

**GALOİS GEOMETRİLERİ ve
İLGİLİ AÇIK PROBLEMLER ÜZERİNE
BİR İNCELEME**

Sinan DÖNMEZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Eş Danışman: Prof. Dr. Atilla AKPINAR

2023

Her hakkı saklıdır.



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

GALOİS GEOMETRİLERİ ve İLGİLİ AÇIK
PROBLEMLER ÜZERİNE BİR İNCELEME

Sinan DÖNMEZ

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Eş Danışman: Prof. Dr. Atilla AKPINAR

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2023

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

07 / 11 / 2023

Sinan DÖNMEZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GALOİS GEOMETRİLERİ ve İLGİLİ AÇIK PROBLEMLER ÜZERİNE BİR İNCELEME

Sinan DÖNMEZ

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Eş Danışman: Prof. Dr. Atilla AKPINAR

Bu çalışmada sonlu geometrinin bir kolu olan Galois geometrisi incelenerek afin ve projektif düzlemlerin ne olduğu, hangi yapı üzerine kurulduğu ve bunun için gereken cebirsel yapılar açıklanmıştır. En temel ve küçük projektif düzlem olan Fano düzlem üzerinden örnekler verilmiştir. Ayrıca projektif düzlemlerin anlaşılmasında kolaylık sağlayan üzerinde olma matrisi ve latin karelerden bahsedilmiştir. Hangi mertebeden projektif düzlemlerin olup olmadığı hakkında yapılan çalışmalar ışığında bilgiler aktarılmıştır. Projektif düzlemlerde ve projektif 3-uzayda temel bazı yapılar anlatılmıştır. Sonraki bölümde ise projektif düzlemlerin bir uygulaması olarak arklar ile MDS ve NMDS kodlar arasındaki bağlantılar üzerinde durulmuştur. Açık problem olarak ifade edilen henüz çözülememiş sorular, ilgili konuların olduğu yerde sıralı şekilde verilecektir.

2023, 107 sayfa

Anahtar Kelimeler: Galois geometri, projektif düzlem, afin düzlem, latin kare, üzerinde olma matrisi, arklar, MDS kodlar

ABSTRACT

MS. Thesis

A SURVEY ON GALOIS GEOMETRIES and RELATED OPEN PROBLEMS

Sinan DÖNMEZ

Erzurum Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Muhammed YİĞİDER

Co-advisor: Prof. Dr. Atilla AKPINAR

In this study, by examining the Galois geometry, which is a branch of finite geometry, what affine and projective planes are, on which structure they are built on and the algebraic structures required for this are explained. Some examples are given on Fano plane, which is the most basic and smallest projective plane. In addition, the incidence matrix and latin squares, which facilitate the understanding of projective planes, are mentioned. There is information has been given in the light of the studies about which order projective planes exist or not. Some basic structures are described in projective planes and projective 3-space. In the next section, as an application of projective planes, the connections between arcs and MDS, NMDS codes are emphasized. Unsolved questions, which are expressed as open problems, will be given sequentially where the related topics are.

2023, 107 pages

Keywords: Galois geometry, projective plane, affine plane, latin square, incidence matrix, arcs, MDS codes

TEŞEKKÜR

Tez danıőmanım Dr. Öğr. Üyesi Muhammed Yiğider'e ve eş danıőmanım Prof. Dr. Atilla Akpınar'a,

Tez konumu araştırma aşamasında beni yönlendiren ve cesaretlendiren çalışma arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Rumi Melih Pelen'e,

Latin kareler konusunda çalışarak Mükemmel latin kare tespitini yapan Dr. Öğr. Üyesi Mete Özbaltan'a,

Her zaman yanımda olan aileme, tez aşaması boyunca bana destek olan hocalarıma ve arkadaşlarıma,

Ayrıca tez çalışmamın 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Sinan DÖNMEZ
Kasım 2023

İÇİNDEKİLER

| | <u>Sayfa</u> |
|--|--------------|
| ÖZET | i |
| ABSTRACT | ii |
| TEŞEKKÜR | iii |
| İÇİNDEKİLER | iv |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ | vi |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | viii |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | ix |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KAYNAK ÖZETLERİ | 5 |
| 3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ | 8 |
| 3.1. Afin ve Projektif Düzlemler..... | 8 |
| 3.1.1. Afin düzlem..... | 9 |
| 3.1.2. Projektif düzlem..... | 13 |
| 3.1.3. Fano düzlem ve kolınasyonları..... | 17 |
| 3.1.4. 3. mertebeden projektif düzlem ve kolınasyonları..... | 24 |
| 3.1.5. Bruck - Ryser Teoremi..... | 30 |
| 3.2. Projektif Düzlemlerin Oluşturulması..... | 31 |
| 3.2.1. 5. mertebeden projektif düzlem..... | 31 |
| 3.2.2. Temel kavramlar..... | 39 |
| 3.2.3. Koordinatlama..... | 47 |
| 3.2.4. Dezarg ve Pappus Teoremleri..... | 55 |
| 3.2.5. 9. mertebeden projektif düzlem..... | 58 |
| 3.3. Üzerinde Olma Matrisi ve Latin Kareler..... | 63 |
| 3.3.1. Üzerinde olma matrisi..... | 63 |
| 3.3.2. Mükemmel fark kümesi..... | 66 |
| 3.3.3. Latin kareler..... | 68 |
| 3.3.4. Mükemmel latin kareler..... | 73 |
| 3.4. Galois Geometride Bazı Alt Yapılar ve Projektif 3-Uzay..... | 79 |
| 3.4.1. k-arklar ovaler hiperovaler..... | 80 |
| 3.4.2. Galois geometride projektif 3-uzay..... | 87 |

| | |
|---|-----|
| 4. GALOİS GEOMETRİNİN KODLAMA TEORİSİNE BAZI | |
| UYGULAMALARI | 95 |
| 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER | 103 |
| KAYNAKLAR | 104 |

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

| | |
|-------------------|---|
| α, β | Düzlemde otomorfizmler |
| \mathbb{C} | Kompleks sayılar kümesi |
| d | Doğru |
| D | Doğru kümesi |
| F | Cisim |
| F_m | m elemanlı cisim |
| $F_m[x]$ | Katsayıları F_m 'den alınan polinomlar halkası |
| n | Boyut |
| N | Nokta kümesi |
| o | Üzerinde olma bağıntısı |
| q | Mertebe |
| \mathbb{Q} | Rasyonel sayılar kümesi |
| \mathbb{R} | Reel sayılar kümesi |
| V | Vektör uzayı |
| \mathbb{Z} | Tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}_m[x]$ | Katsayıları \mathbb{Z}_m 'den alınan polinomlar halkası |
| \mathbb{Z}_m | m elemanlı tam sayılar halkası |

Kısaltmalar

| | |
|--------------------------|--|
| $(A, *)$ | Cebirsel yapı |
| $(G, *)$ | Grup |
| $(H, +, \cdot)$ | Halka |
| (N, D, o) | N, D ve o 'dan oluşan üçlü geometrik yapı |
| $\mathbf{A} = (N, D, o)$ | \mathbf{A} afin düzlemi |
| A_2F | F cismi üzerine kurulu A afin düzlemi |
| $C(n, k, d)$ | n uzunluklu, k boyutlu, d minimum uzaklıklı lineer kod |
| $G(P_1)$ | P_1 düzleminin kolinyasyon grubu |

| | |
|--------------------------|---|
| $GF(q)$ | Mertebesi q olan Galois cismi |
| MDS | Maksimum uzaklıkta ayrılabilir |
| NMDS | Yaklaşık maksimum uzaklıkta ayrılabilir |
| $\mathbf{P} = (N, D, o)$ | \mathbf{P} projektif düzlemi |
| Pas | Passant |
| P_2F | F cismi üzerine kurulu P projektif düzlemi |
| $PG(n, q)$ | Galois cismi üzerinde n . boyuttan ve q . mertebeden projektif uzay |
| Sek | Sekant |
| Tan | Tanjant |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|----|
| Şekil 3.1. Doğruyaş noktalar kümesi | 8 |
| Şekil 3.2. Afin düzlemde iki konfigürasyon | 11 |
| Şekil 3.3. 2. mertebeden afin düzlem..... | 11 |
| Şekil 3.4. 3. mertebeden afin düzlem..... | 12 |
| Şekil 3.5. Fano düzlemleri ($N = \{A, B, C, E, F, G, H\}$ kümesi ile)..... | 16 |
| Şekil 3.6. Fano düzlemi | 17 |
| Şekil 3.7. Fano düzlem için otomorfizm seçenekleri..... | 20 |
| Şekil 3.8. 3. mertebeden projektif düzlem (P_3)..... | 24 |
| Şekil 3.9. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için otomorfizm seçenekleri-1 | 26 |
| Şekil 3.10. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için otomorfizm seçenekleri-2..... | 27 |
| Şekil 3.11. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için ilk durum | 28 |
| Şekil 3.12. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için son durum..... | 28 |
| Şekil 3.13. 5. mertebeden projektif düzlemde bir konfigürasyon..... | 33 |
| Şekil 3.14. 3. mertebeden afin düzlemin kartezyen (ikili) koordinatlaması | 51 |
| Şekil 3.15. 3. mertebeden projektif düzlemin kartezyen (ikili) koordinatlaması..... | 53 |
| Şekil 3.16. Dezarg konfigürasyonu..... | 56 |
| Şekil 3.17. Pappus konfigürasyonu..... | 57 |
| Şekil 3.18. n . mertebeden projektif düzlem için bir konfigürasyon | 73 |
| Şekil 3.19. $PG(3, 2)$ | 93 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| | |
|---|----|
| Çizelge 3.1. $PG(2, 2)$ 'da grublama ($N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ile) | 22 |
| Çizelge 3.2. Uzaylara göre otomorfizm sayıları | 30 |
| Çizelge 3.3. $GF(4)$ 'deki toplama ve çarpma işlemleri..... | 46 |
| Çizelge 3.4. $GF(4)$ 'ün elemanlarının farklı gösterimleri | 46 |
| Çizelge 3.5. $GF(4)$ 'ün ve \mathbb{Z}_4 'ün toplama ve çarpma işlemleri | 46 |
| Çizelge 3.6. $GF(3)$ 'deki toplama ve çarpma işlemleri..... | 48 |
| Çizelge 3.7. $GF(9)$ 'un elemanlarının farklı gösterimleri | 58 |
| Çizelge 3.8. T üzerindeki \oplus işlemi..... | 59 |
| Çizelge 3.9. T üzerindeki $\odot_1, \odot_2, \odot_3$ ve \odot_4 işlemleri..... | 60 |
| Çizelge 3.10. Hall düzleminde doğrular ve noktalar | 62 |
| Çizelge 3.11. Fano düzlemi için bir üzerinde olma matrisi | 64 |
| Çizelge 3.12. $AA^T = nI + F$ işleminin gösterimi | 66 |
| Çizelge 3.13. Mükemmel fark kümesi metodu | 67 |
| Çizelge 3.14. Fano düzlemi için üzerinde olma matrisleri | 68 |
| Çizelge 3.15. $2 * 2$ 'lik bir latin kare ($S = \{a, b\}$ kümesi ile)..... | 68 |
| Çizelge 3.16. $3 * 3$ 'lük bir latin kare örnekleri | 69 |
| Çizelge 3.17. n elemanlı bir küme için standart latin kare örneği..... | 69 |
| Çizelge 3.18. $2 * 2$ 'lik latin kareler ($S = \{0, 1\}$ kümesi ile)..... | 69 |
| Çizelge 3.19. $n = 10$ 'a kadar latin ve standart latin karelerin sayıları | 70 |
| Çizelge 3.20. $3 * 3$ 'lük iki dik latin kare | 70 |
| Çizelge 3.21. $10 * 10$ 'luk iki dik latin karenin birleşik hali | 71 |
| Çizelge 3.22. Birbirine dik $5 * 5$ 'lik 4 adet latin kare | 73 |
| Çizelge 3.23. $9 * 9$ 'luk Mükemmel latin kare için bir etiketleme..... | 75 |
| Çizelge 3.24. $9 * 9$ 'luk bir Mükemmel latin kare | 76 |
| Çizelge 3.25. $7 * 7$ 'lik bir Mükemmel latin kare | 77 |
| Çizelge 3.26. $8 * 8$ 'lik Mükemmel latin kare için bir etiketleme..... | 77 |
| Çizelge 3.27. $8 * 8$ 'lik bir Mükemmel latin kare | 78 |
| Çizelge 3.28. Mükemmel latin kare ile elde edilen dik $5 * 5$ 'lik 4 adet latin kare..... | 79 |
| Çizelge 3.29. $PG(2, q)$ 'da $k - ark$ sayıları | 83 |
| Çizelge 3.30. $PG(3, q)$ 'da nokta ve doğru sayıları | 91 |

1. GİRİŞ

Galois geometri, sonlu geometrinin Galois cismi üzerine kurulu, cebir ve geometri branşlarını içeren bir kolu olup kısaca sonlu cisim üzerine kurulu sonlu projektif uzaylardır.

Aşağıda verilen genel bilgiler Stevenson (1972), Batten (1997) ve Kaya (2005) gibi pek çok temel kaynakta bulunabilir.

Nokta ve doğruların belirli şartlar ya da aksiyomları sağladığı bir sisteme bir uzay denir. “Herhangi bir doğru en az iki noktaya sahiptir.” ve “İki nokta en çok bir doğru üzerindedir.” aksiyomlarını sağlayan bir uzay yaklaşık lineer uzay ve bir yaklaşık lineer uzayda ikinci aksiyom yerine “İki nokta bir doğru üzerindedir.” aksiyomu alınır bir lineer uzay tanımına ulaşılır. Şayet bir lineer uzay “Herhangi iki farklı doğru kesişir.” ve “Herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta vardır.” aksiyomlarını sağlıyorsa bu lineer uzay bir projektif düzlem olur. Bir projektif düzlem sonlu sayıda noktadan ve sonlu sayıda doğrudan oluşuyorsa bu projektif düzleme sonlu projektif düzlem denir. Bir sonlu projektif düzlemde bir doğru üzerindeki nokta sayısının bir eksiği ile mertebeye kavramı tanımlanır ve böylece düzlemde mertebeye bağlı yeni bilgiler ortaya çıkar. Mesela, herhangi bir noktadan geçen doğru sayısı, toplam nokta ve doğru sayıları mertebeye yardımıyla kolaylıkla bulunabilir.

Sonlu cisimler, sınırlı sayıda elemana sahip olan cebirsel yapıları ifade eder. Bu cisimler üzerinde geometrik yapılar ve işlemler tanımlanır ve sonlu cisimlerin cebirsel özellikleri geometrik şekillerle ilişkilendirilir. Bu tezde projektif düzlem veya uzay dendiğinde sonlu olduğu anlaşılacaktır.

Évariste Galois (1811-1832), p asal sayı ve r pozitif tam sayı olmak üzere $F = GF(p^r)$ Galois cismini tanımladı (Rotman 1998). Bir Galois cismi üzerine kurulan projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir. Burada “ (n, q) ” ifadesinde n boyutu, q ise mertebeyi verir. $PG(2,3)$, projektif düzlemde mertebenin 3 olduğunu ve $PG(3,2)$ ise projektif 3-uzayda mertebenin 2 olduğunu gösterir. $PG(n, q)$ 'nin $n - 1$ boyutlu alt

1. GİRİŞ

uzayına ise hiperdüzlem denir. Ayrıca $PG(n, q)$ uzayı ark, oval, kep ve benzeri yapıları içinde barındırır ve bu yapılar ile farklı alanlarla bağlantılar kurulabilir.

Projektif düzlemden (yani 2 boyuttan) daha yüksek boyutlu bir projektif uzayda çalışmak isteyen biri, herhangi iki boyutlu alt uzayı bir projektif düzlem olan bir lineer uzaya ihtiyaç duyar. $(n + 1)$ boyutlu bir V vektör uzayının sıralı $(n + 1)$ 'lileri ile orijinden geçen bir boyutlu alt uzayları (yani doğruları) noktalar kümesi ve orijinden geçen iki boyutlu alt uzayları (yani düzlemleri) doğrular kümesi olarak n boyutlu bir projektif uzay kurmak mümkündür. $V - \{0\}$ kümesi üzerinde, c sıfırdan farklı olmak üzere, $X \sim Y := (Y = cX)$ biçiminde tanımlı bir denklik bağıntısı yardımıyla tüm denklik sınıflarının oluşturduğu küme bir n boyutlu projektif uzayın noktalar kümesi olarak alınabilir (Hacısalıhoğlu 2010). Bu noktalar uzayın homojen veya projektif koordinatları olarak isimlendirilebilir.

Şayet bir sonlu $GF(q)$ Galois cismi üzerine kurulu bir vektör uzayı ile çalışılırsa bu vektör uzayından elde edilen projektif düzlemin mertebesi q 'dur.

Bir projektif düzlemin herhangi bir doğrusu atılarak elde edilen yapının bir afin düzlem olduğu bilinmektedir. Bu önermenin genellemesi ise bir projektif uzaydan bir hiperdüzlem çıkarılırsa elde edilen yapı bir afin uzaydır. Bu sebeple projektif uzaylar için bilinen kavramların ve sonuçların benzerleri afin uzaylar için de verilebilir.

Bu tez çalışması, Galois geometrilerini inceleyerek ilgili bazı açık problemleri tanıtmak amacıyla yapılmaktadır. Tezin ana motivasyonu, Galois geometrilerinin temel kavramlarını, sonuçlarını ve bazı olası uygulamalarını açıklayarak daha geniş bir anlayışına katkıda bulunmaktır.

Tezin temel amaçları şunlardır:

- Sonlu afin ve projektif düzlemlerin bir incelemesini yapmak, temel sonuçları, yapıları ve özellikleri ele almak,
- Farklı mertebelerdeki projektif düzlemlerin inşa sürecini araştırmak, inşa tekniklerine ve ilgili teoremlere odaklanmak,

- Galois geometrileri ve ilgili uygulamaları incelemek için güçlü araçlar olarak etkisi olan üzerinde bulunma matrisini ve latin kareleri analiz etmek,
- Ark, oval, hiperoval ve Galois projektif 3-uzayı gibi Galois geometrinin yapısını ve temellerini incelemek,
- Kodlama teorisinin Galois geometrileri bağlamındaki uygulamalarını tartışarak katkılara odaklanmak.

Araştırma hedeflerine ulaşmak için, bu tezde sistematik bir yaklaşım benimsenecektir. Bölümler arası bağlantılarda kopukluk olmaması adına tanımlar ve teoremler ilgili kısımlarda verilecektir.

Galois geometrilerinin ana özellikleri ve sonuçları tarif edilecektir. Galois geometrilerinin temel sonuçlarını açıklamak ve olası uygulamalarını tanıtmak için matematiksel araçlar ve teknikler kullanılacaktır. Tez, teorik araştırmaların yanı sıra uygulama alanında kodlama teorisi gibi pratik yönleri de içerecektir.

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır:

Bölüm 1: Giriş – Galois geometrisi tanımı verilip, Galois geometrilerine yönelik motivasyonu, tezin amacını, araştırma hedeflerini, tezde kullanılan yöntemleri ve bölümleri açıklar.

Bölüm 2: Kaynak Özetleri – Temel bazı bilgiler verdikten sonra tarihi arka plandan bahseder. Tezde kullanılan referanslar hakkında bilgi verir.

Bölüm 3: Projektif Geometri ve Galois Geometri – Farklı mertebelerdeki projektif düzlemlerin inşa süreci; inşa tekniklerine ve ilgili teoremlere vurgu yapacak şekilde araştırılır.

Afin ve projektif düzlemlerin tanımları ve örnekleri verilir. Mertebesi 2 ve 3 olan projektif düzlemlerin otomorfizmaları incelenir. Bruck-Ryser Teoremi verilir.

1. GİRİŞ

Galois geometrilerini ve ilgili uygulamaları incelemek için kullanılan araçlar olarak etkisi olan üzerinde bulunma matrisinin ve latin karelerin analizi yapılır.

Galois geometride ark, oval, hiperoval gibi projektif düzlemlerin çeşitli geometrik alt yapıları ve projektif 3-uzay hakkında araştırmalar yapılarak bu kavramlar incelenir.

Bölüm 4: Galois Geometrinin Kodlama Teorisine Bazı Uygulamaları – Lineer kodların tanımı ve bazı özellikleri verilir. Lineer kodlardan olan MDS ve NMDS kodların tanımları verilerek sonlu projektif düzlemlerdeki bazı geometrik yapılar ve aralarındaki bağlantılar verilir.

Bölüm 5: Sonuçlar ve Öneriler – Tezde verilenler kısaca özetlenerek hedef koyar. İlgili kişilere öneri verir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Sonlu geometriler, Klein (1893), Poincaré (1903) ve Dembowski (1997) gibi matematikçilerin 19. ve 20. yüzyılda katkıda bulunduğu konulardan biri olmuştur. Galois geometrilerinin çalışılması ise Évariste Galois'in temel cebir ve grup teorisi çalışmalarına dayanır ve sonlu cisimlerin geometriyle olan bağlantısını ortaya koyar (Hirschfeld and Thas 1991).

Bir projektif uzayın herhangi iki doğrusunun aynı sayıda nokta kapsadığı bilinmektedir. Bu sebeple bir doğru üzerindeki nokta sayısının bir eksiği merteye olarak tanımlanabilir. Asal ve asal kuvvetlerindeki mertebelerde projektif düzlem olduğu biliniyor. Bu konuda Bruck and Ryser (1949) bir adım daha atarak hangi mertebelerde projektif düzlemin olmadığı hakkında bir teorem ortaya koymuştur. Bu teorem önemli bir yere sahip olup 4'e bölümünden kalanın 1 veya 2 olduğu ve iki tam karenin toplamı şeklinde yazılamayan 14, 22 gibi mertebelerde bir projektif düzlemin olmadığını söylüyor. 10. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığı ise Lam et al. (1989) tarafından bulunmuştur. Burada üzerinde olma matrisi kullanılmış ve algoritmalarla durum sayısı düşürülerek kalan olası tüm durumlar bilgisayar yardımıyla hesaplanmıştır.

Ayrıca 6. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığı ilk olarak Euler varsayımı olarak da bilinen, birbirine dik 6×6 'lık iki tane latin karenin olmadığını gösterilmesiyle ispatlanmış oldu (Tarry 1900). Bunu destekleyen Fisher and Yates (1934), Stinson (1984) gibi birçok çalışmanın yanında son zamanlarda Betten (2021) tarafından yapılan bir çalışma mevcuttur. Bu çalışmada da latin kareler kullanılmıştır. Euler ayrıca varsayımın $q \equiv 2 \pmod{4}, q \geq 6$ için de doğru olduğunu iddia etse de bunun doğru olmadığı ortaya çıktı. Bunu gerçekleyen Bose et al. (1960), Frisinger (1981) çalışmaları vardır. Dolayısıyla üzerinde olma matrisinin ve latin karelerin, projektif düzlemleri elde etmede önemli yere sahip olduğu söylenebilir.

Projektif düzlemlerde üzerinde olma matrisi elde etmede "Mükemmel fark kümesi" metodu Singer (1938) tarafından oluşturulmuştur. Tablo, projektif düzlem inşasında kullanılır. Burada oluşturulan ilk satırdan sonra bu satırın kaydırılmasıyla diğer

satırlar meydana gelir. Böylece q . mertebeden bir projektif düzlem için $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ 'lik bir üzerinde olma matrisi elde edilir.

Benzer bir metot “Mükemmel latin kare” adıyla tespit edilmiştir. Burada birbirine dik $q - 1$ adet latin kare için kolay bir yöntem vardır. Eğer $q * q$ 'luk bir Mükemmel latin kare oluşturulabiliyorsa ilk satır sabit kalmak kaydıyla diğer satırların alta doğru birer kayması sonucunda otomatik olarak birbirine dik $q - 1$ tane latin kare elde edillir ki bu da projektif düzlemin o mertebede var olduğunu gösterir. “Mükemmel fark kümesi” metodu ile benzerlik gösterdiğinden “Mükemmel latin kare” adı verilmiştir.

Henüz 12. mertebeden bir projektif düzlemin olup olmadığı bilinmemekle birlikte uzun zamandır çözülemeyen (açık) popüler bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Başka çözülemeyen problemlerden biri de asal kuvvetlerindeki projektif düzlemlerde Desargues olmayan düzlemlerin sayısıdır. Eric Moorehouse kendi web sitesinde mertebelere göre düzlem sayısını şu ana kadar bulunan sayıya göre vermektedir (Anonymous 2023a). Bu konuda net bir sayı verilmemektedir. Ark, oval, ovoid konularında da çokça açık problem olup bu konuyla ilgilenen kişilerden biri Beniamino Segre'dir. Özellikle Segre'nin üç problemi diye bilinen açık problemleri vardır. Bu problemlerin bazı çözümleri Bruen et al. (1988), Ball (2012), Ball and De Beule (2012) tarafından cevaplanmıştır. Buna rağmen ark, oval, hiperoval, ovoid, kep ve projektif düzlemlerin sınıflandırılması gibi konularda çözülemeyen problemler var olduğu gibi çözülmesi durumunda yeni problemler getireceği de aşıkardır.

9. mertebeye kadar olan 2, 3, 4, 5, 7, 8 mertebeli projektif düzlemler tektir (Akpınar 2001). Fakat 9. mertebede Desargues düzlemin yanı sıra 3 tane de Desargues olmayan Hall, Dual Hall ve Hughes düzlemleri vardır. Veblen and Wedderburn (1907) bu konu üzerinde çalışmışlardır. Oluşturdukları yapı daha sonra Hughes (1957) tarafından genelleştirilmiştir. Ayrıca Hall et al. (1959) 9. mertebede daha fazla düzlem olmadığını göstermişlerdir.

Projektif düzlemlerde doğruları ve üzerindeki noktaları bulurken koordinatlama yapılabilir. Herhangi bir mertebeden bir düzlemde koordinatlamayı farklı yollarla

2. KAYNAK ÖZETLERİ

yapmak mümkündür. Buna Stevenson (1972) ve Coxeter (2003) örnek verilebilir. İki kitapta nokta ve doğru kümeleri farklı şekilde kurulmuş ve sonuç itibariyle düzlem şartlarını sağlayan projektif düzlemler oluşmuştur.

Galois geometrisi ayrıca, ilgi çekici cebirsel yapıları ve çeşitli uygulamaları nedeniyle araştırmacıların ve matematikçilerin dikkatini çeken bir tür sonlu matematik dalı olarak ortaya çıkmıştır. Galois geometrileri, kodlama teorisi, şifreleme ve kombinatoryal tasarımlar gibi çeşitli alanlarda uygulama alanı bulmuştur (Etzion and Storme 2016; Beutelspacher 1990; Hirschfeld et al. 1997).

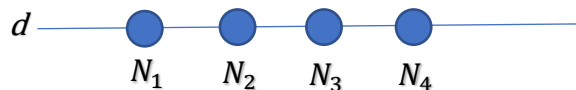
3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

Bu bölümde Galois geometrinin afin ve projektif yapılarla olan ilişkilerinden bahsedilecektir. Afin ve projektif düzlem arasındaki ilişki incelenecek, projektif düzlemlerde mertebe, kolonasyon, koordinatlama, üzerinde olma matrisi, latin kareler kavramları ele alınacaktır. Bu kavramları daha anlaşılır kılmak için bilinen projektif düzlemler örnek olarak kullanılacaktır. Daha sonra Mükemmel latin kare adı verilen bir latin kare tanımlanacaktır. Bu tanım yardımıyla (birbirine) dik (ortogonal) latin kare kümesi elde edilir ki bu bir projektif düzlemin varlığı için yeterlidir. Düzlemde ve 3-uzayda ark, oval, kep benzeri kavramlar ele alınacak ve son olarak n -uzayda bazı kodlama teorisi uygulamalarından bahsedilecektir. Açık problemler ilgili yerlerde verilecektir.

3.1. Afin ve Projektif Düzlemler

Bu kısımda verilecek temel bilgiler için genel olarak Batten (1997), Kaya (2005) ve Anonim (2023)'den faydalanılmıştır. Afin ve projektif düzlem tanımlarına geçmeden önce aşağıdaki iki tanıma ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.1: N , elemanları A, B, C, \dots gibi büyük harflerden oluşan noktalar kümesi ve D , elemanları $a, b, c, \dots, d_1, d_2, d_3, \dots$ veya AB, BC, AC gibi gösterimlerden oluşan doğrular kümesi olsun. $N_i \in N$ ve $d \in D$ olmak üzere; $(N_i, d) \subset N \times D$ olup (N_i, d) ikili yapısı, N_i noktası d doğrusunun üzerindedir veya d doğrusu N_i noktasından geçer anlamına gelir. o ise $o \subset N \times D$ olan bir üzerinde olma bağıntısı olmak üzere (N, D, o) üçlü geometrik yapısı oluşur. $N_i \in N$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) için $N_i o d$ sağlanıyorsa, yani noktalar d doğrusunun üzerinde ise bu noktalara doğruduş noktalar ve bu noktaların oluşturduğu kümeye de doğruduş küme adı verilir.



Şekil 3.1. Doğruduş noktalar kümesi

Şekil 3.1'de görüldüğü üzere N_1, N_2, N_3 ve N_4 noktaları doğruduş noktalar olup bu noktalar d doğrusu üzerindedir. $\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ kümesi de bir doğruduş kümedir.

Tanım 3.2: $d_1, d_2 \in D$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $N_1 o d_1$ ve $N_1 o d_2$ olacak şekilde hiçbir $N_1 \in N$ yoksa d_1 ve d_2 'ye paralel doğrular denir ve $d_1 \parallel d_2$ ile gösterilir. d_1 ve d_2 paralel doğrular değil ise $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir.

Şimdi afin ve projektif düzlem tanımları verilebilir.

3.1.1. Afin düzlem

Tanım 3.3: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathbf{A} = (N, D, o)$ üçlü yapısına bir afin düzlem denir.

A1—) Farklı iki noktayı birleştiren tek bir doğru vardır.

A2—) Bir doğruya üzerinde olmayan bir noktadan tek bir paralel doğru çizilebilir.

A3—) Doğrudaş olmayan en az üç nokta mevcuttur.

Afin düzleme Öklid düzlemi örnek olarak gösterilebilir. Çünkü;

Öklid düzleminde farklı iki nokta bir doğru belirttiğinden A1, Öklid düzleminde bir doğruya dışındaki bir noktadan tek bir paralel doğru çizilebildiğinden A2 ve Öklid düzleminde doğrudaş olmayan çok sayıda üçlü nokta olduğundan A3 sağlanır.

Teorem 3.1: Afin düzlemde iki doğru ya paraleldir ya da tek bir noktada kesişirler.

İspat: $d_1, d_2 \in D$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Tanım 3.2 gereği;

- $d_1 \parallel d_2$ ise d_1 ile d_2 üzerinde ortak bir nokta yoktur.
- $d_1 \nparallel d_2$ ise $N_1 o d_1$ ve $N_1 o d_2$ olacak şekilde bir tek $N_1 \in N$ vardır.

$d_1 \nparallel d_2$ iken $N_1 \neq N_2$ olmak üzere farz edelim ki $N_2 o d_1$ ve $N_2 o d_2$ olacak şekilde bir $N_2 \in N$ olsun. A1 aksiyomu gereği farklı iki noktadan tek bir doğru

geçtiğinden $d_1 = d_2$ olur ki bu durum baştaki kabul ile çelişir. O halde böyle bir N_2 noktası yoktur, yani doğruların ortak tek bir noktası (N_1) vardır.

O halde afin düzlemdeki farklı iki doğru paralel değilse tek bir noktada kesişmeleri gerekir. Ayrıca, doğruların birden fazla noktada kesişmeleri halinde doğrular çakışıktır sonucu çıkarılabilir.

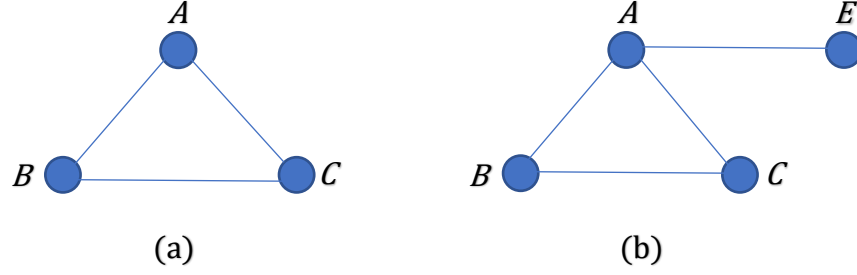
Tanım 3.4: Afin düzlemde paralel olmayan farklı iki doğru üzerindeki noktaya bu doğruların ortak noktası, kesişimi ya da arakesiti denir. Doğrulara a ve b dersek kesişim noktası ab veya $a \wedge b$ şeklinde gösterilir, doğrulara da kesişen doğrular denir.

