengthening of the Schwarz-Pick inequality. *The American Mathematicaly Monthly, 99*(3), 216-217.

Beardon, A. F. ve Minda, D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick lemma. *Journal d'Analyse, 92*(1), 81-104.

Boas, H. P. (2010). Julius and Julia: mastering the art of the Schwarz lemma. *Amer. Math. Monthly, 117*, 770-785.

Burns, D. M. ve Krantz, S. G. (1994). Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary. *J. Amer. Math. Soc., 7*, 661-676.

Caratheodory, C. (1954). *Theory of functions of a Complex Variable* (Cilt Vol.2). New York: Chelsea Publishing Company.

Collingwood, E. F. ve Lohwater, A. J. (1966). *The theory of cluster sets* (1st Edition b.). London: Cambridge University Press.

Dineen, S. (1989). *The Schwarz Lemma.* New York: Oxford University Press.

Dubinin, V. N. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disc. *J. Math. Sci., 122,* 3623-3629.

Dubinin, V. N. (2015). Bounded holomorphic functions covering no concentric circles. *J. Math. Sci., 207*, 825-831.

Golusin, G. M. (1966). *Geometric theory of functions of complex variable* (2nd ed. b.). Moscow: American Mathematical Society.

Jeong, M. (2011). The Schwarz lemma and boundary fixed points. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B. Pure and Appl. Math., 18,* 219-227.

Jeong, M. (2014). The Schwarz lemma and its applications at a boundary point. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser. B. Pure and Appl. Math., 21,* 275-284.

Krantz, S. G. (2006). *Geometric function theory explorations in complex analysis.* Boston: Birkhauser.

Krantz, S. G. (2011). The Schwarz Lemma. *Complex Variables and Elliptic Equations, 56*(5), 455-468.

Kursun, B., Örnek, B. N., Okten, K. ve Çolak, M. (2018). Analytical investigation on Effect of Nanofluid Usage on Temperature Distribution in Double Pipe Heat Exchangers. *International Journal of Applied Mathematics & Statistics, 57*(2), 227-237.

Markushevich, A. I. (1965). *Theory of functions of a complex variable.* London: Prentice-Hall.

Mateljevic, M. (2015). The lower bound for the modulus of the derivatives and Jacobian of harmonic injective mappings. *Filomat, 29*, 221-244.

Mateljevic, M., Mutavdžić , N. ve Örnek, B. N. (2022). Note on some classes of holomorphic functions related to Jack’s and Schwarz’s lemma. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 16*(1).

Mercer, P. R. (1997). Sharpened versions of the Schwarz lemma. *J. Math. Anal. and Appl., 205*, 508-511.

Mercer, P. R. (2006). Schwarz-Pick-type estimates for the hyperbolic derivative. *Journal of Inequalities and Applications, 2006,* 1-6.

Mercer, P. R. (2018). Boundary Schwarz inequalities arising from Rogosinski's lemma. *J. Class. Anal., 12*, 93-97.

Nevalinna, R. (1970). *Analytic functions.* Berlin: Springer.

Osserman, R. (1999a). A new variant of the Schwarz-Pick-Ahlfors lemma. *Manuscripta Mathematica, 100*, 123-129.

Osserman, R. (1999b). From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond. *American Mathematical Society, 46*, 868-873.

Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc., 128*, 3513-3517.

Örnek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary. *Bull. Korean Math. Soc., 50*, 2053-2059.

Örnek, B. N. ve Düzenli, T. (2018a). Bound Estimates for the Derivative of Driving Point İmpdance Functions. *Filomat., 32*(18), 6211-6218.

Örnek, B. N. ve Düzenli, T. (2018b). Boundary Analysis for the Derivative of Driving Point Impedance Functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II-Express Briefs*, *65*(9), 1149-1153.

Örnek, B. N. ve Düzenli, T. (2019a). On boundary analysis for derivative of driving point impedance functions and its circuit applications. *IET Circuits Devices & Systems., 13*(2), 145-152.

Örnek, B. N. ve Düzenli, T. (2019b). Schwarz lemma for driving point impedance functions and its circuit applications. *International Journal of Circuit Theory and Applications, 47*(6), 813-824.

Örnek, B. N., Aydemir, S. B., Düzenli, T. ve Ozak, B. (2022a). Novel version of slime mould algorithm for global optimization and real world engineering problems: Enhanced slime mould algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation, 198*, 253-288.

Örnek, B. N., Aydemir, S. B., Düzenli, T. ve Ozak, B. (2022b). Some remarks on activation function design in complex extreme learning using Schwarz lemma. *Neurocomputing, 492*, 23-33.

Patil, D. A. ve Thakare, N. K. (1979). On coefficient bounds of p-valent \lambda-spirallike functions. *Indian J. Pure Appl. Math., 10*(7), 842-853.

Polya, G. ve Szegö, G. (1972). *Problems and Theorems of Analysis Vol. 1,2.* New York: Springer-Verlag.

Pommerenke, C. (1992). *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* Berlin: Springer-Verlag.

Shoikhet, D., Elin, M., Jacobzon, F. ve Levenshtein, M. (2014). The Schwarz lemma: rigidity and dynamics, harmonic and complex analysis and its applications. *Springer Int. Publ.*, 135-230.

ÖZGEÇMİŞ

Hande ALTINAY

Eğitim

Yüksek Lisans	2023	Maltepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Pedagojik Formasyon	2015	Yeditepe Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Fakültesi, Eğitim Bilimleri Bölümü
Lisans	2013	Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

İş/İstihdam

2013-2014	Milli Eğitim Vakfı Ortaokulu (Ücretli Öğretmen)
2017-2018	Açı Okulları (Matematik Öğretmeni)

Bilimsel Faaliyetler

Akyel, T ve Altınay, H. *On bounds of* $p-valent$ $\lambda-spirallike$ *functions of order* α *on the boundary*. The 7^{th} International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2023) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum).