



**HEMEN HEMEN PARAKONTAK
HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS
RIEMANN MANİFOLDLAR**

Yüksek Lisans Tezi

Vildan KORUCU AKAN

Eskişehir, 2023

HEMEN HEMEN PARAKONTAK HEMEN HEMEN
PARAKOMPLEKS RIEMANN MANİFOLDLAR

Vildan KORUCU AKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Ağustos, 2023

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Vildan KORUCU AKAN'ın "Hemen Hemen Parakontak Hemen Hemen Parakompleks Riemann Manifoldlar" başlıklı çalışması 03/08/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı) : Prof. Dr. Şenay BULUT

Üye : Doç. Dr. Şirin AKTAY

Üye : Doç. Dr. Serhan EKER

Prof. Dr. Semra KURAMA

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

03/08/2023

DANIŞMAN ONAYI

DaniŐmanlıđını yuruttuğum Yrkksek Lisans oğrencisi Vildan KORUCU AKAN, “Hemen Hemen Parakontak Hemen Hemen Parakompleks Riemann Manifoldlar” başlıklı tez çalıŐmasını tamamlamıŐtır. HazırlamıŐ olduğu tez tarafımda incelenmiş ve oğrencinin tez savumma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun gvrvlmüŐtvr.

Tez DaniŐmanı
Prof. Dr. Şenay BULUT

ÖZET

HEMEN HEMEN PARAKONTAK HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS RIEMANN MANİFOLDLAR

Vildan KORUCU AKAN

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos, 2023

Danışman: Prof. Dr. Şenay BULUT

Bu tez çalışmasında hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifoldları ve bu manifoldların özel bir sınıfı olan para-Sasaki benzeri manifoldlar ele alınmıştır. Bu manifoldların sınıflandırması için $(0,3)$ tipinde temel tensör alanı kullanılmış ve bu tür manifoldlar 11 temel sınıfa ayrılmıştır. 3 boyutlu Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapısı incelenmiş ve sınıflandırması yapılmıştır. Bundan hareketle 5-boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde bu yapı irdelenmiştir ve para-Sasaki benzeri, para-Einstein benzeri ve para-Ricci benzeri soliton olup olmadığı araştırılmıştır. Hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik manifoldları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ele alınmıştır. 3 boyutlu Lie cebirleri ve 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu düşünülmüştür.

Anahtar Sözcükler: ApapR manifold, Para-Sasaki benzeri Manifold, Para-Einstein benzeri, Para-Ricci benzeri Soliton.

ABSTRACT

ALMOST PARACONTACT ALMOST PARACOMPLEX RIEMANNIAN MANIFOLDS

Vildan KORUCU AKAN

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, August , 2023

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şenay BULUT

In this thesis, almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds and para-Sasaki-like manifolds which is a special class of these manifolds are discussed. For the classification of these manifolds, the fundamental tensor field of type $(0, 3)$ is used and these manifolds are divided into 11 basic classes. Almost paracontact almost paracomplex Riemann metric structure on three dimensional Lie algebras was examined and classified. From this point of view, this structure is examined on five dimensional nilpotent Lie algebras and it is investigated whether there are para-Sasaki-like, para-Einstein-like and para-Ricci-like solitons. Generalized symmetric metric connection on almost paracontact almost paracomplex Riemannian metric manifolds is discussed. Generalized symmetric metric connection on three dimensional Lie algebras and five dimensional nilpotent Lie algebras is considered.

Keywords: ApapR manifold, Para-Sasaki-like Manifold, Para-Einstein-like, Para-Ricci-like Soliton.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan ve her türlü desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Şenay BULUT'a, yüksek lisans çalıőmam boyunca her zaman yanımda olan aileme, sevgili eőime ve oğlum Barkın'a en içten teőekkürlerimi sunarım.

Vildan KORUCU AKAN

Ağustos 2023

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Vildan KORUCU AKAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK HEMEN HEMEN PARA- KOMPLEKS RIEMANN MANİFOLDLAR	6
3.1. Para-Sasaki Benzeri Riemann Manifoldları	10
3.2. ApapR Manifoldları Üzerinde Genelleştirilmiş Simetrik Met- rik Konneksiyonu	12
4. APAPR MANİFOLDLAR ÜZERİNDE PARA-RICCI BENZERİ SOLİTONLAR	19
5. APAPR MANİFOLDLARININ SINIFLANDIRILMASI.....	21
5.1. 5 Boyutlu Nilpotent Lie Cebirleri Üzerinde ApapR Yapısı....	25

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONU İLE 3 BOYUTLU LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE APAPR YAPISI	52
7. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONU İLE 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE APAPR YAPISI.....	66
8. SONUÇ.....	84
KAYNAKÇA.....	85
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	: $(2n + 1)$ boyutlu türevlenebilir manifold
TM	: M manifoldunun tanjant demeti
$\chi(M)$: M manifoldu üzerindeki vektör alanları
$\mathfrak{F}(M)$: $M \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonların uzayı
g	: Metrik tensör
\tilde{g}	: g metrik tensörüne karşılık gelen tensör
∇	: M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu
$\bar{\nabla}$: Genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu
ϕ	: $(1, 1)$ tipinde tensör alanı
ξ	: Reeb Vektör alanı
η	: 1-form
\mathcal{L}	: Lie Türev
Ric	: Ricci Tensörü
$scal$: Skaler Eğrilik
(ϕ, ξ, η)	: M üzerinde hemen hemen parakontak yapı
(ϕ, ξ, η, g)	: M üzerinde hemen hemen parakontak metrik yapı

1. GİRİŞ

1976 yılında I. Sato tarafından hemen hemen parakontak Riemann manifoldlar, hemen hemen kontak Riemann manifoldlarına benzer şekilde tanımlanmıştır [14]. Daha sonra S. Sasaki (p, q) tipinde hemen hemen parakontak Riemann manifoldlarını tanımladı [20]. Özel olarak $p = q = n$ olması durumunda (n, n) tipindeki hemen hemen parakontak Riemann manifoldları 2001 de M. Manev ve M. Staikova tarafından incelenmiştir [2]. Bu manifoldlar $(2n+1)$ boyutludur ve parakontak dağılım üzerine indirgenen hemen hemen çarpım yapı izsizdir, yani hemen hemen parakompleks yapıdır. $(0,3)$ tipindeki belli özelliklere sahip temel tensör kullanılarak bu manifoldların sınıflandırılması yapılmıştır [2]. Bu sınıflandırma ile bu tür manifoldlar 11 temel sınıfa ayrılmıştır. Dolayısıyla bu tür manifoldların tüm sınıflarının sayısı 2^{11} dir.

Sasaki manifoldları ise 1960 yılında Japon geometri uzmanı S. Sasaki tarafından tanıtılmıştır [19]. O zamandan beri birçok yazarın sayesinde fizik ve cebirsel geometride Sasaki manifoldları önem kazanmıştır. Daha sonra I. Sato, T. Adati, T. Miyazava 1977 yılında hemen hemen parakontak manifoldların özel durumu olan para-Sasaki manifoldları tanımlamıştır [15–18, 20]. Benzer şekilde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks manifoldların özel bir sınıfı olarak para-Sasaki benzeri manifoldlar tanımlanmıştır [9].

Ricci soliton kavramı, 1982 de R. S. Hamilton tarafından Ricci akış denkleminin bir özel kendine benzer çözümü olarak tanımlanmıştır. Riemann Ricci solitonlar çalışıldıktan sonra kontak Riemann geometride Ricci solitonlar, 2008 de R. Sharma tarafından çalışılmaya başlanmıştır. Daha sonra hemen hemen kontak metrik manifoldların farklı tipleri üzerinde Ricci solitonların geometrik özelliklerinin araştırılması devam etmiştir [8, 10]. Ricci soliton kavramının genelleştirmeleri farklı türdeki manifoldlar için de tanımlanmıştır. Hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks manifoldlarda g Riemann metriğine karşılık gelen \tilde{g} metriği de kullanılarak manifoldun yapısı ile uyumlu Ricci soliton kavramının bir genelleştirmesini tanımlamışlar ve para-Ricci benzeri soliton olarak adlandırmışlardır [4, 5, 9]. Özel durumda para-Einstein benzeri manifoldunu tanımlamışlardır.

Bu tezde 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde farklı iki hemen hemen pa-

arakontak hemen hemen parakompleks Riemann yapıları ele alınmıştır ve para-Sasaki benzeri, para-Ricci benzeri soliton olup olmadıkları irdelenmiştir. Dördüncü bölümde [2] de verilen sınıflandırma dikkate alınarak verilen yapılarla hangi sınıflara düştükleri araştırılmıştır. Verilen yapı ile para-Einstein benzeri manifold ve para-Ricci benzeri olan 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri araştırılmıştır. Ayrıca beşinci bölümde 5 boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann yapısı ile genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ele alınmıştır. Altıncı bölümde [3] de 3 boyutlu Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann yapısı ile sınıflandırması yapılmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlara yer verilmiştir [21, 23].

Tanım 2.0.1. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde tanımlı simetrik, non-dejenere, sabit indeksli $(0, 2)$ tipindeki tensör alanına metrik tensörü denir.

M diferansiyellenebilir manifoldu bir metrik tensörle donatılabiliyorsa M manifolduna yarı-Riemann manifoldu denir. Metrik tensörü pozitif tanımlı ise bu türevlenebilir manifoldda Riemann manifoldu denir.

Tanım 2.0.2. M diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ dönüşümü her $f \in \mathfrak{F}(M)$ ve $V, W \in \chi(M)$ için

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

(D1) $\nabla_V W$, V ye göre $\mathfrak{F}(M)$ -lineerdir.

(D2) $\nabla_V W$, W ya göre \mathbb{R} -lineerdir.

(D3) $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$ (Leibnitz koşulu)

koşullarını sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde bir konneksiyon denir. $\nabla_V W$ ya W nun V yönündeki kovaryant türevi denir.

Teorem 2.0.3. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan tek türlü belirli bir ∇ konneksiyonu vardır $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere;

(D4) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (Sıfır torsiyon özelliği)

(D5) $X[g(Y, Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrik Uyumluluk Koşulu)

Bu konneksiyona M manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu denir ve Kozsul formülü ile karakterize edilir [21]:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Tanım 2.0.4. Bir H diferansiyellenebilir manifoldu ve bir (H, \cdot) grubu verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} \cdot & : H \times H \longrightarrow H \\ (a, b) & \longrightarrow a.b^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm diferansiyellenebilir ise H 'ye bir Lie grubu denir.

Tanım 2.0.5. H bir Lie grubu ve $a \in H$ olsun.

$$\begin{aligned} L_a & : H \longrightarrow H \\ x & \longrightarrow L_a(x) = ax \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_a & : H \longrightarrow H \\ x & \longrightarrow R_a(x) = xa \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan L_a ya sol öteleme dönüşümü ve R_a ya sağ öteleme dönüşümü denir.

L_a ve R_a dönüşümleri türevlenebilir dönüşümler olup diffeomorfizmdirler.

Tanım 2.0.6. H bir Lie grubu ve $X \in \chi(H)$ bir vektör alanı olsun. Her $a, b \in H$ için

$$(L_a)_*(X_b) = X_{ab}$$

koşulu sağlanıyorsa X vektör alanına sol invaryant vektör alanı denir.

H Lie grubu üzerindeki tüm düzgün sol invaryant vektör alanlarının kümesi $\chi(H)$ kümesinin lineer alt uzayı olup Lie braket altında kapalıdır.

Tanım 2.0.7. \mathfrak{h} reel vektör uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} [,] & : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h} \\ (X, Y) & \longrightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü her $X, Y, Z \in \mathfrak{h}$ için

I. $[X, Y] = -[Y, X]$ (Ters simetri özelliği)

II. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jakobi özdeşliği)

koşulları sağlıyorsa \mathfrak{h} 'ye bir Lie cebri denir. Ayrıca H Lie grubu üzerindeki bütün sol invaryant vektör alanlarının Lie cebri H nin Lie cebri olarak adlandırılır ve \mathfrak{h} ile gösterilir.

Teorem 2.0.8. H bir Lie grubu ve $e \in H$ birim eleman olmak üzere $\mathfrak{h} \rightarrow T_e(H)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm vektör uzayı izomorfizmidir.

Yukarıdaki teoremden dolayı H Lie grubunun Lie cebri, H nin birimdeki tangent uzayı olarak düşünülebilir.

\mathfrak{h} , H Lie grubunun Lie cebri olmak üzere her $a, b \in H$, $X, Y \in \mathfrak{h}$ için

$$g_{ab}(X_{ab}, Y_{ab}) = g_b(X_b, Y_b)$$

koşulu sağlamıyorsa H üzerinde g metriği sol invaryant Riemann metriği denir. Bu durumda g Riemann metriği \mathfrak{h} üzerinde $x, y \in \mathfrak{h}$ için

$$\langle x, y \rangle := g(x, y)$$

şeklinde bir metrik indirger. Tersine \mathfrak{h} Lie cebri üzerindeki her metrik H Lie grubu üzerinde sol invaryant Riemann metriği belirler. ∇ , g metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere her $x, y \in \mathfrak{h}$ için $\nabla_x y \in \mathfrak{h}$ dir.

Tanım 2.0.9. \mathfrak{h} bir Lie cebri olmak üzere

$$\mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h} \supseteq \mathfrak{h}^2 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^1] \supseteq \mathfrak{h}^3 = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^2] \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{h}^n = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^{n-1}] \supseteq \dots$$

oluyorsa \mathfrak{h} Lie cebrinin alt merkez serisi denir.

Tanım 2.0.10. \mathfrak{h} Lie cebri olmak üzere $\mathfrak{h}^m = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir m doğal sayısı varsa \mathfrak{h} Lie cebrine nilpotent Lie cebri denir.

Tanım 2.0.11. Bağlantılı bir Lie grubu H olmak üzere H nin Lie cebri nilpotent ise H Lie grubuna nilpotent Lie grubu denir.

3. HEMEN HEMEN PARAKONTAK HEMEN HEMEN PARAKOMPLEKS RIEMANN MANİFOLDLAR

M , $(2n + 1)$ boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun.

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad (3.1)$$

koşullarını sağlayan M manifoldu üzerinde $(1, 1)$ tipinde ϕ tensor alanı, ξ vektör alanı ve η 1-formu varsa (ϕ, ξ, η) üçlüsü M manifoldu üzerinde hemen hemen parakontak yapı olarak adlandırılır. Burada I, TM tanjant demedi üzerinde birim dönüşümdür.

(3.1) ile tanımlanan (ϕ, ξ, η) yapısına sahip ve $tr\phi = 0$ olan $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir manifoldda hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks manifold denir.

Ayrıca (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks manifoldu

$$g(\phi x, \phi y) = g(x, y) - \eta(x)\eta(y) \quad (3.2)$$

koşulunu sağlayacak şekilde manifoldun yapısı ile uyumlu bir Riemann metriği kabul ediyorsa (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifoldu olarak adlandırılır. Bu manifoldları kısaca apapR manifoldu olarak ifade edeceğiz. Literatürde bazen bu manifoldlar Riemann II-manifoldları olarak isimlendirilir.

g metriğine karşılık gelen \tilde{g} metriği

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, \phi y) + \eta(x)\eta(y) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{g}, (M, \phi, \xi, \eta, g)$ ile uyumlu $(n + 1, n)$ imzası ile bir yarı-Riemann metriktir.

Teorem 3.0.1. (M, ϕ, ξ, η) dördlüsü hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks manifold olmak üzere

i. $\phi(\xi) = 0$

ii. $\eta \circ \phi = 0,$

eşitlikleri vardır. [12]

Kanıt. i. (3.1) denkleminde $x \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\phi^2(x) = x - \eta(x)\xi \quad (3.4)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte $x = \xi$ yazıldığında ve $\eta(\xi) = 1$ olduğu kullanıldığında

$$\phi^2(\xi) = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına ϕ uygulandığında

$$\phi(\phi^2(\xi)) = \phi^3(\xi) = \phi^2(\phi(\xi)) = 0$$

bulunur. (3.4) eşitliğinde x yerine $\phi(\xi)$ yazıldığında

$$0 = \phi^2(\phi(\xi)) = \phi(\xi) - \eta(\phi(\xi))\xi$$

olup $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi$ eşitliği elde edilir. Kabul edelim ki $\phi(\xi) \neq 0$ olsun.

$$0 = \phi^2(\xi) = \phi(\phi(\xi)) = \phi(\eta(\phi\xi)\xi) = \eta(\phi\xi)(\phi\xi) = \eta(\phi\xi)\eta(\phi\xi)\xi$$

eşitliklerinden $(\eta(\phi\xi))^2\xi = 0$ bulunur. $\xi \neq 0$ olduğundan $\eta(\phi(\xi)) = 0$ olur. Bu durum $\phi(\xi) = \eta(\phi(\xi))\xi$ eşitliğinden dolayı $\phi(\xi) \neq 0$ kabülümüz ile çelişir. O halde $\phi(\xi) = 0$ olmalıdır.

ii. (3.4) denkleminde x yerine $\phi(x)$ yazılırsa,

$$\phi^3(x) = \phi(x) - \eta(\phi(x))\xi \quad (3.5)$$

eşitliği bulunur. Diğer taraftan ϕ lineer olduğundan

$$\phi^3(x) = \phi^2(\phi x) = \phi(\phi^2(x)) = \phi(x - \eta(x)\xi) = \phi(x) - \eta(x)\phi(\xi)$$

elde edilir.

(i) den dolayı $\phi(\xi) = 0$ olduğundan

$$\phi^3(x) = \phi(x) \quad (3.6)$$

bulunur. (3.5) eşitliğinden $\eta(\phi(x))\xi = 0$ bulunur. Ayrıca ξ karakteristik vektör alanı sıfırdan farklı olduğundan her x vektör alanı için $\eta(\phi(x)) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\eta \circ \phi = 0$ olur.

□

Teorem 3.0.2. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olmak üzere

i. $g(\phi x, y) = g(x, \phi y)$

ii. $g(x, \xi) = \eta(x)$

iii. $g(\xi, \xi) = 1$

iv. $\eta(\nabla_x \xi) = 0$

eşitlikleri vardır. Burada ∇ , g 'nin Levi-Civita konneksiyonudur.

Kanıt.

i. (3.2) denkleminde y yerine ϕy aldığımızda;

$$g(x, \phi y) = g(\phi x, \phi^2 y) + \eta(x)\eta(\phi y)$$

eşitliğini elde ederiz. (3.4) koşulundan ve Teorem 3.0.1 (ii) 'den ve (3.2)'den $g(\phi x, \xi) = \eta(\phi x) = 0$ olup

$$\begin{aligned} g(x, \phi y) &= g(\phi x, y - \eta(y)\xi) \\ &= g(\phi x, y) - \eta(y)g(\phi x, \xi) \\ &= g(\phi x, y) \end{aligned}$$

bulunur.

ii. (3.2) denkleminde y yerine ξ aldığımızda;

$$g(x, \xi) = g(\phi x, \phi \xi) + \eta(x)\eta(\xi)$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikte Teorem 3.0.1 (i) ve (3.1) de verilen eşitlikler yazılırsa $g(x, \xi) = \eta(x)$ bulunur.

iii. (3.2) denkleminde x ve y yerine ξ aldığımızda;

$$g(\xi, \xi) = g(\phi\xi, \phi\xi) + \eta(\xi)\eta(\xi)$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikte Teorem 3.0.1 (i) ve (3.1) de verilen eşitlikler yazılırsa $g(\xi, \xi) = 1$ elde edilir.

iv. Teorem 3.0.2 (ii) 'de x yerine $\nabla_x \xi$ yazılırsa

$$g(\nabla_x \xi, \xi) = \eta(\nabla_x \xi)$$

elde ederiz. Teorem 2.0.3 (D5) 'de verilen metrik uyumluluk koşulunda $y = z = \xi$ yazılırsa $g(\nabla_x \xi, \xi) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\eta(\nabla_x \xi) = 0$ bulunur. \square

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olmak üzere

$$F(x, y, z) = g((\nabla_x \phi)y, z) = g(\nabla_x \phi y - \phi \nabla_x y, z) \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanan F , $(0, 3)$ tipinde bir tensör alanıdır. F ile ilişkili Lie 1-formları, $p \in M$, $T_p M$ tanjant uzayının $\{\xi = e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$ tabanına karşılık gelen g Riemann metriğinin (g_{ij}) matrisinin ters matrisi (g^{ij}) olmak üzere aşağıdaki eşitlikler ile verilir:

$$\theta(x) = g^{ij} F(e_i, e_j, x), \quad \theta^*(x) = g^{ij} F(e_i, \phi e_j, x), \quad \omega(x) = F(\xi, \xi, x)$$

Kısaca $F(e_i, e_j, e_k) = F_{ijk}$ gösterimini kullanacağız. F tensörü

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x, z, y) = -F(x, \phi y, \phi z) + \eta(y)F(x, \xi, z) + \eta(z)F(x, y, \xi), \\ (\nabla_x \eta)y &= g(\nabla_x \xi, y) = -F(x, \phi y, \xi), \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitliklerine sahiptir. Burada ∇ , g Riemann metriğine karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonudur. (M, ϕ, ξ, η, g) , apapR manifold olsun. $x, y, z \in \chi(M)$ olmak üzere

(1, 3) tipinde eğrilik tensörü

$$R(x, y)z = \nabla_x \nabla_y z - \nabla_y \nabla_x z - \nabla_{[x, y]} z \quad (3.9)$$

olur. Ayrıca (0, 4) tipinde karşılık gelen eğrilik tensörü $R(x, y, z, w) = g(R(x, y)z, w)$ şeklinde gösterilir. $p \in M$, $T_p M$ tanjant uzayının $\{\xi = e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$ lokal ortonormal çatısına karşılık gelen Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğrilik aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$Ric(x, y) = \sum_{i=0}^{2n} g(R(e_i, x)y, e_i), \quad (3.10)$$

$$scal = \sum_{i=0}^{2n} Ric(e_i, e_i) \quad (3.11)$$

Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri için $Ric(e_i, e_j) = Ric_{ij}$ gösterimini kullanacağız. [9]

Tanım 3.0.3. Bir $X \in \chi(M)$ vektör alanın diverjansı, $\{\xi = e_0, e_1, \dots, e_{2n}\}$ lokal ortonormal çatı olmak üzere

$$div X = tr(\nabla X) = \sum_{i=0}^{2n} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1. Para-Sasaki Benzeri Riemann Manifoldları

Tanım 3.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g) para-Sasaki benzeri Riemann manifoldları, apapR manifoldlarının özel bir sınıfıdır dolayısıyla aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\begin{aligned} (\nabla_x \phi)y &= -g(x, y)\xi - \eta(y)x + 2\eta(x)\eta(y)\xi, \\ &= -g(\phi x, \phi y)\xi - \eta(y)\phi^2 x \end{aligned} \quad (3.12)$$

[9]

Teorem 3.1.2. (M, g, ϕ, ξ, η) para-Sasaki benzeri manifold olmak üzere

i. $\nabla_x \xi = \phi x$

ii. $(\nabla_x \eta)(y) = g(x, \phi y)$

$$iii. R(x, y)\xi = -\eta(y)x + \eta(x)y$$

$$iv. R(\xi, y)\xi = \phi^2 y$$

$$v. Ric(x, \xi) = -2n \eta(x)$$

$$vi. Ric(\xi, \xi) = -2n$$

eşitlikleri vardır. Burada R eğrilik tensörünü ve Ric Ricci tensörünü gösterir.