Teorem 3.2: Afin düzlemde bir doğru üzerindeki nokta sayısı düzlemin mertebesini verir. Düzlemin mertebesi q olarak alınırsa A afin düzlemi için şu şartlar sağlanır:

- i-) A 'daki her doğru üzerinde q nokta bulunur.
- ii-) A 'daki toplam nokta sayısı q^2 'dir.
- iii-) A 'daki her nokta üzerinden $q + 1$ doğru geçer.
- iv-) A 'daki toplam doğru sayısı $q^2 + q$ 'dur.

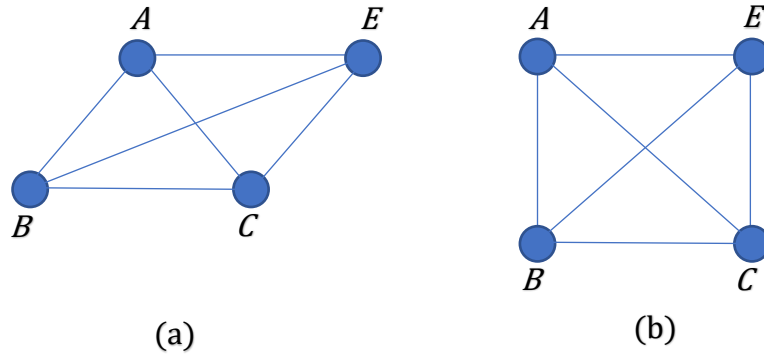
En küçük afin düzlemde mertebe 2 olup, nokta sayısı 4, doğru sayısı 6, herhangi bir nokta üzerinden geçen doğru sayısı 3 ve herhangi bir doğru üzerindeki nokta sayısı 2'dir. Bunun nasıl elde edildiğini görmek için afin düzlemin aksiyomlarından yola çıkılmalıdır.

A_3 aksiyomu gereğince doğrudan olmayan en az 3 nokta vardır. Bu noktalar A, B ve C olsun. Bu 3 nokta A_1 aksiyomu gereğince ikişerli olarak toplamda 3 doğru ile Şekil 3.2 (a)'daki gibi birleşerek AB, BC ve AC doğrularını oluşturmaktadır. A_2 aksiyomu gereğince A 'dan geçen ve BC 'ye paralel olan bir doğru olması gerektiğinden 4. nokta olan E noktası $AE \parallel BC$ olacak şekilde Şekil 3.2 (b)'deki gibi ilave edilmelidir. Dolayısıyla bir afin düzlemin en az 4 noktası olmak zorundadır.



Şekil 3.2. Afin düzlemde iki konfigürasyon

Aynı mantıkla B 'den geçen AC 'ye paralel bir doğru ve C 'den geçen AB 'ye paralel bir doğru olmak zorundadır. Öncesinde $A1$ aksiyomu gereğince E noktasını diğer noktalarla birleştirmemiz gerekir. Bu işlemden sonra A, B, C, E noktaları ile AB, AC, AE, BC, BE, CE doğrularını Şekil 3.3 (a)'daki gibi elde ederiz. Yeni bir nokta ilave etmemek için $AC \parallel BE$ ve $AB \parallel CE$ kabul ederek aksiyomları sağlayacak şekilde daha bilinen görüntüsüyle Şekil 3.3 (b)'deki gibi en küçük afin düzlem oluşur. Şekil 3.3'te AC ve BE doğruları kesişmemektedir.



Şekil 3.3. 2. mertebeden afin düzlem

Şekil 3.3 (b)'den görüldüğü üzere $q = 2$ mertebeli bir afin düzlemde her doğru üzerindeki nokta sayısı $q = 2$ olup her noktadan $q + 1 = 3$ doğru geçer. Böylece toplam nokta sayısı $q^2 = 4$ ve toplam doğru sayısı da $q^2 + q = 6$ olur. Birbirinden farklı N_i 'ler ve d_i 'ler için;

$$N = \{A, B, C, E\} \text{ ve } D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\} \text{ olmak üzere;}$$

3. PROJKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

$d_1 = \{A, E\}, d_2 = \{B, C\}, d_3 = \{A, B\}, d_4 = \{C, E\}, d_5 = \{A, C\}, d_6 = \{B, E\}$
olduğu görülür.

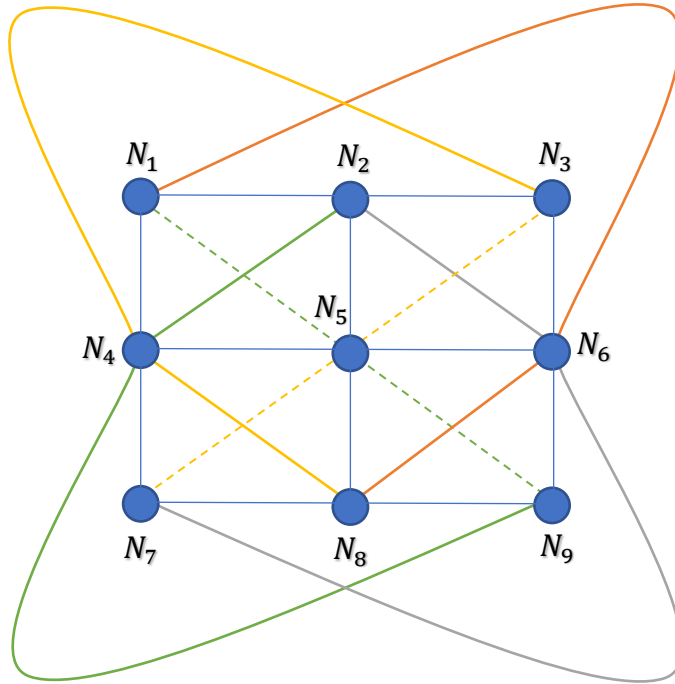
$q = 3$ için afin düzlemin her doğrusu üzerinde 3 nokta olup, her noktası üzerinden 4 doğru geçer. Toplam nokta sayısı 9 ve toplam doğru sayısı 12 olan afin düzlemi oluşturmak için gereken nokta ve doğru kümeleri için;

$$N = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9\} \text{ ve}$$

$D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}\}$ olup birbirinden farklı N_i 'ler ve d_i 'ler için;

$$\begin{aligned} d_1 &= \{N_1, N_2, N_3\}, d_2 = \{N_4, N_5, N_6\}, d_3 = \{N_7, N_8, N_9\}, d_4 = \{N_1, N_4, N_7\}, \\ d_5 &= \{N_2, N_5, N_8\}, d_6 = \{N_3, N_6, N_9\}, d_7 = \{N_1, N_5, N_9\}, d_8 = \{N_3, N_5, N_7\}, \\ d_9 &= \{N_1, N_6, N_8\}, d_{10} = \{N_2, N_4, N_9\}, d_{11} = \{N_2, N_6, N_7\}, d_{12} = \{N_3, N_4, N_8\} \end{aligned}$$

olacak şekilde seçilirse afin düzlemin A1,A2,A3 aksiyomları sağlanmış olup örnek gösterimi Şekil 3.4'deki gibidir.



Şekil 3.4. 3. mertebeden afin düzlem

Afin düzlem ile ilgili verilen temel bilgilerden sonra projektif düzlemin tanımına geçilebilir.

3.1.2. Projektif düzlem

Tanım 3.5: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $\mathbf{P} = (N, D, o)$ üçlü yapısına bir projektif düzlem denir.

- P1**—) Farklı iki noktayı birleştiren tek bir doğru vardır.
- P2**—) Farklı iki doğrunun kesişimi tek bir noktadır.
- P3**—) Herhangi üçü doğrudan olmayan en az dört nokta vardır.

Teorem 3.3: Bir P projektif düzleminin mertebesi q olarak alınırsa bu düzlem için şu şartlar sağlanır:

- i-**) P 'deki her doğru üzerinde $q + 1$ nokta bulunur.
- ii-**) P 'deki toplam nokta sayısı $q^2 + q + 1$ 'dir.
- iii-**) P 'deki her nokta üzerinden $q + 1$ doğru geçer.
- iv-**) P 'deki toplam doğru sayısı $q^2 + q + 1$ 'dir (Ball and Weiner 2011).

İspat: Bir P projektif düzleminde bir noktadan geçen doğru sayısı ile bir doğru üzerindeki nokta sayısının aynı olduğuna bakılacak olursa; d , P 'de üzerinde $q + 1$ tane nokta bulunan bir doğru ve B ise P 'de d üzerinde olmayan herhangi bir nokta olsun. d üzerindeki noktaların her biri B noktası ile P1 ve P2 aksiyomları gereğince ayrı ayrı doğru oluşturur. O halde B 'den geçen doğru sayısı d üzerindeki nokta sayısına eşit, yani $q + 1$ olmalıdır. k , P 'de d 'den farklı bir doğru olmak üzere, B 'den geçen $q + 1$ tane doğru k ile $q + 1$ farklı noktada kesişir. Ayrıca k üzerinde daha fazla nokta olması, P1 aksiyomu gereği B 'den geçen doğru sayısının da fazla olmasını gerektirdiğinden mümkün değildir. Dolayısıyla k üzerinde tam olarak $q + 1$ nokta vardır. d ve k üzerinde eşit sayıda nokta olduğundan ve k burada rastgele seçildiğinden P 'deki her doğru üzerinde eşit sayıda nokta olmak zorundadır.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

P3 aksiyomu gereğince d üzerinde olmayan en az bir nokta daha vardır. Bu nokta T noktası olsun. T için de B için geçerli olan durum söz konusu olduğundan T 'den geçen doğru sayısı da $q + 1$ olmalıdır. N ve T noktaları, d üzerinde olmayan rastgele noktalar olduğundan bu eşitlik d üzerinde olmayan diğer noktalar için de geçerlidir. d , P 'de herhangi bir doğru olduğundan ve her doğru üzerindeki nokta sayısı aynı olduğundan bu durum P 'de seçilen tüm doğru ve noktalar için geçerli olur. O halde, bir P projektif düzleminde her doğru üzerinde $q + 1$ tane nokta varsa her noktadan da $q + 1$ tane doğru geçer.

Burada q sayısı P 'nin mertebesidir ve P 'deki toplam doğru ve nokta sayısı hesaplanacak olursa şöyle ifade edilebilir:

B , P 'de herhangi bir nokta olmak üzere; B 'den geçen doğru sayısı $q + 1$ 'dir. Bu doğruların her biri üzerinde B hariç q tane nokta vardır. Bu noktalar birbirinden farklıdır. Aksi takdirde iki farklı doğru iki farklı noktada kesişir ki bu durum, P2 aksiyomu ile çelişir. Dolayısıyla B hariç toplam nokta sayısı;

$$q(q + 1) = q^2 + q$$

ve B ile beraber

$$q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$$

olarak bulunur.

Noktalar için yapılan hesaplama benzer yolla doğru sayısı bulunabilir. d , P 'de bir doğru olmak üzere, d üzerindeki nokta sayısı $q + 1$ 'dir. Bu noktaların her birinden d hariç q tane doğru geçer. Bu doğrular birbirinden farklıdır. Aksi takdirde farklı iki nokta farklı iki doğru üzerinde olur ki bu durum, P1 aksiyomu ile çelişir. Dolayısıyla d hariç toplam doğru sayısı;

$$q(q + 1) = q^2 + q$$

ve d ile beraber

$$q(q + 1) + 1 = q^2 + q + 1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4: Her afin düzlemin tamamlanışı ile bir projektif düzlem elde edilir.

Teorem 3.5: Herhangi bir projektif düzlemin herhangi bir doğrusu, üzerindeki noktalar ile birlikte çıkarılırsa bir afin düzlem elde edilir.

Şimdi, en küçük projektif düzlem olan Fano düzleminin $q = 2$ mertebeli afin düzlem üzerinden nasıl elde edileceğinden bahsedilecektir.

Şekil 3.3'de elde edilen afin düzlemden projektif düzlem elde edilmesi için toplamda:

$$(q^2 + q + 1) - (q^2 + q) = 7 - 6 = 1$$

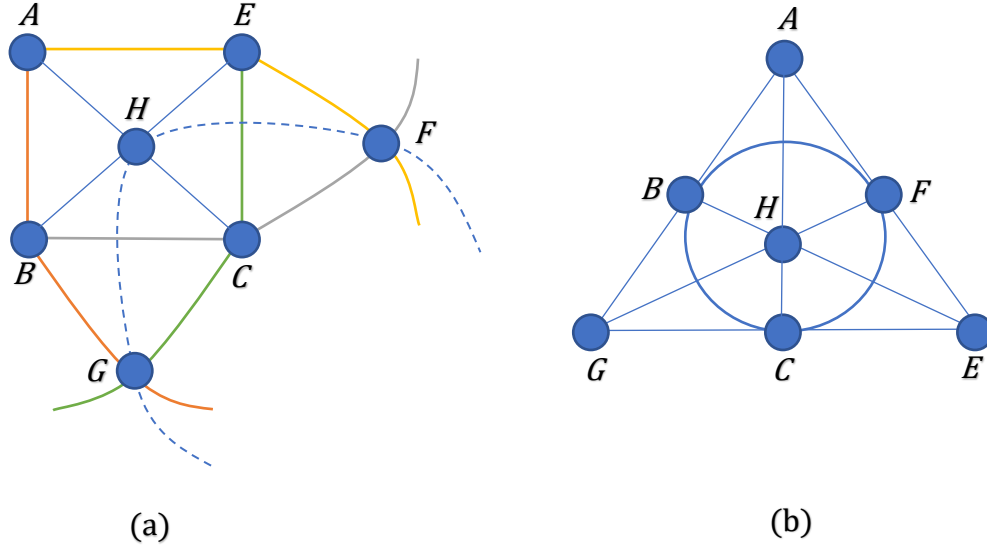
doğru ve

$$(q^2 + q + 1) - (q^2) = 7 - 4 = 3$$

nokta ilave edilmelidir.

Zaten $q = 2$ için projektif düzlemde bir doğru üzerinde 3 nokta olduğundan böyle bir doğru aksiyom şartlarını sağlayacak şekilde eklenmelidir. Burada afin düzlemde paralel olan doğruların projektif düzlemde kesişmeleri gerekmesinden yola çıkılabilir. O halde AE ile BC doğrusu F noktasında, AB ile EC doğrusu G noktasında ve AC ile BE doğrusu H noktasında kesişsin. Eklenen bu 3 nokta bir d_7 doğrusu üzerinde alınırsa tüm doğrular kesişmiş ve her noktadan 3 doğru geçmiş olur. Ayrıca, her doğru üzerinde 3 nokta olup, toplam nokta ve toplam doğru sayısı 7 olur. H noktası rahat olması açısından

Şekil 3.5 (a)'daki gibi seçilebilir. F ve G noktaları da doğrular kesişmek suretiyle bulunur. Şekil 3.5 (a) elde edildikten sonra görsel olarak daha hoş bir görüntü sunan Şekil 3.5 (b) oluşur ki bu düzlem projektif düzlemler içerisinde en çok bilinen Fano düzlemdir.



Şekil 3.5. Fano düzlemleri ($N = \{A, B, C, E, F, G, H\}$ kümesi ile)

Böylece bu düzlem doğruları;

$$d_1 = \{A, E, F\}, d_2 = \{B, C, F\}, d_3 = \{A, B, G\}, d_4 = \{E, C, G\}, d_5 = \{A, H, C\},$$

$$d_6 = \{B, H, E\}, d_7 = \{G, H, F\}$$

olarak elde edilmiş olur.

Tanım 3.6: S bir projektif düzlemde noktalar ve doğrular ile ilgili bir ifade olmak üzere S' 'de nokta ve doğru kelimelerinin yeri değiştirilerek elde edilen S^* ifadesine S' 'nin duali denir ve aşağıdaki aksiyomları sağlar:

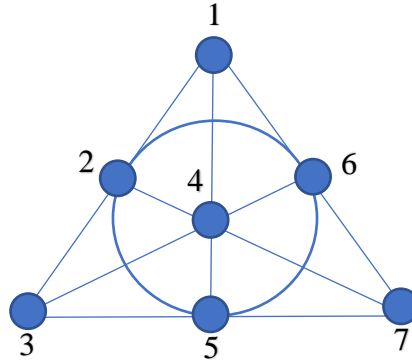
- S1**–) Farklı iki doğru üzerinde bulunan tek bir nokta vardır.
- S2**–) Farklı iki noktayı üzerinde bulunduran tek bir doğru vardır.
- S3**–) Herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen en az dört doğru vardır.

S1, P1'in; S2, P2'nin; S3, P3'ün duali olup projektif düzlemin duali de bir projektif düzlemdir.

3.1.3. Fano düzlem ve kolinasyonları

En küçük mertebeli projektif düzlem olan Fano düzlemi Şekil 3.5 (b)'de gösterilmişti. Bu noktalar Şekil 3.6'da olduğu gibi 1'den 7'ye kadar olan tamsayılarla da gösterilebilir.

Örnek 3.1: $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$ olmak üzere; $d_1 = \{1,2,3\}$, $d_2 = \{1,4,5\}$, $d_3 = \{1,6,7\}$, $d_4 = \{2,4,7\}$, $d_5 = \{2,5,6\}$, $d_6 = \{3,4,6\}$ ve $d_7 = \{3,5,7\}$ olsun. Bu durumda elde edilen Fano düzlemi Şekil 3.6'daki gibidir.



Şekil 3.6. Fano düzlemi

Burada doğruların seçiminden bağımsız tek bir düzlem olduğu şu teoremle ifade edilir:

Teorem 3.6: 2. mertebeden tek bir projektif düzlem vardır.

İspat: 2. mertebeden projektif düzlemde ya da Fano düzleminde 7 nokta bulunur. Bu noktalar $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}$ olmak üzere Teorem 3.3 gereği her noktadan 3 doğru geçer ve her doğru üzerinde 3 nokta vardır.

Bu durumda; $\{1\}$ noktasından geçen doğrular aksiyomları sağlayacak şekilde $\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}$ olsun. $\{2\}$ noktasından iki doğru daha geçmesi gerekir ki bu doğrular aynı iki noktayı bir araya getirmeyecek şekilde $\{2,4,7\}$ ve $\{2,5,6\}$ olarak seçilebilir. $\{3\}$ ile $\{4\}$ noktaları da bir doğru üzerinde olması gerektiğinden ve $\{4\}$ noktası $\{1\}, \{2\}, \{5\}$ ve $\{7\}$ noktaları ile aynı doğru üzerinde yer aldığından bu noktaların yanına üçüncü nokta olarak sadece $\{6\}$ noktası eklenebilir. Bu durumda $\{3,4,6\}$ doğrusu zorunludur. Her noktadan üç doğru geçmesi gerektiğinden geriye kalan $\{3\}, \{5\}, \{7\}$ noktaları da bir doğru üzerinde olacak şekilde $\{3,5,7\}$ doğrusunu oluşturmak zorundadır. Bu durumda her doğru üzerinde üç nokta ve her noktadan üç doğru geçecek şekilde toplam yedi nokta ve yedi doğru ile 2. mertebeden tek bir projektif düzlem elde edilir.

Peki bu doğrular Fano düzlemi üzerinde kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

2. mertebeden projektif düzlemde birbirine denk kaç tane düzlem olduğunu bulmak ve üstteki sorunun cevabı için izomorfizm ve otomorfizm ifadelerinin tanımlarını yapmak gerekir.

Tanım 3.7: P_1 ve P_2 iki projektif düzlem olmak üzere; P_1 'in noktalarını ve doğrularını sırasıyla P_2 'nin noktalarına ve doğrularına götüren, ayrıca üzerinde olma bağıntısını koruyan birebir ve örten bir fonksiyona P_1 'den P_2 'ye bir izomorfizm ve bu düzlemlere izomorf düzlemler denir.

Eğer bu fonksiyon P_1 'den P_1 'e, yani kendi üzerine olursa bu izomorfizme otomorfizm ya da kolonasyon adı verilir. P_1 'in tüm otomorfizmleri, otomorfizmler grubunu ya da kolonasyonlar grubunu oluşturur ve $G(P_1)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2: P düzlemi Örnek 3.1'deki gibi alınsın. α , P 'de bir otomorfizm olmak üzere;

$\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 4, \alpha(3) = 7, \alpha(4) = 5, \alpha(5) = 6, \alpha(6) = 3, \alpha(7) = 1$ ya da 7'li permütasyonu ile

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak belirtilen α otomorfizmi boşta nokta kalmayacak şekilde noktayı noktaya götürdüğü gibi doğruları da boşta doğru kalmayacak şekilde aşağıdaki gibi doğrulara götürür.

$$\begin{array}{lll} \{1,2,3\} \rightarrow \{2,4,7\} & \{1,4,5\} \rightarrow \{2,5,6\} & \{1,6,7\} \rightarrow \{1,2,3\} \\ \{2,4,7\} \rightarrow \{1,4,5\} & \{2,5,6\} \rightarrow \{3,4,6\} & \{3,4,6\} \rightarrow \{3,5,7\} \\ \{3,5,7\} \rightarrow \{1,6,7\} & & \end{array}$$

Burada α otomorfizmi sonucu elde edilen doğruların baştaki doğrular ile aynı olduğu görülmektedir. Bu yüzden elde edilecek şekil, Şekil 3.6 ile benzer ve izomorfik olmak durumundadır.

Teorem 3.7: P, Fano düzlemi, yani $PG(2,2)$ olmak üzere $G(P) = 168$ 'dir (Doyle et al. 2015).

İspat: Şekil üzerinden hareketle $G(P)$ bulunabileceği gibi permütasyon gösterimi ile de sonuca ulaşılabilir. Burada otomorfizm, doğruları doğrulara götürmesi gerektiğinden doğruların başta seçilmiş olması gerekir. O halde doğrular üstteki örnekte olduğu gibi seçilebilir.

$d_1 = \{1,2,3\}$, $d_2 = \{1,4,5\}$, $d_3 = \{1,6,7\}$, $d_4 = \{2,4,7\}$, $d_5 = \{2,5,6\}$,
 $d_6 = \{3,4,6\}$, $d_7 = \{3,5,7\}$ olmak üzere şekil üzerinde doğruların değişmemesi şartıyla kaç farklı şekilde dizilim yapılacağı bulunursa $G(P)$ bulunabilir.

α , P'de bir otomorfizm olmak üzere, α otomorfizminin noktadan hangi noktaya gittiğini göstermek gerekirse;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \text{permütasyonu için;}$$

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

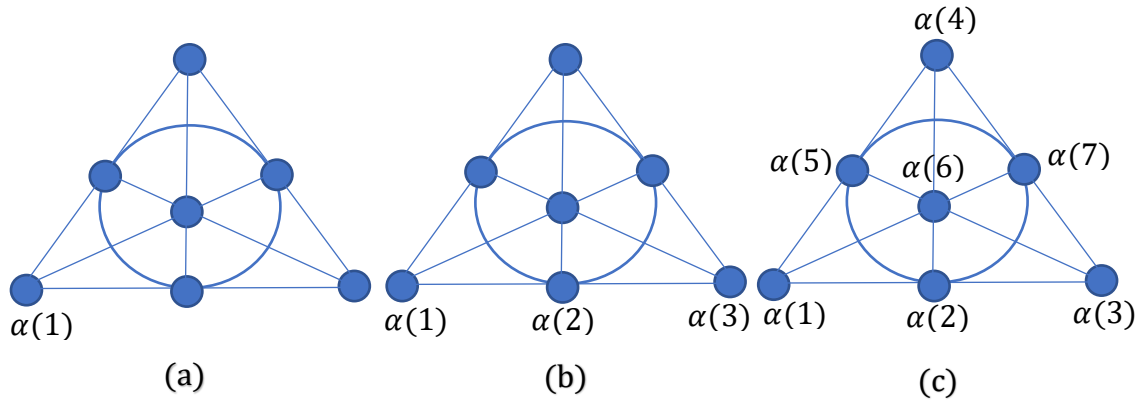
$\alpha(1)$, 1'den 7'ye kadar olan tamsayılardan herhangi birini alabilir, yani $\{1\}$ noktası, noktalardan herhangi birine gidebilir. Birebir ve örtenliğin sağlanması için $\alpha(2)$, kalan 6 sayıdan herhangi birini alabilse de $\{1\}$ ve $\{2\}$ noktaları ile aynı doğru üzerinde bulunan $\{3\}$ noktasının gidebileceği tek ihtimalli bir nokta kalır ki kendi içinden bir doğru elde edilebilsin. Dolayısıyla $\alpha(3)$ tek bir değer almak zorundadır. $\{4\}$ noktası da $\{1\}$, $\{2\}$ ve $\{3\}$ noktalarının herhangi ikisiyle bir doğru üzerinde bulunmadığından geriye kalan 4 noktadan herhangi birine gidebilir, yani $\alpha(4)$, 4 sayıdan biri olabilir. Fakat bundan sonra durumlar sınırlanmış olur ve $\{5\}$, $\{6\}$ ve $\{7\}$ noktalarının $\{3\}$ noktasındaki gibi bir mantıktan hareketle tek bir ihtimal dahilinde gidebilecekleri noktalar belli olduğundan burada durum sayısı artmaz.

O halde otomorfizm sayısı;

$$G(P) = 7 * 6 * 4 = 168$$

olarak bulunur. Bu otomorfizmlerden bir tanesi Örnek 3.2'de gösterilmişti.

Şekil 3.7 üzerinde gösterim ele alınacak olursa;



Şekil 3.7. Fano düzlem için otomorfizm seçenekleri

Şekil 3.7 (a)'da $\alpha(1)$ için 7 ihtimal var. 7 noktadan biri seçilebilir. Şekil 3.7 (b)'de $\alpha(2)$ için 6 ihtimal var. Kalan 6 noktadan biri seçilebilir. Böylece $\alpha(3)$ ün yeri bellidir. Şekil 3.7 (c)'de $\alpha(4)$ için 4 ihtimal var. Kalan 4 noktadan biri seçildikten sonra $\alpha(5)$, $\alpha(6)$ ve $\alpha(7)$ in yeri bellidir.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

O halde otomorfizm sayısı yine $G(P) = 7 * 6 * 4 = 168$ olarak bulunur.

Farklı bir yoldan da otomorfizm sayısı bulunabilir.

Fano düzleminde şekil üzerinden inceleme yapıldığında doğruların doğrulara gitme zorunluluğu olmadan bulunan toplam permütasyon sayısının, 7 noktanın projektif düzlemin aksiyomlarını sağlayacak şekilde oluşturacağı farklı doğru gruplarının sayısına bölümü otomorfizm sayısını verir. Toplam permütasyon sayısının 7! olduğu aşikardır. Dolayısıyla kaç farklı gruplama yapıldığı bulunmalıdır.

Örneğin; $\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,7\}, \{2,5,6\}, \{3,4,6\}, \{3,5,7\}$ bir gruplama olup benzer şekilde, $\{1,2,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,7\}, \{2,3,4\}, \{2,6,7\}, \{3,5,7\}, \{4,5,6\}$ de bir gruplamadır. Aksiyomlar gereği her ikili nokta sadece bir kümede, her nokta toplamda üç kümede yer almalıdır. Bu şartlar altında “7 nokta ile 7 küme kaç farklı şekilde elde edilebilir.” in cevabı bulunmalıdır.

Herhangi iki nokta tam olarak bir defa aynı küme içinde bulunacağından $\{1\}$ ile $\{2\}$ noktaları ele alınırsa üçüncü nokta olarak yanlarına $\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}$ noktalarından biri gelebilir. Dolayısıyla 5 durum var.

$\{3\}$ noktası kümeye dahil olsun. İlk küme $\{1,2,3\}$ olarak bulunur. $\{1\}$ noktasından devam etmek kaydıyla $\{1\}$ ve $\{4\}$ noktaları birlikte ele alınırsa üçüncü nokta olarak yanlarına geriye kalan $\{5\}, \{6\}, \{7\}$ noktalarından biri gelebilir. Dolayısıyla 3 durum var.

$\{5\}$ noktası kümeye dahil olsun. İkinci küme $\{1,4,5\}$ olarak bulunur. Bu durumda üçüncü küme $\{1,6,7\}$ olmak zorundadır. Böylece $\{1\}$ noktası için üç küme belirlenmiş olduğundan $\{2\}$ noktasına geçilebilir. $\{2\}$ ve $\{4\}$ noktaları birlikte ele alınırsa üçüncü nokta olarak yanlarına geriye kalan $\{6\}$ ya da $\{7\}$ noktalarından biri gelebilir. Dolayısıyla 2 durum var.

$\{6\}$ noktası kümeye dahil olsun. Dördüncü küme $\{2,4,6\}$ olarak bulunur. Bu durumda beşinci küme $\{2,5,7\}$ olmak zorundadır. $\{3\}$ noktasından devam edip $\{3\}$ ve $\{4\}$

Çizelge 3.1. (devam)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--|-------------|--|-------------|-------------|--|-------------|--|-------------|-------------|--|-------------|--|-------------|--|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---|--|---|--|---|--|---------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <table style="margin: auto; border: none;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,5\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,5\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,5\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,4\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,6\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,6,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,6\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,5\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td></tr> <tr><td colspan="6" style="text-align: center; padding: 10px 0;">$2*3=6$</td></tr> </table> | $\{1,2,5\}$ | | $\{1,2,5\}$ | | $\{1,2,5\}$ | $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,6\}$ | | $\{1,3,7\}$ | $\{1,6,7\}$ | | $\{1,4,7\}$ | | $\{1,4,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,4,7\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{2,6,7\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{2,6,7\}$ | $\{2,4,7\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,4,5\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,4,5\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | 2 | | 2 | | 2 | | $2*3=6$ | | | | | | | | | | |
| $\{1,2,5\}$ | | $\{1,2,5\}$ | | $\{1,2,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,6\}$ | | $\{1,3,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,6,7\}$ | | $\{1,4,7\}$ | | $\{1,4,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,6\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,4,7\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{2,6,7\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{2,6,7\}$ | $\{2,4,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{3,5,7\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,4,5\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,4,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{4,5,6\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $2*3=6$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="margin: auto; border: none;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,6\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,6\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,6\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,4\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,5\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,5,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,5\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,6\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td></tr> <tr><td colspan="6" style="text-align: center; padding: 10px 0;">$2*3=6$</td></tr> </table> | $\{1,2,6\}$ | | $\{1,2,6\}$ | | $\{1,2,6\}$ | $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,5\}$ | | $\{1,3,7\}$ | $\{1,5,7\}$ | | $\{1,4,7\}$ | | $\{1,4,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,4,7\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,7\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,7\}$ | $\{2,4,7\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,4,6\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,4,6\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | 2 | | 2 | | 2 | | $2*3=6$ | | | | | | | | | | |
| $\{1,2,6\}$ | | $\{1,2,6\}$ | | $\{1,2,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,5\}$ | | $\{1,3,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,5,7\}$ | | $\{1,4,7\}$ | | $\{1,4,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,5\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,7\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,4,7\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,7\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,7\}$ | $\{2,4,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{3,6,7\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,4,6\}$ | $\{3,5,6\}$ | $\{3,4,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{4,5,6\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{4,5,6\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $2*3=6$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <table style="margin: auto; border: none;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,7\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,2,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,4\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,5\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,3,6\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,5,6\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,6\}$</td><td></td><td style="padding: 2px 10px;">$\{1,4,5\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td><td colspan="2" style="border-top: 1px solid black; padding: 2px 10px;">$\{2,3,4\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,3,5\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,5\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,5,6\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{2,4,6\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{3,4,7\}$</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,5,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{4,6,7\}$</td><td style="padding: 2px 10px;">$\{5,6,7\}$</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td><td colspan="2" style="text-align: center; padding: 5px 10px;">2</td></tr> <tr><td colspan="6" style="text-align: center; padding: 10px 0;">$2*3=6$</td></tr> </table> | $\{1,2,7\}$ | | $\{1,2,7\}$ | | $\{1,2,7\}$ | $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,5\}$ | | $\{1,3,6\}$ | $\{1,5,6\}$ | | $\{1,4,6\}$ | | $\{1,4,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,6\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,6\}$ | $\{2,4,6\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,4,7\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,4,7\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | 2 | | 2 | | 2 | | $2*3=6$ | | | | | | | | | | |
| $\{1,2,7\}$ | | $\{1,2,7\}$ | | $\{1,2,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,3,4\}$ | | $\{1,3,5\}$ | | $\{1,3,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{1,5,6\}$ | | $\{1,4,6\}$ | | $\{1,4,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,5\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | $\{2,3,4\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,6\}$ | $\{2,3,5\}$ | $\{2,3,5\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{2,4,6\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,6\}$ | $\{2,4,5\}$ | $\{2,5,6\}$ | $\{2,4,6\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{3,6,7\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,6,7\}$ | $\{3,4,7\}$ | $\{3,5,7\}$ | $\{3,4,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\{4,5,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{4,5,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | $\{4,6,7\}$ | $\{5,6,7\}$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 2 | | 2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $2*3=6$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <div style="border: 1px solid black; width: 100%; height: 100%; margin: 0 auto; position: relative;"> <div style="position: absolute; top: 50%; left: 50%; transform: translate(-50%, -50%); font-size: 2em;">}</div> </div> <p style="margin-top: 10px;">$6*5=30$</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

O halde toplam permütasyon sayısını gruplama sayısına bölersek;

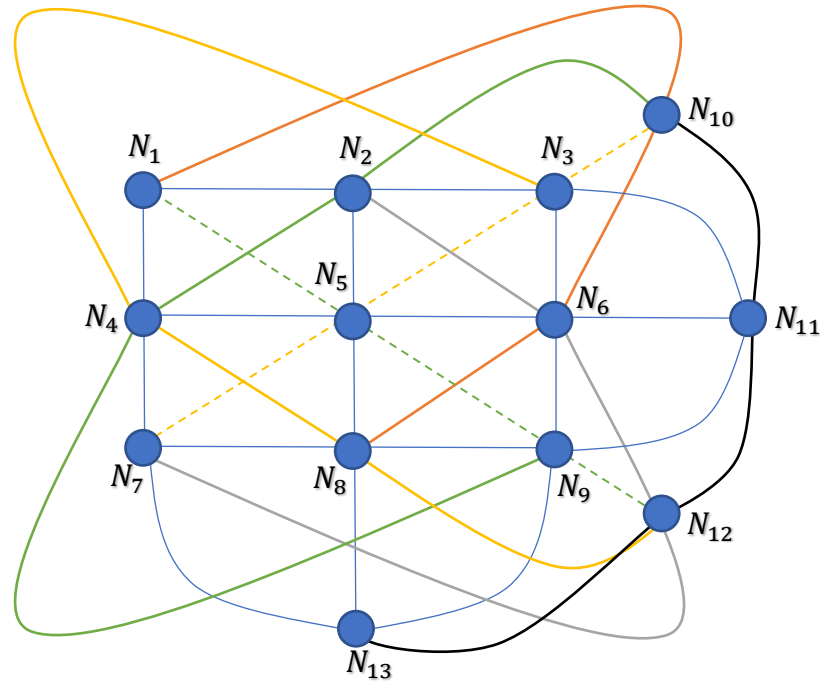
$$7!/30 = 5040/30 = 168$$

olarak bulunur. Bu değer önceden hesaplanan otomorfizm sayısıdır. Gruplama yöntemi bize aynı sonucu daha uzun hesaplamada verir. Bu yöntem ile daha büyük mertebelerde sonuca ulaşmak zordur.

