

**OPTİMİZASYON VE REGRESYON MODELLERİ İLE
METEOROLOJİK TAHMİNLEME DENEMESİ**

Hazırlayan: Dinçer ATASOY

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA

İkinci Danışman: Prof. Dr. Ali FARAJZADEH

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Doktora Tezi

IĞDIR/2023

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
IĞDIR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

OPTİMİZASYON VE REGRESYON MODELLERİ İLE
METEOROLOJİK TAHMİNLEME DENEMESİ

Dinçer ATASOY

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

IĞDIR/2023

TAAHHÜTNAME

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Dinçer ATASOY



ÖZET

OPTİMİZASYON VE REGRESYON MODELLERİ İLE METEOROLOJİK TAHMİNLEME DENEMESİ

Atasoy, Dinçer

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA

İkinci Danışman: Prof. Dr. Ali FARAJZADEH

Ekim 2023, 133 Sayfa

Günümüzde, veri saklama ve işleme teknolojilerinin gelişmesi ile optimizasyon ve regresyon konularının önemi çok artmış; bu konular günlük hayatta daha fazla yer bulmaya başlamıştır. Bu nedenle optimizasyon ve regresyon temelli yapılan akademik araştırmaların, önem kazanarak yaygınlaştığı görülmektedir. Bu tez çalışmasında, bu doğrultuda optimizasyon ve regresyon probleminin hem teorik hem de pratik alanlarını kapsayacak şekilde detaylı bir inceleme yapılmıştır. Optimizasyon başlığı altında, optimizasyonun temelinin oluşturan matematiksel uzaylar ve konveks kümelerden bahsedilmiştir. Fonksiyonların optimize edilmesi için Simpleks yöntemi, DP yöntemi ve MOP problemleri, KKT yöntemi, Lagrange çarpanları yöntemi ve gradyan tabanlı yöntemler kullanılmıştır. Regresyon başlığı altında, lineer (doğrusal) regresyon, doğrusal olmayan regresyon, ridge regresyon ve lasso regresyon konularından bahsedilmiştir. Optimizasyon ve regresyon yöntemleri Iğdır iline ait 20 yıllık meteorolojik veriler ve Iğdır ili ve ilçelerinde yetiştirilen kayısı ile ilgili çeşitli verilere uygulanmış, optimum sonuçlar bulunmaya çalışılmıştır. Bu veriler, çeşitli akış diyagramları ve algoritmalar yardımıyla işlenerek, optimize edilmiş modelin bulunmasında kullanılmıştır. Verilerin işlenmesi; verilerin ölçeklendirilmesi, modelin eğitilmesi, modelin başarısının ölçülmesi olmak üzere üç adımda yapılmıştır. Özellik çıkarımı, özellik seçimi ve modeli fit etme aşamaları ile elde edilen R^2 sonuçları karşılaştırılarak, her aşamada en iyi sonucu veren yöntem kullanılmak üzere optimize edilen modelin geliştirilmesinde kullanılmıştır. Optimizasyon ve regresyon yöntemleri kullanılarak elde edilen model, gelecek ilk üç aydaki yağışın tahminlemesi için kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Optimizasyon problemi, regresyon analizi, fonksiyonda optimizasyon, Lagrange çarpanı, veri madenciliği, modelleme ile meteorolojik tahmin.

ABSTRACT

EXPERIMENT WITH METEOROLOGICAL FORECASTING USING OPTIMIZATION AND REGRESSION MODELS

Atasoy, Dinçer

Ph.D. Thesis

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KARA

Co-Advisor: Prof. Dr. Ali FARAJZADEH

October 2023, 133 Pages

In today's world , with the advancement of data storage and processing technologies, the importance of optimization and regression has increased significantly; These topics have begun to find more space in everyday life. Therefore, academic research based on optimization and regression is observed to gain importance and spread. In this thesis, a detailed study was carried out to cover both theoretical and practical aspects of the optimization and regression problem. Under the heading of optimization, mathematical spaces that form the basis of optimization and convex sets are discussed. The Simplex method, DP method and MOP problems, KKT method, Lagrange multipliers method, and gradient-based methods have been used to optimize functions. Under the regression heading; linear regression, nonlinear regression, ridge regression, and lasso regression are discussed. Optimization and regression methods were applied to 20-year meteorological data of Iğdır Province and various data related to apricot cultivation in Iğdır Province and its districts, and efforts were made to achieve optimal results. This data was processed using various flowcharts and algorithms to find the optimized model. Data processing was carried out in three steps: scaling the data, training the model and measuring the success of the model. The feature extraction, feature selection and model fitting phases and the resulting R^2 results were compared and the method that produced the best result in each phase was used to develop the optimized model. The model, built using optimization and regression methods, was used to predict rainfall in the next three months.

Keywords: optimization problem, regression analysis, function optimization, Lagrange multiplier, data mining, meteorological forecasting model.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu doktora tezi, optimizasyon problemleri ve regresyon analizi arasındaki bağlantıları keşfetmeyi ve bu iki alanın birleşimini kullanarak yeni yaklaşımlar ve çözüm yöntemleri geliştirmeyi amaçlamaktadır. Bu çalışmada optimizasyon problemleri ve regresyon analizi arasındaki temel bağlantılar ve ilişkiler detaylı bir şekilde incelenmiştir. Her iki alanın potansiyel avantajlarını ve uygulama alanlarını daha iyi anlamamıza olanak tanımıştır. Geleneksel regresyon analizi yöntemlerini optimizasyon problemlerine nasıl uygulanacağı araştırılmıştır. Özellikle tahmin ve modelleme problemleri için yeni ve verimli çözüm yaklaşımlarının geliştirilmesine katkı sağlanmıştır. Optimizasyon problemlerini çözmek için regresyon analizi yöntemlerini kullanmanın mümkün ve etkili olup olmadığını araştırılmıştır. Bu çalışmanın sonuçları, başta meteorolojik verilerin doğru okunarak en iyi şekilde kullanılması ve hava tahminleri, yağış miktarları ile doğrudan ilgili olan tarım ve ziraat sektörüne fayda sağlayarak gerçek problemlere pratik çözümler sunulmuştur.

Bu tez çalışması ile optimizasyon ve regresyon alanları arasındaki iş birliği potansiyelini vurgulayarak, özellikle karmaşık ve büyük ölçekli optimizasyon problemlerine farklı çözüm önerileri ile bilim dünyasına katkı sağlanması amaçlanmaktadır. Bu iki alanın kesişiminden elde edilen sonuçların, gelecekteki araştırmalara ilham kaynağı olması beklenmektedir.

Tez çalışmamda bana yardımcı olan ve sabırla her sorunuma çözüm bulmaya çalışan Dr. Öğr. Üyesi Kazım KARA'ya, Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'una, danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hasan KARA'ya ve ikinci danışmanım Prof. Dr. Ali ALFARAJZADEH'e teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışmam süresince desteklerini daima hissettiğim eşim Halime ATASOY'a, oğlum Muhammed Furkan ATASOY'a, teşekkür ederim.

Dinçer ATASOY
IĞDIR/2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTIMLAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
PROGRAMLAR DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	4
3. OPTİMİZASYON	12
3.1. Gerekli Tanım ve Teoremler.....	14
3.1.1. Matematiksel Uzaylar	14
3.2. Konveks Kümeler.....	16
3.3. Konveks Fonksiyonlar.....	26
3.4. Optimizasyonda Veri Değerlendirme Süreci	41
3.5. Fonksiyonların Optimizasyonu	42
3.6. Doğrusal Optimizasyon.....	44
3.7. Doğrusal Programlama ile İlgili Varsayımlar	45
3.8. Doğrusal Programlama Yöntemleri	45
3.9. Doğrusal programlama modelinin matris notasyonu ile gösterilmesi.....	46
3.10. Simpleks Yöntemi	49
3.11. Kısıtlı Optimizasyon	57
3.11.1. Eşitlik Kısıtlı Çok Değişkenli Optimizasyon.....	58
3. 11. 2. Langrange Çarpanları Yöntemi.....	60
3.11.3. Karush- Kuhn- Tucker Optimallik Koşulları	68
3.11.4. Gradyan Tabanlı Yöntemler	74
3.11.4.1. Gradyan İnişi Yöntemi	75
3.11.4.2. Konjugate (Eşlenik) Gradyan Yöntemi.....	78
4. REGRESYON	83
4.1. Lineer (Doğrusal) Regresyon	84
4.2. Doğrusal Olmayan Regresyon	90
4.3. Ridge ve Lasso Regresyon	93
4.3.1. Ridge Regresyon.....	93
4.3.2. Lasso Regresyon	94

5. MATERİYAL ve METOT	95
5.1. Materyal	95
5.1.1. Dünyada İklim Değişikliği ve Etkileri	95
5.1.2. Türkiye'deki İklim Değişikliği ve Etkileri	96
5.1.3. Iğdır İli'nde İklim Değişikliği ve Etkileri	99
5.2. Metot	100
5.2.1. Veri İşleme	100
5.2.2. Lineer Regresyon Modelini Eğitme	101
5.2.3. Modelin Değerlendirmesi	101
6. BULGULAR ve TARTIŞMA	106
7. SONUÇ ve ÖNERİLER	114
KAYNAKLAR	117
EKLER	124
ÖZGEÇMİŞ	133

SİMGELER VE KISALTIMLAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\mathcal{H}$	: Hilbert uzayı
$\mathcal{B}$	: Banach uzayı
$\langle \cdot \rangle$	: İç çarpım uzayı
$\mathcal{P}$	: Polyhedra (Çokgen)
Conv	: Konveks
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar
(X, d)	: Metrik Uzay
dom f	: f fonksiyonunun etki alanı (domain)
conv A	: A kümesinin konveks örteni
$\preceq$	: Vektör eşitsizliği ya da $\mathbb{R}^n$ de bileşen eşitsizliği
$\nabla f(x_0)$	: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki gradienti
KKT	: Karush-Kuhn-Tucker Koşulları
L1	: Lasso Regresyon
L2	: Ridge Regresyon
RSM	: Response Surface Methodology
L	: Langrange çarpanı
DP/LP	: Doğrusal/Lineer Programlama
MOP	: Multi-Objective Optimization (Çok Amaçlı Optimizasyon)
$\mathbb{R}_+$	: Negatif olmayan sayıların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa No
Şekil 3.1. Optimizasyonun sınıflandırılması.....	13
Şekil 3.2. Konveks küme	17
Şekil 3.3. Konveks olmayan küme	17
Şekil 3.4. Afin küme	19
Şekil 3.5. B, C kümesinin konveks örtene.....	20
Şekil 3.6. Konveks koni	21
Şekil 3.7. İki kümenin konik gövdeleri.....	21
Şekil 3.8. R^2 de hiperdüzlem	23
Şekil 3.9. R^2 de $a^T x = b$ ile tanımlanan bir hiperdüzlem iki yarımuzayı belirtir	23
Şekil 3.10. Taralı bölge $a^T (x - x_0) \leq 0$ tarafından belirlenen yarımuzayın bölgesi ...	24
Şekil 3.11. R^3 te ikinci dereceden koninin sınırı.....	25
Şekil 3.12. $\mathcal{P}$ çokgeni beş noktanın kesişimidir	26
Şekil 3.13. Konveks fonksiyon grafiği	27
Şekil 3.14. Konkav fonksiyon grafiği	27
Şekil 3.15. Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları.....	30
Şekil 3.16. Maksimum minimum ilişkisi	31
Şekil 3.17. Eyer noktası görseli	34
Şekil 3.18. Veri değerlendirme süreci.....	41
Şekil 3.19. Genel optimizasyon akış diyagramı	42
Şekil 3.20. Fonksiyon optimizasyon teknikleri	43
Şekil 3.21. Doğrusal programlama metodu	57
Şekil 3.22. Lagrange çarpanlarını kullanarak optimize etme	63

Şekil 3.23. KKT metodu için contour grafiği	72
Şekil 3.24. KKT metodu için surface grafiği	73
Şekil 3.25. Başlangıç noktası ve yön tanımlaması.....	76
Şekil 3.26. Konjugate (eşlenik) gradyan yöntemi.....	80
Şekil 3.27. Gaussian dağılımı grafikleri	81
Şekil 4.1. Basit doğrusal regresyon modeli	85
Şekil 4.2. R^2 ile modelin açıklayıcılığı	87
Şekil 4.3. Regresyon analizi aşamaları	93
Şekil 5.1. Su yılı alansal yağış normalleri	98
Şekil 5.2. Türkiye ortalama sıcaklık dağılımı.....	99
Şekil 5.3. Modelde kullanılan meteorolojik veriler	101
Şekil 5.4. Regresyon ile optimizasyon arasındaki ilişki	103
Şekil 5.5. Veri seti için gerçek ve tahmini değerler ilişkisi grafiği	105
Şekil 5.6. Rezidüel.....	105
Şekil 6.1. RSM ve contour grafiklerinin optimizasyonda kullanım aşamaları	109
Şekil 6.2. Veri seti için Q-Q plot grafiği.....	109
Şekil 6.3. Veri setine ait korelasyon değerleri	111

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa No
Çizelge 3.1. Doğrusal programlama modelinde kısıtlayıcı.....	50
Çizelge 3.2. Başlangıç çizelgesi.....	51
Çizelge 3.3. Birinci iterasyon	52
Çizelge 3.4. İkinci iterasyon	54
Çizelge 3.5. Üçüncü iterasyon	56
Çizelge 3.6. Jackknife yöntemine göre sonuçlar	83
Çizelge 4.1. Regresyonda tahmini değerler	85
Çizelge 4.2. Meteoroloji veri sonucu 1	90
Çizelge 4.3. Meteoroloji veri sonucun 2	90
Çizelge 5.1. Modelin eğitilmesi ve öğrenmesi süresince R^2 değerleri	104
Çizelge 6.1. Tahmin edilen R^2 değerleri	113
Ek 1.1. Iğdır ilinde yetiştirilen kayısındaki çeşitli elementler ile ilgili çalışma	130
Ek 1.2. Iğdır ili için 2001-2021 tarihleri arasındaki meteorolojik veriler	131

PROGRAMLAR DİZİNİ

	Sayfa No
Program 1. KKT metodu için contour grafik programı	125
Program 2. KKT metodu için surface grafik programı	126
Program 3. Konjugate (eşlenik) gradyan yöntemi için surface grafik programı	126
Program 4. Veri seti için çizilen grafiklerin programı	127
Program 5. Lineer regresyon modeli programı	128
Program 6. Ön veri işleme programı	129
Program 7. Korelasyon matrisini kullanarak özellik seçimi.....	130
Program 8. Rastgele forest regresyon özellik seçimi	130

1. GİRİŞ

Optimizasyon problemi, belirli bir hedefi olan bir fonksiyonun en iyi büyük veya en küçük değerini bulmayı amaçlamaktadır. Bu çerçevede, optimizasyon problemleri, matematiksel modelleri analiz ederek, arama algoritmaları kullanarak veya diğer optimizasyon yöntemlerini uygulayarak çözülebilmektedir. Regresyonda ise bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkinin matematiksel olarak ifade edilmesi amaçlanmaktadır. Eşitsizlik kısıtlamalarına izin veren Karush-Khun-Tucker (KKT) koşullarının doğrusal olmayan programlama yaklaşımı, yalnızca eşitsizlik kısıtlamalarına izin veren Langrange çarpanlarını genelleştirir. Langrange yaklaşımına benzer şekilde, kısıtlı maksimizasyon (minimizasyon) problemi, optimal noktası bir eyer noktası olan bir Langrange fonksiyonu olarak yeniden yazılacaktır. Optimizasyonda finans problemleri için kârı maksimum yapma ya da üretim sektörü için maliyeti minimum yapma durumu regresyondaki en küçük kareler yöntemi, KKT, Optimal Scaling (CATREG) ve uyum testleri ile sağlanmaya çalışılacaktır. Optimal Scaling, bir değişkenin analizdeki rolünü iyileştirmek ve veriye daha iyi uyan bir ölçek elde etmek amacıyla kullanılır. Bu teknik, veri dönüşümleri veya ölçeklendirmeler yaparak veriyi daha uygun hale getirmeyi amaçlar. Bu çalışmada konveks fonksiyonların maksimum ve minimum noktalarını bulmak için çeşitli yöntemler kullanılacak ve konveks olan bir kümenin quasi-konveks olduğunu göstermeye çalışarak daha hassas bir ölçü sağlanacaktır. Konveks programlama, birçok optimizasyon probleminin çözümünde kullanılan bir yaklaşımdır. Konveks fonksiyonlar, tanımlandığı küme üzerinde belirli bir çeşit düzlemsel özelliğe sahiptir ve bu özellik, çözüm sürecindeki analiz ve algoritmaların etkinliğini artırmaktadır.

Subgradiyent kavramı, konveks olmayan fonksiyonların optimizasyonunda kullanılan bir araçtır. Konveks olmayan bir fonksiyonun subgradiyenti, fonksiyonun tüm noktalarındaki teğet düzlemlerin kesişiminden oluşur ve fonksiyonun optimum noktasında sifıra eşitlenir. Subgradiyentler, bu tür fonksiyonların minimum veya maksimum noktaların yönünü tespit etmek için kullanılmaktadır. Harmonik fonksiyonlar teorisi, özellikle konveks fonksiyonlarla ilgili olup, konveks bir fonksiyonun maksimum değerini hangi noktalarda aldığını anlamak için kullanılmaktadır. Konveks bir fonksiyon

maksimum değerine kompakt bir kümenin sınır noktalarında ulaşması durumunda, bu fonksiyon harmonik fonksiyonlar teorisinde büyük bir öneme sahip olmaktadır.

- Konveks programlama problemleri, konveks fonksiyonların optimize edildiği matematiksel programlama yöntemleridir.
- Konveks programlama problemlerinde, fonksiyonun optimum noktasında subgradiyent kavramı geçerli olmaktadır.
- Bir konveks fonksiyon, kompakt bir konveks kümede tanımlandığında, maksimum değerine yalnızca kümenin sınır noktalarında ulaşabilmektedir.

Çok amaçlı optimizasyon probleminin (MOP) çözümü, tek bir hedef fonksiyonunu optimize etmek yerine birden fazla amaç fonksiyonunu optimize etmeyi hedefler. MOP'ler genellikle karmaşık ve çelişkili hedefleri olan problemleri ele almaktadır.

MOP'lerin çözümü için farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. MOP çözüm yöntemlerinin bazıları şöyle sıralanabilir;

1. Pareto Optimizasyonu: Pareto optimizasyonu, MOP'lerin çözümünde yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, Pareto hakimiyeti prensibi kullanılır. Pareto hakimiyeti, bir çözümün diğer tüm çözümlere göre en az bir hedef fonksiyonunda daha iyi olması anlamına gelir. Pareto optimizasyonunda, "Pareto önleyicilik" adı verilen bir sıralama yöntemiyle Pareto en iyileme çözümleri elde edilir.
2. Çok Noktalı Arama: Çok noktalı arama yöntemi, MOP'leri çözmek için kullanılan bir başka yöntemdir. Bu yöntemde, çözüm alanında birden fazla başlangıç noktasından aynı anda arama yapılır. Bu şekilde, farklı bölgelerdeki potansiyel çözümler keşfedilir ve genellikle Pareto önleyicilik ile birleştirilir.
3. Genetik Algoritmalar: Genetik algoritmalar, doğal seçim prensiplerine dayanan popülasyon tabanlı optimizasyon yöntemleridir. MOP'lerde genetik algoritmalar, çözümleri popülasyon içinde temsil ederek, genetik operatörler (çaprazlama, genetik değişiklik) ve seçim yöntemleri kullanarak Pareto önleyicilik ilkesine göre çözümü geliştirir.
4. Hiperküme Yaklaşımları: Hiperküme yaklaşımları, MOP'leri çözmek için kullanılan bir diğer stratejidir. Bu yaklaşımda, çözüm kümesi hiperküme olarak adlandırılan bölümlere ayrılır. Her bir hiperküme, farklı amaç fonksiyonlarının kombinasyonlarını

temsil eder. Hiperküme yaklaşımları, hedefler arasındaki çelişkiyi ele almak ve çözüm çeşitliliğini artırmak için kullanılır.

Bu yöntemler, MOP'lerin çözümü için yaygın olarak kullanılan yaklaşımlardan sadece birkaçıdır. MOP'lerde farklı yöntemler ve algoritmalar kullanılarak, çözümlerin Pareto önleyicilik prensibine uygun şekilde çeşitlendirilmesi, etkinlik ve yakınsamaların iyileştirilmesi üzerine çalışılır.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Ökten (2004) tarafından yapılan çalışmada, konkav fonksiyonların ekonomideki uygulamalarıyla ilgili bir derleme niteliğinde olduğu ve ekonominin önemli bir konusu olan maliyet fonksiyonu'na vurgu yapılmıştır. Ekonomide önemli olan diğer bazı konular da ele alınmıştır, bunlar arasında kar-zarar ilişkileri ve karı maksimum yapma problemi öne çıkar. Çalışmasında birçok genelleştirilmiş konkavlık özelliğinin ekonomi ve optimizasyon alanlarında nasıl kullanıldığını incelemiştir.

Guerra et al. (2004) tarafından yapılan çalışmada, varyasyonlar hesabındaki Tonelli varoluş teorisinin standart hipotezleri altında, mevcut minimumlaştırmaların, sınırsız türevli mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfında verildiği ihtimali üzerinde durulmuştur. Optimallik koşulları – Euler-Lagrange denklemi gibi – başarısız olabileceğinden, minimize edicilerin Lipschitzian olduğu Lipschitzian düzenlilik koşullarını elde etmeye çalışmak önemli olmuştur. Elde edilen sonuçların ana kısmı (Leonida Tonelli'den başlayarak) varyasyonlar hesabının temel problemine atıfta bulunulmuştur. Yüksek mertebeden türevlerle varyasyon hesabı problemleri ve optimal kontrol problemleri için daha az bilgiye sahip olduğundan, burada, varyasyonlar hesabında ve optimal kontrolde yörüngeleri minimize etmek için Lipschitzian düzenlilik koşulları hakkında bir derleme sunulmuştur.

Uysal (2010) çalışmasında, optimizasyon probleminin genel olarak, verilen bir küme üzerinde maksimize veya minimize eden bir reel değerli fonksiyonu sistematik olarak seçme problemi olarak nitelendirdiğini söylemiştir. Konveks kümelerin ve konveks fonksiyonların optimizasyon problemlerinde önemli bir rol oynadığını ifade etmektedir. Tez, Konveks Programlama Probleminin önemine ve temel kavramlara odaklanan birinci bölüm ile fonksiyonel analiz ve topolojiye ilişkin temel tanımlara yer veren ikinci bölümü içermektedir. Üçüncü bölümde konveks kümelerin ve konveks fonksiyonların özellikleri ve konvekslik koşulları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise konveks fonksiyonların konveks bir küme üzerinde minimum veya maksimum değerlere ulaşma konusu ele alınmıştır.

Beldiman at al., (2008) tarafından yapılan çalışmada, optimalite ve verimlilik için bazı üniter kavramları veya sırasıyla skaler optimizasyon ve vektörel optimizasyonda

yaklaşık çözümleri ele almıştır. Çok nesneli durumda bu yaklaşık çözümler için gerekli ve yeterli bazı koşullar, skalerizasyon ve alternatif bir teorem yoluyla türetildiği bulunmuştur. Böylece, çok nesneli optimizasyona karşılık gelen bazı sonuçlar genelleştirilmiş ve rafine edilmiştir.

Eichfelder (2008) çalışmasında, doğrusal ve konveks olmayan çok amaçlı iki düzeyli optimizasyon problemini optimistik yaklaşım kullanarak tartışmıştır. İndüklenmiş küme olarak adlandırılan üst düzey fonksiyonun uygulanabilir noktalarının kümesinin, çok amaçlı bir optimizasyon probleminin minimal çözümlerinin kümesi olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir. İki seviyeli optimizasyon problemi daha sonra indüklenmiş kümeyi keşfetmek için tekrar duyarlılık teoremlerini kullanan yinelemeli bir süreçle çözülebileceği ve tüm etkin kümeye yaklaşılabileceği söylenmiştir. Her iki düzeydeki, iki kriterli optimizasyon problemleri ve bir boyutlu üst düzey değişken için ilk kez bir algoritma sunulmuş ve iki probleme uygulanmıştır.

Dandurand (2013) çalışmasında, en küçük kareler optimizasyonu ve sayısal analiz teorisini kullanmıştır. Temel parametre tahmin yöntemlerinin, alternatif parametre tahmin yöntemleriyle karşılaştırılması için matematiksel bir temel geliştirmiştir. Fonksiyonel analiz ve kompleks analiz teorisinden de yararlanmıştır.

Ram et al. (2013) tarafından yapılan çalışmada, dağıtılmış bir optimizasyon probleminde, problemin tam bilgisinin tek bir yerde olmadığını, bunun yerine çok etmenli bir sistemde farklı etkenler arasında dağıtıldığını belirtmişlerdir. İncelenen problemlerde, her bir etmenin bir amaç fonksiyonuna sahip olduğunu ve şebeke ağı amacının, ajanların amaç fonksiyonlarının toplamını küresel olarak bilinen bir kısıtlama seti üzerinden en aza indirmek olduğunu savunmuşlardır. Çalışmalarında, dağıtılmış optimizasyon probleminin bir genellemesini incelemişlerdir. Ağ hedefinin, kısıtlama seti üzerindeki bireysel amaç fonksiyonlarının toplamının bir fonksiyonunu en aza indirmek olduğunu belirtmişlerdir. Dağıtımı sağlayan bir algoritmayı düzenleyip ve yakınsamasını kanıtladıktan sonra daha genel ve karmaşık dağıtılmış optimizasyon problemlerinin uzantılarını tartışmışlardır. Dağıtılmış verilerin dağıtılmış regresyonu örneği aracılığıyla algoritmaları için bir motivasyon sağlamışlardır.

Tor (2013) çalışmasında, türevi olmayan optimizasyon problemlerini çözmek için yöntem geliştirmiştir. Türevi olmayan optimizasyon problemlerini konveks ve konveks

olmayan optimizasyon problemleri olmak üzere iki bölümde incelemiştir. Bu tezde bu iki tip problem için yöntemler geliştirilmiştir. İlk olarak türevi olmayan kısıtsız konveks optimizasyon problemler için kodiferansiyel kavramı kullanarak üç farklı yöntem geliştirilmiştir. Bilindiği gibi, aynı tip optimizasyon problemlerini çözmek için geliştirilen algoritmalar, türev yerine kullanılan kavram, durma kriterleri ve azalma yönü hesaplarına göre farklılaşmaktadır. Bu tezde geliştirilen bu üç, metotta ise türev yerine kodiferansiyel kullanılmıştır. Kodiferansiyelin yapısı gereği durma kriterleri bu üç metotta da aynıdır. Diğer taraftan, azalma yönü hesaplanmasına baktığımızda metotlar farklılıklar göstermektedir. Bu farklılıklar şu şekilde sıralanmaktadır. Yöntemlerden birincisinde, azalma yönü kodiferansiyelin sadece bazı elemanlarını kullanarak hesaplanmaktadır. İkincisinde ise fonksiyon ve gradiyant hesaplamalarının sayısını azaltmak için bir önceki basamakta elde edilen kodiferansiyel değerleri kullanılmıştır. Son metotta ise azalma yönü her iterasyonda sabit ve belli sayıda kodiferansiyelleri kullanarak hesaplanmıştır. Bunun yanında, geliştirilen yöntemlerin yakınsaklık analizleri yapılmıştır. Bu yöntemlerin literatürde bilinen önemli test problemlerine uygulanmış, ve elde edilen sayısal sonuçlar performans grafikleri ile gösterilmiştir. Bu grafikler, bilinen alt gradiyent ve demet yöntemleriyle de elde edilen performans grafikleriyle karşılaştırılmıştır ve geliştirilmiş olunan metotların daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir. Bunların yanında, yukarıda bahsi geçen ilk metodun yapay değişkenler kullanarak uyarlanan yeni hali, doğrusal kısıtlı konveks optimizasyon problemlerine uygulanmıştır. Uygulama olarak üç test problemi alınmış ve sayısal sonuçlar çizelgeler kullanılarak gösterilmiştir. Son olarak konveks olmayan sınırlandırılmamış optimizasyon problemlerini çözmek için bir algoritma geliştirilmiştir. Quasisecant kavramı geliştirilen bu yöntemde, azalma yönünün hesabı için bir alt gradiyent yöntemi kullanılarak doğrusal eşitsizlik sistemi çözülmüştür. Geliştirilen bu yöntemin yakınsaklığı incelenmiş ve bilinen bazı önemli test problemleri kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış ve bu sonuçlar bir alt gradiyent yöntemiyle kıyaslanarak bir çizelgede sunulmuştur.

Yaman (2014) çalışmasında optimizasyon problemlerini uygun bir maliyet ile çözmenin öneminden ve maliyetin düşürülmesi için algoritmaların kullanılmasından bahsetmektedir. Tahmin yönteminin sezgisel algoritmaya iki farklı şekilde entegre edildiği yeni bir yaklaşımı önermektedir. Arama aracısının uygunluk fonksiyonu değerini düşük hesaplama maliyetiyle tahmin etmek için değer tahmin yöntemlerinden

yararlanmak gerektiğini savunmaktadır. Yöntemi çok amaçlı optimizasyon problemlerine de uygulamıştır.

Lokhande at al., (2017) tarafından yapılan çalışmada, simpleks yöntemi, büyük M yöntemi ve dual simpleks yöntemi için yeni alternatif yöntemler tanıtılmıştır. Bu yöntemler ile doğrusal programlama problemini çözmenin daha kolay olduğu vurgulanmıştır.

Fioretto ve diğerleri (2018) tarafından yapılan çalışmada, çoklu etmen sistem (MAS: Multi-Agent System) alanının, endüstriyel ve diğer gerçek dünya uygulamalarında giderek daha fazla önem kazanan bir yapay zeka araştırma alanı olduğu ve bir MAS içinde özerk ajanların kişisel çıkarlarını sürdürmek ve/veya ortak hedeflere ulaşmak için etkileşimde bulunduğu savunulmuştur. Dağıtılmış Kısıtlama Optimizasyon Problemleri (DCOP: Distributed Constraint Optimization Problems), algoritmaların ve iletişim modellerinin belirli bir problemin yapısı tarafından yönlendirildiği, araçların özerk davranışlarını yönetmek için önde gelen bir etmen modeli olarak ortaya çıkmıştır. Son on yılda, karmaşık, gerçek zamanlı ve belirsiz ortamlarda MAS'ın desteklenmesini sağlamak için DCOP modeline çeşitli uzantılar önerilmiştir. Bu anket, DCOP modeline genel bir bakış sunarak, çoklu uzantılarının bir sınıflandırmasını sunar ve her bir DCOP sınıfı içinde doğal bir haritalama bulan hem çözümleme yöntemlerini hem de uygulamaları ele alır. Önerilen sınıflandırma, DCOP uzantıları için birkaç gelecek perspektifi önerir ve farklı alanlardan stratejilerin uyarlanması yoluyla verimli çözümleme algoritmalarının tasarımındaki zorlukları tanımlar.

Gwinner (2018) tarafından yapılan çalışmada, yalnızca çift doğrusal bir forma bağlı parametreleri değil, aynı zamanda doğrusal olmayan ve düzgün olmayan bir işleve bağlı parametreleri de ele alan, ikinci türden değişken eşitsizliklerde parametre tanımlama probleminin tersini incelemişlerdir. İleriye dönük problemin bu parametrelere bağımlılığını araştırmışlar ve Lipschitz süreklilik sonuçlarını kanıtlamışlardır. Parametre tanımlama probleminde bir optimizasyon yaklaşımı formüle ederek bu yaklaşımla çözülebilirlik sonucunu elde etmişlerdir. Ayrıca optimizasyon yaklaşımında sonlu boyutlu yaklaşım için bir yakınsama sonucu elde etmişlerdir.

Rastegar et al. (2018) tarafından yapılan çalışmada, çok nesneli optimizasyon problemlerini çözmek için yeni bir genel skalerizasyon tekniği sunulmuştur. Bu formülasyonun özelliklerini inceledikten sonra, bu genel formülün özel durumları olarak

iki problem göz önünde bulundurulmuştur. Ağırlıklı toplam yöntemi, ε -kısıtlama yöntemi, Benson yöntemi, hibrit yöntem ve elastik ε -kısıtlama yöntemi gibi iyi bilinen bazı yöntemlerin bu iki sorun altında toplanabileceği gösterilmiştir. Daha sonra, yaklaşık çözümler göz önüne alındığında, genel (herhangi bir dışbükeylik varsayımı olmaksızın) çoklu objektif optimizasyon probleminin ε - (zayıf, düzgün) verimli noktaları ile tanıtilen skalerize problemin ε -optimal çözümleri arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir.

Keskin (2019) tarafından yapılan çalışmada, ikinci mertebeden diferansiyel içermeli yarıdoğrusal Bolza tipli optimizasyon problemi üzerinde durulmuş ve farklı sınır koşulları altında problemin çözümünün optimallığı için yeterli şartları formüle etmek amaçlanmıştır. İlk bölümde tez için gerekli olan konveks kümeler, konveks fonksiyonlar ve subdiferansiyel gibi tanımlar ve teoremler verilmiştir. Tezin yöntem kısmında ikinci mertebeden ayrık ve diferansiyel içermeli yarıdoğrusal optimizasyon problemleri incelenmiş ve optimallik için gerek ve yeter koşullar formülize edilmiştir. Ayrıca ayrık yaklaşım probleminin optimallığı için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Limite geçilerek diferansiyel içermelerle oluşturulmuş optimal problemin yeter koşulları elde edilmiştir.

Karakoyun (2021) tarafından yapılan çalışmada, doğada sürü halinde yaşayan hayvanların veya farklı yaşam alanlarına sahip bitkilerin davranışlarından esinlenilerek geliştirilen doğa esinli algoritmalarından faydalanmıştır. Doğa esinli algoritmalar, klasik yöntemler ile kıyaslandığında farklı problemlere uyarlanabilmeleri açısından daha avantajlı bir durumda olduğunu ve tez çalışması kapsamında, tek amaçlı problemlerin çözümü için geliştirilmiş olan kurbağa sıçrama (SFLA: Shuffled Frog Leaping Algorithm) ve gri kurt optimizasyonu (GWO: Gray Wolf Optimizer) algoritmaları hibrit bir şekilde kullanılarak çok amaçlı optimizasyon problemlerine uygulanmıştır. Önerilen algoritmanın değerlendirilmesi üç aşamada farklı problem setleri üzerinde yapılmıştır. İlk aşamada özellikleri birbirinden farklı 36 kısıtsız çok amaçlı optimizasyon problemi kullanılmıştır. Bu çalışmada Friedman ve Wilcoxon istatistik testleri ile analiz yapmışlar ve deneysel sonuçlara bakıldığında önerilen algoritmanın genel olarak karşılaştırma yapılan algoritmalarından daha başarılı olduğu ileri sürülmüştür.

Kwon et al. (2021) çalışmasının ana fikri, bir parametrik varyasyon problemi ortaya koymaktan ibarettir; bu problem, doğrusal olmayan bir genetik yarı-değişken-hemivaryel eşitsizlik içeren ve küme değerli bir sözde monoton eşleşme ile ilişkilendirilen bir Quasi-Variational-Hemivariational Inequality (QVHVI: Yarı Değişken Hemivaryasyonel Eşitsizlik) olan QVHVI ile bağlantılıdır. Parametrik varyasyon probleminin çözülebilirliğini, Minty'nin formülasyonu ve düzgün olmayan analizden elde edilen tekniklerle birleştirilmiş, operatörlerin toplamı için bir sübjektiflik teoremi kullanarak kanıtlamışlardır. Daha sonra, küme değerli operatörler için Kluge'nin sabit nokta teoremi kullanılarak QVHVI için bir varlık teoremi kurulmuştur. Bir uygulama olarak, QVHVI için soyut bir optimal kontrol problemi araştırılmıştır. Weierstrass minimizasyon teoremi ve Kuratowski tipi süreklilik özellikleri ile optimal kontrol problemi için çözümlerin varlığını ve çözüm kümesinin zayıf sıralı kompaktlığını kanıtlamışlardır.

Gad (2022) çalışmasında, sürü zekası ve biyo-esinli algoritmaların, doğadan ilham alarak geliştirilen yeni algoritmaların güncel konularından biri olduğu konuşulmuştur. Gerçek dünyadaki problemleri çözmek için bazı algoritmaların oldukça etkili olduğu ve popüler çözüm araçları haline geldiği kanıtlanmış olmasına rağmen, birçoğunun etkili olmadığına vurgu yapılmış ve aynı bağlamda, son zamanlarda geliştirilen balina optimizasyon algoritması (WOA: Whale Optimization Algorithm) üzerinde durulmuş; bu algoritmanın düşük doğruluk ve yavaş yakınsama sorunlarına sahip olduğu ve kolayca yerel optimuma yakınsayabildiği belirtilmiştir. Çalışmada, yukarıdaki dezavantajları çözmek için Güve Alevi Algoritmasındaki (MFO: Moth Flame Optimization) eleme mekanizması kullanılarak yeni bir modifiye Balina Optimizasyon (WOA) algoritması oluşturulması önerilmiştir. Bu mekanizma, her bir iterasyon sürecinde liderlerin nüfusunu sürekli olarak azaltmak için kullanılır. Koşullar sağlandığında, azalan mekanizma ile balina popülasyonu liderlerin pozisyonuna göre güncellenir. Bunun, yerel optimumdan kurtulmaya yardımcı olacağı ve aynı zamanda küresel optimal çözüme ulaşma olasılığını artıracığı belirtilmiştir. Önerilen (MWOA: Modified Whale Optimization Algorithm) MWOA'nın performansı, çeşitli tip ve boyutlardaki yirmi üç Nümerik Benchmark fonksiyonu ile test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, temel WOA ve diğer sürü tabanlı akıllı algoritmalarla karşılaştırılmıştır. Aynı zamanda MWOA, çevrimdışı 2D Kutu Paketleme

Problemi (2DBPP: Two Dimensional Bin Packing Problem) setinin çözümü için sol alt doldurma algoritması (BLF: Bottom Left Filling) ile birlikte kullanılmıştır.

Kabgani et al. (2022) tarafından yapılan çalışmada, yarı diferansiyel kavramı yarı yarı diferansiyel (Semi-quasidifferentiability) adı verilen yeni bir kavrama genişletmişlerdir. Bu genelleme, konveksleştirici kavram tarafından motive edildiğinden, yarı yarı diferansiyellerin bazı önemli özellikleri belirlenmiştir. Yarı yarı diferansiyeller ile Clarke alt diferansiyeli arasındaki ilişki incelenmiş ve yarı yarı diferansiyeller açısından bir ortalama değer teoremi ispatlanmıştır. Bu kavramın, amaç ve/veya kısıt fonksiyonları süreksiz olduğunda bile düzgün olmayan optimizasyon problemlerini araştırmak için yardımcı olduğu gösterilmiştir. Çok amaçlı bir optimizasyon problemi göz önüne alındığında, uygun küme ile ilgili bazı konilerin karakterizasyonu sağlandığı gösterilerek, gerekli ve yeterli optimallik koşullarını elde etmek için kullanıldığı söylenmiştir. Yarı yarı diferansiyeller açısından çok amaçlı optimizasyonda optimallik koşullarını elde ederek makaleyi tamamlamışlardır.

Zeng et al., (2022) tarafından yapılan çalışmada, sinyal-gürültü oranı koşulları altında iki bileşenli karışık doğrusal regresyonu öğrenmek için beklenti maksimizasyon algoritmasının yakınsama hızını incelenmiştir. Sinyal gürültü oranının (SNR: Signal-to-Noise Ratio) $O((d/n)^{1/4})$ 'ün üzerinde ve bir sabitin altında olduğu rejimde, Beklenti maksimizasyonu (EM: Expectation-Maximization) tekrar ettiğini, gerçek parametrenin bir $O(SNR^{-1}(d/n)^{1/2})$ komşuluğuna yakınsadığını göstermişlerdir. Yineleme sayısı $O(SNR^{-2} \log(n/d))$ düzeyinde olduğunda, SNR'nin $O((d/n)^{1/4})$ 'ün altında olduğu düşük SNR rejiminde, EM'nin $O((d/n)^{1/4})$ 'den sonra gerçek parametrelerin bir $O((d/n)^{1/4})$ komşusuna yakınsadığını göstermişlerdir.