Kanat.

i. (3.7) ve (3.12) eşitliklerinde özel olarak $y = \xi$ alınırsa;

$$-g(\phi x, \phi \xi)\xi - \eta(\xi)\phi^2 x = \nabla_x(\phi \xi) - \phi(\nabla_x \xi)$$

bulunur. Burada (3.1) ve Teorem 3.0.1 (i) gereğince

$$\phi(\phi x) = \phi(\nabla_x \xi)$$

olup

$$\nabla_x \xi = \phi x$$

elde edilir.

ii. (3.8), Teorem 3.1.2 (i) ve Teorem 3.0.2 (i) gereği

$$\begin{aligned} (\nabla_x \eta)y &= g(\nabla_x \xi, y) \\ &= g(\phi x, y) \\ &= g(x, \phi y) \end{aligned}$$

bulunur.

iii. (3.12) 'de x yerine y ve y yerine x yazılarak oluşturulan yeni eşitlik ile (3.12) taraf tarafa çıkarılarak

$$(\nabla_x \phi)y - (\nabla_y \phi)x = -\eta(y)x + \eta(x)y$$

elde edilir.

Bulduğumuz eşitliğin sol tarafı Teorem 3.1.2 (i) , (3.7) ve (3.9) gereği

$$\begin{aligned}
(\nabla_x \phi)y - (\nabla_y \phi)x &= \nabla_x(\phi y) - \phi(\nabla_x y) - \nabla_y(\phi x) + \phi(\nabla_y x) \\
&= \nabla_x(\phi y) - \nabla_y(\phi x) - \phi(\nabla_x y - \nabla_y x) \\
&= \nabla_x \nabla_y \xi - \nabla_y \nabla_x \xi - \nabla_{[x, y]} \xi \\
&= R(x, y)\xi
\end{aligned}$$

olup $R(x, y)\xi = -\eta(y)x + \eta(x)y$ sağlanır.

iv. (3.9) ve Teorem 3.1.2 (i) gereğince

$$\begin{aligned}
R(\xi, y)\xi &= \nabla_\xi \nabla_y \xi - \nabla_y \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi, y]} \xi \\
&= 0 - \phi(\nabla_\xi y - \nabla_y \xi) \\
&= \phi(\nabla_y \xi) \\
&= \phi(\phi y)
\end{aligned}$$

olup $R(\xi, y)\xi = \phi^2 y$ elde edilir.

v. (3.10) denkleminde $y = \xi$ alınırsa Teorem 3.1.2 (iii) gereğince

$$\begin{aligned}
Ric(x, \xi) &= g(R(e_i, x)\xi, e_i) \\
&= g(R(e_1, x)\xi, e_1) + g(R(e_2, x)\xi, e_2) + \dots + g(R(e_{2n}, x)\xi, e_{2n}) \\
&= g(-\eta(x)e_1 + \eta(e_1), e_1) + \dots + g(-\eta(x)e_{2n} + \eta(e_{2n}), e_{2n}) \\
&= -\eta(x) - \eta(x) - \dots - \eta(x)
\end{aligned}$$

olup $Ric(x, \xi) = -2n \eta(x)$ bulunur.

vi. Teorem 3.1.2 (v) 'de $x = \xi$ aldığımızda (3.1) gereğince $Ric(\xi, \xi) = -2n$ elde edilir. □

3.2. ApapR Manifoldları Üzerinde Genelleştirilmiş Simetrik Metrik Konneksiyonu

ApapR manifoldları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonları [24] de verilmiştir. Farklı türdeki manifoldlar üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonları çalışılmıştır [22].

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olsun. M üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik

konneksiyonu,

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + \alpha\{g(x, y)\xi - \eta(y)x\} + \beta\{g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x\} \quad (3.13)$$

şekilde tanımlanır. Burada ∇ , Levi-Civita konneksiyonudur. $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna karşılık gelen T torsiyon tensörü $x, y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \bar{\nabla}_x y - \bar{\nabla}_y x - [x, y] \\ &= \alpha\{\eta(x)y - \eta(y)x\} + \beta\{\eta(x)\phi y - \eta(y)\phi x\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada α ve β türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ ve $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ aldığımızda genelleştirilmiş simetrik konneksiyonu sırasıyla aşağıdaki gibi semi-simetrik konneksiyon ve quater-simetrik konneksiyona indirgenmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x y &= \nabla_x y + g(x, y)\xi - \eta(y)x \\ \bar{\nabla}_x y &= \nabla_x y + \eta(y)\phi x - g(\phi x, y)\xi \end{aligned}$$

Eğer M üzerinde bir g Riemann metriği var öyle ki $\bar{\nabla}$ konneksiyonu her $x, y, z \in \chi(M)$ için

$$(\bar{\nabla}_x g)(y, z) = xg(y, z) - g(\bar{\nabla}_x y, z) - g(y, \bar{\nabla}_x z) = 0, \quad (3.15)$$

koşulunu sağlıyorsa, $\bar{\nabla}$ konneksiyonu genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu denir. Aksi takdirde genelleştirilmiş simetrik metrik olmayan konneksiyon denir.

Şimdi (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonunun varlığını gösteren aşağıdaki teoremi ifade edeceğiz:

Teorem 3.2.1. *(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde (3.14) ve (3.15) koşullarını sağlayan tek bir lineer konneksiyon vardır.*

Kanıt. $\bar{\nabla}$ aşağıdaki koşul ile belirli bir lineer konneksiyon olsun.

$$\bar{\nabla}_x y = \nabla_x y + H(x, y), \quad (3.16)$$

Burada H , $(1, 2)$ tipinde bir tensördür. Şimdi H tensör alanını (3.14) ve (3.15) koşullarını sağlayacak şekilde belirleyelim. Torsiyon tensörünü ve (3.16) eşitliğini

kullanarak her $x, y \in \chi(M)$ için

$$T(x, y) = H(x, y) - H(y, x),$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$g(T(x, y), z) = g(H(x, y), z) - g(H(y, x), z). \quad (3.17)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.15) de verilen eşitliği kullanırsak

$$0 = xg(y, z) - g(\bar{\nabla}_x y, z) - g(\bar{\nabla}_x z, y) = g(H(x, y), z) + g(H(x, z), y).$$

bulunur. O halde

$$g(H(x, y), z) = -g(H(x, z), y). \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.17) ve (3.18) eşitliklerini kullanırsak

$$g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) = 2g(H(x, y), z). \quad (3.19)$$

olur. Ayrıca (3.14) ve (3.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} 2g(H(x, y), z) &= g(T(x, y), z) + g(T(z, x), y) + g(T(z, y), x) \\ &= 2g(\alpha(g(x, y)\xi - \eta(y)x) + \beta(g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x), z). \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten H tensörü

$$H(x, y) = \alpha\{g(x, y)\xi - \eta(y)x\} + \beta\{g(\phi x, y)\xi - \eta(y)\phi x\}.$$

şeklinde bulunur. □

(3.12) ve Teorem 3.1.2 kullanılırsa aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.2.2. M , genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile para-Sasaki benzeri manifold olsun. Bu durumda her $x, y \in \chi(M)$ aşağıdaki eşitlikler vardır:

$$i. (\bar{\nabla}_x \phi)y = (\beta - 1)\{g(\phi x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi^2(x)\} + \alpha\{g(x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi x\}$$

$$ii. \bar{\nabla}_x \xi = (1 - \beta)\phi x - \alpha\phi^2 x$$

$$iii. (\bar{\nabla}_x \eta)y = (1 - \beta)g(\phi x, y) - \alpha g(\phi x, \phi y)$$

Kanıt. i. $(\bar{\nabla}_x \phi)y = \bar{\nabla}_x \phi y - \phi \bar{\nabla}_x y$ denklemin sağ tarafına Teorem 3.0.1, (3.13) ve (3.12) eşitlikleri kullanılarak yazılırsa;

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_x \phi)y &= \bar{\nabla}_x \phi y - \phi \bar{\nabla}_x y \\ &= \nabla_x \phi y + \alpha\{g(x, \phi x)\xi - \eta(\phi y)x\} + \beta\{g(\phi x, \phi y)\xi - \eta(\phi y)\phi x\} \\ &\quad - \phi \nabla_x y - \alpha\{g(x, y)\phi(\xi) - \eta(y)\phi x\} - \beta\{g(\phi x, y)\phi\xi - \eta(y)\phi^2 x\} \\ &= (\nabla_x \phi)y + \alpha\{g(x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi x\} + \beta\{g(\phi x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi^2 x\} \\ &= (\beta - 1)\{g(\phi x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi^2 x\} + \alpha\{g(x, \phi y)\xi + \eta(y)\phi x\} \end{aligned}$$

elde edilir.

ii. (3.13) eşitliğinde y yerine ξ aldığımızda (3.1), Teorem 3.0.2 (ii) ve Teorem 3.0.1 (ii) eşitlikleri gereği;

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \xi &= \nabla_x \xi + \alpha\{g(x, \xi)\xi - \eta(\xi)x\} + \beta\{g(\phi x, \xi)\xi - \eta(\xi)\phi x\} \\ &= \phi x + \alpha\{\eta(x)\xi - x\} - \beta(-\phi x) \\ &= (1 - \beta)\phi x - \alpha\phi^2 x \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iii. $(\bar{\nabla}_x \eta)y = x\eta(y) - \eta \bar{\nabla}_x y$ denkleminin sağ tarafını (3.13),(3.2), Teorem 3.0.2 (i), Teorem 3.1.2 (ii) eşitliklerinden faydalanarak açtığımızda;

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_x \eta)y &= x\eta(y) - \eta \nabla_x y - \alpha\{g(x, y)\eta(\xi) - \eta(y)\eta(x)\} \\ &\quad - \beta\{g(\phi x, y)\eta(\xi) - \eta(y)\eta(\phi^2 x)\} \\ &= g(x, \phi x) - \alpha g(\phi x, \phi y) - \beta g(\phi x, y) \\ &= (1 - \beta)g(\phi x, y) - \alpha g(\phi x, \phi y) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

□

Önerme 3.2.3. (M, g, ϕ, ξ, η) , genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile $(2n+1)$ -boyutlu para-Sasaki benzeri manifold olsun. Bu durumda $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş si-

metrik metrik konneksiyonun eğrilik tensörü ile ∇ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(x, y)z &= R(x, y)z + x(\alpha)g(y, z)\xi + (\alpha - \alpha\beta)g(y, z)\phi x \\
&\quad - x(\alpha)\eta(z)y + x(\beta)g(\phi y, z)\xi + (2\beta - \beta^2)g(\phi y, z)\phi x \\
&\quad - x(\beta)\eta(z)\phi y + (\alpha^2 + \beta)g(y, z)\eta(x)\xi + \alpha\beta g(\phi y, z)\eta(x)\xi \\
&\quad - \alpha^2 g(y, z)x + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z)x + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z)x \\
&\quad + \alpha\beta\eta(y)\eta(z)\phi x - y(\alpha)g(x, z)\xi + y(\alpha)\eta(z)x \\
&\quad - y(\beta)g(\phi x, z)\xi + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi x, z)\phi y + y(\beta)\eta(z)\phi x \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta)\eta(y)g(x, z)\xi - \alpha\beta g(\phi x, z)\eta(y)\xi + \alpha^2 g(x, z)y \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta)\eta(x)\eta(z)y + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi x, z)y \\
&\quad - \alpha\beta\eta(x)\eta(z)\phi y + (\alpha\beta - \alpha)g(x, z)\phi y.
\end{aligned}$$

Kanıt. \bar{R} karşılık gelen eğrilik tensörünün

$$\bar{R}(x, y)z = \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_y z - \bar{\nabla}_y \bar{\nabla}_x z - \bar{\nabla}_{[x, y]} z.$$

şeklindeki tanımında (3.13) yazılırsa ve Önerme 3.2.2 kullanılırsa uzun hesaplamalarla istenilen bulunur. \square

α, β sabit fonksiyonlar ise \bar{R} eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
\bar{R}(x, y)z &= R(x, y)z + (\alpha - \alpha\beta)g(y, z)\phi x + (2\beta - \beta^2)g(\phi y, z)\phi x \\
&\quad + (\alpha^2 + \beta)g(y, z)\eta(x)\xi + \alpha\beta g(\phi y, z)\eta(x)\xi \\
&\quad - \alpha^2 g(y, z)x + (\alpha^2 + \beta)\eta(y)\eta(z)x + (\alpha - \alpha\beta)g(\phi y, z)x \\
&\quad + \alpha\beta\eta(y)\eta(z)\phi x + (\beta^2 - 2\beta)g(\phi x, z)\phi y & (3.21) \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta)\eta(y)g(x, z)\xi - \alpha\beta g(\phi x, z)\eta(y)\xi + \alpha^2 g(x, z)y \\
&\quad - (\alpha^2 + \beta)\eta(x)\eta(z)y + (\alpha\beta - \alpha)g(\phi x, z)y \\
&\quad + (\alpha\beta - \alpha)g(x, z)\phi y - \alpha\beta\eta(x)\eta(z)\phi y.
\end{aligned}$$

şeklinde verilir. Burada $z = \xi$ yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{R}(x, y)\xi = \alpha\eta(y)\phi x + (\beta - 1)\eta(y)x - (\beta - 1)\eta(x)y - \alpha\eta(x)\phi y. \quad (3.22)$$

eşitliğine ulaşılır.

Ayrıca yukarıdaki eşitlikte $x = \xi$ yazılırsa

$$\bar{R}(\xi, y)\xi = (1 - \beta)\phi^2y - \alpha\phi(y).$$

eşitliği bulunur.

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu alındığında

$$\bar{F}(x, y, z) = g((\bar{\nabla}_x\phi)y, z) = g(\bar{\nabla}_x\phi y - \phi\bar{\nabla}_xy, z) \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanan \bar{F} , $(0, 3)$ tipinde bir tensör alanıdır. Ayrıca \bar{F} tensörü

$$\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}(x, z, y) = -\bar{F}(x, \phi y, \phi z) + \eta(y)\bar{F}(x, \xi, z) + \eta(z)\bar{F}(x, y, \xi), \quad (3.24)$$

$$(\bar{\nabla}_x\eta)y = g(\bar{\nabla}_x\xi, y) = -\bar{F}(x, \phi y, \xi), \quad (3.25)$$

eşitliklerine sahiptir. (3.24) de verilen ilk eşitliği kanıtlayalım. Bunun için Teorem 3.0.2 (i) de verilen eşitlikten

$$xg(\phi y, z) = xg(y, \phi z) \quad (3.26)$$

şeklinde yazılır. $\bar{\nabla}$ konneksiyonu (3.15) eşitliğini sağladığından (3.26) de bu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_x\phi y, z) + g(\phi y, \bar{\nabla}_xz) &= g(\bar{\nabla}_xy, \phi z) + g(y, \bar{\nabla}_x\phi z) \\ &= g(\phi\bar{\nabla}_xy, z) + g(y, \bar{\nabla}_x\phi z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Diğer taraftan aşağıdaki eşitlikte (3.27) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, z) &= g(\bar{\nabla}_x\phi y, z) - g(\phi\bar{\nabla}_xy, z) \\ &= g(y, \bar{\nabla}_x\phi z) - g(\phi y, \bar{\nabla}_xz) \\ &= g(y, \bar{\nabla}_x\phi z - \phi\bar{\nabla}_xz) \\ &= g(y, (\bar{\nabla}_x\phi)z) \\ &= \bar{F}(x, z, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$xg(\phi z, \xi) = xg(z, \phi \xi) = 0$$

olduğundan konneksiyonun (3.15) koşulundan

$$0 = xg(\phi z, \xi) = g(\bar{\nabla}_x \phi z, \xi) + g(\phi z, \bar{\nabla}_x \xi) \quad (3.28)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik aşağıda kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, z, \xi) &= g(\bar{\nabla}_x \phi z, \xi) - g(\phi \bar{\nabla}_x z, \xi) \\ &= g(\bar{\nabla}_x \phi z, \xi) \\ &= -g(\phi z, \bar{\nabla}_x \xi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

olur. Ayrıca

$$\bar{F}(x, y, \xi) = -g(\phi y, \bar{\nabla}_x \xi) = g(\bar{\nabla}_x \phi y, \xi) \quad (3.30)$$

eşitliği (3.28) ve (3.29) dan elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, \phi y, \phi z) &= g((\bar{\nabla}_x \phi) \phi y, \phi z) \\ &= g(\bar{\nabla}_x \phi^2 y, \phi z) - g(\bar{\nabla}_x \phi y, \phi^2 z) \\ &= g(\bar{\nabla}_x (y - \eta(y)\xi), \phi z) - g(\bar{\nabla}_x \phi y, z - \eta(z)\xi) \\ &= g(\bar{\nabla}_x y, \phi z) - \eta(y)g(\bar{\nabla}_x \xi, \phi z) - g(\bar{\nabla}_x \phi y, z) + \eta(z)g(\bar{\nabla}_x \phi y, \xi) \\ &= g(\phi \bar{\nabla}_x y - \bar{\nabla}_x \phi y, z) + \eta(y)\bar{F}(x, z, \xi) + \eta(z)\bar{F}(x, y, \xi) \\ &= -F(x, y, z) + \eta(y)\bar{F}(x, z, \xi) + \eta(z)\bar{F}(x, y, \xi) \end{aligned}$$

eşitliği (3.29), (3.30) eşitliklerinden elde edilir.

(3.24) eşitliği $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun (3.15) koşulundan ve (3.30) eşitliğinden kolaylıkla doğrulanır.

Tanım 3.2.4. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu alındığında $\bar{R}(x, y, z, w) = g(\bar{R}(x, y)z, w)$ ise M manifoldunun her noktasındaki tanjant uzayının $\{\xi, e_1, \dots, e_{2n}\}$ tabanına karşılık gelen Ricci tensörü \bar{Ric} ve skaler eğriliği \overline{scal} aşağıdaki gibidir:

$$\bar{Ric}(x, y) = \sum_{i=0}^{2n} g(\bar{R}(e_i, x)y, e_i) \quad (3.31)$$

$$\overline{scal} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{Ric}(e_i, e_i) \quad (3.32)$$

Tanım 3.2.5. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu alındığında aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde tek (a, b, c) sabiti varsa M ye para-Einstein benzeri manifold denir.

$$\overline{Ric}(x, y) = ag(x, y) + b\tilde{g}(x, y) + c\eta(x)\eta(y) \quad (3.33)$$

Tanım 3.2.6. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde $\overline{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu alındığında aşağıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde tek (λ, μ, ν) sabiti varsa M ye para-Ricci soliton benzeri denir.

$$\overline{Ric}(x, y) = -\frac{1}{2}\overline{\mathcal{L}}_\xi g(x, y) - \lambda g(x, y) - \mu\tilde{g}(x, y) - \nu\eta(x) \otimes \eta(y) \quad (3.34)$$

4. APAPR MANİFOLDLAR ÜZERİNDE PARA-RICCI BENZERİ SOLİTONLAR

Bu bölümde apapR manifoldlar üzerinde para-Einstein benzeri manifoldlar ve para-Ricci benzeri solitonlar ele alınmıştır [4].