3. mertebeden projektif düzlemin otomorfizm sayısı şekil üzerinden verilmeden önce düzlem hakkında bazı bilgiler verilecek ve mertebelere göre otomorfizm sayısı tablo halinde gösterilecektir.

3.1.4. 3. mertebeden projektif düzlem ve kolinasyonları

Afin düzlemin tamamlanışından hareketle 3. mertebeden projektif düzlem bulunabilir. Birbirine paralel olan doğruları yeni bir noktada kesiştirerek ve oluşan yeni 4 noktayı da yeni bir doğru üzerinde ele alarak 13 nokta ve 13 doğru ile aksiyomları sağlayacak şekilde elde edilir.



Şekil 3.8. 3. mertebeden projektif düzlem (P3)

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

$$\begin{aligned}d_1 &= \{N_1, N_2, N_3, N_{11}\}, d_2 = \{N_4, N_5, N_6, N_{11}\}, d_3 = \{N_7, N_8, N_9, N_{11}\}, \\d_4 &= \{N_1, N_4, N_7, N_{13}\}, d_5 = \{N_2, N_5, N_8, N_{13}\}, d_6 = \{N_3, N_6, N_9, N_{13}\}, \\d_7 &= \{N_1, N_5, N_9, N_{12}\}, d_8 = \{N_3, N_5, N_7, N_{10}\}, d_9 = \{N_1, N_6, N_8, N_{10}\}, \\d_{10} &= \{N_2, N_4, N_9, N_{10}\}, d_{11} = \{N_2, N_6, N_7, N_{12}\}, d_{12} = \{N_3, N_4, N_8, N_{12}\}, \\d_{13} &= \{N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}\end{aligned}$$

olacak şekilde P1, P2, P3 aksiyomları sağlanmış olup 3. mertebeden projektif düzlem Şekil 3.8'deki gibi elde edilir. Bu düzlem P_3 düzlemi olsun.

Burada otomorfizm sayısı, doğruları doğrulara eşleştirme mantığından hareketle bulunabilir. β , P_3 'de bir otomorfizm olsun.

$$\beta = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & N_9 & N_{10} & N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

permütasyonu için $d_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_{11}\}$ doğrusunu ele alalım:

Başta N_1 noktası herhangi bir noktaya gidebileceğinden $\beta(N_1)$, 13 farklı değer alabilir. $\beta(N_2)$ ise kalan 12 değerden biri olabilir. Farz edelim ki;

$$\beta(N_1) = N_4 \text{ ve } \beta(N_2) = N_5$$

olsun. Bu durumda N_4 ve N_5 in üzerinde olduğu doğruyu elde edebilmek için $\beta(N_3)$, N_6 veya N_{11} olmak zorundadır. Yani, 2 değer alabilir.

$$\beta(N_3) = N_6$$

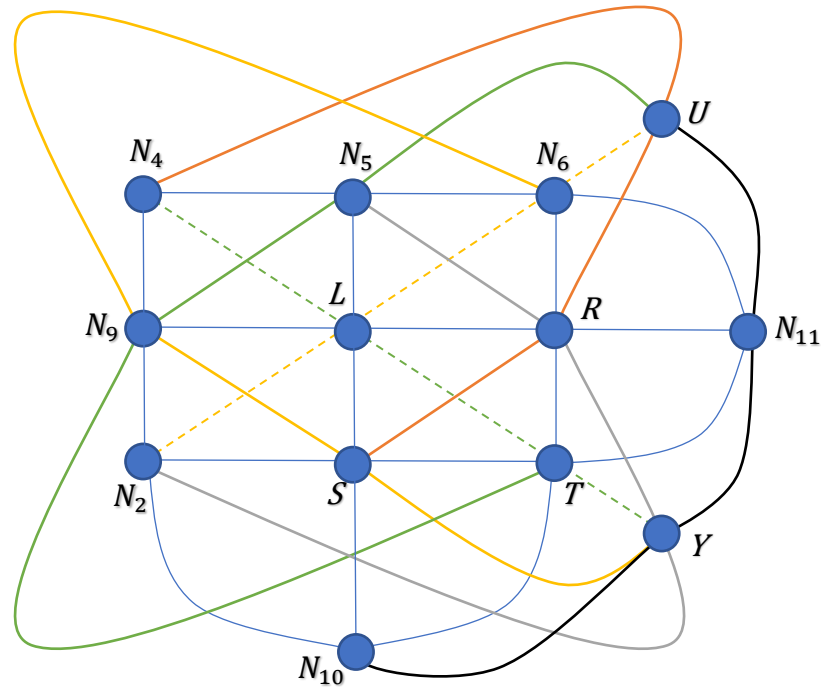
olsun. Bu durumda $\beta(N_{11}) = N_{11}$ olmalıdır. Şimdi $d_4 = \{N_1, N_4, N_7, N_{13}\}$ doğrusunu ele alalım. $\beta(N_1) = N_4$ olarak seçilmişti. $\beta(N_4)$, $\beta(N_7)$ ve $\beta(N_{13})$ bulunmalıdır. N_4 noktası kalan noktaların hepsine gidebileceğinden $\beta(N_4)$, 9 farklı değer alabilir. Mesela;

$$\beta(N_4) = N_9$$

olsun. Bu durumda; N_4 ve N_9 'un üzerinde olduğu doğruyu elde edebilmek için $\beta(N_7)$, N_2 veya N_{10} olmak zorundadır. Yani, 2 değer alabilir. Diyelim ki;

$$\beta(N_7) = N_2$$

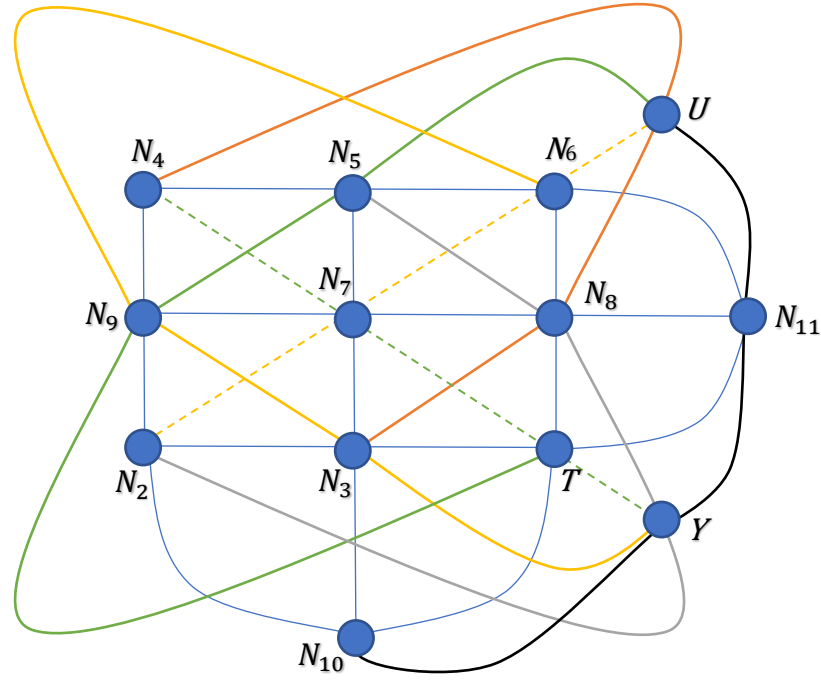
olsun. Bu durumda $\beta(N_{13}) = N_{10}$ olmalıdır. Bundan sonraki durumlarda $\beta(N_5)$, $\beta(N_6)$, $\beta(N_8)$, $\beta(N_9)$, $\beta(N_{10})$, $\beta(N_{12})$ için tek bir ihtimal olup β permütasyonu elde edilebilir. Bu durum Şekil 3.9 ve Şekil 3.10 üzerinden görülebilir.



Şekil 3.9. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için otomorfizm seçenekleri-1

Şekilde seçili noktaları yerine koyduğumuzda N_9 ile N_{11} 'in üzerinde olduğu doğru ayrıca N_7 ve N_8 'i içermelidir. O halde L ve R , N_7 veya N_8 olmalıdır. Aynı mantıkla N_5 ile N_{10} 'un üzerinde olduğu doğru N_3 ve N_7 'yi içermelidir. O halde L ve S , N_3 veya N_7 olmalıdır. Bu durumda L mecburi olarak N_7 ; R mecburi olarak N_8 ve S de N_3 olur.

L , R ve S için bulunan noktalar yerine konarsa Şekil 3.10 elde edilir.



Şekil 3.10. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için otomorfizm seçenekleri-2

Burada N_2, N_3 ve N_{11} ile aynı doğru üzerinde bulunan T noktası N_1 olmak zorundadır. Aynı şekilde N_2, N_6 ve N_7 ile aynı doğru üzerinde bulunan U noktası N_{12} ve yine N_2, N_5 ve N_8 ile aynı doğru üzerinde bulunan Y noktası da N_{13} olmalıdır.

O halde P_3 için tüm durumlar çarpılarak elde edilen otomorfizm sayısı;

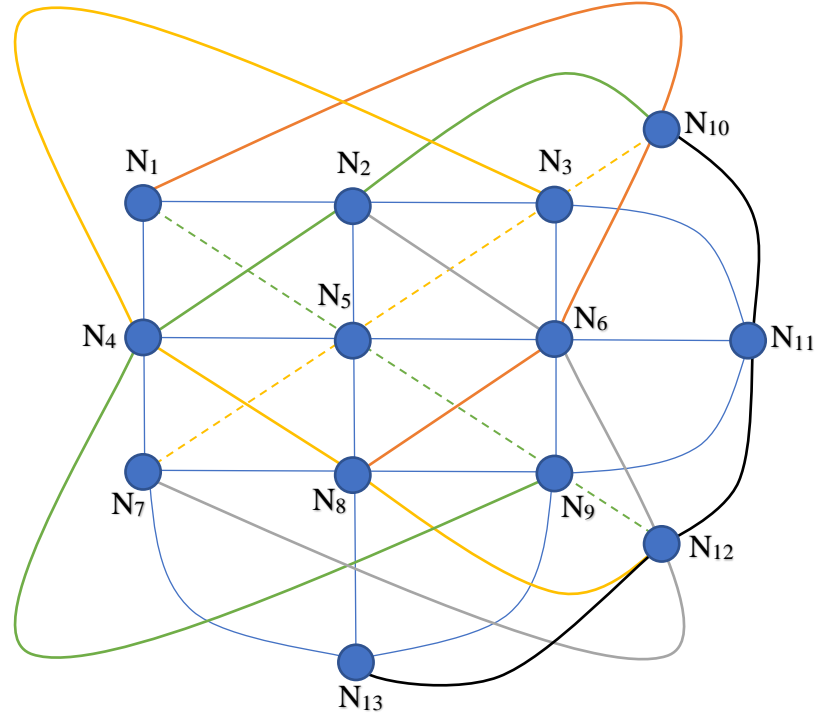
$$G(P_3) = 13 * 12 * 2 * 9 * 2 = 5616$$

olarak bulunur.

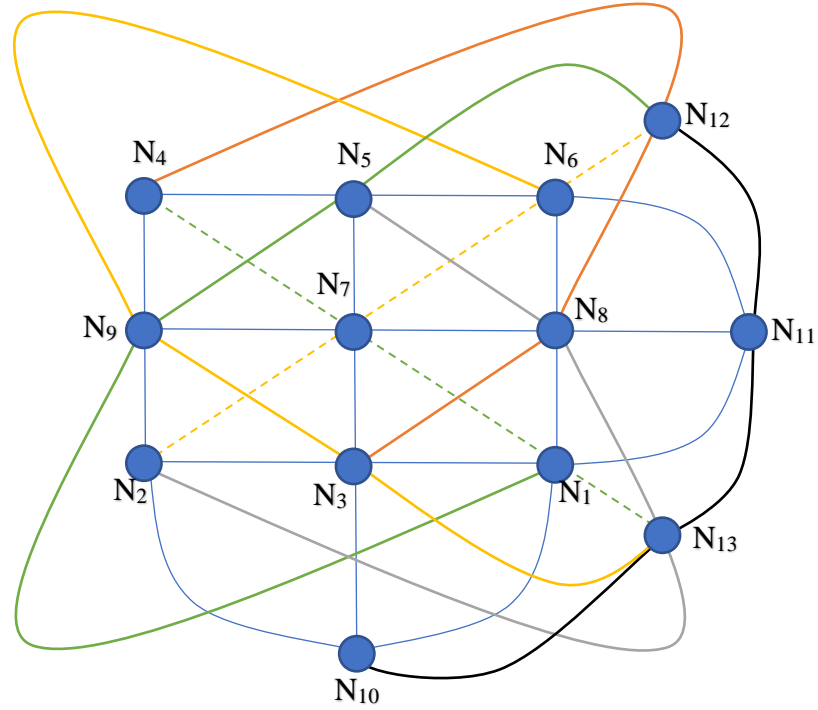
Böylece noktaların yerleri belli olup;

$$\begin{aligned} d_1 &= \{N_1, N_2, N_3, N_{11}\}, & d_2 &= \{N_4, N_5, N_6, N_{11}\}, & d_3 &= \{N_7, N_8, N_9, N_{11}\}, \\ d_4 &= \{N_1, N_4, N_7, N_{13}\}, & d_5 &= \{N_2, N_5, N_8, N_{13}\}, & d_6 &= \{N_3, N_6, N_9, N_{11}\}, \\ d_7 &= \{N_1, N_5, N_9, N_{12}\}, & d_8 &= \{N_3, N_5, N_7, N_{10}\}, & d_9 &= \{N_1, N_6, N_8, N_{10}\}, \\ d_{10} &= \{N_2, N_4, N_9, N_{10}\}, & d_{11} &= \{N_2, N_6, N_7, N_{12}\}, & d_{12} &= \{N_3, N_4, N_8, N_{12}\}, \\ d_{13} &= \{N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\} \end{aligned}$$

olmak üzere ilk ve son durum sırasıyla Şekil 3.11 ve Şekil 3.12’de verilmiştir:



Şekil 3.11. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için ilk durum



Şekil 3.12. 3. mertebeden P_3 projektif düzlemi için son durum

Böylece noktayı noktaya, doğruyu doğruya götüren β otomorfizmi, Şekil 3.11 ve Şekil 3.12'den, yani ilk ve son şekilden bulunur.

$$\beta = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 & N_9 & N_{10} & N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_4 & N_5 & N_6 & N_9 & N_7 & N_8 & N_2 & N_3 & N_1 & N_{12} & N_{11} & N_{13} & N_{10} \end{pmatrix}$$

Görüldüğü üzere N_{11} , kendisine giden tek nokta olup doğrular için dönüşümler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} d_1 &= \{N_1, N_2, N_3, N_{11}\} \rightarrow d_2 = \{N_4, N_5, N_6, N_{11}\} \\ d_2 &= \{N_4, N_5, N_6, N_{11}\} \rightarrow d_3 = \{N_7, N_8, N_9, N_{11}\} \\ d_3 &= \{N_7, N_8, N_9, N_{11}\} \rightarrow d_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_{11}\} \\ d_4 &= \{N_1, N_4, N_7, N_{13}\} \rightarrow d_{10} = \{N_2, N_4, N_9, N_{10}\} \\ d_5 &= \{N_2, N_5, N_8, N_{13}\} \rightarrow d_8 = \{N_3, N_5, N_7, N_{10}\} \\ d_6 &= \{N_3, N_6, N_9, N_{11}\} \rightarrow d_9 = \{N_1, N_6, N_8, N_{11}\} \\ d_7 &= \{N_1, N_5, N_9, N_{12}\} \rightarrow d_4 = \{N_1, N_4, N_7, N_{13}\} \\ d_8 &= \{N_3, N_5, N_7, N_{10}\} \rightarrow d_{11} = \{N_2, N_6, N_7, N_{12}\} \\ d_9 &= \{N_1, N_6, N_8, N_{10}\} \rightarrow d_{12} = \{N_3, N_4, N_8, N_{12}\} \\ d_{10} &= \{N_2, N_4, N_9, N_{10}\} \rightarrow d_7 = \{N_1, N_5, N_9, N_{12}\} \\ d_{11} &= \{N_2, N_6, N_7, N_{12}\} \rightarrow d_5 = \{N_2, N_5, N_8, N_{13}\} \\ d_{12} &= \{N_3, N_4, N_8, N_{12}\} \rightarrow d_6 = \{N_3, N_6, N_9, N_{13}\} \\ d_{13} &= \{N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\} \rightarrow d_{13} = \{N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\} \end{aligned}$$

Görüldüğü üzere d_{13} kendisine giden tek doğrudur.

Uzaylara göre otomorfizm sayıları Çizelge 3.2'de gösterilmiştir:

Çizelge 3.2. Uzaylara göre otomorfizm sayıları (Anonymous 2023a)

| Uzayın ismi | Nokta sayısı | Doğru sayısı | Otomorfizm sayısı |
|--------------|--------------|--------------|-------------------|
| PG(2,2) | 7 | 7 | 168 |
| PG(2,3) | 13 | 13 | 5616 |
| PG(2,4) | 21 | 21 | 120960 |
| PG(2,5) | 31 | 31 | 372000 |
| PG(2,7) | 57 | 57 | 5630688 |
| PG(2,8) | 73 | 73 | 49448448 |
| PG(2,9) | 91 | 91 | 84913920 |
| Hall(9) | 91 | 91 | 311040 |
| Dual Hall(9) | 91 | 91 | 311040 |
| Hughes(9) | 91 | 91 | 33696 |
| PG(2,11) | 133 | 133 | 212427600 |
| PG(2,13) | 183 | 183 | 810534816 |
| PG(3,2) | 15 | 15 | 20160 |
| PG(3,3) | 40 | 40 | 73343 |

3.1.5. Bruck – Ryser Teoremi

Projektif düzlemlerin asal ve kuvvetlerindeki mertebelerde olduğu Çizelge 3.2’den de görülüyor. Peki bu konuya başka bir yaklaşım olabilir mi? Bunun için Bruck and Ryser (1949) hangi mertebelerde projektif düzlemin olmadığı hakkında bir fikir beyan ediyor.

Teorem 3.8 (Bruck-Ryser Teoremi): q , iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa ve ayrıca $q \equiv 1 \pmod{4}$ veya $q \equiv 2 \pmod{4}$ ise mertebesi q olan bir projektif düzlem yoktur.

Örneğin; 6 sayısının 4’e bölümünden kalan 2 olup iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılamadığından 6. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığı Teorem 3.8’den söylenebilir. Benzer şekilde 21 sayısının 4’e bölümünden kalan 1 olup iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılamadığından 21. mertebeden bir projektif düzlem yoktur. Fakat 10 sayısının 4’e bölümünden kalan 2 olup iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılabildiğinden $(1^2+3^2=10)$ 10. mertebeden bir projektif düzlem olup olmadığı

hakkında Teorem 3.8 bize kesin bilgi vermez. Bruck-Ryser Teoremi ayrıca 4'e bölümünden kalanın 1 veya 2 olmadığı 12, 15 gibi sayılar hakkında da net bir şey söylemez.

Şu ana kadar ki çalışmalarda en önemli ilerleme Bruck-Ryser Teoremi olup 10. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığı algoritmalarla durum sayısı düşürülerek kalan olası tüm durumların bilgisayar yardımıyla hesaplanması ile Lam et al. (1989) tarafından bulunmuştur.

12. mertebeden bir projektif düzlemin olup olmadığı çözülemeyen bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Açık Problem 1: 12. mertebeden bir projektif düzlem var mı?

3.2. Projektif Düzlemlerin Oluşturulması

2, 3, 4, 5, 7 ve 8. mertebeden birer tek projektif düzlemin olduğu bilinmektedir. Bu bölümde 5. mertebeden projektif düzlemin tekliği gösterilecek ve 9. mertebeden dört farklı düzlemden bahsedilecektir. Projektif düzlemin cebirsel bir yapı ile nasıl kurulduğu, Desarg ve Pappus Teoremleri, bazı temel kavramlar ışığında noktaların ve doğruların nasıl koordinatlanacağı ya da etiketleneceği anlatılacaktır.

3.2.1. 5. mertebeden projektif düzlem

$F = GF(5)$ cismi yardımıyla kurulan P_2F düzleminin var olduğu bilinmektedir. Bu düzlemin tek olduğunu göstermek için önce aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 3.8: q . mertebeden bir projektif düzlemde herhangi üçü doğrudan olmayan $q + 1$ nokta kümesine oval denir (Akpınar 2001).

Teorem 3.9'un ispatı Akpınar (2001)'da bulunmaktadır, ancak aşağıda verilen ispat daha ayrıntılı olarak verilmiştir.

Teorem 3.9: 5. mertebeden tek bir projektif düzlem vardır.

İspat: 5. mertebeden projektif düzlemde ya da farklı bir gösterimle $PG(2,5)$ 'de bir oval herhangi üçü aynı doğru üzerinde olmayan $q + 1 = 5 + 1 = 6$ tane nokta içerir.

P'deki nokta sayısı ve doğru sayısı;

$$q^2 + q + 1 = 5^2 + 5 + 1 = 31$$

olarak bulunur.

Bu düzlemin doğruları bir ovali ya bir noktada ya iki noktada keser, ya da ikiden fazla noktada kesmesi ovalin tanımıyla çelişeceğinden hiçbir noktada kesmez. Bir noktada kesen doğrulara teğet ya da tanjant doğrusu, iki noktada kesen doğrulara kesen ya da sekant doğrusu ve hiç kesmeyen doğrulara da kesmeyen ya da passant doğrusu denilecektir.

Ovaldeki herhangi bir nokta, diğer beş nokta ile P1 aksiyomu gereği bir doğru üzerinde bulunmak zorundadır. Ovalin tanımı gereği ovaldeki herhangi üç nokta aynı doğru üzerinde olamayacağından bu doğrular sekant doğruları ya da diğer ifadeyle kesenlerdir. 6 noktanın 2'li kombinasyonu alınırsa;

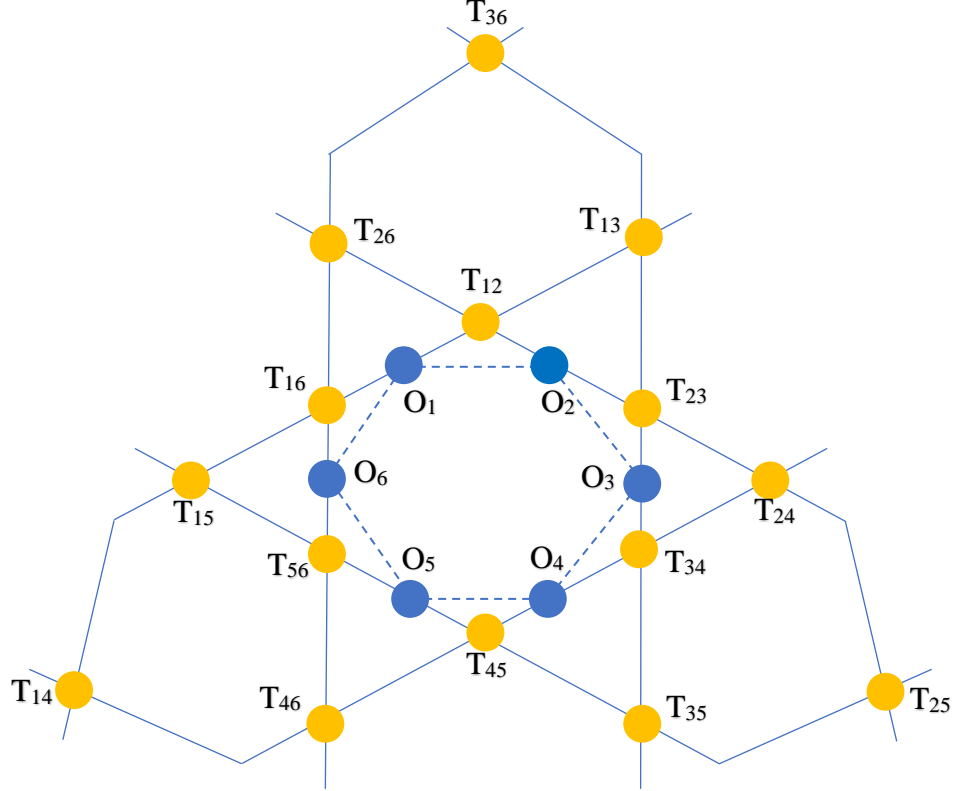
$$\binom{6}{2} = 15$$

tane kesen doğrusu bulunur. Dolayısıyla ovalin bir noktası üzerinden 5 tane kesen doğrusu geçeceğinden geriye kalan 6. doğru tanjant doğrusu ya da diğer ifadeyle teğettir. Aynı şekilde ovaldeki her bir noktadan bir teğet geçeceğinden toplam teğet sayısı 6'dır. Toplamda 31 doğru olduğundan geriye kalan;

$$31 - (6 + 15) = 10$$

tane passant doğrusu ya da diğer ifadeyle kesmeyen doğru vardır.

Ovalin noktaları O , teğetlerin üzerindeki O 'lar hariç noktalar T ve kalan noktalar S tipli noktalar olsun.



Şekil 3.13. 5. mertebeden projektif düzlemde bir konfigürasyon

O 'ların sayısının 6 olduğu açıktır. Geriye $31 - 6 = 25$ nokta kalır. Bir teğet üzerinde tek bir O olup geriye kalan 5 nokta T tiplidir. 6 tane teğet olduğundan $5 * 6 = 30$ eder. T 'lerin sayısı x alınıp her bir T üzerinden y tane teğet geçtiği varsayıldığında toplamdaki 30 sayısı; x ile y 'nin çarpımının y 'nin 2'li kombinasyonuna bölümüne eşit olur. Bu durumda;

$$\frac{x * y}{C(y, 2)} = 30 \Rightarrow \frac{x * y}{y * \frac{y-1}{2}} = 30 \Rightarrow \frac{x}{(y-1)} = 15$$

olup $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ve geriye kalan nokta sayısı 25 olduğundan $x = 15$ ve $y = 2$ 'dir. O halde T tipli nokta sayısı 15 olup her T üzerinden 2 tane teğet geçer ve bu noktalar Şekil 3.13'de

görüldüğü üzere T_{mn} formatında gösterilmiştir. Burada m ve n , T tipli noktaların indis numarasıdır. Geriye kalan;

$$31 - (6 + 15) = 10$$

nokta da teğetlerin hiçbiri üzerinde olmayan S tipli noktalardır.

Passant doğrular üzerinde O tipli noktalar olmayacağından T ve S tipli noktalar olacaktır. T tipli noktalardan bazıları Şekil 3.13'de görüldüğü gibi birleşmemiştir. T_{12} noktası ele alınır, T_{12} 'nin birleşmediği noktalar; $T_{35}, T_{46}, T_{36}, T_{56}, T_{45}$ ve T_{34} 'tür. T_{12} ile T_{35} 'in P1 aksiyomu gereği aynı doğru üzerinde olması gerektiği düşünülürse, T_{35} 'in birleştiği T tipli noktalar artık seçilemeyeceğinden geriye sadece T_{46} noktası kalır ki bu durumda tanjant doğruları dışında en fazla 3 tane T tipli nokta bir doğru üzerinde yer alabilir. T_{12} üzerinden halihazırda 2 tane teğet doğrusu geçtiğinden 4 doğru daha bu noktadan geçmelidir. T_{12} 'nin birleşmesi gereken üstteki 6 tane T tipli nokta olduğundan bu 4 doğru ancak 2-2-1-1 ayrımıyla elde edilebilir. O halde;

1. T_{12}, T_{35}, T_{46}
2. T_{12}, T_{36}, T_{45}
3. T_{12}, T_{34}
4. T_{12}, T_{56}

olacak şekilde T_{12} ile aynı doğru üzerinde yer alacak noktaları seçebiliriz. **1** ve **2** nolu doğrularda bulunan 3 tane T tipli noktanın yanına (O tipli nokta koyulamayacağından) 3 tane S tipli nokta eklenmelidir. Böylece passant doğruları elde edilir. Toplam 10 tane S tipli nokta olduğu biliniyor. Bir passant doğrusu üzerinde 3 tane S tipli nokta olduğundan ve toplam 10 passant doğrusu bulunduğundan her S tipli noktadan geçen passant doğrusu sayısı;

$$(3 * 10) / 10 = 3$$

olarak bulunur. Tanımlanan şekliyle bir tanjant doğrusu üzerinde S tipli nokta bulunmadığından geriye kalan $6 - 3 = 3$ doğru da sekant doğrusudur. O halde 3 tane sekant doğrusu bir S tipli nokta belirler.

3 ve **4** nolu doğruların yanına birleşmedikleri O tipli noktalar gelmelidir. Bunlar **3**'deki doğru için 5 ve 6 indisli O tipli nokta, yani O_5 ve O_6 ; **4**'deki doğru için 3 ve 4 indisli O tipli nokta, yani O_3 ve O_4 'dür. Bu durumda **3** ve **4** nolu doğruların her birinin 2 noktası T tipli, 2 noktası O tipli ve geriye kalan 2 noktası da S tipli olmalıdır. Böylece sekant doğruları elde edilir.

1. $T_{12}, T_{35}, T_{46}, S, S, S$
2. $T_{12}, T_{36}, T_{45}, S, S, S$
3. $T_{12}, T_{34}, O_5, O_6, S, S$
4. $T_{12}, T_{56}, O_3, O_4, S, S$

Bu şekilde 10 tane passant doğrusu ve 15 tane sekant doğrusu elde edilmelidir. T_{12} 'den sonra sırasıyla $T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}$ noktaları benzer biçimde ele alınacaktır.