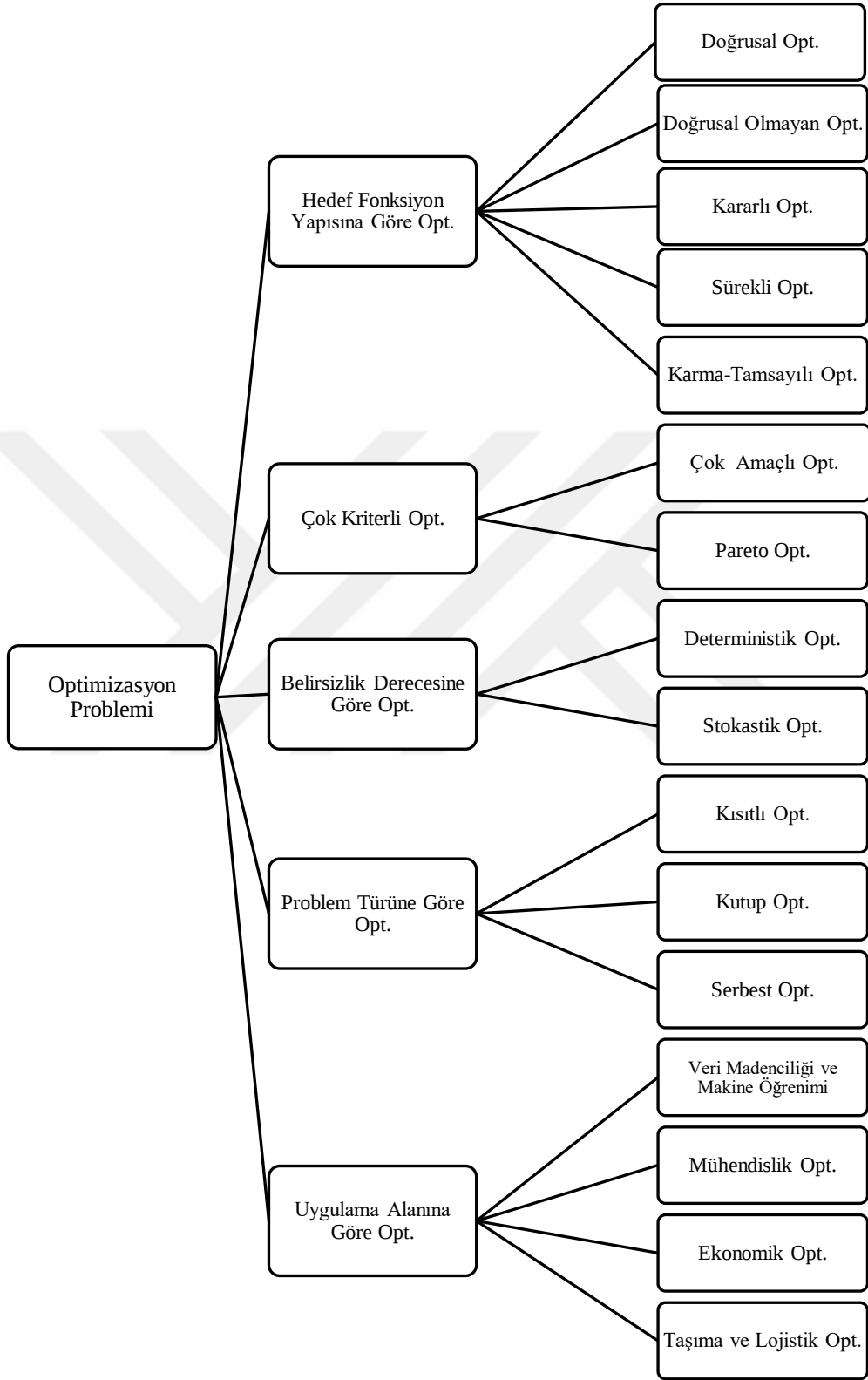
Mai et al. (2023) tarafından yapılan çalışmada, araçların yerel amaç fonksiyonlarının toplamından oluşturulan amaç fonksiyonunun, dağıtılmış bir optimizasyon probleminde aracının optimizasyon değişkenlerinden ayrılabilceği yeni bir algoritma önerilmiştir. Bu çalışmada, önemsiz yerel kısıtlamalara tabi olan, küresel kısıtlamalarla birleştirilen ve yerel amaç fonksiyonlarının (gradyanlarının) tahmin edilmesi için yalnızca gürültülü gözlemler mevcut olduğu ifade edilmiştir. Pratik senaryolarda, araçlar optimizasyon değişkenlerini başkalarıyla paylaşmak istemeyebilirler, bu nedenle etmenlerin optimizasyon değişkenlerini birbirleriyle

paylaşmasını gerektirmeyen, her bir etmenin kendi küresel kısıtlama fonksiyonunun yerel bir tahminini tuttuğu ve bu tahmini sadece komşularıyla paylaştığı bir dağıtılmış algoritma önerilmiştir. Kısıtlama fonksiyonlarının bu yerel tahminleri, konsensüs tipi bir algoritma kullanılarak güncellenirken, her bir aracının yerel optimizasyon değişkenleri, gürültülü gradyan tahminlerine dayanan birinci dereceden bir yöntem kullanılarak güncellenir. Ajanlar, önerilen algoritmayı benimsediklerinde, optimizasyon değişkenlerinin yaklaşık olarak optimal bir noktaya, ceza yöntemine dayalı olarak 1 olasılıkla yakınsadığını kanıtlamışlardır.



3. OPTİMİZASYON

Matematikte matematiksel programlama, optimizasyon (eniyileme) terimi; bir gerçel fonksiyonu minimize ya da maksimize etmek amacıyla reel sayılarda tanımlı bir aralıkta seçilen değerlerin fonksiyona yerleştirilmesi ile sistematik bir çözüm aranmasıdır. Optimizasyonu matematiksel olarak incelediğimizde, ortak bir optimizasyon probleminin bir veya birden fazla işlevi yerine getirdiği söylenebilir. Optimizasyon sürecinde problem optimize edilirken bazı kısıtlarla karşılaşılması beklenmektedir. Klasik anlamda optimizasyon günümüzde çok fazla alanda kullanılmaya ve uygulama bulmaya başlayarak araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Özellikle teknolojinin baş döndürür derecede hızlı gelişmesi her alanda optimizasyonun önemini artırmıştır, bilgi ve teknolojiye olmazsa olmazların arasına girerek kendisine haklı bir yer edinmiştir. Makine öğrenimi ya da yapay zekâ, gelişmiş optimizasyon problemlerini çözmeye yönelik akıllı yaklaşımları, yöntemleri ve teknikleri ile günümüzde optimizasyonda önemli bir yer tutmaktadır. Makine öğrenmesi ile elde edilen öngörü yeteneği yüksek modellerin en önemli dezavantajı ise bu modellerin karmaşık yapısına binaen insanlar tarafından anlaşılmasının ve yorumlanmasının zor olması hatta bazı durumlarda anlaşılmasının mümkün olmamasıdır. Az terimli bir modelin anlaşılması ve yorumlanması bir problem ortaya çıkarmaz iken yüzlerce terim içeren bir yapay sinir ağının gözle anlaşılması mümkün olmamaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için açıklayıcı model analizi yöntemleri geliştirilmiş ve öngörücü modellerin keşfedilmesinde, açıklanmasında ve yorumlanmasında kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemler sayesinde karmaşık modeller, insanlar tarafından anlaşılır grafikler ve çizelgeler şeklinde görselleştirilebilir. Bu sayede, yüksek tahmin gücüne sahip modeller tarım sektöründe üretim, planlama ve optimizasyona katkı sağlayabilirken, aynı zamanda elde edilen modeller insan zihninde anlaşılır bir şekilde temsil edilerek modellerin iç yapısı hakkında daha fazla anlayış elde edilir.



Şekil 3.1. Optimizasyonun sınıflandırılması

3.1. Gerekli Tanım ve Teoremler

3.1.1. Matematiksel Uzaylar

Matematiksel uzaylar, nesnelerin ve yapıların yerleştirildiği soyut yapısal ortamları temsil eder. Bu uzaylar, çeşitli matematiksel nesnelerin ve yapıların özelliklerini ve ilişkilerini incelemek için kullanılır.

Tanım 3.1.1. (Lineer Uzay)

M boştan farklı bir küme ve K reel ya da kompleks sayılarda bir cisim olsun. Aşağıda belirtilen şartların sağlanması durumunda M kümesi K kümesi üzerinde vektör uzayı ya da lineer uzay olur (Çakar, 2007).

M kümesi üzerinde $(+)$ işlemi aşağıda özellikleri sağlar;

- L1) $\forall x, y \in M$ için $x + y \in M$ (Kapalılık özelliği).
- L2) $\forall x, y, z \in M$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme özelliği).
- L3) $\forall x \in M$ için $x + e = e + x$ olacak şekilde $e \in M$ vardır (Birim eleman özelliği).
- L4) $\forall x \in M$ için $x + x' = x' + x = e$ olacak şekilde bir $x' \in M$ vardır (Ters eleman özelliği).

- L5) $\forall x, y \in M$ için $x + y = y + x$ (Değişme özelliği).

M kümesi üzerinde $(.)$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar;

- L1) $\forall x \in M$ ve $p \in K$ için $p.x \in M$ (Kapalılık özelliği).
- L2) $p.(x + y) = p.x + p.y$
- L3) $(p + q).x = p.x + q.x$
- L4) $(p.q).x = p.(q.x)$ (Birleşme özelliği).
- L5) $\forall x \in M$ için $1.x = x$ dir.

Tanım 3.1.2. (Alt Uzay)

Bir K cismi üzerinde tanımlı X vektör uzayı ile $M \neq \emptyset$ olmak üzere $M \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $\forall \lambda, \delta \in K$ ve $\forall x, y \in M$ için

$$\lambda x + \delta y \in M \quad (3.1)$$

oluyorsa M kümesi de K cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzaydır. M vektör uzayına, X vektör uzayının bir alt uzayı denir.

Tanım 3.1.3. (Lineer Dönüşümler)

Aynı K cismi üzerinde tanımlı X, Y vektör uzayları ile bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \lambda, \delta \in K$ için

$$f(\lambda x_1 + \delta x_2) = \lambda f(x_1) + \delta f(x_2) \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna X den Y ye lineer dönüşüm denir.

Tanım 3.1.4. (Metrik Uzay)

$X \neq \emptyset$ olmak üzere $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik denir.

$\forall x, y, z \in X$ için,

$$M1) d(x, y) \geq 0$$

$$M2) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

Bu durumda (X, d) ikilisine Metrik Uzay denir.

Tanım 3.1.5 (Normlu Uzay)

N bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: N \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için

$$N1) \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ dır.}$$

$$N2) \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \text{ } (\alpha \in F).$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Üçgen eşitsizliği)}$$

koşulları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ ye N üzerinde bir norm denir (Bayraktar, 2018).

Bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmış ise bu uzaya normlu lineer uzay denir. Normlu lineer uzayları $(N, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. Norm bir vektörün $\mathbb{R}$ deki mutlak değeri demektir.

$\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ te ise uzunluk anlamına gelmektedir. $\mathbb{R}^3$ içinde bir $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektörünün normu $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ olarak bulunur. Bu dönüşümün genelleştirirsek, $\mathbb{R}^n$ içinde alınan bir

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün başlangıç noktasına göre normu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad (3.3)$$

olarak bulunur.

$\mathbb{R}^n$ içinde alınan bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörünün noktaları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d(x, y) = \|x - y\| &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır (Özer ve ark., 1996).

Tanım 3.1.6 (İç Çarpım Uzayı)

X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu ve $(X, \langle \cdot \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı denir. (Das, 2012)

İ1) $x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

İ2) $x, y, z \in X$ ve λ skaleri için

$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (Birinci yere göre lineerlik)

$\langle x, y + \lambda z \rangle = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$ (İkinci yere göre lineerlik)

İ3) $x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$ (Eşitsizlik hali $x = 0$ için sağlanıyor)

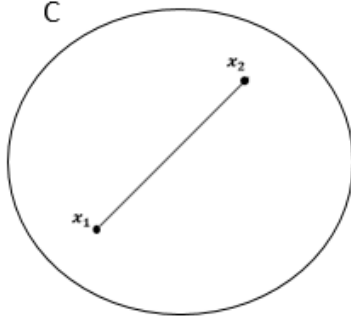
Tanım 3.1.7 (Hilbert Uzayı) $(\mathcal{H}, \langle \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı verilsin iç çarpımda tanımlanan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ normuna göre $\mathcal{H}$ tam ise yani $\mathcal{H}$ bir Banach uzayı ise $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayıdır (Bayraktar, 2018).

3.2. Konveks Kümeler

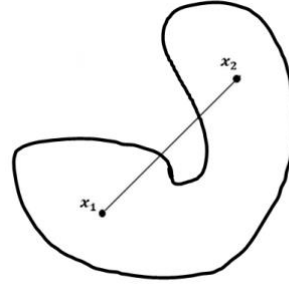
$\mathbb{R}^n$ uzayındaki sonlu boyutlu boştan farklı konveks kümelerin özellikleri anlatılmıştır. Konveks kümelerin nerede sınırlı olduğu ve hiper düzlemle ayrılmaları ile ilgili tanım, lemma ve teoremler burada ele alınmıştır. Konvekslik, bir nesnenin veya bir şeklin özelliklerinden biridir ve matematik, geometri ve optimizasyon gibi birçok farklı alanda önemlidir. Bir nesnenin konveks olması, belirli bir özelliğe sahip olduğu anlamına gelir ve bu özellik, nesnenin içerisindeki tüm noktaların bir çizginin iki noktası arasında bulunması anlamına gelir.

Tanım 3.2.1

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall x_1, x_2 \in C$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ iken $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in C$ ise C kümesi konveks kümedir denir.



Şekil 3.2. Konveks küme



Şekil 3.3. Konveks olmayan küme

Şekillerde de görüleceği üzere; bir kümenin konveks olması, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasının, küme içinde tamamen yer aldığı anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle, herhangi iki noktası arasında bir doğru parçası çizildiğinde, bu doğru parçasının tüm noktaları küme içinde bulunur.

Konveks kümelerin bazı özellikleri şunlardır:

1. İki nokta kümeye aitse, bu noktaları birleştiren doğru parçası da kümeye aittir.
2. Bir kümenin içinde yer alan herhangi bir noktayı, kümenin başka bir noktasını birleştiren doğru parçası kümenin içinde bulunur.

Örnek olarak, bir dairenin içi bir konveks kümedir çünkü herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası dairenin içinde kalır. Bir dikdörtgen de konveks bir küme örneğidir çünkü herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası dikdörtgenin içinde yer alır.

Örnek 3.2.1.

$E = \{z = x + iy ; x > 0 \text{ ve } y > 0\} \subset \mathbb{C}$ alt kümesini tanımlayalım. Geometrik olarak E kompleks düzlemin pozitif kısmıdır ve E konvektir.

E kümesinden $z = x + iy$ ve $w = u + iv$ alalım ve kabul edelim ki $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere $\lambda + \mu = 1$ olsun. O halde

$$\lambda z + \mu w = \lambda x + i\lambda y + \mu u + i\mu v = \lambda x + \mu u + i(\lambda y + \mu v)$$

olur.

$x, y, u, v > 0$ olduğundan eğer $\lambda = 0$ ise $\lambda x + \mu u = \mu u = u > 0$ ve

$\lambda y + \mu v = \mu v = v > 0$ olur.

. $\lambda > 0$ ise $\lambda x + \mu u \geq \lambda x > 0$ ve $\lambda y + \mu v \geq \lambda y > 0$ olur.

Böylece $\lambda z + \mu w \in E$ dir. Dolayısıyla E konvektir.

Örnek 3.2.2

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\mathbb{C}^n$ üzerindeki metrik $d(x, y) = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ dir Kapalı yuvarı $\mathbb{C}^n$ nin konveks bir alt kümesi olduğunu gösteriniz.

Bu durumda $d(x, a) \leq r$ ve $d(y, a) \leq r$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(\lambda x + \mu y, a) &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k + \mu y_k - a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda x_k + \mu y_k - (\lambda + \mu)a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |\lambda(x_k - a_k) + \mu(y_k - a_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Minkowski eşitsizliği}) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n |\lambda(x_k - a_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n |\mu(y_k - a_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lambda d(x, a) + \mu d(y, a) \\ &\leq \lambda r + \mu r = r \end{aligned}$$

Böylece $\lambda x + \mu y \in S[a, r]$ olduğundan $S[a, r]$ konvektir. Benzer şekilde $\mathbb{C}^n$ de her $S(a, r) = \{x \in \mathbb{C}^n : d(x, a) < r\}$ açık yuvarı $\mathbb{C}^n$ kümesinin bir alt kümesidir.

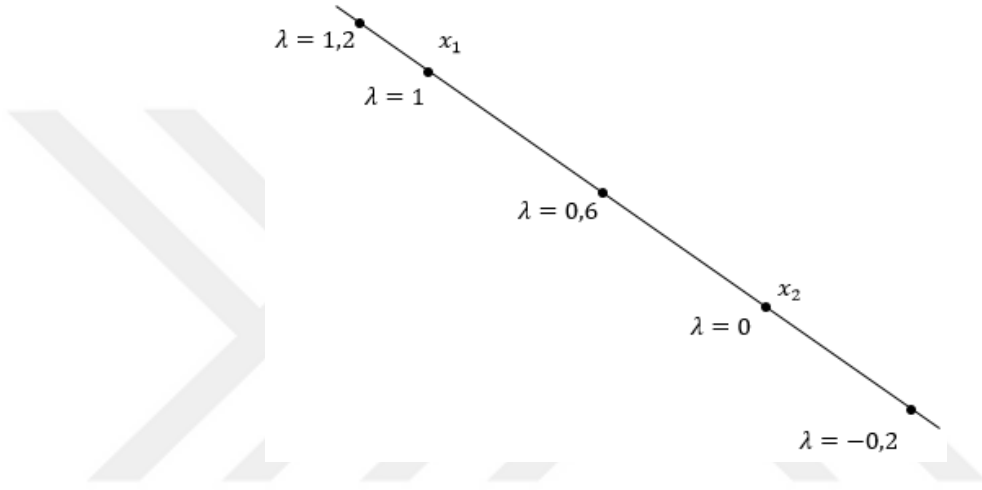
Tanım 3.2.2 (Afin Küme)

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\forall x_1, x_2 \in C$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ iken $\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \in C$ ise C kümesine afin küme denir. Başka bir deyişle, C kümesindeki herhangi katsayılardan

oluşan, C 'deki herhangi iki noktanın lineer kombinasyonunu içeren bir doğru vardır ve lineer kombinasyon toplamı 1'e eşittir (Boyd, 2009).

Bu durum ikiden daha fazla olan noktalar için de genelleştirilebilir.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ noktasına $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının afin kombinasyonu denir.



Şekil 3.4. Afin küme

Önerme 3.2.1

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ iki konveks küme olmak üzere,

1. $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ şeklinde tanımlanan $C_1 + C_2$ kümesi konveks bir kümedir.
2. $C_1 - C_2 = \{x_1 - x_2 | x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ şeklinde tanımlanan $C_1 - C_2$ kümesi konveks bir kümedir.
3. $\alpha \cdot C_1 = \{\alpha \cdot x_1 | x_1 \in C_1\}$ şeklinde tanımlanan $\alpha \cdot C_1$ kümesi konveks bir kümedir.
4. $C_1 \times C_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ kartezyen çarpım kümesi konvektir.

İspat

$\theta_1, \theta_2 \in C_1$ ve $\beta_1, \beta_2 \in C_2$ için $\theta_1 + \beta_1 = x_1$ ve $\theta_2 + \beta_2 = x_2$ ile $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $x_1, x_2 \in C_1 + C_2$ olduğundan,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = \lambda[\theta_1 + \beta_1] + (1 - \lambda)[\theta_2 + \beta_2]$$

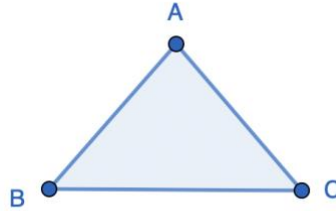
$$[\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2] + [\lambda\beta_1 + (1 - \lambda)\beta_2] = \theta_3 + \beta_3$$

olduğundan $\theta_3 \in C_1$ ve $\beta_3 \in C_2$ kümelerinin konveksliğinden $(\theta_3 + \beta_3) \in C_1 + C_2$ kümesi konveks bir küme olur. Benzer şekilde diğer maddelerinde konveksliği gösterilebilir (Boyd, 2009).

Tanım 3.2.3 (Konveks Örten)

A kümesinin konveks örteni demek, A kümesinin noktalarının tüm konveks kombinasyonlarından oluşan kümesi demektir ve $convA$ ile gösterilir.

$$convA = \{\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_m \cdot x_m | x_i \in A, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1\}$$



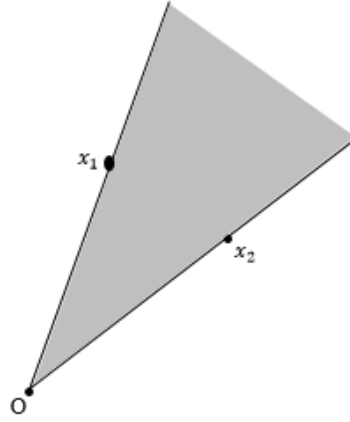
Şekil 3.5. $\{A, B, C\}$ kümesinin konveks örteni

Tanım 3.2. 4 (Koni)

$\forall x \in C$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in C$ oluyorsa C kümesine koni ya da negatif olmayan homojen denir.

Tanım 3.2.5 (Konveks Koni)

Herhangi $x_1, x_2 \in C$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ oluyorsa C kümesine konveks koni denir (Değer, 2020). Şekil 3.6'da geometrik olarak başlangıç noktası O noktası olan ve kenarları x_1, x_2 den geçen pasta dilimi gösterilmiştir.

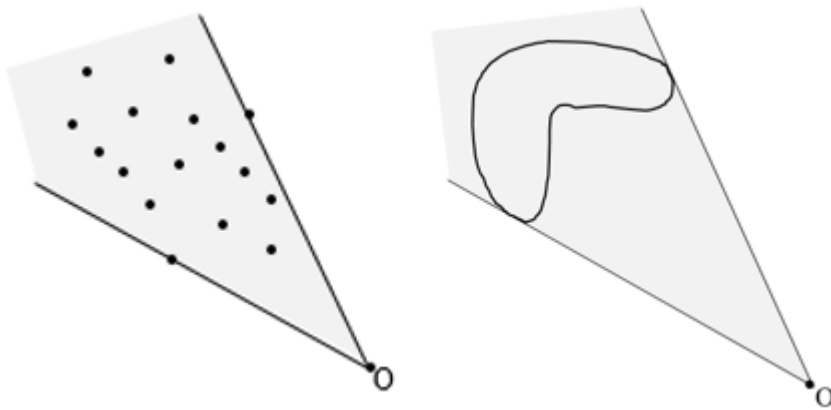


Şekil 3.6. Konveks Koni

Konveks bir koni, yalnızca elemanlarının tüm konik kombinasyonlarını içeriyorsa, konik kombinasyon genelleştirilebilir (Boyd, 2009). Konik kombinasyon fikri, sonsuz toplam ve integrale genelleştirilebilir. *Bir* C kümesinin konik gövdesi, C kümesindeki noktaların tüm konik kombinasyonlarının kümesidir.

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n | x_i \in C, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$$

ifadesi aynı zamanda C kümesi içeren en küçük konveks konidir (Fenchel, 1953).



Şekil 3.7. İki kümenin konik gövdeleri

Matematiksel olarak verilen iki kümenin konik gövdeleri hesaplanırken, her iki kümenin elemanları doğrusal birleşimlerle bir araya getirilir. A ve B gibi iki kümenin konik gövdeleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

A 'nın konik gövdesi: $\text{konv}(A) = \{a \cdot x \mid x \in A, a \geq 0\}$

B 'nin konik gövdesi: $\text{konv}(B) = \{b \cdot y \mid y \in B, b \geq 0\}$

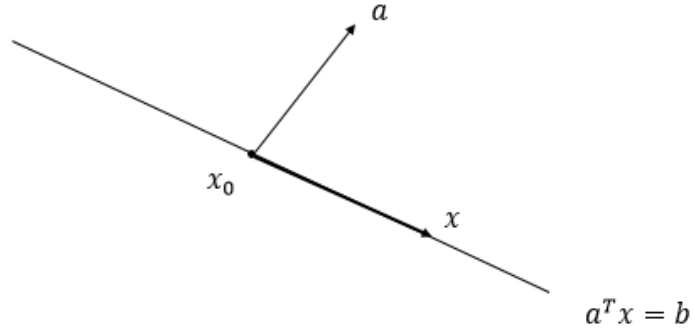
$\text{konv}(A)$ A 'nın konik gövdesini temsil ederken, $\text{konv}(B)$ B 'nin konik gövdesini temsil eder.

Konik gövdelerin bazı temel özellikleri şunlardır:

1. Konik gövde, konveks kümenin bir genelleştirmesidir. Yani, her konik gövde aynı zamanda bir konveks kümedir, ancak her konveks küme bir konik gövde olmayabilir.
2. Konik gövdeler, kapalı ve konik özelliklere sahiptirler. Kapalı olmaları, konik gövdelerin sonsuz uzaklıktaki noktalara da genişlediğini göstermektedir. Konik özellikleri ise, konik gövdelerin orijinden geçen herhangi bir doğru parçasını içermesi anlamına gelir.
3. Konik gövdeler, doğrusal olarak bağımlı bir kümenin konik yapısı olarak ifade edilebilir. Yani, bir kümenin elemanları doğrusal olarak bağımlı ise, konik gövdesi orijinden geçen doğru parçalarını içeren bir küme olacaktır. Konik gövdeler, optimizasyon problemlerinde önemli bir rol oynar. Özellikle lineer programlama durumunda, hedef fonksiyon ve kısıtların konik gövdeleri kullanılarak problemler formüle edilebilir ve çözülebilir.

Tanım 3.2.6 (Hiperdüzlem)

Bir hiperdüzlem, $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ ve $b \in \mathbb{R}$ olduğunda $\{x \mid a^T x = b\}$ biçiminde olan kümedir. x in bileşenleri arasında önemsiz olmayan bir lineer denklemin çözüm kümesidir. Aslında bu bir afin kümedir. $\{x \mid a^T x = b\}$ kümesi, geometrik olarak verilen bir $\vec{a}$ vektörü için sabit bir iç çarpım ile bir hiperdüzlem noktalarının kümesi olarak yorumlanabilir. $b \in \mathbb{R}$ sabiti hiperdüzlemin orijinden yer değiştirmesini belirler. Bu geometrik yorumlama, x_0 hiperdüzlemdeki herhangi bir nokta olduğunda $\{x \mid a^T (x - x_0) = b\}$ biçiminde hiperdüzlemi ifade ederek gösterilebilir. Bu temsil $a^\perp, a$ nın ortogonal bileşenlerini gösterdiğinde sırasıyla $\{x \mid a^T (x - x_0) = b\} = x_0 + a^\perp$ olarak ifade edilebilir. (Yani tüm ortogonal vektörlerin kümesi $a^\perp = \{v \mid a^T v = 0\}$ dir.) Bu geometrik yorumlama şekil 3.8' de gösterilmiştir.

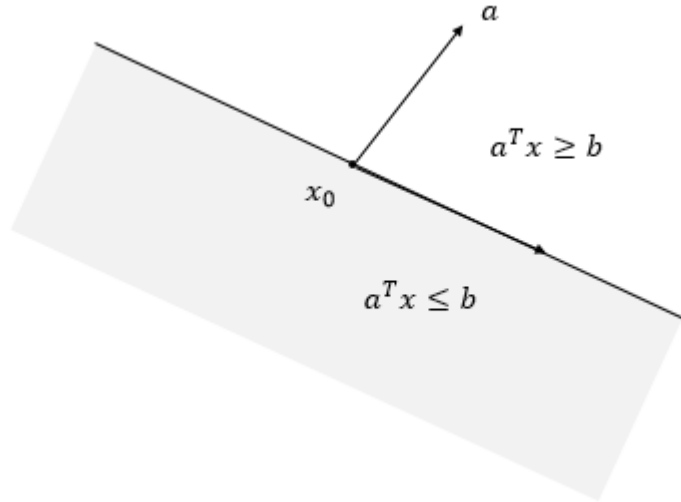


Şekil 3.8. R^2 de hiperdüzlem

Bir hiperdüzlem $\mathbb{R}^n$ 'i iki yarım uzaya böler. Bir yarım uzay (kapalı) $a \neq 0$ olduğunda

$$\{x | a^T x \leq b\} \quad (3.5)$$

biçimindeki bir kümedir. Yani lineer eşitsizliğin bir çözüm kümesidir. Yarım uzay konvektir ama afin değildir. Bu geometrik yorumlama şekil 3.8'de gösterilmiştir.

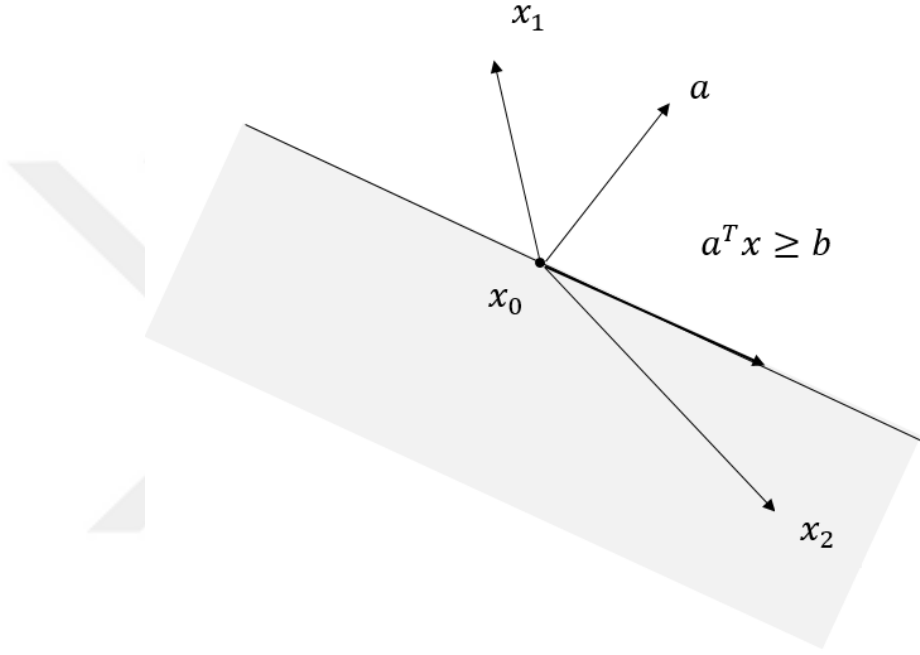


Şekil 3.9. R^2 de $a^T x = b$ ile tanımlanan bir hiperdüzlem iki yarım uzayı belirtir

İlişkili hiperdüzlem üzerinde herhangi bir nokta x_0 olduğunda $\{x | a^T x \leq b\}$ kümesi

$$\{x|a^T(x - x_0) \leq 0\} \quad (3.6)$$

olarak ifade edilebilir. Yani $a^T \cdot x_0 = b$ ifadesini sağlar. Denklem (3.6)'nın geometrik yorumlaması Şekil 3.9' da gösterilmiştir. Denklem (3.5)'te verilen yarım uzayın sınırı $\{x|a^T x = b\}$ hiperdüzlemdir. $\{x|a^T x \leq b\}$ yarımuzayının iç kısmı olan $\{x|a^T x < b\}$ kümesi açık yarım uzaydır.

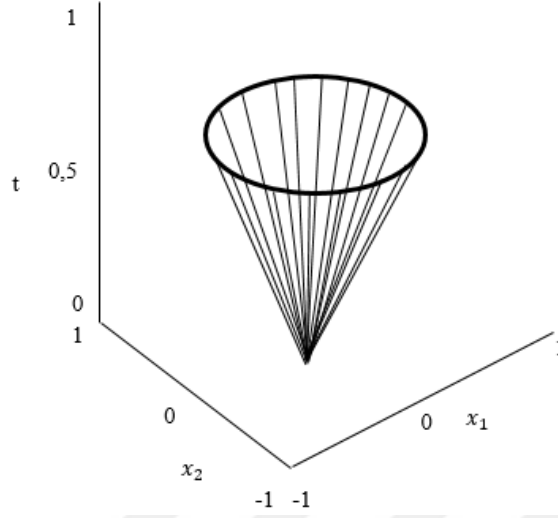


Şekil 3.10. Taralı bölge $a^T(x - x_0) \leq 0$ tarafından belirlenen yarımuzayın bölgesidir

Burada $x_1 - x_0$ vektörü a vektörü ile dar açı yaptığı için x_1 düzlemde yer almamaktadır. $x_2 - x_0$ vektörü a vektörü ile geniş açı yaptığı için x_2 düzlemde yer almaktadır.

Tanım 3.2.7 (Norm Yuvarları ve Norm Konileri)

$\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir $\|\cdot\|$ verilsin. Yarıçapı r ve merkezi x_c olan $\{x: \|x - x_c\| \leq r\}$ ile gösterilen norm yuvarı; normun genel özelliklerinden dolayı konvektir. $\|\cdot\|$ ile ilişkilendirilen norm konisi $C = \{x: \|x\| \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ kümesidir. Bu kümeye konveks koni denir. Şekil 3.11'de $\mathbb{R}^3$ ikinci dereceden $\{(x_1, x_2, t) | (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq t\}$ koninin sınırı gösterilmiştir.



Şekil 3.11. R^3 te ikinci dereceden koninin sınırı

Şekil 3.11’de gösterilen ikinci dereceden koni Öklidyen normu için norm konidir.

$$C = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \leq 0, t \geq 0 \right\} \quad (3.7)$$

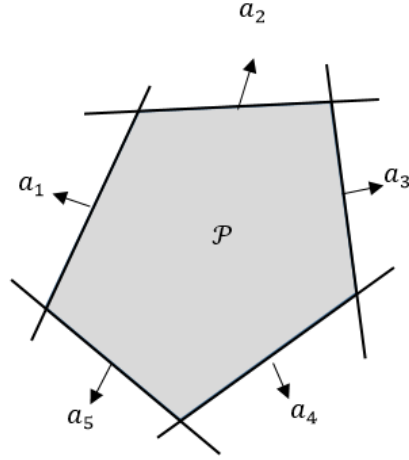
ile gösterilir. Şekil 3.11’de gösterilen koni; İkinci Dereceden Koni, Lorentz Konisi ya da Dondurma Külâhı Konisi olarak da adlandırılabilir (Boyd, 2009).

Tanım 3.2.8 (Çokgen)

Bir çokgen

$$\mathcal{P} = \{x \mid a_j^T x \leq b_j, \ j = 1, \dots, m, \ c_j^T x = d_j, \ j = 1, \dots, p \} \quad (3.8)$$

sonlu sayıda doğrusal eşitliğin ve eşitsizliğin kümesi olarak tanımlanır. Dolayısıyla bir çokgen, sonlu sayıda yarım uzay ve hiperdüzlemlerin kesişimidir. Şekil 3.12’de $\mathcal{P}$ çokgeni beş noktanın kesişiminden oluşan taralı bölgedir. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n$ dışa doğru normal vektörleri olan yarım uzaylardır.



Şekil 3.12. $\mathcal{P}$ Çokgeni beş noktanın kesişimidir

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_p^T \end{bmatrix}$$

olduğundan (3.8) denklemi için

$$\mathcal{P} = \{x | Ax \preceq b, Cx = d\} \quad (3.9)$$

kompakt gösterimini kullanmak uygun olacaktır. Burada $\preceq$ sembolü vektör eşitsizliği ya da $\mathbb{R}^n$ de bileşen eşitsizliği anlamına gelir.

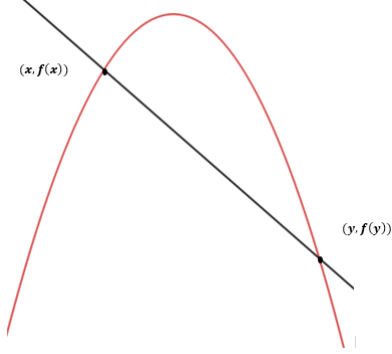
3.3. Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.3.1 (Konveks Fonksiyonlar ve Konkav Fonksiyonlar)

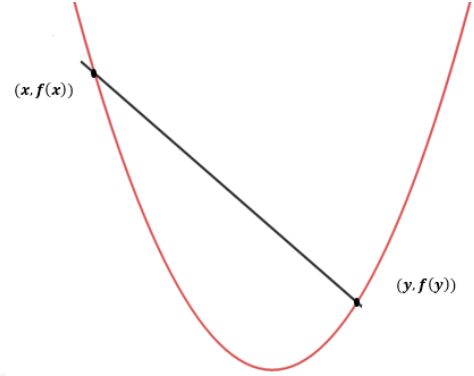
Eğer **dom f** (fonksiyonun tanım kümesi) konveks bir küme,
 $\forall x, y \in \text{dom } f$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ ise, bir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konvekstir ve bu fonksiyon

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.10)$$

ile gösterilir. Burada $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in [0,1]$ şeklinde de gösterilebilir.



Şekil 3.13. Konkav fonksiyon grafiği



Şekil 3.14. Konveks fonksiyon grafiği

bir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konkavdır ve bu fonksiyonu,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.11)$$

ile gösterilir.

Eğer $x \neq y$ ve $0 < \lambda < 1$ ise (3.11) eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonu kesin olarak konvekstir. Yani, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ olur. Benzer şekilde $-f$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise f fonksiyonu konkav bir fonksiyondur denir (Constantin et al., 2004).

Eğer $x \neq y$ ve $0 < \lambda < 1$ ise (3.12) eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonu kesin olarak konkavdır. Yani,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.12)$$

olur.

Şekil 3.13'te görüldüğü gibi grafikteki herhangi iki nokta arasındaki kiriş, grafiğin üzerinde yer aldığından fonksiyon konveks olur. Şekil 3.14'te görüldüğü üzere grafikteki herhangi iki nokta arasındaki kiriş grafiğin altında yer aldığından fonksiyon konkav olur. (3.12) eşitsizliğinin her iki tarafı birbirine eşit ise fonksiyon afın fonksiyon adını alır. Bir

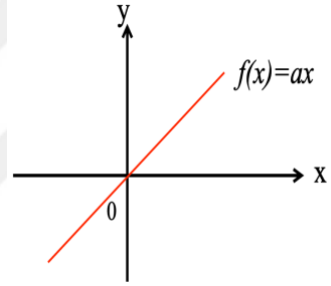
fonksiyon ancak ve ancak herhangi bir konveks çizgi ile sınırlandırıldığında konveks olur. Konkav fonksiyonların toplamı da konkavdır. Konkav fonksiyonlardan en az biri kesin konkav ise, toplamı da kesin konkav olur. Konveks fonksiyonların toplamı da konvekstir. Konveks fonksiyonlardan en az biri kesin konveks ise, toplamı da kesin konveks olur (Jahn, 2020).

Tanım 3.3.2

Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f fonksiyonuna afindir (lineer) denir (Yıldız, 2011).

Örnek 3.3.1

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\forall a \in \mathbb{R}$ için $f(x) = a \cdot x$ fonksiyonu hem konveks hem de konkav olduğu için afindir.



Örnek 3.3.2

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = |a|$ fonksiyonu A kümesi üzerinde konveks bir fonksiyondur.

$a_1, a_2 \in A$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$f(\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) \leq \lambda f(a_1) + (1 - \lambda)f(a_2)$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

$$\begin{aligned} f(\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) &= |\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2| \leq \\ &|\lambda a_1| + |(1 - \lambda)a_2| \leq \\ &\lambda |a_1| + (1 - \lambda)|a_2| = \\ &\lambda f(a_1) + (1 - \lambda)f(a_2) \end{aligned}$$

olduğundan $f(a) = |a|$ fonksiyonu konveks olur.

Örnek 3.3.3

$f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ise $(f + g): X \rightarrow \mathbb{R}$ konveks olur.

$$\begin{aligned} (f + g)(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y) \leq \\
& \lambda \cdot g(x) + (1 - \lambda) \cdot g(y) = \\
& \lambda \cdot (f(x) + g(x)) + (1 - \lambda) \cdot (f(y) + g(y))
\end{aligned}$$

Örnek 3.3.4

$\forall \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \cdot f$ konveks olur.

Örnek 3.3.5

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise

$A = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ A kümesi hem konveks hem de konidir.

Örnek 3.3.6.

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere $f(x) = |x_1| + |x_2|^2$ ile $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlayalım.

f fonksiyonunun $\mathbb{C}^2$ de konveks bir fonksiyon olduğunu gösterelim.