Tanım 4.0.1. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu olmak üzere aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde a, b, c sabitleri varsa M ye (a, b, c) sabitleri ile para-Einstein benzeri manifold denir.

$$Ric(x, y) = ag(x, y) + b\tilde{g}(x, y) + c\eta(x)\eta(y) \quad (4.1)$$

Özel olarak, $b = 0$ ise M ye η -Einstein manifold, $b = c = 0$ ise M ye Einstein manifold denir. para-Einstein benzeri manifoldların skaler eğriliği

$$scal = (2n + 1)a + b + c$$

olduğunu gösterelim: $\xi = e_0$ olmak üzere (3.11) denklemini açarak $Ric(e_i, e_i)$ değerlerini (4.1) de yerine yazdığımızda (3.3) ve (3.1) gereği;

$$\begin{aligned}
scal &= Ric(e_0, e_0) + Ric(e_1, e_1) + \dots + Ric(e_{2n}, e_{2n}) \\
&= ag(e_0, e_0) + b\tilde{g}(e_0, e_0) + c\eta(e_0)\eta(e_0) + \dots \\
&+ ag(e_{2n}, e_{2n}) + b\tilde{g}(e_{2n}, e_{2n}) + c\eta(e_{2n})\eta(e_{2n}) \\
&= a + a + \dots + a + b + c
\end{aligned}$$

olup

$$scal = (2n + 1)a + b + c$$

elde edilir.

Tanım 4.0.2. (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifold olmak üzere, aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde λ, μ, ν sabitleri varsa M ye ξ potansiyel vektör alanı ve (λ, μ, ν) sabitleri ile para-Ricci benzeri soliton denir.

$$Ric(x, y) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(x, y) - \lambda g(x, y) - \mu\tilde{g}(x, y) - \nu\eta(x) \otimes \eta(y) \quad (4.2)$$

Burada $\mathcal{L}_\xi g$, ξ yönünde g metriğinin Lie türevidir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{L}_\xi g(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) + g(x, \nabla_y \xi)$$

(M, ϕ, ξ, η, g) manifoldu para-Ricci benzeri soliton ise M nin skaler eğriliği

$$scal = -div\xi - (2n + 1)\lambda - \mu - \nu$$

olduğunu gösterelim: (3.11) deki denklemi açarak değerleri (4.2) de yerine yazdığımızda $\xi = e_0$ olmak üzere (3.3) , (3.1) ve Tanım 3.0.3 gereği;

$$\begin{aligned}
scal &= Ric(e_0, e_0) + Ric(e_1, e_1) + \dots + Ric(e_{2n}, e_{2n}) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_0, e_0) - \lambda g(e_0, e_0) - \mu\tilde{g}(e_0, e_0) - \nu\eta(e_0)\eta(e_0) + \dots \\
&+ -\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g(e_{2n}, e_{2n}) - \lambda g(e_{2n}, e_{2n}) - \mu\tilde{g}(e_{2n}, e_{2n}) - \nu\eta(e_{2n})\eta(e_{2n}) \\
&= -\frac{1}{2}[\mathcal{L}_\xi g(e_0, e_0) + \dots + \mathcal{L}_\xi g(e_{2n}, e_{2n})] - (2n + 1)\lambda - \mu - \nu \\
&= -\frac{1}{2}[2g(\nabla_{e_0}\xi, e_0) + \dots + 2g(\nabla_{e_{2n}}\xi, e_{2n})] - (2n + 1)\lambda - \mu - \nu
\end{aligned}$$

olup

$$scal = -div\xi - (2n + 1)\lambda - \mu - \nu$$

eşitliği elde edilir. [4]

5. APAPR MANİFOLDLARININ SINIFLANDIRILMASI

(M, ϕ, ξ, η, g) manifoldu için sınıflandırma F tensörü kullanılarak yapılmıştır [2]. (3.8) koşullarını sağlayan tüm F tensörlerinin \mathbb{F} vektör uzayı, bu manifoldların yapı grubuna karşılık ortogonal ve invaryant olan 11 \mathbb{F}_i ($i = 1, \dots, 11$) alt uzaylarına dekompoze olur. Bu dekompozisyon bu manifoldlar için bir sınıflandırma verir. Eğer F tensörü \mathbb{F}_i altuzayına ait ise apapR manifoldu \mathcal{F}_i sınıfına aittir, denir. Bu şekilde bu sınıflandırma $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_{11}$ temel sınıftan oluşur. Temel sınıfların arakesiti \mathcal{F}_0 sınıfı ile belirtilir ve $F = 0$ koşulu ile belirli özel bir sınıftır. Yani bu sınıf $\nabla\phi = \nabla\xi = \nabla\eta = \nabla g = 0$ şartları ile tanımlanır. Ayrıca (M, ϕ, ξ, η, g) manifoldu \mathcal{F}_i sınıfına aittir ancak ve ancak $F = F_i$ eşitliği geçerlidir, denir. F_i, \mathcal{F}_i altuzayında F nin bileşenleridir ve aşağıdaki şekilde verilir:

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\theta(\phi^2 z) + g(\phi x, \phi z)\theta(\phi^2 y) - g(x, \phi y)\theta(\phi z) - g(x, \phi z)\theta(\phi y)\}$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{4} \{2F(\phi^2 x, \phi^2 y, \phi^2 z) + F(\phi^2 y, \phi^2 z, \phi^2 x) + F(\phi^2 z, \phi^2 x, \phi^2 y) - F(\phi y, \phi z, \phi^2 x) - F(\phi z, \phi y, \phi^2 x)\} - \frac{1}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\theta(\phi^2 z) + g(\phi x, \phi z)\theta(\phi^2 y) - g(x, \phi y)\theta(\phi z) - g(x, \phi z)\theta(\phi y)\}$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4} \{2F(\phi^2 x, \phi^2 y, \phi^2 z) - F(\phi^2 y, \phi^2 z, \phi^2 x) - F(\phi^2 z, \phi^2 x, \phi^2 y) + F(\phi y, \phi z, \phi^2 x) + F(\phi z, \phi y, \phi^2 x)\}$$

$$F_4(x, y, z) = \frac{\theta(\xi)}{2n} \{g(\phi x, \phi y)\eta(z) + g(\phi x, \phi z)\eta(y)\}$$

$$F_5(x, y, z) = \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{g(x, \phi y)\eta(z) + g(x, \phi z)\eta(y)\}$$

$$\begin{aligned}
F_6(x, y, z) &= \frac{1}{4} \{ [F(\phi^2x, \phi^2y, \xi) + F(\phi^2y, \phi^2x, \xi) + F(\phi x, \phi y, \xi) + F(\phi y, \phi x, \xi)] \eta(z) \\
&\quad + [F(\phi^2x, \phi^2z, \xi) + F(\phi^2z, \phi^2x, \xi) + F(\phi x, \phi z, \xi) + F(\phi z, \phi x, \xi)] \eta(y) \} \\
&\quad - \frac{\theta(\xi)}{2n} \{ g(\phi x, \phi y) \eta(z) + g(\phi x, \phi z) \eta(y) \} \\
&\quad - \frac{\theta^*(\xi)}{2n} \{ g(x, \phi y) \eta(z) + g(x, \phi z) \eta(y) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_7(x, y, z) &= \frac{1}{4} \{ [F(\phi^2x, \phi^2y, \xi) - F(\phi^2y, \phi^2x, \xi) + F(\phi x, \phi y, \xi) - F(\phi y, \phi x, \xi)] \eta(z) \\
&\quad + [F(\phi^2x, \phi^2z, \xi) - F(\phi^2z, \phi^2x, \xi) + F(\phi x, \phi z, \xi) - F(\phi z, \phi x, \xi)] \eta(y) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_8(x, y, z) &= \frac{1}{4} \{ [F(\phi^2x, \phi^2y, \xi) + F(\phi^2y, \phi^2x, \xi) - F(\phi x, \phi y, \xi) - F(\phi y, \phi x, \xi)] \eta(z) \\
&\quad + [F(\phi^2x, \phi^2z, \xi) + F(\phi^2z, \phi^2x, \xi) - F(\phi x, \phi z, \xi) - F(\phi z, \phi x, \xi)] \eta(y) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_9(x, y, z) &= \frac{1}{4} \{ [F(\phi^2x, \phi^2y, \xi) - F(\phi^2y, \phi^2x, \xi) - F(\phi x, \phi y, \xi) + F(\phi y, \phi x, \xi)] \eta(z) \\
&\quad + [F(\phi^2x, \phi^2z, \xi) - F(\phi^2z, \phi^2x, \xi) - F(\phi x, \phi z, \xi) + F(\phi z, \phi x, \xi)] \eta(y) \}
\end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = \eta(x)F(\xi, \phi^2y, \phi^2z)$$

$$F_{11}(x, y, z) = \eta(x) \{ \eta(y)\omega(z) + \eta(z)\omega(y) \}$$

ApapR manifold iki yada daha fazla temel sınıfların direkt toplamına ait olabilir. Yani, $(M, \phi, \xi, \eta, g) \in \mathcal{F}_i \oplus \mathcal{F}_j \oplus \dots$ dir ancak ve ancak F tensörü, F_i, F_j, \dots lerin toplamıdır, $F = F_i + F_j + \dots$.

(M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$ genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu alındığında bu konneksiyona karşılık gelen \bar{F} , $(0, 3)$ tipindeki tensör alanı (3.8) koşulunu sağlar. Dolayısıyla \bar{F} tensörü kullanılarak bir sınıflandırma yapılabilir.

$(2n + 1)$ boyutlu (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu aşağıdaki koşulu sağlar:

$$2g(x, \phi y) = (\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = g(\nabla_x \xi, y) + g(x, \nabla_y \xi). \quad (5.1)$$

Burada g nin ξ boyunca Lie türevi $\mathcal{L}_\xi g$, $\nabla\eta$ cinsinden aşağıdaki eşitliğe sahiptir.

$$(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = (\nabla_x \eta)y + (\nabla_y \eta)x.$$

Yukarıdaki eşitlikte (3.8) yazılırsa $\mathcal{L}_\xi g$, F tensörü kullanılarak ifade edilebilir:

$$(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = -F(x, \phi y, \xi) - F(y, \phi x, \xi).$$

Eğer (M, ϕ, ξ, η, g) apapR manifoldu (5.1) koşulunu sağlıyorsa bu manifolda para-kontak hemen hemen parakompleks Riemann manifoldu denir.

Önerme 5.0.1. (M, ϕ, ξ, η) apapR manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

- $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = 0$ ancak ve ancak $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfına aittir.
- $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = -\frac{1}{n}\theta(\xi)g(x, \phi y)$ ancak ve ancak $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_4$ sınıfındadır.
- $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = -\frac{1}{n}\theta^*(\xi)g(\phi x, \phi y)$ ancak ve ancak $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_5$ sınıfındadır.
- $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = 2(\nabla_x \eta)y$ ancak ve ancak $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$ sınıfındadır.
- $(\mathcal{L}_\xi g)(x, y) = -\eta(x)\omega(\phi y) - \eta(y)\omega(\phi x)$ ancak ve ancak $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_{11}$ sınıfındadır.

Ayrıca $\mathcal{L}_\xi g = 0$ olduğunda ξ ye **Killing vektör alanı** denir.

Sonuç 5.0.2. (M, ϕ, ξ, η) apapR manifoldunun ξ Killing vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter koşul (M, ϕ, ξ, η) manifoldunun \mathcal{F}_i , ($i = 1, 2, 3, 7, 8, 10$) sınıfına ya da bunların direkt toplam sınıfına ait olmasıdır.

ϕ nin Nijenhuis torsiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[\phi, \phi](x, y) = [\phi x, \phi y] + \phi^2[x, y] - \phi[\phi x, y] - \phi[x, \phi y] \quad (5.2)$$

η nin dış türevi, $d\eta$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$d\eta(x, y) = (\nabla_x \eta)y - (\nabla_y \eta)x \quad (5.3)$$

(3.8) 'de tanımlanan eşitliği (5.3) denkleminde yerine yazdığımızda $d\eta$, F tensörü kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$d\eta(x, y) = -F(x, \phi y, \xi) + F(y, \phi x, \xi)$$

$$N(x, y) = N^{(1)}(x, y) = [\phi, \phi](x, y) - d\eta(x, y)\xi$$

(ϕ, ξ, η) yapısının Nijenhuis tensörü olarak adlandırılır. $N = 0$ ise hemen hemen parakontak yapıya normaldir, denir. N tensörü ters simetriktir.

$$\begin{aligned} N^{(1)}(x, y) &= [\phi, \phi](x, y) - d\eta(x, y)\xi \\ N^{(2)}(x, y) &= (\mathcal{L}_{\phi x}\eta)(y) - (\mathcal{L}_{\phi y}\eta)(x) \\ N^{(3)}(x, y) &= (\mathcal{L}_{\xi}\phi)(x) \\ N^{(4)}(x, y) &= (\mathcal{L}_{\xi}\eta)(x) \end{aligned}$$

tensörlerini tanımlayalım.

(M, ϕ, ξ, η) $(2n + 1)$ boyutlu hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold olsun. $N^{(1)}$ in yok olmasının $N^{(2)}, N^{(3)}, N^{(4)}$ ün yok olması demek olduğunu ifade eden teorem verilmiştir:

Teorem 5.0.3. [1] (M, ϕ, ξ, η, g) $(2n + 1)$ boyutlu hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold:

- a) $N^{(1)} = 0$ dir ancak ve ancak yapı $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_4, \mathcal{F}_5, \mathcal{F}_6$ sınıflarında veya bunların direkt toplamlarındadır.
- b) $N^{(2)} = 0$ dir ancak ve ancak yapı $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_6, \mathcal{F}_8, \mathcal{F}_9, \mathcal{F}_{10}$ sınıflarında veya bunların direkt toplamlarındadır.
- c) $N^{(3)} = 0$ dir ancak ve ancak yapı $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_7$ sınıflarında veya bunların direkt toplamlarındadır.
- d) $N^{(4)} = 0$ dir yok olmuş ancak ve ancak yapı $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{10}$ sınıflarında veya bunların direkt toplamlarındadır.

Teorem 5.0.4. [1] (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold olsun. ϕ 'nin Nijenhuis torsiyonu için şu şartlar sağlar:

- a) $[\phi, \phi](x, y) = 0$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_i$ ($i = 1, 2, 4, 5, 6, 11$) sınıfında veya bunların direkt toplamındadır.
- b) $[\phi, \phi](x, y) = -2 \{ \phi(\nabla_{\phi x} \phi) \phi y + \phi(\nabla_{\phi^2 x} \phi) \phi^2 y \}$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_3$ sınıfındadır.
- c) $[\phi, \phi](x, y) = -2(\nabla_x \eta)(y) \xi$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_7$ sınıfındadır.
- d) $[\phi, \phi](x, y) = -2\{ \eta(x) \nabla_y \xi - \eta(y) \nabla_x \xi - (\nabla_x \eta)(y) \xi \}$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_8$ sınıfındadır.
- e) $[\phi, \phi](x, y) = -2\{ \eta(x) \nabla_y \xi - \eta(y) \nabla_x \xi \}$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_9$ sınıfındadır.
- f) $[\phi, \phi](x, y) = -\eta(x) \phi(\nabla_\xi \phi) y + \eta(y) \phi(\nabla_\xi \phi)$ ise $(M, \phi, \xi, \eta, g) \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

5.1. 5 Boyutlu Nilpotent Lie Cebirleri Üzerinde ApapR Yapısı

Tanım 5.1.1. H bağlantılı Lie grubu üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks yapısı verilsin.

$$\phi \circ (L_a)_* = (L_a)_* \circ \phi, \quad (L_a)_*(\xi) = \xi$$

şartları sağlanıyorsa bu yapıya H üzerinde sol invaryant hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks yapı denir. Eğer H hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold ve h sol invaryant Riemann metriği ise H ye sol invaryant hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann manifold denir.

Tanım 5.1.2. \mathfrak{h} , $(2n + 1)$ boyutlu Lie cebiri, η , 1-form, $\phi \in \text{End}(\mathfrak{h})$, $\xi \in \mathfrak{h}$ olmak üzere her $x, y \in \mathfrak{h}$ için

$$\eta(\xi) = 1, \quad \phi^2 x = x - \eta(x) \xi, \quad g(\phi x, \phi y) = g(x, y) - \eta(x) \eta(y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa (ϕ, ξ, η, g) yapısı \mathfrak{h} Lie cebri üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapıdır, denir.

Lie cebirleri üzerindeki hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapıların sınıfları da benzer şekilde tanımlanabilir. H bağlantılı Lie grubu sol invaryant hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapıya sahip ise bu yapı \mathfrak{h} Lie cebri üzerinde tek bir hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapı indirger. Yine \mathfrak{h} üzerindeki bu yapıyı (H, ϕ, ξ, η, g) şeklinde göstereceğiz.

5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri Dixmier tarafından sınıflandırılmıştır [7]. Bu sınıflandırmaya göre abelyen olmayan altı nilpotent Lie cebiri vardır. $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$, vektör uzayının 5 boyutlu tabanı olmak üzere, sıfırdan farklı braketter \mathfrak{g}_i , ($i = 1, 2, \dots, 6$) Lie cebirinde şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_1 & : [e_1, e_2] = e_5, [e_3, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_2 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_3 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5, [e_2, e_3] = e_5 \\
\mathfrak{g}_4 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_1, e_4] = e_5 \\
\mathfrak{g}_5 & : [e_1, e_2] = e_4, [e_1, e_3] = e_5 \\
\mathfrak{g}_6 & : [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5
\end{aligned}$$

Bu bölümde bu Lie cebirleri üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks Riemann metrik yapısı tanımlayıp hangi sınıfa düştüğünü belirleyeceğiz.

$$g(e_i, e_i) = 1, \quad g(e_i, e_j) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 5\} \quad i \neq j$$

olacak şekilde g Riemann metriği verilsin.

$$\begin{aligned}
\xi = e_5, \quad \eta(\xi) = 1, \\
\phi(e_1) = e_3, \quad \phi(e_2) = e_4, \quad \phi(e_3) = e_1, \quad \phi(e_4) = e_2, \quad \phi(e_5) = 0
\end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlı (ϕ, ξ, η, g) dördlüsü \mathfrak{g}_i , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ üzerinde hemen hemen parakontak hemen hemen parakompleks metrik bir yapı tanımlar.

Teorem 5.1.3. \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri \mathcal{F}_7 sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_1 Lie cebirinin sıfırdan farklı braketteri $\{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ tabanı için

$$[e_1, e_2] = e_5, \quad [e_3, e_4] = e_5$$

şeklindedir.

Sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülünden hesaplanır [21]:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} e_5, \quad \nabla_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_5, \quad \nabla_{e_2} e_5 = \frac{1}{2} e_1, \\
\nabla_{e_3} e_4 &= \frac{1}{2} e_5, \quad \nabla_{e_3} e_5 = -\frac{1}{2} e_4, \quad \nabla_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2} e_5, \quad \nabla_{e_4} e_5 = \frac{1}{2} e_3, \\
\nabla_{e_5} e_1 &= -\frac{1}{2} e_2, \quad \nabla_{e_5} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \quad \nabla_{e_5} e_3 = -\frac{1}{2} e_4, \quad \nabla_{e_5} e_4 = \frac{1}{2} e_3
\end{aligned} \tag{5.5}$$

(5.2) 'de $x = y = e_i$, $i = 1, 2, \dots, 5$ yazıldığında Teorem 5.0.4 'de (c) 'nin sağladığını gösterelim:

$i = 1$ için ;

$$\begin{aligned}
[\phi e_1, \phi e_1] + \phi^2[e_1, e_1] - \phi[\phi e_1, e_1] - \phi[e_1, \phi e_1] &= 0 \\
(\nabla_{e_1} \eta)e_1 = e_1(\eta e_1) - \eta(\nabla_{e_1} e_1) &= 0
\end{aligned}$$

$i = 2$ için ;

$$\begin{aligned}
[\phi e_2, \phi e_2] + \phi^2[e_2, e_2] - \phi[\phi e_2, e_2] - \phi[e_2, \phi e_2] &= 0 \\
(\nabla_{e_2} \eta)e_2 = e_2(\eta e_2) - \eta(\nabla_{e_2} e_2) &= 0
\end{aligned}$$

$i = 3$ için ;

$$\begin{aligned}
[\phi e_3, \phi e_3] + \phi^2[e_3, e_3] - \phi[\phi e_3, e_3] - \phi[e_3, \phi e_3] &= 0 \\
(\nabla_{e_3} \eta)e_3 = e_3(\eta e_3) - \eta(\nabla_{e_3} e_3) &= 0
\end{aligned}$$

$i = 4$ için ;

$$\begin{aligned}
[\phi e_4, \phi e_4] + \phi^2[e_4, e_4] - \phi[\phi e_4, e_4] - \phi[e_4, \phi e_4] &= 0 \\
(\nabla_{e_4} \eta)e_4 = e_4(\eta e_4) - \eta(\nabla_{e_4} e_4) &= 0
\end{aligned}$$

$i = 5$ için ;

$$\begin{aligned}
[\phi e_5, \phi e_5] + \phi^2[e_5, e_5] - \phi[\phi e_5, e_5] - \phi[e_5, \phi e_5] &= 0 \\
(\nabla_{e_5} \eta)e_5 = e_5(\eta e_5) - \eta(\nabla_{e_5} e_5) &= 0
\end{aligned}$$

Her i için $[\phi, \phi](e_i, e_i) = 0$ ve $(\nabla_{e_i} \eta)(e_i) = 0$ olup Teorem 5.0.4 'de (c) deki eşitlik sağlanır. $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, 5$ durumunu inceleyelim. $i = 1, j = 2$

alındığında $[\phi, \phi](e_1, e_2) = e_5$ ve $(\nabla_{e_1}\eta)e_2 = -\frac{1}{2}$ bulunur. Benzer şekilde $i = 3, j = 4$ alındığında $[\phi, \phi](e_3, e_4) = e_5$ ve $(\nabla_{e_3}\eta)e_4 = -\frac{1}{2}$ bulunur. Diğer durumlarda $i \neq j$ için $[\phi, \phi](e_i, e_j) = 0$ ve $(\nabla_{e_i}\eta)(e_j) = 0$ olur. Dolayısıyla Teorem 5.0.4 'de (c) deki eşitliğinin sağlandığı $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanı için gösterilmiş olur. O halde \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri \mathcal{F}_7 sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_1 Lie cebirinin Ricci tensörününün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= Ric_{22} = Ric_{33} = Ric_{44} = -\frac{1}{2} \\ Ric_{55} &= 1 \end{aligned}$$

şeklinde dir. Skaler eğriliği de

$$\begin{aligned} scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ij} \\ &= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

(4.1) eşitliğinin $\{e_1, \dots, e_5\}$ tabanı için sağlandığını göstermek yeterlidir.