T_{13} ele alınırsa; T_{13} 'ün birleşmediği noktalar; $T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{45}, T_{46}$ ve T_{56} 'dır. **4**'deki doğruya (T_{12} için) T_{56} sekant doğrusu üzerinde seçildiğinden burada (T_{13} için) passant doğrusu üzerinde seçilmelidir. Bunun nedeni, tekrar sekant doğrusu üzerinde seçilmesi durumunda sekant doğruları üzerinde bulunan O tipli noktalardan biri ile T_{56} 'nın birden fazla doğru üzerinde yer alacak olmasıdır. Yani, T_{56} (T_{13} için) sekant doğrusu üzerinde alınır; T_{13} ve T_{56} 'nın yanına O_2 ve O_4 gelmelidir. Fakat O_4 , zaten T_{56} ile **4**'deki doğru üzerinde yer almıştı. P1 aksiyomu sağlanmadığından T_{56} mecburen passant doğrusu üzerinde alınmalıdır. Bu durumda doğruların;

5. T_{13}, T_{24}, T_{56}
6. T_{13}, T_{25}, T_{46}
7. T_{13}, T_{26}, O_4, O_5
8. T_{13}, T_{45}, O_2, O_6

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

olarak seçilmesi zaruridir. Aynı mantıkla T_{14}, T_{15}, T_{16} noktaları ele alındığında elde edilen doğrular şu şekilde olmak zorundadır:

9. T_{14}, T_{23}, T_{56}

13. T_{15}, T_{24}, T_{36}

17. T_{16}, T_{23}, T_{45}

10. T_{14}, T_{26}, T_{35}

14. T_{15}, T_{26}, T_{34}

18. T_{16}, T_{25}, T_{34}

11. T_{14}, T_{25}, O_3, O_6

15. T_{15}, T_{23}, O_4, O_6

19. T_{16}, T_{24}, O_3, O_5

12. T_{14}, T_{36}, O_2, O_5

16. T_{15}, T_{46}, O_2, O_3

20. T_{16}, T_{35}, O_2, O_4

T tipli noktalardan aynı doğru üzerinde yer almayanlar ise O_1 'den geçen ve yazılmayan 5 sekant doğrusu üzerinde tek ihtimalli durum ile alınabilir. Bunlar şu şekildedir:

21. T_{34}, T_{56}, O_1, O_2

22. T_{26}, T_{45}, O_1, O_3

23. T_{25}, T_{36}, O_1, O_4

24. T_{23}, T_{46}, O_1, O_5

25. T_{24}, T_{35}, O_1, O_6

Böylece toplamda 15 sekant doğrusu ve 10 passant doğrusu için T tipli noktaların dağılımı yapılmış oldu.

3 tane sekant doğrusunun S tipli bir nokta belirlediği üstte bahsedilmişti. Bir passant doğrusu üzerindeki bir T tipli nokta 2 sekantın arakesitidir. Yani, bir passant doğrusu, üzerindeki T tipli bir noktada 2 sekant doğrusunu keser. Bu durumda bir passant doğrusu, üzerinde 3 tane T tipli nokta olduğu için $3 * 2 = 6$ sekant doğrusunu kesip toplamda 15 sekant doğrusu olduğundan geriye kalan $15 - 6 = 9$ sekant doğrusunu da S tipli 3 noktada kesmelidir. Dolayısıyla bu noktaların her birinden $9/3 = 3$ tane sekant doğrusu geçer.

Üstte numaralandırılmış ve kesişmeyen sekant doğruları, üzerlerindeki O tipli noktalardan hareketle üçerli şekilde gruplanarak kesiştirilmelidir. S tipli noktalar 1'den 10'a kadar numaralandırılabilir.

Örneğin; O_1 ve O_2 'nin bulunduğu **21**'deki doğru, O_3 ve O_5 'in bulunduğu **19**'daki doğru, O_4 ve O_6 'nin bulunduğu **15**'deki doğru S_1 noktasında kesişsinler. Benzer şekilde O_1 ve O_2 'nin bulunduğu **21**'deki doğru, O_3 ve O_6 'nin bulunduğu **11**'deki doğru, O_4 ve O_5 'in bulunduğu **7**'deki doğru S_2 noktasında kesişsinler. Fakat O_1 ve O_2 'nin bulunduğu **21**'deki doğru ile O_3 ve O_4 'ün bulunduğu **4**'deki doğru zaten T_{12} noktasında kesiştiklerinden buraya S noktası ataması yapılamaz. Bu şekilde devam ederek S noktaları aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{aligned}
 (O_1 \text{ ve } O_2) \cap (O_3 \text{ ve } O_5) \cap (O_4 \text{ ve } O_6) &\rightarrow S_1 \\
 (O_1 \text{ ve } O_2) \cap (O_3 \text{ ve } O_6) \cap (O_4 \text{ ve } O_5) &\rightarrow S_2 \\
 (O_1 \text{ ve } O_3) \cap (O_2 \text{ ve } O_4) \cap (O_5 \text{ ve } O_6) &\rightarrow S_3 \\
 (O_1 \text{ ve } O_3) \cap (O_2 \text{ ve } O_5) \cap (O_4 \text{ ve } O_6) &\rightarrow S_4 \\
 (O_1 \text{ ve } O_4) \cap (O_2 \text{ ve } O_3) \cap (O_5 \text{ ve } O_6) &\rightarrow S_5 \\
 (O_1 \text{ ve } O_4) \cap (O_2 \text{ ve } O_6) \cap (O_3 \text{ ve } O_5) &\rightarrow S_6 \\
 (O_1 \text{ ve } O_5) \cap (O_2 \text{ ve } O_4) \cap (O_3 \text{ ve } O_6) &\rightarrow S_7 \\
 (O_1 \text{ ve } O_5) \cap (O_2 \text{ ve } O_6) \cap (O_3 \text{ ve } O_4) &\rightarrow S_8 \\
 (O_1 \text{ ve } O_6) \cap (O_2 \text{ ve } O_3) \cap (O_4 \text{ ve } O_5) &\rightarrow S_9 \\
 (O_1 \text{ ve } O_6) \cap (O_2 \text{ ve } O_5) \cap (O_3 \text{ ve } O_4) &\rightarrow S_{10}
 \end{aligned}$$

Sekant doğruları tekrar yazılacak olursa aşağıdaki gibi olur:

- | | |
|--|--|
| 3. $T_{12}, T_{34}, O_5, O_6, S_3, S_5$ | 19. $T_{16}, T_{24}, O_3, O_5, S_1, S_6$ |
| 4. $T_{12}, T_{56}, O_3, O_4, S_8, S_{10}$ | 20. $T_{16}, T_{35}, O_2, O_4, S_3, S_7$ |
| 7. $T_{13}, T_{26}, O_4, O_5, S_2, S_9$ | 21. $T_{34}, T_{56}, O_1, O_2, S_1, S_2$ |
| 8. $T_{13}, T_{45}, O_2, O_6, S_6, S_8$ | 22. $T_{26}, T_{45}, O_1, O_3, S_3, S_4$ |
| 11. $T_{14}, T_{25}, O_3, O_6, S_2, S_7$ | 23. $T_{25}, T_{36}, O_1, O_4, S_5, S_6$ |
| 12. $T_{14}, T_{36}, O_2, O_5, S_4, S_{10}$ | 24. $T_{23}, T_{46}, O_1, O_5, S_7, S_8$ |
| 15. $T_{15}, T_{23}, O_4, O_6, S_1, S_4$ | 25. $T_{24}, T_{35}, O_1, O_6, S_9, S_{10}$ |
| 16. $T_{15}, T_{46}, O_2, O_3, S_5, S_9$ | |

Böylece sekant doğrularının noktaları tamamıyla belirlenmiş olup şimdi passant doğruları belirlenebilir.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

1. $T_{12}, T_{35}, T_{46}, S, S, S$ passant doğrusunu ele alalım. Bu doğru; T_{12} 'de **3** ve **4**'deki sekant doğrularını, T_{35} 'de **20** ve **25**'deki sekant doğrularını, T_{46} 'da **16** ve **24**'deki sekant doğrularını keser. Bu 6 doğru üzerindeki S tipli noktalar; $S_3, S_5, S_7, S_8, S_9, S_{10}$ olup geriye kalan noktalar S_1, S_2, S_4, S_6 şeklindedir. Bu dört noktanın üçü alınmalıdır. $S_1, S_2 / S_1, S_4 / S_1, S_6$ noktaları sekant doğruları üzerinde zaten birleşmiş olduğundan S_1 alınmaz. Alındığı takdirde S_2, S_4 veya S_6 alınmaz. O halde S_2, S_4 ve S_6 alınmalıdır. Bu durumda **1**'deki doğru;

$$1. T_{12}, T_{35}, T_{46}, S_2, S_4, S_6$$

olmak zorundadır. Aynı mantıkla diğer passant doğruları da tek ihtimalle bulunur. Bulunan doğrular şu şekildedir:

$$1. T_{12}, T_{35}, T_{46}, S_2, S_4, S_6$$

$$2. T_{12}, T_{36}, T_{45}, S_1, S_7, S_9$$

$$5. T_{13}, T_{24}, T_{56}, S_4, S_5, S_7$$

$$6. T_{13}, T_{25}, T_{46}, S_1, S_3, S_{10}$$

$$9. T_{14}, T_{23}, T_{56}, S_3, S_6, S_9$$

$$10. T_{14}, T_{26}, T_{35}, S_1, S_5, S_8$$

$$13. T_{15}, T_{24}, T_{36}, S_2, S_3, S_8$$

$$14. T_{15}, T_{26}, T_{34}, S_6, S_7, S_{10}$$

$$17. T_{16}, T_{23}, T_{45}, S_2, S_5, S_{10}$$

$$18. T_{16}, T_{25}, T_{34}, S_4, S_8, S_9$$

Şekil 3.13'de görülen 6 tane tanjant doğrusu 26'dan başlayarak numaralandırılırsa şu şekilde olur:

$$26. O_1, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}$$

$$27. O_2, T_{12}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}$$

$$28. O_3, T_{13}, T_{23}, T_{34}, T_{35}, T_{36}$$

$$29. O_4, T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{45}, T_{46}$$

$$30. O_5, T_{15}, T_{25}, T_{35}, T_{45}, T_{56}$$

$$31. O_6, T_{16}, T_{26}, T_{36}, T_{46}, T_{56}$$

Böylece tüm doğrular aşağıdaki gibi bulunur:

$$1. T_{12}, T_{35}, T_{46}, S_2, S_4, S_6 \text{ (Pas1)}$$

$$2. T_{12}, T_{36}, T_{45}, S_1, S_7, S_9 \text{ (Pas2)}$$

$$3. T_{12}, T_{34}, O_5, O_6, S_3, S_5 \text{ (Sek1)}$$

$$4. T_{12}, T_{56}, O_3, O_4, S_8, S_{10} \text{ (Sek2)}$$

$$17. T_{16}, T_{23}, T_{45}, S_2, S_5, S_{10} \text{ (Pas9)}$$

$$18. T_{16}, T_{25}, T_{34}, S_4, S_8, S_9 \text{ (Pas10)}$$

$$19. T_{16}, T_{24}, O_3, O_5, S_1, S_6 \text{ (Sek9)}$$

$$20. T_{16}, T_{35}, O_2, O_4, S_3, S_7 \text{ (Sek10)}$$

5. $T_{13}, T_{24}, T_{56}, S_4, S_5, S_7$ (Pas3)

6. $T_{13}, T_{25}, T_{46}, S_1, S_3, S_{10}$ (Pas4)

7. $T_{13}, T_{26}, O_4, O_5, S_2, S_9$ (Sek3)

8. $T_{13}, T_{45}, O_2, O_6, S_6, S_8$ (Sek4)

9. $T_{14}, T_{23}, T_{56}, S_3, S_6, S_9$ (Pas5)

10. $T_{14}, T_{26}, T_{35}, S_1, S_5, S_8$ (Pas6)

11. $T_{14}, T_{25}, O_3, O_6, S_2, S_7$ (Sek5)

12. $T_{14}, T_{36}, O_2, O_5, S_4, S_{10}$ (Sek6)

13. $T_{15}, T_{24}, T_{36}, S_2, S_3, S_8$ (Pas7)

14. $T_{15}, T_{26}, T_{34}, S_6, S_7, S_{10}$ (Pas8)

15. $T_{15}, T_{23}, O_4, O_6, S_1, S_4$ (Sek7)

16. $T_{15}, T_{46}, O_2, O_3, S_5, S_9$ (Sek8)

21. $T_{34}, T_{56}, O_1, O_2, S_1, S_2$ (Sek11)

22. $T_{26}, T_{45}, O_1, O_3, S_3, S_4$ (Sek12)

23. $T_{25}, T_{36}, O_1, O_4, S_5, S_6$ (Sek13)

24. $T_{23}, T_{46}, O_1, O_5, S_7, S_8$ (Sek14)

25. $T_{24}, T_{35}, O_1, O_6, S_9, S_{10}$ (Sek15)

26. $O_1, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}$ (Tan1)

27. $O_2, T_{12}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}$ (Tan2)

28. $O_3, T_{13}, T_{23}, T_{34}, T_{35}, T_{36}$ (Tan3)

29. $O_4, T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{45}, T_{46}$ (Tan4)

30. $O_5, T_{15}, T_{25}, T_{35}, T_{45}, T_{56}$ (Tan5)

31. $O_6, T_{16}, T_{26}, T_{36}, T_{46}, T_{56}$ (Tan6)

Üstte tanjant yerine Tan, sekant yerine Sek ve passant yerine Pas yazılmış, ayrıca aynı tipli doğrular aynı renge boyanmıştır.

Her tanjant doğrusunun üzerinde 1 O tipli, 5 T tipli nokta; her sekant doğrusunun üzerinde 2 O tipli, 2 T tipli, 2 S tipli nokta; her passant doğrusunun üzerinde 3 T tipli, 3 S tipli nokta vardır, yani her doğru üzerinde 6 nokta vardır. 6 O tipli, 15 T tipli, 10 S tipli olmak üzere toplam 31 nokta ve 6 tanjant, 15 sekant, 10 passant doğrusu olmak üzere toplam 31 doğru vardır. Bakıldığında; her bir nokta tam olarak bir defa diğer noktalarla aynı doğru üzerindedir ve herhangi iki doğrunun tam olarak bir ortak noktası vardır. Her bir O noktasından 1 tanjant, 5 passant doğrusu; her bir T noktasından 2 tanjant, 2 sekant, 2 passant doğrusu ve her bir S noktasından 3 sekant, 3 passant doğrusu geçmektedir, yani her noktadan 6 doğru geçmektedir.

Sonuç olarak 5. mertebeden projektif düzlem, bir ovalin belirlenmesi ile tek türlü elde edilmiştir.

3.2.2. Temel kavramlar

Projektif düzlem elde ederken kullanılan bazı cebirsel yapılardan bahsedilecektir. Burada referanssız verilen tanımlar ve teoremler için Taşcı (2011) esas alınmıştır.

Tanım 3.9: A boştan farklı bir küme olsun. $*$: $A \times A \rightarrow A$ dönüşümüne A 'da ikili işlem ve üzerinde ikili işlem tanımlanan A kümesine de cebirsel yapı denir ve $(A,*)$ ile gösterilir.

Tanım 3.10: $*$, A kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Bu durumda;

- i-) Her $a, b \in A$ için $a * b = b * a$ ise $(A,*)$ cebirsel yapısı değişmeli,
- ii-) Her $a, b, c \in A$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$

ise $(A,*)$ cebirsel yapısı birleşmelidir.

Tanım 3.11: $(A,*)$ bir cebirsel yapı olsun. Her $a \in A$ için $a * e = a$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa e 'ye $(A,*)$ 'nin sağ birimi denir. Benzer şekilde, $e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa e 'ye $(A,*)$ 'nin sol birimi denir. Eğer e , $(A,*)$ 'nin hem sağ hem sol birimi ise e 'ye $(A,*)$ 'nin birimi denir.

Tanım 3.12: $(A,*)$ bir cebirsel yapı, e , $(A,*)$ cebirsel yapısının birimi ve $a \in A$ olsun. Eğer $a * b = e$ olacak şekilde bir $b \in A$ varsa b 'ye, a 'nın sağ tersi; $c * a = e$ olacak şekilde bir $c \in A$ varsa c 'ye, a 'nın sol tersi ve $b = c$ ise b 'ye veya c 'ye de a 'nın tersi denir.

Tanım 3.13: $(G,*)$ bir cebirsel yapı olmak üzere G 'nin $*$ işlemine göre grup olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

- i-) Her $a, b \in G$ için $(a * b) \in G$ (Kapalılık özelliği)
- ii-) Her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Birleşme özelliği)
- iii-) Her $a \in G$ için $a * e = e * a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman varlığı)
- iv-) Her $a \in G$ için $a * b = b * a$ olacak şekilde bir $b \in G$ vardır. (Ters eleman varlığı)

Tanım 3.14: $(G, *)$ grubunda her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $(G, *)$ değişmeli gruptur.

Tanım 3.15: G kümesinin eleman sayısı sonlu ve q ise, $(G, *)$ grubuna sonlu grup veya q . mertebeden grup; sonsuz ise $(G, *)$ grubuna sonsuz grup denir.

Örneğin; $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümeleri adi toplama işlemine göre birer değişmeli sonsuz grup teşkil eder.

Tanım 3.16: $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında toplama (+) ve çarpma (\cdot) olmak üzere iki ikili işlem tanımlansın. H 'nin halka olması için aşağıdaki şartları sağlaması gerekmektedir:

i-) $(H, +)$ değişmeli gruptur.

ii-) $(H, +, \cdot)$ 'daki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in H$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olur.

iii-) $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısı çarpma işlemine göre kapalıdır. Yani, her $a, b \in H$ için $a \cdot b \in H$ olur.

iv-) $(H, +, \cdot)$ 'daki çarpma işlemi, toplama işlemine göre sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in H$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ olur.

Tanım 3.17: $(H, +, \cdot)$ halkası çarpmaya göre birime sahipse birimli halka olur. Yani, her $a \in H$ için $a \cdot 1_H = 1_H \cdot a = a$ olacak şekilde H 'da bir 1_H varsa $(H, +, \cdot)$ birimli halka olur.

Tanım 3.18: $(H, +, \cdot)$ halkası çarpmaya göre değişmeli ise değişmeli halka olur. Yani, her $a, b \in H$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa $(H, +, \cdot)$ değişmeli halka olur.

Örneğin; $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ birimli ve değişmeli halkalardır.

Tanım 3.19: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanın ikinci işleme göre tersi mevcut ise bu halkaya cisim adı verilir.

Örneğin, adi toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ birer cisimdir.

Teorem 3.10: \mathbb{Z}_m bir cisimdir ancak ve ancak m bir asal sayıdır (Bayraktar 2006).

Tanım 3.20: $(H, +, \cdot)$ cebirsel yapısında aşağıdaki şartlar sağlanırsa bir sol yaklaşık cisim olur (Bayar et al. 2016):

i-) H sonlu bir kümedir.

ii-) $(H, +)$ birim elemanı 0 olan bir gruptur.

iii-) $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ birim elemanı olan bir gruptur.

iv-) Her $a \in H$ için $0 \cdot a = 0$ 'dır.

v-) $(H, +, \cdot)$ 'daki çarpma işlemi, toplama işlemine göre soldan dağılma özelliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in H$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ olur.

vi-) $a \neq b$ özelliğindeki her $a, b, c \in H$ için $(-a) \cdot f + b \cdot f = c$ olacak biçimde bir tek $f \in H$ vardır.

Sağ yaklaşık cisim için de benzer tanım geçerlidir.

Tanım 3.21: V , vektörlerin kümesi, F bir cisim ve ayrıca toplama ve skaler ile çarpma işlemleri tanımlanmış olsun. Buna göre aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa V 'ye F cismi üzerinde bir vektör uzayı denir:

i-) $(V, +)$ değişmeli bir gruptur.

ii-) $\alpha \in F$ ve $v \in V$ için $\alpha \cdot v \in V$ 'dir.

iii-) Her $\alpha \in F$ ve her $u, v \in V$ için $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ olur.

iv-) Her $\alpha, \beta \in F$ ve $v \in V$ için $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ olur.

v-) Her $\alpha, \beta \in F$ ve $v \in V$ için $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ olur.

vi-) Her $v \in V$ için $1 \cdot v = v$ olacak şekilde $1 \in F$ vardır.

Tanım 3.22: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $M \subseteq V$ boş olmayan bir küme olsun. M alt kümesi V vektör uzayı üzerindeki işlemlere göre F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise M vektör uzayına V vektör uzayının bir alt vektör uzayı (alt uzayı) denir (Gezer ve Bizim 2017).

Tanım 3.23: Her p asal sayısı ve r pozitif tam sayısı için karakteristiği p olan p^r tane elemanlı bir tek sonlu cisim vardır. Bu cisme mertebesi p^r olan Galois cismi denir ve $GF(p^r)$ ile gösterilir. $p^r = m$ olmak üzere, bu cismin her elemanı $x^m = x$ denklemini sağlar (Gezer ve Bizim 2017).

Tanım 3.24: F bir cisim olmak üzere;

$$F[x] = \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in F, n \geq 0$$

kümesine F üzerindeki polinom halkası adı verilir. $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ polinomu için a_n katsayısı 1 ise $P[x]$ polinomuna monik polinom adı verilir. $a_n \neq 0$ için n sayısına polinomun derecesi denir. Pozitif dereceli bir $P(x) \in F[x]$ polinomu için $P(x) = f(x)g(x)$ olacak şekilde dereceleri $P(x)$ 'in derecesinden küçük sabit olmayan $f(x), g(x) \in F[x]$ polinomları bulunabiliyor ise $P(x)$ polinomuna F üzerinde indirgenebilir polinom adı verilir. Aksi halde $P(x)$ polinomuna F üzerinde indirgenemez polinom denir (Gezer ve Bizim 2017).

Örnek 3.3:

i-) $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ polinomunun derecesi 4 olup $p(x), \mathbb{Z}_3[x]$ üzerinde indirgenebilir bir polinomdur. Çünkü $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

ii-) $g(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ polinomunun derecesi 2 olup indirgenemez bir polinomdur.

İndirgenemez polinomların, sabit polinomlar ve kendisi dışında hiçbir polinoma bölünemeyen polinomlar olduğu anlaşılmaktadır. İndirgenemez polinomların bu yönüyle asal sayılara olan benzerliği vardır.

Teorem 3.11: p bir asal sayı, $p(x) \in F_p[x]$ derecesi n olan monik indirgenemez bir polinom olsun. Bu durumda $F_p[x]/\langle p(x) \rangle$ bölüm halkası $q = p^n$ mertebeli sonlu bir cisimdir (Keskin 2017).

Teorem 3.12: Her p asal sayısı ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $q = p^n$ mertebeli bir sonlu cisim vardır (Arıkan ve Halıcıoğlu 2015).

Üstteki teoremlerden hareketle cisim genişlemesi özellikle asal sayıların kuvvetlerinde kullanılacaktır. Mesela 9. mertebeden bir projektif düzlemin oluşturulmasında F_3 cisminin genişlemesi ile elde edilen $GF(3^2) = GF(9)$ cismi kullanılır. Bunun için 9. mertebeden 4 farklı düzlemde gereken indirgenemez polinomlar ve kullanılan denklemler $GF(9)$ cismi ile elde edilirler.

Örneğin, 9 elemanlı bir cisim oluşturmak için $F_3[x]$ halkasında derecesi 2 olan monik ve indirgenemez polinomlar alınabilir. Bu polinomlar; $(x^2 + 1)$, $(x^2 + x + 2)$, $(x^2 + 2x + 2)$ polinomları olup;

$$F_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle, F_3[x]/\langle x^2 + x + 2 \rangle, F_3[x]/\langle x^2 + 2x + 2 \rangle$$

bölüm halkalarının her biri 9. mertebeden bir cisimdir.

Tanım 3.25: E bir cisim ve $F \subseteq E$ olmak üzere F , E cisminden indirgenen işlemlere göre bir cisim ise F cismine E cisminin bir alt cismi, E cismine ise F cisminin bir cisim genişlemesi denir ve $F \leq E$ ile gösterilir (Cangül 2016).

Teorem 3.13 (Kronecker Teoremi): F bir cisim ve $f(x) \in F[x]$ sabit olmayan bir polinom ise $f(\alpha) = 0$ ve $\alpha \in E$ olacak biçimde F cisminin bir E cisim genişlemesi vardır (Cangül 2016).

Örneğin, $p(x) = (x^2 + x + 1) \in F_2[x]$ polinomu $F_2[x]$ halkası üzerinde indirgenemezdir. Kronecker Teoremi gereği, $p(x)$ polinomunun bir t kökünü bulduran F_2 cisminin bir cisim genişlemesi vardır. t , $p(x)$ polinomunun F_2 cisminin bir genişlemesindeki kökü olmak üzere;

$$t^2 + t + 1 = 0 \text{ ve } t^2 = -(1 + t) = 1 + t$$

olarak bulunur. $F_2(t)$ cismi $\{a + bt \mid a, b \in F_2\}$ biçimindedir ve bu cismin elemanları $0, 1, t$ ve $1 + t$ 'dir.

Teorem 3.14: F bir cisim ve $P(x) \in F[x]$ olsun. $F[x]/P(x)$ kümesi, adi toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte bir halkadır. Ayrıca, $F[x]/P(x)$ 'in cisim olması için gerek ve yeter koşul $P(x)$ 'in F üzerinde indirgenemez olmasıdır (Arıkan ve Halıcıoğlu 2015).

Örneğin; $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) = ax + b: a, b \in \mathbb{R}$ halkasında $x^2 + 1$ polinomu \mathbb{R} üzerinde indirgenemez olup bu halka bir cisimdir. x ile i karmaşık sayısı eşleştirilirse bu cismin \mathbb{C} karmaşık sayılar cismi ile eş yapılı olduğu görülür.

Teorem 3.15: Verilen her F cismi için noktaları ve doğruları bu cismin elemanlarıyla belirtilebilen bir afin düzlem ve bir projektif düzlem vardır (Kaya 2005).

Şimdi \mathbb{Z}_2 cismi üzerinde tanımlı indirgenemez bir polinomdan üstteki teoremler ve tanımlar gereği dört elemanlı bir cisim, yani $GF(2^2) = GF(4)$ Galois cismi elde edilebilir. Ayrıca adi toplama ve çarpma işlemlerine göre elde edilen \mathbb{Z}_4 halkasının ve $GF(4)$ Galois cisminin tabloları karşılaştırılarak aradaki fark görülebilir.

$\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + 1) = 0, 1, x, 1 + x$ halkası Teorem 3.11 gereği, $(x^2 + x + 1)$ polinomu \mathbb{Z}_2 üzerinde indirgenemez olduğundan bir $GF(4)$ Galois cismidir. $x^2 = x + 1$ eşitliği kullanılarak toplamaya ve çarpmaya göre oluşturulan işlemler Çizelge 3.3'de verilmiştir.

Çizelge 3.3. $GF(4)$ 'deki toplama ve çarpma işlemleri

| | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|-------|-------|--|----------|----------|----------|-------|-------|
| + | 0 | 1 | x | $1+x$ | | . | 0 | 1 | x | $1+x$ |
| 0 | 0 | 1 | x | $1+x$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | $1+x$ | x | | 1 | 0 | 1 | x | $1+x$ |
| x | x | $1+x$ | 0 | 1 | | x | 0 | x | $1+x$ | 1 |
| $1+x$ | $1+x$ | x | 1 | 0 | | $1+x$ | 0 | $1+x$ | 1 | x |

(a) (b)

Bu yöntemle 4 elemanlı bir Galois cismi elde edilir. Bu cismin elemanlarının dereceleri en fazla 1 olan polinomlar olduğu görülüyor. Ayrıca bu elemanlar farklı olarak örneğin Çizelge 3.4'deki gibi ikilik veya onluk düzende de yazılabilir.

Çizelge 3.4. $GF(4)$ 'ün elemanlarının farklı gösterimleri

| polinom | ikilik sayı | onluk sayı |
|---------|-------------|------------|
| 0 | 00 | 0 |
| 1 | 01 | 1 |
| x | 10 | 2 |
| $1+x$ | 11 | 3 |

Polinomları onluk düzende yeniden ifade ederek yazarsak, Çizelge 3.3'deki işlemler Çizelge 3.5 (a)'ya dönüşür. \mathbb{Z}_4 halkasından elde edilen işlem tabloları ise Çizelge 3.5 (b)'de verilmiştir.

Çizelge 3.5. $GF(4)$ 'ün ve \mathbb{Z}_4 'ün toplama ve çarpma işlemleri

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|----------|----------|
| + | 0 | 1 | 2 | 3 | | . | 0 | 1 | 2 | 3 | | + | 0 | 1 | 2 | 3 | | . | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | | 2 | 0 | 2 | 3 | 1 | | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | | 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | | 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

(a) (b)

Çizelge 3.5 (a) ve (b)'nin farklı olduğu görülmektedir.

Teorem 3.15 gereği her cisim üzerine kurulu bir projektif düzlem olduğundan oluşan Galois cisimleri üzerinde de kurulu projektif düzlemler vardır. Sonuç olarak asal ve asalın kuvvetleri mertebeden projektif düzlemler mevcuttur.

3.2.3. Koordinatlama

Şimdi afin ve projektif düzlemlerin noktalarının ve doğrularının bir cebirsel yapı ile nasıl koordinatlanabileceği üzerinde durularak bu düzlemler arasındaki ilişki ele alınacaktır. Teorem 3.4 ve Teorem 3.15 gereği koordinatlama gözlemlenecektir.

Afin ve projektif düzlem için ayrı ayrı nokta kümesi, doğru kümesi ve üzerinde olma bağıntısı tanımlanabilir.

$$N = F * F = (x, y): x, y \in F,$$

$$D = \{[m, b]: m, b \in F\} \cup \{[a]: a \in F\},$$

$$(x, y) o [m, b] \Leftrightarrow y = mx + b \text{ ve } (x, y) o [a] \Leftrightarrow x = a$$

ile verilen (N, D, o) afin düzlemi ile

$$N_p = \{(x, y, 1): x, y \in F\} \cup \{(1, y, 0): y \in F\} \cup \{(0, 1, 0)\},$$

$$D_p = \{[m, 1, k]: m, k \in F\} \cup \{[1, 0, k]: k \in F\} \cup \{[0, 0, 1]\},$$

$$(x, y, z) o_p [m, r, k] \Leftrightarrow yr = xm + zk$$

ile verilen (N_p, D_p, o_p) projektif düzlemi tanımlansın.

Burada afin düzlem için düzlemde analitik olarak tanımlama yapılırken projektif düzlem için tanımlama bir üst boyut olan 3-uzaydan yapılmıştır. Orantılı olan yani birbirinin λ ($\lambda \in F$) katı durumundaki üçlü noktalar düzlemde tek bir noktadır. Burada $GF(q)$ sonlu cismi üzerinde tanımlı $V(3, q)$ vektör uzayından alınan birbirinin katı üçlü noktalar $(0, 0, 0)$ noktası hariç projektif düzlemde tek bir noktayı gösterir.

Mesela, F_3 'de her 2 adet üçlü nokta düzlemde tek bir noktaya işaret eder. Yani, $(1, 0, 0), (2, 0, 0)$ birbirinin 2 katı olduğundan düzlemde aynı noktadır. $(1, 2, 0)$ ve $(2, 1, 0)$ noktaları da aynı şekilde F_3 'de birbirinin 2 katı olduğundan yine düzlemde aynı noktadır.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

$GF(4)$ Galois cisminde ise cismin elemanları $\{0,1,t,1+t\}$ olduğundan $V(3,GF(4))$ vektör uzayından alınan $(1,t,1+t)$ ile t katı olan $(t,1+t,1)$ noktaları yine düzlemde tek bir noktaya işaret eder. Dolayısıyla F 'nin eleman sayısı q ise $(q-1)$ tane üçlü nokta düzlemde tek bir noktayı gösterecektir. Buradan nokta sayısı;

$$(q^3 - 1) / (q - 1) = q^2 + q + 1$$

olarak bulunur ki zaten bu da q . mertebeden bir projektif düzlemdeki nokta sayısını verir.

Böylece (x, y, z) üçlüsü ve bu üçlüyle orantılı olan bütün üçlüler aynı nokta olacak şekilde tanımlanırsa N_p nokta kümesi; $[m, r, k]$ üçlüsü ve bu üçlüyle orantılı olan bütün üçlüler aynı doğru olacak şekilde tanımlanırsa D_p doğru kümesi bulunur. Bu kümeler projektif düzlemler (P_2F) için geçerlidir.

Şimdi $F_3 = GF(3) = \{0,1,2\}$ kümesinden hareketle A_2F afin ve P_2F projektif düzlemlerinin noktaları ve doğruları bulunarak aralarındaki ilişki gözlemlenecektir.