$x, y \in \mathbb{C}^2$ ve $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ olmak üzere $\lambda + \mu = 1$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= |\lambda x_1 + \mu y_1| + |\lambda x_2 + \mu y_2|^2 \\
&\leq \lambda |x_1| + \mu |y_1| + (\lambda |x_2| + \mu |y_2|)^2
\end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= |\lambda x_1 + \mu y_1| + |\lambda x_2 + \mu y_2|^2 \\ &\leq \lambda |x_1| + \mu |y_1| + (\lambda |x_2| + \mu |y_2|)^2 \end{aligned}} \right\} \quad (I)$$

f fonksiyonunun konveks olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}
(\lambda |x_2| + \mu |y_2|)^2 &\leq \lambda |x_2|^2 + \mu |y_2|^2 \\
&\quad (II)
\end{aligned}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda (I) ve (II) den

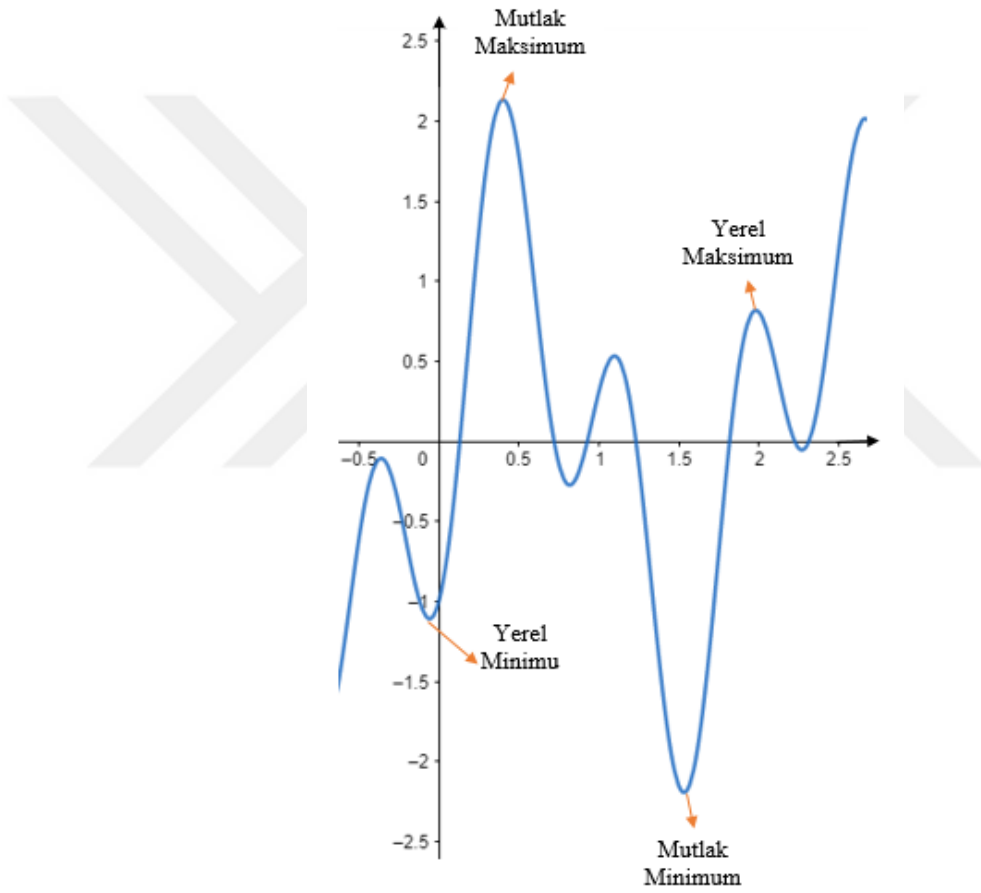
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

elde edilir. (II) eşitsizliği için ise

$$\begin{aligned}
& \lambda |x_2|^2 + \mu |y_2|^2 - (\lambda |x_2| + \mu |y_2|)^2 = \\
& (-\lambda^2) \cdot |x_2|^2 + (\mu - \mu^2) \cdot |y_2|^2 - 2\lambda\mu |x_2| |y_2| \leq \\
& \lambda\mu (|x_2|^2 - |y_2|^2) \leq 0
\end{aligned}$$

Çünkü $1 - \lambda = \mu$ ve $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ dır.

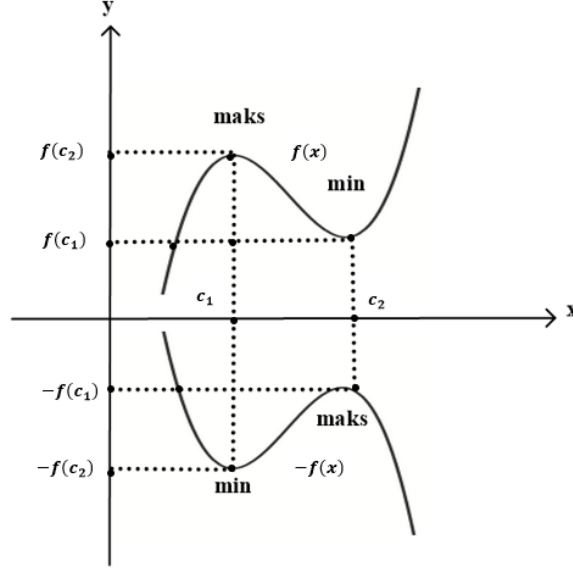
Konveks küme ve konveks küme fonksiyon tanımları X reel vektör uzayı iken anlamlıdır. Bu durumda $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu aynı zamanda konveks fonksiyondur. Çünkü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ eşitliği geçerlidir. Ayrıca $\lambda + \mu = 1$ ve $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ için kesin olarak $f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$ dir.



Şekil 3.15. Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları

Önerme 3.3.1

Herhangi bir f fonksiyonunun için $\text{maks } f(x) = -(\text{min} - f(x))$ olur.



Şekil 3.16. Maksimum minimum ilişkisi

Şekil 3.15 ve şekil 3.16’da belirtildiği üzere, bir fonksiyonun maksimum noktası, bu fonksiyonun belirli bir aralıkta aldığı en yüksek değeri temsil ederken, minimum noktası ise aynı aralıkta alınan en düşük değeri temsil eder. Maksimum ve minimum noktalar, bir fonksiyonun yüzeyini veya grafiğini tanımlarken önemli rol oynar ve bu noktalar, fonksiyonun en belirgin özelliklerinden biridir. Yerel maksimum, bir fonksiyonun belirli bir noktasında çevresindeki diğer noktalardan daha yüksek bir değeri ifade ederken, yerel minimum ise o noktada çevresindeki diğer noktalardan daha düşük bir değeri temsil eder. Mutlak maksimum, bir fonksiyonun tüm tanım aralığında alınan en yüksek değeri ifade ederken, mutlak minimum ise aynı tanım aralığında alınan en düşük değeri temsil eder. Maksimum ve minimum noktalar arasındaki ilişki, fonksiyonun davranışı hakkında değerli bilgiler sağlar. Örneğin, bir fonksiyonun maksimum ve minimumları arasındaki mesafe, bu fonksiyonun değişkenin ne kadar dalgalanma gösterdiğini veya ne kadar değişken olduğunu gösterir.

Maksimum nokta ve minimum nokta, bir optimizasyon probleminin temel konseptlerini oluşturur. Optimizasyon, belirli bir hedefi en iyi veya en kötü duruma getirmeyi amaçlayan bir süreçtir. Maksimum nokta, bir fonksiyonun en yüksek değerini

temsil ederken, minimum nokta ise en düşük değeri temsil eder ve bu iki nokta, bir işlemin en iyi veya en kötü sonucunu elde etmek için kullanılır. Bu nedenle, maksimum ve minimum noktalar, bir problemin çözümünü iyileştirmek veya optimize etmek için önemli referans noktalarıdır.

Tanım 3.3.3

X bir vektör uzayı olmak üzere f fonksiyonunun tanım kümesi S ve $x_0 \in S$ için x_0 noktasının δ komşuluğu A olsun.

- 1.) A daki tüm X ler için $f(x_0) \leq f(x)$ ise $f(x)$, $x = x_0$ da yerel minimum olur.
- 2.) S deki tüm X ler için $f(x_0) \leq f(x)$ ise $f(x)$, $x = x_0$ da mutlak minimum olur.
- 3.) A daki tüm X ler için $f(x_0) \geq f(x)$ ise $f(x)$, $x = x_0$ da yerel maksimum olur.
- 4.) S deki tüm X ler için $f(x_0) \geq f(x)$ ise $f(x)$, $x = x_0$ da mutlak maksimum olur.

Tanım 3.3.4

f fonksiyonu x_0 noktasında kısmi diferansiyellenbilir olsun.

$\nabla f(x_0) := \text{grad}f(x_0) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0))$ vektörüne f fonksiyonunun x_0 noktasındaki gradienti denir.

Tanım 3.3.5

f_i fonksiyonlarının x_0 noktasında bütün bileşenlere göre kısmi türevleri mevcut olmak üzere ($i = 1, 2, \dots, m$),

$$JF(x_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(x_0) & \dots & D_n f_1(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(x_0) & \dots & D_n f_m(x_0) \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (3.13)$$

matrisine F fonksiyonunun x_0 noktasındaki Jakobiyen matrisi denir.

Teorem 3.3.1 (Taylor Teoremi)

$f \in C^2$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iki kere sürekli türevlenebilir ve $x_0, h \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T h + R_2(x_0, h) \text{ ve } t \in (0,1) \quad (3.14)$$

olmak üzere, $R_2(x_0, h) = \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x_0 + th) h$ olarak tanımlıdır. Taylor teoremi kullanılarak birinci ve ikinci mertebeden yaklaşımlar elde edilir.

Birinci mertebeden yaklaşım $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T h$

İkinci mertebeden yaklaşım $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T h + \frac{1}{2} h^T \nabla^2 f(x_0) h$ olur (Özturan, 2019).

Tanım 3.3.6 (Diferansiyellenebilme)

Tek değişkenli fonksiyonlar için türevin varlığına denk olan diferansiyellenebilme kavramıyla lineer fonksiyonlar arasındaki yakın ilişki, çok değişkenli fonksiyonlar için aşağıdaki gibi tanımlanır;

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $a \in V$, ve $f: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0 \quad (3.15)$$

Eşitliğini sağlayan bir lineer $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu varsa f fonksiyonun a noktasında diferansiyellenebilir olduğu söylenir; bu durumda T_a lineer fonksiyonun a noktasındaki tam türevi ya da Frechet türevi denir (Çağlar, 2022).

Lemma 3.3.1

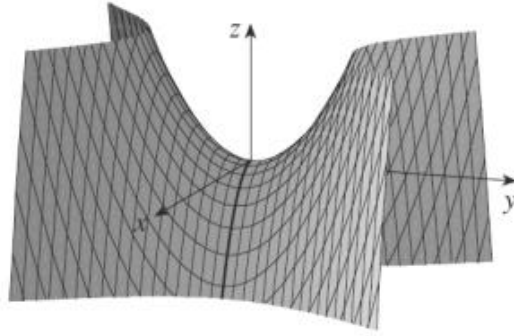
$A \subseteq \mathbb{R}$ bir açık küme $\alpha \in A$, ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer α noktasında f fonksiyonunun birinci mertebeden tüm kısmi türevleri var ve $f(\alpha)$ bu fonksiyonun bir yerel ekstremum değeri ise, bu durumda $\nabla f(\alpha) = 0$ olur.

İspat

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ olsun. Her $j = 1, \dots, n$ için, tek değişkenli $g(t) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, t, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonu $t = \alpha_j$ noktasında yerel ekstremum değerine sahiptir; bu ise $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha) = g'(\alpha_j) = 0$ olması demektir. Yani $\nabla f(\alpha) = 0$ olur.

Tanım 3.3.7 (Eyer Noktası)

$A \subseteq \mathbb{R}$ bir açık küme $\alpha \in A$, ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu α noktasında diferansiyellenebilir olsun. Eğer $\nabla f(\alpha) = 0$ ise ve $r_0 > 0$ sayısı $0 < \rho < r_0$ koşulunu sağlayan her ρ gerçel sayısı için $f(x) < f(\alpha) < f(y)$ eşitsizliklerini sağlayan $x, y \in B_\rho(\alpha)$ noktaları varsa, α noktasına f fonksiyonunun bir eyer noktası denir (Kochenderfer et al., 2019).



Şekil 3.17. Eyer noktası görseli

Teorem 3.3.2

$z = f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) noktasında ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ olsun.

1. $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 < 0$ ise (a, b) noktası eyer noktasıdır.
2. $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 > 0$ ve $f_{xx}(a, b) > 0$ ise (a, b) noktası yerel minimum noktasıdır.
3. $f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2 > 0$ ve $f_{xx}(a, b) < 0$ ise (a, b) noktası yerel maksimum noktasıdır (Balcı, 2006).

Örnek 3.3.7

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ fonksiyonu verilsin.

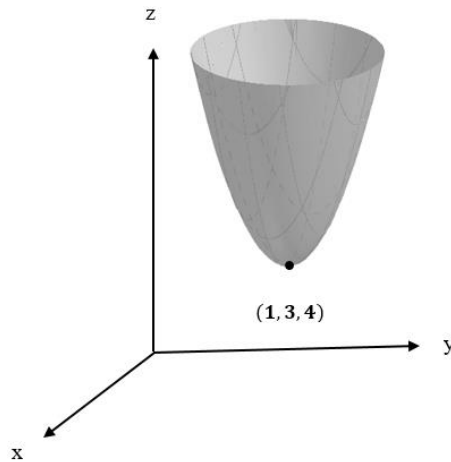
$$f_x(x, y) = 2x - 2, \quad f_{xx}(x, y) = 2, \quad f_y(x, y) = 2y - 6, \quad f_{yy}(x, y) = 2,$$

$$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$f_y(x, y) = 2y - 6 = 0 \Rightarrow y_0 = 3$$

$f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$ ve $f_{xx}(x, y) = 2 > 0$ olduğundan $x_0 = 1$ ve $y_0 = 3$ noktası bir minimum noktasıdır.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 \Rightarrow f(1, 3) = 1^2 + 3^2 - 2 - 18 + 14 = 4.$$

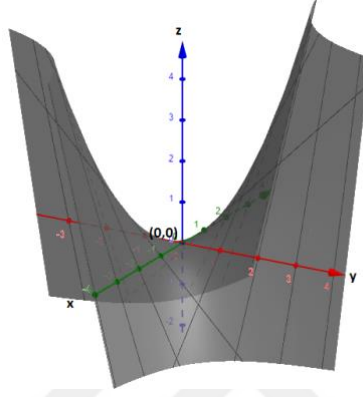


Örnek 3.3.8.

$f(x, y) = xy$ fonksiyonu verilsin.

$f_x(x, y) = y = 0$, $f_{xx}(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = x = 0$, $f_{yy}(x, y) = 0$, $f_{xy}(x, y) = 1$ kısmi türevleri hesaplanır.

$f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 0 \cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$ olduğu için $(0,0)$ noktası bir eyer noktasıdır.



Önerme 3.3.2

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve x_0 noktasının δ komşuluğu A olsun. Bu durumda $f(x), x_0$ da yerel minimum değerini alıyorsa $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde konvektir.

İspat

x_0 , $f(x)$ fonksiyonun yerel minimumu olsun. $x_1, x_2 \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $x_0 = \lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2$ şeklinde yazılan $f(x), x_0$ da yerel minimum değerini aldığına göre

$$f(x_1) \geq f(x_0) \Rightarrow \lambda x_1 \geq \lambda x_0$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) \Rightarrow (1 - \lambda)x_2 \geq (1 - \lambda)x_0$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2 \geq f(x_0)$$

bulunur.

$$f(x_0) = f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)$$

Olduğundan

$$\lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2) \geq f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2)$$

elde edilir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu A kümesinde konvektir.

Önerme 3.3.3

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks kümede tanımlı bir fonksiyon olsun ve eğer x^* $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimumu ise (x) fonksiyonu x^* noktasında mutlak minimum değerini alır.

İspat

x^* noktasının δ komşuluğu A olsun ve $f(x), x^*$ da yerel minimum değerini alsın. Bu takdirde $f(x^*) \leq f(x)$ olur. Eğer x^* noktası mutlak minimum değil ise bu durumda $\exists x \notin A$ için $f(x^*) < f(x)$ eşitsizliği sağlanır. $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi bir konveks küme olduğuna göre x^* ve x noktalarının her konveks kombinasyonu bu küme içinde kalır. x^* noktasının civarında $y = \lambda \cdot x + (1 - \lambda)x^*$ olsun. f fonksiyonu konveks olduğundan $\lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(x^*) \geq f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda)x^*)$ yazılır ve $f(x) < f(x^*)$ eşitsizliğinden dolayı $f(x)$ ve $f(x^*)$ sol tarafında yer değiştirirse $\lambda \cdot f(x^*) + (1 - \lambda) \cdot f(x^*) \geq f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda)x^*) \Rightarrow f(x^*) > f(y)$ olur. Bu takdirde x^* noktası yerel minimum olmaz.

Tanım 3.3.8 (Quasi Konveks Fonksiyon)

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad (3.16)$$

ise f fonksiyonuna quasi konveks fonksiyon denir (Dragomir et al, 1998).

Tanım 3.3.9 (Quasi Konkav Fonksiyon)

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \neq \emptyset \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\forall x_1, x_2 \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\} \quad (3.17)$$

ise f fonksiyonuna quasi konkav fonksiyon denir (Dragomir et al., 1998).

Örnek 3.3.9.

Reel sayılarda $f(x) = \sqrt{|x|}$ fonksiyonu quasi konvektir.

Tanım 3.3.10

f fonksiyonu hem quasi konveks hem de quasi konkav ise f fonksiyonuna quasi monotonik denir (Boyd, 2009).

Tanım 3.3.11 (J-Konveks Fonksiyon)

$S \subset \mathbb{R}'$ de bir açık aralık olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in S$ için

$$\tau\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{\tau(\alpha)+\tau(\beta)}{2} \quad (3.18)$$

şartını sağlayan τ fonksiyonuna S aralığı üzerinde J-Konveks fonksiyon denir. Burada $\alpha \neq \beta$ için Denklem (3.18)'e göre τ fonksiyonuna S aralığı üzerinde kesin J-Konveks fonksiyondur denir (Barani et al., 2012).

Önerme 3.3.4

Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi konveks fonksiyondur. Her quasi konveks fonksiyon, konveks fonksiyon değildir.

Örnek 3.3.10.

$\tau(\varphi): [-3,3] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$\tau(\varphi): \begin{cases} 1, & \varphi \in [-3, -1] \\ \varphi, & \varphi \in (-1, 3] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $[-3,3]$ aralığında quasi konveks iken konveks değildir (Barani et al., 2012).

Tanım 3.3.12 (Hessian Matris)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ için bir $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun ve bu fonksiyonun ikinci mertebeden kısmi türevleri tanımlı ise bu fonksiyon herhangi bir $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktasına ikinci mertebeden türevlerinin değerlerinden oluşan matrisine **Hessian Matris** adı verilir.

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Bu matrisin asal minörleri olan determinantlar (sol üst köşeden başlayan determinantlar) ise şu şekilde tanımlanır.

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \Delta_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Önerme 3.3.5

f kesin konkavdır $\Leftrightarrow$ Hessian matrisi negatif belirlidir.

f kesin konvektir $\Leftrightarrow$ Hessian matrisi pozitif belirlidir.

f konkavdır $\Leftrightarrow$ Hessian matrisi negatif-yarı belirlidir.

f konvektir $\Leftrightarrow$ Hessian matrisi pozitif-yarı belirlidir.

Örnek 3.3.11.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile tanımlı

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1 - 6x_3 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

fonksiyonu verilsin.

Gradient vektörünü sıfır yapan değerler araştırılırsa,

$$4x_1 - 4 + 2x_2 = 0$$

$$6x_2 + 2x_1 = 0$$

$$6x_3 - 6 = 0$$

sisteminin tek çözümü $(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$ olarak bulunur. Bu nokta Hessian matrisinde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{H}(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \Delta_i, \quad i = 1., 2. \text{ ve } 3. \text{ minörleri ifade etmek üzere}$$

$\Delta_1 = 4, \Delta_2 = -20, \Delta_3 = 120$ olduğundan Hessian matris pozitif ya da negatif tanımlı değildir. $(\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 1)$ noktası yerel eyer noktasıdır (Ben-Tal et al., 2013).

Tanım 3.3.13 (Optimum Çözüm)

$\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $t(\varphi)$ fonksiyonunun $\varphi \in B$ kısıtlarına bağlı olarak minimumlaştırma problemi ele alınsın. Burada $\varphi \in B$ noktalarına problemin **olası çözümleri** denir. Eğer $\varphi^* \in B$ ve φ^* 'in δ komşuluğu olan bir D kümesi varsa $B \cap D$ deki tüm φ noktaları için $\tau(\varphi^*) \leq \tau(\varphi)$ ise φ^* noktası **yerel optimum çözümdür** denir. Eğer $\varphi^* \in B$ ve φ^* 'in δ komşuluğu olan bir D kümesi varsa $B \cap D$ deki tüm φ noktaları için $\tau(\varphi^*) < \tau(\varphi)$ ise $\varphi^* \neq \varphi$ için **kesin yerel optimum çözümdür** denir. Eğer $\varphi^* \in B$ ve φ^* 'in δ komşuluğu olan bir D kümesi varsa $B \cap D$ deki tüm φ noktaları için φ^* tek yerel optimum çözüm ise **izole optimum çözüm** denir. $\tau(\varphi)$ fonksiyonunun $\varphi \in B$ kısıtlarına bağlı olarak minimumlaştırma problemi B konveks bir küme ve $\tau(\varphi)$ fonksiyonu konveks bir küme olduğu durumda **konveks programlama** adını alır (Uysal, 2010).

Lemma 3.3.2

$\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $\tau(x_2) \geq \tau(x_1) + \nabla \tau(x_1)^T(x_2 - x_1), \forall x_1, x_2 \in B$ şartını sağladığında τ fonksiyonu konveks olur.

İspat

Gerek şart

τ konveks olsun. $0 < \beta \leq 1$ ve $x_1, x_2 \in B$ için,

$$\begin{aligned} \tau(\beta x_2 + (1 - \beta)x_1) &\leq \beta \tau(x_2) + (1 - \beta)\tau(x_1) \\ \frac{\tau(x_1 + \beta(x_2 - x_1)) - \tau(x_1)}{\beta} &\leq \tau(x_2) - \tau(x_1) \end{aligned}$$

$\beta \rightarrow 0$ iken $\tau(x_2) \geq \tau(x_1) + \nabla \tau(x_1)^T(x_2 - x_1)$ olur.

Yeter şart

τ fonksiyonu $\tau(x_2) \geq \tau(x_1) + \nabla \tau(x_1)^T(x_2 - x_1)$ şartını sağlasın. $\rho = \beta x_1 + (1 - \beta)x_2$ olacak şekilde $\rho \in B$ vardır.

$$\tau(x_1) \geq \tau(\rho) + \nabla \tau(\rho)^T(x_1 - \rho) \quad (I)$$

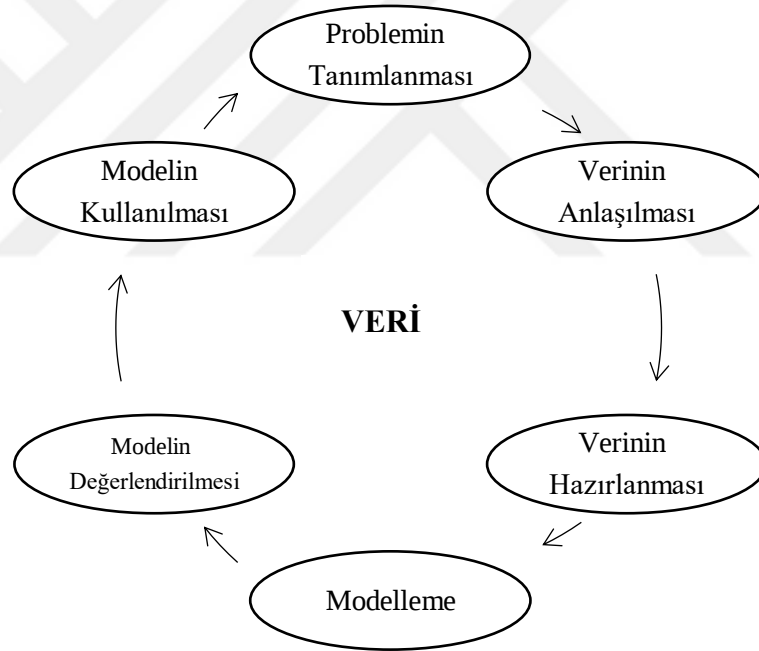
$$\tau(x_2) \geq \tau(\rho) + \nabla \tau(\rho)^T(x_2 - \rho) \quad (II)$$

eşitsizliklerinde (I) denklemini β ile (II) denklemini $(1 - \beta)$ ile çarpıp, taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \beta\tau(x_1) + (1 - \beta)\tau(x_2) \geq \tau(\rho) + \beta\nabla\tau(\rho)^T(x_1 - \rho) + (1 - \beta)\nabla\tau(\rho)^T(x_2 - \rho) \\
& \geq \tau(\rho) + \beta\nabla\tau(\rho)^T x_1 - \beta\nabla\tau(\rho)^T \rho + \nabla\tau(\rho)^T(x_2 - \rho) - \beta\nabla\tau(\rho)^T x_2 + \beta\nabla\tau(\rho)^T \rho \\
& \geq \tau(\rho) + \nabla\tau(\rho)^T(x_1 - x_2) + \nabla\tau(\rho)^T(x_2 - \rho) \\
& \geq \tau(\rho) + \nabla\tau(\rho)^T(x_2 - \rho) + \beta(x_2 - x_1) \\
& \geq \tau(\rho) + \nabla\tau(\rho)^T(x_2 - \rho x_1 - x_2 + \rho x_2 + \rho x_1 - \rho x_2) \\
& \geq \tau(\rho x_1 + (1 - \beta)x_2)
\end{aligned}$$

τ fonksiyonu konveks olur (Özturan, 2019).

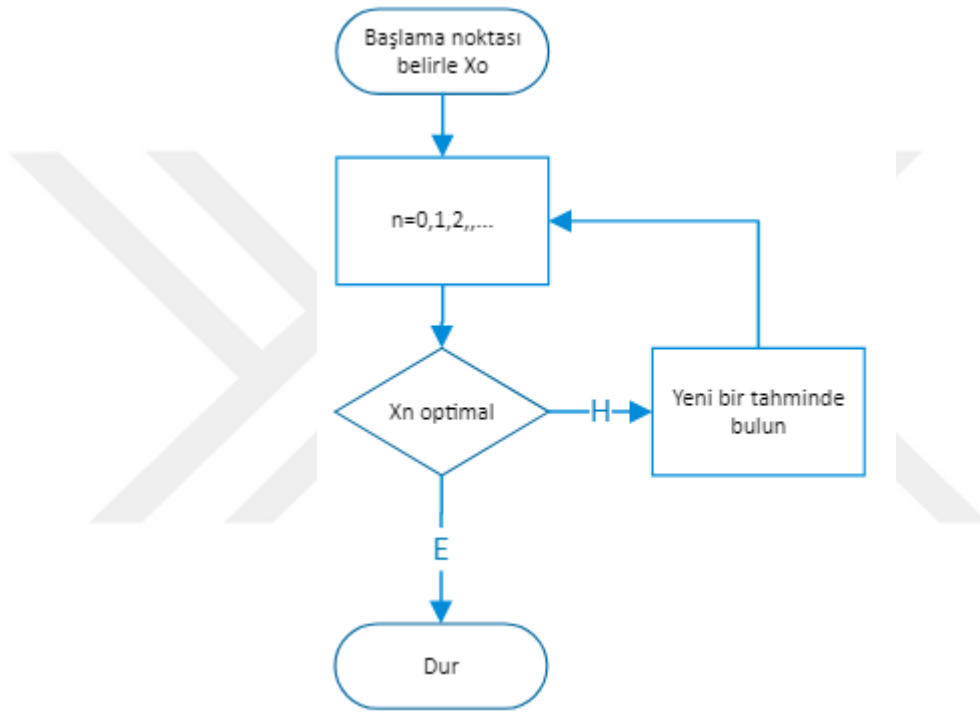
3.4. Optimizasyonda Veri Değerlendirme Süreci



Şekil 1. Veri değerlendirme süreci (Yakut, 2012)

Şekil 3.18’ de görüleceği üzere verinin değerlendirilmesi için problemin tanımlanması, verinin anlaşılması, hazırlanması, veri için modellemenin yapılıp değerlendirilmesi ve sonrasında da kullanılması söz konusudur. Bu aşamalara dikkat etmek, çalışmanın kalitesini artırır ve sonuçlarını daha güvenilir hale getirir. Çalışma içeriğinde ele alınacak problemi açıkça tanımlamak büyük önem taşır. Bu aşamada, hangi

sorunların çözülmesi gerektiği ve bu sorunların neden önemli olduğu açık bir şekilde ifade edilmelidir. Modelin başarısını değerlendirmek için uygun metriklerin kullanılması önemlidir; doğruluk, hassasiyet ve özgüllük gibi metrikler modelin başarısını ölçmek için kullanılabilir. Bu metrikler ayrıca çapraz doğrulama ile aşırı uyarlama veya eksik uyarlama gibi sorunların önüne geçilmesine yardımcı olur.



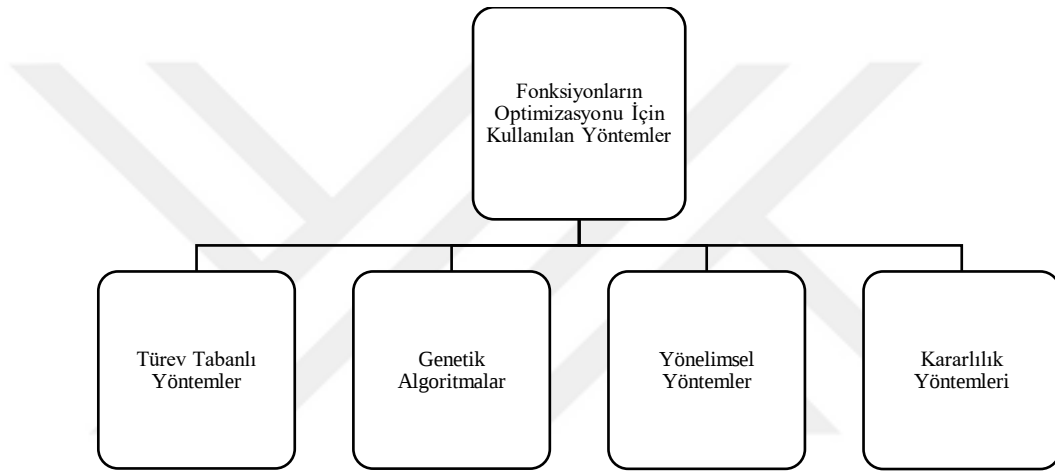
Şekil 3.19. Genel optimizasyon akış diyagramı

Şekil 3.19’deki akış diyagramında görüleceği üzere, optimizasyonda bir başlama noktası olmalı ve başlama noktasına göre yeni değerlendirmeler bakılmalı ve optimal sonuç bulunana kadar değerlendirmeye devam edilmelidir.

3.5. Fonksiyonların Optimizasyonu

Fonksiyon optimizasyonu, bir matematiksel fonksiyonun en küçük veya en büyük değerini bulmayı amaçlayan bir süreçtir. Bu, genellikle bir problemin çözümünü veya bir sistemdeki en iyi durumu bulmayı gerektiren birçok uygulama alanında kullanılır.

Fonksiyon optimizasyonu, genellikle tek değişkenli ve çok değişkenli optimizasyon olmak üzere iki ana kategoriye ayrılır. Tek değişkenli optimizasyonda, bir fonksiyonun yalnızca bir değişkeni vardır ve en iyi değeri bulmak için bu değişken üzerinde çalışılır. Çok değişkenli optimizasyonda ise, bir fonksiyon birden çok değişkene bağlıdır ve en iyi değeri bulmak için bu değişkenlerin birleşimini optimize etmek gerekebilir. Bu tür optimizasyon problemleri, gerçek hayattaki pek çok karmaşık sistemde karşımıza çıkar. Örneğin, bir üretim sürecinde en uygun parametre değerlerini bulmak veya bir veri kümesine en iyi uyacak modelin parametrelerini bulmak gibi.



Şekil 3.20. Fonksiyon optimizasyon teknikleri

1. Türev Tabanlı Yöntemler: Bu yöntemler, bir fonksiyonun türevini kullanarak en iyi değeri bulmaya çalışır. Gradient tabanlı optimizasyon algoritmaları örnek olarak verilebilir.

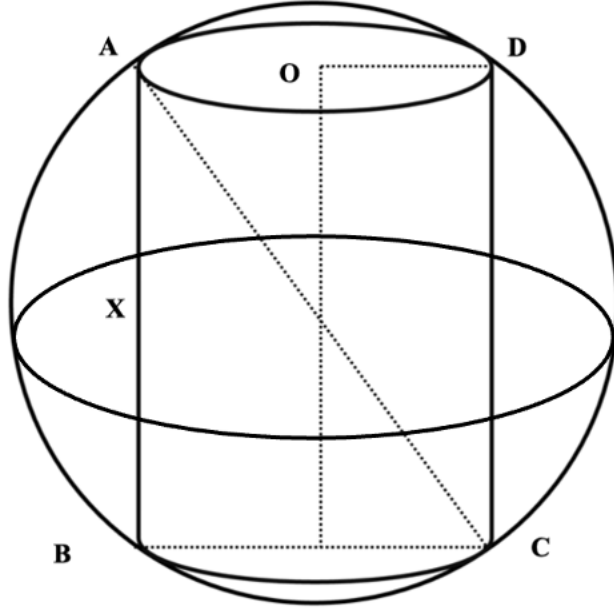
2. Genetik Algoritmalar: Genetik algoritmalar, doğal seçilim ve genetik işlemlere dayanan bir optimizasyon tekniğidir. Popülasyon tabanlı bir yaklaşım kullanırlar ve iteratif olarak çözümü geliştirirler. Genetik algoritma, parçacık sürü optimizasyonu ve benzeri algoritmalar bu kategoriye girer.

3. Yönelimsel Yöntemler: Bu yöntemler, bir fonksiyonun değerini hesaplamak için önceden belirlenmiş bir yönerge takip ederler. Yönelimli arama veya çizgisel arama algoritmaları bu kategoriye girer.

4. Kararlılık Yöntemleri: Bu yöntemler, bir fonksiyonun minimum veya maksimum değerini bulmak için bir dizi adım atarak iterasyonel olarak ilerlerler. Nelder-Mead yöntemi veya Powell yöntemi örnek olarak verilebilir.

Örnek 3.5.1.

Yarıçapı 4 cm olan küre içine çizilen ve hacmi maksimum olan silindirin yüksekliğini bulunuz.



Kürenin çapı $|AC| = 2R = 8 \text{ cm}$ silindirin taban çapı $|CB| = 2r$ silindirin yüksekliği $|AB| = x$ olmak üzere

$$|CB|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 \Rightarrow (2r)^2 = 8^2 - x^2 \Rightarrow 2r = \sqrt{64 - x^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{64 - x^2}}{2} \text{ olur.}$$

Silindirin hacmi $H = \pi \cdot r^2 \cdot h$ olduğundan yükseklik değişkenindeki silindirin hacim fonksiyonu

$$H(x) = \pi \cdot r^2 \cdot x \Rightarrow H(x) = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{64 - x^2}}{2}\right)^2 \cdot x = (64x - x^3) \cdot \frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$

Hacmin maksimum olması için $H'(x) = (64 - 3x^2) \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow (64 - 3x^2) \cdot \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow 64 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 64 \Rightarrow x^2 = \frac{64}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$ olur. Buradan da yükseklik pozitif olacağı için $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ değeri yüksekliktir.

3.6. Doğrusal Optimizasyon

Doğrusal programlama; kaynakların optimal dağılımında, kaynakların seçenekli dağılımında, optimal üretim bileşiminde, minimum maliyet veren girdi bileşiminde, en uygun kârın ve en az maliyetin belirlenmesinde kullanılır (Öztürk, 1997).

Doğrusal programlama değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı kalarak amaç fonksiyonunu en uygun (maksimum ya da minimum) kılmaya çalışır. Buna göre doğrusal programlama değişkenlere ve kısıtlayıcılara bağlı kalarak amaca en iyi ulaşma tekniğidir. Doğrusal programlama temelde verilen optimallik ölçütüne bağlı kalarak kısıt kaynakların optimal biçimde dağıtımını sağlayan matematiksel bir tekniktir (Trueman, 1981). Doğrusal programlama modelleri: Bir doğrusal amaç fonksiyonun doğrusal eşitlikler ve eşitsizlikler kısıtlamaları ile optimizasyon yapılmasıdır (Ervural ve ark., 2016).

3. 7. Doğrusal Programlama ile İlgili Varsayımlar

1. **Doğrusallık varsayımı;** işletmenin girdileri ile çıktıları arasında doğrusal bir ilişki olduğunu savunur. Üretim seviyesi artarken aynı oranda üretim girdileri de artar. Bu varsayımda amaç fonksiyonu açık bir şekilde matematiksel olarak ifade edilmelidir. Amaç fonksiyonunun doğrusal olabilmesi için karar değişkenlerinin (x_j) birinci dereceden ve katsayıları da (c_j) sabit olmalıdır.
2. **Toplanabilirlik varsayımı;** değişik üretim faaliyetlerine kaynak olan üretim girdilerinin toplamının her bir işlem için ayrı ayrı kullanılan girdilerin toplamına eşit olduğunu belirtir.
3. **Sınırlılık varsayımı;** üretime giren girdiler ile üretim miktarının sınırlı olduğunu ve üretimde kullanılan kaynakların sonluluğuna işaret eder.
4. **Negatif olmama varsayımı;** Doğrusal programlamada yere alan temel (primary), aylak (slack) ve artık (artificial) değişkenlerin değerinin sıfır ya da pozitif olmasını savunur.

3. 8. Doğrusal Programlama Yöntemleri

Amaç fonksiyonuna ait tasarım parametre katsayılarını c , tasarım vektörünü x , kısıtlar dâhilinde bulunan sabit tasarım parametre katsayılarının oluşturduğu katsayılar matrisini A ve kısıtlara ait sabit değerleri b ile gösterelim. Buna göre bir doğrusal programlama problemi;

ile karakterize edilmektedir. Bu ifadeler matris ve vektörlerin tanımları ve işlemsel özellikleri göz önüne alınarak incelenirse görülür ki; (3.23) denklemi elemanları $c_1, c_2, \dots, c_n$ olan bir C satır vektörü ile elemanları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan X sütun vektörünün çarpımından ibarettir. Benzer şekilde (3.25) şartlarının sol tarafı, elemanları değişkenlerin katsayıları olan (m, n) boyutlu bir matris ile X vektörünün çarpımı ve sağ tarafları ise $b_1, b_2, \dots, b_n$ ifadelerinden meydana gelen bir sütun vektörü ile gösterilebilir. O halde,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

ile gösterilmek üzere DP modelini,

Amaç denklemi: $Z = CX$

Sınırlayıcı şartlar: $AX \leq P_0$

Pozitiflik şartları: $X \geq 0$ şeklinde ifade edilebilir (Kobu, 1986). Ayrıca DP modelini şu şekilde göstermekte mümkündür.

$$j = 1, 2, \dots, n \text{ için; } P_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, P_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

Amaç denklemi: $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

Sınırlayıcı şartlar: $\sum_{j=1}^n c_j P_i \leq P_0$

Pozitiflik şartları: $x_i \geq 0$

Örnek 3.9.1.

Okul sıraları üreten bir firma X ve Y gibi iki ürünün üretimini planlamaktadır. X ve Y kullanılabilir duruma gelinceye kadar kesme, sıkıştırma, montaj ve boya departmanlarında işlem görmektedir. Her departmanın kapasitesi, X ve Y nin bu bölümlerde kaçar dakika işlem gördüğü çizelgede verilmiştir.

İmalat Departmanı	Kapasite	İşlem Süreleri	
		X	Y
Kesme	30000	64	12
Pres	25000	40	11
Montaj	21000	25	26
Boya	12000	-	16

Firma X ve Y beher ünitesinin satışından sırasıyla 12 lira ve 8 lira kâr elde ettiğine göre, toplam kârı maksimum yapan imalat programını bulunuz.

Çözüm

X ve Y nin bilinmeyen imalat miktarlarını sırası ile x_1 ve x_2 ile gösterelim. Buna göre DP modeli;

Amaç fonksiyonu: $Z_{max} = 12x_1 + 8x_2$

$$64x_1 + 12x_2 \leq 30000 \quad (I)$$

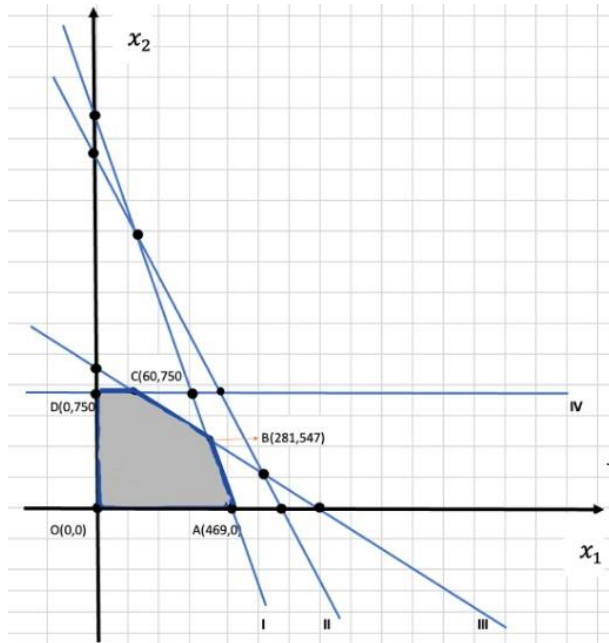
$$40x_1 + 11x_2 \leq 25000 \quad (II)$$

Sınırlayıcı şartlar:

$$25x_1 + 26x_2 \leq 21000 \quad (III)$$

$$16x_2 \leq 12000 \quad (IV)$$

Pozitiflik şartları: $x_1, x_2 \geq 0$



$$Z = 12x_1 + 8x_2$$

$$Z_A = 12.(468,8) + 8.0 = 5625,6$$

$$Z_B = 12.(387,1) + 8.(435,5) = 8129,2$$

$$Z_C = 12.0 + 8.(807,7) = 7181,6$$

kârı maksimum yapan nokta (I) ve (III) denklemlerinin ortak çözümü olan B noktasıdır. $Z_{maks} = 8129,2$ liradır.