$(a, b, c) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ alındığında (4.1) eşitliği sağlanır. O halde \mathfrak{g}_1 , para-Einstein benzeri manifolddur. Tüm $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $(\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j) = 0$ olup \mathfrak{g}_1 para-Einstein benzeri manifold olduğundan (4.2) eşitliği sağlanmış olup aynı zamanda para-Ricci benzeri solitondur.

Teorem 5.1.4. \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_5, [e_2, e_4] = e_5$ braketleri kullanılarak sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülünden aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_2 &= \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \\
\nabla_{e_2}e_3 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_4 = \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_5, \\
\nabla_{e_3}e_2 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_2 = -\frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_4}e_5 = \frac{1}{2}e_2, \\
\nabla_{e_5}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_2 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}e_2.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

\mathfrak{g}_2 için (3.7) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_{115} &= F_{134} = F_{143} = F_{151} = \frac{1}{2}, \\
F_{225} &= F_{252} = F_{314} = F_{341} = \frac{1}{2}, \\
F_{112} &= F_{121} = F_{323} = F_{332} = -\frac{1}{2}, \\
F_{335} &= F_{353} = F_{445} = F_{454} = -\frac{1}{2}, \\
F_{211} &= F_{511} = F_{522} = 1, \\
F_{233} &= F_{533} = F_{544} = -1,
\end{aligned}$$

bulunur. F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_2 z_5 + x_2 y_1 z_1 - x_2 y_3 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 - \frac{1}{2}x_4 y_4 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3 - \frac{1}{2}x_4 y_5 z_4 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2
\end{aligned}$$

$$+x_5y_1z_1 + x_5y_2z_2 - x_5y_3z_3 - x_5y_4z_4.$$

$$F_1(x, y, z) = \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - 2x_2y_2z_2 - x_3y_3z_2 - x_5y_5z_2 - x_1y_2z_1 - x_3y_2z_3 \\ - x_5y_2z_5 + x_1y_4z_3 + 2x_2y_4z_4 + x_3y_4z_1 + x_1y_3z_4 + x_3y_1z_4)$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{4}(2x_2y_1z_1 + x_2y_2z_2 - 2x_2y_3z_3 - 2x_2y_4z_4 + 2x_3y_1z_4 \\ + 2x_3y_4z_1 - 2x_3y_2z_3 - 2x_3y_3z_2 + x_5y_2z_5 + x_5y_5z_2)$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + x_1y_3z_4 + x_1y_4z_3 + 2x_2y_1z_1 \\ - 2x_2y_3z_3 - x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2 - x_3y_4z_1)$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{2}x_1y_1z_5 + \frac{1}{2}x_2y_2z_5 - \frac{1}{2}x_3y_3z_5 - \frac{1}{2}x_4y_4z_5 + \frac{1}{2}x_1y_5z_1 \\ + \frac{1}{2}x_2y_5z_2 - \frac{1}{2}x_3y_5z_3 - \frac{1}{2}x_4y_5z_4,$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5y_1z_1 + x_5y_2z_2 - x_5y_3z_3 - x_5y_4z_4$$

şeklinde olduğundan F tensörü

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla bu da $F \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ anlamına gelir. \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_2 Lie cebirinin Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$Ric_{11} = Ric_{22} = -1 \\ Ric_{33} = 0, Ric_{44} = -\frac{1}{2}, Ric_{55} = 1$$

olup skaler eğriliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ii} \\
&= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55} \\
&= -1 - 1 + 0 - \frac{1}{2} + 1 \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(4.1) koşulunu sağlayacak şekilde (a, b, c) sabitini $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal tabanını kullanarak bulunabilir. Ancak farklı taban elemanları için farklı (a, b, c) sabiti elde edildiğinden \mathfrak{g}_2 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

Tüm $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $(L_{\xi}g)(e_i, e_j) = 0$ olup (4.2) den dolayı \mathfrak{g}_2 para-Einstein benzeri manifold olmadığından para-Ricci benzeri soliton da değildir.

Teorem 5.1.5. \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_5$ eşitlikleri kullanılarak sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülünden kolaylıkla elde edilir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_2 &= \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_4, \\
\nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4, \\
\nabla_{e_3}e_2 &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_5, \\
\nabla_{e_4}e_3 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_5 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_1 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_2 = -\frac{1}{2}e_3, \\
\nabla_{e_5}e_3 &= \frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}e_1.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(3.7) eşitliğinde verilen F tensörünün tanımı kullanılarak F tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
F_{114} &= F_{125} = F_{134} = F_{141} = F_{143} = F_{251} = \frac{1}{2}, \\
F_{152} &= F_{215} = F_{312} = F_{314} = F_{321} = F_{341} = \frac{1}{2}, \\
F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{323} = F_{332} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{334} &= F_{343} = F_{345} = F_{354} = F_{435} = F_{453} = -\frac{1}{2}, \\
F_{211} &= F_{411} = F_{512} = F_{521} = 1, \\
F_{233} &= F_{433} = F_{534} = F_{543} = -1,
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_1 + x_2 y_1 z_1 - x_2 y_3 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 \\
&\quad + x_4 y_1 z_1 - x_4 y_3 z_3 - \frac{1}{2}x_4 y_3 z_5 - \frac{1}{2}x_4 y_5 z_3 \\
&\quad + x_5 y_1 z_2 + x_5 y_2 z_1 - x_5 y_3 z_4 - x_5 y_4 z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-x_1 y_1 z_2 + 2x_1 y_1 z_4 - x_1 y_2 z_1 - 2x_1 y_2 z_3 - 2x_1 y_3 z_2 \\
&\quad + 2x_1 y_4 z_1 + x_1 y_4 z_3 + 2x_2 y_1 z_1 - 2x_2 y_3 z_3 + 2x_3 y_1 z_2 + 3x_3 y_1 z_4 + 2x_3 y_2 z_1 \\
&\quad - 3x_3 y_2 z_3 - 3x_3 y_3 z_2 - 2x_3 y_3 z_4 + 3x_3 y_4 z_1 - 2x_3 y_4 z_3 + 4x_4 y_1 z_1 - 4x_4 y_3 z_3)
\end{aligned}$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + 2x_1y_3z_4 + x_1y_4z_3 + 2x_2y_1z_1 - 2x_2y_3z_3 - x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 - x_3y_1z_4 + x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2 - x_3y_4z_1)$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{2}x_1y_2z_5 + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + \frac{1}{2}x_2y_1z_5 + \frac{1}{2}x_2y_5z_1 - \frac{1}{2}x_3y_4z_5 - \frac{1}{2}x_3y_5z_4 - \frac{1}{2}x_4y_3z_5 - \frac{1}{2}x_4y_5z_3,$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5y_1z_2 + x_5y_2z_1 - x_5y_3z_4 - x_5y_4z_3$$

eşitliklerinden dolayı F tensörü

$$F(x, y, z) = F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$$

şeklinde yazılır. $F \in \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ olup \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_3 Lie cebirinin Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= -\frac{3}{2}, & Ric_{22} &= -1, \\ Ric_{33} &= -\frac{1}{2}, & Ric_{44} &= 0, \\ Ric_{55} &= 1, \end{aligned}$$

şeklinde dir. Ricci tensörünün bileşenleri kullanılarak skaler eğriliği

$$\begin{aligned} scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ii} \\ &= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55} \\ &= -\frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{2} + 0 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

bulunur. \mathfrak{g}_3 Lie cebri para-Einstein benzeri manifold değildir. Çünkü $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanı kullanılarak (4.1) eşitliğini sağlayan tek bir (a, b, c) sabiti bu-

lanamaz. Tüm $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $(L_{\xi}g)(e_i, e_j) = 0$ olduğundan (4.2) eşitliğinden \mathfrak{g}_3 para-Einstein benzeri manifold değildir. Dolayısıyla para-Ricci benzeri soliton da değildir.

Teorem 5.1.6. \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$ eşitliklerinden sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülü kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_2 &= \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_4, \\
\nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4, \\
\nabla_{e_3}e_2 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \\
\nabla_{e_4}e_5 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_1 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}e_1.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

(3.7) eşitliğinde verilen F tensörünün tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}
F_{114} &= F_{125} = F_{134} = F_{141} = F_{143} = F_{512} = \frac{1}{2}, \\
F_{152} &= F_{521} = F_{312} = F_{314} = F_{321} = F_{341} = \frac{1}{2}, \\
F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{323} = F_{332} = -\frac{1}{2}, \\
F_{334} &= F_{343} = F_{435} = F_{453} = F_{534} = F_{543} = -\frac{1}{2}, \\
F_{211} &= F_{411} = -F_{233} = -F_{433} = 1,
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \frac{1}{2}x_1y_4z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 \\
& + \frac{1}{2}x_3y_1z_2 + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 + \frac{1}{2}x_3y_2z_1 - \frac{1}{2}x_3y_2z_3 - \frac{1}{2}x_3y_3z_2 - \frac{1}{2}x_3y_3z_4 \\
& + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_4z_3 + x_4y_1z_1 - x_4y_3z_3 - \frac{1}{2}x_4y_3z_5 - \frac{1}{2}x_4y_5z_3 \\
& + \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 - \frac{1}{2}x_5y_3z_4 - \frac{1}{2}x_5y_4z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) = & \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - 2x_2y_2z_2 - x_3y_3z_2 - x_5y_5z_2 - x_1y_2z_1 \\
& - x_3y_2z_3 - x_5y_2z_5 + x_1y_3z_4 + 2x_2y_4z_4 + x_3y_1z_4 + x_1y_4z_3 + x_3y_4z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) = & \frac{1}{4}(2x_1y_1z_4 + x_1y_2z_1 - x_1y_2z_3 + 2x_1y_3z_4 + 2x_2y_2z_2 \\
& + 3x_1y_4z_1 - x_1y_4z_3 + x_2y_1z_1 - x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 - 3x_2y_3z_3 - 2x_2y_4z_4 \\
& + x_3y_2z_1 - 2x_3y_2z_3 - 2x_3y_3z_2 - 2x_3y_3z_4 + x_3y_4z_1 - 3x_3y_4z_3 + 3x_4y_1z_1 \\
& - 3x_4y_3z_3 + x_4y_3z_1 + x_4y_1z_3 + x_5y_2z_5 + x_5y_5z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x, y, z) = & \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - 2x_1y_2z_1 - x_1y_2z_3 - 2x_1y_3z_2 - x_1y_3z_4 - x_1y_4z_1 + 2x_1y_4z_3 \\
& + 3x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3 + 2x_3y_1z_2 + x_3y_1z_4 + x_3y_2z_1 + x_3y_2z_1 + x_3y_3z_2 \\
& + x_3y_4z_3 + x_4y_1z_1 - x_4y_3z_3 + x_2y_1z_3 - x_4y_1z_3 - x_2y_3z_1 - x_4y_3z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_7(x, y, z) = & \frac{1}{4}(x_1y_2z_5 - x_4y_3z_5 - x_2y_1z_5 + x_3y_4z_5 + x_1y_5z_2 \\
& - x_4y_5z_3 - x_2y_5z_1 + x_3y_5z_4)
\end{aligned}$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{4}x_1y_2z_5 + \frac{1}{4}x_1y_5z_2 + \frac{1}{4}x_2y_1z_5 + \frac{1}{4}x_2y_5z_1 - \frac{1}{4}x_3y_4z_5$$

$$- \frac{1}{4}x_3y_5z_4 - \frac{1}{4}x_4y_3z_5 - \frac{1}{4}x_4y_5z_3,$$

$$F_{10}(x, y, z) = \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 - \frac{1}{2}x_5y_3z_4 - \frac{1}{2}x_5y_4z_3$$

O halde F tensörü

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_7(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $F \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ olup \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_4 Lie cebirinin Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerini Ricci tensörünün tanımını kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Ric_{11} &= -\frac{3}{2}, & Ric_{22} &= -\frac{1}{2} \\ Ric_{33} &= Ric_{44} = 0 \\ Ric_{55} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Skaler eğriliği (3.11) eşitliğinden aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ii} \\ &= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55} \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

\mathfrak{g}_4 Lie cebri para-Einstein benzeri manifold olabilmesi için $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanına göre (4.1) şartını sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulmalıyız. Fakat gerekli kontroller yapıldığında $(-\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2})$ ve $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$ şeklinde iki farklı sabit bulunduğundan \mathfrak{g}_4 Lie cebri para-Einstein benzeri manifold değildir.

Tüm $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $L_{\xi}g(e_i, e_j) = 0$ olup (4.2) den dolayı \mathfrak{g}_4 para-Einstein benzeri manifold olmadığından para-Ricci benzeri soliton da değildir.

Teorem 5.1.7. \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ simifindedir.

Kanıt. $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$ braketleri kullanılarak sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülünden hesaplanır

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2}e_3, \\ \nabla_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_2} e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3} e_5 = \frac{1}{2}e_1, \\ \nabla_{e_4} e_1 &= -\frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_4} e_2 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5} e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5} e_3 = \frac{1}{2}e_1, \end{aligned} \quad (5.9)$$

\mathfrak{g}_5 için (3.7) eşitliğinden F tensörünün bileşenlerini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{115} &= F_{151} = F_{212} = F_{221} = F_{414} = F_{441} = \frac{1}{2}, \\ F_{234} &= F_{243} = F_{335} = F_{353} = F_{423} = F_{432} = -\frac{1}{2}, \\ F_{144} &= F_{511} = -F_{122} = -F_{533} = 1 \end{aligned}$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\ &= \frac{1}{2}x_1 y_1 z_5 - x_1 y_2 z_2 + x_1 y_4 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_2 y_2 z_1 \\ &\quad - \frac{1}{2}x_2 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_2 y_4 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_4 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_4 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_4 y_4 z_1 \\ &\quad + x_5 y_1 z_1 - x_5 y_3 z_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_1y_1z_1 + x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1 + x_4y_4z_1 + x_5y_5z_1 + x_2y_1z_2 \\
&\quad + x_3y_1z_3 + x_4y_1z_4 + x_5y_1z_5 - x_2y_4z_3 - x_3y_1z_3 - x_4y_2z_3) \\
&\quad - 2x_1y_3z_3 - x_2y_3z_4 - x_3y_3z_1 - x_4y_3z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-2x_1y_2z_2 + 2x_1y_4z_4 - 2x_4y_3z_2 + 2x_4y_4z_1 + 2x_4y_1z_4 - 2x_4y_2z_3 \\
&\quad - 2x_1y_1z_1 - x_5y_5z_1 - x_5y_1z_5 + 2x_1y_3z_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-2x_1y_2z_2 + 2x_1y_4z_4 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1 - x_2y_3z_4 \\
&\quad - x_2y_4z_3 + x_4y_3z_2 - x_4y_4z_1 - x_4y_1z_4 + x_4y_2z_3)
\end{aligned}$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{2}x_1y_1z_5 - \frac{1}{2}x_3y_3z_5 - \frac{1}{2}x_3y_5z_3 + \frac{1}{2}x_1y_5z_1$$

$$F_{10}(x, y, z) = x_5y_1z_1 - x_5y_3z_3$$

F tensörünün $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$

şeklinde yazılabildiğini kolaylıkla görebiliriz. Dolayısıyla \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_5 Lie cebirinin Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri Ricci tensörünün tanımı kullanılarak şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
Ric_{11} &= -1 \\
Ric_{22} &= Ric_{33} = -\frac{1}{2} \\
Ric_{44} &= Ric_{55} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ricci tensörünün bileşenlerini kullanarak skaler eğriliğini aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ii} \\
&= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55} \\
&= -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_5 Lie cebirinde $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabana göre (4.1) eşitliğini sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulunamaz dolayısıyla \mathfrak{g}_5 Lie cebiri para - Einstein benzeri değildir. $i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $L_{\xi}g(e_i, e_j) = 0$ olup (4.2) den dolayı \mathfrak{g}_5 para-Einstein benzeri olmadığından para-Ricci benzeri soliton da değildir.

Teorem 5.1.8. \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. $[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_4, [e_2, e_3] = e_5$ eşitlikleri kullanılarak sıfırdan farklı kovaryant türevler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_2 &= \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -\frac{1}{2}e_3, \\
\nabla_{e_2}e_1 &= -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_2}e_5 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4, \\
\nabla_{e_3}e_2 &= \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5, \quad \nabla_{e_3}e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \\
\nabla_{e_4}e_3 &= \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_5}e_2 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_2.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

\mathfrak{g}_6 için (3.7) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
F_{114} &= F_{134} = F_{141} = F_{143} = F_{215} = F_{251} = \frac{1}{2}, \\
F_{312} &= F_{314} = F_{321} = F_{341} = F_{512} = F_{521} = \frac{1}{2}, \\
F_{112} &= F_{121} = F_{123} = F_{132} = F_{323} = F_{332} = -\frac{1}{2}, \\
F_{334} &= F_{343} = F_{345} = F_{354} = F_{534} = F_{543} = -\frac{1}{2}, \\
F_{211} &= F_{411} = -F_{233} = -F_{433} = 1
\end{aligned}$$

bulunur. F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_1 + x_2 y_1 z_1 - x_2 y_3 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 \\
&\quad + x_4 y_1 z_1 - x_4 y_3 z_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_5 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_5 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_5 y_4 z_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-x_1 y_1 z_2 - 2x_2 y_2 z_2 - x_3 y_3 z_2 - x_5 y_5 z_2 - x_1 y_2 z_1 \\
&\quad - x_5 y_2 z_5 + x_1 y_3 z_4 + 2x_2 y_4 z_4 + x_3 y_1 z_4 + x_1 y_4 z_3 + x_3 y_4 z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_1 y_1 z_4 - 2x_1 y_2 z_3 + \frac{3}{2}x_1 y_3 z_4 + 3x_1 y_4 z_1 + 2x_2 y_1 z_1 - 3x_2 y_3 z_3 \\
&\quad + 2x_3 y_2 z_1 - \frac{3}{2}x_3 y_2 z_3 - \frac{3}{2}x_3 y_3 z_2 - 2x_3 y_3 z_4 + \frac{3}{2}x_3 y_4 z_1 - 3x_3 y_4 z_3 \\
&\quad + 3x_4 y_1 z_1 - 3x_4 y_3 z_3 - x_3 y_1 z_2 + x_4 y_1 z_3 + \frac{5}{2}x_1 y_2 z_1 + x_1 y_3 z_2 + \frac{3}{2}x_1 y_1 z_2 \\
&\quad - \frac{5}{2}x_1 y_4 z_3 - \frac{3}{2}x_3 y_1 z_4 + 2x_2 y_2 z_2 - 2x_2 y_4 z_4 + x_5 y_5 z_2 + x_5 y_2 z_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-x_1y_1z_2 - 2x_1y_2z_1 - x_1y_2z_3 - 2x_1y_3z_2 - x_1y_3z_4 - x_1y_4z_1 \\
&\quad + 2x_1y_4z_3 + 3x_2y_1z_1 - x_2y_3z_3 + 2x_3y_1z_2 + x_3y_1z_4 + x_3y_2z_1 \\
&\quad - 2x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2 + 2x_3y_4z_1 + x_3y_4z_3 + x_4y_1z_1 - x_4y_3z_3 \\
&\quad + x_2y_1z_3 - x_4y_1z_3 - x_2y_3z_1 - x_4y_3z_1)
\end{aligned}$$

$$F_7(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_1z_5 - x_3y_4z_5 - x_1y_2z_5 + x_4y_3z_5 + x_2y_5z_1$$

$$- x_3y_5z_4 - x_1y_5z_2 + x_4y_5z_3)$$

$$F_8(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_1z_5 - x_3y_4z_5 + x_1y_2z_5 - x_4y_3z_5 + x_2y_5z_1$$

$$- x_3y_5z_4 + x_1y_5z_2 - x_4y_5z_3)$$

$$F_{10}(x, y, z) = \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 - \frac{1}{2}x_5y_3z_4 - \frac{1}{2}x_5y_4z_3$$

F tensörü $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_7(x, y, z) + F_8(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabilir. Bu da \mathfrak{g}_6 Lie Cebirinin $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfında olduğunu gösterir. \square

\mathfrak{g}_6 Lie cebirinin Ricci tensörünün bileşenleri sıfırdan farklı değerleri için şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
Ric_{11} &= Ric_{22} = -1 \\
Ric_{33} &= -\frac{1}{2} \\
Ric_{44} &= Ric_{55} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Skaler eğriliğini de (3.11) eşitliğini kullanarak aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
scal &= \sum_{i=1}^5 Ric_{ii} \\
&= Ric_{11} + Ric_{22} + Ric_{33} + Ric_{44} + Ric_{55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_6 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold olup olmadığını anlayabilmek için $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabana göre (4.1) şartını sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulmalıyız. Fakat $(-1, 0, \frac{3}{2})$ ve $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ şeklinde iki farklı sabit bulunduğundan \mathfrak{g}_6 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için $L_\xi g(e_i, e_j) = 0$ olup (4.2) den dolayı \mathfrak{g}_6 para-Einstein benzeri manifold olmadığından para-Ricci benzeri soliton da değildir.