$GF(3)$ cismi için Çizelge 3.6'daki işlemler geçerli olsun.

Çizelge 3.6. $GF(3)$ 'deki toplama ve çarpma işlemleri

| + | 0 | 1 | 2 | . | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 |

Önce afin düzlem (A_2F) ele alınsın. $GF(3)$ 'ün mertebesi 3 olup afin düzlemde toplam doğru sayısı 12 ve toplam nokta sayısı 9'dur. Bir doğru üzerinde 3 nokta olup bir noktadan geçen doğru sayısı ise 4'tür.

$N = F * F = \{(x, y) : x, y \in F\}$ kümesinden hareketle noktalar aşağıdaki gibi yazılır:

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

$$N = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

$D = \{[m, b]: m, b \in F\} \cup \{[a]: a \in F\}$ ve üzerinde olma bağıntısı

$(x, y) o [m, b] \Leftrightarrow y = mx + b$ ve $(x, y) o [a] \Leftrightarrow x = a$ olduğundan noktaların üzerinden geçen doğrular aşağıdaki gibi bulunur:

$$(0,0) o [m, b] \Leftrightarrow 0 = m \cdot 0 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 0, m = 1 \text{ için } b = 0, m = 2 \text{ için } b = 0 \text{ ve } (0,0) o [a] \Leftrightarrow a = 0,$$

$$(0,1) o [m, b] \Leftrightarrow 1 = m \cdot 0 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 1, m = 1 \text{ için } b = 1, m = 2 \text{ için } b = 1 \text{ ve } (0,1) o [a] \Leftrightarrow a = 0,$$

$$(0,2) o [m, b] \Leftrightarrow 2 = m \cdot 0 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 2, m = 1 \text{ için } b = 2, m = 2 \text{ için } b = 2 \text{ ve } (0,2) o [a] \Leftrightarrow a = 0,$$

$$(1,0) o [m, b] \Leftrightarrow 0 = m \cdot 1 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 0, m = 1 \text{ için } b = 2, m = 2 \text{ için } b = 1 \text{ ve } (1,0) o [a] \Leftrightarrow a = 1,$$

$$(1,1) o [m, b] \Leftrightarrow 1 = m \cdot 1 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 1, m = 1 \text{ için } b = 0, m = 2 \text{ için } b = 2 \text{ ve } (1,0) o [a] \Leftrightarrow a = 1,$$

$$(1,2) o [m, b] \Leftrightarrow 2 = m \cdot 1 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 2, m = 1 \text{ için } b = 1, m = 2 \text{ için } b = 0 \text{ ve } (1,0) o [a] \Leftrightarrow a = 1,$$

$$(2,0) o [m, b] \Leftrightarrow 0 = m \cdot 2 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 0, m = 1 \text{ için } b = 1, m = 2 \text{ için } b = 2 \text{ ve } (2,0) o [a] \Leftrightarrow a = 2,$$

$$(2,1) o [m, b] \Leftrightarrow 1 = m \cdot 2 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 1, m = 1 \text{ için } b = 2, m = 2 \text{ için } b = 0 \text{ ve } (2,0) o [a] \Leftrightarrow a = 2,$$

$$(2,2) o [m, b] \Leftrightarrow 2 = m \cdot 2 + b \Leftrightarrow m = 0 \text{ için } b = 2, m = 1 \text{ için } b = 0, m = 2 \text{ için } b = 1 \text{ ve } (2,0) o [a] \Leftrightarrow a = 2$$

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

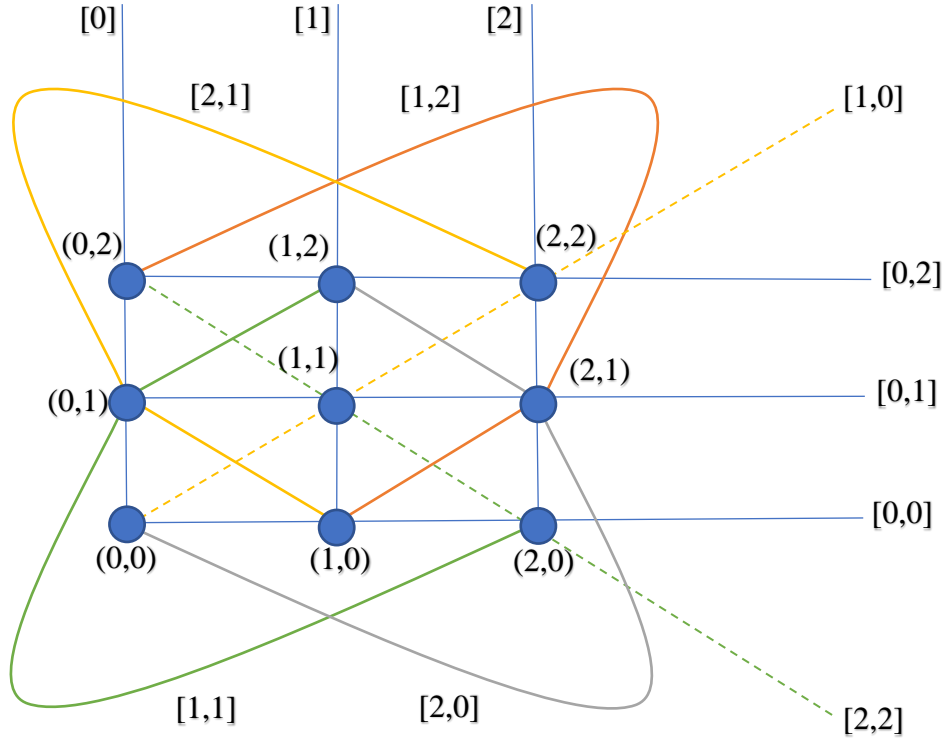
Buradan noktalar ve üzerinden geçen doğrular aşağıdaki gibidir:

| | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| (0,0): [0,0], [1,0], [2,0], [0] | (1,2): [0,2], [1,1], [2,0], [1] |
| (0,1): [0,1], [1,1], [2,1], [0] | (2,0): [0,0], [1,1], [2,2], [2] |
| (0,2): [0,2], [1,2], [2,2], [0] | (2,1): [0,1], [1,2], [2,0], [2] |
| (1,0): [0,0], [1,2], [2,1], [1] | (2,2): [0,2], [1,0], [2,1], [2] |
| (1,1): [0,1], [1,0], [2,2], [1] | |

Doğrular ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| [0]: (0,0), (0,1), (0,2) | [1,0]: (0,0), (1,1), (2,2) |
| [1]: (1,0), (1,1), (1,2) | [1,1]: (0,1), (1,2), (2,0) |
| [2]: (2,0), (2,1), (2,2) | [1,2]: (0,2), (1,0), (2,1) |
| [0,0]: (0,0), (1,0), (2,0) | [2,0]: (0,0), (1,2), (2,1) |
| [0,1]: (0,1), (1,1), (2,1) | [2,1]: (0,1), (1,0), (2,2) |
| [0,2]: (0,2), (1,2), (2,2) | [2,2]: (0,2), (1,1), (2,0) |

Buradan Şekil 3.14 elde edilir.



Şekil 3.14. 3. mertebeden afin düzlemin kartezyen (ikili) koordinatlaması

Burada Teorem 3.4'den afin düzlemin bir projektif düzleme tamamlanışı olduğu biliniyor. 3. mertebede bu tamamlanış, Teorem 3.5 gereği, üzerinde 4 nokta bulunan bir doğru eklemekle gerçekleşir. Afin düzleme $[\infty]$ doğrusu eklenirse doğrular kümesi;

$$D_p = \{[m, b]: m, b \in F\} \cup \{[a]: a \in F\} \cup [\infty]$$

olur. N noktalar kümesine ise $[\infty]$ doğrusu üzerindeki $(0), (1), (2)$ ve (∞) noktaları eklenirse;

$$N_p = F * F = \{(x, y): x, y \in F\} \cup \{(v): v \in F\} \cup (\infty)$$

olur. Bu durumda önceki üzerinde olma bağıntılarına aşağıdakiler eklenir:

- i-) $(x, y) \notin [\infty]$,
- ii-) $(v) \in [m, b] \Leftrightarrow v = m, (v) \in [\infty], (v) \notin [a]$,
- iii-) $(\infty) \in [a], (\infty) \in [\infty], (\infty) \notin [m, b]$

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

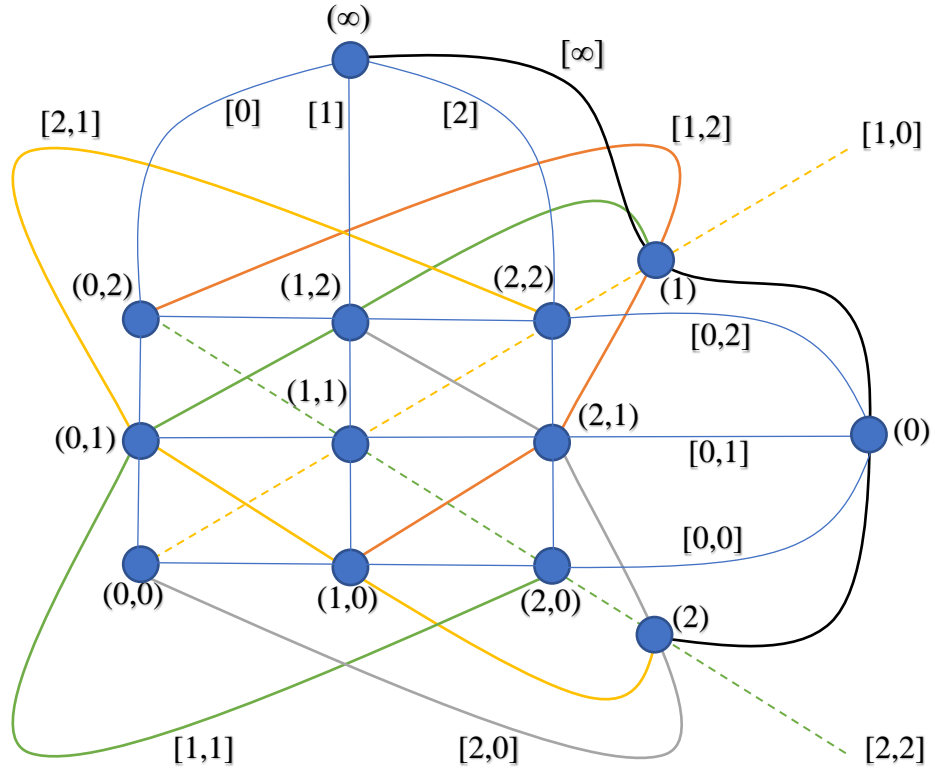
Böylece eklenen 4 noktanın üzerinden geçen doğrular ve eklenen 13. doğru üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ll} (0): [0,0], [0,1], [0,2], [\infty] & [\infty]: (0), (1), (2), (\infty) \\ (1): [1,0], [1,1], [1,2], [\infty] & \\ (2): [2,0], [2,1], [2,2], [\infty] & \\ (\infty): [0], [1], [2], [\infty] & \end{array}$$

Burada 13 nokta ve 13 doğru belli olup bu doğrular ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{ll} [0]: (0,0), (0,1), (0,2), (\infty) & [1,0]: (0,0), (1,1), (2,2), (1) \\ [1]: (1,0), (1,1), (1,2), (\infty) & [1,1]: (0,1), (1,2), (2,0), (1) \\ [2]: (2,0), (2,1), (2,2), (\infty) & [1,2]: (0,2), (1,0), (2,1), (1) \\ [0,0]: (0,0), (1,0), (2,0), (0) & [2,0]: (0,0), (1,2), (2,1), (2) \\ [0,1]: (0,1), (1,1), (2,1), (0) & [2,1]: (0,1), (1,0), (2,2), (2) \\ [0,2]: (0,2), (1,2), (2,2), (0) & [2,2]: (0,2), (1,1), (2,0), (2) \\ [\infty]: (0), (1), (2), (\infty) & \end{array}$$

Böylece afin düzlem projektif düzleme Şekil 3.15'deki gibi tamamlanmış olur.



Şekil 3.15. 3. mertebeden projektif düzlemin kartezyen (ikili) koordinatlaması

Şimdi başta projektif düzlem için verilen nokta ve doğruların koordinatlaması ile Şekil 3.15'deki projektif düzlem için elde edilen nokta ve doğru gösterimleri karşılaştırılabilir.

$GF(3)$ 'ün mertebesi 3 olup projektif düzlemde toplam doğru sayısı ve toplam nokta sayısı 13'tür. Bir doğru üzerinde 4 nokta olup bir noktadan geçen doğru sayısı ise yine 4'tür.

$N_p = \{(x, y, 1): x, y \in F\} \cup \{(1, y, 0): y \in F\} \cup \{(0, 1, 0)\}$ doğrultusunda ikili koordinatlamadaki (∞) noktası $(0, 1, 0)$; $(0), (1), (2)$ noktaları $(1, x, 0)$ ve $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$ noktaları da $(x, y, 1)$ olarak alınırsa noktalar aşağıdaki gibi bulunur:

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

$$\begin{array}{lll} (\infty) \rightarrow (0,1,0) & (0,1) \rightarrow (0,1,1) & (1,2) \rightarrow (1,2,1) \\ (0) \rightarrow (1,0,0) & (0,2) \rightarrow (0,2,1) & (2,0) \rightarrow (2,0,1) \\ (1) \rightarrow (1,1,0) & (1,0) \rightarrow (1,0,1) & (2,1) \rightarrow (2,1,1) \\ (2) \rightarrow (1,2,0) & (1,1) \rightarrow (1,1,1) & (2,2) \rightarrow (2,2,1) \\ (0,0) \rightarrow (0,0,1) & & \end{array}$$

$D_p = \{[m, 1, k]: m, k \in F\} \cup \{[1, 0, k]: k \in F\} \cup \{[0, 0, 1]\}$ doğrultusunda ikili koordinatlamadaki $[\infty]$ doğrusu $[0, 0, 1]$; $[0], [1], [2]$ doğruları $[1, 0, k]$ ve $[0, 0], [0, 1], [0, 2], [1, 0], [1, 1], [1, 2], [2, 0], [2, 1], [2, 2]$ doğruları da $[m, 1, k]$ olarak alınırse noktalar aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{array}{lll} [\infty] \rightarrow [0, 0, 1] & [0, 1] \rightarrow [0, 1, 1] & [1, 2] \rightarrow [1, 1, 2] \\ [0] \rightarrow [1, 0, 0] & [0, 2] \rightarrow [0, 1, 2] & [2, 0] \rightarrow [2, 1, 0] \\ [1] \rightarrow [1, 0, 1] & [1, 0] \rightarrow [1, 1, 0] & [2, 1] \rightarrow [2, 1, 1] \\ [2] \rightarrow [1, 0, 2] & [1, 1] \rightarrow [1, 1, 1] & [2, 2] \rightarrow [2, 1, 2] \\ [0, 0] \rightarrow [0, 1, 0] & & \end{array}$$

İkili koordinatlamada doğrular ve üzerindeki noktalar bulunmuştu. Şimdi, üçlü koordinatlamaya çevrilmiş üstte yazan koordinatlamayla $(x, y, z) o_p [m, r, k] \Leftrightarrow yr = xm + zk$ üzerinde olma bağıntısı kontrol edilebilir:

$[\infty]$ doğrusu üzerinde $(0), (1), (2), (\infty)$ noktaları vardı. (1) noktası ele alınıp üçlü koordinatlama üzerinden işlem yapılacak olursa $(1, 1, 0)$ noktasının $[0, 0, 1]$ doğrusu üzerinde olup olmadığı şu şekilde kontrol edilebilir:

$$(1, 1, 0) o_p [0, 0, 1] \Leftrightarrow 1 \cdot 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

olduğundan üzerinde olma bağıntısı burada sağlanır.

Benzer şekilde tüm noktalar ve doğrular üzerinde olma bağıntısı yardımıyla kontrol edilirse denklemin sağlandığı görülecektir.

3.2.4. Dezarg ve Pappus Teoremleri

Temel tanımlar ve teoremler için Kaya (2005), Klein and Storme (2011) referans alınmıştır.

Tanım 3.26: Doğrudan olmayan üç nokta A_1, A_2, A_3 olsun. $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesine bir üçgen denir.

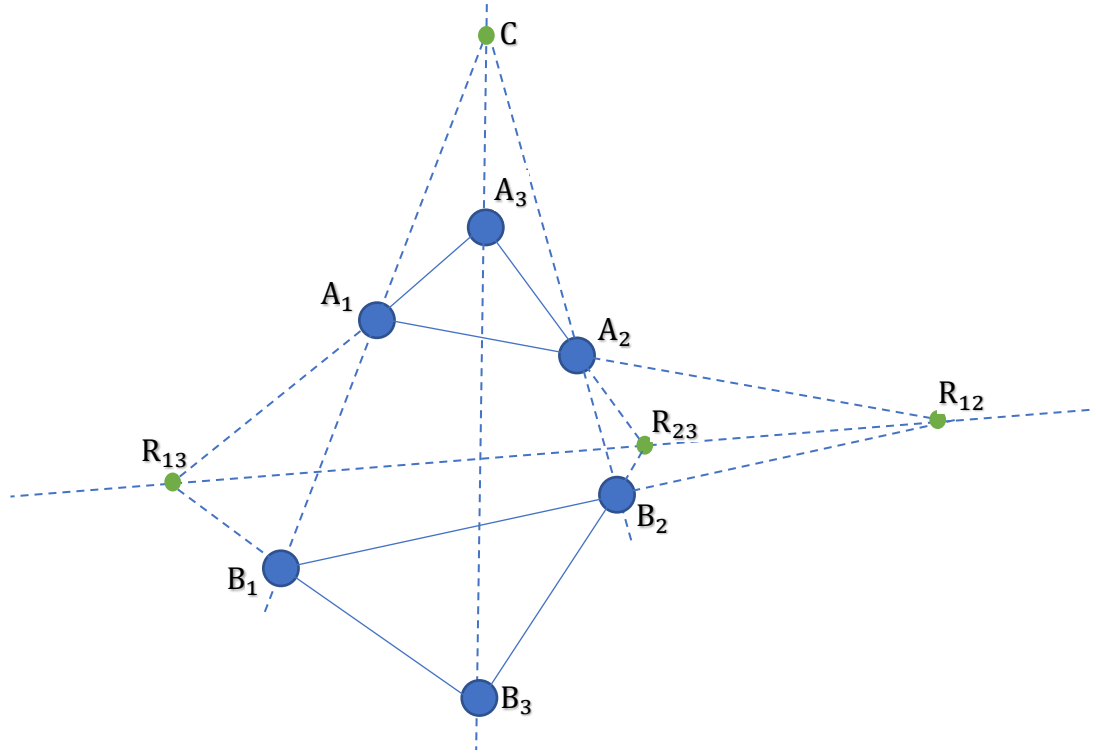
Tanım 3.27: $\{A_1, A_2, A_3\}$ ve $\{B_1, B_2, B_3\}$ iki üçgen olmak üzere birbirinden farklı A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 doğruları bir C noktasında kesişiyorsa C noktasına perspektiflik merkezi, üçgenlere de C 'den perspektiftir, denir.

P4 Dezarg Aksiyomu: $\{A_1, A_2, A_3\}$ ve $\{B_1, B_2, B_3\}$ iki üçgen olmak üzere birbirinden farklı A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 doğruları bir C noktasında kesişsinler, diğer bir ifadeyle üçgenler C 'den perspektif olsunlar. Bu durumda;

$$R_{12} = A_1A_2 \cap B_1B_2, \quad R_{13} = A_1A_3 \cap B_1B_3, \quad R_{23} = A_2A_3 \cap B_2B_3$$

olacak şekilde R_{12}, R_{13}, R_{23} arakesit noktaları doğrudan olurlar (Şekil 3.16).

Burada R_{12}, R_{13}, R_{23} noktalarının bulunduğu doğruya perspektiflik ekseni adı verilir.



Şekil 3.16. Desarg konfigurasyonu

Desarg teoremini sağlayan projektif düzlemler olduğu gibi sağlamayanları da vardır. Bu yüzden P4, projektif düzlemler için yeni bir aksiyom olarak karşımıza çıkar.

Tanım 3.28: P4 Desarg aksiyomunu sağlayan projektif düzleme Desarg düzlemi ya da Desargsel Düzlem denir. P4 Desarg aksiyomunu sağlamayan projektif düzleme ise Desargsel olmayan projektif düzlem denir.

Teorem 3.16: F bir cisim olmak üzere P_2F projektif düzlemlerinin tamamı Desargseldir.

Sonuç olarak projektif düzlemlerde asal mertebelerdeki tüm düzlemler Desargseldir. Asalın kuvvetlerindeki mertebelerde ise cisim genişlemesi ile kesin bir tane Desargsel düzlemin olması yanında Desargsel olmayan düzlemler de olabilir. Mesela, 4. mertebeden projektif düzlem tek ve Desargsel olup 9. mertebeden projektif düzlem ise dört tane ve bunların biri Desargsel diğer üçü Desargsel olmayan düzlemlerdir.

Burada merak edilen bir açık problem şöyle ifade edilebilir:

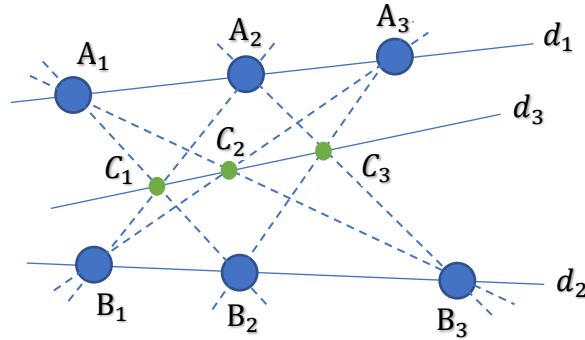
Açık Problem 2: $PG(2, q)$ 'da q asal iken Dezargesel olmayan düzlem var mıdır?

P5 Pappus aksiyomu: A_1, A_2, A_3 ve B_1, B_2, B_3 birbirinden farklı altı nokta olup bir projektif düzlemde $d_1 \cap d_2$ 'den farklı olacak şekilde sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları üzerinde ise;

$$C_1 = A_1B_2 \cap A_2B_1, \quad C_2 = A_1B_3 \cap A_3B_1, \quad C_3 = A_2B_3 \cap A_3B_2$$

olacak şekilde C_1, C_2, C_3 noktaları doğrudadır (Şekil 3.17).

Burada C_1, C_2, C_3 noktalarının bulunduğu d_3 doğrusuna Pappus doğrusu adı verilir.



Şekil 3.17. Pappus konfigürasyonu

Dezarg teoreminde olduğu gibi Pappus teoremini de sağlayan projektif düzlemler olduğu gibi sağlamayanları da vardır. Bu yüzden P5, projektif düzlemler için yeni bir aksiyom olarak karşımıza çıkar.

Tanım 3.29: P5 Pappus aksiyomunu sağlayan projektif düzleme Pappus düzlemi ya da Pappussel düzlem denir.

Teorem 3.17: F bir cisim olmak üzere P_2F projektif düzlemlerinin tamamı Pappusseldir.

Teorem 3.18: Bir projektif düzlemde P5 geçerli ise P4 de geçerlidir, yani her Pappussel düzlem aynı zamanda Dezargsel düzlemdir.

Teorem 3.19: Bir projektif düzlemde P5 geçerli ise onun duali olan P5* de geçerlidir.

3.2.5. 9. mertebeden projektif düzlem

9. mertebeye kadar var olan projektif düzlemler Dezargsel ve tek iken 9. mertebede Dezargsel düzlemden başka Dezargsel olmayan Hall, Dual Hall ve Hughes düzlemleri vardır. Bu kısımda 4 farklı düzlem için işlem tabloları ve üzerinde olma bağıntıları verilecek olup Dual Hall için doğruları içeren bir çizelge gösterilecektir.

Farklı gösterimler, Çizelge 3.7'deki gibidir.

Çizelge 3.7. GF(9)'un elemanlarının farklı gösterimleri

| | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|
| 00 → 0 → 0 → 0 | 10 → 1 → 1 → 1 | 20 → 2 → 2 → 2 |
| 01 → t → 3 → a | 11 → 1+t → 4 → b | 21 → 2+t → 5 → c |
| 02 → 2t → 6 → d | 12 → 1+2t → 7 → e | 22 → 2+2t → 8 → f |

$(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ cismi ve \mathbb{Z}_3 üzerindeki indirgenemez polinom $f(z) = z^2 + 1$ olsun. $a, b \in \mathbb{Z}_3$ ve $t \notin \mathbb{Z}_3$ olmak üzere \mathbb{Z}_3 genişletilerek $a + bt$ formunda ifade edilen 9 elemanlı $T = \{0 + 0t, 1 + 0t, 2 + 0t, 0 + 1t, 1 + 1t, 2 + 1t, 0 + 2t, 1 + 2t, 2 + 2t\}$ kümesi elde edilir. Çizelge 3.7'de görüldüğü üzere $a + bt$ ifadesi ab şeklinde gösterilebilir ve bu durumda sadelik için $T = \{00, 10, 20, 01, 11, 21, 02, 12, 22\}$ olarak alınabilir.

Şimdi T üzerinde aşağıdaki \oplus toplama ve \odot çarpma işlemleri tanımlanarak dört farklı (T, \oplus, \odot) cebirsel yapısı elde edilecektir:

$$(a + tb) \oplus (c + td) = (a + c) + t(b + d)$$

işlemi ile Çizelge 3.8,

$$(a + tb) \odot_1 (c + td) = (ac - bd) + t(ad + bc)$$

işlemi ile Çizelge 3.9 (a),

$$(a + tb) \odot_2 (c + td) = \begin{cases} ac + t(ad), & b = 0 \text{ için} \\ ac - b^{-1}d(a^2 + 1) + t(bc - (a - 1)d), & b \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

işlemi ile Çizelge 3.9 (b),

$$(a + tb) \odot_3 (c + td) = \begin{cases} ca + t(da), & b = 0 \text{ için} \\ ca - db(a^2 + 1) + t(cb - da), & b \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

işlemi ile Çizelge 3.9 (c),

$$x \odot_4 y = \begin{cases} xy, & x, F_9 \text{ 'da bir tam kare ise} \\ x^3y, & x, F_9 \text{ 'da bir tam kare değilse} \end{cases}$$

işlemi ile Çizelge 3.9 (d) elde edilir.

Çizelge 3.8. T üzerindeki \oplus işlemi

| \oplus | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 |
| 01 | 01 | 02 | 00 | 11 | 12 | 10 | 21 | 22 | 20 |
| 02 | 02 | 00 | 01 | 12 | 10 | 11 | 22 | 20 | 21 |
| 10 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | 00 | 01 | 02 |
| 11 | 11 | 12 | 10 | 21 | 22 | 20 | 01 | 02 | 00 |
| 12 | 12 | 10 | 11 | 22 | 20 | 21 | 02 | 00 | 01 |
| 20 | 20 | 21 | 22 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 |
| 21 | 21 | 22 | 20 | 01 | 02 | 00 | 11 | 12 | 10 |
| 22 | 22 | 20 | 21 | 02 | 00 | 01 | 12 | 10 | 11 |

Çizelge 3.9. T üzerindeki $\odot_1, \odot_2, \odot_3$ ve \odot_4 işlemleri

| \odot_1 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | | \odot_2 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| 01 | 00 | 20 | 10 | 01 | 21 | 11 | 02 | 22 | 12 | | 01 | 00 | 20 | 10 | 01 | 21 | 11 | 02 | 22 | 12 | 12 |
| 02 | 00 | 10 | 20 | 02 | 12 | 22 | 01 | 11 | 21 | | 02 | 00 | 10 | 20 | 02 | 12 | 22 | 01 | 11 | 21 | 21 |
| 10 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | | 10 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | 22 |
| 11 | 00 | 21 | 12 | 11 | 02 | 20 | 22 | 10 | 01 | | 11 | 00 | 12 | 21 | 11 | 20 | 02 | 22 | 01 | 10 | 10 |
| 12 | 00 | 11 | 22 | 12 | 20 | 01 | 21 | 02 | 10 | | 12 | 00 | 22 | 11 | 12 | 01 | 20 | 21 | 10 | 02 | 02 |
| 20 | 00 | 02 | 01 | 20 | 22 | 21 | 10 | 12 | 11 | | 20 | 00 | 02 | 01 | 20 | 22 | 21 | 10 | 12 | 11 | 11 |
| 21 | 00 | 22 | 11 | 21 | 10 | 02 | 12 | 01 | 20 | | 21 | 00 | 11 | 22 | 21 | 02 | 10 | 12 | 20 | 01 | 01 |
| 22 | 00 | 12 | 21 | 22 | 01 | 10 | 11 | 20 | 02 | | 22 | 00 | 21 | 12 | 22 | 10 | 01 | 11 | 02 | 20 | 20 |

(a)

(b)

| \odot_3 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | | \odot_4 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | |
|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|-----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |
| 01 | 00 | 20 | 10 | 01 | 12 | 22 | 02 | 11 | 21 | | 01 | 00 | 20 | 10 | 01 | 21 | 11 | 02 | 22 | 12 | 12 |
| 02 | 00 | 10 | 20 | 02 | 21 | 11 | 01 | 22 | 12 | | 02 | 00 | 10 | 20 | 02 | 12 | 22 | 01 | 11 | 21 | 21 |
| 10 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | | 10 | 00 | 01 | 02 | 10 | 11 | 12 | 20 | 21 | 22 | 22 |
| 11 | 00 | 21 | 12 | 11 | 20 | 01 | 22 | 02 | 10 | | 11 | 00 | 11 | 22 | 12 | 20 | 01 | 21 | 02 | 10 | 10 |
| 12 | 00 | 11 | 22 | 12 | 02 | 20 | 21 | 10 | 01 | | 12 | 00 | 21 | 12 | 11 | 02 | 20 | 22 | 10 | 01 | 01 |
| 20 | 00 | 02 | 01 | 20 | 22 | 21 | 10 | 12 | 11 | | 20 | 00 | 02 | 01 | 20 | 22 | 21 | 10 | 12 | 11 | 11 |
| 21 | 00 | 22 | 11 | 21 | 01 | 10 | 12 | 20 | 02 | | 21 | 00 | 12 | 21 | 22 | 01 | 10 | 11 | 20 | 02 | 01 |
| 22 | 00 | 12 | 21 | 22 | 10 | 02 | 11 | 01 | 20 | | 22 | 00 | 22 | 11 | 21 | 10 | 02 | 12 | 01 | 20 | 20 |

(c)

(d)

Böylece; (T, \oplus, \odot_1) ile cisim, (T, \oplus, \odot_2) ile sol yaklaşık cisim, (T, \oplus, \odot_3) ile sağ yaklaşık cisim ve (T, \oplus, \odot_4) ile de Hughes sistemi elde edilir.

Şimdi Bayar et al (2016)'a göre Hall düzlemi aşağıda verilen nokta, doğru ve üzerinde olma matrisi bağıntısına göre inşa edilebilir. Çizelge 3.10 bu çalışmadan alınmak suretiyle tekrar yazılmıştır. Buradaki yöntem, Coxeter (2003)'in kitabında 5. mertebeden projektif düzlem elde etmek için kullandığı yöntemin 9. mertebeye uyarlanmasıdır.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

Bölüm 3.2.3'dekinin aksine koordinatlama aşağıdaki N_p, D_p, o_p kümeleri dikkate alınarak yapılacaktır:

$$\begin{aligned} N_p &= \{(x_1, x_2, x_3): x_1, x_2, x_3 \in T, (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0), (x_1, x_2, x_3) \\ &\equiv \lambda(x_1, x_2, x_3), \lambda \in T, \lambda \neq 0\}, \\ D_p &= \{[a_1, a_2, a_3]: a_1, a_2, a_3 \in T, [a_1, a_2, a_3] \neq [0,0,0], [a_1, a_2, a_3] \\ &\equiv \lambda[a_1, a_2, a_3], \lambda \in T, \lambda \neq 0\}, \\ (x_1, x_2, x_3) o_p [a_1, a_2, a_3] &\Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \end{aligned}$$

ile verilen (N_p, D_p, o_p) projektif düzlemi olup nokta ve doğru kümesi Bölüm 3.2.3'dekinden farklı olarak aşağıdaki gibi alınacaktır:

$$\begin{aligned} N_p &= \{(x, y, 1): x, y \in T\} \cup \{(x, 1, 0): x \in T\} \cup \{(1, 0, 0)\}, \\ D_p &= \{[m, k, 1]: m, k \in T\} \cup \{[k, 1, 0]: k \in T\} \cup \{[1, 0, 0]\} \end{aligned}$$

Burada; $(1, 0, 0)$ formundaki nokta tek sonsuz noktasını temsil eder. $(1, x, 0)$ formundaki nokta 9 noktayı ve $(x, y, 1)$ formundaki nokta da 81 noktayı temsil ederek toplamda;

$$1 + 9 + 81 = 91$$

nokta elde edilmiş olur. Benzer şekilde 91 tane doğru gösterimi mevcuttur.