3.10. Simpleks Yöntemi

Doğrusal programlama problemlerini çözmeye kullanılan bir yöntem olan simpleks yöntemi ilk kez Danzting tarafından 1947 yılında kullanıldı. Bu yöntemin amacı maliyeti en aza indirme ve kârı en yüksek yapma amaçlarıdır. Bu yöntemde çeşitli aşamalar ile en iyi çözüme ulaşma hedeflenir. Bu aşamalar sırasıyla aşağıdaki gibi olacaktır;

1. Verilen kısıtlayıcıları eşitlik haline dönüştürme
2. Başlangıç simpleks çizelgesinin oluşturulması
3. Modele girecek değişkenlerin belirlenmesi
4. Anahtar satırın ve işlemde çıkacak verilerin belirlenmesi
5. Yeni sıranın bulunması
6. Optimal çözüme ulaşma

Doğrusal programlama modelinde kısıtlayıcı denklem

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$ biçiminde ise denklemin sol tarafına aylak değişken (S_1) eklenerek, denklem $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$ biçimine dönüştürülür. Aylak değişken boş kapasiteyi gösterir (Öztürk, 1997). Eğer kısıtlayıcı denklem $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$ biçiminde ise sol taraftan artık değişken (V_1) çıkarılır ve yapay değişken (A_1) eklenir. Artık değişken, fazla kapasiteyi ifade eder. Kısıtlayıcı denklem $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - V_1 + A_1 = b_1$ şeklinde eşitlik denklemine dönüştürülür. Eğer kısıtlayıcı denklem $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ şeklinde tam eşitlik olarak verilmiş ise sol tarafa sadece yapay değişken eklenerek

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + A_1 = b_1$ biçimine dönüştürülür. Bu değişkenler amaç fonksiyonunda yazılırken artık ve aylak değişkenlerin katsayıları sıfır alınır. Yapay değişkenlerin katsayıları ise minimizasyon problemlerinde $+M$, maksimizasyon problemlerinde ise $-M$ olarak alınır. Bu durum Çizelge 3.1'deki gibi özetlenebilir.

Çizelge 3.1. Doğrusal programlama modelinde kısıtlayıcı

Kısıtlayıcı Tipi	Kısıtlayıcının ilişkisi	Simpleks yöntem için gerekli ek değişkenler	Amaç fonksiyonuna ilave edilen ek değişkenler		Başlangıç program değişkeni olarak yer alıp almadığı
			Kâr maksimum	Maliyet minimum	
Kaynak veya maks. istekler	$\leq$	Aylak değişken eklenir	0	0	Evet
Talep veya min. istekler	$\geq$	Artık değişken çıkarılır	0	0	Hayır
		Yapay değişken eklenir	$-M$	$+M$	Evet
Karışım veya tam istekler	$=$	Yapay değişken eklenir	$-M$	$+M$	Evet

Örnek 3.9.1

Amaç fonksiyonu: $Z_{max} = 85000x_1 + 75000x_2 + 70000x_3$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17 \quad (I)$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 22 \quad (II)$$

Sınırlayıcı şartlar:

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30 \quad (III)$$

Pozitiflik şartları: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

örneğine simpleks yöntemi uygulayalım.

Standart Biçim

Amaç fonksiyonu: $Z_{max} = 85000x_1 + 75000x_2 + 70000x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 = 17$$

Sınırlayıcı şartlar: $2x_1 + 2x_2 + x_3 + 0.S_1 + S_2 + 0.S_3 = 22$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + S_3 = 30$$

Pozitiflik şartları: $x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Çizelge 3.2. Başlangıç çizelgesi

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Çözüm vektörü	Minimum oran	
	C_j	85000	75000	70000	0	0	0			
S_1		1	1	2	1	0	0	17	$\frac{17}{1} = 17$	
S_2		2	2	1	0	1	0	22	$\frac{22}{2} = 11$	
S_3		3	2	2	0	0	1	30	$\frac{30}{3} = 10$	Anahtar satır
	Z_j	0	0	0	0	0	0			
	$C_j - Z_j$	85000	75000	70000	0	0	0			
		Anahtar sütun								

Anahtar satır ile anahtar sütunun kesiştiği hücrede bulunan sayı, anahtar sayı (pivot) olarak adlandırılır. Burada anahtar sayı 3 olur.

Başlangıç çizelgesindeki sonuçlara göre anahtar sütunda bulunan x_1 değişkeni yeni çizelgeye girecek ve anahtar satırda bulunan S_3 değişkeni yeni çizelgeden çıkarılacaktır.

Anahtar satırın her elemanı pivota bölünerek yeni satır elemanları bulunur

Anahtar satırın yeni elemanları						
1,0	0,7	0,7	0,0	0,0	0,3	10,0

S1 in eski değerleri		1	1	2	1	0	0	17
S1 in anahtar sütündeki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elamanları çarpılır.	-1	1,0	0,7	0,7	0,0	0,0	0,3	10,0
S1 in yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütündeki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		0,0	0,3	1,3	1,0	0,0	-0,3	7,0
S2 nin eski değerleri		2	2	1	0	1	0	22
S2 nin anahtar sütündeki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elamanları çarpılır.	-2	1,0	0,7	0,7	0,0	0,0	0,3	10,0
S2 nin yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütündeki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		0,0	0,7	-0,3	0,0	1,0	-0,7	2,0

Çizelge 3.3. Birinci iterasyon

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	özüm vektörü	Minimum oran	
	C_j	85000	75000	70000	0	0	0			
S_1	0	0	0,3	1,3	1	0	-0,3	7	$\frac{7}{0,3} = 21$	
S_2	0	0	0,7	-0,3	0	1	-0,7	2	$\frac{2}{0,7} \cong 3$	Anahtar satır
x_1	85000	1,0	0,7	0,7	0,0	0,0	0,3	10,0	$\frac{10}{0,7} \cong 15$	
	Z_j	85000	56666,7	56666,7	0,0	0,0	28333,3	850000,0		
	$C_j - Z_j$	0	18333,3	13333,3	0,0	0,0	-28333,3			
			Anahtar sütün							

Anahtar satır ile anahtar sütünün kesiştiği hücrede bulunan sayı, anahtar sayı (pivot) olarak adlandırılır. Burada anahtar sayı 0,7 olur. Başlangıç izelgesindeki

sonuçlara göre anahtar sütunda bulunan x_2 değişkeni yeni çizelgeye girecek ve anahtar satırda bulunan S_2 değişkeni yeni çizelgeden çıkarılacaktır. Anahtar satırın her elemanı pivota bölünerek yeni satır elemanları bulunur.

Anahtar satırın yeni elemanları								
0	1	-0,5	0	1,5	-1	3		
S1 in eski değerleri		0	0,3	1,3	1	0	-0,3	7
S1 in anahtar sütündaki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elemanları çarpılır.		0	1	-0,5	0	1,5	-1	3
	-0,3							
S1 in yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütundaki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		0,0	0,0	1,5	1,0	-0,5	0,0	6,1
x1 in eski değerleri		1,0	0,7	0,7	0,0	0,0	0,3	10,0
x1 in anahtar sütündaki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elemanları çarpılır.		0	1	-0,5	0	1,5	-1	3
	-0,7							
x1 in yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütundaki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		1,0	0,0	1,0	0,0	-1,0	1,0	8,0

Çizelge 3.4. İkinci iterasyon

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Çözüm vektörü	Minimum oran	
	C_j	85000	75000	70000	0	0	0			
S_1	0	0	0	1,5	1	-0,5	0	6	$\frac{6}{1,5} = 4$	Anahtar satır
x_2	75000	0	1	-0,5	0	1,5	-1	3	$\frac{3}{-0,5} = -6$	
x_1	85000	1,0	0,0	1,0	0,0	-1,0	1,0	8,0	$\frac{8}{1} \cong 8$	
	Z_j	85000	75000,0	47500,0	0,0	27500,0	10000,0	905000,0		
	$C_j - Z_j$	0	0,0	22500,0	0,0	-27500,0	-10000,0			
				Anahtar sütun						

Anahtar satır ile anahtar sütunun kesiştiği hücrede bulunan sayı, anahtar sayı (pivot) olarak adlandırılır. Burada anahtar sayı 1,5 olur. Başlangıç çizelgesindeki sonuçlara göre anahtar sütunda bulunan x_3 değişkeni yeni çizelgeye girecek ve anahtar satırda bulunan S_1 değişkeni yeni çizelgeden çıkarılacaktır. Anahtar satırın her elemanı pivota bölünerek yeni satır elemanları bulunur.

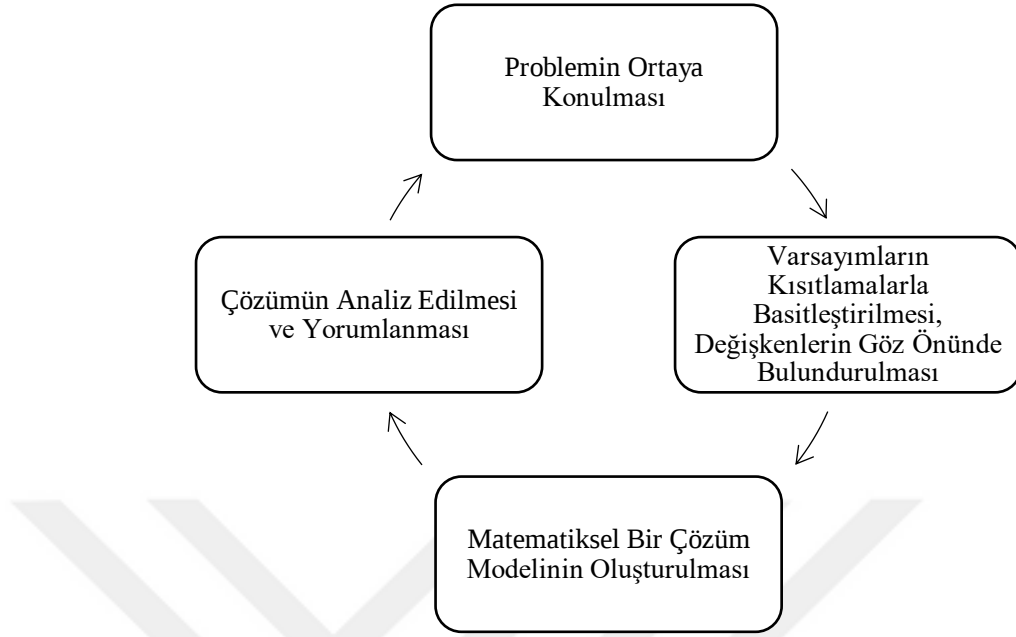
Anahtar satırın yeni elemanları								
0	0	1	0,7	-0,3	0	4		
x2 nin eski değerleri		0	1	-0,5	0	1,5	-1	3
x2 nin anahtar sütündaki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elemanları çarpılır.	0,5	0	0	1	0,7	-0,3	0	4
x2 nin yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütündaki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		0,0	1,0	0,0	0,4	1,4	-1,0	5,0
x1 in eski değerleri		1,0	0,0	1,0	0,0	-1,0	1,0	8,0
x1 in anahtar sütündaki eski değerinin -1 ile çarpımı ile anahtar satırın yeni elemanları çarpılır.	-1,0	0	0	1	0,7	-0,3	0	4
x1 in yeni değerleri= eski değer +(anahtar sütündaki değeri*anahtar satırın yeni elemanı)		1,0	0,0	0,0	-0,7	-0,7	1,0	4,0

Çizelge 3.5. Üçüncü iterasyon

		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	Çözüm vektörü
	C_j	85000	75000	70000	0	0	0	
x_3	70000	0	0	1	0,7	-0,3	0	4
x_2	75000	0	1	0	0,4	1,4	-1	5
x_1	85000	1,0	0,0	0,0	-0,7	0,7	1,0	4,0
	Z_j	85000	75000,0	70000,0	19500,0	143500,0	10000,0	995000,0
	$C_j - Z_j$	0	0,0	0,0	-19500,0	-143500,0	-10000,0	

Maksimum sorularda $C_j - Z_j$ satırındaki elemanların tümünün sıfır ya da negatif olması ve minimum sorularda ise $C_j - Z_j$ satırındaki elemanların tümünün sıfır ya da pozitif olması optimizasyonu sağlar. Örneğimiz incelendiğinde $C_j - Z_j$ satırındaki tüm elemanlar 0 ya da negatif olduğu görülmektedir. Buradan da optimum çözüme ulaşıldığı söylenebilir.

$x_3 = 4, x_2 = 5$ ve $x_1 = 4$ olmak üzere $Z_{maks} = 995000$ olarak elde edilmiştir.



Şekil 3.21. Doğrusal programlama metodu

Endüstride doğrusal(lineer) programlama metodu ile birçok farklı problem kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu problemlerin matematiksel ifadesi, her zaman doğrusal programlama metodunu tam olarak yansıtmayabilmektedir. Genellikle modeller hipoteze dayalı bir yaklaşımdır. Ancak bu modeller işletme ve yönetim için çok yararlı neticeler oluşturmaktadır. Modellerde aranan şey, modelin tutarlı bilgiler içermesidir. Bu bilgiler mühendislik gibi pratik alanlar için yol göstericidir. Şekil 3.21’de verilen akış döngüsüne bakıldığında, DP modeli için öncelikle problemin tanımlanması, varsayım ve hipotezlerin değişkenler dikkate alınarak kısıtlarla sınırlandırılması, matematiksel bir çözüm yönteminin oluşturulması ve elde edilen bu çözümün analiz edilerek yorumlanması gerekmektedir.

3.11. Kısıtlı Optimizasyon

Kısıtlı optimizasyon, bir optimizasyon probleminin belirli kısıtlar veya kısıtlamalar altında çözülmeye çalışıldığı bir matematiksel optimizasyon alt dalıdır. Bu tür kısıtlamalar, bir değişkenin alabileceği değer aralıklarını sınırlandırabilir veya optimizasyonun belirli koşulları karşılaması gerektiğini belirtebilir.

Tanım 3.11.1 (Kısıtlı Optimizasyon Problemi)

$S \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, Genel bir optimizasyon problemini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$\begin{aligned} & \text{maks } f(x) & \text{min } f(x) \\ & \tau_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s, \quad \text{veya} \quad \tau_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, s, \\ & \rho_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, t & \rho_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, t \end{aligned} \quad (3.26)$$

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

x : Karar değişkeni

$f(x)$: Hedef/amaç fonksiyonu

$\tau_j(x) \leq 0$: Eşitsizlik kısıtları

$\rho_k(x) = 0$: Eşitlik kısıtları

olarak adlandırılır.

Fonksiyonun optimumu, kısıtların tümünün değişkenlerinin arasında yer alır.

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tau_j(x) \leq 0, \rho_k(x) = 0, j = 1, \dots, s, k = 1, \dots, t\}$ ifadesine uygun çözüm bölgesi denir. Kısıtları sağlayan herhangi bir noktaya uygun nokta adı verilir (Özturan, 2019).

Tanım 3.11.2 (Kısıtsız Optimizasyon Problemi)

$S = \mathbb{R}^n$ olmak üzere, (4.17) denklemi kısıtsız optimizasyon problemi olur.

3.11.1. Eşitlik Kısıtlı Çok Değişkenli Optimizasyon

Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon, bir fonksiyonun belirli sayıda değişkeninin bir dizi eşitlik kısıtı altında maksimum ya da minimum değerinin bulunmasına odaklanan bir matematiksel optimizasyon problemidir. Bu tür bir problemin genel formülü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \min f = f(x) \\ & g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak tanımlanır.

Burada, $f(x)$ optimize edilmek istenen objektif fonksiyonudur ve x , değişkenlerin bir vektörüdür. $g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ olarak belirlenmiş olan eşitlik kısıtlarıdır. Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon problemleri, birçok uygulama alanında karşılaşılan problemlerdir.

Bu tür problemler genellikle sayısal optimizasyon yöntemleri kullanılarak çözülür. Bu yöntemler, doğrudan çözüm algoritması olarak bilinen yöntemleri, iteratif çözüm yöntemleri ve meta-sezgisel optimizasyon yöntemlerini içerir. İyi bir çözüm bulmak için, problemin yapısı ve boyutuna bağlı olarak farklı yöntemler kullanılabilir. Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon, bir dizi eşitlik kısıtı altında bir amaç fonksiyonunu maksimize veya minimize etme problemini çözmeyi amaçlayan bir matematiksel optimizasyon yöntemidir. Bu tür problemler, mühendislik, finans, ekonomi gibi birçok farklı uygulama alanında karşılaşılabılır.

Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon problemlerinde, amaç fonksiyonu ve kısıtlar genellikle matematiksel ifadeler şeklinde verilir. Amaç fonksiyonu, genellikle bir dizi bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyondur ve bu değişkenleri optimize etmek istenir. Kısıtlar ise, genellikle eşitlikler şeklinde verilir ve belirli bir dizi değişkene ilişkin sınırlamalar koyar.

Eşitlik kısıtlı optimizasyon problemleri genellikle Lagrange çarpanları veya KKT (Karush-Kuhn-Tucker) koşulları gibi yöntemlerle çözülür. Bu yöntemler, Lagrange çarpanları veya Lagrange fonksiyonlarını kullanarak hem hedef fonksiyonunun hem de eşitlik kısıtlarının aynı anda optimize edildiği noktaları bulmayı sağlar (Nocedal et al., 2006).

Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon problemlerinin çözümü için birçok yöntem vardır, ancak bunlar arasında en yaygın olanı Lagrange çarpanları yöntemidir. Bu yöntem, kısıtların birinci dereceden türevlerine dayanır ve birçok uygulama alanında etkili bir şekilde kullanılabilir (Boyd, 2009).

Eşitlik kısıtlı çok değişkenli optimizasyon problemleri, gerçek dünya problemlerini modellemek için sıklıkla kullanılır ve genellikle optimize edilmesi gereken birçok değişken içerirler. Bu nedenle, bu problemler için verimli ve etkili bir çözüm yöntemi kullanmak önemlidir (Bazaraa, 2006).

Denklem (3.27)'deki $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $m \leq n$ olur. $m > n$ olması durumunda çözüm yoktur. Bu tür çözümler için geliştirilen çeşitli optimizasyon yöntemlerinden en kullanışlı olanı Lagrange çarpanları yöntemidir.

3. 11. 2. Langrange arpanları Yöntemi

Lagrange arpanları, matematikte çoklu değişkenli fonksiyonların optimizasyonu için kullanılan bir tekniktir. Bu yöntem, bir fonksiyonun optimizasyonunu bir dizi kısıtlama altında yapmayı mümkün kılar.

Optimizasyon problemleri, genellikle bir amaç fonksiyonunu maksimize veya minimize etmek amacıyla bir veya daha fazla kısıtlama içerir. Bu kısıtlamalar, bütçe sınırlamaları, üretim kapasitesi veya zaman sınırları gibi çeşitli faktörlerden kaynaklanabilir. Lagrange arpanları, bu tür kısıtlamaları amaç fonksiyonuna dahil ederek, amaç fonksiyonunu optimize etmeden ve herhangi bir kısıtlamayı ihlal etmeden bu tür problemleri çözmeye yardımcı olur.

Örneğin, bir firma üretim maliyetlerini en aza indirmek isterken üretim miktarıyla ilgili sınırlamalarla arşılaşabilir. Bu sınırlamalar üretim kapasitesi veya hammadde miktarı gibi faktörlerden kaynaklanabilir. Firma, Lagrange çarpanlarını kullanarak ve üretim sınırlamalarını göz önünde bulundurarak amaç fonksiyonunu minimize etmek için en uygun üretim miktarını bulabilir.

Lagrange arpanları, bir çoklu değişkenli fonksiyonun optimizasyonunu kolaylaştırdığı için ekonomi, mühendislik, fizik ve diğer alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Lagrange arpanı, bir optimizasyon problemi sırasında kısıtlamaların entegre edildiği bir matematiksel tekniğe atıfta bulunur. Bu yöntem, bir amaç fonksiyonunun koşullar altında maksimum veya minimum değerini bulma sürecine yardımcı olur. Lagrange arpanı, kısıtlamalara ceza uygulayarak amaç fonksiyonunun, belirli kısıtlamalar altında maksimum veya minimum değerini hesaplamayı hedefler. Bu yöntem, kısıtlama koşullarını Lagrange çarpanlarıyla birleştirerek, kısıtlamaları amaç fonksiyonu içinde yeni bir formölasyonla birleştirir ve bu şekilde, kısıtlamaları doğrudan dahil etmeden amaç fonksiyonu için yeni bir yaklaşım sunar.

Optimizasyon problemlerinin çözümünde, Lagrange arpanı ile birinci dereceden bir denklem sistemini çözmek gerekir. Bu sistemdeki denklemler, ana fonksiyon ve Lagrange arpanı kullanılarak türetilir ve sonunda, türevleri sıfır olan ana fonksiyon ve Lagrange çarpanının birleşimi bir çözüm oluşturur. Lagrange arpanı, optimizasyon problemlerinin birçok alanda kullanıldığı için oldukça faydalı bir yöntemdir.

Sonuç olarak, Lagrange çarpanı yöntemi, optimizasyon problemlerinde kısıtlamaların göz önüne alınmasını sağlar ve bu kısıtlamalar altında bir fonksiyonun maksimum veya minimum değerini bulmamıza yardımcı olur. Bu yöntem, optimize edilen bir fonksiyonun kısıtlamalarını hesaba katarak kullanılan bir tekniktir. Bir optimizasyon problemi verildiğinde, bu problem Lagrange çarpanlarının kullanılmasıyla bir Lagrange fonksiyonuna dönüştürülebilir. Bu Lagrange fonksiyonu, hem orijinal fonksiyonun hem de kısıtlamaların birleşimini içerir.

Bir optimizasyon problemi için Lagrange çarpanlarını kullanarak çözüm adımları şu şekildedir:

1. Optimizasyon problemi belirlenir ve kısıtlar açıkça ifade edilir.
2. Lagrange fonksiyonu oluşturulur. Bu, orijinal fonksiyon ile kısıtların birleşiminden oluşur.
3. Lagrange fonksiyonunun türevleri hesaplanır.
4. Türevleri sıfıra eşitler ve bu denklemler çözülür. Bu, kısıtlar altında en yüksek veya en düşük değerin bulunması için gereklidir.
5. Elde edilen değerler, orijinal fonksiyona yerleştirilerek optimize edilmiş değerler bulunur.

Bu adımlar, Lagrange çarpanlarını kullanarak bir optimizasyon problemi çözümü için tipik bir yaklaşımdır. Ancak, daha karmaşık optimizasyon problemleri için farklı teknikler ve yaklaşımlar kullanılabilir.

Lagrange optimizasyonu, kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntem, kısıtlar altında optimize edilen bir hedef fonksiyonunun çözümünü bulmaya yardımcı olur. Lagrange optimizasyonu, matematiksel Lagrange çarpanları kullanarak hem hedef fonksiyonu hem de kısıtları aynı anda ele alır (Gill, 1981).

Lagrange optimizasyonu, bir hedef fonksiyonunun maksimum veya minimum değerini bulmaya çalışırken, bir veya daha fazla kısıtın altında optimize edilmesi gereken durumları ele alır. Bu kısıtlar eşitlik veya eşitsizlik şeklinde ifade edilebilir.

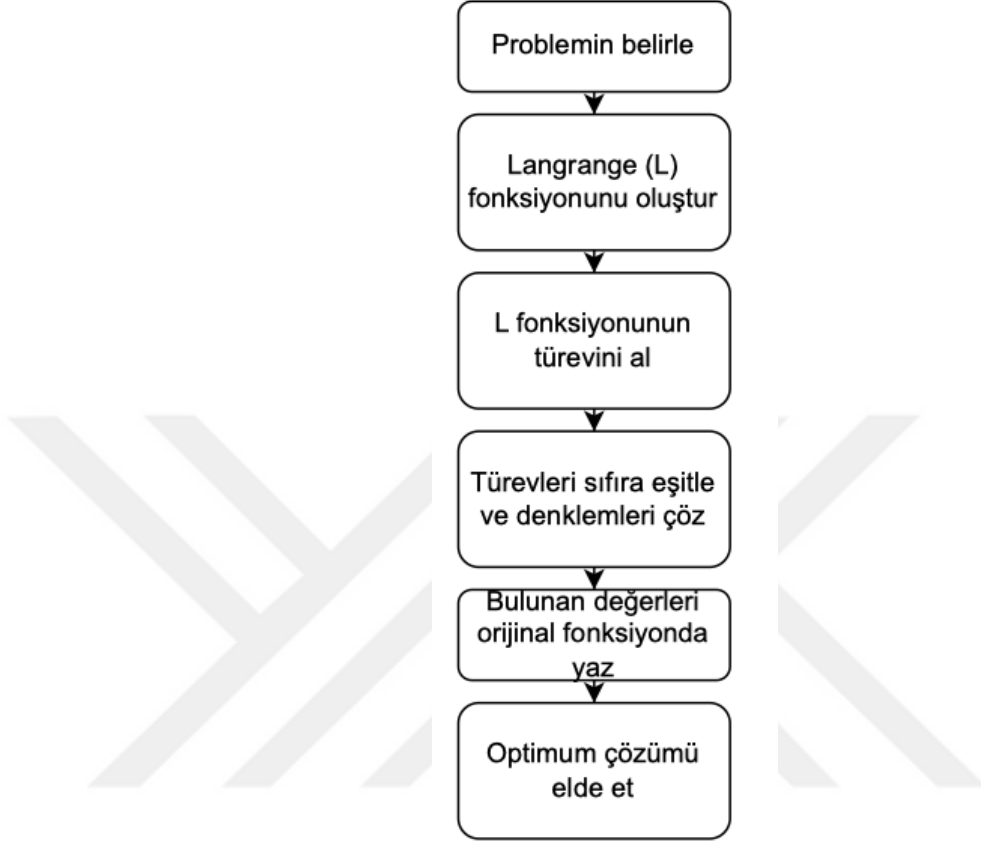
Lagrange optimizasyonu, bir Lagrange fonksiyonu veya Lagrange denklemi oluşturarak çalışır. Lagrange fonksiyonu, hedef fonksiyonun kısıtlarla birleştiği bir

yapıdır. Bu fonksiyon, hedef fonksiyona ve kısıtlara ilişkin değişkenlerin ve Lagrange çarpanlarının kullanılmasıyla elde edilir (Nocedal et al., 2006).

Lagrange denklemi, Lagrange fonksiyonunun türevinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir. Bu denklem, hedef fonksiyonunun türeviyle kısıtların türevlerinin ağırlıklı toplamının sıfıra eşitlenmesini ifade eder. Lagrange denklemi, bir sistem denklemi olarak görülebilir ve çözümü, hedef fonksiyonunun ve kısıtların birlikte optimize edildiği noktaları sağlar.

Lagrange optimizasyonu, genellikle analitik çözüme yönelik kullanılır. Bu yöntem, çeşitli matematiksel teknikler ve özel durumlar için çözüm algoritmaları ile birleştirilebilir. Lagrange optimizasyonu, ekonomi, mühendislik, fizik, istatistik ve diğer birçok alanda kullanılan kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan bir araçtır (Bazaraa, 2006).

Özetlemek gerekirse, Lagrange optimizasyonu, kısıtlı optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan bir matematiksel yöntemdir. Hedef fonksiyonun ve kısıtların aynı anda ele alınması, Lagrange fonksiyonunun oluşturulması ve Lagrange denklemi kullanılarak çözümün bulunmasıyla gerçekleştirilir (Bertsekas, 2016).



şekil 3.22. Lagrange cıarpanlarını kullanarak optimize etme

Çok değişkenli fonksiyonlarda bu fonksiyonları sınırlayan bir denklem üzerinde, fonksiyonun maksimum ya da minimum noktalarını bulmak için kullanılan bir yöntemdir. Denklem (3.27)'deki, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $m \leq n$ dir. $m > n$ durumunda problemin cözümü yoktur. Bu tür problemlerin cözümü için Lagrange cıarpanları yöntemi kullanılır.

(3.27) denklemi optimizasyon probleminde her bir $g_i(x)$ kısıtı için λ_i Lagrange cıarpanı kullanılarak

$$L(X, \lambda) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (3.28)$$

fonksiyonu oluşturulur. Bu fonksiyona Langrange fonksiyonu adı verilir. Langrange fonksiyonu yardımı ile kısıtlı problem, kısıtsız bir optimizasyon problemine dönüştürölür. $f(x)$ ve $g_i(x)$ sürekli ve türevlenebilir olmak üzere, $f(x)'$ in $g_i(x) = 0$ kısıtları altında

optimize edilmesi; $L(X, \lambda)$ Langrange fonksiyonunun optimize edilmesine eşdeğerdir. $L(X, \lambda)$ fonksiyonu için kısmi türevler alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$ denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü ile (x_0, λ_0) ile gösterilen kritik (durağan) nokta bulunur. Bulunan bu kritik noktanın yerel minimum ya da yerel maksimum olduğunu anlamak için $\mathcal{H}_B$ sınırlı Hessian matrisi

$$\mathcal{H}_B = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

biçiminde oluşturulur. Burada $0_{m \times m}$: $m \times m$ boyutlu sıfır matrisidir.

$$P = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \\ \vdots \\ \nabla g_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$Q = \left[\frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n$ anlamındadır.

$L(X, \lambda)$ Langrange fonksiyonu (x_0, λ_0) kritik noktasındaki $\mathcal{H}_B$ sınırlı Hessian matrisi için;

1. $\mathcal{H}_B$ sınırlı Hessian matrisinin $(2m + 1)$. esas minörü ile başlayan son $(n - m)$ tane esas minörünün işareti, $(-1)^{m+1}$ ile başlayarak sırasıyla değişiyorsa bulunan kritik nokta yerel maksimum noktadır.
2. $\mathcal{H}_B$ sınırlı Hessian matrisinin $(2m + 1)$. esas minörü ile başlayan son $(n - m)$ tane esas minörünün işareti, $(-1)^{m+1}$ ile aynı ise, bulunan kritik nokta yerel minimum noktadır.

1 ve 2 şartlarını sağlayan noktalar kesin optimal noktalardır. Bu şartları sağlamadığı halde optimal olan noktalar da olabilir. Bundan dolayı optimal nokta için gerek ve yeter şart şu şekilde verilebilir;

A matrisi, $A = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & P \\ P^T & Q - \mu \cdot I \end{bmatrix}$ olarak (x_0, λ_0) noktasında oluşturulur. Burada P ile Q daha önce tanımlamış olduğumuz matrislerdir. I birim matris ve μ ise bilinmeyen parametredir. Eğer $|A| = 0$ polinomunun $(n - m)$ kökünün hepsi pozitif ise x_0 noktası yerel minimum nokta olur. Eğer köklerin tamamı negatif ise x_0 noktası yerel maksimum nokta olur (Agarwal et al., 2023).

Örnek 3.11.1.

$$\min f(x) = 2.x_1^2 - 3.x_2^2 + 4.x_3^2 - 5.x_4^2$$

$$g_1(x) = 2.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3 - 3.x_4 - 5 = 0$$

$$g_2(x) = 4.x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 - 6.x_4 - 25 = 0$$

Yukarıdaki problemi Langrange çarpanları yöntemi ile çözüünüz.

$$L(X, \lambda) = 2.x_1^2 - 3.x_2^2 + 4.x_3^2 - 5.x_4^2 - \lambda_1.(2.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3 - 3.x_4 - 5) - \lambda_2.(4.x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 - 6.x_4 - 25)$$

Langrange fonksiyonundaki bilinmeyenlere göre ayrı ayrı kısmi türevler alınır;

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4.x_1 - 2.\lambda_1 - 4.\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -6.x_2 - 4.\lambda_1 + 3.\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 8.x_3 - 5.\lambda_1 - 2.\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_4} = -10.x_4 + 3.\lambda_1 + 6.\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(2.x_1 + 4.x_2 + 5.x_3 - 3.x_4 - 5) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(4.x_1 + 3.x_2 + 2.x_3 - 6.x_4 - 25) = 0$$

elde edilen denklem sisteminin ortak çözümünden (x_0, λ_0) kritik noktası,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta| = 6216$$

$$\Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 25 & 3 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta x_1| = -39200$$

$$\Delta x_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 25 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta x_2| = 111080$$

$$\Delta x_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 25 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta x_3| = -81080$$

$$\Delta x_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta x_4| = -23520$$

$$\Delta \lambda_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -6 & 25 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta \lambda_1| = -142560$$

$$\Delta \lambda_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |\Delta \lambda_2| = 32080$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-39200}{6216} = -6.3 \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{111080}{6216} = 17.9 \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-81080}{6216} = 13.04$$

$$x_4 = \frac{\Delta x_4}{\Delta} = \frac{-23520}{6216} = -3.8 \quad \lambda_1 = \frac{\Delta \lambda_1}{\Delta} = \frac{-142560}{6216} = -22.9 \quad \lambda_2 = \frac{\Delta \lambda_2}{\Delta} = \frac{32080}{6216} = 5.2$$

$$(x_0, \lambda_0) = (x_1, x_2, x_3, x_4; \lambda_1, \lambda_2) = (-6.3, 17.9, 13.04, -3.8; -22.9, 5.2)$$

olarak bulunur.

$$P = \begin{bmatrix} \nabla g_1(x) \\ \nabla g_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Langrange fonksiyonlarının bilinmeyenleri olup,

$$\mathcal{H}_B = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & P \\ P^T & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\mathcal{H}_B$ sınırlı Hessian matrisinin $(2m + 1)$. esas minörü $[2 \times 2 + 1 = 5]$ ile başlayan son $(n - m)$ tane $[4 - 2 = 2]$ tane esas minörünün işaretine bakılacak. Yani 5. ve 6. esas minörlerinin işaretine bakılacak.

Beşinci esas minörü:

$$5. \text{Minör} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow |5. \text{minör}| = -540 \text{ (negatif)}$$

Altıncı esas minörü:

$$6. \text{minör} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow |6. \text{minör}| = -1224 \text{ (negatif)}$$

Beşinci ve altıncı esas minörlerinin işaretleri, $(-1)^2 = 1$ işaretinden farklıdır. O halde $x_0 = (-6.3, 17.9, 13.04, -3.8)$ noktası yerel maksimum noktadır.

3.11.3. Karush- Kuhn- Tucker Optimallik Koşulları

Karush-Kuhn-Tucker (KKT) optimallik koşulları, kısıtlı optimizasyon problemlerinin optimum noktalarını belirlemek için kullanılan bir dizi gerekli koşuldur. KKT koşulları hem eşitsizlik kısıtları, hem de eşitlik kısıtları içeren genel bir optimizasyon probleminin çözümünü sağlar. KKT optimallik koşullarının bir minimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

1. İlk KKT Koşulu (Karşıtlık Koşulu): Gradienti sıfır olan noktalarda, yani $\nabla f(x^*) = 0$ optimal çözümün elde edildiği kabul edilir.
2. İkinci KKT Koşulu (Kısıtlılık Koşulu): Tüm kısıtların sağlandığı noktalarda, yani $h_i(x^*) = 0 ; i = 1, 2, \dots, m$ ve $g_j(x^*) \leq 0 ; j = 1, 2, \dots, p$ optimal çözümün elde edildiği kabul edilir.
3. Üçüncü KKT Koşulu (Lagrange Çarpanları Koşulu): Kısıtlı optimizasyon probleminde her bir kısıt için Lagrange çarpanları λ_i kullanılarak $\lambda_i h_i(x^*) = 0$ denklem sağlanmalıdır.
4. Dördüncü KKT Koşulu (Doğal Kısıtlar Koşulu): Lagrange çarpanları $\lambda_i \geq 0$ olmalıdır (Floudas et al., 2009).

KKT optimallik koşulları, bir optimizasyon probleminin çözümünü elde etmek için kullanılan güçlü bir araçtır. Bu koşullar hem kısıtsız optimizasyon problemlerini hem de kısıtlı optimizasyon problemlerini ele alır ve optimal çözümün varlığını ve özelliklerini belirlemeye yardımcı olur.

Eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarını dikkate alan optimizasyon problemini

$$Kısıt \begin{cases} \min_x f(x) \\ h_i(x^*) = 0 ; i = 1, 2, \dots, m \\ g_j(x^*) \leq 0 ; j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (3.31)$$

formunda ifade edebiliriz.

Bu koşullar, birçok optimizasyon yöntemi ve algoritması için temel prensiplerdir ve genellikle matematiksel optimizasyon teorisi ve uygulamalarında kullanılır. Amaç fonksiyonu ve kısıtlar birlikte değerlendirildiğinde Lagrange fonksiyonu;

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(x) \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlanır. Lagrange fonksiyonları, optimizasyon problemlerinin eşleniklerini tanımlamak için kullanılır. Çünkü amaç fonksiyonunda asıl amaç minimizasyon olarak tanımlanırken, Lagrangian eşlenik probleminde asıl amaç;

$$\left. \begin{array}{l} \max_x \theta(\lambda, \mu) \\ \mu \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır. $\theta(\lambda, \mu)$ fonksiyonu Lagrange fonksiyonun uç değerleri olup;

$$\theta(\lambda, \mu) = \inf_x L(x, \lambda, \mu) \quad (3.34)$$

denklemleri ile ifade edilir.

Böylece, (λ, μ) 'nin her değeri için, Lagrangian'ın en küçük değerini hesaba katarak, en küçük uç noktalardan en büyüğü seçilir. Bu açıdan bakıldığında, $\theta(\lambda, \mu)$ eşlenik fonksiyonu konveks ve Lagrange fonksiyonu konkav olarak tanımlanabilecek koşullar dikkate alındığında; Lagrange fonksiyonunun birinci türevi sıfırdır.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_k}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial h_i(x^*)}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \frac{\partial g_j(x^*)}{\partial x_k} = 0 \\ k = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

denklemleri elde edebilir. Görüldüğü gibi toplamda $(n + m + p)$ için n denklem bu sayede elde edilebilmektedir. Problemde verilen eşitlik kısıtları dikkate alındığında m denklemi şu şekilde yazılabilir;

$$h_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

denklemlerini çözmek için gereken ek denklem p , eşitsizlik kısıtlamaları dikkate alınarak yazılabilir;

$$\begin{aligned} \mu_j^* g_j(x^*) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \mu_j^* &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bu nedenle, $(n + m + p)$ bilinmeyen değişkenleri, denklem sistemi dikkate alındığında, doğrusal veya doğrusal olmayan bir denklem sistemini çözmek mümkündür (Pehlivanoglu, 2017).

Örnek 3.11.2.

$$Kısıt \begin{cases} \min_x f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - \frac{5}{2})^2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \end{cases}$$

biçiminde verilen lineer olmayan optimizasyon problemini, KKT şartlarını dikkate alarak çözüünüz.

Langrange fonksiyonu

$$L(x, \lambda, \mu) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - \frac{5}{2})^2 + \lambda(3x_1 + 4x_2 - 4) + \mu(5x_1 + 6x_2 - 30)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu fonksiyonun optimal noktada birinci mertebeden türevinin sıfır olması şartı dikkate alındığında;

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 3) + 3.\lambda + 5\mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2\left(x_2 - \frac{5}{2}\right) + 4.\lambda + 6\mu = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 4 \\ \mu(5x_1 + 6x_2 - 30) &= 0 \end{aligned}$$

Kısıtlara göre denklemi elde edilir.

Son olarak bulunan denklemlerde $\mu = 0$ olduğu kabul edilirse;

$$2x_1 + 3.\lambda = 6$$

$$2.x_2 + 4\lambda = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 = 4$$

denkleminin çözümü yapıldığında

$$x^*_1 = \frac{-18}{25}; x^*_2 = \frac{77}{50}; \lambda^* = \frac{12}{25}$$

eşitlikleri bulunan bu noktaya karşılık gelen amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= \left(\frac{-18}{25} - 3\right)^2 + \left(\frac{77}{50} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{12}{25} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{-18}{25}\right) + 4 \cdot \frac{77}{50} - 4\right) \\ &+ 0 \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{-18}{25}\right) + 6 \cdot \frac{77}{50} - 30\right) = 14,76 \end{aligned}$$

$\mu(5x_1 + 6x_2 - 30) = 0$ denkleminde $\mu \neq 0$ ve $(5x_1 + 6x_2 - 30) = 0$ olduğunda ise

$$2x_1 + 3\lambda + 5\mu = 6$$

$$2x_2 + 4\lambda + 6\mu = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 = 4$$

$$5x_1 + 6x_2 = 30$$

denkleminin çözümü yapıldığında

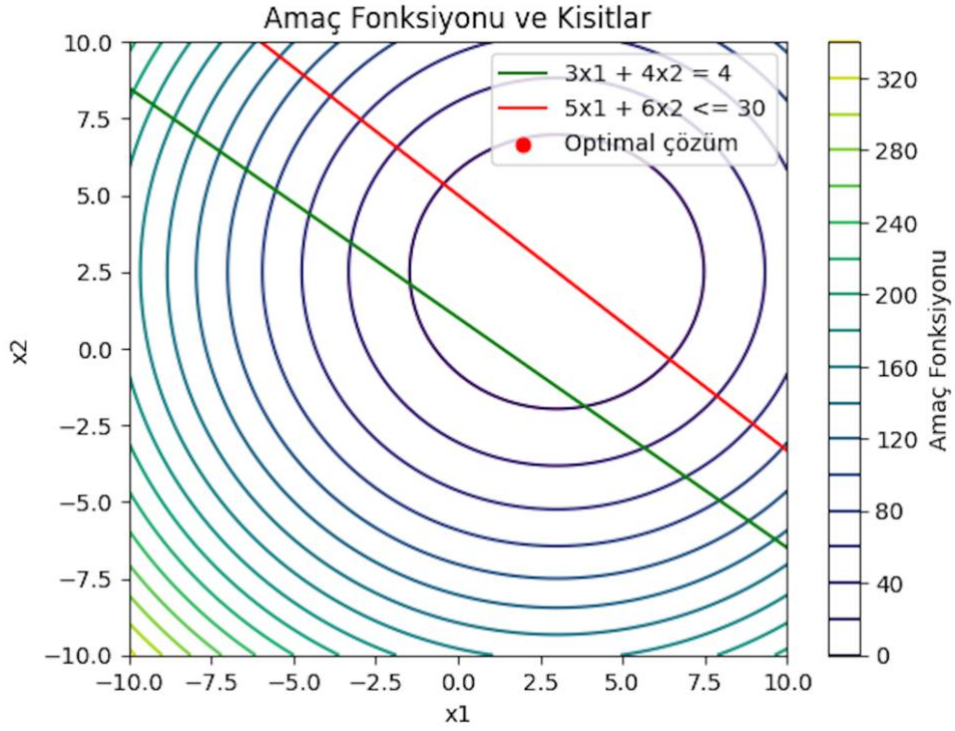
$$x_1^* = -48; x_2^* = -35; \lambda^* = \frac{85}{2}; \mu^* = -\frac{87}{2}$$

eşitlikleri bulunan bu noktaya karşılık gelen amaç fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x^*, \lambda^*, \mu^*) &= (-48 - 3)^2 + (-35 - \frac{5}{2})^2 + \frac{85}{2} \cdot (3 \cdot (-48) + 4 \cdot (-35) - 4) \\ &\quad - \frac{87}{2} \cdot (5 \cdot (-48) + 6 \cdot (-35) - 30) = 36287,25 \end{aligned}$$

olur. Burada $\mu_j^* \geq 0$ şartı sağlanmadığından ve ayrıca minimizasyon amaçlı sonuç çok büyük olduğu için optimal çözüm $f\left(\frac{-18}{25}, \frac{77}{50}, \frac{12}{25}, 0\right) = 14,76$ bulundu.