Şimdi farklı bir yapıyı alarak Lie cebirlerinin hangi sınıflara ait olduğunu araştıralım.

$$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}, g(e_i, e_i) = 1, \quad i \neq j \quad g(e_i, e_j) = 0$$

olacak şekilde g Riemann metriği verilsin.

$$\begin{aligned}
\xi = e_1, \quad \eta(\xi) = 1 \\
\phi(e_1) = 0, \quad \phi(e_5) = e_3, \quad \phi(e_2) = e_4, \quad \phi(e_3) = e_5, \quad \phi(e_4) = e_2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklinde tanımlı (ϕ, ξ, η, g) dördlüsü $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_6$ üzerinde hemen hemen para-kontakt hemen hemen parakompleks metrik bir yapıdır.

Teorem 5.1.9. \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Bir önceki yapıda hesapladığımız kovaryant türevler bu yapıda da Kozsul formülü ile hesaplanarak aynı değerde bulunur. Dolayısıyla bu yapıdaki \mathfrak{g}_1 Lie cebirinde (5.5) 'daki kovaryat türevler kullanılır.

\mathfrak{g}_1 için (3.7) eşitliğindeki F tensör tanımından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}
F_{145} = F_{154} = F_{213} = F_{231} = F_{325} = \frac{1}{2}, \\
F_{352} = F_{514} = F_{523} = F_{532} = F_{541} = \frac{1}{2}, \\
F_{123} = F_{132} = F_{334} = F_{343} = F_{545} = F_{554} = -\frac{1}{2}, \\
F_{433} = -F_{455} = 1
\end{aligned}$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_3 + \frac{1}{2}x_2 y_3 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_5 z_2 + x_4 y_3 z_3 - x_4 y_5 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_5 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_5 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_5 y_4 z_5 - \frac{1}{2}x_5 y_5 z_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= \frac{1}{4}(-x_1 y_1 z_4 - x_1 y_4 z_1 + x_3 y_2 z_5 - x_3 y_3 z_4 - x_3 y_4 z_3 + x_3 y_5 z_2 \\
&\quad + 2x_4 y_2 z_2 + x_5 y_2 z_3 + x_5 y_3 z_2 - x_5 y_4 z_5 - x_5 y_5 z_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_3 y_5 z_2 + x_4 y_3 z_3 - 3x_4 y_5 z_5 + x_5 y_2 z_3 - x_5 y_4 z_5 \\
&\quad - 2x_5 y_5 z_4 + x_2 y_3 z_5 + x_1 y_1 z_4 + x_1 y_4 z_1 + x_3 y_4 z_3 - 2x_4 y_4 z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_3 y_2 z_5 - x_3 y_5 z_2 - x_3 y_3 z_4 - 2x_3 y_4 z_3 + 3x_4 y_3 z_3 \\
&\quad - x_4 y_5 z_5 + x_5 y_3 z_2 + x_5 y_5 z_4 - x_2 y_3 z_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6(x, y, z) &= \frac{1}{4}(x_2 y_3 z_1 + x_5 y_4 z_1 + x_3 y_2 z_1 + x_4 y_5 z_1 + x_2 y_1 z_3 \\
&\quad + x_5 y_1 z_4 + x_3 y_1 z_2 + x_4 y_1 z_5)
\end{aligned}$$

$$F_9(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_3z_1 + x_5y_4z_1 - x_3y_2z_1 - x_4y_5z_1 + x_2y_1z_3 \\ + x_5y_1z_4 - x_3y_1z_2 - x_4y_1z_5)$$

$$F_{10}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x_1y_2z_3 - \frac{1}{2}x_1y_3z_2 + \frac{1}{2}x_1y_4z_5 + \frac{1}{2}x_1y_5z_4$$

F tensörü $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_6(x, y, z) + F_9(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla \mathfrak{g}_1 Lie Cebirinin $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfında olduğu görülür. \square

Teorem 5.1.10. \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Kozsul formülü ile hesaplanan (5.6) 'deki benzer kovaryant türevler kullanılır.

\mathfrak{g}_2 Lie cebirinde F tensör bileşenleri (3.7) eşitliği kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

$$F_{134} = F_{215} = F_{225} = F_{251} = F_{252} = F_{313} = F_{314} = \frac{1}{2}, \\ F_{331} = F_{341} = F_{423} = F_{432} = F_{143} = F_{515} = F_{551} = \frac{1}{2}, \\ F_{125} = F_{152} = F_{234} = F_{243} = F_{445} = F_{454} = -\frac{1}{2}, \\ F_{155} = F_{522} = -F_{133} = -F_{544} = 1$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(x, y, z) = F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\ = -\frac{1}{2}x_1y_2z_5 - 12x_1y_3z_3 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + x_1y_5z_5 \\ + \frac{1}{2}x_2y_1z_5 + \frac{1}{2}x_2y_2z_5 - \frac{1}{2}x_2y_3z_4 - \frac{1}{2}x_2y_4z_3 + \frac{1}{2}x_2y_5z_1 + \frac{1}{2}x_2y_5z_2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}x_3y_1z_3 + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 + \frac{1}{2}x_3y_3z_1 + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 + \frac{1}{2}x_4y_2z_3 + \frac{1}{2}x_4y_3z_2 \\
& - \frac{1}{2}x_4y_4z_5 - \frac{1}{2}x_4y_5z_4 + \frac{1}{2}x_5y_1z_5 + x_5y_2z_2 - x_5y_4z_4 + \frac{1}{2}x_5y_5z_1 \\
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{2}x_2y_2z_5 - \frac{1}{2}x_2y_3z_4 - \frac{1}{2}x_2y_4z_3 + \frac{1}{2}x_2y_5z_2 + \frac{1}{2}x_4y_2z_3 \\
& + \frac{1}{2}x_4y_3z_2 - \frac{1}{2}x_4y_4z_5 - \frac{1}{2}x_4y_5z_4 + x_5y_2z_2 - x_5y_4z_4,
\end{aligned}$$

$$F_4(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1 + x_4y_4z_1 + x_5y_5z_1 + x_2y_1z_2$$

$$+ x_3y_1z_3 + x_4y_1z_4 + x_5y_1z_5),$$

$$F_6(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_5y_5z_1 + x_2y_5z_1 + x_3y_3z_1 + x_3y_4z_1 + x_5y_2z_1$$

$$+ x_4y_3z_1 + x_5y_1z_5 + x_2y_1z_5 + x_3y_1z_3 + x_3y_1z_4$$

$$- x_5y_1z_2 + x_4y_1z_3 - x_2y_2z_1 - x_4y_4z_1 - x_2y_1z_2 - x_4y_1z_4),$$

$$F_9(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_5z_1 + x_3y_4z_1 - x_5y_2z_1 - x_4y_3z_1 + x_2y_1z_5$$

$$+ x_3y_1z_4 - x_5y_1z_2 - x_4y_1z_3),$$

$$F_{10}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x_1y_2z_5 - x_1y_3z_3 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 - \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + x_1y_5z_5$$

Bu bulduklarımızdan dolayı F tensörü

$$F(x, y, z) = F_2(x, y, z) + F_4(x, y, z) + F_6(x, y, z) + F_9(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$$

şeklinde yazılabilir. Bu $F \in \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ anlamına gelir dolayısıyla \mathfrak{g}_2

Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

Teorem 5.1.11. \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Bu yapıda da (5.7) ile benzer kovaryant türevler kullanılır.

\mathfrak{g}_3 'de (3.7) eşitliğinden faydalanarak aşağıdaki F tensör bileşenlerini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
F_{145} &= F_{154} = F_{215} = F_{251} = F_{312} = F_{314} = \frac{1}{2}, \\
F_{321} &= F_{323} = F_{332} = F_{341} = F_{413} = F_{415} = \frac{1}{2}, \\
F_{431} &= F_{451} = F_{512} = F_{521} = F_{525} = F_{552} = \frac{1}{2}, \\
F_{123} &= F_{132} = F_{345} = F_{354} = F_{534} = F_{543} = -\frac{1}{2}, \\
F_{255} &= -F_{233} = 1
\end{aligned}$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 - x_2 y_3 z_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + x_2 y_5 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_4 y_3 z_1 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_5 y_3 z_4 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_5 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_5 y_5 z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_2 + x_5 y_5 z_2 + x_3 y_2 z_3 + x_5 y_2 z_5 \\
&\quad - 2x_2 y_4 z_4 - x_3 y_5 z_4 - x_5 y_3 z_4 - x_5 y_4 z_3 - x_3 y_4 z_5)
\end{aligned}$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{1}{2}(-x_2 y_3 z_3 + x_2 y_5 z_5 - x_5 y_3 z_4 - x_5 y_4 z_3 + x_5 y_2 z_5)$$

$$+ x_5y_5z_2 - x_2y_2z_2 - x_2y_4z_4)$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4}(-2x_2y_3z_3 + 2x_2y_5z_5 + x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2 - x_3y_4z_5$$

$$- x_3y_5z_4 + x_5y_3z_4 + x_5y_4z_3 - x_5y_2z_5 - x_5y_5z_2)$$

$$F_6(x, y, z) = \frac{1}{4}(2x_2y_5z_1 + x_3y_2z_1 + 2x_3y_4z_1 + 2x_4y_3z_1 + x_4y_5z_1$$

$$+ 2x_5y_2z_1 + x_2y_3z_1 + x_5y_4z_1 + 2x_2y_1z_5 + x_3y_1z_2$$

$$+ 2x_3y_1z_4 + 2x_4y_1z_3 + x_4y_1z_5 + 2x_5y_1z_2 + x_2y_1z_3 + x_5y_1z_4)$$

$$F_9(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_3y_2z_1 + x_4y_5z_1 - x_2y_3z_1 - x_5y_4z_1$$

$$+ x_3y_1z_2 + x_4y_1z_5 - x_2y_1z_3 - x_5y_1z_4)$$

$$F_{10}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x_1y_2z_3 - \frac{1}{2}x_1y_3z_2 + \frac{1}{2}x_1y_4z_5 + \frac{1}{2}x_1y_5z_4$$

F tensörü $F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_6(x, y, z) + F_9(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ olup \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri tanımlanan yapıya göre $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

Teorem 5.1.12. \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri $\mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Kozsul formülü ile hesaplanan kovaryant türevler değişmez. Dolayısıyla (5.8)'deki aynı eşitlikler kullanılır.

(3.7) eşitliğini kullanarak \mathfrak{g}_4 Lie için F tensör tanımından aşağıdaki eşitlikleri buluruz:

$$\begin{aligned} F_{145} &= F_{154} = F_{215} = F_{251} = F_{312} = F_{314} = \frac{1}{2}, \\ F_{321} &= F_{341} = F_{413} = F_{415} = \frac{1}{2}, \\ F_{431} &= F_{451} = F_{512} = F_{521} = \frac{1}{2}, \\ F_{123} &= F_{132} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_4 y_3 z_1 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_2 y_5 z_1 + x_3 y_2 z_1 + 2x_3 y_4 z_1 + 2x_4 y_3 z_1 + x_4 y_5 z_1 \\
&\quad + 2x_5 y_2 z_1 + x_2 y_3 z_1 + x_5 y_4 z_1 + 2x_2 y_1 z_5 + x_3 y_1 z_2 \\
&\quad + 2x_3 y_1 z_4 + 2x_4 y_1 z_3 + x_4 y_1 z_5 + 2x_5 y_1 z_2 + x_2 y_1 z_3 + x_5 y_1 z_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_9(x, y, z) &= \frac{1}{4}(x_3 y_2 z_1 + x_4 y_5 z_1 - x_2 y_3 z_1 - x_5 y_4 z_1 + x_3 y_1 z_2 \\
&\quad + x_4 y_1 z_5 - x_2 y_1 z_3 - x_5 y_1 z_4)
\end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_4$$

F tensörünü şu şekilde ifade edebiliriz; $F(x, y, z) = F_6(x, y, z) + F_9(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$

Dolayısıyla $F \in \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ olup \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri $\mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

Teorem 5.1.13. \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Gerekli hesaplamalar yapıldığında (5.9) ile aynı kovaryant türevler geldiği görülmektedir.

\mathfrak{g}_5 Lie cebirinde aşağıdaki sıfırdan farklı F tensör bileşenlerini (3.7) eşitliğini kullanarak bulabiliriz:

$$\begin{aligned} F_{212} &= F_{221} = F_{313} = F_{331} = \frac{1}{2}, \\ F_{414} &= F_{441} = F_{515} = F_{551} = \frac{1}{2}, \\ F_{144} &= F_{155} = -F_{122} = -F_{133} = 1 \end{aligned}$$

F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\ &= -x_1 y_2 z_2 - x_1 y_3 z_3 + x_1 y_4 z_4 + x_1 y_5 z_5 + \frac{1}{2} x_2 y_1 z_2 + \frac{1}{2} x_2 y_2 z_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} x_3 y_1 z_3 + \frac{1}{2} x_3 y_3 z_1 + \frac{1}{2} x_4 y_1 z_4 + \frac{1}{2} x_4 y_4 z_1 + \frac{1}{2} x_5 y_1 z_5 + \frac{1}{2} x_5 y_5 z_1 \\ F_6(x, y, z) &= \frac{1}{2} x_2 y_1 z_2 + \frac{1}{2} x_2 y_2 z_1 + \frac{1}{2} x_3 y_1 z_3 + \frac{1}{2} x_3 y_3 z_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} x_4 y_1 z_4 + \frac{1}{2} x_4 y_4 z_1 + \frac{1}{2} x_5 y_1 z_5 + \frac{1}{2} x_5 y_5 z_1 \end{aligned}$$

$$F_{10}(x, y, z) = -x_1 y_2 z_2 - x_1 y_3 z_3 + x_1 y_4 z_4 + x_1 y_5 z_5$$

F tensörü $F(x, y, z) = F_6(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ olup tanımlanan bu yapıya göre \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

Teorem 5.1.14. \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. Bir önceki incelediğimiz metrik yapıdaki aynı kovaryant türevler geldiğinden (5.10) 'daki değerler kullanılır.

\mathfrak{g}_6 Lie cebiri için (3.7) eşitliğinden faydalanarak F tensör tanımından F tensör bileşenlerini şu şekilde elde ederiz:

$$\begin{aligned}
F_{134} &= F_{143} = F_{145} = F_{154} = F_{215} = F_{251} = \frac{1}{2}, \\
F_{312} &= F_{314} = F_{321} = F_{323} = F_{332} = \frac{1}{2}, \\
F_{341} &= F_{415} = F_{451} = F_{525} = F_{552} = \frac{1}{2}, \\
F_{123} &= F_{125} = F_{132} = F_{152} = -\frac{1}{2}, \\
F_{345} &= F_{354} = F_{534} = F_{543} = -\frac{1}{2}, \\
F_{255} &= -F_{233} = 1
\end{aligned}$$

bulunur. F tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
F(x, y, z) &= F\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k F(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_5 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_1 y_5 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_5 - x_2 y_3 z_3 + \frac{1}{2}x_2 y_5 z_1 + x_2 y_5 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_4 z_1 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_3 y_4 z_5 - \frac{1}{2}x_3 y_5 z_4 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_4 y_5 z_1 + \frac{1}{2}x_5 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_5 y_3 z_4 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_5 y_4 z_3 + \frac{1}{2}x_5 y_5 z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(x, y, z) &= \frac{1}{4}(2x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_2 + x_5 y_5 z_2 + x_3 y_2 z_3 + x_5 y_2 z_5 \\
&\quad - 2x_2 y_4 z_4 - x_3 y_5 z_4 - x_5 y_3 z_4 - x_3 y_4 z_5 + x_5 y_4 z_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(x, y, z) &= \frac{1}{2}(-x_2 y_3 z_3 + x_2 y_5 z_5 - x_5 y_3 z_4 - x_5 y_4 z_3 + x_5 y_2 z_5 \\
&\quad + x_5 y_5 z_2 - x_2 y_2 z_2 + x_2 y_4 z_4)
\end{aligned}$$

$$F_3(x, y, z) = \frac{1}{4}(-2x_2y_3z_3 + 2x_2y_5z_5 + x_3y_2z_3 + x_3y_3z_2 - x_3y_4z_5 \\ - x_3y_5z_4 + x_5y_3z_4 + x_5y_4z_3 - 2x_5y_2z_5 - 2x_5y_5z_2)$$

$$F_6(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_5z_1 + x_3y_2z_1 + x_3y_4z_1 + x_4y_5z_1 + x_5y_2z_1 + x_2y_3z_1 \\ + x_4y_3z_1 + x_5y_4z_1 + x_2y_1z_5 + x_3y_1z_2 + x_3y_1z_4 \\ + x_4y_1z_5 + x_5y_1z_2 + x_2y_1z_3 + x_4y_1z_3 + x_5y_1z_4)$$

$$F_9(x, y, z) = \frac{1}{4}(x_2y_5z_1 + x_3y_2z_1 + x_3y_4z_1 + x_4y_5z_1 - x_5y_2z_1 - x_2y_3z_1 \\ - x_4y_3z_1 - x_5y_4z_1 + x_2y_1z_5 + x_3y_1z_2 + x_3y_1z_4 \\ + x_4y_1z_5 - x_5y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_4y_1z_3 - x_5y_1z_4)$$

$$F_{10}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x_1y_2z_3 - \frac{1}{2}x_1y_3z_2 - \frac{1}{2}x_1y_2z_5 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 \\ + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + \frac{1}{2}x_1y_4z_5 - \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + \frac{1}{2}x_1y_5z_4$$

Benzer şekilde F_1, F_2, F_3 de hesaplanabilir.

$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z) + F_6(x, y, z) + F_9(x, y, z) + F_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabildiğinden \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

Sonuç 5.1.15. (5.11) metrik yapısında alındığında $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_5, \mathfrak{g}_6$ Lie cebirlerinin (4.1) ve (4.2) eşitliklerine göre incelendiğinde para-Einsten benzeri manifold ve para-Ricci benzeri soliton olmadıkları görülür.

Sonuç 5.0.2 kullanılarak aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz:

Sonuç 5.1.16. (5.4) yapısı için $i = 1, \dots, 6$, g_i Lie cebirinde ξ vektör alanı Killing vektör alanıdır.

Sonuç 5.1.17. (5.11) yapısı için $i = 1, \dots, 6$, g_i Lie cebirinde bazı $\mathcal{L}_\xi g$ değerleri sıfırdan farklı olduğundan ξ Killing vektör alanı değildir.

6. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONU İLE 3 BOYUTLU LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE APAPR YAPISI

\mathfrak{L} 3–boyutlu reel bağlantılı bir Lie Grubu ve \mathfrak{l} onun Lie Cebri olsun. \mathfrak{l} ’deki sol invaryant vektör alanların tabanı $\{e_0, e_1, e_2\}$ ise hemen hemen parakontakt hemen hemen parakompleks yapı (ϕ, ξ, η) ve g Riemann metriği aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\phi e_0 &= 0, & \phi e_1 &= e_2, & \phi e_2 &= e_1, & \xi &= e_0, \\ \eta(e_0) &= 1, & \eta(e_1) &= \eta(e_2) = 0, \\ g(e_i, e_j) &= \delta_{ij}, & i, j &\in \{0, 1, 2\},\end{aligned}$$

Teorem 6.0.1. $(\mathfrak{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ manifoldu \mathfrak{F}_s ($s \in 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11$) temel sınıfına aittir ancak ve ancak karşılık gelen \mathfrak{l} Lie cebri aşağıdaki komütatörler ile belirlidir.

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 : [e_0, e_1] &= 0, [e_0, e_2] = 0, [e_1, e_2] = ae_1 - be_2 \\ \mathfrak{F}_4 : [e_0, e_1] &= ae_2, [e_0, e_2] = ae_1, [e_1, e_2] = 0 \\ \mathfrak{F}_5 : [e_0, e_1] &= ae_1, [e_0, e_2] = ae_2, [e_1, e_2] = 0 \\ \mathfrak{F}_8 : [e_0, e_1] &= ae_2, [e_0, e_2] = -ae_1, [e_1, e_2] = 2ae_0 \\ \mathfrak{F}_9 : [e_0, e_1] &= ae_1, [e_0, e_2] = -ae_2, [e_1, e_2] = 0 \\ \mathfrak{F}_{10} : [e_0, e_1] &= -ae_2, [e_0, e_2] = ae_1, [e_1, e_2] = 0 \\ \mathfrak{F}_{11} : [e_0, e_1] &= ae_0, [e_0, e_2] = be_0, [e_1, e_2] = 0\end{aligned}$$

Burada a ve b keyfi reel parametrelerdir.