Örnek olarak sol yaklaşık cisim üzerine kurulu olan Hall düzleminde doğrular ve üzerindeki noktalar Çizelge 3.10 ile verilmiştir. Çizelgede ilk sıradaki doğru olan $[1, 0, 0]$ doğrusu ele alınarak $xm + yn + zk = 0$ üzerinde olma bağıntısı ile doğru üzerindeki noktalar bulunmuş olur. Bu durumda;

$[1, 0, 0] =$
 $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 1), (0, 3, 1), (0, 4, 1), (0, 5, 1), (0, 6, 1), (0, 7, 1), (0, 8, 1), (0, 9, 1)\}$ olup doğru üzerindeki noktalar Çizelge 3.9'da görüldüğü üzere; 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 numaralı noktalardır.

Çizelge 3.10. Hall düzleminde doğrular ve noktalar

| Doğrular | Noktalar | | | | | | | | | | Doğrular | Noktalar | | | | | | | | | |
|--------------|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--------------|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| (1) [1,0,0] | 2 | 11 | 20 | 29 | 38 | 47 | 56 | 65 | 74 | 83 | (47) [0,4,1] | 1 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| (2) [0,1,0] | 1 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | (48) [1,4,1] | 10 | 13 | 27 | 32 | 44 | 47 | 61 | 69 | 82 | 84 |
| (3) [1,1,0] | 4 | 11 | 22 | 30 | 44 | 55 | 63 | 68 | 79 | 87 | (49) [2,4,1] | 6 | 12 | 25 | 35 | 41 | 47 | 63 | 73 | 78 | 85 |
| (4) [2,1,0] | 3 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 | 91 | (50) [3,4,1] | 9 | 14 | 24 | 30 | 40 | 47 | 64 | 70 | 81 | 89 |
| (5) [3,1,0] | 5 | 11 | 23 | 35 | 40 | 54 | 60 | 66 | 82 | 88 | (51) [4,4,1] | 4 | 15 | 26 | 36 | 43 | 47 | 59 | 66 | 76 | 91 |
| (6) [4,1,0] | 6 | 11 | 24 | 37 | 43 | 49 | 62 | 72 | 77 | 84 | (52) [5,4,1] | 5 | 16 | 22 | 33 | 46 | 47 | 57 | 71 | 77 | 90 |
| (7) [5,1,0] | 7 | 11 | 25 | 36 | 46 | 50 | 58 | 69 | 75 | 89 | (53) [6,4,1] | 7 | 17 | 28 | 31 | 39 | 47 | 60 | 72 | 79 | 86 |
| (8) [6,1,0] | 8 | 11 | 26 | 32 | 39 | 52 | 64 | 67 | 78 | 90 | (54) [7,4,1] | 8 | 18 | 21 | 37 | 42 | 47 | 58 | 68 | 80 | 88 |
| (9) [7,1,0] | 9 | 11 | 27 | 34 | 42 | 53 | 57 | 73 | 76 | 86 | (55) [8,4,1] | 3 | 19 | 23 | 34 | 45 | 47 | 62 | 67 | 75 | 87 |
| (10) [8,1,0] | 10 | 11 | 28 | 33 | 45 | 48 | 59 | 70 | 80 | 85 | (56) [0,5,1] | 1 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| (11) [0,0,1] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | (57) [1,5,1] | 9 | 13 | 26 | 33 | 41 | 55 | 56 | 72 | 75 | 88 |
| (12) [1,0,1] | 2 | 13 | 22 | 31 | 40 | 49 | 58 | 67 | 76 | 85 | (58) [2,5,1] | 7 | 12 | 23 | 37 | 44 | 51 | 56 | 70 | 76 | 90 |
| (13) [2,0,1] | 2 | 12 | 21 | 30 | 39 | 48 | 57 | 66 | 75 | 84 | (59) [3,5,1] | 6 | 14 | 22 | 34 | 39 | 54 | 56 | 69 | 80 | 91 |
| (14) [3,0,1] | 2 | 14 | 23 | 32 | 41 | 50 | 59 | 68 | 77 | 86 | (60) [4,5,1] | 8 | 15 | 25 | 30 | 45 | 49 | 56 | 71 | 82 | 86 |
| (15) [4,0,1] | 2 | 15 | 24 | 33 | 42 | 51 | 60 | 69 | 78 | 87 | (61) [5,5,1] | 4 | 16 | 28 | 35 | 42 | 50 | 56 | 67 | 81 | 84 |
| (16) [5,0,1] | 2 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 | 70 | 79 | 88 | (62) [6,5,1] | 10 | 17 | 21 | 36 | 40 | 52 | 56 | 73 | 77 | 87 |
| (17) [6,0,1] | 2 | 17 | 26 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | 80 | 89 | (63) [7,5,1] | 3 | 18 | 24 | 32 | 46 | 53 | 56 | 66 | 79 | 85 |
| (18) [7,0,1] | 2 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | (64) [8,5,1] | 5 | 19 | 27 | 31 | 43 | 48 | 56 | 68 | 78 | 89 |
| (19) [8,0,1] | 2 | 19 | 28 | 37 | 46 | 55 | 64 | 73 | 82 | 91 | (65) [0,6,1] | 1 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 |
| (20) [0,1,1] | 1 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | (66) [1,6,1] | 5 | 13 | 25 | 37 | 39 | 53 | 59 | 65 | 81 | 87 |
| (21) [1,1,1] | 4 | 13 | 21 | 29 | 46 | 54 | 62 | 70 | 78 | 86 | (67) [2,6,1] | 8 | 12 | 27 | 33 | 40 | 50 | 62 | 65 | 79 | 91 |
| (22) [2,1,1] | 3 | 12 | 22 | 29 | 42 | 52 | 59 | 72 | 82 | 89 | (68) [3,6,1] | 3 | 14 | 28 | 36 | 44 | 49 | 57 | 65 | 78 | 88 |
| (23) [3,1,1] | 5 | 14 | 26 | 29 | 45 | 51 | 58 | 73 | 79 | 84 | (69) [4,6,1] | 9 | 15 | 23 | 31 | 46 | 52 | 63 | 65 | 80 | 84 |
| (24) [4,1,1] | 6 | 15 | 28 | 29 | 40 | 53 | 61 | 68 | 75 | 90 | (70) [5,6,1] | 6 | 16 | 21 | 32 | 45 | 55 | 60 | 65 | 76 | 89 |
| (25) [5,1,1] | 7 | 16 | 27 | 29 | 41 | 49 | 64 | 66 | 80 | 87 | (71) [6,6,1] | 4 | 17 | 24 | 34 | 41 | 48 | 58 | 65 | 82 | 90 |
| (26) [6,1,1] | 8 | 17 | 23 | 29 | 43 | 55 | 57 | 69 | 81 | 85 | (72) [7,6,1] | 10 | 18 | 22 | 35 | 43 | 51 | 64 | 65 | 75 | 86 |
| (27) [7,1,1] | 9 | 18 | 25 | 29 | 44 | 48 | 60 | 67 | 77 | 91 | (73) [8,6,1] | 7 | 19 | 26 | 30 | 42 | 54 | 61 | 65 | 77 | 85 |
| (28) [8,1,1] | 10 | 19 | 24 | 29 | 39 | 50 | 63 | 71 | 76 | 83 | (74) [0,7,1] | 1 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 |
| (29) [0,2,1] | 1 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | (75) [1,7,1] | 7 | 13 | 24 | 35 | 45 | 52 | 57 | 68 | 74 | 91 |
| (30) [1,2,1] | 3 | 13 | 20 | 30 | 43 | 50 | 60 | 73 | 80 | 90 | (76) [2,7,1] | 9 | 12 | 28 | 32 | 43 | 54 | 58 | 71 | 74 | 87 |
| (31) [2,2,1] | 4 | 12 | 20 | 31 | 45 | 53 | 64 | 69 | 77 | 88 | (77) [3,7,1] | 10 | 14 | 25 | 31 | 42 | 55 | 62 | 66 | 74 | 90 |
| (32) [3,2,1] | 8 | 14 | 20 | 35 | 46 | 48 | 61 | 72 | 76 | 87 | (78) [4,7,1] | 5 | 15 | 21 | 34 | 44 | 50 | 64 | 72 | 74 | 85 |
| (33) [4,2,1] | 10 | 15 | 20 | 37 | 41 | 54 | 57 | 67 | 79 | 89 | (79) [5,7,1] | 3 | 16 | 26 | 37 | 40 | 48 | 63 | 69 | 74 | 86 |
| (34) [5,2,1] | 9 | 16 | 20 | 36 | 39 | 51 | 62 | 68 | 82 | 85 | (80) [6,7,1] | 6 | 17 | 27 | 30 | 46 | 51 | 59 | 67 | 74 | 88 |
| (35) [6,2,1] | 5 | 17 | 20 | 32 | 42 | 49 | 63 | 70 | 75 | 91 | (81) [7,7,1] | 4 | 18 | 23 | 33 | 39 | 49 | 61 | 73 | 74 | 89 |
| (36) [7,2,1] | 7 | 18 | 20 | 34 | 40 | 55 | 59 | 71 | 78 | 84 | (82) [8,7,1] | 8 | 19 | 22 | 36 | 41 | 53 | 60 | 70 | 74 | 84 |
| (37) [8,2,1] | 6 | 19 | 20 | 33 | 44 | 52 | 58 | 66 | 81 | 86 | (83) [0,8,1] | 1 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 |
| (38) [0,3,1] | 1 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | (84) [1,8,1] | 6 | 13 | 23 | 36 | 42 | 48 | 64 | 71 | 79 | 83 |
| (39) [1,3,1] | 8 | 13 | 28 | 34 | 38 | 51 | 63 | 66 | 77 | 89 | (85) [2,8,1] | 10 | 12 | 26 | 34 | 46 | 49 | 60 | 68 | 81 | 83 |
| (40) [2,3,1] | 5 | 12 | 24 | 36 | 38 | 55 | 61 | 67 | 80 | 86 | (86) [3,8,1] | 7 | 14 | 21 | 33 | 43 | 53 | 63 | 67 | 82 | 83 |
| (41) [3,3,1] | 4 | 14 | 27 | 37 | 38 | 52 | 60 | 71 | 75 | 85 | (87) [4,8,1] | 3 | 15 | 27 | 35 | 39 | 55 | 58 | 70 | 77 | 83 |
| (42) [4,3,1] | 7 | 15 | 22 | 32 | 38 | 48 | 62 | 73 | 81 | 88 | (88) [5,8,1] | 8 | 16 | 24 | 31 | 44 | 54 | 59 | 73 | 75 | 83 |
| (43) [5,3,1] | 10 | 16 | 23 | 30 | 38 | 53 | 58 | 72 | 78 | 91 | (89) [6,8,1] | 9 | 17 | 22 | 37 | 45 | 50 | 61 | 66 | 78 | 83 |
| (44) [6,3,1] | 3 | 17 | 25 | 33 | 38 | 54 | 64 | 68 | 76 | 84 | (90) [7,8,1] | 5 | 18 | 28 | 30 | 41 | 52 | 62 | 69 | 76 | 83 |
| (45) [7,3,1] | 6 | 18 | 26 | 31 | 38 | 50 | 57 | 70 | 82 | 87 | (91) [8,8,1] | 4 | 19 | 25 | 32 | 40 | 51 | 57 | 72 | 80 | 83 |
| (46) [8,3,1] | 9 | 19 | 21 | 35 | 38 | 49 | 59 | 69 | 79 | 90 | | | | | | | | | | | |

p asal, r pozitif tam sayı olmak üzere mertebesi p^r formunda olan 9. mertebeden projektif düzlemde ilgili yapılar gösterildi. Acaba p^r formunda olmayan mertebeye için bir yapı inşa edilebilir mi? Burada bir açık problem şöyle ifade edilebilir:

Açık Problem 3: Mertebesi p^r biçiminde olmayan projektif düzlem var mıdır? Bunun için bir denklem bulup doğru ve üzerindeki noktaları gösteren bir tablo oluşturmak mümkün mü?

3.3. Üzerinde Olma Matrisi ve Latin Kareler

Bu başlık altında üzerinde olma matrisi, Mükemmel fark kümesi, latin kareler ve Mükemmel latin kareler incelenecektir.

3.3.1. Üzerinde olma matrisi

Burada tanımlar ve teoremler için Kaya (2005) ve Perrott (2016) esas alınmıştır.

Projektif düzlemlerin bir başka ifade edilme metodu üzerinde olma matrisleriyle mümkündür. Satırlar doğruları, sütunlar ise noktaları temsil eder. O halde q . mertebeden projektif düzlemde üzerinde olma matrisi $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğündedir.

Tanım 3.30: P , q . mertebeden bir projektif düzlem ve

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i. \text{ doğru } j. \text{ noktadan geçiyorsa} \\ 0, & i. \text{ doğru } j. \text{ noktadan geçmiyorsa} \end{cases}$$

olacak şekilde $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğünde $A = [a_{ij}]$ matrisine P 'nin üzerinde olma matrisi denir.

Teorem 3.20: q . mertebeden bir projektif düzlemde, A üzerinde olma matrisi olmak üzere aşağıdaki durumlar geçerlidir:

- i-) Her satırda $q + 1$ tane 1 vardır.
- ii-) Her sütunda $q + 1$ tane 1 vardır.
- iii-) İki farklı satırın ortak 1'e sahip olduğu tek bir sütun vardır.
- iv-) İki farklı sütunun ortak 1'e sahip olduğu tek bir satır vardır.

Burada her doğru üzerinde $q + 1$ nokta ve her noktadan geçen $q + 1$ doğru olduğundan ilk iki durum aşikardır. İki doğrunun tek bir noktada kesişmesi ve iki noktanın tek bir doğru üzerinde olmasından dolayı da son iki durum anlaşılabilir.

Fano düzlemi için üzerinde olma matrisi Çizelge 3.11'de A matrisi ile verilmiştir. Burada $q = 2$ olduğundan $7 * 7$ 'lik bir matris elde edilir. Her satırda ve sütunda üçer adet 1 bulunur. A matrisinin satırları ve sütunları yer değiştirilerek (denk matrisler) elde edilen fazla sayıda gösterimi olsa da ikinci mertebeden tek bir düzlem olduğundan üzerinde olma matrisi de tektir.

Çizelge 3.11. Fano düzlemi için bir üzerinde olma matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorem 3.21: A , q . mertebeden bir P projektif düzleminin üzerinde olma matrisi ve u_i 'ler de matrisin satırları olsun. Bu durumda;

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 1, & i \neq j \text{ ise} \\ q + 1, & i = j \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat: $i = j$ iken her satırda $q + 1$ adet 1 olduğundan iç çarpım;

$$(q + 1) * (1 * 1) = q + 1$$

olarak bulunur.

$i \neq j$ iken iki satırın ortak tek bir noktası olduğundan (iki doğru tek bir noktada kesiştiğinden) iç çarpım;

$$1 * 1 = 1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.21 dualite ilkesinden dolayı sütunlar için de geçerlidir.

Teorem 3.22: A , q . mertebeden bir P projektif düzleminin üzerinde olma matrisi olmak üzere; $AA^T = qI + R$ olur. Burada I , $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğünde birim matris ve R , tüm elemanları 1 olan $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğünde bir matristir.

İspat: $B = AA^T$ olsun. A ile A^T çarpıldığı için b_{ij} değerleri aslında A matrisinin i . satırı ile j . sütununun çarpımı olarak hesaplanır. Teorem 3.21 gereği, $i = j$ olduğunda yani diyagonelde $b_{ij} = q + 1$, $i \neq j$ olduğunda yani diyagonal haricinde $b_{ij} = 1$ olur. Böylece $AA^T = qI + R$ yazılabilir.

Örneğin, Fano düzlemin Çizelge 3.11'deki üzerinde olma matrisi A ile A 'nın transpozu A^T çarpılırsa Çizelge 3.12'deki sonuç ($AA^T = qI + R$) elde edilir.

Çizelge 3.12. $AA^T = qI + R$ işleminin gösterimi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğünde bir üzerinde olma matrisinin varlığı q . mertebeden bir projektif düzlemin olduğu anlamına gelir. O halde q . mertebeden bir projektif düzlemin var olup olmadığı $(q^2 + q + 1) * (q^2 + q + 1)$ büyüklüğünde bir üzerinde olma matrisinin varlığı ile alakadardır. Mesela 10. mertebeden bir projektif düzlemin olmadığı biliniyor. Bu demek oluyor ki $111 * 111$ 'lik bir üzerinde olma matrisi yoktur. Tabii ki burada olası tüm durumların hesaplanması zor olduğundan 10 ve daha büyük mertebeli projektif düzlemlerde çeşitli algoritmalar yardımıyla matrisler indirgenerek bazı sonuçlara ulaşılabilir. Nitekim $q = 10$ için böyle olmuştur ve bir projektif düzlemin olmadığı, üzerinde olma matrisinde bazı indirgemeler yapılarak bilgisayar taraması ile bulunmuştur (Lam et al. 1989).

3.3.2 Mükemmel fark kümesi

Üzerinde olma matrisinin elde edilişi Fano düzlem için kolay olsa da mertebe biraz büyüyünce bu durum zor bir probleme dönüşmektedir. Dezargsel projektif düzlemler için üzerinde olma matrisi basit bir ayırma yöntemi ile bulunabilir. Çizelge 3.13'de ilk satırı yazdıktan sonra alttaki satırın üsttekinin bir sağa kaydırılmasıyla yazılarak üzerinde olma matrisi elde edilir. Bir üst başlıkta bahsedildiği gibi bir matristen satırların ve sütunların kendi içinde yer değiştirmesiyle denk matrisler elde edilebilir. Mükemmel fark kümesi ile Dezargsel bir projektif düzlem veren her üzerinde olma matrisine denk bir matris elde edilir.

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

Mükemmel fark kümesi metodu Singer (1938) tarafından bulunmuştur. Çizelge 3.13'de p^r mertebeyi, q nokta sayısını, Mükemmel fark kümesi 0'dan başlayarak kaçınıcı sıralara 1 koyulacağını, Mükemmel ayırma ise toplamları q sayısını verecek şekilde 1'lerin arasındaki nokta sayısını verir.

Çizelge 3.13. Mükemmel fark kümesi metodu

| p^r | q | Mükemmel fark kümesi | Mükemmel ayırma |
|-------|-----|--|---|
| 2 | 7 | 0 1 3 | 1 2 4 |
| 2^2 | 21 | 0 1 4 14 16 | 1 3 10 2 5 |
| 2^3 | 73 | 0 1 3 7 15 31 36 54 63 | 1 2 4 8 16 5 18 9 10 |
| 2^4 | 273 | 0 1 3 7 15 31 63 90 116 127 136 181 194 204 233 238 255 | 1 2 4 8 16 32 27 26 11 9 45 13 10 29 5 17 18 |
| 3 | 13 | 0 1 3 9 | 1 2 6 4 |
| 3^2 | 91 | 0 1 3 9 27 49 56 61 77 81 | 1 2 6 18 22 7 5 16 4 10 |
| 5 | 31 | 0 1 3 8 12 18 | 1 2 5 4 6 13 |
| 7 | 57 | 0 1 3 13 32 36 43 52 | 1 2 10 19 4 7 9 5 |
| 11 | 133 | 0 1 3 12 20 34 38 81 88 94 104 109 | 1 2 9 8 14 4 43 7 6 10 5 24 |
| 13 | 183 | 0 1 3 16 23 28 42 76 82 86 119 137 154 175 | 1 2 13 7 5 14 34 6 4 33 18 17 21 8 |

Öncelikle Fano düzlemin üzerinde olma matrisi aşağıda verilen bir gruplamadan oluşturulup sonra Mükemmel fark kümesi metoduyla üzerinde olma matrisi oluşturularak matrisler gözlemlenecektir.

$\{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,6,7\}, \{2,3,6\}, \{2,4,7\}, \{3,5,7\}, \{4,5,6\}$ gruplamasından yola çıkılırsa 1. satırda 1,2 ve 5 nolu sütunlara 1, diğerlerine 0 yazılır. Benzer şekilde 2. satırda 1,3 ve 4 nolu sütunlara 1, diğerlerine 0 yazılır. Matris bu mantıkla hareket edilerek oluşturulur. Elde edilen üzerinde olma matrisi Çizelge 3.14 (a)'dadır. Mükemmel fark kümesi metodunda ise Çizelge 3.13'de görüldüğü üzere 1. satırda 1,2 ve 4 nolu sütunlara 1, diğerlerine 0 yazılır. (Burada Çizelge 3.13'de görünen 0,1,3 sayılarına bir eklenerek 1,2,4 sayıları elde edilir.) Kalan satırlar alta doğru bir sağa kaydırılarak elde edilir.

Mükemmel fark kümesi metoduyla oluşturulan üzerinde olma matrisi ise Çizelge 3.14 (b)'dedir.

Çizelge 3.14. Fano düzlemi için üzerinde olma matrisleri

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **(b)**

Her iki matriste satır ve sütunda üç adet 1, herhangi iki satırın veya sütunun kesişiminde bir adet 1 bulunduğundan bu matrisler Fano düzlemi için birer üzerinde olma matrisidirler. Satırların ve sütunların kendi içlerinde yer değiştirmesiyle bir matrisin diğerine eşit olduğu kolaylıkla görülebilir. Yani, iki matris birbirine denk matrislerdir.

3.3.3. Latin kareler

Burada verilen tanımlar ve teoremler için genel olarak Colbourn and Dinitz (1996) ve Vanpoucke (2012) referans alınmıştır.

Tanım 3.31: Bir S kümesinden alınan birbirinden farklı q elemanın her satırda ve sütunda bir defa yer almasıyla oluşan $q * q$ büyüklüğünde bir matrise q . dereceden latin kare adı verilir.

Örneğin, $S = \{a, b\}$ kümesinden oluşan $2 * 2$ 'lik iki latin kare Çizelge 3.15'dedir.

Çizelge 3.15. $2 * 2$ 'lik bir latin kare ($S = \{a, b\}$ kümesi ile)

| | |
|-----|-----|
| a | b |
| b | a |

Diğer bir örnekte $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ kümesinden oluşan $3 * 3$ 'lük iki latin kare Çizelge 3.16'dadır.

Çizelge 3.16. 3 * 3'lük latin kare örnekleri

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 2 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |

Tanım 3.32: İlk satırı ve sütunu bir S kümesinin elemanlarının doğal sırasında olan latin kareye standart ya da indirgenmiş latin kare denir.

$S = \{0, 1, 2, 3, \dots, s - 1\}$ için standart latin kare Çizelge 3.17'dedir.

Çizelge 3.17. s elemanlı bir küme için standart latin kare örneği

| | | | | |
|--------------|----------|-------|--------------|--------------|
| 0 | 1 | . . . | s - 2 | s - 1 |
| 1 | 2 | . . . | $s - 1$ | 0 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| s - 2 | $s - 1$ | . . . | $s - 4$ | $s - 3$ |
| s - 1 | 0 | . . . | $s - 3$ | $s - 2$ |

Teorem 3.23: Herhangi bir s pozitif tam sayısı için $s * s$ 'lik bir standart latin kare vardır.

İspat: 0'dan $(s - 1)$ 'e kadar olan sayılar sırayla ilk satıra yazılır. Sonrasında her bir satır üsttekinin sola bir döngüsel kaymasıyla diğer satırlar elde edilir. İlk sütunda aşağı doğru 0'dan birer birer artınca s . satırın ilk sütunu $(s - 1)$ olur. Böylece, $s * s$ 'lik ilk satırı ve sütunu doğal sırasında olan latin kare yani standart latin kare elde edilir.

Burada akla gelen bir soru da dereceye göre latin karelerin kaç tane olduğudur. $S = \{0,1\}$ kümesi için $2 * 2$ 'lik latin kareler 2 tanedir. Bunlar Çizelge 3.18'dedir.

Çizelge 3.18. $2 * 2$ 'lik latin kareler ($S = \{0,1\}$ kümesi ile)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

L_q , q . dereceden latin kare kümesini, L_s ise q . dereceden standart latin kare kümesini göstermek üzere Çizelge 3.19’da 10. dereceye kadar latin karelerin ve standart latin karelerin sayıları verilmiştir.

Çizelge 3.19. $q = 10$ ’a kadar latin ve standart latin karelerin sayıları (Vanpoucke 2012)

| q | $ L_q $ | $ L_s $ |
|-----|---------------------------------------|---------------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 1 |
| 3 | 12 | 1 |
| 4 | 576 | 4 |
| 5 | 161280 | 56 |
| 6 | 812851200 | 9408 |
| 7 | 61479419904000 | 16942080 |
| 8 | 108776032459082956800 | 535281401856 |
| 9 | 5524751496156892842531225600 | 377597570964258816 |
| 10 | 9982437658213039871725064756920320000 | 7580721483160132811489280 |

Tanım 3.33: $U = u_{ij}$ ve $Y = y_{ij}$ $q * q$ ’luk iki latin kare olmak üzere, $u_{ij} = k$ ve $y_{ij} = m$ olan tüm (k, m) ikilileri birbirinden farklı ise U ve Y ’ye (birbirine) dik latin kareler denir.

Örneğin; $S = \{1,2,3\}$ kümesi için dik latin karelere bir örnek Çizelge 3.20’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.20. $3 * 3$ ’lük iki dik latin kare

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 |

Euler (1782) ilk olarak $6 * 6$ ’lık dik latin karelerden iki tane bile olmadığını (Euler varsayımı) iddia etmiştir. 1900’de Tarry (1900) bunun doğru olduğunu ispatladı. Ayrıca Fisher and Yates (1934), Stinson (1984) gibi birçok çalışmanın yanında Betten (2021) tarafından yapılan bir çalışma mevcuttur. Bu çalışmada da latin kareler kullanılmıştır.

Fakat Euler daha da ileri giderek iddiasının $q \equiv 2 \pmod{4}$, $q \geq 6$ için de doğru olduğunu söyledi. Yani Euler'e göre $q = 10, 14, 18, \dots$ mertebelerinde dik latin karelerin olmadığıdır. Bose et al. (1960), $q \equiv 2 \pmod{4}$, $q \geq 10$ için birbirine dik en az iki latin karenin olduğunu kanıtlayarak Euler'in bu konuda yanlış olduğunu ortaya koydular. Çizelge 3.21'de $10 * 10$ için dik iki latin karenin birleştirilmiş hali var. Görüldüğü üzere birbirinin aynısı olan iki basamaklı sayı yok.

Çizelge 3.21. $10 * 10$ 'luk iki dik latin karenin birleşik hali (Frisinger 1981)

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 00 | 47 | 18 | 76 | 29 | 93 | 85 | 34 | 61 | 52 |
| 86 | 11 | 57 | 28 | 70 | 39 | 94 | 45 | 02 | 63 |
| 95 | 80 | 22 | 67 | 38 | 71 | 49 | 56 | 13 | 04 |
| 59 | 96 | 81 | 33 | 07 | 48 | 72 | 60 | 24 | 15 |
| 73 | 69 | 90 | 82 | 44 | 17 | 58 | 01 | 35 | 26 |
| 68 | 74 | 09 | 91 | 83 | 55 | 27 | 12 | 46 | 30 |
| 37 | 08 | 75 | 19 | 92 | 84 | 66 | 23 | 50 | 41 |
| 14 | 25 | 36 | 40 | 51 | 62 | 03 | 77 | 88 | 99 |
| 21 | 32 | 43 | 54 | 65 | 06 | 10 | 89 | 97 | 78 |
| 42 | 53 | 64 | 05 | 16 | 20 | 31 | 98 | 79 | 87 |

$E(q)$, q . dereceden maksimum birbirine dik latin kare sayısı olmak üzere Teorem 3.24 şu şekilde verilebilir:

Teorem 3.24: q . dereceden en fazla $q - 1$ tane birbirine dik latin kare vardır, yani $E(q) \leq q - 1$ 'dir (Ball and Weiner 2011).

İspat: $S = \{1, 2, \dots, q\}$ kümesini ele alalım. Birbirine dik latin karelerde her latin kare kendi içinde permute edilerek $(1,1) = 1$ olacak şekilde ayarlanabilir. Bu dikliğe engel olmayacaktır. O halde tüm latin karelerin ilk satırının ilk sütunu 1 olsun. Bir latin karede ilk satır ve sütun çıkarıldığında geriye $(q - 1)^2$ kadarlık kısma toplamda $q - 1$ tane 1 yerleştirilmelidir. O halde diklik sağlanması için;

$$E(q) * (q - 1) \leq (q - 1)^2 \Rightarrow E(q) \leq q - 1$$

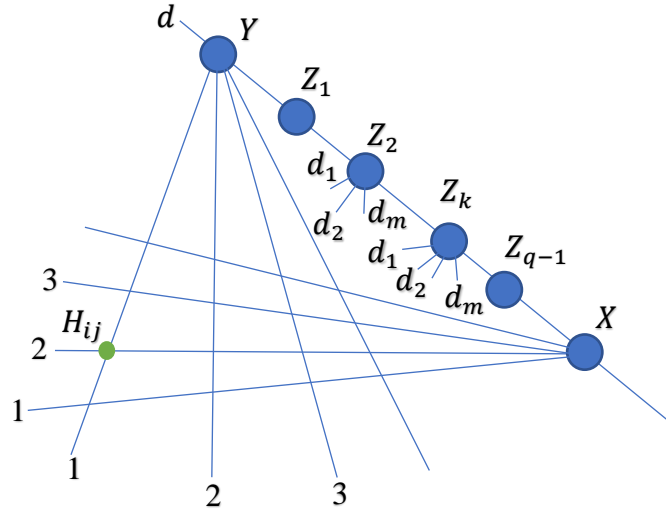
bulunur.

Teorem 3.25: q . dereceden $q - 1$ tane dik latin kare kümesinin var olması için gerek ve yeter şart q . mertebeden bir projektif düzlemin var olmasıdır.

İspat: q . mertebeden bir projektif düzlemde X ve Y noktalarını ele alalım. d doğrusu X ve Y 'yi üzerinde bulundursun. d üzerinde kalan $q - 1$ tane nokta $Z_1, Z_2, \dots, Z_k, \dots, Z_{q-1}$ olsun ve k . latin kare Z_k 'den oluşturulsun.

X 'den geçen d doğrusu dışındaki doğrular $1, 2, \dots, q$ ve yine aynı şekilde Y 'den geçen d doğrusu dışındaki doğrular $1, 2, \dots, q$ olarak isimlendirilsinler. X 'ten ve Y 'den geçen bu doğru çiftleri ayrı ayrı Şekil 3.18'deki gibi kesişirler. Bu noktalar X 'ten geçenler i 'yi, Y 'den geçenler j 'yi göstermek üzere H_{ij} olarak adlandırılınsın. d doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta bu kesişim noktalarının tam olarak bir tanesiyle aynı doğru üzerindedir. Burada H_{ij} , tüm latin karelerde i . satır ve j . sütunu gösterir.

Z noktalarından d hariç geçen doğrular ise q tane sembolle $d_1, d_2, \dots, d_m, \dots, d_q$ olarak isimlendirilsin. Z_k noktasından geçen bir d_m doğrusunun üzerinde q tane H_{ij} noktası vardır. Buradan, k . latin karenin ij noktalarında d_m doğru sembolü vardır, anlaşılır. d_m doğrusu X 'ten geçen i . ve Y 'den geçen j . doğru ile bir daha kesişmeyeceğinden d_m sembolü k . latin karenin i . satırı ve j . sütununda bir daha yer almaz. Toplamda q tane H_{ij} noktası olduğundan latin karenin her satırında ve sütununda bir adet d_m sembolü olması zorunludur. Aynı durum Z_k 'den geçen ve geriye kalan $q - 1$ adet d_1, d_2, \dots doğru için de geçerlidir. Buradaki her bir doğru k . latin karenin ij elemanının yerini gösterir ve k . latin kare oluşur. Aynı mantıkla Z_1 'den Z_{q-1} 'e kadar olan tüm noktalar için ayrı ayrı latin kareler oluşacağından toplamda $q - 1$ tane latin kare elde edilir.



Şekil 3.18. q . mertebeden projektif düzlem için bir konfigürasyon

Buradan $q - 1$ tane birbirine dik latin kareden q . mertebeden bir projektif düzlemin nasıl elde edileceği de anlaşılmaktadır.