Ek bilgilerdeki P1 python programına göre çizilen contour grafiği Şekil 4.12’de verilmiştir. Bu grafik KKT metoduna göre verilen kısıtların optimum çözümünü göstermektedir.

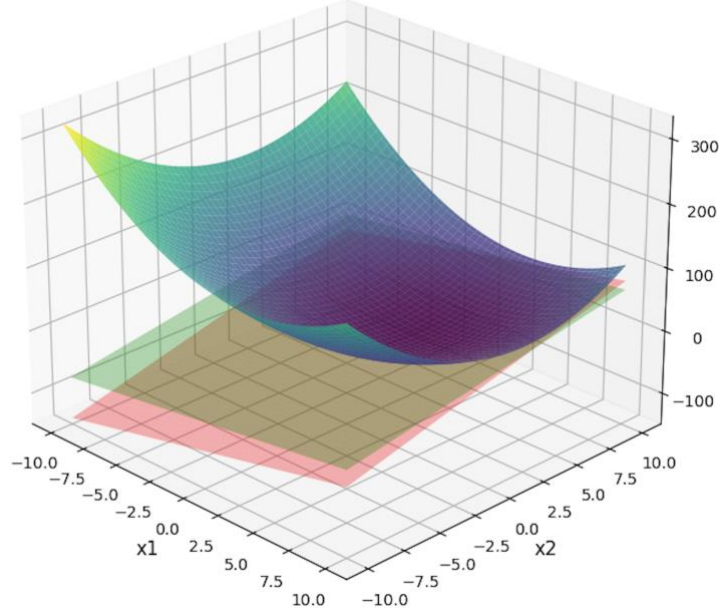


Şekil 3.23. KKT metodu için contour grafiği

Contour grafikleri, genellikle iki veya daha fazla değişkenin optimize edilmesi gereken bir fonksiyonla ilişkisini göstermek için kullanılır. Optimum çözüm, bu fonksiyonun en iyi değerini temsil eder. Optimum çözüm, genellikle bu eş değer çizgilerin en dar olduğu veya en düşük değeri temsil eden bir noktada bulunur (Srivastava Y, 2016). Grafik, bir optimizasyon problemini temsil ettiğinden, optimum çözümü, ilgili problemin en iyi sonucu veya en düşük hatayı temsil eden bir nokta olarak yorumlamamız gerekir. Grafiği tam olarak anlamak ve optimum çözümü yorumlamak için problem bağlamı ve hedefleri göz önünde bulundurmak önemlidir. Grafikten de görüleceği üzere optimal çözüm kırmızı çizginin üzerinde yer almıştır.

Ek bilgilerdeki P1 python programına göre çizilen contour grafiği Şekil 3.23'te verilmiştir.

Amaç Fonksiyonu ve Kısıtlar



Şekil 3.24. KKT metodu için surface grafiği

Yukarıdaki grafik RSM (Response Surface Methodology) grafik olarak adlandırılır. Bir süreci iyileştirmek veya optimize etmek, bağımlı değişken birkaç bağımsız değişkenden etkileniyorsa, sorunların modellenmesi ve analizi için de kullanılır. Bu grafikler; endüstri, ziraat, elektronik, tıp gibi gerçek yaşamın farklı alanlarında kullanılır, kısacası optimum çözüm alınmak istenen her yerde kullanılır.

Response Surface Methodology (Cevap Yüzey Metodolojisi: RSM), deneysel tasarım ve analiz tekniklerini kullanarak bir sistemin veya sürecin yanıt yüzeyini modellemek ve optimize etmek için kullanılan istatistiksel bir yaklaşımdır. RSM, çeşitli faktörlerin etkilerini belirlemek ve yanıt değişkenini optimize etmek için matematiksel modeller oluşturarak sistem davranışını anlamayı hedefler. RSM genellikle üretim, mühendislik, endüstriyel tasarım ve kalite kontrol gibi alanlarda kullanılır. Temel olarak, bir deneysel tasarım kullanarak bir sistemi deneylerle test eder ve elde edilen verileri analiz eder. Bu veriler daha sonra matematiksel bir model kullanılarak yanıt yüzeyi oluşturulur. Yanıt yüzeyi, sistemin faktörlerinin etkilerini ve bu faktörlerin optimal değerlerini gösterir.

RSM'nin başlıca adımları şunlardır:

1. Faktörlerin belirlenmesi: İncelenen sistem veya sürecin faktörleri belirlenir. Faktörler, sistem davranışını etkileyen bağımsız değişkenlerdir. Örneğin, bir üretim sürecinde faktörler sıcaklık, basınç, malzeme özellikleri vb. olabilir.
2. Deneysel tasarım: RSM için bir deneysel tasarım oluşturulur. Bu, faktörlerin belirli değerlerinde deneyler yapılmasını sağlar. Genellikle faktörlerin tam faktöriyel tasarımı veya Merkezi Kompozit Deneysel Tasarım (Central Composite Experimental Design :CCD) gibi optimizasyon teknikleri kullanılır.
3. Veri toplama: Deneysel tasarıma göre deneyler yapılır ve yanıt değişkeni ile faktör değerlerini ilişkilendiren veriler toplanır. Bu veriler, sistemin davranışını yansıtır.
4. Matematiksel model oluşturma: Toplanan veriler kullanılarak matematiksel bir model oluşturulur. Bu model, faktörlerin yanıt değişkeni üzerindeki etkisini açıklar. Tipik olarak, çoklu doğrusal regresyon veya çoklu polinom regresyon modelleri kullanılır.
5. Yanıt yüzeyi analizi: Oluşturulan matematiksel model kullanılarak yanıt yüzeyi analizi yapılır. Bu, faktörlerin optimal değerlerini ve yanıt değişkeninin maksimum veya minimum değerini belirlemeyi amaçlar.
6. Optimal çözüm: Yanıt yüzeyi analizi sonuçlarına göre, sistem veya süreç için optimal faktör değerleri belirlenir. Bu, yanıt değişkenini optimize etmeyi ve sistem performansını iyileştirmeyi sağlar.

RSM'nin avantajları arasında sistem davranışının kapsamlı bir şekilde anlaşılması, faktörlerin etkilerinin tespit edilmesi, deneysel denemelerin sayısının azaltılması ve süreç iyileştirmesi için optimizasyon olanağı bulunmaktadır (Karmoker et al., 2019).

RSM ilgilenilen bir yanıt değişkeninin çeşitli değişkenlerden etkilendiği problemlerin modellenmesi ve analizi için yararlı matematiksel ve istatistiksel tekniklerin bir koleksiyonudur ve amaç bu yanıtı optimize etmektir.

3.11.4. Gradyan Tabanlı Yöntemler

Gradyan tabanlı yöntemler, optimizasyon problemlerinde genellikle kullanılan etkili bir yaklaşımdır. İki yaygın gradiyent tabanlı yöntem olan Gradyan İnişi ve Konjugate Gradyan Yöntemi, iteratif olarak optimum noktayı bulmak için gradiyent vektörünü kullanırlar (Ayhan, 2015).

3.11.4.1. Gradyan İniş Yöntemi

x noktasını başlangıç noktası olarak, incelenen yere olan mesafeyi dr bir sonraki nokta olarak ve seyahat yönünü v_j olarak kabul edelim. Amaç fonksiyonu değeri konuma göre değişir ve aynı çizimde amaç fonksiyonu eşdeğerlik çizgileri de görülür. Buna bağlı olarak, dr' nin mevcut x noktasından v_1 yönünde hareket ettirilmesiyle elde edilen amaç fonksiyonun değeri, aynı mesafenin mevcut x noktasından v_2 yönünde gidilmesiyle elde edilen amaç fonksiyonu değerinden farklı olacaktır. Bu nedenle adım boyutu aynı olsa bile adımın yönü amaç fonksiyonu değeri için önemlidir. Başlangıç noktası ile varış noktası arasındaki yer değiştirme vektörü; $dx = dr \cdot v$ denklemi ile ifade edilir. Amaç fonksiyonundaki değişimi;

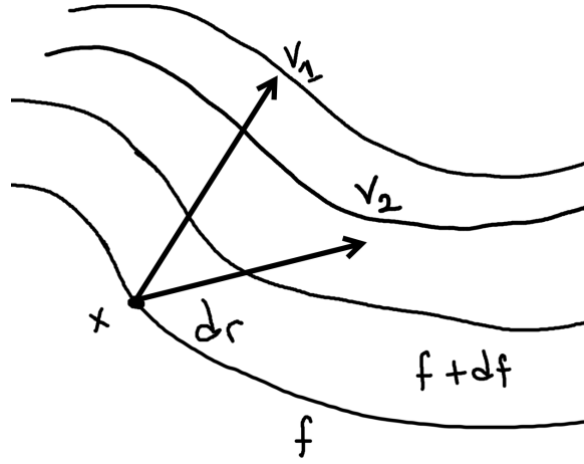
$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \nabla f^T \cdot dx \quad (3.37)$$

biçiminde yazılmalıdır. Amaç fonksiyonundaki değişim

dr adım büyüklüğüne göre $\frac{df}{dr} = \frac{\nabla f^T \cdot dx}{dr}$ şeklinde gösterilir. Yer değiştirme vektörüne göre

$$\frac{df}{dr} = \frac{\nabla f^T \cdot dr \cdot v}{dr} = \nabla f^T \cdot v \quad (3.38)$$

sonucu bulunur.



Şekil 3.25. Başlangıç noktası ve yön tanımlaması

Gradyan inişi, bir fonksiyonun minimum noktasını bulmak için kullanılan bir optimizasyon yöntemidir. Temel fikir, fonksiyonun minimum noktasında gradiyent vektörünün sıfır olacağıdır. Gradyan vektörü, bir fonksiyonun her bir değişkeni için kısmi türevlerin birleşimidir. Gradyan inişi, başlangıç noktasından başlayarak her adımda gradiyent vektörünün ters yönde bir adım atarak minimuma yaklaşır. Bu süreç, iteratif olarak tekrarlanarak optimum nokta bulunana kadar devam eder. Gradyan inişi, konveks fonksiyonların minimumunu bulmak için oldukça etkilidir. Gradyan İnişi yöntemi, optimizasyon problemlerinde kullanılan bir iteratif yaklaşımdır. Amaç, bir fonksiyonun minimum noktasını bulmaktır. Gradyan inişi yöntemi, fonksiyonun belirli bir noktadaki gradiyent vektörünün ters yönde ilerleyerek minimuma doğru yaklaşmayı hedefler.

Gradyan vektörü, bir fonksiyonun her bir değişkeni için kısmi türevlerin birleşimidir. Bir fonksiyonun gradiyenti, o noktadaki en dik tırmanma yönünü gösterir. Gradyan inişi yönteminin temel fikri, minimum noktasında gradiyent vektörünün sıfır olacağıdır.

Gradyan inişi yönteminin adımları genellikle şu şekildedir:

1. Başlangıç Noktası: Optimizasyon süreci bir başlangıç noktasıyla başlar.
2. Gradyan Hesaplama: Başlangıç noktasında fonksiyonun gradiyent vektörü hesaplanır.
3. Yön Belirleme: Gradyent vektörü ters yöne alınarak ilerleme yönü belirlenir. Bu, minimuma doğru adım atmayı sağlar.

4. Adım Büyüklüğü Belirleme: Her adımda, ne kadar ilerleneceği belirlenmelidir. Bu adım büyüklüğü, öğrenme oranı olarak da adlandırılır ve optimizasyon sürecinin hızını etkiler.
5. Yeni Nokta Hesaplama: Adım büyüklüğü ile birlikte, yeni nokta hesaplanır ve eski noktanın üzerine eklenir.
6. Durma Koşulu Kontrolü: Durma koşulları, optimizasyon sürecinin ne zaman sona ereceğini belirler. Bu koşullar genellikle maksimum iterasyon sayısı, minimum adım büyüklüğü veya belirli bir hedef fonksiyon değeri olabilir.
7. İterasyon: 2. adımdan itibaren 6. adıma kadar olan adımlar, durma koşulu sağlanana kadar tekrarlanır.

Gradyan inişi yöntemi, her adımda gradiyent vektörünün hesaplanması ve yeni noktanın belirlenmesi gibi işlemleri gerçekleştirerek iteratif olarak minimum noktaya yaklaşır. Bu yöntem, konveks fonksiyonların minimumunu bulmak için etkili bir yöntemdir. Ancak, yerel minimumlara takılabileceği veya yüksek boyutlu problemlerde yavaş hareket edebileceği durumlar olabilir. Gradyan inişi yöntemi, genellikle makine öğrenmesi ve veri analitiği gibi alanlarda kullanılan bir optimizasyon yöntemidir.

Örnek 3.11.3.

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 6$ fonksiyonunu gradyan inişi yöntemine göre inceleyelim.

Başlangıç Noktası: Başlangıç noktasını herhangi bir x değeri olarak seçilmelidir örnek olarak $x = 2$ seçilirse,

Gradyan Hesaplama: Fonksiyonun gradiyentini hesaplayalım. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$ olduğu için, gradiyent vektörü burada $3x^2 - 6x - 4$ olacaktır. Başlangıç noktasında gradiyent değeri $3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 4 = -4$ olur.

Yön Belirleme: Gradyent vektörünü ters yöne alarak ilerleme yönünü belirleyelim. Minima doğru ilerlemek istediğimiz için gradiyent vektörünün negatifini alalım. Yani, yön 4 olacaktır.

Adım Büyüklüğü Belirleme: Adım büyüklüğü olarak 0,1 seçelim. Bu, her adımda ne kadar ilerleneceğini belirler.

Yeni Nokta Hesaplama: Başlangıç noktasından adım büyüklüğü ve yön ile ilerleyerek yeni noktayı hesaplayalım. Yani, $x = 2 - (0,1) \cdot 4 = 1,6$ olur.

Durma Koşulu Kontrolü: Burada, istediğimiz minimum noktanın yakınında olduğumuzu görmek için bir durma koşulu belirleyebiliriz. Örneğin, bir eşik değeri belirleyerek, eşik değerine yaklaşıldığında optimizasyon sürecini sonlandırabiliriz.

İterasyon: 2. adımdan 6. adıma kadar olan adımları tekrarlayarak optimizasyon süreci devam ettirilmelidir.

Bu şekilde adımları tekrarlayarak iterasyonları sürdürebilir. Her adımda, yeni noktalar hesaplanacak ve minimuma yaklaştırmaya devam edilecektir. Gradyan inişi yöntemi, iterasyonları sürdürerek minimum noktaya ulaşır. Ancak, iterasyon sayısı ve adım büyüklüğü seçimi sonucunda farklı minimum noktalara ulaşabiliriz. Gradyan inişi yöntemi yerel minimum noktalarına takılma riski taşıdığından, farklı başlangıç noktaları ve adım büyüklükleri deneyerek farklı minimum noktalara ulaşmak mümkün olabilir.

3.11.4.2. Konjugate (Eşlenik) Gradyan Yöntemi

Konjugate gradyan yöntemi, ayrık ve sürekli optimizasyon problemlerini çözmek için kullanılan bir gradiyent tabanlı optimizasyon yöntemidir. Bu yöntem, fonksiyonun minimumunu bulmak için gradiyent vektörünü kullanır, ancak iteratif adımlarında daha sofistike bir yaklaşım benimser. Konjugate gradyan yöntemi, gradiyent vektörünü ağırlıklı olarak birbirleriyle konjugate olan vektörlerle kombinleyerek optimum noktaya yaklaşır. Bu yaklaşım, iteratif adımlarda daha hızlı yakınsama ve daha az adım sayısı gerektirir. Konjugate gradyan yöntemi, büyük ölçekli optimizasyon problemlerinde ve kısıtlı optimizasyon problemlerinde etkili bir şekilde kullanılabilir. Bu iki yöntem, farklı optimizasyon problemlerinde kullanılan ve iteratif olarak optimum noktaya yaklaşmayı sağlayan gradiyent tabanlı yöntemlerdir. Gradyan inişi daha basit bir yaklaşıma sahipken, konjugate gradyan yöntemi daha sofistike bir yaklaşım sunar.

Örnek 3.11.4.

$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 3y + 5$ iki değişkenli fonksiyonunu konjugate gradyan yöntemin kullanarak minimize ediniz.

Başlangıç noktası olarak $(x_0, y_0) = (0, 0)$ seçelim. Gradient vektörü

$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x + 2y - 4, 4y + 2x - 3)$ buradan da seçtiğimiz başlangıç değerlerini kullandığımızda

$\nabla f(0, 0) = (2.0 + 2.0 - 4, 4.0 + 2.0 - 3) = (-4, -3)$ olur. Başlangıç noktasından ilk yön, gradient vektörü ile aynı olacağından

$d_0 = (-4, -3)$ olur. Adım büyüklüğünü 0,1 olarak seçildiğinde her adımda ne kadar ilerleneceği belirlenmiş olur. Yeni nokta hesaplanırken $\frac{\partial f}{\partial x_i} = d_i$ olmak üzere

$$x_{i+1} = x_i + \alpha \cdot d_i \text{ ve } y_{i+1} = y_i + \alpha \cdot d_i$$

denklemleri kullanılırsa,

$$x_1 = x_0 + \alpha \cdot d_0 = 0 + (0,1) \cdot (-4) = -0,4$$

$$y_1 = y_0 + \alpha \cdot d_0 = 0 + (0,1) \cdot (-3) = -0,3$$

$$\nabla f(x_1, y_1) = (2 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (-0,3) - 4, 4 \cdot (-0,3) + 2 \cdot (-0,4) - 3) = (-5,4, -5)$$

Buna göre $d_1 = \nabla f(x_1, y_1) + \beta \cdot d_0$ olacaktır. Burada

$$\beta = \frac{(\|\nabla f(x_1, y_1)\|)^2}{(\|\nabla f(x_0, y_0)\|)^2} = \frac{(\sqrt{(-5,4)^2 + (5)^2})^2}{(\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2})^2} = 2,166$$

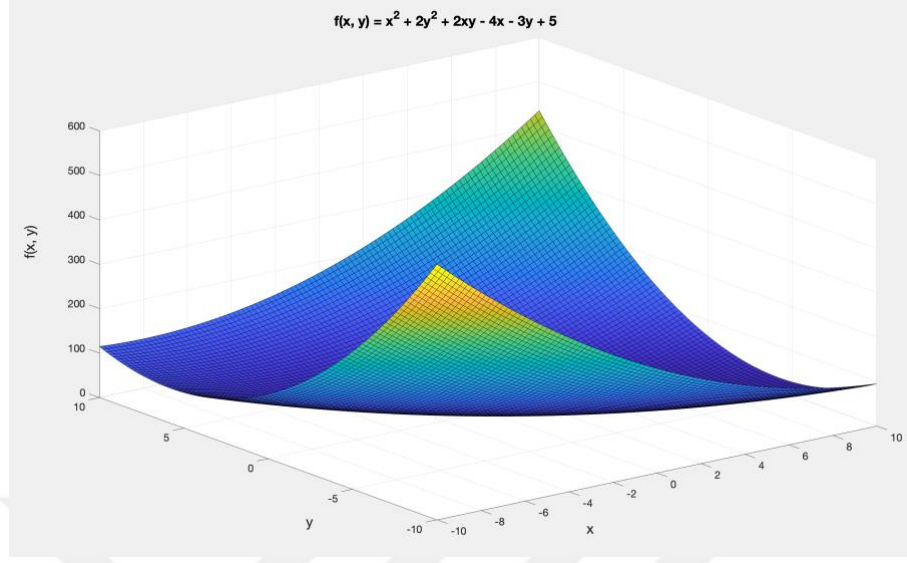
$$d_1 = (-5,4, -5) + 2,166 \cdot (-4, -3) = (-14,064, -11,498)$$

$$x_2 = x_1 + \alpha \cdot d_1 = -0,4 + (0,1) \cdot (-14,064) = -1,8064$$

$$y_2 = y_1 + \alpha \cdot d_1 = -0,3 + (0,1) \cdot (-11,498) = -1,4498$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x_2, y_2) &= (2 \cdot (-1,8064) + 2 \cdot (-1,4498) - 4, 4 \cdot (-1,4498) + 2 \cdot (-1,8064) - 3) \\ &= (-10,5124, -12,412) \end{aligned}$$

Bu adımları tekrar ederek optimize edilmiş bir minimum noktaya yaklaşabiliriz. İterasyonlar, belirli bir durma kriterine (örneğin maksimum iterasyon sayısı veya gradientinin normu belirli bir eşik değeri altına düşene kadar) ulaşıldığında sonlandırılabilir. Aşağıdaki Matlab kodları ile Şekil 4.16'da görüleceği üzere merkez nokta iterasyonları ile minimize edilmiştir.

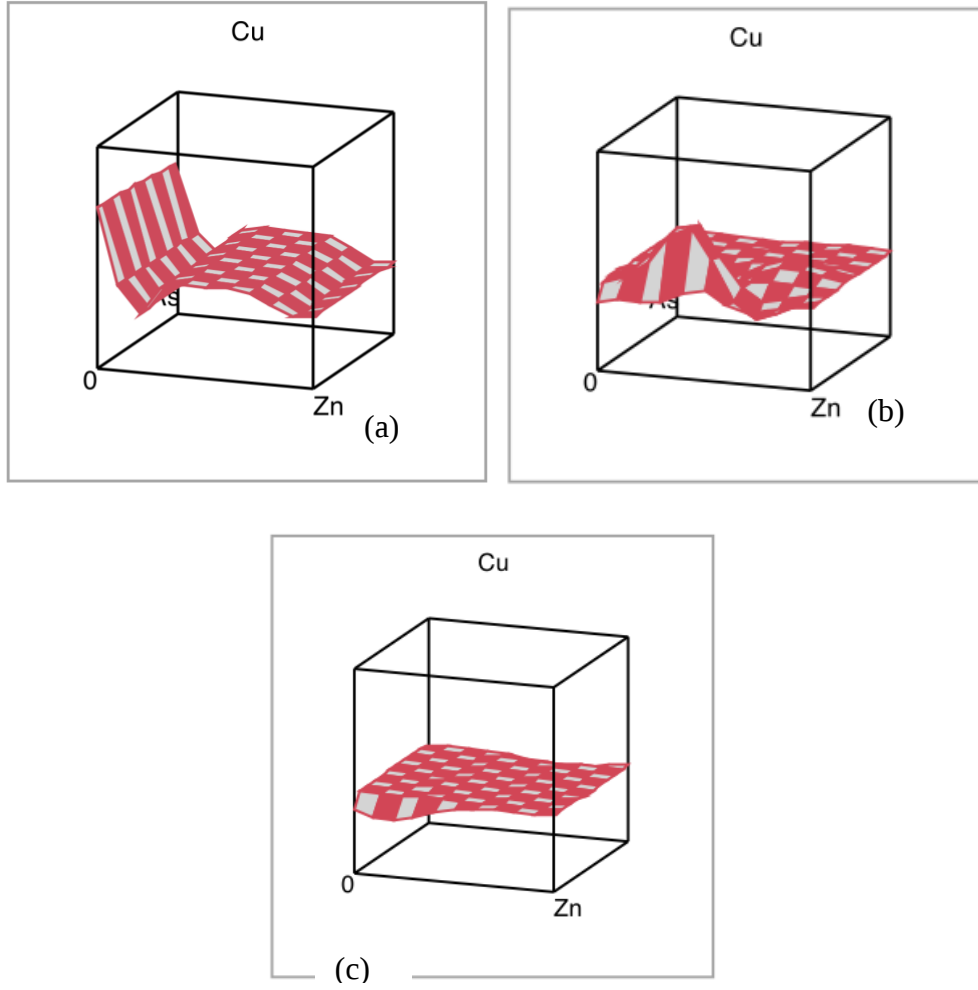


Şekil 2. Konjugate (eşlenik) gradyan yöntemi

Örnek 3.11.5.

Ek bilgiler Ek 1.1’de verilen kimyasal verilere göre RSM ve Contour grafiklerini çizip yorumlayınız.

Iğdır ili ve üç ilçesinde alınan kayısı örnekleri üzerinde yapılan incelemede (Yılmaz, 2022); kayısı çekirdeği, kayısı kabuğu ve kayısı meyve özünde bulunan çeşitli elementler incelenmiş ve bu elementler ile ilgili veriler Ek 1.1’de belirtilmiştir. Bu çizelgeye göre, 1: Aralık ilçesi, 2: Karakoyunlu, 3: Merkez, 4: Tuzluca ilçesini göstermektedir. Her lokasyonda üç ayrı inceleme yapılmıştır. Örneğin C11; kayısı çekirdeği üzerinde Aralık ilçesindeki 1 numaralı incelemeyi, C12; kayısı çekirdeği üzerinde Aralık ilçesindeki 2 numaralı incelemeyi, K32; kayısı kabuğu üzerinde Merkez ilçedeki 2 numaralı incelemeyi, M23; meyve özü üzerinde Karakoyunlu ilçesindeki 3 numaralı incelemeyi göstermektedir. Her bir inceleme için; Bakır (Cu), Çinko (Zn), Arsenik (As), Selenyum (Se), Kadmiyum (Cd), Civa (Hg), Kurşun (Pb) elementlerinin değerlerine bakılmıştır.



Şekil 3.27. Gaussian dağılımı grafikleri

Jackknife, bir örneklem veri seti üzerinde istatistiksel analiz yapmak ve tahmin hatalarını değerlendirmek için kullanılan bir örnekleme yöntemidir. Bu örnekleme yöntemine göre kayısı çekirdeği üzerinde Cu ile Zn ve As elementlerinin etkileşim değerlerine bakıldığında hem Zn hem de As için %75 gibi yüksek bir oranda olduğu görülmüştür. Toplam hassasiyet θ tahmin değerinin hassasiyetini gösteren bir ölçüdür. Toplam hassasiyet değeri Zn için %81,79 ve As için ise %93,29 olarak verilmiştir. Bu değer, θ tahmininin ne kadar kesin olduğunu ve tahminin hata aralığını belirlemeye yardımcı olan bir değeri ifade eder.

Çizelge 3.6. Jackknife yöntemine göre sonuçlar

	θ	Toplam Hasasiyet	Ana Etki	Zn Etkileşimi	As Etkileşimin
Zn	27,478203	0,8179891	0,0671042	.	0,7508849
As	2,2947837	0,9328958	0,1820109	0,7508849	.

Gaussian (Normal) dağılımı, 3 boyutlu şekillerin analizinde de kullanılmaktadır. 3 boyutlu bir şeklin analizinde, Gaussian dağılımı genellikle noktaların konumlarını ve yayılımlarını modellemek için kullanılır. Bu, şeklin geometrisi ve dağılımı hakkında çeşitli istatistiksel bilgiler sağlar.

3 boyutlu şeklin Gaussian dağılım ile analizi aşağıdaki şekillerde gerçekleştirilebilir:

Ortalama ve Merkez: Gaussian dağılım, şeklin merkezini (ortalama) belirlemek için kullanılmaktadır. Ortalama, şeklin yerini temsil eder ve şeklin genel konumunu göstermektedir.

Yayılma ve Kovaryans: Gaussian dağılım, şeklin yayılma ve kovaryansını belirlemek için kullanılmaktadır. Yayılma, şeklin genel boyutunu ve şekil değişkenliğini gösterirken, kovaryans, şeklin farklı boyutları arasındaki ilişkiyi ölçmektedir.

Konturlar ve Elipsler: Gaussian dağılım, 3 boyutlu şeklin konturlarını ve elipslerini oluşturmak için kullanılmaktadır. Şeklin Gaussian dağılımını temel alan konturlar ve elipsler, şeklin belli bir olasılık seviyesinde yayılımını göstermektedir.

Yükseklik ve Yoğunluk: 3 boyutlu bir şeklin yüksekliği veya yoğunluğu, Gaussian dağılımı kullanılarak analiz edilebilmektedir. Bu durum şeklin farklı bölgelerinin yoğunluklarını ve yüksekliklerini belirlemek için kullanılabilir.

Gaussian dağılımının 3 boyutlu şekiller üzerindeki kullanımı, şeklin istatistiksel özelliklerini anlamak, modellemek ve karşılaştırmak için değerli bir araç sağlamaktadır. Şeklin analizi, şeklinin tasarımı, kalite kontrolü, tanıma ve modelleme gibi birçok uygulama alanında kullanılabilir (Xia, 2020).

4. REGRESYON

Regresyon, istatistiksel bir analiz yöntemidir ve bir değişkenin diğer değişkenlerle ilişkisini modellemeyi amaçlamaktadır (Atasoy, 2001). Bu ilişkiyi anlamak için bir bağımlı değişkenin (sonuç değişkeni) bağımsız değişkenlerle (tahmin edici değişkenler) nasıl ilişkilendiğini görmek gerekiyor.

Regresyon analizi, bir bağımlı değişkenin tahmin edicilerine dayalı olarak nasıl değiştiğini anlamamıza yardımcı olur. Örneğin, bir şirketin satışlarını tahmin etmek isteyebiliriz ve bu durumda bağımlı değişken "satışlar" olurken, bağımsız değişkenler arasında reklam harcamaları, fiyat, hava durumu gibi faktörler olabilir.

Regresyon analizi, bu ilişkiyi matematiksel bir denklemle ifade ederek gerçekleştirir. En yaygın olarak kullanılan regresyon yöntemi, doğrusal regresyondur, ancak bazen doğrusal olmayan ilişkileri modellemek için doğrusal olmayan regresyon yöntemleri de kullanılır.

Regresyon analizinde amaç, bağımsız değişkenlerin değerleri verildiğinde bağımlı değişkenin tahminini yapmaktır. Bu tahminler, elde edilen regresyon denklemi veya modeli kullanılarak yapılır. Ayrıca, regresyon analizi ile değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamak ve hangi faktörlerin bağımlı değişkeni etkilediğini belirlemek için istatistiksel testler de gerçekleştirilebilir.

Genel olarak, regresyon analizi iki tip regresyon modeli kullanır:

1. Doğrusal Regresyon: Bu modelde, bağımlı değişkenin tahmini doğrusal bir fonksiyonla yapılır. İlişki, bağımsız değişkenlerin birinci dereceden terimleriyle ifade edilir. Doğrusal regresyon analizi, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenler tarafından ne kadar açıklandığını ve her bir bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisini belirlemek için kullanılır.
2. Doğrusal Olmayan Regresyon: Bu modelde, ilişki doğrusal bir fonksiyonla ifade edilemez. Bağımlı değişkenin tahmini için daha karmaşık bir fonksiyon kullanılır. Bu tür regresyon modelleri, eğimlerin veya etkilerin doğrusal olmadığı durumları ele almak için kullanılır.

Regresyon analizi, aşağıdaki amaçlar için kullanılır:

1. Tahmin: Regresyon analizi, bağımlı değişkenin değerlerini tahmin etmek için kullanılır. Model, bağımsız değişkenlerin değerleri verildiğinde bağımlı değişkenin tahminini yapar.
2. İlişkiyi Anlama: Regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamak için kullanılır. Bağımlı değişken üzerinde hangi bağımsız değişkenlerin etkili olduğunu belirlemek için katsayılar ve istatistiksel testler kullanılabilir.
3. Değişkenlerin Etkisini Ölçme: Regresyon analizi, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkisini ölçmek için kullanılır. Katsayılar, bağımsız değişkenlerin birim değişikliğinin bağımlı değişkende ne kadar değişiklik yaptığını gösterir.
4. Tahmin Değerlerinin Güven Aralığını Hesaplama: Regresyon analizi, tahmin edilen değerlerin güven aralığını hesaplamak için kullanılabilir. Bu, tahminlerin ne kadar doğru veya güvenilir olduğunu anlamaya yardımcı olur.

4.1. Lineer (Doğrusal) Regresyon

Basit doğrusal regresyon modeli

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (4.1)$$

Y : Bağımlı değişken

β_0 : Doğrunun y eksenin kestiği noktanın ordinat değeri

β_1 : Doğrunun eğimi (Regresyon katsayısı)

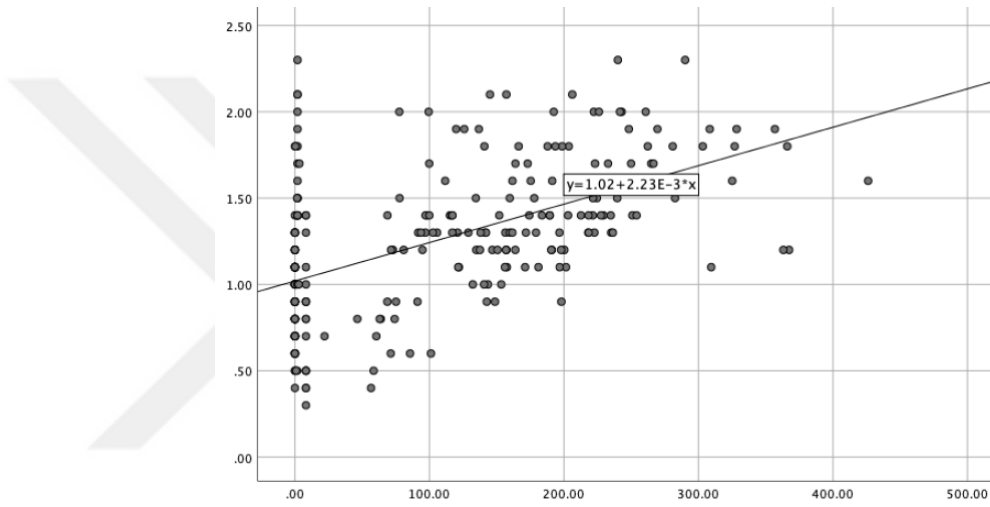
ε : Hata değişkeni

X : Bağımsız değişken

$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + e$ denklemi yukarıdaki denklemin tahmin denklemidir. $X = x$ olduğu zaman, diğer değişkenler Çizelge 4.1'deki gibi olur.

Çizelge 4.1. Regresyonda tahmini değerler

Değişken	Tahmini değeri
Y	$\hat{y}$
β_0	$\hat{\beta}_0$
β_1	$\hat{\beta}_1$
e : artık değer	



Şekil 4.1. Basit doğrusal regresyon modeli

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

formülü ile residüals (artıklar ya da hata) bulunur.

Hata kareler toplamı (residual sum of squares) (HKT ya da RSS)

$$\begin{aligned}
 RSS=HKT &= e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \\
 &= (y_1 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1)^2 + (y_2 - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_2)^2 + \dots + (y_n - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_n)^2 \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Hata kareleri minimum yapmak için en küçük kareler yöntemi (EKK) kullanılır. Bu yöntem ile hata kareler yönteminin türevi alınır böylelikle $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ katsayıları tahmin edilir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.3)$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad (4.4)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (4.5)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.6)$$

katsayıların varyansı aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$SE(\hat{\beta}_0)^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right] \quad (4.7)$$

$$SE(\hat{\beta}_1)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (4.8)$$

Artıkların standart hatası (Residual standart error) $RSE = \sqrt{\frac{RSS}{(n-2)}}$ formülü ile hesaplanır.

Güven aralıkları örneğin $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ için %95 güven aralığı

$$\hat{\beta}_1 \pm 2 \cdot SE(\hat{\beta}_1) \quad \hat{\beta}_0 \pm 2 \cdot SE(\hat{\beta}_0)$$

şeklinde olur.

Katsayıların anlamlılığı hipotez testleri ile yapılmalıdır.

H_0 : X ile Y arasında ilişki var. H_1 : X ile Y arasında ilişki yok.

Yani $H_0: \beta_1 = 0$ $H_1: \beta_1 \neq 0$

şeklinde yazılır ve hipotezin testi için ise

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{SE(\hat{\beta}_1)}, \quad |t_c| > t_{\frac{\alpha}{2}, n - (k + 1)}$$

Hesaplanan t değeri çizelgedeki t değerinden büyük ise H_0 hipotezi reddedilerek test edilen katsayının anlamlı olduğu söylenir.

Modelin anlamlılığı için F istatistiği değerine bakılmalıdır.

H_0 : Model anlamlı değildir

H_1 : Model anlamlıdır

k bağımsız değişken olmak üzere

SS_{REG} : Regresyon kareler toplamı (Regression sum of squares)

SS_{RES} : Artık Kareler Toplamı (Residuals Sum of Square)

TSS: (Total Sum of Square): Toplam Kareler Toplamı

RSS: (Residuals Sum of Square): Artık Kareler Toplamı

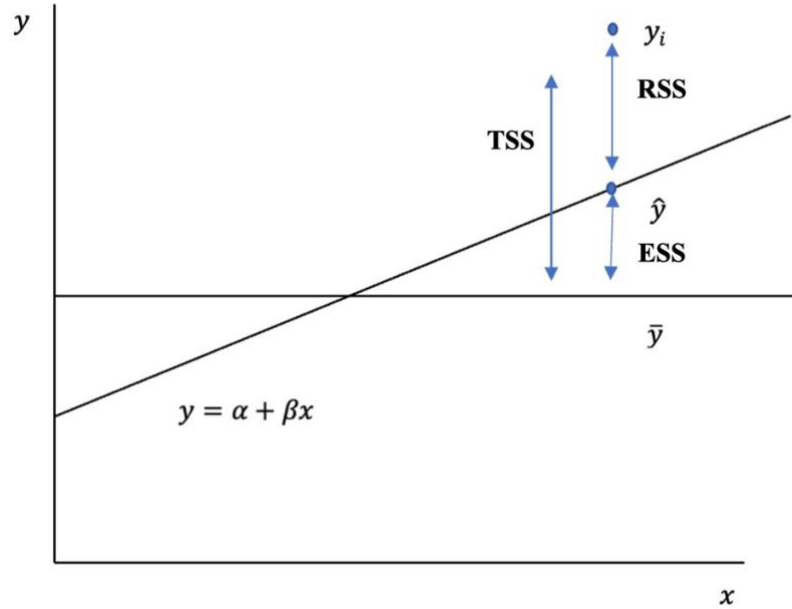
ESS: (Explained Sum of Square): Açıklanan Kareler Toplamı

$$F_c = \frac{\frac{SS_{REG}}{k}}{\frac{SS_{RES}}{n-(k+1)}} \quad (4.9)$$

%5 önem seviyesinde F tablo değeri $F_t = F_{0,05;k;n-(k+1)}$ $F_c > F_t$ olursa H_0

hipotezi reddedilerek modelin anlamlı olduğu belirtilir.

R^2 ile modelin açıklanması Şekil 5.2’de görüldüğü gibidir.



Şekil 4.2. R^2 ile modelin açıklayıcılığı

$$TSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad RSS = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2 \quad ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{y} - \bar{y})^2$$

modeldeki bağımsız değişkenlerin, bağımlı değişkenleri açıklama derecesi R^2 ile ölçülür. Bu değer 0 ile 1 arasında olan bir değerdir. R^2 nin 1'e yakın olması bağımsız değişkenlerin , bağımlı değişkenleri optimum seviyede açıkladığı anlamına gelmektedir.

$$R^2 = \frac{TSS-RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad (4.10)$$

X ile Y arasında korelasyon katsayısı

$$Cor(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.11)$$

formülü ile hesaplanmaktadır.

VIF: (Variance İnflation Factors) Varyans artış faktörleri

$VIF = \frac{1}{(1-R^2)}$ ve $T = 1 - R_i^2$ bu değerler $0 \leq R^2 \leq 1$, $1 \leq VIF \leq \infty$ ve $0 \leq T \leq 1$ aralıklarındadır. R^2 artarsa VIF artar, T ise azalır. VIF değeri sonsuza doğru arttıkça ve T değeri de sıfıra doğru azaldıkça çoklu bağlantının olma olasılığı artar. Eğer $VIF = 1$ ve $T = 1$ ise çoklu bağlantı yoktur. $1 < VIF \leq 5$ ise orta düzeyde çoklu bağlantı vardır. Modelde düzeltmeye gerek yoktur. $5 < VIF \leq 10$ ise yüksek düzeyde çoklu doğrusal bağlantı vardır. Modelde düzeltme yapılması gerekir. Çoklu doğrusal bağlantıya sebep olan bağımsız değişkenler düzeltilir veya modelden çıkarılır. $VIF > 10$ ise çok yüksek düzeyde çoklu doğrusal bağlantı vardır. Model geçersizdir. Çoklu doğrusal bağlantıya sebep olan bağımsız değişkenler düzeltilerek yeniden model oluşturulur (Karagöz, 2016).