Teorem 6.0.1 ’den dolayı aşağıdaki şu sonucu elde ederiz:

Sonuç 6.0.2. $(\mathfrak{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ manifoldu para-Sasaki benzeri manifolddur ancak ve ancak karşılık gelen \mathfrak{l} Lie cebri aşağıdaki komütatörler tarafından belirlenir.

$$[e_0, e_1] = -e_2, [e_0, e_2] = -e_1, [e_1, e_2] = 0.$$

Teorem 6.0.3. [3] $(\mathfrak{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ temel bir \mathfrak{F}_s , $s \in \{1, 4, 5, 8, 9, 10, 11\}$ sınıfına ait olsun. $s = 10$ ise $(\mathfrak{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ düzdür. Fakat $s \neq 10$ iken $(\mathfrak{L}, \phi, \xi, \eta, g)$ düzdür ancak ve ancak \mathfrak{L} , \mathfrak{F}_0 -manifolddur. İkinci durumdaki manifold için sıfırdan farklı R , Ric ve $scal$ değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 : R_{1212} &= -Ric_{11} = -Ric_{22} = -\frac{1}{2}scal = a^2 + b^2 \\
\mathfrak{F}_4 : R_{0101} &= R_{0202} = -R_{1212} = -\frac{1}{2}Ric_{00} = -\frac{1}{2}scal = a^2 \\
\mathfrak{F}_5 : R_{0101} &= R_{0202} = R_{1212} = -\frac{1}{2}Ric_{00} = -\frac{1}{2}Ric_{11} = -\frac{1}{2}Ric_{22} = -\frac{1}{6}scal = a^2 \\
\mathfrak{F}_8 : R_{0101} &= R_{0202} = -R_{1212} = -\frac{1}{2}Ric_{00} = -\frac{1}{2}scal = -a^2 \\
\mathfrak{F}_9 : R_{0101} &= R_{0202} = -R_{1212} = -\frac{1}{2}Ric_{00} = -\frac{1}{2}scal = a^2 \\
\mathfrak{F}_{11} : R_{0101} &= -Ric_{11} = a^2, Ric_{00} = \frac{1}{2}scal = -(a^2 + b^2) \\
R_{0102} &= -Ric_{12} = ab, R_{0202} = -Ric_{22} = b^2
\end{aligned}$$

Teorem 6.0.4. $\mathfrak{F}_1, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_1 için sıfırdan farklı kovaryant türevleri hesaplandığında

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_0 = -\alpha e_1 - \beta e_2, \bar{\nabla}_{e_1}e_1 = -\alpha e_2 - \alpha e_0, \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = \alpha e_1 + \beta e_0,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}e_0 = -\alpha e_2 - \beta e_1, \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = \beta e_2 + \beta e_0, \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = -\beta e_1 + \alpha e_0,$$

eşitlikleri elde edilir. \mathfrak{F}_1 için sıfırdan farklı \bar{F} tensör bileşenleri (3.23) eşitliğini kullanarak

$$\bar{F}_{101} = \bar{F}_{110} = \bar{F}_{202} = \bar{F}_{220} = \beta,$$

$$\bar{F}_{102} = \bar{F}_{120} = \bar{F}_{201} = \bar{F}_{210} = \alpha,$$

$$\bar{F}_{111} = -\bar{F}_{122} = 2a,$$

$$\bar{F}_{222} = -\bar{F}_{211} = 2b$$

şeklinde bulunur. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= +\beta x_1 y_0 z_1 + \alpha x_1 y_0 z_2 + \beta x_1 y_1 z_0 + 2\alpha x_1 y_1 z_1 \\
&\quad +\alpha x_1 y_2 z_0 - 2\alpha x_1 y_2 z_2 + \alpha x_2 y_0 z_1 + \beta x_2 y_0 z_2 \\
&\quad -2\beta x_2 y_1 z_1 + \alpha x_2 y_1 z_0 + \beta x_2 y_2 z_0 + 2\beta x_2 y_2 z_2
\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_1(x, y, z) + \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z)$

şeklinde yazılabildiğinden $\bar{F} \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6$ anlamında olup \mathfrak{F}_1 , $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_1 için eğrilik tensör bileşenlerini

$$\bar{R}_{ijkl} = g(\bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l) \quad (6.1)$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{1210} &= -\bar{R}_{1201} = 2b\beta \\
\bar{R}_{1202} &= -\bar{R}_{1220} = 2a\beta \\
\bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = a^2 + b^2 + \alpha^2 - \beta^2
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. \mathfrak{F}_1 'in Ricci tensör bileşenlerinin sıfırdan farklı değerleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{Ric}_{11} = \bar{Ric}_{22} = -a^2 - b^2 + \beta^2 - \alpha^2$$

Ricc tensörünü kullanarak skaler eğriliğini şu şekilde bulabiliriz:

$$\begin{aligned}\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \overline{Ric}_i \\ &= \overline{Ric}_{00} + \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} \\ &= -2a^2 - 2b^2 + 2\beta^2 - 2\alpha^2\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_1 'in para-Einstein benzeri manifold olup olmadığını incelediğimizde (3.33) eşitliğinin $\{e_0, e_1, e_2\}$ tabanı için sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulmalıyız. Gerekli kontroller yapıldığında tek bir $(a, b, c) = (-a^2 - b^2 + \beta^2 - \alpha^2, 0, a^2 + b^2 - \beta^2 + \alpha^2)$ sabiti bulunduğundan \mathfrak{F}_1 para-Einstein benzeri manifold olur.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = -2\alpha \\ \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = -2\beta \\ \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{00} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{01} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{02} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{10} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{20} = 0\end{aligned}$$

(3.34) den dolayı tek bir $(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha + \alpha^2 - \beta^2 + a^2 + b^2, \beta, -\alpha - \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2)$ sabiti bulunduğundan \mathfrak{F}_1 para-Einstein benzeri manifold olduğundan para-Ricci benzeri solitondur.

Teorem 6.0.5. \mathfrak{F}_4 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_4 için sıfırdan farklı kovaryant türevlerini Kozsul formülü kullanılarak

$$\overline{\nabla}_{e_1} e_0 = -ae_2 - \alpha e_1 - \beta e_2, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_1 = \alpha e_0, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_2 = ae_0 + \beta e_0,$$

$$\overline{\nabla}_{e_2} e_0 = -ae_1 - \alpha e_2 - \beta e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_1 = ae_0 + \beta e_0, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \alpha e_0,$$

şeklinde elde edilir. \mathfrak{F}_4 için \overline{F} tensör bileşenleri (3.23) eşitliğinden faydalanılarak bulunabilir:

$$\begin{aligned}\overline{F}_{101} &= \overline{F}_{110} = \overline{F}_{202} = \overline{F}_{220} = a + \beta, \\ \overline{F}_{102} &= \overline{F}_{120} = \overline{F}_{201} = \overline{F}_{210} = \alpha,\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= +(a + \beta)x_1 y_0 z_1 + \alpha x_1 y_0 z_2 + (a + \beta)x_1 y_1 z_0 + \alpha x_1 y_2 z_0 \\
&\quad + \alpha x_2 y_0 z_1 + (a + \beta)x_2 y_0 z_2 + \alpha x_2 y_1 z_0 + (a + \beta)x_2 y_2 z_0
\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z)$ şeklinde yazılabildiğinden $\mathfrak{F}_4, \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_4 için eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri (6.1) eşitliği ile şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0110} = \bar{R}_{0202} = -\bar{R}_{0220} = a^2 + a\beta \\
\bar{R}_{0102} &= -\bar{R}_{0120} = \bar{R}_{0201} = -\bar{R}_{0210} = a\alpha \\
\bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = -a^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2a\beta
\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_4 'in Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}
\bar{Ric}_{00} &= -2a^2 - 2a\beta \\
\bar{Ric}_{11} &= \bar{Ric}_{22} = a\beta + \beta^2 - \alpha^2 \\
\bar{Ric}_{12} &= \bar{Ric}_{21} = -a\alpha
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece skaler eğriliği yukarıdaki eşitliklerden faydalanarak bulabiliriz:

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \bar{Ric}_{ii} \\
&= \bar{Ric}_{00} + \bar{Ric}_{11} + \bar{Ric}_{22} \\
&= 2(\beta^2 - \alpha^2 - a^2)
\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_4 'ün $\{e_0, e_1, e_2\}$ tabanı için (3.33) şartını sağlayacak şekilde tek bir

$$(a, b, c) = (a\beta + \beta^2 - \alpha^2, -a\alpha, -3a\beta - \beta^2 + \alpha^2 + 2a^2)$$

sabiti bulunduğundan \mathfrak{F}_4 para-Einstein benzeri manifold olur.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = -2\alpha \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = -2\beta \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{00} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{01} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{02} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{10} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{20} = 0\end{aligned}$$

(3.34) den dolayı tek bir $(\lambda, \mu, \nu) = (\alpha + \alpha^2 - \beta^2 - a\beta, \beta + a\alpha, 2a^2 + 2a\beta)$ sabiti bulunduğundan \mathfrak{F}_4 aynı zamanda para-Ricci benzeri solitondur.

Teorem 6.0.6. \mathfrak{F}_5 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_5 için sıfırdan farklı kovaryant türevleri aşağıdaki şekildedir:

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_0 = -ae_1 - \alpha e_1 - \beta e_2, \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = ae_0 + \alpha e_0, \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \beta e_0,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_0 = -ae_2 - \alpha e_2 - \beta e_1, \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \beta e_0, \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = ae_0 + \alpha e_0,$$

(3.23) eşitliğinden faydalanarak \mathfrak{F}_5 için \bar{F} tensör tanımı ile sıfırdan farklı \bar{F} tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{F}_{101} &= \bar{F}_{110} = \bar{F}_{202} = \bar{F}_{220} = \beta, \\ \bar{F}_{102} &= \bar{F}_{120} = \bar{F}_{201} = \bar{F}_{210} = a + \alpha,\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= \beta x_1 y_0 z_1 + (a + \alpha) x_1 y_0 z_2 + \beta x_1 y_1 z_0 + (a + \alpha) x_1 y_2 z_0 \\
&\quad + (a + \alpha) x_2 y_0 z_1 + \beta x_2 y_0 z_2 + (a + \alpha) x_2 y_1 z_0 + \beta x_2 y_2 z_0
\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_5(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z)$ toplamlarından elde edilebildiği görülmektedir. Dolayısıyla \mathfrak{F}_5 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_5 \oplus \mathcal{F}_6$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_5 sıfırdan farklı eğrilik tensör bileşenlerini (6.1) eşitliği ile hesapladığımızda

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0110} = \bar{R}_{0202} = -\bar{R}_{0220} = a^2 + a\alpha \\
\bar{R}_{0102} &= -\bar{R}_{0120} = \bar{R}_{0201} = -\bar{R}_{0210} = a\beta \\
\bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = a^2 + \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir. \mathfrak{F}_5 'in sıfırdan farklı Ricci tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}
\bar{Ric}_{00} &= -2a^2 - 2a\alpha \\
\bar{Ric}_{11} &= \bar{Ric}_{22} = -2a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 3a\alpha \\
\bar{Ric}_{12} &= \bar{Ric}_{21} = -a\beta
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bulduğumuz Ricci tensör bileşenleri ile skaler eğriliği aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \bar{Ric}_{ii} \\
&= \bar{Ric}_{00} + \bar{Ric}_{11} + \bar{Ric}_{22} \\
&= 2(-3a^2 - 4a\alpha - \alpha^2 + \beta^2)
\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_5 'de (3.33) koşulunu sağlayacak şekilde (a, b, c) sabitini $\{e_0, e_1, e_2\}$ ortonormal ta-

banımı kullanarak bulunabilir. Tek türlü

$$(a, b, c) = (-2a^2 - \alpha^2 + \beta^2 - 3a\alpha, -a\beta, \alpha^2 - \beta + a\alpha)$$

sabiti bulunduğundan \mathfrak{F}_5 para-Einstein benzeri manifold olur.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevlerini hesapladığımızda aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = -2a - 2\alpha \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = -2\beta \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{00} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{01} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{02} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{10} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{20} = 0\end{aligned}$$

(3.34) den dolayı tek bir

$$(\lambda, \mu, \nu) = (2a^2 + \alpha^2 + 3a\alpha - \beta^2 - a - \alpha, -\alpha^2 - a\alpha + \beta^2 + a + \alpha, \beta(1 + a))$$

olup \mathfrak{F}_5 para-Ricci benzeri solitondur.

Teorem 6.0.7. \mathfrak{F}_8 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_8 için sıfırdan farklı kovaryant türevler Kozsul formülü kullanılarak

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_0 = -ae_2 - \alpha e_1 - \beta e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \alpha e_0, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = ae_0 + \beta e_0,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_0 = ae_1 - \alpha e_2 - \beta e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = -ae_0 + \beta e_0, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \alpha e_0,$$

bulunur. (3.23) eşitliğinden faydalanarak \mathfrak{F}_8 için sıfırdan farklı \bar{F} eğrilik tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{F}_{101} &= \bar{F}_{110} = a + \beta, \\ \bar{F}_{202} &= \bar{F}_{220} = -a + \beta, \\ \bar{F}_{102} &= \bar{F}_{120} = \bar{F}_{201} = \bar{F}_{210} = \alpha.\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= +(a + \beta)x_1 y_0 z_1 + \alpha x_1 y_0 z_2 + (a + \beta)x_1 y_1 z_0 + \alpha x_1 y_2 z_0 \\
&\quad + \alpha x_2 y_0 z_1 + (-a + \beta)x_2 y_0 z_2 + \alpha x_2 y_1 z_0 + (-a + \beta)x_2 y_2 z_0
\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_8(x, y, z)$ toplamı ile ifade edilebildiğinden \mathfrak{F}_8 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_8 eğrilik tensörlerinin sıfırdan farklı bileşenleri (6.1) eşitliği ile aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0110} = -a^2 + a\beta \\
\bar{R}_{0220} &= -\bar{R}_{0202} = a^2 + a\beta \\
\bar{R}_{0102} &= -\bar{R}_{0120} = -\bar{R}_{0201} = \bar{R}_{0210} = a\alpha \\
\bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = a^2 + \alpha^2 - \beta^2
\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_8 'in Ricci tensör bileşenlerinin sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}
\bar{Ric}_{00} &= 2a^2 \\
\bar{Ric}_{11} &= -a\beta + \beta^2 - \alpha^2 \\
\bar{Ric}_{22} &= a\beta + \beta^2 - \alpha^2 \\
\bar{Ric}_{12} &= \bar{Ric}_{21} = -a\alpha
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ricci tensör bileşenlerini kullanarak skaler eğrilik

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \bar{Ric}_{ii} \\
&= \bar{Ric}_{00} + \bar{Ric}_{11} + \bar{Ric}_{22} \\
&= 2(\beta^2 - \alpha^2 + a^2)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.33) eşitliğini $\{e_0, e_1, e_2\}$ ortonormal tabanını sağlayacak şekilde

tek türlü (a, b, c) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_8 para-Einstein benzeri değildir.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = -2\alpha, \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = -2\beta, \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{00} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{01} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{02} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{10} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{20} = 0.\end{aligned}$$

(3.34) eşitliğinden dolayı tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_8 para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 6.0.8. \mathfrak{F}_9 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_9 için sıfırdan farklı kovaryant türevler

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_0 = -ae_1 - \alpha e_1 - \beta e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = ae_0 + \alpha e_0, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \beta e_0,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_0 = ae_2 - \alpha e_2 - \beta e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = \beta e_0, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = -ae_0 + \alpha e_0,$$

şeklinde bulunur. (3.23) eşitliği ile aşağıdaki \bar{F} tensör bileşenleri \mathfrak{F}_9 için bulunabilir:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{101} &= \bar{F}_{110} = \bar{F}_{202} = \bar{F}_{220} = \beta, \\ \bar{F}_{102} &= \bar{F}_{120} = a + \alpha, \\ \bar{F}_{201} &= \bar{F}_{210} = -a + \alpha.\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F} \left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\ &= \beta x_1 y_0 z_1 + (a + \alpha) x_1 y_0 z_2 + \beta x_1 y_1 z_0 + (a + \alpha) x_1 y_2 z_0 \\ &\quad + (-a + \alpha) x_2 y_0 z_1 + \beta x_2 y_0 z_2 + (-a + \alpha) x_2 y_1 z_0 + \beta x_2 y_2 z_0\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü, $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_9(x, y, z)$ toplamlarından elde edildiğinden \mathfrak{F}_9 , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_9$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_9 'da (6.1) eşitliğindeki \bar{F} eğrilik tensör tanımından faydalanarak sıfırdan farklı \bar{F} eğrilik tensör bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0110} = a^2 + a\alpha \\ \bar{R}_{0202} &= -\bar{R}_{0220} = a^2 - a\alpha \\ \bar{R}_{0102} &= -\bar{R}_{0120} = -\bar{R}_{0201} = \bar{R}_{0210} = a\beta \\ \bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = -a^2 + \alpha^2 - \beta^2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. \mathfrak{F}_9 'in Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned}\bar{Ric}_{00} &= -2a^2 \\ \bar{Ric}_{11} &= -\alpha^2 + \beta^2 - a\alpha \\ \bar{Ric}_{22} &= -\alpha^2 + \beta^2 + a\alpha \\ \bar{Ric}_{12} &= \bar{Ric}_{21} = -a\beta\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Skaler eğriliği (3.32) eşitliğine göre aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \bar{Ric}_{ii} \\ &= \bar{Ric}_{00} + \bar{Ric}_{11} + \bar{Ric}_{22} \\ &= 2(-a^2 - \alpha^2 + \beta^2)\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_9 'in para-Einstein benzeri manifold olup olmadığını incelediğimizde $\{e_0, e_1, e_2\}$ ortonormal tabana göre (3.33) şartı sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulunmadığı görülmektedir. Dolayısıyla \mathfrak{F}_9 para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= -2a - 2\alpha \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{22} &= 2a - 2\alpha \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = -2\beta \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{00} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{01} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{02} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{10} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{20} = 0\end{aligned}$$

(3.34) den dolayı tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_9 para-Ricci benzeri

soliton değildir.

Teorem 6.0.9. \mathfrak{F}_{10} , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_{10} için sıfırdan farklı kovaryant türevleri şu şekilde hesaplanır:

$$\bar{\nabla}_{e_0}e_1 = -ae_2, \bar{\nabla}_{e_1}e_0 = -\alpha e_1 - \beta e_2, \bar{\nabla}_{e_1}e_1 = \alpha e_0, \bar{\nabla}_{e_1}e_2 = \beta e_0,$$

$$\bar{\nabla}_{e_0}e_2 = ae_1, \bar{\nabla}_{e_2}e_0 = -\alpha e_2 - \beta e_1, \bar{\nabla}_{e_2}e_1 = \beta e_0, \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = \alpha e_0,$$

(3.23) eşitliğinden faydalanarak \mathfrak{F}_{10} için sıfırdan farklı \bar{F} tensör bileşenleri

$$\begin{aligned} \bar{F}_{101} &= \bar{F}_{110} = \bar{F}_{202} = \bar{F}_{220} = \beta, \\ \bar{F}_{102} &= \bar{F}_{120} = \bar{F}_{201} = \bar{F}_{210} = \alpha, \\ \bar{F}_{011} &= -\bar{F}_{022} = 2a \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, z) &= \bar{F} \left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k \right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\ &= +\beta x_1 y_0 z_1 + \alpha x_1 y_0 z_2 + \beta x_1 y_1 z_0 + 2a x_0 y_1 z_1 + \alpha x_1 y_2 z_0 \\ &\quad -2a x_0 y_2 z_2 + \alpha x_2 y_0 z_1 + \beta x_2 y_0 z_2 + \alpha x_2 y_1 z_0 + \beta x_2 y_2 z_0 \end{aligned}$$

\bar{F} tensörü

$$\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_{10}(x, y, z)$$

toplamı olarak yazılabildiğinden $\bar{F} \in \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$ olup \mathfrak{F}_{10} , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{F}_{10} için (6.1) eşitliğine göre sıfırdan farklı eğrilik tensör bileşenlerini hesap-

ladığımızda

$$\begin{aligned}\overline{R}_{0101} &= -\overline{R}_{0110} = -\overline{R}_{0202} = \overline{R}_{0220} = -2a\beta \\ \overline{R}_{1212} &= -\overline{R}_{1221} = \alpha^2 - \beta^2\end{aligned}$$

değerleri elde edilir. \mathfrak{F}_{10} 'un Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}\overline{Ric}_{11} &= 2a\beta + \beta^2 - \alpha^2 \\ \overline{Ric}_{22} &= -2a\beta + \beta^2 - \alpha^2\end{aligned}$$

Ricci tensör bileşenleri yardımıyla skaler eğrilik

$$\begin{aligned}\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \overline{Ric}_{ii} \\ &= \overline{Ric}_{00} + \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} \\ &= 2\beta^2 - 2\alpha^2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. \mathfrak{F}_{10} para-Einstein benzeri manifold değildir. Çünkü $\{e_0, e_1, e_2\}$ ortonormal tabanına göre (3.33) eşitliğini sağlayacak şekilde bir (a, b, c) sabiti bulamayız.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türev bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{22} = -2\alpha, \\ \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{21} = -2\beta, \\ \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{00} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{01} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{02} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{10} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{20} = 0.\end{aligned}$$