O halde var olduğu bilinen 5. mertebeden bir projektif düzlem için 4 adet birbirine dik latin kare bulunabilir. Bunlar Çizelge 3.22’de verilmiştir.

Çizelge 3.22. Birbirine dik $5 * 5$ 'lik 4 adet latin kare

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 2 | 3 | | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 | | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |

3.3.4. Mükemmel latin kareler

Birbirine dik latin kareler elde etme büyük mertebeler için zor bir durum teşkil eder. Bunun için çeşitli yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemlerden biri de Mükemmel latin kare elde ederek mümkündür. Oluşturulan Mükemmel latin karenin ilk satırı sabit kalmak kaydıyla satırların bir alt satıra döngüsel kaydırılmasıyla birbirine dik latin kareler otomatik olarak oluşur.

Mükemmel latin kare tespiti için uygulanacak özellikler şunlardır:

- q . mertebeden bir projektif düzlem için $q * q$ 'luk bir matris oluşturulur.
- Bu matriste 1'den q 'ya kadar olan tamsayılar kullanılır.
- Bu matris aynı zamanda bir standart latin karedir. (1. satırı ve sütunu 1'den q 'ya kadar sırayla olmalıdır.)
- Çift mertebelerde 1'ler diyagonele yerleştirilir. Teklerde ise 1'ler 2. sütunda $((q + 1)/2) + 1$. sıradan başlar ve sağ alta doğru çaprazlara 1'ler konarak devam eder. Son satıra geldiğinde sağdaki sütunun 2. satırından devam eder. Bu kurala 1. satır ve sütun dahil değildir. Bunun sonucu olarak simetrik bir matris elde edilir.
- 1'ler yerleştikten sonra diğer sayılar çakışma olmadan öyle yerleşmelidir ki latin kare elde edilebilmelidir. 1 haricindeki sayılar sağ alta doğru çaprazlarda bir artarak ilerler. Son satıra geldiğinde sağdaki sütunun 2. satırından devam eder. Ayrıca, q 'dan sonra (1'ler yerleşmiş olduğundan) 2'ye döner.
- 2. sütundaki 1'in altından başlayarak bu sütunda 1'in üstüne gelene kadar (1. satır hariç) alt alta olan sayılar arasındaki farklar birbirinden farklı olmalı, ayrıca alttaki sayı üstteki sayıdan bir fazla olmamalıdır. (Burada q . satırdan sonra 2. satıra dönülüyor.)

Bu yöntem Dezargsel düzlemleri verir. Mükemmel latin kare elde edildikten sonra farklı kaydırma yöntemleri ile Dezargsel olmayan düzlemler de elde edilebilir olsa da burada bahsedilen yöntem üzerinde durulacaktır.

Burada önemli olan 2. sütunu elde edebilmektir. Sonrasında kalan kısımlar otomatik olarak yerleşir. Mertebeler için birden fazla latin kare bulmak mümkündür.

Bu şartlar altında tek sayılı mertebeler için $9 * 9$ 'luk ve $7 * 7$ 'lik, çift sayılı mertebeler için $8 * 8$ 'lik Mükemmel latin kareler üzerinden çıkarımlar yapılabilir.

Çizelge 3.23'de $9 * 9$ 'luk bir Mükemmel latin kare için üstteki özellikleri sağlayacak şekilde etiketleme yapılmıştır.

Çizelge 3.23. 9 * 9'luk Mükemmel latin kare için bir etiketleme

| | | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | a | b | c | d | 1 | $d + 5$ | $c + 6$ | $b + 7$ |
| 3 | b | $a + 1$ | $b + 1$ | $c + 1$ | $d + 1$ | 1 | $d + 6$ | $c + 7$ |
| 4 | c | $b + 1$ | $a + 2$ | $b + 2$ | $c + 2$ | $d + 2$ | 1 | $d + 7$ |
| 5 | d | $c + 1$ | $b + 2$ | $a + 3$ | $b + 3$ | $c + 3$ | $d + 3$ | 1 |
| 6 | 1 | $d + 1$ | $c + 2$ | $b + 3$ | $a + 4$ | $b + 4$ | $c + 4$ | $d + 4$ |
| 7 | $d + 5$ | 1 | $d + 2$ | $c + 3$ | $b + 4$ | $a + 5$ | $b + 5$ | $c + 5$ |
| 8 | $c + 6$ | $d + 6$ | 1 | $d + 3$ | $c + 4$ | $b + 5$ | $a + 6$ | $b + 6$ |
| 9 | $b + 7$ | $c + 7$ | $d + 7$ | 1 | $d + 4$ | $c + 5$ | $b + 6$ | $a + 7$ |

$((9 + 1)/2) + 1 = 6$ olup 1'in konacağı kutu 2. sütunun 6. satırındır. 2. sütuna bakıldığında aynı harflerin olduğu kutular arasında bir bağlantı kurulabilir. Döngü 9'dan 2'ye devam ettiğinden $mod 8$ 'e göre işlemler yapılırsa;

$$b \text{ için: } (3,2) - (9,2) = -7 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$c \text{ için: } (4,2) - (8,2) = -6 \equiv 2 \pmod{8}$$

$$d \text{ için: } (5,2) - (7,2) = -5 \equiv 3 \pmod{8}$$

olup $b = 4, c = 9, d = 8$ seçilirse 2. sütundaki elemanlar yukarıdan aşağıya 2, 4, 9, 8, 1, 5, 7, 3 olup $a = 6$ bulunur. Burada 1'in altından başlayarak 1'in üstüne gelene kadar alt alta olan sayılar arasındaki farkların birbirinden ve birden farklı olması gerektiği kontrol edilecek olursa;

5'den 7'ye 2 artış,

7'den 3'e 4 artış,

3'den 6'ya 3 artış,

6'dan 4'e 6 artış,

4'den 9'a 5 artış,

9'dan 8'e 7 artış

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

olup tüm kutular artık doldurulabilir ve böylece Çizelge 3.24'deki Mükemmel latin kare elde edilir.

Çizelge 3.24. 9 * 9'luk bir Mükemmel latin kare

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 6 | 4 | 9 | 8 | 1 | 5 | 7 | 3 |
| 3 | 4 | 7 | 5 | 2 | 9 | 1 | 6 | 8 |
| 4 | 9 | 5 | 8 | 6 | 3 | 2 | 1 | 7 |
| 5 | 8 | 2 | 6 | 9 | 7 | 4 | 3 | 1 |
| 6 | 1 | 9 | 3 | 7 | 2 | 8 | 5 | 4 |
| 7 | 5 | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 9 | 6 |
| 8 | 7 | 6 | 1 | 3 | 5 | 9 | 4 | 2 |
| 9 | 3 | 8 | 7 | 1 | 4 | 6 | 2 | 5 |

Aynı mantıkla 7 * 7'lik Mükemmel latin kare için $((7 + 1)/2) + 1 = 5$ olup 1'in konacağı kutu 2. sütunun 5. satırındır. Döngü 7'den 2'ye devam ettiğinden $mod 6$ 'ya göre işlemler yapılır;

$$(3,2) - (7,2) = -5 \equiv 1 \pmod{6}$$

$$(4,2) - (6,2) = -4 \equiv 2 \pmod{6}$$

olup $(3,2) = 6$ ve $(4,2) = 3$ seçilirse 2. sütundaki elemanlar yukarıdan aşağıya 2, x, 6, 3, 1, 7, 5 olup $x = 4$ bulunur. Burada 1'in altından başlayarak 1'in üstüne gelene kadar alt alta olan sayılar arasındaki farkların birbirinden ve birden farklı olması gerektiği kontrol edilecek olursa;

7'den 5'e 4 artış,

5'den 4'e 5 artış,

4'den 6'ya 2 artış,

6'dan 3'e 3 artış

olup tüm kutular artık doldurulabilir ve Çizelge 3.25'deki Mükemmel latin kare elde edilir.

Çizelge 3.25. 7 * 7'lik bir Mükemmel latin kare

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 6 | 3 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 6 | 5 | 7 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 7 | 6 | 2 | 5 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 7 | 3 | 6 |
| 6 | 7 | 1 | 5 | 3 | 2 | 4 |
| 7 | 5 | 2 | 1 | 6 | 4 | 3 |

Buradan tek sayılı mertebeler için şu çıkarım yapılabilir:

$$\left(\frac{q+1}{2} + 1, 2\right) = 1,$$

$$(3, 2) - (q, 2) = 1,$$

$$(4, 2) - (q - 1, 2) = 2,$$

$$(5, 2) - (q - 2, 2) = 3,$$

.....

$$\left(\frac{q-1}{2} + 1, 2\right) - \left(\frac{q+5}{2}, 2\right) = \frac{q-3}{2}$$

Çizelge 3.26'da 8 * 8'lik bir Mükemmel latin kare için özellikleri sağlayacak şekilde etiketleme yapılmıştır.

Çizelge 3.26. 8 * 8'lik Mükemmel latin kare için bir etiketleme

| | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | a | b | c | c + 4 | b + 5 | a + 6 |
| 3 | a | 1 | a + 1 | b + 1 | c + 1 | c + 5 | b + 6 |
| 4 | b | a + 1 | 1 | a + 2 | b + 2 | c + 2 | c + 6 |
| 5 | c | b + 1 | a + 2 | 1 | a + 3 | b + 3 | c + 3 |
| 6 | c + 4 | c + 1 | b + 2 | a + 3 | 1 | a + 4 | b + 4 |
| 7 | b + 5 | c + 5 | c + 2 | b + 3 | a + 4 | 1 | a + 5 |
| 8 | a + 6 | b + 6 | c + 6 | c + 3 | b + 4 | a + 5 | 1 |

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

1'in konacağı kutu 2. sütunun 2. satırındır. 2. sütuna bakıldığında aynı harflerin olduğu kutular arasında bir bağlantı kurulabilir. Döngü 8'den 2'ye devam ettiğinden $\text{mod } 7$ 'ye göre işlemler yapılırsa;

$$a \text{ için: } (3,2) - (8,2) = -6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$b \text{ için: } (4,2) - (7,2) = -5 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$c \text{ için: } (5,2) - (6,2) = -4 \equiv 3 \pmod{7}$$

olup $a = 7, b = 5, c = 4$ seçilebilir. Böylece 2. sütundaki elemanlar yukarıdan aşağıya 2, 1, 7, 5, 4, 8, 3, 6 olur. Burada 1'in altından başlayarak son satıra gelene kadar alt alta olan sayılar arasındaki farkların birbirinden ve birden farklı olması gerektiği kontrol edilecek olursa;

7'den 5'e 5 artış,

5'den 4'e 6 artış,

4'den 8'e 4 artış,

8'den 3'e 2 artış,

3'den 6'ya 3 artış

olup tüm kutular artık doldurulabilir ve böylece Çizelge 3.27'deki Mükemmel latin kare elde edilir.

Çizelge 3.27. $8 * 8$ 'lik bir Mükemmel latin kare

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 2 | 1 | 7 | 5 | 4 | 8 | 3 | 6 |
| 3 | 7 | 1 | 8 | 6 | 5 | 2 | 4 |
| 4 | 5 | 8 | 1 | 2 | 7 | 6 | 3 |
| 5 | 4 | 6 | 2 | 1 | 3 | 8 | 7 |
| 6 | 8 | 5 | 7 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 7 | 3 | 2 | 6 | 8 | 4 | 1 | 5 |
| 8 | 6 | 4 | 3 | 7 | 2 | 5 | 1 |

Buradan çift sayılı mertebeler için şu çıkarım yapılabilir:

$$(2,2) = 1,$$

$$(3,2) - (q, 2) = 1,$$

$$(4,2) - (q - 1, 2) = 2,$$

$$(5,2) - (q - 2, 2) = 3,$$

.....

$$\left(\frac{q}{2} + 1, 2\right) - \left(\frac{q}{2} + 2, 2\right) = \frac{q - 2}{2}$$

Şimdi bir 5 * 5'lik Mükemmel latin kare başta oluşturulduktan sonra 1. satır hariç satırların bir alta ve en alt satırın ise 2. satıra kaydırılmasıyla elde edilen 3 latin kare ile birlikte toplamda 4 adet latin kare Çizelge 3.28'de gösterilmiş olup tüm latin karelerin birbirine dik latin kareler olduğu gözlemlenebilir.

Çizelge 3. 28. Mükemmel latin kare ile elde edilen dik 5 * 5'lik 4 adet latin kare

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|--|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 5 | 4 | 1 | 3 | | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | | 3 | 4 | 2 | 5 | 1 |
| 3 | 4 | 2 | 5 | 1 | | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 | | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 |
| 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | | 3 | 4 | 2 | 5 | 1 | | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 | | 5 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| 5 | 3 | 1 | 2 | 4 | | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | | 3 | 4 | 2 | 5 | 1 | | 2 | 5 | 4 | 1 | 3 |

Oluşturulan 4 adet dik latin kare, 5. mertebeden bir projektif düzlemin varlığını gösterir.

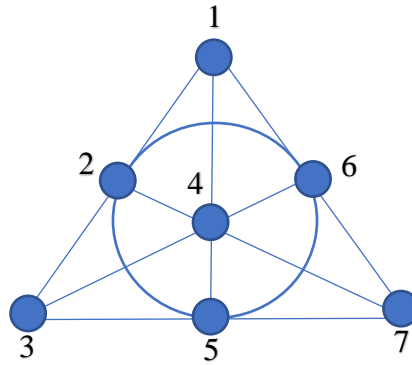
3.4. Galois Geometride Bazı Alt Yapılar ve Projektif 3-Uzay

Bu bölümde projektif düzlemlerde bazı alt yapılar incelenerek projektif 3-uzayda karşılıkları üzerinde durulacaktır. Burada verilen temel tanımlar ve teoremler için Thas (2004), Gököz Gül (2013) ve Öztürk (2016)'den faydalanılmıştır.

3.4.1. k-arklar ovaler hiperovaller

Tanım 3.34: $PG(n-1, q)$ 'da herhangi n tanesi aynı hiperdüzlem üzerinde olmayan k noktalı kümeye $k - ark$ adı verilir.

Bölüm 3.1.3'de verilen Şekil 3.6'daki Fano düzlemi altta tekrar verilerek Fano düzlem üzerindeki $3 - ark$ 'lar ve $4 - ark$ 'lar Örnek 3.4'te anlatılacaktır.



Şekil 3.6. Fano düzlemi

Örnek 3.4: $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7\}$ olmak üzere; $d_1 = \{1,2,3\}$, $d_2 = \{1,4,5\}$, $d_3 = \{1,6,7\}$, $d_4 = \{2,4,7\}$, $d_5 = \{2,5,6\}$, $d_6 = \{3,4,6\}$ ve $d_7 = \{3,5,7\}$ olsun. Bu durumda elde edilen Fano düzlemi Şekil 3.6'daki gibidir.

Fano düzlemin doğrudan olmayan 3 noktalı kümesi ve 4 noktalı kümesi mevcuttur. $\{1,2,4\}$ kümesi bir $3 - ark$ ve $\{1,2,4,6\}$ kümesi de bir $4 - ark$ belirtir. Bakıldığında toplamdaki 7 noktadan herhangi bir doğru üzerinde bulunan 3 nokta çıkarılırsa bir $4 - ark$ elde edileceği gibi herhangi bir $4 - ark$ 'tan herhangi bir nokta çıkarıldığında ise bir $3 - ark$ elde edilir. Dolayısıyla Fano düzlemde $4 - ark$ sayısı (7 adet doğru olduğundan) 7'dir. $4 - ark$ 'tan herhangi bir nokta 4 farklı şekilde çıkarılabileceğinden $7 * 4 = 28$ adet $3 - ark$ vardır.

Fano düzlemde bir $5 - ark$ bulmak ise mümkün değildir.

Tanım 3.35: q . mertebeden bir projektif düzlemde;

- i-) herhangi üçü doğrudan olmayan $q + 1$ tane nokta kümesine oval,
- ii-) herhangi üçü doğrudan olmayan $q + 2$ tane nokta kümesine hiperoval

adı verilir.

q tek iken sadece oval varken, q çift iken ilaveten hiperoval de vardır.

Tanım 3.36: Bir projektif düzlemde;

- i-) bir doğru $k - ark$ 'ı hiçbir noktada kesmiyorsa kesmeyen veya passant doğrusu,
- ii-) bir doğru $k - ark$ 'ı tek bir noktada kesiyorsa teğet veya tanjant doğrusu,
- iii-) bir doğru $k - ark$ 'ı iki noktada kesiyorsa kesen veya sekant doğrusu

adı verilir.

Teorem 3.26: B noktası $k - ark$ üzerinde bir nokta olmak üzere, B 'den geçen teğetlerin sayısı;

$$T(B) = q + 2 - k$$

olur.

İspat: B noktası $k - ark$ üzerinde olduğundan B 'den $k - 1$ tane kesen doğrusu geçer. B 'den toplamda $q + 1$ tane doğru geçtiğinden geriye kalan sayı teğet sayısını verir. Buradan;

$$T(B) = (q + 1) - (k - 1) = q + 2 - k$$

olarak hesaplanır.

Teorem 3.27: Bir projektif düzlemde $k - ark$ için toplamda kesmeyen doğru sayısı τ_0 , teğet doğru sayısı τ_1 , kesen doğru sayısı τ_2 ve bir B noktasından geçen teğet sayısı $T(B) = t$ olmak üzere;

$$\text{i-)} \tau_0 = \frac{q(q-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2}$$

$$\text{ii-)} \tau_1 = kt$$

$$\text{iii-)} \tau_2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

eşitlikleri vardır.

Örnek 3.5: 5. mertebeden projektif düzlemde, yani $PG(2,5)$ 'te bir ovalin bir noktasından geçen teğet sayısını, kesen sayısını ve ovaldeki toplam teğet, kesen ve kesmeyen sayısını bulunuz.

Çözüm: $q = 5$ tek olduğundan oval $q + 1 = 6$ noktalıdır ve $k - ark$ olarak düşünüldüğünde $k = 6$ 'dır. Ovalin bir noktasından geçen kesen sayısı;

$$k - 1 = 6 - 1 = 5$$

ve teğet sayısı;

$$q + 2 - k = 5 + 2 - 6 = 1 = t \text{ (} q \text{ tek iken } t = 1 \text{ 'dir.)}$$

olarak bulunur. Ayrıca ovaldeki toplam teğet sayısı;

$$\tau_1 = kt = 6 * 1 = 6,$$

kesen sayısı;

$$\tau_2 = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

ve kesmeyen sayısı;

$$\tau_0 = \frac{q(q-1)}{2} + \frac{t(t-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} + \frac{1(1-1)}{2} = 10$$

olarak bulunur.

Burada q çift iken hiperovalde $k = q + 2$ olup

$$t = q + 2 - k = (q + 2) - (q + 2) = 0$$

olarak bulunur.

Dikkat edilirse q tek iken $t = 1$, çift iken $t = 0$ olur. Yani, tek mertebeli projektif düzlemlerde ovalin bir noktasından bir teğet geçerken, çift mertebeli projektif düzlemlerde hiperovalin bir noktasından hiç teğet geçmez.

$PG(2,2)$ 'de 3-ark'ların ve 4-ark'ların sayısı bulunmuştu. Tüm projektif düzlemler için 7-ark'a kadar olanların sayısını veren formüller Çizelge 3.29'dadır.

Çizelge 3.29. $PG(2, q)$ 'da $k - ark$ sayıları (Kaplan et al. 2017)

| $k - ark$ | Formül |
|-----------------------------------|---|
| 3-ark | $\frac{1}{3!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2$ |
| 4-ark | $\frac{1}{4!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2$ |
| 5-ark | $\frac{1}{5!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2(q^2 - 5q + 6)$ |
| 6-ark | $\frac{1}{6!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q^2 - 5q + 6)(q^2 - 9q + 21)$ |
| 7-ark (q tek ise) (A_7) | $\frac{1}{7!}(q^2 + q + 1)(q + 1)q^3(q - 1)^2(q - 3)(q - 5)$ $(q^4 - 20q^3 + 148q^2 - 468q + 498)$ |
| 7-ark (q çift ise) | $A_7(q) - \frac{1}{168}(q^2 + q + 1)(q + 1)q^3(q - 1)^2$ |

Örnek olarak Fano düzlemdeki 3 – *ark* ve 4 – *ark* sayısı önceden 28 ve 7 olarak hesaplanmıştır. Çizelge 3.29’den kontrol edilecek olursa aynı sonuca ulaşılır.

Fano düzlemdeki 3 – *ark* sayısı;

$$\frac{1}{3!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2 = \frac{1}{6} * 7 * 6 * 4 = 28$$

ve 4 – *ark* sayısı;

$$\frac{1}{4!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2 = \frac{1}{24} * 7 * 6 * 4 * 1 = 7$$

olarak bulunur.

Tanım 3.37: $PG(n, q)$ ’da herhangi $m + 1$ noktası aynı hiperdüzlem üzerinde olmayan fakat herhangi m noktası en az bir hiperdüzlem üzerinde bulunan k noktalı kümeye $(k, m) - ark$ adı verilir.

Dolayısıyla $PG(2, q)$ ’da $(k, m) - ark$, herhangi $m + 1$ noktası aynı doğru üzerinde olmayan fakat içerisinde en az bir adet m noktalı bir doğru barındıran k noktalı kümedir.

Örnek 3.4’de Fano düzlem için verilen $\{1,2,4,6\}$ kümesi bir $(4,2) - ark$ olup bilinen 4 – *ark* demektir.

Teorem 3.28: $M, PG(2, q)$ ’da bir $(k, m) - ark$ ise

$$k \leq (q + 1)(m - 1) + 1$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: B , M 'nin bir noktası olsun. B 'den geçen $q + 1$ tane doğru vardır. Bu doğruların her biri M 'yi en fazla B hariç $m - 1$ farklı noktada keser. Bu duruma B 'yi de dahil edersek;

$$k \leq (q + 1)(m - 1) + 1$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan yola çıkarak projektif düzlemde *maksimal – ark*'ın tanımı verilebilir.

Tanım 3.38: M , $PG(2, q)$ 'da bir $(k, m) - ark$ ve

$$k = (q + 1)(m - 1) + 1$$

eşitliği sağlanıyorsa M 'ye *maksimal – ark* denir.

Tanım 3.39: $PG(n, q)$ 'da bir $k - ark$, $(k + 1) - ark$ tarafından içerilmiyorsa bu arka *tam – ark* denir.

$PG(2, q)$ 'da tüm *maksimal – ark*'lar aynı zamanda *tam – ark* olduğu için q çift iken hiperovaller ve q tek iken ise ovaler, *tam – ark*'lara örnek olarak verilebilir.

Örnek 3.4'deki $\{1, 2, 4, 6\}$ kümesi Fano düzlem için bir $(4, 2) - ark$ olup aynı zamanda hiperoval ve bir *maksimal – ark*'tır.

Teorem 3.29: M , $PG(2, q)$ 'da bir $(k, m) - ark$ aynı zamanda *maksimal – ark* ise düzlemdeki her doğru M 'yi ya hiç kesmez ya da m tane noktada keser.

İspat: Düzlemdeki bir d doğrusu M 'yi $1 \leq r < m$ aralığında r noktada kessin. B , M 'de ve d üzerinde bir nokta olmak üzere, B noktasından d hariç geçen doğru sayısı q olur. Bu q adet doğrunun her biri en fazla B hariç M 'nin birbirinden farklı $m - 1$ noktasını içerebilir. Burada M 'deki toplam nokta sayısından hareketle;

$$k \leq r + q(m - 1) < m + q(m - 1)$$

yazılabilir. M , *maksimal – ark* olduğundan

$$k = (q + 1)(m - 1) + 1 = m + q(m - 1)$$

eşitliği sağlanmalıdır. k değeri eşitsizlikte yerine koyulursa verilen aralıktaki hiçbir r değeri eşitsizliği sağlamaz. O halde, düzlemdeki bir d doğrusu M 'yi ya hiç kesmeyecek ya da m tane noktada kesecektir.

Hiperoval, $k - ark$ ve $(k, m) - ark$ ile ilgili çok sayıda açık problem olup bazıları şunlardır:

Açık Problem 4: $PG(2, q)$ 'da q çift iken *maksimal – ark* olan $q + 2$ noktadan oluşan hiperovalin varlığı biliniyor. Düzlemde hiperovalleri sınıflandırınız.

Açık Problem 5: $PG(2, q)$ 'da q tam kare olmadığında düzlemdeki ikinci en büyük tam $k - ark$ 'ın eleman sayısını bulunuz.

Açık Problem 6: $PG(2, q)$ 'daki en küçük tam $k - ark$ 'ın eleman sayısını bulunuz.

Açık Problem 7: $PG(2, q)$ 'daki en küçük tam $(k, m) - ark$ 'ın eleman sayısını bulunuz.

Açık Problem 8: q tek iken tüm $2 < m < q$ değerleri için $PG(2, q)$ 'daki bir $(k, m) - ark$ 'ın eleman sayısının alabileceği maksimum değeri bulunuz.

Açık Problem 9: q çift ve m , q 'yu bölmediği zaman tüm $2 < m < q$ değerleri için $PG(2, q)$ 'daki bir $(k, m) - ark$ 'ın eleman sayısının alabileceği maksimum değeri bulunuz.

3.4.2. Galois geometride projektif 3-uzay

Bu kısımda referans verilmeyen tanımlarda ve teoremlerde Bölüm 3.4’de verilen referanslara ilave olarak Öztürk (2016)’ten faydalanılmıştır.

$GF(q)$ cismi üzerinde projektif düzlemde tanımlama bir üst boyut olan 3 boyutlu uzaydan yapılmıştır. $GF(q)$ sonlu cismi üzerinde tanımlı $V(3, q)$ vektör uzayından alınan ve orantılı yani birbirinin λ ($\lambda \in GF(q)$) katı durumundaki $(0,0,0)$ noktası hariç üçlü noktaların projektif düzlemde tek bir noktayı gösterdiği anlatılmıştır. Benzer durum projektif 3-uzaylar için de geçerlidir.

$GF(q)$ bir cisim ve $V(n + 1, q)$, $GF(q)$ üzerinde $n + 1$ boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere, V ’nin sıfır vektörü haricinde birbirinin λ ($\lambda \in GF(q)$) katı olan vektörlerin tek bir vektöre tekabül eden denklik sınıfına $GF(q)$ üzerinde $PG(n, q)$, n boyutlu projektif uzayı adı verilir. V vektör uzayının düzlemleri $PG(n, q)$ ’da doğru, doğruları ise nokta olur. $PG(n, q)$ ’nun $n - 1$ boyutlu alt uzayına hiperdüzlem denir. Burada $PG(3, q)$ ele alınacak olup 3 boyutlu projektif uzayda aşağıdaki aksiyomlar sağlanır (Kaya 2005):

- Farklı iki nokta tek bir doğru belirtir.
- Her doğru üzerinde $q + 1$ tane nokta vardır.
- Her düzlem üzerinde $q + 1$ tane doğru ve $q^2 + q + 1$ tane nokta vardır.
- Bir doğru ve bu doğrunun üzerinde olmayan bir nokta veya doğrudan olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.
- Farklı iki düzlemdeş doğru tek bir noktada kesişir.
- Düzlemde olmayan bir doğru düzlemi tek bir noktada keser.
- Farklı iki düzlem bir doğru boyunca kesişir.
- Herhangi üçü doğrudan olmayan ve hepsi aynı düzlemde bulunmayan en az dört nokta vardır.

$PG(3, q)$ uzayında aşağıdakiler geçerlidir:

- Uzayın her düzlemi projektif düzlemdir.
- Projektif düzlemde yapılan Desarg tanımı projektif 3-uzay için de yapılabilir.

Teorem 3.30: Projektif 3-uzayın her düzlemi Dezargseldir, yani uzayın içine yerleştirilebilen her düzlemde Dezarg aksiyomu geçerlidir (Kaya 2005).

Tanım 3.40: $S = PG(3, q)$ uzayının duali S^* olsun. S 'de geçerli olan teoremlerin duali S^* 'de geçerlidir. S 'de noktaların duali düzlemler, düzlemlerin duali noktalar, doğruların duali yine doğrulardır.

$PG(3, q)$ 'da tanımlama $PG(2, q)$ 'ya benzer şekilde yapılır. Bu sefer (x_1, x_2, x_3) yerine (x_1, x_2, x_3, x_4) ve $[a_1, a_2, a_3]$ yerine $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ alınarak nokta, düzlem kümeleri ile üzerinde olma bağıntısı yazılır.

$$N_p = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1, x_2, x_3, x_4 \in F, (x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0,0,0,0), \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4), \lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

nokta kümesini,

$$Z_p = \{[a_1, a_2, a_3, a_4]: a_1, a_2, a_3, a_4 \in F, [a_1, a_2, a_3, a_4] \neq [0,0,0,0], \\ [a_1, a_2, a_3, a_4] \equiv \lambda[a_1, a_2, a_3, a_4], \lambda \in F, \lambda \neq 0\}$$

düzlem kümesini ve

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) o_p [a_1, a_2, a_3, a_4] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

üzerinde olma bağıntısını verir.

Burada eşitlik sağlanması noktanın düzlem üzerinde olduğunu gösterir.

$PG(2, q)$ 'da noktalar $(1, x, y)$, $(0,1, z)$, $(0,0,1)$ ve doğrular da $[1, x, y]$, $[0,1, z]$, $[0,0,1]$ formunda gösterilmişti. Benzer şekilde $PG(3, q)$ 'da noktalar;

$$(1, x, y, z), (0,1, m, n), (0,0,1, k), (0,0,0,1)$$

ve dualite ilkesinden düzlemler;

$$[1, x, y, z], [0, 1, m, n], [0, 0, 1, k], [0, 0, 0, 1]$$

formunda yazılabilir.

Teorem 3.31: $PG(3, q)$ uzayının her bir noktası $q^2 + q + 1$ doğru üzerindedir.

İspat: P , $PG(3, q)$ uzayının içinde bir projektif düzlem ve N noktası da P 'nin üzerinde olmayan bir nokta olsun. P 'de bulunan $q^2 + q + 1$ noktanın her biri aksiyom gereği N ile birleşerek bir doğru belirteceğinden ve projektif uzayda her doğru düzlemi kestiğinden N 'den geçen doğru sayısı $q^2 + q + 1$ olur.

Teorem 3.32: $PG(3, q)$ uzayında toplam $q^3 + q^2 + q + 1$ tane nokta vardır.

İspat: Teorem 3.31'den bir N noktasından geçen doğru sayısının $q^2 + q + 1$ olduğu biliniyor. Her doğru üzerinde $q + 1$ nokta olduğuna göre ve N 'den geçen doğrular üzerinden hesaplama yapılırsa bir doğru üzerinde N hariç q tane nokta vardır. Buradan toplam nokta sayısı;

$$q * (q^2 + q + 1) + 1 = q^3 + q^2 + q + 1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.33: $PG(3, q)$ uzayında her nokta $q^2 + q + 1$ düzlem üzerindedir.

İspat: Teorem 3.31'den bir N noktasından geçen doğru sayısının $q^2 + q + 1$ olduğu biliniyor. Bu doğruların her biri ayrı bir düzlem belirttiğinden N noktası gibi her nokta $q^2 + q + 1$ düzlem üzerinde olur.

Teorem 3.34: $PG(3, q)$ uzayında her doğru $q + 1$ düzlem üzerindedir.

İspat: $P, PG(3, q)$ 'da bir düzlem, d ise P 'de bir doğru olsun. d üzerinde $q + 1$ ve P 'de olup d üzerinde olmayan q^2 nokta vardır. Buradaki q^2 nokta ile d doğrusu bir düzlem belirtir. $PG(3, q)$ uzayında toplam $q^3 + q^2 + q + 1$ tane nokta olduğundan bir doğru;

$$[(q^3 + q^2 + q + 1) - (q + 1)] / q^2 = q + 1$$

düzlem üzerinde bulunur.

Teorem 3.35: $PG(3, q)$ uzayında toplam $q^3 + q^2 + q + 1$ tane düzlem vardır.

İspat: $P, PG(3, q)$ 'de bir düzlem olsun. P 'de toplamda $q^2 + q + 1$ tane doğru vardır. Teorem 3.34'den her doğrunun $q + 1$ düzlem üzerinde olduğu biliniyor. Bu doğruların her biri P hariç q düzlem üzerinde olup toplam düzlem sayısı;

$$q * (q^2 + q + 1) + 1 = q^3 + q^2 + q + 1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.36: $PG(3, q)$ uzayında iki farklı düzlem $q + 1$ noktada kesişir.