Çoklu doğrusal regresyon, istatistiksel bir yöntemdir ve bağımlı değişken ile birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi analiz etmek için kullanılır. Bu yöntem, bir bağımlı değişkenin, birden fazla bağımsız değişken tarafından nasıl etkilendiğini anlamak için kullanılır. Çoklu doğrusal regresyon modeli, bağımlı değişkenin bir fonksiyonu olarak bağımsız değişkenlerin bir kombinasyonunu kullanır. Bu model, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi temsil eden bir denklemi tahmin etmek için kullanılır. Bir evin fiyatını tahmin etmek için çoklu doğrusal regresyon modeli kullanılabilir. Bağımlı değişken olan evin fiyatı, bağımsız değişkenler olarak o evin büyüklüğü, odalarının sayısı, konumu gibi faktörleri kullanarak bir denklemle tahmin edilebilir.

Çoklu doğrusal regresyon, veri analizinde geniş bir kullanım alanına sahiptir. Özellikle pazarlama, ekonomi, sosyal bilimler ve mühendislik gibi alanlarda sıkça kullanılır. Bu yöntem, bağımlı değişken ile birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek, tahminler yapmak ve kontrol faktörlerini dikkate alarak etkileri analiz etmek için kullanılır.

Çoklu doğrusal regresyon analizi, istatistiksel ölçütler kullanarak modelin kalitesini değerlendirmek için kullanılır. Örneğin, R^2 (R-squared) değeri, modelin bağımlı değişkendeki varyansın ne kadarını açıklayabildiğini gösterir. Ayrıca, katsayıların anlamlılığı, modelin güvenilirliği ve bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkileri hakkında bilgi sağlar.

Çoklu doğrusal regresyon analizi için veri ön işleme, model kurma, modelin istatistiksel analizi ve sonuçların yorumlanması gibi adımlar takip edilir.

Ancak, doğrusal regresyon modelleri, bazı varsayımlara dayanır. Bu varsayımlardan biri, hata terimlerinin (modelin tahmin hataları) normal dağılım göstermesidir. Ayrıca, bağımsız değişkenler arasında çoklu doğrusal ilişkilerin olmaması ve hata terimlerinin varyansının sabit olması gibi varsayımlar da bulunur. Bu varsayımların sağlanmaması durumunda, modelin sonuçları güvenilir olmayabilir ve yanlış sonuçlara yol açabilir. Bu nedenle, çoklu doğrusal regresyon analizinde sonuçları yorumlarken bu varsayımların göz önünde bulundurulması önemlidir.

i katılımcıları, $i = 1, \dots, n$; Y bağımlı değişkeni, X_1 ve X_2 bağımsız değişkenleri, β regresyon katsayılarını ve ε hata terimini temsil etmek üzere çoklu doğrusal regresyon modeli aşağıdaki gibi kurulabilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i \quad (4.12)$$

Örnek 4.1.1.

Iğdır iline ait 2001-2021 tarihleri arasındaki meteoroloji verileri kullanılarak çoklu doğrusal regresyon örneklendirilmiştir. Modelde kullanılan veriler şu şekilde olmuştur; bağımlı değişken “Aylık toplam yağış”, bağımsız değişkenler ise “Aylık ortalama rüzgâr hızı”, “Aylık ortalama nispi nem”, “Aylık ortalama sıcaklık” ve “Aylık toplam açık yüzey buharlaşması.” Bu veriler için SPSS programında

Analiz → Regresyon → Lineer aşamaları kullanıldığında Çizelge 4.2. ve Çizelge 4.3. sonuçları elde edilmiştir.

Çizelge 4.2. Meteoroloji veri sonucu 1

Faktörler	n	Ortalama	Std. Sapma
Y: Aylık toplam yağış	251	23,08	19,86
X1: Aylık ortalama nispi nem	251	54,71	11,69
X2: Aylık ortalama sıcaklık	251	13,19	10,31
X3: Aylık toplam açık yüzey buharlaşması	251	104,63	104,86
X4: Aylık ortalama rüzgar hızı	251	1,25	0,43

Çizelge 4.3. Meteoroloji veri sonucun 2

Faktörler	b_i	S_{b_i}	t	P-değeri	VIF değeri
Sabit	-13,227	14,819	-8,926	<0,001	
X1: Aylık ortalama nispi nem	1,774	0,182	9,743	<0,001	4,169
X2: Aylık ortalama sıcaklık	1,383	0,246	5,628	<0,001	5,908
X3: Aylık toplam açık yüzey buharlaşması	-0,530	0,022	-2,378	0,018	4,959
X4: Aylık ortalama rüzgar hızı	36,378	3,766	9,66	<0,001	2,461

$$Y = -13,227 + 1.774X_1 + 1,383X_2 - 0,530X_3 + 36,378X_4$$

Bağımlı değişken Y; $R^2 = 0,568$; $R^2_{adj} = 0,311$; $F = 29,229$ ($P < 0,001$)

b_i : regresyon katsayıları

S_{b_i} : regresyon katsayılarına ait standart hata, VIF değerleri <10 olduğundan bağımsız değişkenler arasında çoklu bağlantı olmadığını göstermektedir.

4.2. Doğrusal Olmayan Regresyon

Doğrusal olmayan regresyon, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemek için kullanılan bir istatistiksel yöntemdir. Bu yöntem, bağımlı değişkenin doğrusal bir ilişkiyle açıklanamadığı durumlarda kullanılır. Doğrusal regresyon modellerinden farklı olarak, doğrusal olmayan regresyon modelleri, daha genel ve esnek bir denklem yapısına sahiptir.

Doğrusal olmayan regresyon modelleri, doğrusal olmayan ilişkileri modellemek için kullanılan çeşitli matematiksel fonksiyonları içerebilir. Bu fonksiyonlar arasında polinomlar, üstel fonksiyonlar, logaritmik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, sigmoid fonksiyonlar gibi çeşitli matematiksel dönüşümler bulunabilir. Bu dönüşümler, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlerle olan ilişkisini daha doğru bir şekilde modellemek için kullanılır (Bates et al., 1988).

Doğrusal olmayan regresyon analizi, genellikle iteratif yöntemler veya en küçük kareler yöntemi gibi istatistiksel teknikler kullanılarak gerçekleştirilir. Modelin katsayıları ve hata terimi tahmin edilir ve modelin istatistiksel analizi yapılır. Yine, modelin kalitesini değerlendirmek için istatistiksel ölçütler kullanılır, örneğin, R^2 değeri veya AIC (Akaike Bilgi Kriteri) gibi ölçütler.

Doğrusal olmayan regresyon analizi, çeşitli alanlarda uygulama bulur. Örneğin, ekonomi, finans, tıp, biyoloji, mühendislik ve sosyal bilimler gibi birçok disiplinde kullanılır. Özellikle, karmaşık ilişkilerin olduğu durumlarda ve doğrusal olmayan veri yapılarıyla karşılaşıldığında doğrusal olmayan regresyon analizi önemli bir araç olabilir. Özetle doğrusal olmayan regresyon analizi, doğrusal olmayan ilişkileri modellemek için kullanılan bir istatistiksel yöntemdir. Doğrusal regresyon modellerinin sınırlamalarının üstesinden gelmek ve daha esnek bir model yapısı sağlamak amacıyla kullanılır.

Doğrusal olmayan regresyon, geleneksel doğrusal regresyonun aksine, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi doğrusal olmayan bir şekilde modellemeyi amaçlar. Doğrusal olmayan regresyonun bazı önemli konu başlıkları şunlardır;

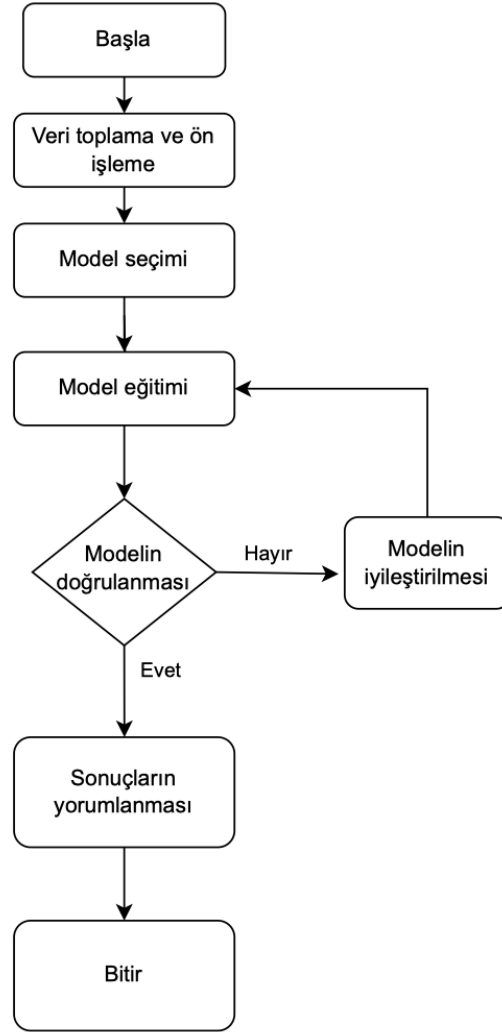
1. Polinom Regresyonu: Polinom regresyonu, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi bir polinom derecesiyle ifade eder. Bu yöntemde, polinom derecesi arttıkça modelin esnekliği artar, ancak aşırı uydurmayı (overfitting) da önlemek için dikkatli olunmalıdır.
2. Lojistik Regresyon: Lojistik regresyon, bir bağımlı değişkenin iki kategorik sınıf arasındaki olasılığını tahmin etmek için kullanılır. Bu yöntem, sigmoid fonksiyonunu kullanarak doğrusal olmayan bir sınıflandırma problemini çözer (Atasoy, 2001).
3. Karar Ağaçları: Karar ağaçları, bağımlı değişkeni bir dizi karar kuralına göre bölerek ve alt gruplara ayırarak tahmin yapar. Bu yöntem, veri setini daha küçük alt gruplara ayırmak ve non-lineer ilişkileri yakalamak için etkili olabilir (Atasoy ve ark., 2023).
4. Destek Vektör Regresyonu: Destek vektör regresyonu, bağımlı değişkenin çizilen destek vektörlerine olan uzaklığını minimize ederek lineer olmayan bir regresyon problemini çözer. Bu yöntem, aykırı değerlere ve gürültülü verilere karşı dayanıklı olabilir.
5. Radyal Temelli Fonksiyonlar (Radial Basis Functions (RBF)): RBF, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi radyal simetrik baz fonksiyonlarıyla ifade eder.

Bu yöntem, özellikle doğrusal olmayan ve aşırı uydurmanın olduğu veri setleri için etkili olabilir.

6. Yapay Sinir Ağları: Yapay sinir ağları, insan beyninin sinir hücrelerine benzer bir şekilde çalışan bir algoritma kullanır. Bu yöntem, birden çok gizli katman kullanarak karmaşık ve doğrusal olmayan ilişkileri modelleyebilir.

7. Kübik Spline Regresyonu: Kübik spline regresyonu, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi düz çizgilerle ifade eder. Bu yöntem, veri setini küçük parçalara böler ve her parçayı kübik bir fonksiyonla modellemek için kullanır (Şahin ve ark., 2010).

Bu, doğrusal olmayan regresyonun bazı önemli konu başlıklarını içeren bir liste olup, bu yöntemler doğrusal olmayan ilişkileri modellemek ve regresyon problemlerini çözmek için kullanılan yaygın tekniklerdir. Her bir yöntem, veri setinin özelliklerine ve problem gereksinimlerine bağlı olarak avantajları ve dezavantajlarına sahiptir.



Şekil 4.3. Regresyon analizi aşamaları

4.3. Ridge ve Lasso Regresyon

Ridge regresyon ve Lasso regresyon, regresyon analizinde kullanılan iki popüler düzenlileştirme (regularization) yöntemidir. Her ikisi de modelin aşırı uyum (overfitting) sorununu çözmek ve modelin genelleme yeteneğini artırmak için kullanılır. Temel farklılıkları, farklı düzenlileştirme terimleri kullanmalarındır.

4.3.1. Ridge Regresyon

Ridge Regresyon (Tikhonov düzenlileştirmesi): Ridge regresyon, doğrusal regresyonun bir türevidir ve L2 düzenlileştirme terimini kullanır. Bu yöntem, modeldeki katsayıları sıfıra yaklaştırarak aşırı uyumu azaltmaya çalışır. Ridge regresyon, her bir

katsayının karesini düzenleme terimine ekleyerek modeli düzenler. Bu şekilde, bağımsız değişkenler arasındaki çoklu korelasyonu azaltarak ve modelin genelleme yeteneğini artırarak istatistiksel olarak daha güvenilir tahminler elde edebilir (Hastie et al., 2015).

Ridge regresyonun avantajları şunlardır:

- Çoklu korelasyonlu değişkenlerin olduğu durumlarda etkili sonuçlar verir.
- Katsayıları sıfıra yaklaştırdığından, gereksiz değişkenleri elemek yerine onları küçültür, böylece daha genelleyici modeller oluşturur.
- Modeldeki katsayıların kararlılığını artırır.

4.3.2. Lasso Regresyon

Lasso Regresyon (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) da doğrusal regresyonun bir türevidir, ancak L1 düzenleme terimini kullanır. Lasso regresyon, modeldeki katsayıları sıfıra tamamen yaklaştırarak değişken seçimi yapar. Bu durum modeldeki gereksiz değişkenleri elemenin bir yoludur. Lasso regresyonu, katsayıları düzenleme terimiyle çarparak modeli düzenler.

Lasso regresyonun avantajları şunlardır:

- Değişken seçimini otomatik olarak yapar ve gereksiz değişkenleri tamamen sıfırlayabilir.
- Ridge regresyona kıyasla daha düzenli bir modele yol açabilir.
- Modeldeki gereksiz değişkenlerin etkisini azaltır.

Ridge regresyon ve Lasso regresyon arasındaki birkaç fark şunlardır:

- Ridge regresyon, katsayıları sıfıra yaklaştırmak için L2 düzenleme terimini kullanırken, Lasso regresyon L1 düzenleme terimini kullanır.
- Ridge regresyon, tüm katsayıları azaltırken Lasso regresyon bazı katsayıları tamamen sıfıra indirebilir.
- Lasso regresyon, değişken seçimini otomatik olarak yaparken Ridge regresyon her değişkeni azaltır.

Her iki yöntem de regresyon analizinde düzenleme teknikleri olarak kullanılır ve modelin genelleme yeteneğini artırırken, aşırı uyumu azaltmayı hedefler (Hastie et al., 2015).

5. MATERYAL ve METOT

5.1. Materyal

Çalışmada Iğdır iline ait 2001-2021 tarihleri arasındaki 20 yıllık; “Aylık toplam yağış miktarı ortalaması”, “Ortalama güneşlenme süresi”, “Ortalama yağışlı gün sayısı”, “En yüksek sıcaklık”, “En düşük sıcaklık”, “Havadaki nem oranı ortalaması”, “Rüzgâr hızı ortalaması” ve “Buharlaşma” verileri alınmıştır. Bu veriler Ek 1.2’de gösterilmiştir. Bu veriler için lineer regresyon modeli, ridge regresyon ve lasso regresyon modeli kurulmuştur.

5.1.1. Dünyada İklim Değişikliği ve Etkileri

IPPC 6. Değerlendirme Raporuna göre;

Bilim insanları, gezegenin insan faaliyetlerinden kaynaklanan ısınmasına şüphe duymamaktadır. İklimde hızlı ve kalıcı değişikliklerin olduğu ve bazı etkilerin geri dönüşümsüz olduğu vurgulanmaktadır. Bu da iklim değişikliğinin ciddiyetini ve insan faaliyetlerinin etkisini göstermektedir. İnsan kaynaklı emisyonların iklim sistemi üzerindeki etkilerini desteklemektedir. Bu emisyonlar, gezegenin daha az istikrarlı hale gelmesinde temel bir rol oynamaktadır. Bu da iklim değişikliğiyle mücadele etmenin önemini vurgulamaktadır. Gezegenin en az 1,5°C ısınacağı öngörüsüne dikkat çekilmektedir. En iddialı emisyon azaltım senaryosunda bile 2030'larda 1,5°C'nin üzerine çıkılacağı, ancak yüzyıl sonuna doğru sıcaklıkların tekrar düşeceği ifade edilmektedir. Metan gazı gibi sera gazlarına odaklanmanın önemi vurgulanmaktadır. Bu gazların yüksek sera etkisine sahip olması nedeniyle emisyonlarının azaltılması gerekmektedir.

İklim değişikliğinin doğal yaşamı olumsuz etkileyeceği kara ve okyanus ekosistemlerinin iklim sorununu çözmede sınırlı etkisi olduğu belirtilmektedir. Bu da doğal yaşamın korunmasının iklim değişikliğiyle mücadelede önemli bir faktör olduğunu göstermektedir.

Net sıfır emisyon planlarının hayata geçirilmesinin önemi vurgulanmaktadır. Karbondioksitin atmosfer dışında depolanmasına yönelik teknolojiler, bu planların önemli bir bileşeni olarak değerlendirilmektedir. Ancak bu teknolojilerin, hızlı ve derin emisyon azaltımlarıyla birlikte kullanılması gerektiği ifade edilmektedir. Karbon

bütçesine ilişkin öngörüler yapıldığı ve kalan karbon bütçesinde büyük bir değişiklik olmadığı belirtilmiştir. Bu da iklim değişikliğiyle mücadelede karbon emisyonlarının hızla azaltılması gerektiğini göstermektedir.

İklim değişikliği konusundaki bilimsel kanıtları ve uzman görüşlerini özetlemektedir. İnsan faaliyetlerinin gezegenin ısınmasında önemli bir rol oynadığı ve iklim değişikliğinin ciddiyetinin altını çizmektedir. Ayrıca, hızlı ve etkili önlemler alınmadığı takdirde iklim değişikliğinin etkilerinin geri dönüşümsüz olabileceği konusunda uyarıda bulunmaktadır (IPCC, 2023).

5.1.2. Türkiye'deki İklim Değişikliği ve Etkileri

Son yıllarda dünya genelinde iklim değişikliği, insanlığın en büyük meydan okumalarından biri haline gelmiştir. Küresel ısınma, sera gazı emisyonlarındaki artışlar ve doğal kaynakların sürdürülemez kullanımı gibi etmenler, iklim sistemini olumsuz etkilemektedir. Türkiye, bu küresel sorunun etkilerini hisseden ülkeler arasında yer almaktadır.

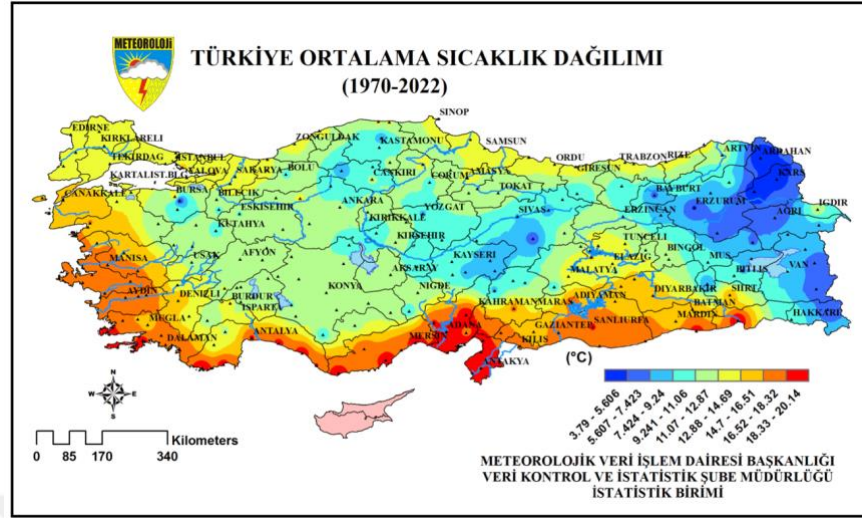
Şekil 5.1'de verilen haritada renk paleti ile belirtildiği gibi, 1 Ekim 2022-30 Nisan 2023 dönemini kapsayan su yılında, Türkiye genelinde yağışlar normal değerlerin altında gerçekleşmiştir. Bu dönemde Türkiye genelinde 374.1 mm yağış düşerken, normal değerler (1991-2020) 431.7 mm ve geçen yıl aynı dönemde ise 408.9 mm olarak kaydedilmiştir. Yağışlarda normal değerlere göre %13, geçen yılın aynı dönemine göre ise %9 oranında azalma olmuştur. Su yılı yağışları, Karadeniz Bölgesi dışındaki tüm bölgelerde normal değerlerin altında gerçekleşmiştir. En büyük azalma %27 oranında Marmara Bölgesi'nde görülmüştür. 2023 su yılında, Tekirdağ, Edirne, Çanakkale, Osmaniye, Hatay, Van, Ağrı ve Iğdır'ın doğu kesimlerinde normal değerlere göre %40'tan fazla azalma yaşanmıştır. Samsun, Ordu, Giresun, Erzincan, Tunceli, Elazığ ve Adıyaman çevrelerinde ise yağışlar %40'a kadar artmıştır. En yüksek yağış miktarı, Rize'de 925.0 mm olarak kaydedildi ve Tunceli'de normal değerlere göre %21 artış olmuştur. Iğdır ise en az yağış alan il olarak 158.8 mm yağış almış ve en büyük azalma %51 oranıyla Hatay'da gözlenmiştir.



Şekil 5.1. Su yılı alansal yağış normalleri (1991-2020) (MGM23, 2023)

Meteoroloji Genel Müdürlüğü, Meteorolojik Veri İşleme Daire Başkanlığınca hazırlanan Türkiye Ortalama Sıcaklık Dağılımını gösteren ve şekil 5.2’de verilen haritada da görüleceği üzere sıcaklık artışının olduğu ve durumun kuraklığı meydana getirdiği vurgulanmaktadır.

İklim değişikliğinin en belirgin etkilerinden biri sıcaklık artışıdır. Türkiye’de son yıllarda mevsimler arasındaki sıcaklık farkları artmış ve yaz aylarındaki sıcaklık ortalamaları yükselmiştir. Bu durum tarım sektörü üzerinde önemli etkilere sahiptir. Kuraklık, tarım üretimini olumsuz yönde etkileyerek bitki yetiştirme koşullarını zorlaştırmaktadır. Tarıma dayalı ekonomisi olan Türkiye için bu, büyük bir tehdit oluşturmaktadır. Tarım gelirleri azalacak, su kaynakları daha fazla tükenmeye başlayacak ve gıda güvenliği risk altına girecektir.



Şekil 5.2. Türkiye ortalama sıcaklık dağılımı (MGM, 2023)

Su Kaynaklarının Azalması;

İklim değişikliği aynı zamanda su kaynakları üzerinde de büyük bir etkiye sahiptir. Türkiye, su zengini bir ülke olarak bilinmesine rağmen, iklim değişikliği nedeniyle su kaynaklarının azalmasıyla karşı karşıyadır. Artan sıcaklıklar ve düşen yağış miktarı, baraj ve göllerin su seviyelerini olumsuz etkilemektedir. Tarımsal sulama, içme suyu temini ve hidroelektrik enerji üretimi gibi alanlarda su kaynaklarının azalması, Türkiye'nin su güvenliği sorununu derinleştirecektir (Anonim, 2016).

Deniz Seviyesi Yükselmesi ve Kıyı Erozyonu;

Küresel ısınmanın bir sonucu olarak deniz seviyesi yükselmekte ve kıyı erozyonu hızlanmaktadır. Türkiye'nin uzun bir kıyı şeridi bulunmaktadır ve bu durum ülkeyi deniz seviyesi yükselmesi ve kıyı erozyonu konusunda hassas hale getirmektedir. Deniz seviyesinin yükselmesi, kıyı şeridindeki yerleşim birimlerini tehdit etmektedir. Özellikle büyük şehirlerdeki kıyı bölgeleri, deniz suyu seviyesindeki artış nedeniyle sel riskiyle karşı karşıya kalmaktadır. Ayrıca, kıyı erozyonu nedeniyle plajlar, tatil bölgeleri ve turistik tesisler de olumsuz etkilenecektir.

Türkiye, iklim değişikliğinin olumsuz etkilerini yoğun bir şekilde hisseden ülkelerden biridir. Sıcaklık artışı, kuraklık, su kaynaklarının azalması, deniz seviyesi yükselmesi ve kıyı erozyonu gibi etkiler, ülkenin tarım, su kaynakları, yerleşim birimleri ve turizm gibi alanlarında ciddi sorunlara neden olmaktadır. Bu nedenle, Türkiye'nin iklim değişikliğiyle mücadele etmek ve uyum sağlamak için etkili politikalar geliştirmesi

ve uygulaması gerekmektedir. Sürdürülebilir enerji kaynaklarının kullanımı, su yönetimi politikalarının geliştirilmesi ve çevresel duyarlılığın artırılması gibi adımlar, Türkiye'nin iklim değişikliğiyle mücadelede önemli bir rol oynayabilir (Anonim, 2016).

5.1.3. Iğdır İli'nde İklim Değişikliği ve Etkileri

İklim değişikliği, günümüzde dünya genelinde ciddi bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Sera gazı emisyonlarının artması, küresel ısınma ve iklim sistemini bozan diğer etmenler, doğal dengeleri altüst etmektedir. Türkiye'nin doğu kesiminde yer alan Iğdır ili, iklim değişikliğinin etkilerini yoğun bir şekilde hisseden bölgelerden biri olduğu Şekil 5.1'de ve şekil 5.2'de verilen haritalarda renk paletinden anlaşılmaktadır.

Sıcaklık Artışı ve Kuraklık;

Iğdır ili, zaten kuru ve yarı çöl iklimine sahip bir bölgedir. Ancak son yıllarda iklim değişikliği nedeniyle sıcaklık artışı ve kuraklık daha da belirgin hale gelmiştir. Yaz aylarında sıcaklık ortalamaları yükselmiş ve yağış miktarı azalmıştır. Bu durum tarım sektörü üzerinde büyük bir etkiye sahiptir. Iğdır ili, tarıma dayalı bir ekonomiye sahip olup özellikle meyve yetiştiriciliği önemli bir gelir kaynağıdır. Ancak kuraklık nedeniyle sulama kaynaklarının azalması, bitki büyümesini olumsuz yönde etkilemektedir. Bu durum tarım gelirlerinde düşüşe ve işsizlik sorununa yol açabilmektedir.

Su Kaynaklarının Azalması;

Iğdır ili, Aras Nehri'nin kıyısında bulunan önemli bir su kaynağına sahiptir. Ancak iklim değişikliği, su kaynaklarının azalmasına yol açmaktadır. Artan sıcaklıklar, kar erimelerinin hızlanmasına ve su kaynaklarının azalmasına neden olmaktadır. Bu durum tarımsal sulama, içme suyu temini ve endüstriyel kullanım gibi alanlarda su kıtlığına yol açabilmektedir. İklim değişikliğiyle mücadele edilmediği takdirde, su kaynaklarının daha da azalması Iğdır ili'nin su güvenliği sorununu derinleştirecektir.

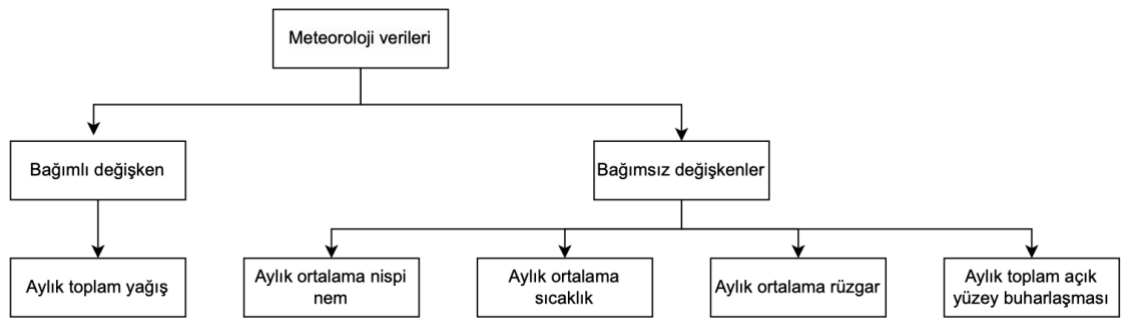
Doğal Hayatın Etkilenmesi;

Iğdır ili, biyolojik çeşitlilik açısından zengin bir bölgedir ve birçok nadir bitki ve hayvan türüne ev sahipliği yapmaktadır. Ancak iklim değişikliği, bu doğal yaşam alanlarını olumsuz yönde etkilemektedir. Artan sıcaklık ve kuraklık, bitki örtüsünün azalmasına, çölleşme süreçlerinin hızlanmasına ve habitat kaybına neden olmaktadır. Bu durum, Iğdır ili'nin biyolojik çeşitlilik açısından değerini azaltmakta ve ekosistemlerin dengesini bozmaktadır.

Iğdır ili, iklim değişikliğinin etkilerini yoğun bir şekilde hisseden bölgelerden biridir. Sıcaklık artışı, kuraklık, su kaynaklarının azalması ve doğal yaşam alanlarının tahribatı gibi etkiler, bölgenin tarım, su kaynakları ve biyolojik çeşitlilik gibi alanlarında ciddi sorunlara neden olmaktadır. Bu nedenle, Iğdır'ın iklim değişikliğiyle mücadelede etkili adımlar atması önemlidir. Sürdürülebilir tarım uygulamalarının teşvik edilmesi, su kaynaklarının yönetimi için etkili politikaların geliştirilmesi ve doğal yaşam alanlarının korunması gibi adımlar, bölgenin iklim değişikliğiyle mücadelesinde önemli bir rol oynayabilir. Bu süreçte, farkındalık kampanyaları ve yerel halkın aktif katılımı da son derece kritik bir rol oynamaktadır.

5.2. Metot

Çalışmada Iğdır iline ait 2001-2021 tarihleri arasındaki; “Aylık toplam yağış miktarı ortalaması”, “Ortalama güneşlenme süresi”, “Ortalama yağışlı gün sayısı”, “En yüksek sıcaklık”, “En düşük sıcaklık”, “Havadaki nem oranı ortalaması”, “Rüzgâr hızı ortalaması” ve “Buharlaşma” verileri alınmış ve bu verilerden bazılarının modele etkisinin minimum seviyede olduğu görülerek ve uzman görüşü de alınarak modelden çıkartılmıştır. Şekil 5.3'te son durumda modelde kullanılan veriler şu şekilde olmuştur; bağımlı değişken olarak “Aylık toplam yağış”, bağımsız değişkenler ise “Aylık ortalama rüzgâr hızı”, “Aylık ortalama nispi nem”, “Aylık ortalama sıcaklık” ve “Aylık toplam açık yüzey buharlaşması” olarak seçilmiştir.



Şekil 5.3. Modelde kullanılan meteorolojik veriler

5.2.1. Veri İşleme

Veri seti işlenerek tek bir elektronik çizelge haline getirildi. Bu çizelgedeki her bir satır bir data noktasını temsil etmekte iken, sütunlar da datanın özelliklerini temsil ediyor.

Datanın özelliklerine ek olarak da hangi ayda olduğumuzu temsil eden 12 tane daha sütun eklendi. İncelemeye konu olan aya denk gelen sütunun değeri 1, geri kalan aylar ise 0 olarak kodlandı.

Ham haldeki verinin $R^2 = 0,16$ olarak bulundu.

Ay özellikleri eklenince $R^2 = 0,69$,

Mevsim özellikleri eklenince $R^2 = 0,69$,

Gecikme özellikleri eklenince $R^2 = 0,75$,

Hareketli ortalama ve standart sapma özellikleri eklenince $R^2 = 0,68$ olarak bulundu.

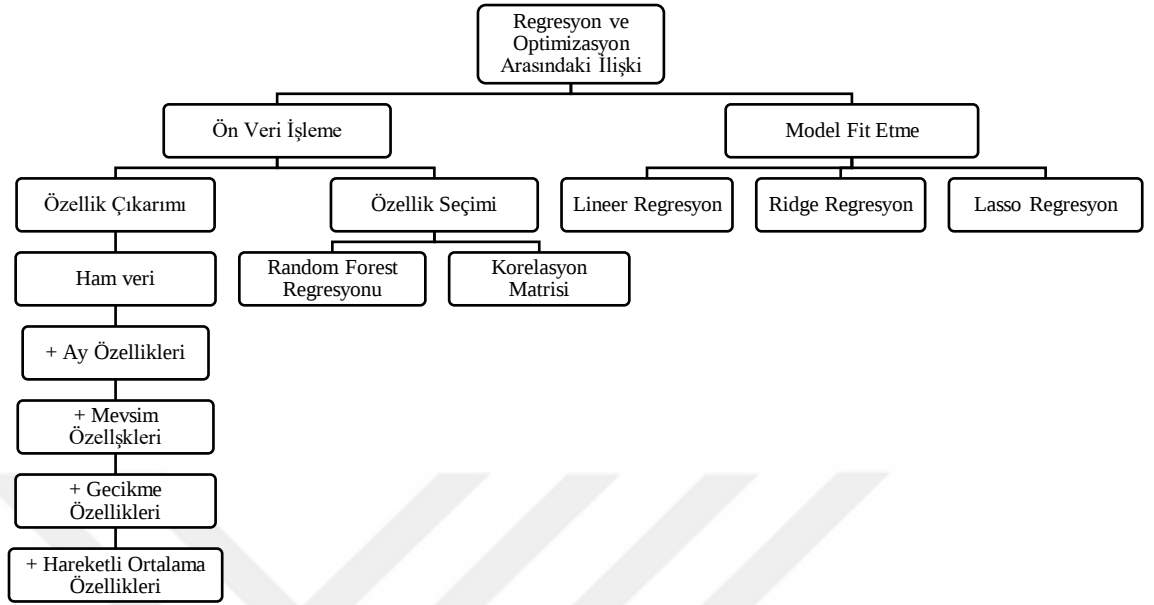
Modele $R^2 = 0,75$ ile devam edildi.

5.2.2. Lineer Regresyon Modelini Eğitme

Verinin sütunlarını her bir sütun kendi içerisinde 0 ile 1 arasında olacak şekilde ölçeklendirildi. Elimizdeki verinin %90'lık kısmını lineer regresyon modelini eğitmek için, kalan %10'luk kısmını da eğitilen modelin başarısını ölçmek için kullanıldı. Lineer regresyon modeli verilerle eğitildi.

5.2.3. Modelin Değerlendirmesi

Eğitilen model, R^2 metriği kullanılarak değerlendirildi ve R^2 değeri 0,75 olarak belirlendi. Bu eğitilen model, verilen bir veri noktasının özelliklerini girdi olarak kabul eder ve aylık toplam yağışı tahmin etmek için bir fonksiyon olarak kullanır. Verinin özellikleri ile aylık toplam yağış arasındaki korelasyon sıcaklık haritası olarak görselleştirildi.



Şekil 5.4. Regresyon ve optimizasyon arasındaki ilişki

Regresyon modeli özellik çıkarımı, bir hedef değişkenin (bağımlı değişken) diğer özelliklerle ilişkisini modellemek için kullanılır. Özellik çıkarımı, veri setindeki özelliklerin daha iyi bir şekilde temsil edilmesini sağlayan veya yeni özelliklerin oluşturulmasını içeren bir süreçtir. Bu süreç, regresyon modelinin performansını artırmakta ve daha iyi tahminler elde etmenizi sağlamaktadır. Bu kapsamda Şekil 5.4'te verilen şemada da görüleceği üzere, önce ham veri üzerinde değerlendirme yapılmış ve daha sonra aşamalı olarak veri setinde bulunan ay özellikleri, mevsim özellikleri, gecikme özellikleri, hareketli ortalama özellikleri eklenmiş ve bunların R^2 değerlerinde nasıl bir değişiklik olduğu Çizelge 5.1'deki gibi gözlenmiştir.

Özellik çıkarımı, bir hedef değişkenin (bağımlı değişken) diğer özelliklerle ilişkisini modellemek için kullanılır. Veri setindeki özelliklerin daha iyi bir şekilde temsil edilmesini sağlayan veya yeni özelliklerin oluşturulmasını içeren bir süreçtir. Bu süreç, regresyon modelinin performansını artırarak daha iyi tahminler elde edilmesini sağlamaktadır.

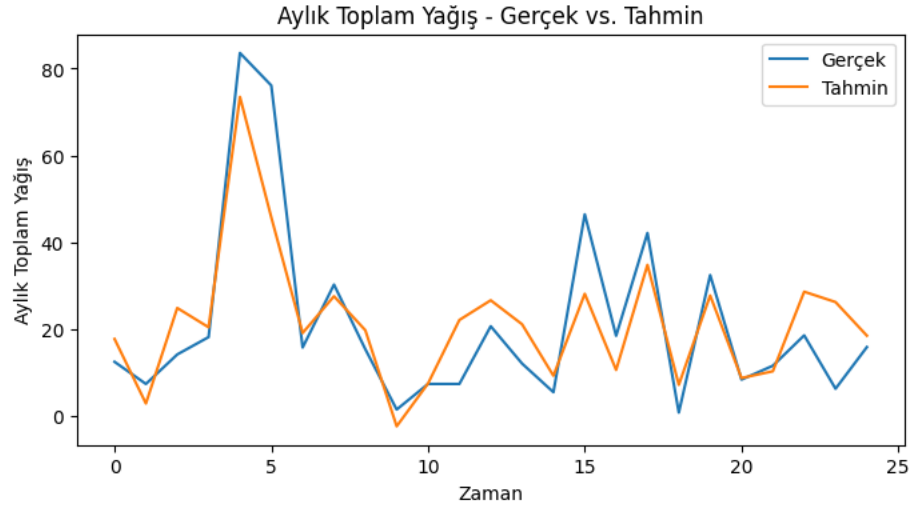
Özellik seçimi, regresyon modelinde en önemli ve etkili adımlardan biridir. İyi bir özellik seçimi, gereksiz veya kalabalık özelliklerin modele dahil edilmesini engeller, modelin performansını artırır ve aşırı uyum (overfitting) sorununu önler.

Özellik seçimi yaparken, aşırı uyum (overfitting) riskini azaltmak için çapraz doğrulama (cross-validation) kullanmak önemlidir. Özellikler arasındaki korelasyon göz önüne alındığında, özelliklerin normalleştirilmesi veya standartlaştırılması gibi diğer stratejilerin yanı sıra, alan bilgisine dayalı önemli özelliklerin gözlemlenmesi de mümkündür. Bu durum Şekil 6.2’de verilen veri setine ait korelasyon değerleri grafiğinde sayısal olarak gösterilmiştir.

Random Forest, çoklu karar ağaçlarının bir ensemble (birleşik) yöntemidir ve hem sınıflandırma hem de regresyon problemlerinde kullanılabilmektedir. Random Forest algoritması, geniş bir örneklem veri kümesinden rastgele örneklemeler alarak ve bu örneklem verilerini kullanarak birden fazla karar ağacı oluşturarak çalışmaktadır. Random Forest, yüksek boyutlu veri setleri ve büyük özellik kümesiyle iyi çalışmakta ve ayrıca, eksik veriler ve gürültülü verilerle de başa çıkabilmektedir. Modelin varyansını azaltarak aşırı uyumu (overfitting) azalttığı için özelliklerin önem derecesini değerlendirebilmekte ve böylece özellik seçimi için bilgi sağlamaktadır.

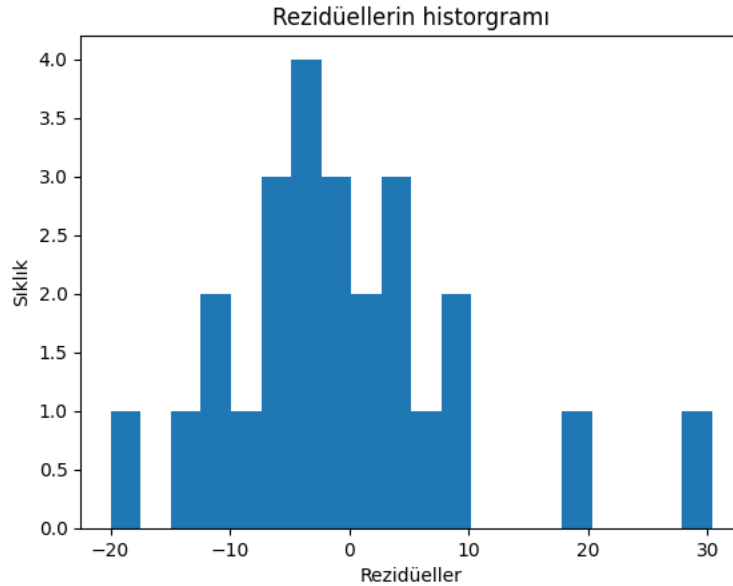
Çizelge 5.1. Modelin eğitilmesi ve öğrenmesi süresince R^2 değerleri

R^2 Sonuçları	
Özellik Çıkarımı	
Ham veri	0,16
+ Ay özellikleri	0,69
+ Mevsim özellikleri	0,69
+ Gecikme özellikleri	0,75
+ Hareketli ortalama ve standart sapma özellikleri	0,68
Özellik Seçimi	
Random forest regression	0,62
Korelasyon matrisi	0,52
Hiçbirini kullanmama	0,75
Model Fit Etme	
Linear regresyon	0,75
Ridge regresyon	0,68
Lasso regresyon	0,37



Şekil 5.5. Veri seti için gerçek ve tahmini değerler ilişki grafiği

Veri setine göre oluşturulan model ve modelin eğitilmesi sonucu elde edilen gerçek değer ve tahmini değerlerin birbirine çok yakın sonuçlar verdiği Şekil 5.5'teki grafikte açıkça görülmektedir. Belli zaman dilimlerinde gerçek değer ile tahmini değer %100'e yakın uyuşma söz konusu olmuştur. Bu durum kurulan modelin iyi bir şekilde kurulduğu ve belli değerlerin çıkarılması ve bazı değerlerin eklenmesi modeli fit hale getirerek optimum seviyede uyum sağlamasına sebep olmuştur.