(3.34) den dolayı tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_{10} para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 6.0.10. \mathfrak{F}_{11} , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{11}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{F}_{11} için sıfırdan farklı kovaryant türevleri aşağıdaki gibi

$$\overline{\nabla}_{e_0}e_0 = -ae_1 - be_2, \quad \overline{\nabla}_{e_0}e_1 = ae_0, \quad \overline{\nabla}_{e_0}e_2 = be_0,$$

$$\overline{\nabla}_{e_1}e_0 = -\alpha e_1 - \beta e_2, \quad \overline{\nabla}_{e_1}e_1 = \alpha e_0, \quad \overline{\nabla}_{e_1}e_2 = \beta e_0,$$

$$\overline{\nabla}_{e_2}e_0 = -\alpha e_2 - \beta e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_2}e_1 = \beta e_0, \quad \overline{\nabla}_{e_2}e_2 = \alpha e_0,$$

hesaplanır. \mathfrak{F}_{11} 'de (3.23) eşitliği kullanılarak \bar{F} tensör bileşenleri şu şekilde

$$\begin{aligned}\bar{F}_{101} &= \bar{F}_{110} = \bar{F}_{202} = \bar{F}_{220} = \beta, \\ \bar{F}_{102} &= \bar{F}_{120} = \bar{F}_{201} = \bar{F}_{210} = \alpha, \\ \bar{F}_{001} &= \bar{F}_{010} = b \\ \bar{F}_{002} &= \bar{F}_{020} = a\end{aligned}$$

bulunur. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\ &= +bx_0y_0z_1 + ax_0y_0z_2 + bx_0y_1z_0 + ax_0y_2z_0 \\ &= +\beta x_1y_0z_1 + \alpha x_1y_0z_2 + \beta x_1y_1z_0 + \alpha x_1y_2z_0 \\ &= +\alpha x_2y_0z_1 + \beta x_2y_0z_2 + \alpha x_2y_1z_0 + \beta x_2y_2z_0\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_{11}(x, y, z)$ toplamları ile elde edilir. Dolayısıyla \mathfrak{F}_{11} , $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_{11}$ sınıfındadır. \square

(6.1) eşitliği ile \mathfrak{F}_{11} sıfırdan farklı eğrilik tensör bileşenlerini aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}\bar{R}_{0101} &= -\bar{R}_{0110} = a^2 \\ \bar{R}_{0202} &= -\bar{R}_{0220} = b^2 \\ \bar{R}_{0102} &= -\bar{R}_{0120} = \bar{R}_{0201} = -\bar{R}_{0210} = ab \\ \bar{R}_{0112} &= -\bar{R}_{0121} = -\bar{R}_{0210} = \bar{R}_{0221} = -\alpha b + a\beta \\ \bar{R}_{1212} &= -\bar{R}_{1221} = \alpha^2 - \beta^2\end{aligned}$$

bulunur. \mathfrak{F}_{11} 'in Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{00} &= -a^2 - b^2 \\
\overline{Ric}_{11} &= -a^2 + \beta^2 - \alpha^2 \\
\overline{Ric}_{22} &= -b^2 + \beta^2 - \alpha^2 \\
\overline{Ric}_{01} &= \overline{Ric}_{10} = b\beta - a\alpha \\
\overline{Ric}_{02} &= \overline{Ric}_{20} = a\beta - b\alpha \\
\overline{Ric}_{12} &= \overline{Ric}_{21} = -ab
\end{aligned}$$

\mathfrak{F}_{11} 'in skaler eğriliği aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=0}^2 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{00} + \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} \\
&= -2a^2 - 2b^2 + 2\beta^2 - 2\alpha^2
\end{aligned}$$

bulunur. $\{e_0, e_1, e_2\}$ ortonormal tabana göre (3.33) şartını sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_{11} para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{0, 1, 2\}$ değerleri için Lie türevleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{22} = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{21} = -2\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{01} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{10} = -a \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{02} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{20} = -b \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi} g_{00} &= 0
\end{aligned}$$

hesaplanabilir. (3.34) den dolayı tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{F}_{11} para-Ricci benzeri soliton değildir.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONU İLE 5 BOYUTLU NİLPOTENT LİE CEBİRLERİ ÜZERİNDE APAPR YAPISI

Bu bölümde (5.4) yapısına göre genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ile 5 boyutlu nilpotent Lie cebirlerin hangi sınıfta olduğu incelenmiştir.

Teorem 7.0.1. \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2} e_2 - \alpha e_1 - \beta e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_5 = \frac{1}{2} e_1 - \alpha e_2 - \beta e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_4 = \frac{1}{2} e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_5 = -\frac{1}{2} e_4 - \alpha e_3 - \beta e_1,$$

$$\bar{\nabla}_{e_4} e_3 = -\frac{1}{2} e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_4} e_5 = \frac{1}{2} e_3 - \alpha e_4 - \beta e_2,$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_3 = \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = \bar{\nabla}_{e_2} e_4 = \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = \beta e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \bar{\nabla}_{e_3} e_3 = \bar{\nabla}_{e_4} e_4 = \alpha e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_5} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_3 = -\frac{1}{2} e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_4 = \frac{1}{2} e_3$$

şeklinde hesaplanır. \mathfrak{g}_1 Lie cebiri için (3.23) eşitliği kullanılarak \bar{F} tensörünün sıfırdan farklı bileşenlerini elde edilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{145} &= \bar{F}_{154} = \bar{F}_{325} = \bar{F}_{352} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{235} &= \bar{F}_{253} = \bar{F}_{415} = \bar{F}_{451} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{115} &= \bar{F}_{151} = \bar{F}_{225} = \bar{F}_{252} = \beta, \\ \bar{F}_{335} &= \bar{F}_{353} = \bar{F}_{445} = \bar{F}_{454} = \beta, \\ \bar{F}_{153} &= \bar{F}_{135} = \bar{F}_{315} = \bar{F}_{351} = \alpha, \\ \bar{F}_{254} &= \bar{F}_{245} = \bar{F}_{425} = \bar{F}_{452} = \alpha, \end{aligned}$$

\bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= +\beta x_1 y_1 z_5 + \alpha x_1 y_3 z_5 + \frac{1}{2} x_1 y_4 z_5 + \beta x_1 y_5 z_1 + \alpha x_1 y_5 z_3 + \frac{1}{2} x_1 y_5 z_4 \\
&\quad + \beta x_2 y_2 z_5 - \frac{1}{2} x_2 y_3 z_5 + \alpha x_2 y_4 z_5 + \beta x_2 y_5 z_2 - \frac{1}{2} x_2 y_5 z_3 + \alpha x_2 y_5 z_4 \\
&\quad + \alpha x_3 y_1 z_5 + \frac{1}{2} x_3 y_2 z_5 + \beta x_3 y_3 z_5 + \beta x_3 y_5 z_1 + \frac{1}{2} x_3 y_5 z_2 + \beta x_3 y_5 z_3 \\
&\quad - \frac{1}{2} x_4 y_1 z_5 + \alpha x_4 y_2 z_5 + \beta x_4 y_4 z_5 - \frac{1}{2} x_4 y_5 z_1 + \alpha x_4 y_5 z_2 + \beta x_4 y_5 z_4 \\
\bar{F}_4(x, y, z) &= \beta(x_1 y_1 z_5 + x_2 y_2 z_5 + x_3 y_3 z_5 + x_4 y_4 z_5 + x_1 y_5 z_1 + x_2 y_5 z_2 \\
&\quad + x_3 y_5 z_3 + x_4 y_5 z_4) \\
\bar{F}_6(x, y, z) &= \frac{\alpha}{4}(4x_1 y_3 z_5 + 4x_2 y_4 z_5 + 4x_3 y_1 z_5 + 4x_2 y_4 z_5 + 4x_1 y_5 z_3 \\
&\quad + 4x_2 y_5 z_4 + 4x_3 y_5 z_1 + 2x_2 y_5 z_2 + 2x_4 y_5 z_4) \\
\bar{F}_7(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x_1 y_4 z_5 - x_2 y_3 z_5 + x_3 y_2 z_5 - x_4 y_1 z_5 + x_1 y_5 z_4 \\
&\quad - x_2 y_5 z_3 - x_4 y_5 z_1)
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_1 Lie cebirinin \bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_7(x, y, z)$ toplamı şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla \mathfrak{g}_1 Lie Cebiri $\mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_1 Lie cebrinin Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= \overline{Ric}_{22} = \overline{Ric}_{33} = \overline{Ric}_{44} = \beta^2 + -3\alpha^2 - \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{55} &= 1 \\
\overline{Ric}_{12} &= \overline{Ric}_{21} = \overline{Ric}_{34} = \overline{Ric}_{43} = -\frac{3\alpha}{2} \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = \overline{Ric}_{24} = \overline{Ric}_{42} = -2\alpha\beta \\
\overline{Ric}_{14} &= \overline{Ric}_{41} = \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{23} &= \overline{Ric}_{32} = -\frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

Ricci tensörlerin toplamı ile elde edilen skaler eğrilik aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= 4(\beta^2 + -3\alpha^2 - \frac{1}{2}) + 1 \\
&= 4\beta^2 - 12\alpha^2 - 1
\end{aligned}$$

hesaplanır. \mathfrak{g}_1 Lie cebri para-Einstein benzeri manifold olup olmadığını inceleyeceğimizde $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanına göre (3.33) şartını sağlayacak şekilde tek bir $(a, b, c) = (\beta^2 - 3\alpha^2 - \frac{1}{2}, -2\alpha\beta, -\beta^2 + 3\alpha^2 + \frac{3}{2})$ sabiti bulunduğundan \mathfrak{g}_1 Lie cebri para-Einstein benzeri manifold olur.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için hesaplanan Lie türevleri aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{33} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{44} = -\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{13} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{31} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{24} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{42} = -2\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{34} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{43} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{55} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{14} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{41} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{23} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{32} = 0
\end{aligned}$$

bulunur. (3.34) den dolayı tek bir $(\lambda, \mu, \nu) = (-\beta^2 + 3\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}, -\beta^2 + 3\alpha^2 + \beta + \frac{1}{2}, -1)$ sabiti bulunduğundan para-Ricci benzeri solitondur.

Teorem 7.0.2. \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri şu şekilde

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, \bar{\nabla}_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_5 + \beta e_5, \bar{\nabla}_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_3 - \alpha e_1 - \beta e_3,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \bar{\nabla}_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \bar{\nabla}_{e_2}e_4 = \frac{1}{2}e_5 + \beta e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}e_5 = -\frac{1}{2}e_4 - \alpha e_2 - \beta e_4, \bar{\nabla}_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_5 + \beta e_5, \bar{\nabla}_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1,$$

$$\bar{\nabla}_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_1 - \alpha e_3 - \beta e_1, \bar{\nabla}_{e_4}e_2 = -\frac{1}{2}e_5 + \beta e_5, \bar{\nabla}_{e_4}e_5 = \frac{1}{2}e_2 - \alpha e_4 - \beta e_2,$$

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = \bar{\nabla}_{e_3}e_3 = \bar{\nabla}_{e_4}e_4 = \alpha e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_5}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \bar{\nabla}_{e_5}e_2 = -\frac{1}{2}e_4, \bar{\nabla}_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \bar{\nabla}_{e_5}e_4 = \frac{1}{2}e_2.$$

hesaplanır. \mathfrak{g}_2 için (3.23) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi sıfırdan farklı \bar{F} tensör bileşenleri bulunabilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{134} &= \bar{F}_{143} = \bar{F}_{314} = \bar{F}_{341} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{112} &= \bar{F}_{121} = \bar{F}_{323} = \bar{F}_{332} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{115} &= \bar{F}_{151} = \bar{F}_{225} = \bar{F}_{252} = \frac{1}{2} + \beta, \\ \bar{F}_{335} &= \bar{F}_{353} = \bar{F}_{445} = \bar{F}_{454} = -\frac{1}{2} + \beta, \\ \bar{F}_{153} &= \bar{F}_{135} = \bar{F}_{315} = \bar{F}_{351} = \alpha, \\ \bar{F}_{254} &= \bar{F}_{245} = \bar{F}_{425} = \bar{F}_{452} = \alpha, \\ \bar{F}_{211} &= \bar{F}_{511} = \bar{F}_{522} = 1, \\ \bar{F}_{233} &= \bar{F}_{533} = \bar{F}_{544} = -1, \end{aligned}$$

\bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}x_1y_1z_2 + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_1y_1z_5 - \frac{1}{2}x_1y_2z_1 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \alpha x_1y_3z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_1y_5z_1 + \alpha x_1y_5z_3 + x_2y_1z_1 + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_2y_2z_5 \\
&\quad - x_2y_3z_3 + \alpha x_2y_4z_5 + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_2y_5z_2 + \alpha x_2y_5z_4 + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 \\
&\quad + \alpha x_3y_1z_5 - \frac{1}{2}x_3y_2z_3 - \frac{1}{2}x_3y_3z_2 + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_3y_3z_5 + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 \\
&\quad + \alpha x_3y_5z_1 + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_3y_5z_3 + \alpha x_4y_2z_5 + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_4y_4z_5 \\
&\quad + \alpha x_4y_5z_2 + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_4y_5z_4 + x_5y_1z_1 + x_5y_2z_2 - x_5y_3z_3 - x_5y_4z_4
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_1 'de hesapladığımız gibi \mathfrak{g}_2 Lie cebiri için \overline{F} tensörü

$\overline{F}(x, y, z) = \overline{F}_1(x, y, z) + \overline{F}_2(x, y, z) + \overline{F}_3(x, y, z) + \overline{F}_4(x, y, z) + \overline{F}_6(x, y, z) + \overline{F}_8(x, y, z) + \overline{F}_{10}(x, y, z)$ toplamı şeklinde yazılabilir. Bu $\overline{F} \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ anlamına gelir. Dolayısıyla \mathfrak{g}_2 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_2 Lie cebirinin (3.31) eşitliğine göre sıfırdan farklı bileşenleri için Ricci tensörleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= \overline{Ric}_{22} = -1 - 3\alpha^2 + \beta^2 + \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{33} &= -3\alpha^2 + \beta^2 - \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{44} &= \beta^2 + -3\alpha^2 - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{55} &= 1 \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = -\frac{\alpha}{2}, \quad \overline{Ric}_{24} = \overline{Ric}_{42} = -\alpha \\
\overline{Ric}_{25} &= \overline{Ric}_{52} = -\beta, \quad \overline{Ric}_{34} = \overline{Ric}_{43} = -\beta^2
\end{aligned}$$

(3.32) eşitliği ile elde edilen skaler eğriliği

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= -12\alpha^2 + 4\beta^2 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. (3.33) eşitliğinde $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanı kullanarak tek bir (a, b, c) sabiti bulmalıyız. Gerekli kontroller yapıldığında farklı (a, b, c) sabitleri bulunduğu görülmektedir. Böylece \mathfrak{g}_2 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir denir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için hesaplanan Lie türevleri aşağıdaki

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{22} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{33} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{44} = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{13} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{31} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{24} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{42} = -2\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{21} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{34} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{43} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{55} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{14} &= \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{41} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{23} = \overline{\mathcal{L}}_{\xi}g_{32} = 0
\end{aligned}$$

gibidir. (3.34) eşitliğini sağlayacak şekilde tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunmalıdır. Fakat farklı sabitler bulunduğundan \mathfrak{g}_2 para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 7.0.3. \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri şu şekilde

$$\overline{\nabla}_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4 + \beta e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_1}e_4 = -\frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_1}e_5 = -\frac{1}{2}e_4 - \alpha e_1 - \beta e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_2}e_5 = -\frac{1}{2}e_3 - \alpha e_2 - \beta e_4, \quad \overline{\nabla}_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4 + \beta e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_3}e_4 = \frac{1}{2}e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_2 - \alpha e_3 - \beta e_1,$$

$$\overline{\nabla}_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_4}e_3 = \frac{1}{2}e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_4}e_5 = \frac{1}{2}e_1 - \alpha e_4 - \beta e_2,$$

$$\bar{\nabla}_{e_5} e_1 = -\frac{1}{2}e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_2 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_3 = \frac{1}{2}e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_4 = \frac{1}{2}e_1,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_4 = \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = \beta e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \bar{\nabla}_{e_3} e_3 = \bar{\nabla}_{e_4} e_4 = \alpha e_5,$$

bulunur.(3.23) eşitliğini kullanarak \mathfrak{g}_3 için sıfırdan farklı \bar{F} tensör bileşenleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned} \bar{F}_{114} &= \bar{F}_{125} = \bar{F}_{134} = \bar{F}_{141} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{143} &= \bar{F}_{152} = \bar{F}_{215} = \bar{F}_{251} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{312} &= \bar{F}_{314} = \bar{F}_{321} = \bar{F}_{341} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{411} &= \bar{F}_{413} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{112} &= \bar{F}_{121} = \bar{F}_{123} = \bar{F}_{132} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{323} &= \bar{F}_{332} = \bar{F}_{334} = \bar{F}_{343} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{345} &= \bar{F}_{354} = \bar{F}_{431} = \bar{F}_{433} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{435} &= \bar{F}_{453} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{115} &= \bar{F}_{151} = \bar{F}_{225} = \bar{F}_{252} = \beta, \\ \bar{F}_{335} &= \bar{F}_{353} = \bar{F}_{445} = \bar{F}_{454} = \beta, \\ \bar{F}_{153} &= \bar{F}_{135} = \bar{F}_{315} = \bar{F}_{351} = \alpha, \\ \bar{F}_{254} &= \bar{F}_{245} = \bar{F}_{425} = \bar{F}_{452} = \alpha, \\ \bar{F}_{211} &= \bar{F}_{512} = \bar{F}_{521} = 1, \\ \bar{F}_{233} &= \bar{F}_{534} = \bar{F}_{543} = -1, \end{aligned}$$

hesaplanabilir. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\ &= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 + \beta x_1 y_1 z_5 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}x_1y_3z_2 + \frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \alpha x_1y_3z_5 + \frac{1}{2}x_1y_4z_1 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + \beta x_1y_5z_1 \\
& + \frac{1}{2}x_1y_5z_2 + \alpha x_1y_5z_3 + x_2y_1z_1 + \frac{1}{2}x_2y_1z_5 + \beta x_2y_2z_5 - x_2y_3z_3 \\
& + \alpha x_2y_4z_5 + \frac{1}{2}x_2y_5z_1 + \beta x_2y_5z_2 + \alpha x_2y_5z_4 + \frac{1}{2}x_3y_1z_2 + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 \\
& + \alpha x_3y_1z_5 + \frac{1}{2}x_3y_2z_1 - \frac{1}{2}x_3y_2z_3 - \frac{1}{2}x_3y_3z_2 - \frac{1}{2}x_3y_3z_4 + \beta x_3y_3z_5 \\
& + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_4z_3 - \frac{1}{2}x_3y_4z_5 + \alpha x_3y_5z_1 + \beta x_3y_5z_3 - \frac{1}{2}x_3y_5z_4 \\
& + \frac{1}{2}x_4y_1z_1 + \frac{1}{2}x_4y_1z_3 + \alpha x_4y_2z_5 - \frac{1}{2}x_4y_3z_1 - \frac{1}{2}x_4y_3z_3 - \frac{1}{2}x_4y_3z_5 \\
& + \beta x_4y_4z_5 + \alpha x_4y_5z_2 - \frac{1}{2}x_4y_5z_3 + \beta x_4y_5z_4 \\
& + x_5y_1z_2 + x_5y_2z_1 - x_5y_3z_4 - x_5y_4z_3
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_1 için yapılan hesaplamalar ile benzer şekilde yapıldığında \mathfrak{g}_3 için \overline{F} tensörünün $\overline{F}(x, y, z) = \overline{F}_2(x, y, z) + \overline{F}_3(x, y, z) + \overline{F}_4(x, y, z) + \overline{F}_6(x, y, z) + \overline{F}_8(x, y, z) + \overline{F}_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabildiği görülür. Dolayısıyla bu $\overline{F} \in \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ anlamına gelir. \mathfrak{g}_3 Lie Cebiri $\mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_3 Lie cebirinin Ricci tensörünü sıfırdan farklı bileşenleri şu şekilde

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= -3\alpha^2 + \beta^2 - \frac{3}{2} \\
\overline{Ric}_{22} &= -1 - 3\alpha^2 + \beta^2 \\
\overline{Ric}_{33} &= \overline{Ric}_{44} = -3\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{4} \\
\overline{Ric}_{55} &= 1 \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = \frac{1}{4} \\
\overline{Ric}_{14} &= \overline{Ric}_{41} = \overline{Ric}_{23} = \overline{Ric}_{32} = -\frac{3\alpha}{2} \\
\overline{Ric}_{24} &= \overline{Ric}_{42} = -\frac{1}{4} - \alpha\beta + \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{25} &= \overline{Ric}_{52} = -\overline{Ric}_{34} = -\overline{Ric}_{43} = \beta \\
\overline{Ric}_{45} &= \overline{Ric}_{54} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Ricci tensörü toplamları ile elde edilen skaler eğrilik aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= -12\alpha^2 + 4\beta^2 - 2
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_3 Lie cebirinin para-Einstein benzeri manifold olup olmadığını incelediğimizde $\{e_1, \dots, e_5\}$ tabanı kullanılarak (3.33) şartını sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulamayız. Dolayısıyla \mathfrak{g}_3 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{22} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{33} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{44} = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{13} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{31} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{24} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{42} = -2\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{34} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{43} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{55} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{14} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{41} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{23} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{32} = 0
\end{aligned}$$