İspat: $PG(3, q)$ uzayında iki farklı düzlem bir doğru boyunca kesiştiğinden ve bir doğru üzerinde $q + 1$ nokta olduğundan $q + 1$ noktada kesişirler.

Teorem 3.37: $PG(3, q)$ uzayında toplam $(q^2 + 1) * (q^2 + q + 1)$ tane doğru vardır.

İspat: $P, PG(3, q)$ 'de bir düzlem olsun. P 'de toplamda $q^2 + q + 1$ tane nokta ve doğru vardır. N noktası P 'nin içinde bir nokta olsun. Teorem 3.31 gereği N noktasından $q^2 + q + 1$ tane doğru geçer. Bu doğruların $q + 1$ tanesi P düzleminde olup geriye kalan

3. PROJEKTİF ve GALOİS GEOMETRİ

q^2 tanesi P düzlemini tek noktada keser. P'de toplam $q^2 + q + 1$ tane nokta olduğundan $q^2 * (q^2 + q + 1)$ tane doğru eder. Buna P'nin içindeki $q^2 + q + 1$ doğru da ilave edilirse uzaydaki toplam doğru sayısı;

$$q^2 * (q^2 + q + 1) + (q^2 + q + 1) = (q^2 + 1) * (q^2 + q + 1)$$

olarak bulunur.

Çizelge 3.30'da $PG(3, q)$ 'da toplam nokta, toplam doğru, toplam düzlem, bir doğru üzerindeki nokta ve bir düzlem üzerindeki doğru sayıları gösterilmiştir.

Çizelge 3.30. $PG(3, q)$ 'da nokta ve doğru sayıları

| | Toplam nokta veya düzlem sayısı | Toplam doğru sayısı | Bir doğru üzerindeki nokta sayısı | Bir düzlem üzerindeki doğru sayısı |
|------------|---------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| $PG(3, q)$ | $q^3 + q^2 + q + 1$ | $(q^2 + 1) * (q^2 + q + 1)$ | $q + 1$ | $q^2 + q + 1$ |
| $PG(3, 2)$ | 15 | 35 | 3 | 7 |
| $PG(3, 3)$ | 40 | 130 | 4 | 13 |
| $PG(3, 4)$ | 85 | 357 | 5 | 21 |
| $PG(3, 5)$ | 156 | 806 | 6 | 31 |

Teorem 3.38: $PG(3, q)$ uzayında 4 farklı düzlemdeş $K(k_1, k_2, k_3, k_4)$, $L(l_1, l_2, l_3, l_4)$, $M(m_1, m_2, m_3, m_4)$ ve $N(n_1, n_2, n_3, n_4)$ noktaları tanımlansın. Bu durumda;

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat: K, L, M, N noktalarının üzerinde bulunduğu P düzlemi $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ olarak gösterilsin. Bu durumda üzerinde olma bağıntısından;

$$k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 + k_4p_4 = 0$$

$$l_1p_1 + l_2p_2 + l_3p_3 + l_4p_4 = 0$$

$$m_1p_1 + m_2p_2 + m_3p_3 + m_4p_4 = 0$$

$$n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 + n_4p_4 = 0$$

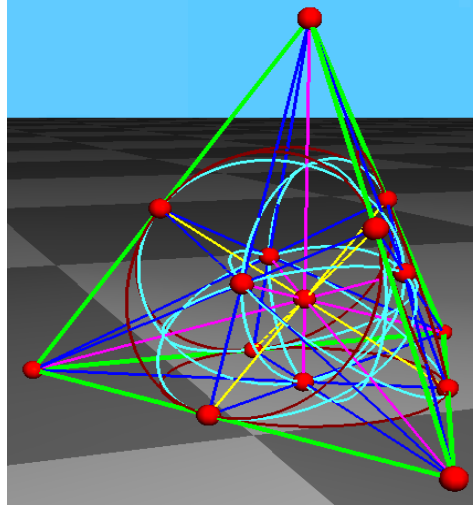
olarak bulunan homojen denklem sistemi dört bilinmeyenli dört tane denklemden oluşup çözülebilir. Katsayılar matrisi Y ;

$$Y = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix}$$

olup $\det(Y) \neq 0$ iken $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [0,0,0,0]$ olacak şekilde tek aşıkâr çözümü vardır. Fakat $[0,0,0,0]$ gösteriminde (formunda) bir düzlem olmadığından bu durum mümkün olmaz. Dolayısıyla $\det(Y) = 0$ olmalıdır.

$PG(3,2)$, projektif 3-uzaydaki en küçük uzaydır. Bunu Fano düzleminin üç boyuta genişletilmiş hali olarak düşünebiliriz. Şekil 3.19'da görülen $PG(3,2)$ 'nin bazı özellikleri şunlardır:

- Toplamda 15 nokta, 35 doğru ve 15 düzleme sahiptir.
- Her noktadan 7 doğru ve 7 düzlem geçer.
- Her doğru üzerinde 3 nokta vardır ve her doğrudan 3 düzlem geçer.
- Her düzlem üzerinde 7 nokta ve 7 düzlem vardır.
- Her düzlem Fano düzlemi ile izomorftir.



Şekil 3.19. $PG(3,2)$ (Anonymous 2023b)

Bölüm 3.1.3’de izomorfizm ve otomorfizm tanımları verilerek Fano düzlemdaki otomorfizm sayısı 168 olarak verilmişti. $PG(3,2)$ uzayında ise bu sayı düzlemdeş olmayan 4 noktanın seçimi ile hesaplanır. Buradan otomorfizm sayısı;

$$15 * 14 * 12 * 8 = 20160$$

olarak bulunur.

Bölüm 3.4.1’de ark, oval ve hiperoval üzerinde durulmuştu. Projektif 3-uzayda ise benzer yapıda olan kep ve ovoid kısaca tanımlanacaktır. Aşağıdaki tanımlar ve teoremler için Brown (2000) esas alınmıştır.

Tanım 3.41: $PG(n, q)$ uzayında herhangi üçü doğruduş olmayan k noktalı kümeye k – kep denir.

Tanım 3.42: $PG(3, q)$ uzayında $q > 2$ için $(q^2 + 1)$ – kep’e ovoid denir.

Teorem 3.39: O , $PG(3, q)$ uzayında bir ovoid ve $q > 2$ olmak üzere;

i-) N , O 'nun bir noktası ise N 'deki tüm tanjantların birleşimi bir düzlem verir.

ii-) $PG(3, q)$ uzayındaki $q^2 + 1$ düzlem O ile tek noktada kesişirken geriye kalan $q^3 + q$ düzlemin O ile kesişimi bir oval verir.

Teorem 3.40: Ovoid'ler için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i-) Ovoid'ler $PG(3, q)$ 'nin tüm uzaylarında vardır.

ii-) Ovoid'ler $PG(3, q)$ uzayında herhangi üçü doğrudan olmayan maksimum nokta kümesidir.

$k - kep$ ve ovoid ile ilgili açık problemler şu şekilde verilebilir:

Açık Problem 10: $k < q^2 + 1$ ve $q \neq 2$ için $PG(3, q)$ 'daki bir tam $k - kep$ 'in eleman sayısı maksimum ne olabilir?

Açık Problem 11: $PG(3, q)$ 'da q çift iken tüm ovoidleri sınıflandırınız.

4. GALOİS GEOMETRİNİN KODLAMA TEORİSİNE BAZI UYGULAMALARI

Bu bölümde Dodunekov and Landjev (2000) ile Etzion and Storme (2016) referans alınmıştır.

Lineer (doğrusal) kodlar, hata düzeltme yetenekleri ve kodlama teorisi alanında önemli bir role sahiptir. Bu kodlar, iletişim sistemlerinde, veri depolama sistemlerinde ve diğer uygulama alanlarında hata düzeltme ve veri bütünlüğü sağlamak için kullanılır.

Tanım 4.1: V , n boyutlu bir vektör uzayı ve F bir cisim olmak üzere; V , F üzerindeki n boyutlu vektörlerin kümesidir.

Vektör uzayının bazını oluşturan lineer bağımsız vektörlerin lineer (doğrusal) kombinasyonlarıyla lineer kodlar elde edilir.

C , bir lineer kod olmak üzere V vektör uzayının bir alt uzayı olarak aşağıdaki özellikleri taşır:

- C , F üzerindeki n boyutlu vektörlerin bir alt uzayıdır, yani $C \subseteq V$ olur.
- C , V 'nin bir alt uzayı olduğu için sıfır vektörünü içerir, yani $0 \in C$ olur.
- C , vektör toplamasına ve skaler çarpımına kapalıdır, yani $c, d \in C$ ve $\alpha \in F$ için $c + d \in C$ ve $\alpha c \in C$ olur.
- C , bir baz kullanılarak lineer kombinasyonlarla ifade edilebilir, yani $c \in C$, C 'nin bir bazında lineer bağımsız vektörlerin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Lineer bir kodun parametreleri, kodun boyutu ve hatayı düzeltebilme kapasitesini belirleyen önemli değerleri ifade eder.

Bu kısımdan sonra şu ana kadar verilenin aksine simgelerden n, k ve d farklı şekilde tanımlanacaktır.

Tanım 4.2: Lineer kodların temel parametreleri şunlardır:

i-) n (uzunluk): n , kodun vektör uzayında her bir vektörün uzunluğunu ifade eder. Dolayısıyla, kodun her bir vektörü n uzunluğunda olacaktır.

ii-) k (boyut): k , kodun boyutunu ifade eder ve kodun lineer bağımsız vektörlerinin sayısını temsil eder. Yani, kodun boyutu k boyutunda olacaktır.

iii-) d (minimum uzaklık): d , kodun en küçük uzaklığını ifade eder ve hatayı düzeltebilme kapasitesini belirler. Minimum uzaklık, kodun herhangi iki farklı vektörü arasındaki en az hata sayısını temsil eder. Hata düzeltme yeteneği, $d - 1$ kadar hata düzeltebilme anlamına gelir.

iv-) t (düzeltilebilir hata sayısı): t , kodun düzeltebileceği maksimum hata sayısını ifade eder. $t = (d - 1)/2$ formülü kullanılarak sonuç alttaki tamsayı değere yuvarlanır.

Bu parametreler, lineer kodun temel özelliklerini belirlemektedir. Örneğin, n ve k parametreleri, kodun boyutunu ve hafıza gereksinimini belirlerken, d ve t parametreleri, hatayı düzeltebilme yeteneğini ve güvenilirliği gösterir. Bu parametreler, lineer kodların tasarımı ve analizi için önemlidir ve farklı uygulama alanlarına göre optimize edilir.

Tanım 4.3: Bir lineer kodun duali (dual kodu) kodun hedef uzayının bir alt uzayıdır ve belirli bir iç çarpım yapısıyla ilişkilendirilir.

Matematiksel olarak, n uzunluğundaki bir lineer kodun duali, n uzunluğundaki vektörlerden oluşan bir başka alt uzayıdır ve

$$K^\perp = \{v \in F^n \mid v \cdot c = 0, \forall c \in K\}$$

olarak ifade edilir.

Burada K^\perp , K kodunun dualini temsil eder. F^n , n uzunluğundaki bir vektörün alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu vektör uzayını ifade eder. $v \cdot c$, v ve c vektörlerinin iç çarpımıdır.

Kodun duali, kodun hedef uzayında her bir vektörün ortogonal olduğu vektörleri içerir. Yani, kodun duali, kodun hedef uzayında ortogonal olan vektörlerin oluşturduğu bir alt uzaydır ve kodun hatayı tespit ederek düzeltme yeteneklerini analiz etmek için kullanılır.

Tanım 4.4: İki vektör arasındaki uzaklığa Hamming uzaklığı denir ve $\sum |x_i - y_i|$ olarak ifade edilir.

Burada x_i ve y_i vektörlerin i . pozisyonundaki bitlerdir. İki vektör arasındaki Hamming uzaklığı, karşılaştırılan bitlerdeki farklılık sayısını toplar. Yani, her bir bit pozisyonunda farklı bir değer varsa bu pozisyon için 1 Hamming uzaklığı eklenir.

Örnek 3.6: $a = 11001$ ve $b = 10111$ olan iki vektörün arasındaki Hamming uzaklığı:

$$|1 - 1| + |1 - 0| + |0 - 1| + |0 - 1| + |1 - 1| = 0 + 1 + 1 + 1 + 0 = 3$$

olarak hesaplanır. Burada her bir vektörün uzunluğu (n) 5 ve kodun boyutu (k) 2'dir.

Hamming uzaklığı, hata tespiti ve hata düzeltme kodlarında kullanılan önemli bir ölçüdür ve kodların güvenilirliğini değerlendirmek için kullanılır.

Tanım 4.5: Vektörün içindeki sıfırdan farklı bitlerin sayısına vektörün ağırlığı denir.

Yani, bir vektörün ağırlığı vektördeki sıfırdan farklı bitlerin sayısıdır.

Tanım 4.6: Lineer bir kodun herhangi iki farklı vektörünün farkının ağırlıklarının en küçük olanına bu kodun minimum uzaklığı (d) denir.

Yani, bir lineer kodun minimum uzaklığı aynı zamanda kodun içindeki sıfırdan farklı tüm vektörlerin ağırlıklarının minimum değeri ile aynıdır, çünkü lineerlikten dolayı

iki vektörün farkı da kodun içindedir.

Bu özellik lineer kodların analizi ve tasarımı için önemlidir. Minimum uzaklık, hata düzeltme kapasitesini belirler ve kodun güvenilirliğini ifade eder. Eğer kodun minimum uzaklığı yeterince büyükse daha fazla hata düzeltme yeteneği sağlar.

Tanım 4.7: Lineer bir kodun üreteç matrisi, kodun tanımını sağlayan ve vektör uzayını oluşturan bir matristir.

Üreteç matrisi, kodun tüm vektörlerini bir lineer kombinasyon olarak ifade etmek için kullanılır. n uzunluğundaki bir lineer kodun üreteç matrisi $n * k$ boyutunda bir matris olup şu şekilde ifade edilir:

$$G = [g_1 | g_2 | \dots | g_k]$$

Burada G üreteç matrisini ve g_1, g_2, \dots, g_k sütunları da kodun üreteç vektörlerini temsil eder. Her bir üreteç vektörü kodun bir bazını oluşturur ve vektör uzayındaki tüm kod vektörleri bu baz üzerindeki lineer kombinasyonlar olarak ifade edilir. Lineer kodun içindeki her bir x vektörü $x = Gy$ olarak hesaplanabilir. Burada $y = [y_1, y_2, \dots, y_k]$, F^k içindeki herhangi bir sütun vektörüdür. Yani, $x = y_1g_1 + y_2g_2 + \dots + y_kg_k$ olur.

Üreteç matrisi, kodun yapısını ve matematiksel özelliklerini yansıtan bir matematiksel araçtır. Kodun üreteç matrisi; kodun boyutunu (k), hedef uzayın boyutunu (n) ve kodun lineer bağımsız üreteç vektörlerini içerir. Üreteç matrisi, kodun analizini ve kod kelimesi oluşturma ile hata düzeltme işlemlerini kolaylaştırır.

Tanım 4.8: Lineer hata düzeltme kodlarının parametreleri arasında cebirsel bir ilişkiyi ifade eden bir sınırlamaya Singleton sınırlaması denir.

Bu sınırlama, bir kodun minimum uzaklık (d) ve boyut (k) parametreleri arasında bir ilişki kurar. Singleton sınırlaması aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$d \leq n - k + 1$$

Burada d , kodun minimum uzaklığını, n kodun uzunluğunu ve k kodun boyutunu temsil eder. Bu sınırlama, bir kodun en az $d - 1$ hata düzeltebilmesi için gereken minimum uzaklık miktarını belirler.

Singleton sınırlaması, kodların kapasitesini sınırlayan bir üst sınırdır. Yani, bir kodun minimum uzaklık değeri Singleton sınırlamasından daha büyükse bu kod hata düzeltebilme kapasitesini aşabilir ve daha fazla hata düzeltebilir. Ancak, Singleton sınırlamasından daha küçük bir minimum uzaklık değeri kodun daha fazla hatayı düzeltemeyeceği anlamına gelir.

Bu sınırlama, kodlama teorisi ve hata düzeltme kodlarının analizi için önemlidir. Bir kodun Singleton sınırlaması ile uyumlu olması, o kodun maksimum düzeyde hata düzeltebildiği anlamına gelir. Ayrıca, kodun parametrelerini optimize ederken Singleton sınırlaması dikkate alınarak tasarım yapılabilir.

Singleton sınırlaması, lineer kodların temel bir özelliğini ifade eder ve hata düzeltme kodlarının analizi, tasarımı ve değerlendirilmesi sırasında önemli bir referans noktasıdır.

Tanım 4.9: Singleton sınırlaması lineer bir kodun uzaklığının alabileceği maksimum değer $n - k + 1$ olduğunu söyler. Bu değeri sağlayan kodlara MDS (maksimum uzaklıkta ayrılabilir) kodlar denir.

MDS kodlar, hata düzeltme ve hata tespit yetenekleri yüksek olan bir tür hata düzeltme kodu olup avantajları şu şekilde sıralanabilir:

- MDS kodlar, verileri koruma amaçlı bölümlere ayırır ve her bir bölümü ekstra bilgi (parite bitleri) ile birlikte depolar.
- Veri iletiminde ve veri depolama sistemlerinde kullanıldığında yararlıdır.
- Bir veya daha fazla hata oluştuğunda hataları tespit edebilme ve bazı durumlarda

hataları düzeltebilme yeteneğidir. Bu, verilerin güvenilirliğini artırır ve veri kaybını önlemeye yardımcı olur.

- MDS kodlar farklı kodlama tekniklerini içerebilir. Bu kodlar, matematiksel işlemler kullanarak verileri bölümlere ayırır, hata düzeltme veya tespit yetenekleri sağlar ve gerektiğinde verileri geri kazandırır.
- MDS kodlarının uygulama alanları oldukça geniş olup veri iletiminde hata düzeltme, veri depolama sistemlerinde güvenilirlik, veri güvenliği gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılır.

MDS kodlar ile sonlu projektif uzaylardaki ark denilen geometrik yapılar eş kavramlardır. Örneğin, $C(n, k, d)$, F_q cismi üzerinde n uzunluklu ve k boyutlu bir MDS kod olsun. Bu durumda;

$$d = n - k + 1$$

olur. $n * k$ boyutundaki $G = [g_1 | g_2 | \dots | g_k]$ matrisi C kodunun üreteç matrisi olsun. G matrisinin her bir satırını F^k vektör uzayının bir elemanı olarak görebiliriz. C kodundaki her x vektörü F^k 'daki bir $y = [y_1, y_2, \dots, y_k]$ vektörü için Gy şeklinde yazılır ve C 'nin minimum uzaklığı $n - k + 1$ olduğu için C kodundaki herhangi bir x vektöründeki 0 olan bitlerin sayısı $k - 1$ 'i geçemez. $PG(k - 1, q)$ 'da her nokta F^k 'da bir doğruya denk geldiğinden G matrisinin her bir satırını $PG(k - 1, q)$ 'nin bir noktası olarak düşünebiliriz. Öte yandan Gy vektöründeki 0 olan bitlerin sayısı G 'nin y vektörüne dik olan satırlarının sayısına eşittir. F^k 'daki bir y vektörüne dik olan tüm vektörler F^k 'nın $k - 1$ boyutlu bir alt uzayını (hiperdüzlem) oluşturur. F^k 'daki bir hiperdüzlem de $PG(k - 1, q)$ 'nin $k - 2$ boyutlu bir alt uzayıdır, yani hiperdüzlemdir. Sonuç olarak G 'nin n tane satırından en fazla $k - 1$ tanesinin aynı hiperdüzlem içine düştüğü söylenebilir. Bu da G 'nin satırlarının $PG(k - 1, q)$ 'da bir $n - ark$ oluşturduğunu gösterir. Bunun tersi de doğru olup satırları $PG(k - 1, q)$ 'daki herhangi bir $n - ark$ 'ın noktalarından oluşan bir matrisin ürettiği lineer kod MDS'dir.

Ark ile bağlantısı olan MDS ile ilgili bir açık problem şu şekildedir:

Açık Problem 12: (MDS varsayımı) $4 \leq k \leq q - 3$ için $PG(k - 1, q)$ 'daki bir ark en fazla $q + 1$ noktaya sahiptir.

Öyle olduğu düşünülen bu varsayım da henüz ispatlanamamış bir açık problemdir.

Tanım 4.10: NMDS (yaklaşık maksimum uzaklıkta ayrılabilir) kodlar, MDS kodlarının yakın bir yaklaşımı olarak benzer hata düzeltme yeteneklerine sahip olan ve hata düzeltme kodlaması alanında kullanılan bir kodlama yöntemidir.

(n, k, d) parametrelerine sahip lineer bir C kodunun NMDS olması için minimum uzaklığının $n - k$ ve C^\perp dual kodunun minimum uzaklığının k olması gerekir.

NMDS kodlar ile sonlu projektif uzaylardaki $(n, k) - ark$ denilen geometrik yapılar eş kavramlardır. Örneğin; $C(n, k, d)$, F_q cismi üzerinde n uzunluklu ve k boyutlu bir NMDS kod olsun. Bu durumda $d = n - k$ ve $d^\perp = k$ (dual kodun minimum uzaklığı) olur. $n * k$ boyutundaki $G = [g_1 | g_2 | \dots | g_k]$ matrisi C kodunun üreteç matrisi olsun. C 'nin minimum uzaklığı $n - k$ olduğu için C kodundaki herhangi bir x vektöründeki 0 olan bitlerin sayısı k 'yi geçemez.

$PG(k - 1, q)$ 'da her nokta F^k 'da bir doğruya denk geldiğinden G matrisinin her bir satırını $PG(k - 1, q)$ 'nin bir noktası olarak düşünebiliriz. MDS kodlar ve arklar arasındaki ilişkiyi gösterirken kullandığımız benzer argümanlardan dolayı G 'nin n tane satırından en fazla k tanesinin aynı hiperdüzlem içine düştüğünü söyleyebiliriz. Ayrıca, G 'nin minimum uzaklığı $n - k$ olduğu için aynı hiperdüzlem içine düşen k tane satırı kesinlikle vardır. Diyelim ki u vektörü C^\perp dual kodunun bir elemanı olsun. Bu durumda $u^T G = 0$ olur. $d^\perp = k$ olduğu için u 'daki 0 olan bitlerin sayısı $n - k$ 'dan fazla olamaz, yani u 'nun sıfırdan farklı bitlerinin sayısı k 'dan büyük eşittir.

Eğer G 'nin satırlarından herhangi $k - 1$ tanesi lineer bağımlı olsaydı $u^T G = 0$ olacak şekilde F^n 'de sıfırdan farklı bit sayısı $k - 1$ 'den küçük olan bir u vektörü

bulunabilirdi ve çelişki olurdu. Dolayısıyla G 'nin satırlarının herhangi $k - 1$ tanesinin lineer bağımsız olması gerekir. Yani, G 'nin herhangi $k - 1$ satırı $PG(k - 1, q)$ 'da bir hiperdüzlem üretir. Bu da G 'nin satırlarının $PG(k - 1, q)$ 'da bir $(n, k) - ark$ oluşturduğunu gösterir. Bunun tersi de doğru olup satırları $PG(k - 1, q)$ 'daki herhangi bir $(n, k) - ark$ 'ın noktalarından oluşan bir matrisin ürettiği lineer kod NMDS'dir.

NMDS kodlarının uygulama alanları geniş bir yelpazede bulunur. Kablosuz iletişim, hata düzeltme, veri aktarımı güvenliği ve veri depolama sistemleri gibi alanlarda hataya dayanıklı ve yüksek performanslı kodlama yöntemleri olarak tercih edilirler.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Çalışmada genel olarak Galois geometri konusu ele alınarak konu ile ilgili bazı açık problemler verilmiştir. Bilinen en önemli problem, 12. mertebeden bir düzlemin var olup olmadığıdır. Konu yelpazesi geniş tutularak temel yapıların anlatılması amaçlanmış, özellikle Fano düzlem üzerinden örneklerle daha anlaşılır olmaya çaba gösterilmiştir. 5. ve 9. mertebeden projektif düzlemler için ayrı başlıklar açılarak düzlemlerin kuruluşu ve Desargues olmayan düzlemler hakkında bilgiler verilmiştir. Üzerinde olma matrisi ve latin kareler anlatılarak $n - 1$ tane birbirine dik latin kare sayesinde n . mertebeden projektif bir düzlemin varlığı konusu üzerinde durulmuştur. Ark, oval, hiperoval, ovoid, kep anlatılmış, ayrıca projektif 3-uzay için projektif düzlemden yola çıkarak benzer teoremler verilmiştir. Arklar ile bağlantıları bulunan MDS ve NMDS kodlar Galois geometrinin bir uygulama alanı olarak görünürken NMDS kodlar ile ilgili bir çalışma süreci devam etmekte olup bu alanda ilerleme hedeflenmektedir.

Tezin konusu geometrinin zor bir alanına yönelik olsa da aynı zamanda matematiğin ilgili çekici yanını da içerir. Bulmaca çözmeyi seven kişilerin, hesap yapmakla ve kod ile uğraşanların ilgi alanına girebilecek içerikler sunar.

KAYNAKLAR

- Akpınar, A. 2001. Sonlu mertebeli projektif düzlemler. Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 39, Bursa.
- Anonim, 2023. Web sitesi: <https://avys.omu.edu.tr/lessons/1/2/2682-932001/234294-131378>, Erişim Tarihi: 07.11.2023
- Anonymous, 2023a. Web sitesi: <https://ericmoorhouse.org/pub/planes/>, Erişim Tarihi: 07.11.2023
- Anonymous, 2023b. Web sitesi: [https://en.wikipedia.org/wiki/PG\(3,2\)#/media/File:Fano_Space.png](https://en.wikipedia.org/wiki/PG(3,2)#/media/File:Fano_Space.png), Erişim Tarihi: 07.11.2023
- Arıkan, A. ve Halıcioğlu, S. 2015. Cebire Giriş. Palme yayınevi, 457, Ankara.
- Ball, S. and Weiner, Z. 2011. An introduction to finite geometry, Preprint, 162.
- Ball, S. 2012. On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis. Journal of the European Mathematical Society (EMS Publishing), 14(3), 733-748.
- Ball, S. and De Beule, J. 2012. On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis II. Designs, Codes and Cryptography, 65(1-2), 5-14.
- Batten, L.M. 1997. Combinatorics of Finite Geometries Second Edition. Cambridge University Press, 193, United Kingdom.
- Bayar, A., Akça, Z., Altıntaş, E. and Ekmekçi, S. 2016. On the complete arcs containing the quadrangles constructing the Fano planes of the left near field plane of order 9. BISSA, 113(4), 266-275.
- Bayraktar, M. 2006. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Gazi kitabevi, 275, Ankara.
- Bennet, M.K. 1995. Affine and Projective Geometry. John Wiley & Son, 229, New York.
- Betten, D. 2021. The problem of Euler/Tarry revisited. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 62, 815-821.
- Beutelspacher, A. 1990. Applications of finite geometry to cryptography. In: Longo, G., Marchi, M., Sgarro, A. (eds) Geometries, Codes and Cryptography. International Centre for Mechanical Sciences, Springer, 313, 161-186, Vienna.
- Bose, R. C., Shrikhande, S. S. and Parker, E. T. 1960. Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. Canadian Journal of Mathematics, 12, 189-203.

- Brown, M. 2000. Finite Geometry and its Applications, Ghent University Socrates Intensive Course, Ghent.
- Bruck, R. H. and Ryser, H. 1949. The non-existence of certain finite projective planes. Canadian Journal of Mathematics, 1, 88-93.
- Bruen, A. A., Thas, J. A. and Blokhuis, A. 1988. On MDS codes, arcs in $PG(n, q)$ with q even, and a solution of three fundamental problems of B. Segre. Inventiones mathematicae, 92, 441-459.
- Cangül, İ. N. 2016. Soyut Cebir, Dora yayınları, 261, Bursa.
- Coxeter, H.S.M. 2003. Projective Geometry Second Edition. Springer, 162, New York.
- Colbourn, C. J. and Dinitz, J. H. 1996. The CRC Handbook of Combinatorial Designs. CRC Press, 715-716, USA.
- Dembowski, P. 1997. Finite Geometries Reprint of the 1968 Edition. Springer, 375, Berlin
- Dodunekov, S. M. and Landjev, I. N. 2000. Near-MDS codes over some small fields, Discrete Mathematics, 213(1-3), 55-65.
- Doyle, B., Voce, B., Lim, W.C. and Lo, C.H. 2015. Finite projective geometry. 2nd year group project, Imperial College, Mathematics Department, 25, London.
- Etzion, T. and Storme, L. 2016. Galois geometries and coding theory. Designs, Codes and Cryptography, 78, 311–350.
- Euler, L. (1782). Recherches sur un nouvelle espèce de quarrés magiques. Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen, 85-239.
- Fisher, R. A. and Yates, F. 1934. The 6x6 latin squares. Cambridge University Press, In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 30(4), 492-507.
- Frisinger, H. H. 1981. The solutin of a famous two-centuries-old problem the Leonhard Euler-Latin square conjecture, Historia Mathematica 8, 56-60.
- Gezer, B. ve Bizim, O. 2017. Soyut Cebir. Dora yayınları, 662, Bursa.
- Gökgöz Gül, G. 2013. Sonlu projektif düzlemlerde bazı alt yapılar üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, 22, Eskişehir.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 2010. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. Bilecik Üniversitesi yayınları, 252, Ankara.

- Hall, M., Swift, J. D. and Killgrove, R. 1959. On projective planes of order nine. *Mathematics of Computation*, 13(68), 233-246.
- Hirschfeld, J., Magliveras, S. and Resmini, M. 1997. *Geometry, Combinatorial Designs and Related Structures* (London Mathematical Society Lecture Note Series). Cambridge University Press, 245, Cambridge.
- Hirschfeld, J. W. P. and Thas, J. A. 1991. *General Galois Geometries*. Springer, 409, London.
- Hughes, D. 1957. A class of non-desarguesian projective planes. *Canadian Journal of Mathematics*, 9, 378-388.
- Kaplan, N., Kimport, S., Lawrence, R., Peilen, L. and Weinreich, M. 2017. Counting arcs in projective planes via Glynn's algorithm. *Journal of Geometry*, 108, 1013-1029. doi.org/10.1007/s00022-017-0391-1
- Kaya, R. 2005. *Projektif Geometri*. Osmangazi Üniversitesi yayınları, 392, Eskişehir.
- Keskin, A. 2017. *Sonlu cisimler ve uygulamaları*. Yüksek Lisans Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 82, Bursa.
- Klein, F. 1893. A comparative review of recent researches in geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2(10), 215-249, New York. (euclid:1183407629, LaTeX version retyped by Nitin C. Rughoonauth: arXiv:0807.3161)
- Klein, A. and Storme, L. 2011. Applications of finite geometry in coding theory and cryptography. *NATO Science for Peace and Security Series-D: Information and Communication Security*, 29, 38-58.
- Lam, C., Thiel, L. and Swiercz, S. 1989. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Canadian Journal of Mathematics*, 41(6), 1117-1123.
- Öztürk, M. 2016. *Galois cisimi üzerinde projektif 3-uzay ve projektif düzlemlerde ovaler üzerine*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, 44, Eskişehir.
- Perrott, X. 2016. Existence of projective planes. arXiv:1603.05333, 3-5.
- Poincare, H. 1903. Poincare's review of Hilbert's "foundations of geometry.". *Bulletin of the American Mathematical Society*, 10(1), 1-23, New York.
- Rotman, J. 1998. *Galois Theory*. Springer, 157, New York.
- Singer, J. 1938. A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43, 377-385.
- Stevenson, F. W. 1972. *Projective Planes*. W. H. Freeman and Company, 416, San Francisco.

- Stinson, D. R. 1984. A short proof of the nonexistence of a pair of orthogonal Latin squares of order six. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 36(3), 373-376.
- Tarry, G. 1901. Le probleme des 36 officiers. *Compte Rendu de la Association Française pour l'Avancement des Sciences*. 29, part 2, 170–203.
- Taşcı, D. 2011. *Lineer Cebir*. Öziş matbaacılık, 585, Ankara.
- Thas, K. 2004. *Symmetry in Finite Generalized Quadrangles*. Birkäuser, 214, Basel.
- Vanpoucke, J. 2012. *Mutually orthogonal latin squares and their generalizations*. Master Thesis, Ghent University, Faculty of Sciences Department of Mathematics, 79, Ghent.
- Veblen, O. and Wedderburn, J. H. M. 1907. Non-desarguesian and non-pascalian geometries. *Transactions of the American Mathematical Society* 8, 379-388.