Şekil 5.6. Rezidüeller

Şekil 5.6'da görüleceği üzere, Rezidüeller, bir modelin tahminlerinin gerçek gözlem değerlerinden ne kadar sapma gösterdiğini temsil eden hataların bir ölçüsüdür.

Sıklık histogramı, rezidüellerin farklı değerlerinin ne sıklıkta gerçekleştiğini gösteren bir grafik olarak kullanılır.

Dağılım Şekli: Histogramın şekli, rezidüellerin nasıl dağıldığını gösterir. Normal dağılıma benzeyen simetrik bir şekil elde edildiği için, model iyi bir uyum sağladığını ve hataların rastgele bir şekilde dağıldığını göstermektedir. -20, 20 ve 30 da bulunan değerler gruptan ayrı bir görüntü verdiği için oradaki değerlere aykırı değerler denilir. Bu verilerden bazılarının modelin varsayımlarını karşılamadığını göstermektedir.

Merkezi Eğilim: Histogramın merkezi eğilimi, rezidüellerin genellikle hangi değerlerde yoğunlaştığını gösterir. İdeal olarak, merkezi eğilim, sıfıra yakın veya çok küçük bir değerde olmalıdır. Bu, modelinizin ortalamaları doğru bir şekilde tahmin ettiği anlamına gelir. Eğer merkezi eğilim başka bir değerde yoğunlaşıyorsa, modelde sistematik bir sapma sahip olabileceğini gösterebilir. Bu modelde böyle biri durum söz konusu olmamıştır.

6. BULGULAR ve TARTIŞMA

Iğdır ili ve merkez ilçelerindeki kayısının; kabuğu, çekirdeği ve meyve özündeki çeşitli elementler ile ilgili veri seti ile Iğdır iline ait 2001-2021 tarihleri arasındaki 20 yıllık; “Aylık toplam yağış miktarı ortalaması”, “Ortalama güneşlenme süresi”, “Ortalama yağışlı gün sayısı”, “En yüksek sıcaklık”, “En düşük sıcaklık”, “Havadaki nem oranı ortalaması”, “Rüzgâr hızı ortalaması” ve “Buharlaşma” verileri üzerinde, verinin incelenecek özelliğine bağlı olarak en iyi sonucu veren ve en iyi grafik gösterimini sağlayan SPSS 26 paket programı, JMP Pro 14 paket programı, Python programlama dili, Matlab R2021a programlama dilleri kullanıldı.

Optimizasyonda; fonksiyonların optimizasyonu, simpleks yöntemi, kısıtlı optimizasyon, langrange çarpanları yöntemi, Karush- Kuhn- Tucker optimallik koşulları ve gradyan tabanlı yöntemler incelendi. Regresyonda; Doğrusal regresyon, doğrusal olmayan regresyon, ridge regresyon ve lasso regresyon yöntemleri incelendi.

Optimizasyona temel oluşturan ve gerekli olan matematiksel uzaylar ve yöntemlerden bahsedildi, bu yöntemleri detaylı bir şekilde açıklayan teorem, önerme ve örnekler verildi. Bazı teorem ve önermelerin ispatı yapıldı ve çözümlü örnekler ile konunun anlaşılması pekiştirildi. Özellikle konveks kümeler, fonksiyonlar ve fonksiyonların optimizasyonu için açıklayıcı örnekler verildi. Bu konuların günlük hayat problemlerine uygulandığını göstermek için Ek 1.1 ve Ek 1.2’deki veri setleri kullanıldı.

En iyi çözümü elde etmek ve en iyi modeli kurmak için akış diyagramları ile model eğitime ve modeli fit etme aşamaları kullanıldı. Meteorolojik verilerde yağışa etki eden etmenleri tespit etmek için deney- gözlem sonucu gibi model üzerindeki aşamaları gösterildi. Elde edilen modelin hangi aşamada çalıştığı ve anlamlı olduğu korelasyon ve regresyon sonuçları ile gösterildi.

Optimizasyon probleminin tanımlandığı ilk aşamada, amaç fonksiyonu ve kısıtlar belirlenmektedir. Problemin çözümü için gerekli veriler toplanmakta ve hazırlanmaktadır; bu süreçte verilerin temizlenmesi, dönüştürülmesi ve analiz için uygun hale getirilmesi gerekmektedir. Oluşturulan matematiksel model, amaç fonksiyonunu ve kısıtları içermekte olup, problemin çözüm yöntemini tanımlamaktadır. Seçilen optimizasyon algoritmasıyla model çözülerek en iyi çözüm elde edilmektedir. Elde edilen sonuçlar analiz edilerek yorumlanmakta ve problemin çözümü için uygulanmaktadır.

Korelasyon değerleri, iki değişken arasındaki ilişkinin gücünü ve yönünü ölçen istatistiksel bir ölçüdür. Bu l genellekle -1 ile 1 arasında bir değer alır. -1 ile -0,7 arasındaki bir korelasyon negatif bir ilişkiyi gösterir, yani iki değişken arasında güçlü ve ters orantılı bir bağlantı vardır; bir değişken artarken diğeri azalır. -0,7 ile -0,3 arasındaki korelasyon ise daha zayıf veya orta düzeyde bir negatif ilişkiyi temsil eder. -0,3 ile 0,3 arasındaki korelasyon değeri, değişkenler arasında pek bir ilişki olmadığını veya çok zayıf bir ilişkinin bulunduğunu gösterir. Bu durumda, değişkenler birbirinden bağımsızdır veya ilişkileri çok düşük düzeydedir. Öte yandan, 0,3 ile 0,7 arasındaki korelasyon zayıf veya orta düzeyde bir pozitif ilişkiyi ifade eder; bu durumda, değişkenler arasında bir ilişki bulunsa da bu ilişki daha az güçlüdür. Son olarak, 0,7 ile 1 arasındaki korelasyon pozitif bir ilişkiyi yansıtır, yani iki değişken arasında güçlü ve doğru orantılı bir ilişki vardır; bir değişken artarken diğeri de artar. Korelasyon değerleri, değişkenler arasındaki ilişkinin gücünü ve yönünü belirlemede kullanılır. Pozitif korelasyon, değişkenler arasında birlikte artma eğilimini gösterirken, negatif korelasyon değişkenler arasında birlikte azalma eğilimini gösterir. Korelasyon değeri yaklaşık olarak 0 ise, değişkenler arasında bir ilişki olmadığı veya çok zayıf bir ilişki olduğu anlaşılır.

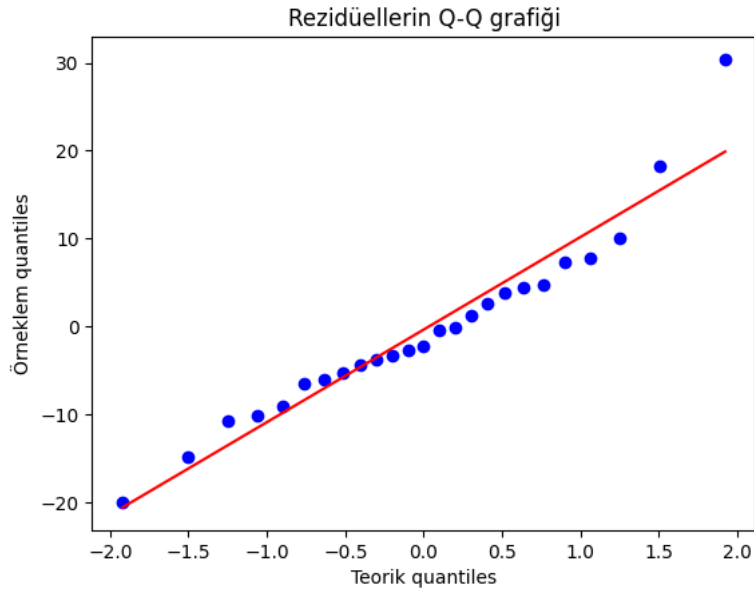
Aykırı Değerler: Histogramda, nadir veya uzakta yer alan rezidüel değerleri aykırı değerler olarak tanımlanır. Aykırı değerler, veri setinin doğasına ve analiz amacınıza bağlı olarak değerlendirilmelidir. -20, 20 ve 30 da bulunan değerler gruptan ayrı bir görüntü verdiği için oradaki değerlere aykırı değerler denilir.

Dağılım Yoğunluğu: Histogramdaki stnların yüksekliği, rezidüellerin o değer aralığında ne kadar sıklıkta görüldüğünü gösterir. Yüksek bir sütün, rezidüellerin o değer aralığında yoğun olduğunu gösterirken, düşük bir sütün rezidüellerin o değer aralığında nadir olduğunu gösterir. Dağılım yoğunluğu, rezidüellerin odaklandığı değer aralıklarını belirlemek için yardımcı olabilir; bu modelde -15 ile +10 arasında bir odaklanma gözlenmiştir.



Şekil 6.1. RSM ve contour grafiklerinin optimizasyonda kullanım aşamaları

Şekil 6.1'deki akış diyagramından anlaşılacağı üzere, problemin tanımlanması, bağımsız değişkenlerin ve yanıt faktörlerinin belirlenmesi, belirlenen faktörlerin etkilerinin tahmin edilmesi modelde önemli durumlardır. Çünkü bu aşamalar doğru seçilirse, eğriler doğru çizilmiş olur ve katmanlar arasındaki ilişki belirginleşir ve model hakkında doğru yorum yapılabilir.



Şekil 6.2. Veri seti için Q-Q plot grafiği

Q-Q plotu, bir veri kümesinin teorik bir dağılıma ne kadar iyi uyup uymadığını görselleştirmek için kullanılan bir grafik yöntemidir. "Q" normal dağılımın kuantil değerlerini, yani beklenen değerlerini temsil ederken, diğer "Q" ise gözlemlenen değerleri temsil eder.

Şekil 6.2'de görüldüğü gibi Q-Q plotunda, veri seti teorik bir dağılıma (genellikle normal dağılıma) tam olarak uyduklarından, noktalar yaklaşık olarak bir doğru boyunca

düzgün bir şekilde dağılmıştır. Verilerin, seçilen teorik dağılıma iyi uydurulduğu söylenebilir.

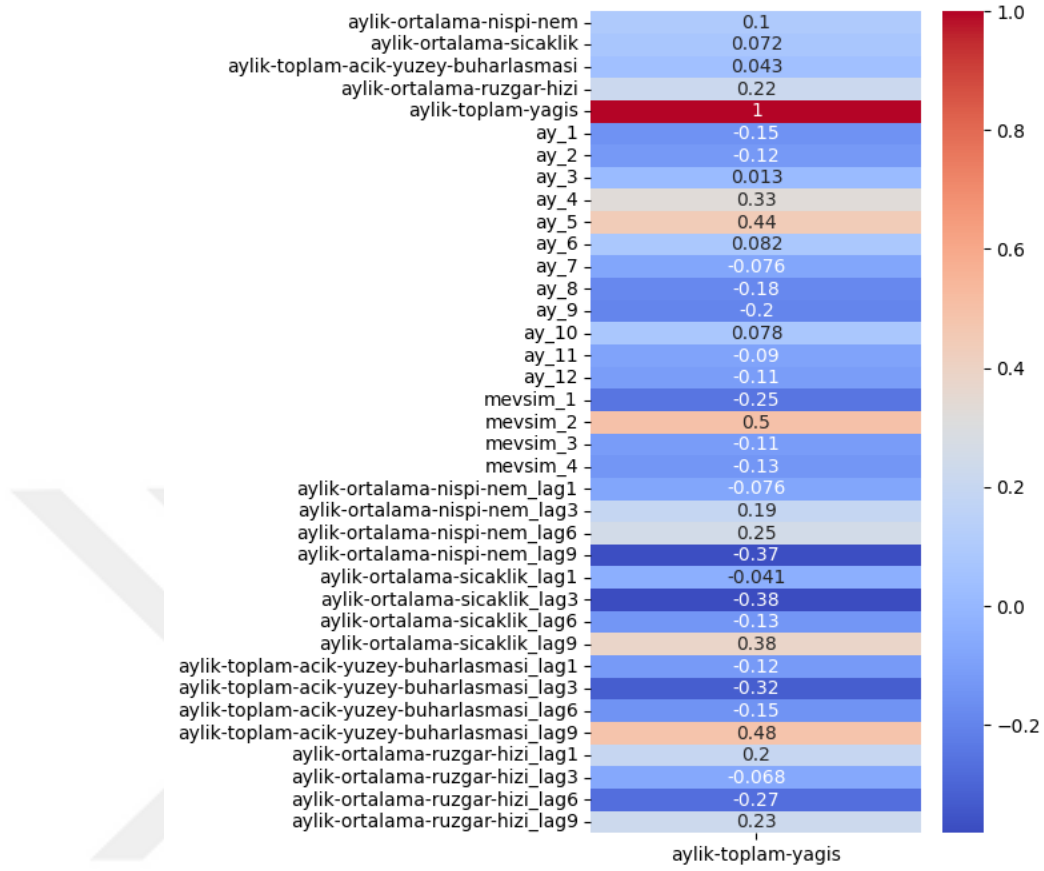
Eğer veriler teorik dağılıma uymasaydı, noktalar doğru üzerinde düzensiz bir şekilde dağılır veya eğriler oluşturabilirdi. Bu ise verilerin seçilen teorik dağılıma uymadığını veya dağılımın farklı bir yapıya sahip olduğunu gösterirdi.

Şekil 6.3'e bakıldığında aylık toplam yağışın korelasyon değerinin ay bazında 0,44 ile mayıs ayına 0,33 ile nisan ayına denk gelmesi, 0,48 ile aylık toplam açık yüzey buharlaşmasına denk gelmesi, 0,38 ile aylık ortalama sıcaklığa denk gelmesi, 0,50 ile 2. Mevsime yani ilkbahara denk gelmesi modelin doğru kurulduğunu ve yeterince eğitildiğini göstermektedir.

Aylık toplam yağışın ay bazında 0,44 ile mayıs ayına ve 0,33 ile nisan ayına denk gelmesi: Bu aylık toplam yağış miktarının mayıs ayında nispeten daha yüksek olduğunu ve Nisan ayında ise biraz daha düşük olduğunu gösterir. İkisi arasında orta düzeyde bir pozitif korelasyon olduğunu ifade eder. Yani, genellikle mayıs ayında yağış miktarının artma eğiliminde olduğu, ancak nisan ayında hafif bir azalma olduğu söylenebilir.

Aylık toplam açık yüzey buharlaşmasının 0,48 ile aylık ortalama sıcaklığa denk gelmesi: Bu, aylık toplam açık yüzey buharlaşma miktarının aylık ortalama sıcaklıkla orta düzeyde bir pozitif korelasyon gösterdiğini gösterir. Yani, genellikle sıcak aylarda buharlaşma miktarının arttığı ve soğuk aylarda azaldığı söylenebilir.

Aylık ortalama sıcaklığın 0,38 ile 2. mevsim yani ilkbahara denk gelmesi: Bu, aylık ortalama sıcaklığın ilkbahar mevsimiyle orta düzeyde bir pozitif korelasyon gösterdiğini ifade eder. Yani, ilkbahar mevsiminin genellikle sıcaklık artışına işaret ettiği ve ortalama sıcaklığın diğer mevsimlere göre daha yüksek olduğu söylenebilir. Mevsimin (ilkbahar) aylık toplam açık yüzey buharlaşması, aylık ortalama sıcaklık ve aylık toplam yağış ile sırasıyla 0,50, 0,38 ve 0,44 gibi korelasyon değerlerine denk gelmesi; Bu, ilkbahar mevsimi ile bu değişkenler arasında orta düzeyde pozitif korelasyon olduğunu gösterir. Yani, ilkbahar mevsiminde açık yüzey buharlaşması miktarının, sıcaklık artışı ve yağış miktarıyla ilişkili olduğu söylenebilir.



Şekil 6.3. Veri setine ait korelasyon değerleri

Çalışmada elde edilen modelin ilk aşamasında Lineer Regresyon, Ridge Regresyon ve Lasso Regresyon yöntemleri ile regresyon modeli optimize edildi. 3 farklı aşamada (özellik çıkarımı, özellik seçimi, model fit etme) elde ettiğimiz R^2 sonuçlarını karşılaştırarak her aşamadaki en iyi sonucu veren yöntem kullanıldı.

1. Özellik çıkarımı için ham veriye; ay özellikleri, mevsim özellikleri ve gecikme özellikleri eklenmiştir. Bu eklenen her özellik, modelin başarısını yüksek oranda artırmıştır çünkü istatistiksel modeller, özellikle lineer regresyon gibi, mevcut veriden özellik çıkarma konusunda sınırlıdır. Bu modellerin iyi çalışabilmesi için mevcut veriye farklı özellikler eklenmeli ve lineer regresyon modelleri, eklenen bu özelliklerle eğitilmelidir. Ay özellikleri, lineer regresyon modeline farklı ayların yağış oranlarıyla ilgili korelasyon sağlayabileceği için özellikle faydalıdır. Örneğin, her yıl mart ve nisan aylarında yağışta bir artış gözlenmektedir ve bu artışın hangi aylarda olduğu modele özellikle eklenmelidir. Bu sayede lineer regresyon modeli, bulunduğu ayı dikkate alarak yağış miktarını daha iyi tahmin edebilir. Ay özelliklerine benzer şekilde mevsim

özellikleri de lineer regresyon modelinin başarısını önemli ölçüde etkileyebilir. Çünkü yağışın aylara göre korelasyonu dalgalanmalara daha açıkken, mevsimlere göre korelasyon daha istikrarlı olma eğilimindedir. Böylece lineer regresyon modeli, yağış tahmin ederken bulunduğu mevsimi dikkate alarak daha başarılı tahminler yapabilir. Son olarak, gecikme özelliklerini modele ekleyerek modelin başarısı daha da artırabilir. Gecikme özellikleri, diğer özelliklerden farklı olarak mevcut veriyi kullanır. Lineer regresyon modeli, tahmin yaparken sadece bulunduğu ayın verilerine erişebilir ve önceki ayların verilerine doğrudan erişemez. Ancak gecikme özelliklerini kullanarak bu bilgiyi lineer regresyon modeline iletebilir. Bir özelliği bir aydan yedi aya kadar geciktirerek mevcut veri eklenirse, lineer regresyon modeli, mevcut ayın yanı sıra önceki yedi ayın özelliklerine de sahip olur. Tüm özellik çıkarımları arasında en etkili olan gecikme özellikleridir ve modelin başarısını önemli ölçüde artırabilir.

2. Özellik seçimi için kullanılan yöntemlerin R^2 sonucunu azalttığı gözlenmiştir, bu nedenle hiçbirini kullanılmamaya karar verilmiştir. Özellik seçimi, lineer regresyon modellerinin başarısı için önemlidir. Bazen modele verilen veri, modelin tahmin yeteneklerinden daha fazla olabilir. Bu durumda model, yüksek korelasyonlu özelliklere odaklanmalıdır, çünkü düşük korelasyonlu özelliklerle çalışmak, modelin başarısını azaltabilir. Özellik seçimi yaparak, modelin başarısını artıracak önemli özelliklere odaklanabilir. Ancak yaptığımız testler sonucunda, özellik seçiminin modelin başarısını düşürmediği görülmüştür. Bu, mevcut özelliklerin modelin kapasitesini aşmadığını ve her birinin modelin tahmin yeteneği için önemli olduğunu göstermektedir. Veri setinin büyüklüğü sınırlı olduğunda bu sıkça karşılaşılan bir durumdur. Bu nedenle, en optimize modelde özellik seçiminin yapılmamasına karar verilmiştir.

3. Modelin en iyi sonucu lineer regresyon ile elde edildiği için bu model tercih edilmiştir. Lineer regresyon, bağımsız değişkenler arasında çoklu doğrusallık sorunu olmadığında ve veri setindeki ilişkiler doğrusal olduğunda oldukça etkilidir. Bu basitlik, modelin yorumlanabilirliği açısından da avantaj sağlar. Lasso regresyon ve Ridge regresyon, lineer regresyonun düzenlenmiş versiyonlarıdır ve bazı durumlarda daha iyi performans gösterebilirler. Lasso regresyon, özellik seçimi yapabilme yeteneği ile bilinir ve yüksek boyutlu veri setlerinde, bazı özelliklerin katsayılarını sıfıra indirerek modeli basitleştirebilir. Özellikle birçok özelliğin bulunduğu ancak sadece birkaçının önemli olduğu durumlarda Lasso regresyon önerilir; ancak veri seti üzerinde yapılan testler,

özellik seçiminin modelin başarısını artırmadığını göstermiştir. Bu nedenle Lasso regresyon, lineer regresyona göre daha düşük performans göstermektedir. Ridge regresyon ise özellik katsayılarını tam olarak sıfıra indirmez, ancak küçültür. Bu, özellikle çoklu doğrusallık sorunu olan durumlarda Ridge regresyonun daha istikrarlı sonuçlar verdiği görülür. Ancak bizim durumumuzda lineer regresyon daha iyi sonuçlar vermektedir, çünkü verilerimizde çoklu doğrusallık problemi yoktur.

Sonuç olarak ilk adımda, verinin sütunları her bir sütun kendi içerisinde 0 ile 1 arasında olacak şekilde ölçeklendirilmiştir. İkinci adımda, ölçeklendirilmiş verinin %90'lık kısmı çeşitli regresyon modelleri eğitmek için, kalan %10'luk kısmı da eğitilen modelin başarısını ölçmek için kullanılmıştır. Üçüncü aşamasında da meteorolojik verilerin yağışa etki eden etmenlerini tespit etmek için deney-gözlem sonucuna benzer şekilde model üzerindeki aşamaları gösterilmiştir. Veri işleme adımları sonucunda elde edilen veri, üç farklı aşamadan (özellik çıkarımı, özellik seçimi, model fit etme) geçirilip elde edilen R^2 sonuçları karşılaştırılarak her aşamada en iyi sonucu veren yöntem kullanılmak üzere en optimize modelin geliştirilmesinde kullanılmıştır.

Metodun ikinci aşamasında da denenen bu farklı yöntemler sonucunda elde edilen en optimize değişkenler kullanılarak tahminleme yapıldı. Güncel olarak gözlemlenen aydan bir ay sonrası, iki ay sonrası ve üç ay sonrası tahmin edildi. Örnek olarak, Mart 2021 özellikleri kullanılarak sırasıyla Nisan 2021, Mayıs 2021 ve Haziran 2021'deki yağış miktarı tahmin edildi. Tahminler gerekli metriklerden geçirildiği zaman çizelge de görülen sonuçlar elde edildi.

Çizelge 6.1. Tahmin edilen R^2 değerleri

Tahminleme Skoru	R^2 değeri
Birinci ay	0,41
İkinci ay	0,31
Üçüncü ay	0,29

Çizelge 6.1'de görüleceği üzere R^2 sonucu tahminimiz, bulunduğumuz aydan uzaklaştıkça azaldı. R^2 metrikinden elde ettiğimiz sonuçları dikkate aldığımız zaman bir ay sonrasını tahmin etmek anlamlıyken iki ay ve sonrasını tahmin etmenin anlamlı bir sonuç vermemeye başladığı gözlemlendi. Bir yıl boyunca yağış tahmin etmek teknik olarak mümkün olabilir, ancak bu kadar uzun bir süre boyunca doğruluk seviyesini sürdürmek zor olabilir. Yağış desenleri, mevsimler, iklim değişiklikleri ve atmosfer koşulları gibi birçok faktörden etkilenebilir ve bu faktörler uzun vadeli olarak önemli

ölçüde değişebilir. Daha güvenilir tahminler sunmak için genellikle daha kısa zaman dilimlerine, örneğin bir aya, odaklanmanın daha uygun olduğunu vurgulamak istiyorum. Mevcut modelimizin iyi performans gösterdiği aylık tahminlere yoğunlaşmak, genellikle daha mantıklı bir yaklaşımdır.

Elde edilen sonuçlar ve işlemler eklerdeki çizelge ve programlarda verilmiştir.



7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Veri seti üzerinde yapılan modelleme ve regresyon analizi sonuçları detaylı bir şekilde incelendiğinde; Şekil 5.5'teki grafik, kurulan modelin gerçek değerleri tahmin etmede oldukça başarılı olduğunu ve belli zaman dilimlerinde %100'e yakın bir uyum sağladığını göstermektedir. Bu, modelin iyi bir şekilde kurulduğunu ve verilerin düzgün bir şekilde eğitildiğini işaret etmektedir.

Şekil 5.6'daki rezidüellerin analizi, modelin hatalarının dağılımını incelemek için kullanıldı. Dağılımın normal dağılıma benzeyen simetrik bir şekil olması, modelin verilere uyum sağladığını ve hataların rastgele bir şekilde dağıldığını göstermektedir. Ancak, -20, 20 ve 30 gibi aykırı değerlerin görünmesi, bazı verilerin modelin varsayımlarını tam olarak karşılamadığını göstermektedir.

Korelasyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkiyi ölçmek için kullanıldı. Özellikle aylık toplam yağış, aylık toplam açık yüzey buharlaşması, aylık ortalama sıcaklık ve mevsim değişkenleri arasındaki korelasyonlar incelendi. Bu analiz, bu değişkenler arasında belirli ilişkilerin olduğunu ve modelin bu ilişkileri doğru bir şekilde yansıttığını göstermektedir.

Doğrusal Programlama (DP) modelinin oluşturulması ve uygulanması çözülmek istenen problemin net bir şekilde tanımlanmasıdır. Bu, problemin amacının, hedeflerinin ve kısıtlarının anlaşılmasını içerir. Problemi net bir şekilde tanımlamak, çözüm sürecinin başlangıcını oluşturur. DP modeli oluşturulurken, problemin içeriğine bağlı olarak bazı varsayımlar ve hipotezler yapılabilir. Bu varsayımlar ve hipotezler, modelin basitleştirilmesine yardımcı olabilir ve çözüm sürecini daha yönetilebilir hale getirebilir. Problemin içeriğine göre, çözümde kullanılacak değişkenler tanımlanmalıdır. Bu değişkenler, problemin farklı yönlerini temsil eder ve optimizasyonun anahtar parçalarını oluşturur. Ayrıca, bu değişkenlere uygulanacak kısıtlar da belirlenmelidir. Kısıtlar, çözümün gerçek dünya koşullarına uygun olmasını sağlar. Problemin matematiksel bir modeli oluşturulur. Bu, problemin amaç fonksiyonu, kısıtları ve değişkenleri içeren bir denklem veya denklemler kümesi şeklinde ifade edilir. Matematiksel model, DP algoritmasının temelini oluşturur ve bu model üzerinden çözüm hesaplamaları yapılır. Elde edilen matematiksel çözüm, analiz edilir ve yorumlanır. Bu aşama, çözümün işlevselliğini ve pratik uygulanabilirliğini değerlendirmeyi içerir. Sonuçların ne anlama

geldiği, problemin çözümüne nasıl katkı sağladığı ve olası sonuçların iş kararlarına nasıl etki edebileceği gibi soruların cevaplandırılması gerekir.

Veri değerlendirme sürecinde; problemin tanımlanması, verinin anlaşılması, verinin hazırlanması, modelleme, modelin değerlendirilmesi ve modelin kullanılması aşamalarına dikkat etmek gerekiyor. Sürecin başarıyla tamamlanması, çalışmanın kalitesini artırır ve sonuçlarını daha güvenilir hale getirir. Çalışma içeriğinde ele alınacak problemi açıkça tanımlamak büyük önem taşır. Bu aşamada, hangi sorunların çözülmesi gerektiği ve bu sorunların neden önemli olduğu açık bir şekilde ifade edilmelidir. Veri setinin içeriğini, yapısını ve özelliklerini incelemek, veriyi anlamak için gereklidir. Veri toplama süreci, eksik veriler, aykırı değerler ve veri kalitesi değerlendirilmelidir. Veriyi analiz etmek ve modele giriş verilerini hazırlamak için, veri temizleme ve dönüşüm işlemleri gerçekleştirilmelidir. Verinin doğruluk ve güvenilirlik açısından uygun olması sonuçların güvenilirliği için büyük öneme sahiptir. Veriyi hazırladıktan sonra, problemi çözmek için uygun bir model seçimi yapılmalıdır. Model seçimi, veri analizi ve deneme-yanılma süreçlerini içermektedir. Modelin karmaşıklığı ve kullanılacak parametreler ayarlanırken uygun bir algoritma seçimi yapılmalıdır. Modelin başarısını değerlendirmek için uygun metriklerin kullanılması önemlidir. Modelin başarısını ölçmek için doğruluk, hassasiyet ve özgüllük kullanılabilir; bu aynı zamanda çapraz doğrulama ile aşırı uyarılma veya eksik uyarılma gibi sorunların önüne geçilmesini sağlar. Geliştirilen modelin pratik uygulamalarda nasıl kullanılacağı ve sonuçların ne anlama geldiği açık bir şekilde yorumlanmalıdır.

Meteorolojik veri seti üzerinde gerçekleştirilen çalışmada, üç ay sonrasını tahmin eden bir model oluşturmak, pratik uygulama açısından oldukça başarılı bir girişimdir. Optimizasyon ve regresyon modellerini bir araya getirerek bu modelin geliştirilmiş olması, bilimsel çalışmalara önemli bir katkı sunmuştur.

Özelliklerin çıkarılması ve eklenmesi, lineer regresyon modelinin performansını artırmıştır, özellikle ay, mevsim ve gecikme özelliklerinin kullanılması önemlidir. Özellik seçimi uygulanmasına rağmen, mevcut veri setindeki özelliklerin modelin başarısını artırmada yeterli olduğu görülmüştür. Model performansı açısından, lineer regresyon diğer yöntemlere göre daha etkili bir seçenek olarak bulunmuştur ve özellikle çoklu doğrusallık sorunu olmayan verilerde tercih edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışma, veri analizi ve regresyon modellemesi ile elde edilen sonuçların güvenilirliğini ve modelin performansını değerlendirmek için, R^2 , çapraz doğrulama(cross- validation), Ortalama Mutlak Hata (MAE) ve Ortalama Kare Hata (MSE) gibi çeşitli istatistiksel yöntemleri kullanmıştır. Elde edilen sonuçlar, modelin verilere iyi uyum sağladığını, ancak aykırı değerlerin dikkate alınması gerektiğini ve modelin belirli ilişkileri doğru bir şekilde yansıttığını göstermektedir. Bu çalışma, gelecekteki benzer analizler için bir temel oluşturabilir ve modelin geliştirilmesi veya iyileştirilmesi için yön gösterebilir.



KAYNAKLAR

- Agarwal, D., Singh, P., El Sayed, M., (2023). *The Karush–Kuhn–Tucker (KKT) optimality conditions for fuzzy-valued fractional optimization problems*, Mathematics and Computers in Simulation, 205, 861-877.
- Anonim., (2016). *Türkiye İklim Değişikliği 6. Ulusal Bildirimi*. T.C. Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, Ankara. 280 s.
- Atasoy, D., (2001). *Lojistik regresyon analizinin incelenmesi ve bir uygulaması*, Cumhuriyet Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Sivas. 74.
- Atasoy, D., Kara, H., (2023). *Karar Ağacı Optimizasyon Algoritması Üzerine Bir Çalışma*, Iğdır Fenbilimleri Enstitüsü Dergisi, 13(2), 1247-1255.
- Ayhan, B. Ö., (2015). *Eşlenik Gradyan Metodu ve Uygulamaları*, Bahçeşehir üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, İstanbul. 60.
- Bakhtin, I., (1989). *The contraction mapping principle in almost metric spaces. Functional Analysis*. Gos. Ped. İnstitute. 30, 25-28.
- Balcı, M., (2006). *Genel Matematik 1*. Seçkin Yayınları, Ankara, 460.
- Balcı, M., (2006). *Genel Matematik 2*. Balcı Yayınları, Ankara, 264.
- Barani, A., Ghazanfari, A., Dragomir, S. (2012). *Hermite-Hadamard Inequality Through Prequasiinvex Function*, Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics. 9, 1-10.
- Barron, E. N., Goebel, R., Jensen, R. R., (2013). *Quasiconvex functions and nonlinear PDEs*, Transactions of the American Mathematical Society. 365(8), 4229-4255.
- Bates, D. M., Donald G., W., (1988). *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. John Wiley & Sons, Canada, 291.
- Bayraktar, M., (2018). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Akademik Yayıncılık, İstanbul, 456.
- Bazaraa, M. S., (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, New Jersey, 88.

- Beldiman, M., Panaitescu, E., Dogaru, L., (2008). ***Approximate quasi efficient solutions in multiobjective optimization.*** Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematique de Roumanie. 51(99), 109-121.
- Ben-Tal, A., Nemirovski, A., (2013). ***Lectures On Modern Convex Optimization.*** Georgia: Georgia Institute of Technology, Nuremberg, 483.
- Bertsekas, D. P., (2016). ***Nonlinear Programming.*** Athena Scientific, Massachusetts, 780.
- Boyd, S., (2009). ***Convex Optimization.*** Cambridge university press, Cambridge, 730.
- Constantin, P., Persson, E. L., (2004). ***Convex Functions and Their Applications a Contemporary Approach.*** Springer Science+Business Media, Inc., Berlin, 250.
- Çağlar, M., (2022). ***Analiz III.*** İstanbul Kültür Üniversitesi yayınlar, İstanbul, 127.
- Çakar, Ö., (2007). ***Fonksiyonel Analize Giriş I.*** Ankara.Üniversitesi Fen Fakültesi, Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, Ankara, 215.
- Dandurand, B. C., (2013). ***Mathematical Optimization for Engineering Design Problems,*** Degree Doctor of Philosophy Mathematical Sciences, Clemson University, South Carolina, USA. 196.
- Das, T., (2012). ***Kleinian Groups in Hilbert Spaces.*** Degree Doctor of Philosophy Mathematical Sciences, University Of North Texas, Texas. 81.
- Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., (1998). ***Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula.*** Applied Mathematics Letters, 11(5), 91-95.
- Eichfelder, G., (2008, December 19). ***Multiobjective bilevel optimization.*** Mathematical Programming , 123, 419-449.
- Ervural, B., Ervural, B., Evren, R., (2016). ***Enerjide Optimizasyon Uygulamaları: Bir Literatür Araştırması.*** Ege Akademik Bakış / Ege Academic Review, 16, 51-70.
- Fenchel, W., (1953). ***Convex Cones, Sets and Functions.*** Princeton University Department of Mathematics, Princeton, USA, 158.

- Fioretto, F., Pontelli, E., Yeoh, W., (2018). ***Distributed Constraint Optimization Problems and Applications: A Survey***. Journal of Artificial Intelligence Research, 61, 623-698.
- Floudas, C. A., Pardalos, P. M., (2009). ***Encyclopedia of Optimization***, Springer Science+Business Media, LLC., Princeton, USA, 4626.
- Gad, A. G., (2022). ***Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications: A Systematic Review***, Archives of Computational Methods in Engineering, 29, 2531–2561.
- Gill, P. E., (1981). ***Newton-type minimization methods using the linear conjugate-gradient method***, Report (to appear), Department of Operations Research, Stanford University, 21(4), 770-788.
- Goswami, N., (2019). ***F-contractive type mappings in b-metric spaces and some related fixed point results***, Fixed Point Theory and Applications, 13, 1-17.
- Guerra, M., Torres, D., (2004). ***Lipschitzian Regularity of the Minimizing Trajectories in the Calculus of Variations and Optimal Control: a Survey***, Mathematics Control Signals Systems, 16(1), 158-174.
- Gwinner, J., (2018). ***An optimization approach to parameter identification in variational inequalities of second kind***, Optimization Letters, Springer, 1141-1154.
- Hastie, T., Tibshirani, R., Wainwright, M., (2015). ***Statistical Learning with Sparsity The Lasso and Generalization***,. CRC Press, Taylor&Francis, NewYork, 351.
- IPCC, A., (2023). ***Synthesis Report Of The IPCC Sixth Assessment Report (AR6)***. AR6 Synthesis Report Climate Change 2023, p 25.
- Jahn, J., (2020). ***Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization***. Springer Nature, Earlangen, Germany, 325.
- Kabgani, A., Soleimani-damaneh, M., (2022, May 16). ***Semi-quasidifferentiability in nonsmooth nonconvex multiobjective optimizatio***,. European Journal of Operational Research, 299, 35-45.

- Karagöz, Y., (2016). *SPSS ve AMOS Uygulamalı İstatistiksel Analizler*. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 1336.
- Karakoyun, M., (2021, Nisan). *Çok amaçlı optimizasyon problemlerinin çözümü için Kurbağa Sıçrama ve Gri Kurt Optimizasyonu algoritmaları tabanlı hibrit bir yöntemin geliştirilmesi*, Konya Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Doktora Tezi, Konya, 136.
- Karmoker, J. R., Ikramul, H., Nusrat Ahmed , A., Mohammad , S., (2019). *Development and Optimization of Acyclovir Loaded Mucoadhesive Microspheres by Box – Behnken Design*, Dhaka University Journal of Pharmaceutical Sciences, 18(1), 1816-1839.
- Keskin, Ş., (2019). *Optimization problem with second order semilinear differential inclusion*, İstanbul University, Institute of Science and Technology, Department of Mathematics, M.Sc. Thesis., İstanbul, 54.
- Kilbane, J., (2018). *Finite Metric Subsets of Banach Spaces*, University of Cambridge, Degree Doctor of Philosophy Mathematical Sciences, Cambridge, 123.
- Kobu, B., (1986). *İşletme Matematiği II*. Filiz Kitabevi, İstanbul, 354.
- Kochenderfer, M., Wheeler, T., (2019). *Algorithms for Optimization*, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 520.
- Kwon, J., Ho, N., Caramanis, C., (2021). *On the Minimax Optimality of the EM Algorithm for Learning Two-Component Mixed Linear Regression*. Proceedings of the 24th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS), San Diego: PMLR, 1405-1413.
- Lokhande, K., Khot, P. G., Khobragade, N. W., (2017). *Alternative Approach to the Optimum Solution of Linear Programming Problem*, International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS), VI, 2278-2540.
- Mai, V. S., La, R., Tao Zhang, A. B., (2023). *Distributed Optimization with Global Constraints Using Noisy Measurement*, IEEE Transactions on Automatic Control, 1-8.

- Melrose, R., 2009. **Functional Analysis**. MIT OpenCourseWare, Massachusetts, USA, https://archive.org/details/18.102S21/MIT18_102S21_lec01_360p.mp4 (23.09.2023).
- MGM23., (2023). **2022-2023 Su Yılı 7 Aylık Alansal Kümülatif Yağış Raporu**, T.C. Çevre, Şehircilik ve İklim Değişikliği Bakanlığı Meteoroloji Genel Müdürlüğü, <https://www.mgm.gov.tr/veridegerlendirme/yagis-raporu.aspx?b=k> (23.09.2023).
- Nesin, A., (2020). **Analiz IV**, Nesin Yayıncılık A.Ş., İstanbul, 320.
- Nocedal, J., Wright, S. J., (2006). **Numerical Optimization**, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering , New York, USA, 653.
- Ökten, H., (2004). **Genelleştirilmiş Konkavlığın Ekonomideki Uygulamaları**, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 42.
- Öztürk, A., (1997). **Yöneylem Araştırması**, Ekin Yayınları, Bursa, 490.
- Özer, O., Çoker, D., Coşkun, E., Diker, M., Gürçay, H., (1996). **İleri Analiz**. Bilim Yayınları, Ankara, 426.
- Özturan, A. T., (2019). **Optimizasyon ve Matlab Uygulamalar**, Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Tic. Ltd. Şti., Ankara, 616.
- Pehlivanoğlu, V., (2017). **Optimizasyon: Temel Kavramlar&Yöntemler**. Ekonomi Üniversitesi Yayınları, Ankara, 752.
- Ram, S. S., Nedić, A., Veeravalli, V. V., (2012). **A new class of distributed optimization algorithms: application to regression of distributed data**, Optimization Methods and Software, 27(1), 71-88.
- Rastegar, N., Khorram, E., (2014). **A combined scalarizing method for multiobjective programming problem**, European Journal of Operational Research (EJOR), 236(1), 229-237.
- Srivastava, Y., Srivastava, S., Boriwal, L., (2016). **Identification of Optimum Magnetic Behavior of Nano-Crystalline Co 2 FeAl Type Heusler Alloy Powders Using Response Surface Methodology**, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, San Francisco, USA, 26-30.

- Şahin, M., Efe, E., (2010). ***Kübik Spline Regresyonların Süt Sığırcılığında Laktasyon Eğrilerinin Modellenmesinde Kullanım***, KSU Doğa Bilimleri Dergisi, 13(2), 17-22.
- Taştan, F., MGM., (2023). ***Türkiye Meteorolojik Parametrelerinin İstatistiksel Analizi (1970–2022)***, T.C Çevre Şehircilik ve İklim Değişikliği Bakanlığı Meteoroloji Genel Müdürlüğü Yayınları, Ankara, 4 s.
- Tor, A. H., (2013). ***Derivative free algorithms for large scale non-smooth optimization and their applications***. Middle East Technical University, Degree Doctor of Philosophy Mathematical Sciences, Ankara, 104.
- Trueman, R., (1981). ***Quantitative Methods for Decision Making in Business***. The Dryden Press, Newyork, USA, 513.
- Uysal, G., (2010). ***Konvekslik ve Optimizasyon Üzerine***, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Sakarya, 70.
- Xia, J., (2020). ***Non-convex Optimization Problems with Multiple Variables: Practical Applications and Learning Approaches***. England: Imperial College London Department of Electrical and Electronic Engineering, Phd. Thesis, 173.
- Yıldız, Ç., (2011). ***Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları***, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Erzurum, 84.
- Yılmaz, H., (2022). ***Iğdır Kayısındaki Ağır Metal Element Düzeylerinin ICP-MS ile Tespitine Mikrodalga Fırında Çözündürmenin Etkisi***, Iğdır Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Iğdır, 120.
- Yakut, E., (2012). ***Veri Madenciliği Tekniklerinden C5.0 Algoritması ve Destek Vektör Makineleri İle Yapay Sinir Ağlarının Sınıflandırma Başarılarının Karşılaştırılması: İmalat Sektöründe Bir Uygulama***, Atatürk Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü Doktora Tezi, Erzurum, 217.
- Yaman, F., (2014). ***Optimizasyon Problemlerinin Çözümünde Hesaplama Maliyetinin Azaltılması***, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Ankara, 153.

Zeng, S., Motreanu, D., Khan, A., (2022). ***Evolutionary Quasi-Variational-Hemivariational Inequalities I: Existence and Optimal Control***, Journal of Optimization Theory and Applications 193, 950-970.



EKLER

1. Grafikler ve Şekiller İçin Python ve Matlab programları

P1: KKT Metodu için Python ile Contour Grafik Programı

```
import matplotlib.pyplot as plt
# Generate grid points for contour plot
x1 = np.linspace(-10, 10, 100)
x2 = np.linspace(-10, 10, 100)
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)
Z = objective([X1, X2])
# Create contour plot
plt.contour(X1, X2, Z, levels=20)
plt.colorbar(label='Amaç Fonksiyonu')
# Add equality constraint line
plt.plot(x1, (4 - 3*x1) / 4, 'g', label='3x1 + 4x2 = 4')
# Add inequality constraint line
plt.plot(x1, (30 - 5*x1) / 6, 'r', label='5x1 + 6x2 <= 30')
# Plot optimal solution
plt.scatter(result.x[0], result.x[1], color='red', label='Optimal çözüm')
# Set labels and title
plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('x2')
plt.title('Amaç Fonksiyonu ve Kisitlar')
# Set plot limits
plt.xlim(-10, 10)
plt.ylim(-10, 10)
# Add legend
plt.legend()
# Show the plot
plt.show()
```

Program 1. KKT metodu için contour grafik programı

P2: KKT Metodu için Python ile Surface Grafik Programı

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# Generate grid points for 3D plot
x1 = np.linspace(-10, 10, 100)
x2 = np.linspace(-10, 10, 100)
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)
Z = objective([X1, X2])
# Create 3D plot
fig = plt.figure(figsize=(10, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X1, X2, Z, cmap='viridis', alpha=0.8)
# Add equality constraint surface
X1_c1, X2_c1 = np.meshgrid(x1, x2)
Z_c1 = constraint1([X1_c1, X2_c1])
ax.plot_surface(X1_c1, X2_c1, Z_c1, color='green', alpha=0.3)
# Add inequality constraint surface
X1_c2, X2_c2 = np.meshgrid(x1, x2)
Z_c2 = constraint2([X1_c2, X2_c2])
ax.plot_surface(X1_c2, X2_c2, Z_c2, color='red', alpha=0.3)
# Set labels and title
ax.set_xlabel('x1', fontsize=12)
ax.set_ylabel('x2', fontsize=12)
ax.set_zlabel('z', fontsize=12)
ax.set_title('Amaç Fonksiyonu ve Kisitlar', fontsize=14)
# Set tick parameters
ax.tick_params(axis='x', labelsize=10)
ax.tick_params(axis='y', labelsize=10)
ax.tick_params(axis='z', labelsize=10)
# Adjust camera view and angle
ax.view_init(elev=25, azim=-45)
# Show the plot
plt.show()
```

Program 2. KKT metodu için surface grafik programı

P3: Konjugate (Eşlenik) Gradyan Yöntemi için Matlab ile Surface Grafik Programı

```
>> % Fonksiyon tanımı
f = @(x, y) x.^2 + 2*y.^2 + 2*x.*y - 4*x - 3*y + 5;

% Değer aralığı
x = linspace(-10, 10, 100);
y = linspace(-10, 10, 100);

% Koordinat matrisleri oluşturma
[X, Y] = meshgrid(x, y);

% Fonksiyon değerlerini hesaplama
Z = f(X, Y);

% 3D grafik çizimi
figure;
surf(X, Y, Z);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('f(x, y)');
title('f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 3y + 5 Grafik');
>>
```

Program 3. Konjugate (eşlenik) gradyan yöntemi için surface grafik programı

P4: Grafikler

```
import seaborn as sns
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as stats
from sklearn.linear_model import LinearRegression
from linear_regresyon_modeli import prepare_data, train_and_test_model

data = pd.read_excel('birlesik-data-ozellik-cikarimi-ile.xlsx', index_col='yil-ay')

"""
Korelasyon matrixi
"""
# korelasyon matrisini hesaplayın
corr = data.corr()

# korelasyon matrisini görselleştirmek için bir ısı haritası oluşturun
sns.heatmap(corr[['aylik-toplam-yagis']], annot=True, cmap='coolwarm')

"""
Tahmin ve Gerçek verinin karşılaştırmalı grafiği
"""
# tahminleri al
X_train, X_test, y_train, y_test = prepare_data(data)
score, y_pred = train_and_test_model(LinearRegression, X_train, X_test, y_train, y_test)
y_test = list(y_test)

# grafiği çizdir
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 4)) # Set the figsize parameter to (width, height)
ax.plot(y_test, label='Gerçek')
ax.plot(y_pred, label='Tahmin')
ax.legend()
ax.set_title("Aylık Toplam Yağış - Gerçek vs. Tahmin")
ax.set_xlabel("Zaman")
ax.set_ylabel("Aylık Toplam Yağış")
plt.show()

"""
Rezidüellerin Q-Q grafiği
"""
# rezidüelleri hesapla
residuals = y_test - y_pred

# grafiği çizdir
stats.probplot(residuals, plot=plt)
plt.title('Rezidüellerin Q-Q grafiği')
plt.xlabel('Teorik quantiles')
plt.ylabel('Örneklem quantiles')
plt.show()

"""
Rezidüellerin histogramı
"""
plt.hist(residuals, bins=20)
plt.title('Rezidüellerin histogramı')
plt.xlabel('Rezidüeller')
plt.ylabel('Sıklık')
plt.show()
```

Program 4. Veri seti için çizilen grafiklerin programı

P5: Lineer Regresyon Modeli

```
import pandas as pd
from sklearn.linear_model import LinearRegression, Ridge, Lasso
from sklearn.preprocessing import MinMaxScaler
from sklearn.model_selection import train_test_split

"""
## Lineer Regresyon Modeli

2. Verinin sütunlarını her bir sütun kendi içerisinde 0 ile 1 arasında olacak şekilde ölçeklendirildi.
3. Veri setinin yüzde 90'lık kısmını lineer regresyon modelini eğitmek için, kalan yüzde 10'luk kısmını da eğitilen modelin başarısını ölçmek için kullanıldı.
4. Lineer regresyon modeli verilerle eğitildi.

## Modelin Değerlendirmesi
5. Eğitilen model R^2 metriğiyle değerlendirildi ve sonuç olarak R^2 = 0.75 çıktı.
6. Eğitilen model kullanılarak, verilen bir data noktasının özelliklerini girdi olarak alıp aylık toplam yağışı çıktı olarak tahminleyen bir fonksiyon yazıldı.
7. Verinin özelliklerinin, aylık toplam yağışa olan korelasyonunu çıkartıp sıcaklık haritası olarak görselleştirildi.
"""

Sonuçlar:

Linear Regression score (R^2): 0.75
Ridge Regression score (R^2): 0.68
Lasso Regression score (R^2): 0.37
"""

def prepare_data(data):
    # null olan verileri sil
    data = data.dropna()

    # özellikleri ve hedef değişkeni seç
    X = data.drop('aylik-toplam-yagis', axis=1)
    y = data['aylik-toplam-yagis']

    # özellikleri 0 ile 1 arasında ölçeklendir
    scaler = MinMaxScaler()
    X_scaled = scaler.fit_transform(X)

    # verileri eğitim ve test setlerine ayır
    X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(X_scaled, y, test_size=0.1, shuffle=False, random_state=8)

    return X_train, X_test, y_train, y_test

def train_and_test_model(Model, X_train, X_test, y_train, y_test):
    model = Model()
    model.fit(X_train, y_train)

    # modeli test verileri üzerinde değerlendir
    score = model.score(X_test, y_test)
    print("Model skoru (R^2): {:.2f}".format(score))

    return score

# dosyadan verileri yükle
data = pd.read_excel('birlesik-data-ozellik-cikarimi-ile.xlsx', index_col='yil-ay')
X_train, X_test, y_train, y_test = prepare_data(data)

train_and_test_model(LinearRegression, X_train, X_test, y_train, y_test)
train_and_test_model(Ridge, X_train, X_test, y_train, y_test)
train_and_test_model(Lasso, X_train, X_test, y_train, y_test)
```

Program 5. Lineer regresyon modeli programı

P6: Ön Veri İşleme Programı

```
import pandas as pd

"""
## Veri İşleme
1. Elimizde olan ham verileri işleyerek tek bir excel tablosuna çevirdim.
   * Her bir satır bir data noktasını temsil ediyor. Sütunlar da datanın özelliklerini temsil ediyor.
   * Datanın özelliklerine ek olarak da hangi ayda olduğumuzu temsil eden 12 tane daha sütun ekledim.
   * Hangi ayda isek o aya denk gelen sütunun değeri 1 geri kalan aylar 0 oluyor.
"""

dfs = []
filenames = ["aylik-ortalama-nispi-nem", "aylik-ortalama-sicaklik",
              "aylik-toplam-acik-yuzey-buharlasmasi", "aylik-ortalama-ruzgar-hizi",
              "aylik-toplam-yagis"]

for filename in filenames:
    # Orijinal excel dosyasından verileri yükle
    df = pd.read_excel(f"{filename}.xlsx")

    # Veriyi genişten uzuna (wide to long) dönüştürmek için melt işlemi uygula
    df_melted = pd.melt(df, id_vars=["Yıl/Ay"], var_name="Ay", value_name=filename)

    # "YYYY-AA" formatında yeni bir sütun oluşturun
    df_melted["yil-ay"] = df_melted["Yıl/Ay"].astype(str) + "-" + df_melted["Ay"].astype(str).zfill(2)

    # Artık ihtiyaç duymadığımız sütunları sil
    df_melted.drop(["Yıl/Ay", "Ay"], axis=1, inplace=True)

    # yil-ay sütununu datetime nesnesine dönüştür
    df_melted['yil-ay'] = pd.to_datetime(df_melted['yil-ay'])

    # DataFrame'i yil-ay sütunu ile sırala
    df_melted = df_melted.sort_values('yil-ay')

    # yil-ay sütununu index olarak belirle
    df_melted = df_melted.set_index('yil-ay')
    dfs.append(df_melted)

# Tüm DataFrame'leri zaman damgası (timestamp) olarak kullanarak tek bir DataFrame'e birleştir
df_merged = pd.concat(dfs, axis=1)
df_merged.columns = filenames # Orijinal DataFrame'ler arasında ayırt etmek için sütunları yeniden adlandır

# Birleştirilmiş DataFrame'in index'ini zaman damgası (timestamp) olarak belirle
df_merged.set_index(df_merged.index, inplace=True)

# İsteğe bağlı olarak, eksik değerleri içeren satırları sil
df_merged.dropna(inplace=True)

# İşlenmiş verileri yeni bir excel dosyasına kaydet
df_merged.to_excel("birlesik-data.xlsx")
```

Program 6. Ön veri işleme programı

P7: Korelasyon Matrisini Kullanarak Özellik Seçimi

```
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

"""
Korelasyon matrixi kullanarak ozellik secimi

Result:
Optimal özellik sayısı: 10
Seçilen özellikler: ['yil-ay', 'ay_5', 'mevsim_2', 'aylik-toplam-acik-yuzey-buharlamasi_lag3',
'aylik-toplam-acik-yuzey-buharlamasi_lag9', 'aylik-ortalama-nispi-nem_lag9', 'aylik-ortalama-sicaklik_lag3',
'ay_4', 'aylik-toplam-yagis', 'aylik-ortalama-sicaklik_lag9']

Model score (R^2): 0.52
"""

# Veri okuma ve NaN degerlerin cikarilmasi
df = pd.read_excel(f"birllesik-data-ozellik-cikarimi-ile.xlsx")
df = df.dropna()

# Korelasyon matrisinin hesaplanmasi
corr = df.corr()

# Korelasyon matrisinin gorsellestirilmesi
plt.figure(figsize=(5, 15))
sns.heatmap(corr[['aylik-toplam-yagis']], annot=True, cmap='coolwarm')
plt.show()

# Esik degerinden buyuk korelasyon katsayisina sahip ozelliklerin secilmesi
esik_degeri = 0.3
korelasyonlu_ozellikler = set(["yil-ay"])
for i in range(len(corr.columns)):
    if abs(corr['aylik-toplam-yagis'].iloc[i]) > esik_degeri:
        korelasyonlu_ozellikler.add(corr.columns[i])

# Korelasyonlu ozelliklerin veri setinden cikarilmasi
korelasyonlu_ozellikler = list(korelasyonlu_ozellikler)
korelasyonlu_ozellikler.remove("yil-ay")
korelasyonlu_ozellikler.remove("aylik-toplam-yagis")
df = df.loc[:, korelasyonlu_ozellikler]

# Secilen ozelliklerin gosterilmesi
print("Secilen ozellikler:", list(df.columns))
```

Program 7. Korelasyon matrisini kullanarak özellik seçimi

P8: Rastgele Forest Regresyon Özellik Seçimi

```

import pandas as pd
from sklearn.feature_selection import RFE
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
from skopt import gp_minimize
from skopt.space import Integer

"""
Random Forest regression kullanarak hangi özellikleri seçmemiz gerektiğini bulduk.
Bayesian optimization kullanarak kaç tane özellik seçmemiz gerektiğini bulduk.

Sonuç:
Optimal özellik sayısı: 6
Seçilen özellikler: ['aylık-ortalama-nispi-nem', 'aylık-ortalama-nispi-nem_lag9',
'aylık-ortalama-sicaklik_lag1', 'aylık-ortalama-sicaklik_lag3',
'aylık-ortalama-sicaklik_lag9',
'aylık-toplam-acik-yuzey-buharlasmasi_lag9']

Model score (R^2): 0.62
"""
# Bayes optimizasyonu için amaç fonksiyonunu tanımla
def objective(n_features):
    # Random Forest regresörü oluştur
    rf = RandomForestRegressor(n_estimators=100)

    # Bir RFE seçici oluştur ve veriye uygun hale getir
    rfe = RFE(estimator=rf, n_features_to_select=n_features[0])
    rfe.fit(X, y)

    # Çapraz doğrulama puanlarının negatif ortalamasının karesel hatasını döndür
    return -rfe.score(X, y)

# Verileri özellikler (X) ve hedef (y) olarak ayır
df = pd.read_excel(f"birlesik-data-ozellik-cikarimi-ile.xlsx")
df = df.dropna()
X = df.drop(['aylık-toplam-yagis', 'yil-ay'], axis=1)
y = df['aylık-toplam-yagis']

# Özellik sayısı için arama alanını tanımla
space = [Integer(1, X.shape[1])]

# Optimal özellik sayısını bulmak için Bayes optimizasyonunu kullan
res = gp_minimize(objective, space, n_random_starts=10, n_calls=20)

# Optimal özellik sayısını ve seçilen özellikleri yazdır
optimal_n_features = res.x[0]
print("Optimal özellik sayısı:", optimal_n_features)
print("Seçilen özellikler:", X.columns[RFE(estimator=RandomForestRegressor(n_estimators=100), n_features_to_select=optimal_n_features).fit(X, y).support_])

```

Program 8. Rastgele forest regresyon özellik seçimi

2. Araştırmada Kullanılan Veri Setleri

Ek 1.1. Iğdır ilinde yetiştirilen kayısıdaki çeşitli elementler ile ilgili çalışma

İğdır İli ve Merkez İlçelerindeki Kayısının; Kabuğu, Çekirdeği ve Meyve Özündeki Çeşitli Elementler ile İlgili Çalışma								
V1	V2	Cu	Zn	As	Se	Cd	Hg	Pb
Çekirdek	Ç11	2,97817231	0,00594903	2,620791348	4,416093655	5,138522048	0,08425714	0,571149533
Çekirdek	Ç12	0,608344742	2,729052915	3,805331255	0	1,556500107	0,157269441	0,484235513
Çekirdek	Ç13	0,102963099	0,496362052	0,991504953	0,577403372	5,250634431	0,073746638	0,100079369
Çekirdek	Ç21	3,146369808	0,003540569	1,212212179	1,204644672	4,934801481	0,058467457	0,602962264
Çekirdek	Ç22	0,451480191	2,895634783	1,921701891	0	2,13624095	0,929530635	0,596835708
Çekirdek	Ç23	0,065058159	0,524394968	0,590094772	0,215607918	4,192758663	0,077897154	0,095438695
Çekirdek	Ç31	3,402244577	0,004628464	1,373179975	0,980361553	4,411316629	0,074718035	0,53404984
Çekirdek	Ç32	0,592247303	3,212810073	0,721484819	0	1,625728221	0,662899998	0,554861995
Çekirdek	Ç33	0,091131152	0,567040763	0,771410693	0,246531481	5,483922282	0,082578398	0,099048693
Çekirdek	Ç41	3,296448146	0,001856471	0,399410695	0,68722485	5,329279839	0,103599403	0,586057142
Çekirdek	Ç42	0,543366338	3,203816439	1,776916512	1,133340979	1,656504642	0,903730613	0,595449004
Çekirdek	Ç43	0,093331202	0,549408024	0,309411831	0,219174781	3,229540721	0,107839102	0,08152569
Kabuk	K11	0,188987334	1,459143883	5,950995426	1,452793961	3,342747593	0,045395998	0,437914926
Kabuk	K12	0,224199227	1,755438588	3,024961296	6,050916911	1,691336554	0,775946912	0,585431968
Kabuk	K13	0,196070197	2,044182374	5,841565818	0,953889544	6,067196167	0,076307595	0,649531404
Kabuk	K21	0,168201608	0,998412427	0,688821458	0,150544444	2,853226304	0,04557349	2,624691927
Kabuk	K22	0,154528299	1,417407421	2,630347845	0,690707588	1,718990171	1,011242869	3,802168067
Kabuk	K23	0,360195309	1,375033468	1,320342331	0,019766072	5,430655359	0,073659203	2,50936643
Kabuk	K31	0,159629091	1,014555821	0,499577445	0,121734516	4,987222238	0,047163049	0,883396095
Kabuk	K32	0,169920569	1,278542728	3,34044938	0	1,863506576	0,895744892	1,16302023
Kabuk	K33	0,203680067	1,391381325	0,571794892	0	4,588142698	0,048487682	1,880778882
Kabuk	K41	0,170822303	1,073316321	0,615205794	0	1,879245462	0,058289965	0,523139411
Kabuk	K42	0,142262426	1,699390148	1,04958729	0,097195397	1,760868859	2,778252434	0,859490026
Kabuk	K43	0,21824534	1,404546445	0,614617649	0	4,711711697	0,057849295	0,84874159
Meyve Özü	M11	0,351357808	1,044914337	5,142006627	0	0,14814189	0,257540099	0,199281973
Meyve Özü	M12	0,284923337	1,255857224	20,69628616	0	9,73278221	2,454979741	0,51839065
Meyve Özü	M13	0,375850633	0,815672334	4,37636696	0	19,9133663	1,869610386	0,433004525
Meyve Özü	M21	0,278079332	0,761220441	4,458029423	0,471450511	23,96372276	0,276090205	0,407784399
Meyve Özü	M22	0,254455753	1,736398637	18,2941741	1,293869221	10,03321671	7,494048808	0,594893632
Meyve Özü	M23	0,677793482	0,988489363	5,335583785	0	25,49118869	0,276614812	0,552030669
Meyve Özü	M31	0,380368052	0,988691489	4,18565656	0,656679185	22,5715228	0,339142727	0,418331437
Meyve Özü	M32	0,286516716	1,418158972	22,04381462	0,338400691	16,78533176	14,2143524	0,60421155
Meyve Özü	M33	0,391994799	1,108013202	3,890304031	1,052537766	18,90212983	0,321127721	0,406575703
Meyve Özü	M41	0,231752977	0,660309485	1,459425574	0,612017827	7,732026184	0,247472889	0,279966227
Meyve Özü	M42	0,248952929	1,480040826	4,254388498	0	10,10933147	4,06217149	0,592683365
Meyve Özü	M43	0,228901144	0,843603915	0,693388856	0,270380612	22,00183403	0,191297965	0,433256732

Çizelgedeki veriler; İğdır üniversitesi lisansüstü eğitim enstitüsü yüksek lisans tezi olan, “İğdır Kayısısındaki Ağır Metal Element Düzeylerinin ICP-MS ile Tespitine Mikrodalga Fırında Çözündürmenin Etkisi” adlı çalışmanın ham verilerinden alınmıştır.

Ek 1.2. Iğdır ili için 2001-2021 tarihleri arasındaki meteorolojik veriler

Iğdır ili için 2001-2021 tarihleri arasındaki meteorolojik veriler						Iğdır ili için 2001-2021 tarihleri arasındaki meteorolojik veriler					
Yıl-ay	Ayhk-ortalama-nispi-nem	Ayhk-ortalama-sıcaklık	Ayhk-toplam-açık-yüzey-buharlaşması	Ayhk-ortalama-rüzgar-hızı	Ayhk-toplam-yağış	Yıl-ay	Ayhk-ortalama-nispi-nem	Ayhk-ortalama-sıcaklık	Ayhk-toplam-açık-yüzey-buharlaşması	Ayhk-ortalama-rüzgar-hızı	Ayhk-toplam-yağış
2001-01-01 00:00:00	65,6	-1,9	0	0,8	4	2012-05-01 00:00:00	52,8	19,4	146,7	1,2	57,4
2001-02-01 00:00:00	54,7	2,9	0	1,3	9,5	2012-06-01 00:00:00	39,4	24,6	262,3	1,8	26,7
2001-03-01 00:00:00	54,2	10,6	1,9	1,4	40,7	2012-07-01 00:00:00	45,8	25,8	250,8	1,4	23
2001-04-01 00:00:00	56,6	14,2	134,8	1,2	57,2	2012-08-01 00:00:00	39	27,5	254	1,4	0,6
2001-05-01 00:00:00	55,3	16,4	141,4	1,3	59,5	2012-09-01 00:00:00	48,8	21,6	171,1	1,1	29,3
2001-06-01 00:00:00	42,2	23,3	288,3	1,6	16,3	2012-10-01 00:00:00	62,3	15,7	85,6	0,6	11,5
2001-07-01 00:00:00	43,2	25,9	367,4	1,2	9,2	2012-11-01 00:00:00	76,2	8,5	8,2	0,4	20,7
2001-08-01 00:00:00	45,9	26,5	363,1	1,2	13,3	2012-12-01 00:00:00	75,5	1,5	0	0,8	27,4
2001-09-01 00:00:00	44,9	21,8	309,5	1,1	0,2	2013-01-01 00:00:00	73,4	-2,2	0	0,8	19,6
2001-10-01 00:00:00	59,6	13,3	198,1	0,9	29,6	2013-02-01 00:00:00	65	4,2	0	1	15,2
2001-11-01 00:00:00	63,9	5,2	8,2	1	13,1	2013-03-01 00:00:00	44,5	9,1	3,3	1,7	14,8
2001-12-01 00:00:00	71,5	1,6	0	0,8	17,5	2013-04-01 00:00:00	47,3	15,1	151,9	1,4	34,6
2002-01-01 00:00:00	62,3	-2,9	0	1,1	5,3	2013-05-01 00:00:00	56	18,4	150,6	1,2	58,9
2002-02-01 00:00:00	53,1	3,5	0	1,3	1,9	2013-06-01 00:00:00	46,6	22,9	203	1,4	38,3
2002-03-01 00:00:00	53,7	8,5	1,9	1,4	26,1	2013-07-01 00:00:00	40,7	26,4	249,9	1,7	10,6
2002-04-01 00:00:00	58,6	11,1	109,5	1,4	88,7	2013-08-01 00:00:00	43,1	25,2	227,5	1,4	8,3
2002-05-01 00:00:00	55	15,9	159,7	1,5	77,1	2013-09-01 00:00:00	43,3	21,4	159,6	1,3	9,9
2002-06-01 00:00:00	48,1	21,7	326,9	1,8	52,6	2013-10-01 00:00:00	53,4	12,6	91,1	0,9	15,4
2002-07-01 00:00:00	44,9	25,9	426,1	1,6	16,3	2013-11-01 00:00:00	70,1	8,6	8,2	0,3	13,1
2002-08-01 00:00:00	46,4	25,6	366	1,8	12,5	2013-12-01 00:00:00	74,1	-7,1	0	0,8	30,3
2002-09-01 00:00:00	51,1	22,1	218	1,3	3,2	2014-01-01 00:00:00	79,5	-4,8	0	0,7	15,3
2002-10-01 00:00:00	63,9	14,8	132,2	1	19,7	2014-02-01 00:00:00	57,2	2	0	0,9	3,6
2002-11-01 00:00:00	62,7	6,1	8,2	0,9	6,5	2014-03-01 00:00:00	46,8	10,2	1,9	1,4	17,2
2002-12-01 00:00:00	68	-7,5	0	1	34,8	2014-04-01 00:00:00	48	15,2	97,1	1,4	30,5
2003-01-01 00:00:00	74,5	-4,9	0	1	4,7	2014-05-01 00:00:00	53,9	19,3	142	1,3	49,9
2003-02-01 00:00:00	67,9	-0,1	0	1,4	28,8	2014-06-01 00:00:00	43,6	23,3	177,9	1,5	34,6
2003-03-01 00:00:00	58,9	3,8	1,9	1,7	46,3	2014-07-01 00:00:00	40,3	27,2	221,4	1,4	7,7
2003-04-01 00:00:00	54,5	12,2	119,8	1,9	40,4	2014-08-01 00:00:00	37,6	27,7	181	1,1	5
2003-05-01 00:00:00	47,7	18,5	223,1	1,7	42,5	2014-09-01 00:00:00	42,9	22,6	157,2	1,2	15,2
2003-06-01 00:00:00	46,6	21,5	260,8	2	34,4	2014-10-01 00:00:00	66,1	13,8	60,5	0,7	27,1
2003-07-01 00:00:00	44,5	26	356,8	1,9	36,3	2014-11-01 00:00:00	72,6	5,6	8,2	0,5	20,5
2003-08-01 00:00:00	46,7	26,1	325,1	1,6	11,6	2014-12-01 00:00:00	79	3,4	0	0,5	13,6
2003-09-01 00:00:00	50,9	20,7	282,6	1,5	6,7	2015-01-01 00:00:00	64,7	1	0	0,5	2,6
2003-10-01 00:00:00	64,2	15,5	201,5	1,1	59,6	2015-02-01 00:00:00	60,1	4,2	0	0,6	4,4
2003-11-01 00:00:00	67	5,9	8,2	1,1	41,1	2015-03-01 00:00:00	50,7	8,4	1,5	1	52
2003-12-01 00:00:00	67,8	0,1	0	1,2	4,3	2015-04-01 00:00:00	47,2	13,8	111,7	1,6	44,1
2004-01-01 00:00:00	67,8	-1,7	0	1	20,2	2015-05-01 00:00:00	51	18,7	120,9	1,3	41,7
2004-02-01 00:00:00	58,3	2,5	0	1,8	12,3	2015-06-01 00:00:00	41,3	24,9	189,4	1,4	27,8
2004-03-01 00:00:00	46,2	8,9	1,9	1,9	14,9	2015-07-01 00:00:00	35,1	28,4	224,5	1,5	0,3
2004-04-01 00:00:00	47	11,4	125,9	1,9	48,5	2015-08-01 00:00:00	41,7	26,9	200,3	1,2	14,3
2004-05-01 00:00:00	56,3	16,7	163,9	1,7	85,7	2015-09-01 00:00:00	43,7	23,4	148,7	0,9	1,4
2004-06-01 00:00:00	46,8	22,2	242,9	2	36,8	2015-10-01 00:00:00	72,2	14,6	63,8	0,8	96,2
2004-07-01 00:00:00	41,3	24,9	280,9	1,8	15,9	2015-11-01 00:00:00	66,7	6,5	22	0,7	4,5
2004-08-01 00:00:00	42,8	26,7	303,2	1,8	4,8	2015-12-01 00:00:00	69,8	-0,3	0	0,7	13,7
2004-09-01 00:00:00	47	20,5	210,7	1,6	3,2	2016-01-01 00:00:00	68,2	-1,3	0	1	24,7
2004-10-01 00:00:00	60,4	14,2	94,8	1,2	18,7	2016-02-01 00:00:00	63,3	4,8	0	0,9	9,2
2004-11-01 00:00:00	62,3	6,4	8,2	1,3	18,1	2016-03-01 00:00:00	48,8	9,3	1,9	1,5	9,7
2004-12-01 00:00:00	55,5	-3,7	0	1,1	2,5	2016-04-01 00:00:00	48,4	14,5	102,6	1,3	20,1
2005-01-01 00:00:00	59,9	-4,3	0	1,1	20,7	2016-05-01 00:00:00	55,3	18,5	117,1	1,4	23,5
2005-02-01 00:00:00	54,8	-1,1	0	1,3	12,9	2016-06-01 00:00:00	51,1	22,6	161,6	1,3	26,9
2005-03-01 00:00:00	48,7	6,7	1,9	2,3	49	2016-07-01 00:00:00	47,9	26	189,4	1,4	32
2005-04-01 00:00:00	44,7	15,1	140,8	1,8	29,5	2016-08-01 00:00:00	45,3	27,2	197,9	1,2	7,8
2005-05-01 00:00:00	49,6	18,1	187,8	1,8	38,7	2016-09-01 00:00:00	49,9	20,4	128,9	1,3	19,8
2005-06-01 00:00:00	43,2	22,1	241,6	2	48,2	2016-10-01 00:00:00	69	12,5	58,5	0,5	31,1
2005-07-01 00:00:00	36,7	28,1	328,4	1,9	10,3	2016-11-01 00:00:00	70,3	3,7	8,2	0,5	45
2005-08-01 00:00:00	42,3	27,4	264,9	1,7	23,1	2016-12-01 00:00:00	69,8	-3,8	0	0,8	35,9
2005-09-01 00:00:00	45,4	21	175,3	1,6	11,8	2017-01-01 00:00:00	77,7	-8,9	0	0,8	16,8
2005-10-01 00:00:00	54,6	13,3	91,6	1,3	6,6	2017-02-01 00:00:00	74	-6,6	0	0,7	8,4
2005-11-01 00:00:00	56,7	6	8,2	0,9	2,3	2017-03-01 00:00:00	59,9	6,7	1,9	1	11,4
2005-12-01 00:00:00	74,3	-0,6	0	1	14,3	2017-04-01 00:00:00	47,2	13,4	99,9	1,4	18,1
2006-01-01 00:00:00	61,3	-4,1	0	1	28,2	2017-05-01 00:00:00	54	18,6	134,5	1,5	57
2006-02-01 00:00:00	65,4	-1,3	0	1,2	29,8	2017-06-01 00:00:00	42,9	24,2	232,8	1,7	8,2
2006-03-01 00:00:00	45,5	9	1,9	1,6	3,6	2017-07-01 00:00:00	41,9	28	218,3	1,4	5,4
2006-04-01 00:00:00	54,2	14,1	99,8	1,7	96,9	2017-08-01 00:00:00	44,3	27,8	196,8	1,1	8,9
2006-05-01 00:00:00	48,9	19,1	203,6	1,8	47,5	2017-09-01 00:00:00	44,5	23,4	143,5	1	2,2
2006-06-01 00:00:00	36,6	26,3	308,4	1,9	19,5	2017-10-01 00:00:00	63,1	12,9	68,7	0,9	33,3
2006-07-01 00:00:00	40,9	26,2	269,5	1,9	25,8	2017-11-01 00:00:00	76	7	8,2	0,5	42,6
2006-08-01 00:00:00	36,4	28,5	286	1,6	2,5	2017-12-01 00:00:00	75,3	1,9	0	0,7	5,3
2006-09-01 00:00:00	41,4	21,8	198,6	1,8	3,4	2018-01-01 00:00:00	73,6	2,5	0	0,8	13,6
2006-10-01 00:00:00	66,6	14,9	72,9	1,2	52,2	2018-02-01 00:00:00	59,3	6,3	0	0,8	33,3
2006-11-01 00:00:00	51,7	6,3	8,2	1,4	8	2018-03-01 00:00:00	51,9	12,3	1,9	1,5	16,5
2006-12-01 00:00:00	62,6	-4,4	0	1,1	18	2018-04-01 00:00:00	49,6	14,2	117	1,3	15,2

Ek 1.2. Devamı

2007-01-01 00:00:00	70,5	-9,9	0	0,9	14,8	2018-05-01 00:00:00	65,5	18,4	121,9	1,1	70
2007-02-01 00:00:00	61,9	-1,2	0	1,2	8,4	2018-06-01 00:00:00	54,5	23,4	156,9	1,2	31,8
2007-03-01 00:00:00	51,3	7	1,9	1,8	51,3	2018-07-01 00:00:00	42,8	29,2	222,6	1,3	5,8
2007-04-01 00:00:00	51	10,5	77,6	2	67,4	2018-08-01 00:00:00	48,4	26,4	179,2	1,3	5,8
2007-05-01 00:00:00	48,2	19,2	173	1,7	28,2	2018-09-01 00:00:00	48,2	22,8	157,5	1,1	6,5
2007-06-01 00:00:00	43,3	22,9	222,2	2	35,3	2018-10-01 00:00:00	63,9	15	63	0,8	20,8
2007-07-01 00:00:00	43,4	25,7	226	2	32,3	2018-11-01 00:00:00	81	7	8,2	0,5	29,5
2007-08-01 00:00:00	44,9	25,4	193,6	1,8	41,7	2018-12-01 00:00:00	81,7	3,8	0	0,7	28,8
2007-09-01 00:00:00	44,3	23,1	191,3	1,6	0	2019-01-01 00:00:00	69,3	0,6	0	0,9	12,3
2007-10-01 00:00:00	57,6	15,6	98,1	1,4	41,5	2019-02-01 00:00:00	61,9	3,7	0	1,1	19
2007-11-01 00:00:00	57,1	6,1	8,2	1,4	40,8	2019-03-01 00:00:00	59,7	6,8	1,9	1,4	23,5
2007-12-01 00:00:00	54,6	-0,4	0	1,2	2,2	2019-04-01 00:00:00	56,9	12,1	93,7	1,3	25,1
2008-01-01 00:00:00	52	-10	0	0,9	11,8	2019-05-01 00:00:00	51,2	19,9	163,8	1,2	25,9
2008-02-01 00:00:00	44,7	-1,9	0	1,3	4,7	2019-06-01 00:00:00	45,8	25,6	236,4	1,3	13,6
2008-03-01 00:00:00	35,4	11,9	1,9	2,1	5,8	2019-07-01 00:00:00	40,1	27,3	266,6	1,7	0,6
2008-04-01 00:00:00	36	16,8	136,7	1,9	20,3	2019-08-01 00:00:00	41,3	27	234,8	1,4	0,6
2008-05-01 00:00:00	43,7	17	157,2	2,1	30,5	2019-09-01 00:00:00	53,6	19,9	140,6	1	15,4
2008-06-01 00:00:00	36,9	22,8	240,1	2,3	24,1	2019-10-01 00:00:00	58,1	15,8	101,1	0,6	4,5
2008-07-01 00:00:00	34	27	290,1	2,3	4,6	2019-11-01 00:00:00	70,1	4,3	1,6	0,5	9,5
2008-08-01 00:00:00	34,3	26,4	248,3	1,9	5,4	2019-12-01 00:00:00	79,2	3,3	0	0,6	12,4
2008-09-01 00:00:00	40,5	21,5	161,7	1,6	31,6	2020-01-01 00:00:00	65,2	0	0	0,7	7,3
2008-10-01 00:00:00	53,1	14,4	71,4	1,2	8,5	2020-02-01 00:00:00	64,4	1,9	0	1,1	14,1
2008-11-01 00:00:00	58,7	6,7	8,2	0,9	3,3	2020-03-01 00:00:00	56,4	10,6	2,8	1	18,1
2008-12-01 00:00:00	53,8	-0,7	0	1,1	12,2	2020-04-01 00:00:00	64,8	11,7	80,8	1,2	83,6
2009-01-01 00:00:00	64,3	-6,1	0	1	8,2	2020-05-01 00:00:00	55	18,6	137,5	1,2	76,1
2009-02-01 00:00:00	52	3,9	0	1,3	24,7	2020-06-01 00:00:00	44,7	23,9	190,9	1,2	15,7
2009-03-01 00:00:00	38,7	7,3	1,9	2,1	21,8	2020-07-01 00:00:00	48,4	26,7	218,4	1,3	30,2
2009-04-01 00:00:00	43,7	11,7	99,4	2	34,3	2020-08-01 00:00:00	47,6	24,2	190,6	1,2	15,3
2009-05-01 00:00:00	41,3	18,6	145	2,1	26,3	2020-09-01 00:00:00	47,7	23,5	142,6	0,9	1,4
2009-06-01 00:00:00	44,4	22	166,3	1,8	55,2	2020-10-01 00:00:00	49,6	14,5	56,6	0,4	7,3
2009-07-01 00:00:00	39,2	25,4	206,2	2,1	47,7	2020-11-01 00:00:00	67	7,2	8,2	0,7	7,3
2009-08-01 00:00:00	38,2	23,3	192,4	2	13,5	2020-12-01 00:00:00	81,4	1,9	0	0,7	20,6
2009-09-01 00:00:00	52,9	19,2	115,2	1,4	27,4	2021-01-01 00:00:00	78,5	-3,7	0	0,6	12
2009-10-01 00:00:00	60,1	15,2	71,2	0,6	10,4	2021-02-01 00:00:00	63,1	4,2	0	0,9	5,4
2009-11-01 00:00:00	67,4	7,9	8,2	0,8	22,2	2021-03-01 00:00:00	54,9	7,4	1,6	1,5	46,4
2009-12-01 00:00:00	77,7	3,6	0	0,6	12,2	2021-04-01 00:00:00	43,6	17,4	138	1,3	18,4
2010-01-01 00:00:00	71,4	2,4	0	1,1	24,2	2021-05-01 00:00:00	46,3	21,1	171,7	1,3	42,1
2010-02-01 00:00:00	68,2	4,9	0	1,1	34,1	2021-06-01 00:00:00	33,9	26,8	221,6	1,5	0,7
2010-03-01 00:00:00	48,7	10,4	1,9	2	8,6	2021-07-01 00:00:00	45,7	27,4	196,6	1,3	32,4
2010-04-01 00:00:00	62,8	12,5	68,8	1,4	88,2	2021-08-01 00:00:00	40,6	27,4	156,1	1,1	8,3
2010-05-01 00:00:00	62,9	17	97	1,3	91,9	2021-09-01 00:00:00	44,8	22,2	121,4	1,1	11,5
2010-06-01 00:00:00	45,5	24,7	183,6	1,4	18,7	2021-10-01 00:00:00	60	12,7	46,4	0,8	18,5
2010-07-01 00:00:00	41,8	28	239,6	1,5	12,7	2021-11-01 00:00:00	80,7	13,5	0,9	0,5	6,2
2010-08-01 00:00:00	38,2	26,7	235,1	1,3	4,6	2021-12-01 00:00:00	70,1	0,9	0	0,7	15,8
2010-09-01 00:00:00	46,2	23,5	153,4	1	0,9						
2010-10-01 00:00:00	69,6	15,2	74,1	0,8	61,1						
2010-11-01 00:00:00	63,4	6,4	8,2	0,4	0						
2010-12-01 00:00:00	64,7	2,5	0	0,4	1,3						
2011-01-01 00:00:00	75,9	-0,7	0	0,6	6						
2011-02-01 00:00:00	66,2	0,6	0	1,2	22,6						
2011-03-01 00:00:00	48,3	7,6	1,9	1,4	16,8						
2011-04-01 00:00:00	57,6	13,4	77,8	1,5	73,9						
2011-05-01 00:00:00	61,5	17,2	105,7	1,3	76,9						
2011-06-01 00:00:00	50,5	22,9	174,2	1,4	40,4						
2011-07-01 00:00:00	42	27,7	229,4	1,4	24						
2011-08-01 00:00:00	44	25,9	212,6	1,4	24,3						
2011-09-01 00:00:00	47,1	21,1	156,4	1,3	10,6						
2011-10-01 00:00:00	59,7	13	75,1	0,9	25,8						
2011-11-01 00:00:00	64,7	3	8,2	0,8	9,2						
2011-12-01 00:00:00	72,8	-1,8	0	0,6	9,1						
2012-01-01 00:00:00	60,6	0,2	0	0,9	0						
2012-02-01 00:00:00	63,3	-3,2	0	1,1	12,5						
2012-03-01 00:00:00	46,8	3,5	0,4	1,8	13,5						
2012-04-01 00:00:00	45	15,7	116,7	1,4	16,2						

Çizelgedeki verilerin ham hali, Meteoroloji Genel Müdürlüğü 16.Bölge Müdürlüğü tarafından sağlanmıştır.