(3.34) eşitliği gereği tek türlü (λ, μ, ν) bulunamadığından \mathfrak{g}_3 para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 7.0.4. \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_4 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri aşağıdaki

$$\overline{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_3 = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_4 + \beta e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2} e_3 + \frac{1}{2} e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2} e_4 - \alpha e_1 - \beta e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1,$$

$$\overline{\nabla}_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_4 + \beta e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_3} e_4 = \frac{1}{2} e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_4} e_1 = -\frac{1}{2} e_3 - \frac{1}{2} e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_4} e_3 = \frac{1}{2} e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_4} e_5 = \frac{1}{2} e_1 - \alpha e_4 - \beta e_2, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_4 = \overline{\nabla}_{e_4} e_2 = \beta e_5,$$

$$\overline{\nabla}_{e_5} e_1 = -\frac{1}{2} e_4, \quad \overline{\nabla}_{e_5} e_4 = \frac{1}{2} e_1, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_1 = \overline{\nabla}_{e_2} e_2 = \overline{\nabla}_{e_3} e_3 = \overline{\nabla}_{e_4} e_4 = \alpha e_5,$$

bulunur. (3.23) eşitliği kullanılarak \mathfrak{g}_4 Lie cebiri için \bar{F} tensör bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{114} &= \bar{F}_{125} = \bar{F}_{134} = \bar{F}_{141} = \frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{143} &= \bar{F}_{152} = \bar{F}_{512} = \bar{F}_{521} = \frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{312} &= \bar{F}_{314} = \bar{F}_{321} = \bar{F}_{341} = \frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{411} &= \bar{F}_{413} = \frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{112} &= \bar{F}_{121} = \bar{F}_{123} = \bar{F}_{132} = -\frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{323} &= \bar{F}_{332} = \bar{F}_{334} = \bar{F}_{343} = -\frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{534} &= \bar{F}_{543} = \bar{F}_{431} = \bar{F}_{433} = -\frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{435} &= \bar{F}_{453} = -\frac{1}{2}, \\
\bar{F}_{115} &= \bar{F}_{151} = \bar{F}_{225} = \beta, \\
\bar{F}_{335} &= \bar{F}_{445} = \bar{F}_{454} = \beta, \\
\bar{F}_{153} &= \bar{F}_{135} = \bar{F}_{315} = \alpha, \\
\bar{F}_{245} &= \bar{F}_{425} = \bar{F}_{452} = \alpha, \\
\bar{F}_{211} &= -\bar{F}_{233} = 1,
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir. \bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 + \beta x_1 y_1 z_5 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 + \frac{1}{2}x_1 y_2 z_5 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_3 z_4 + \alpha x_1 y_3 z_5 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_1 + \frac{1}{2}x_1 y_4 z_3 + \beta x_1 y_5 z_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_1 y_5 z_2 + \alpha x_1 y_5 z_3 + x_2 y_1 z_1 + \beta x_2 y_2 z_5 - x_2 y_3 z_3 + \alpha x_2 y_4 z_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_3 y_1 z_4 + \alpha x_3 y_1 z_5 + \frac{1}{2}x_3 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_3 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_3 y_3 z_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}x_3y_3z_4 + \beta x_3y_3z_5 + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_4z_3 + \frac{1}{2}x_4y_1z_1 + \frac{1}{2}x_4y_1z_3 \\
& + \alpha x_4y_2z_5 - \frac{1}{2}x_4y_3z_1 - \frac{1}{2}x_4y_3z_3 - \frac{1}{2}x_4y_3z_5 + \beta x_4y_4z_5 + \alpha x_4y_5z_2 \\
& - \frac{1}{2}x_4y_5z_3 + \beta x_4y_5z_4 + \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 - \frac{1}{2}x_5y_3z_4 - \frac{1}{2}x_5y_4z_3
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_1 'deki gibi benzer şekilde hesaplandığında \mathfrak{g}_4 Lie cebiri için \overline{F} tensörü

$\overline{F}(x, y, z) = \overline{F}_1(x, y, z) + \overline{F}_2(x, y, z) + \overline{F}_3(x, y, z) + \overline{F}_4(x, y, z) + \overline{F}_6(x, y, z) + \overline{F}_7(x, y, z) + \overline{F}_8(x, y, z) + \overline{F}_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabilir. Böylece \mathfrak{g}_4 Lie Cebirinin $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfında olduğu görülür. \square

\mathfrak{g}_4 Lie cebirinin sıfırdan farklı Ricci tensörünün bileşenleri (3.31) eşitliğine göre şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= -\alpha^2 + \beta^2 - \frac{3}{2} \\
\overline{Ric}_{22} &= -2\alpha^2 - \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{33} &= -2\alpha^2 - \frac{1}{4} \\
\overline{Ric}_{44} &= -\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{4} \\
\overline{Ric}_{55} &= \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{12} &= \overline{Ric}_{21} = \overline{Ric}_{25} = \overline{Ric}_{52} = -\overline{Ric}_{34} = -\overline{Ric}_{43} = \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = \frac{1}{4} + \alpha\beta, \quad \overline{Ric}_{14} = \overline{Ric}_{41} = -\frac{\alpha}{2} \\
\overline{Ric}_{15} &= \overline{Ric}_{51} = \frac{1}{4}, \quad \overline{Ric}_{24} = \overline{Ric}_{42} = -2\alpha\beta \\
\overline{Ric}_{45} &= \overline{Ric}_{54} = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_4 Lie cebirinin skaler eğriliği aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= -6\alpha^2 + 2\beta^2 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

hesaplanabilir. (3.33) eşitliğini sağlayan tek (a, b, c) sabiti $\{e_1, \dots, e_5\}$ tabanına göre

bulunabilmelidir. Fakat farklı sabitler elde edildiğinden \mathfrak{g}_4 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{44} = -2\alpha \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{13} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{31} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{24} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{42} = -\beta \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{34} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{43} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{55} = 0 \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{14} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{41} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{23} = \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{32} = 0 \\ \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{22} &= \bar{\mathcal{L}}_\xi g_{33} = 0\end{aligned}$$

(3.34) eşitliğini sağlayacak şekilde tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{g}_4 para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 7.0.5. \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri aşağıdaki gibi

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_2 = \frac{1}{2} e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_3 = \frac{1}{2} e_5 + \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2} e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_5 = -\frac{1}{2} e_3 - \alpha e_1 - \beta e_3,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_4, \quad \bar{\nabla}_{e_2} e_4 = \frac{1}{2} e_1 + \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_5 + \beta e_5,$$

$$\bar{\nabla}_{e_3} e_5 = \frac{1}{2} e_1 - \alpha e_3 - \beta e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_4} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \quad \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = \frac{1}{2} e_1 + \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_5} e_1 = -\frac{1}{2} e_3,$$

$$\bar{\nabla}_{e_5} e_3 = \frac{1}{2} e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = \bar{\nabla}_{e_3} e_3 = \bar{\nabla}_{e_4} e_4 = \alpha e_5,$$

bulunur. \mathfrak{g}_5 için (3.23) eşitliğinde verilen \bar{F} tanımı kullanılarak elde edilen \bar{F} tensör bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{212} &= \bar{F}_{221} = \bar{F}_{414} = \bar{F}_{441} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{234} &= \bar{F}_{243} = \bar{F}_{423} = \bar{F}_{432} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{115} &= \bar{F}_{151} = \frac{1}{2} + \beta, \\ \bar{F}_{335} &= \bar{F}_{353} = -\frac{1}{2} + \beta, \\ \bar{F}_{225} &= \bar{F}_{445} = \beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{153} &= \bar{F}_{135} = \bar{F}_{315} = \bar{F}_{351} = \alpha, \\
\bar{F}_{245} &= \bar{F}_{425} = \alpha, \\
\bar{F}_{144} &= \bar{F}_{511} = -\bar{F}_{122} = -\bar{F}_{533} = 1
\end{aligned}$$

\bar{F} tensörü bazı x, y, z ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\
&= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\
&= +\left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_1 y_1 z_5 - x_1 y_2 z_2 + \alpha x_1 y_3 z_5 + x_1 y_4 z_4 + \left(\frac{1}{2} + \beta\right)x_1 y_5 z_1 \\
&\quad + \alpha x_1 y_5 z_3 + \frac{1}{2}x_2 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_2 y_2 z_1 + \beta x_2 y_2 z_5 - \frac{1}{2}x_2 y_3 z_4 - \frac{1}{2}x_2 y_4 z_3 \\
&\quad + \alpha x_2 y_4 z_5 + \alpha x_3 y_1 z_5 + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_3 y_3 z_5 + \alpha x_3 y_5 z_1 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} + \beta\right)x_3 y_5 z_3 + \frac{1}{2}x_4 y_1 z_4 - \frac{1}{2}x_4 y_2 z_3 + \alpha x_4 y_2 z_5 \\
&\quad - \frac{1}{2}x_4 y_3 z_2 + \frac{1}{2}x_4 y_4 z_1 + \beta x_4 y_4 z_5 + x_5 y_1 z_1 - x_5 y_3 z_3
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_5 için hesaplamalar yaptığımızda \bar{F} tensörü $\bar{F}(x, y, z) = \bar{F}_1(x, y, z) + \bar{F}_2(x, y, z) + \bar{F}_3(x, y, z) + \bar{F}_4(x, y, z) + \bar{F}_6(x, y, z) + \bar{F}_8(x, y, z) + \bar{F}_{10}(x, y, z)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla bu da $\bar{F} \in \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ olup \mathfrak{g}_5 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_5 Lie cebirinin Ricci tensörünü sıfırdan farklı bileşenleri şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= -1 - \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{22} &= -2\alpha^2 - \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{33} &= -\frac{1}{2} - \alpha^2 + \beta^2 - \frac{\beta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{44} &= -2\alpha^2 + \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{55} &= \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = -\frac{\alpha}{2} \\
\overline{Ric}_{24} &= \overline{Ric}_{42} = -2\alpha\beta
\end{aligned}$$

(3.32) eşitliğine göre \overline{Ric} toplamı ile elde edilen skaler eğrilik aşağıda görüldüğü gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_{ii} \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= -6\alpha^2 + 2\beta^2 - 1
\end{aligned}$$

Para-Einstein benzeri manifold olabilmesi için \mathfrak{g}_5 Lie cebirinde $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanına göre (3.33) şartını sağlayan tek bir (a, b, c) sabiti bulunamadığından \mathfrak{g}_5 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için Lie türevleri şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{33} = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{13} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{31} = -2\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{34} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{43} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{55} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{14} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{41} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{23} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{32} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{22} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{44} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{24} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{42} = 0
\end{aligned}$$

(3.34) eşitliğinden dolayı tek türlü (λ, μ, ν) sabiti bulunamadığından \mathfrak{g}_5 para-Ricci benzeri soliton değildir.

Teorem 7.0.6. \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır.

Kanıt. \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri için sıfırdan farklı kovaryant türevleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_1} e_2 &= \frac{1}{2} e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_3 = -\frac{1}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_4 + \beta e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_1} e_4 = -\frac{1}{2} e_3, \\
\overline{\nabla}_{e_2} e_1 &= -\frac{1}{2} e_3, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_3 = \frac{1}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_5, \quad \overline{\nabla}_{e_2} e_5 = -\frac{1}{2} e_3 - \alpha e_2 - \beta e_4,
\end{aligned}$$

$$\bar{\nabla}_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4 + \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_3}e_4 = \frac{1}{2}e_1,$$

$$\bar{\nabla}_{e_3}e_5 = \frac{1}{2}e_2 - \alpha e_3 - \beta e_1, \quad \bar{\nabla}_{e_4}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_4}e_3 = \frac{1}{2}e_1,$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}e_4 = \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_4}e_2 = \beta e_5, \quad \bar{\nabla}_{e_5}e_2 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \bar{\nabla}_{e_5}e_3 = \frac{1}{2}e_2.$$

$$\bar{\nabla}_{e_1}e_1 = \bar{\nabla}_{e_2}e_2 = \bar{\nabla}_{e_3}e_3 = \bar{\nabla}_{e_4}e_4 = \alpha e_5,$$

\mathfrak{g}_6 'da (3.23) eşitliğinden \bar{F} tensör bileşenleri şu şekilde

$$\begin{aligned} \bar{F}_{114} &= \bar{F}_{215} = \bar{F}_{134} = \bar{F}_{141} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{143} &= \bar{F}_{251} = \bar{F}_{512} = \bar{F}_{521} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{312} &= \bar{F}_{314} = \bar{F}_{321} = \bar{F}_{341} = \frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{112} &= \bar{F}_{121} = \bar{F}_{123} = \bar{F}_{132} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{323} &= \bar{F}_{332} = \bar{F}_{334} = \bar{F}_{343} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{534} &= \bar{F}_{543} = \bar{F}_{345} = \bar{F}_{354} = -\frac{1}{2}, \\ \bar{F}_{115} &= \bar{F}_{252} = \bar{F}_{225} = \beta, \\ \bar{F}_{335} &= \bar{F}_{445} = \bar{F}_{353} = \beta, \\ \bar{F}_{135} &= \bar{F}_{351} = \bar{F}_{315} = \alpha, \\ \bar{F}_{245} &= \bar{F}_{425} = \bar{F}_{254} = \alpha, \\ \bar{F}_{211} &= \bar{F}_{411} = -\bar{F}_{233} = -\bar{F}_{433} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. \bar{F} tensörü bazı x, y, z 'ler için aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, z) &= \bar{F}\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j, \sum_k z_k e_k\right) \\ &= \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k \bar{F}(e_i, e_j, e_k) \\ &= -\frac{1}{2}x_1 y_1 z_2 + \frac{1}{2}x_1 y_1 z_4 + \beta x_1 y_1 z_5 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_1 - \frac{1}{2}x_1 y_2 z_3 - \frac{1}{2}x_1 y_3 z_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}x_1y_3z_4 + \alpha x_1y_3z_5 + \frac{1}{2}x_1y_4z_1 + \frac{1}{2}x_1y_4z_3 + x_2y_1z_1 + \frac{1}{2}x_2y_1z_5 \\
& +\beta x_2y_2z_5 - x_2y_3z_3 + \alpha x_2y_4z_5 + \frac{1}{2}x_2y_5z_1 + \beta x_2y_5z_2 + \alpha x_2y_5z_4 \\
& +\frac{1}{2}x_3y_1z_2 + \frac{1}{2}x_3y_1z_4 + \alpha x_3y_1z_5 + \frac{1}{2}x_3y_2z_1 - \frac{1}{2}x_3y_2z_3 - \frac{1}{2}x_3y_3z_2 \\
& -\frac{1}{2}x_3y_3z_4 + \beta x_3y_3z_5 + \frac{1}{2}x_3y_4z_1 - \frac{1}{2}x_3y_4z_3 - \frac{1}{2}x_3y_4z_5 + \alpha x_3y_5z_1 \\
& +\beta x_3y_5z_3 - \frac{1}{2}x_3y_5z_4 + x_4y_1z_1 + \alpha x_4y_2z_5 - x_4y_3z_3 - \frac{1}{2}x_4y_3z_5 \\
& +\beta x_4y_4z_5 + \frac{1}{2}x_5y_1z_2 + \frac{1}{2}x_5y_2z_1 - \frac{1}{2}x_5y_3z_4 - \frac{1}{2}x_5y_4z_3
\end{aligned}$$

\mathfrak{g}_1 Lie cebirinde hesapladığımız gibi \mathfrak{g}_6 Lie cebiri için \overline{F} tensörü

$\overline{F}(x, y, z) = \overline{F}_1(x, y, z) + \overline{F}_2(x, y, z) + \overline{F}_3(x, y, z) + \overline{F}_4(x, y, z) + \overline{F}_6(x, y, z) + \overline{F}_7(x, y, z) + \overline{F}_8(x, y, z) + \overline{F}_{10}(x, y, z)$ toplamı biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla \mathfrak{g}_6 Lie Cebiri $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3 \oplus \mathcal{F}_4 \oplus \mathcal{F}_6 \oplus \mathcal{F}_7 \oplus \mathcal{F}_8 \oplus \mathcal{F}_{10}$ sınıfındadır. \square

\mathfrak{g}_6 Lie cebirinin sıfırdan farklı Ricci tensör bileşenleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}_{11} &= -1 - 2\alpha^2 \\
\overline{Ric}_{22} &= -1 - \alpha^2 + \beta^2 \\
\overline{Ric}_{33} &= -\frac{1}{2} - \alpha^2 + \beta^2 \\
\overline{Ric}_{44} &= \frac{1}{2} - 2\alpha^2 \\
\overline{Ric}_{55} &= \frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{12} &= \overline{Ric}_{21} = -\overline{Ric}_{25} = -\overline{Ric}_{52} = \frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{34} &= \overline{Ric}_{43} = \overline{Ric}_{45} = \overline{Ric}_{54} = -\frac{\beta}{2} \\
\overline{Ric}_{13} &= \overline{Ric}_{31} = -\alpha\beta \\
\overline{Ric}_{15} &= \overline{Ric}_{51} = -\frac{1}{2} \\
\overline{Ric}_{23} &= \overline{Ric}_{32} = -\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

Skaler eğriliği (3.32) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}
\overline{scal} &= \sum_{i=1}^5 \overline{Ric}_i \\
&= \overline{Ric}_{11} + \overline{Ric}_{22} + \overline{Ric}_{33} + \overline{Ric}_{44} + \overline{Ric}_{55} \\
&= -6\alpha^2 + 2\beta^2 - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. \mathfrak{g}_6 Lie cebirinde $\{e_1, \dots, e_5\}$ ortonormal tabanı kullanılarak (3.33) eşitliğini sağlayacak şekilde tek bir (a, b, c) sabiti bulunamaz. Bu sebeple \mathfrak{g}_6 Lie cebiri para-Einstein benzeri manifold değildir.

$i, j \in \{1, 2, \dots, 5\}$ değerleri için Lie türevlerini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{22} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{33} = -2\alpha \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{13} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{31} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{24} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{42} = -\beta \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{12} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{21} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{34} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{43} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{55} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{14} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{41} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{23} = \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{32} = 0 \\
\overline{\mathcal{L}}_\xi g_{11} &= \overline{\mathcal{L}}_\xi g_{44} = 0
\end{aligned}$$

Bulduğumuz Lie türevlerinden (3.34) eşitliğinde farklı (λ, μ, ν) sabitleri bulunduğundan \mathfrak{g}_6 para-Ricci benzeri soliton değildir.

8. SONUÇ

Bu tezde apapR manifoldlarının sınıflandırması incelenmiş ve bu manifoldlar 11 temel sınıfa ayrılmıştır. 3–boyutlu apapR yapısı ile Lie gruplarının sınıflandırması yapılmıştır. Bundan hareketle 5–boyutlu nilpotent Lie cebirleri üzerinde apapR yapıları düşünülmüş ve hangi sınıfa düştüğü belirlenmiştir. Para-Einstein benzeri manifold ve para-Ricci benzeri soliton olup olmadıkları araştırılmıştır. Ayrıca bu manifoldlar üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ele alınmış, bu konneksiyona karşılık sınıflandırması incelenmiştir. 3–boyutlu apapR yapısı ile Lie grupları üzerinde genelleştirilmiş simetrik metrik konneksiyonu ele alınmış sınıflandırması yapılmıştır. Son üç bölümünde yapılanlar tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] Manev, M.H. and Tavkova, V. R. (2018). On Almost Paracontact Almost Para-complex Riemannian Manifolds, *Facta Universitatis- Ser. Math.Inform*, 5, 637-657.
- [2] Manev, M. and Staikova, M. (2001). On almost paracontact Riemannian manifolds of type (n, n) , *J. Geom.*, 72, 108-114.
- [3] Manev, M.H. and Tavkova, V.R. (2019). Lie groups as 3-dimensional almost paracontact almost paracomplex Riemannian manifolds, *J. Geom*, 110:43.
- [4] Manev, H. and Manev, M. (2021). Para-Ricci-like solitons on Riemannian manifolds with almost paracontact structure and almost paracomplex structure. *Mathematics*, 9(14), 1704.
- [5] Manev, H. (2021). Para-Ricci-like solitons with vertical potential on para-Sasaki-like Riemannian Π –manifolds, *Symmetry*, 13, 2267.
- [6] Manev, H. and Manev, M. (2022). Para-Ricci-like solitons with arbitrary potential on para-Sasaki-like Riemannian Π –manifolds, *Mathematics*, 10(4), 651.
- [7] Dixmier, J. (1958). Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotentes III, *Canadian Journal of Mathematics*, 10, 321-348.
- [8] Nagaraja, H. G. and Premalatha, C. R. (2012). Ricci solitons in Kenmotsu manifolds, *J. Math. Anal.*, 3(2), 18-24.
- [9] Ivanov, S. , Manev, H. and Manev, M. (2021). Para-Sasaki-like Riemannian manifolds and new Einstein metrics, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 115, 112.
- [10] Cao, H. D. (2009). Recent progress on Ricci solitons, *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 11, 1-38.
- [11] Kaneyuki, S. and Williams, F. L. (1985). Almost paracontact and parahodge structures on manifolds, *Nagoya Math. J.*, 99, 173-187.
- [12] Zamkovoy, S. (2009). Canonical connections on paracontact manifolds, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, 36, 37-60.
- [13] Ali, A. , Mofarreh, F. and Patra, D.S. (2022). Geometry of almost Ricci solitons on paracontact metric manifolds, *Quaestiones Mathematicae*, 45(8), 1167-1180.
- [14] Sato, I. (1976). On a structure similar to the almost contact structure. *Tensor (N.S.)* 30, 219-224
- [15] Sato, I. (1977). On a structure similar to the almost contact structure *II*. *Tensor (N.S.)* 31 (1977), 199-205

- [16] Sato, I. (1978). On a Riemannian manifold admitting a certain vector field. KODai Mathematical Seminar Reports 29, 250-260
- [17] Sato, I. and Matsumoto, K. (1979). On Para-Sasakian manifolds satisfying certain conditions. Tensor (N.S.) 33, 173-178
- [18] Adati, T. and Miyazawa, T. (1977). On paracontact Riemannian manifolds. TRU Mathematics 13, 27-39
- [19] Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, Tohouku Math. J., 12, 456-476.
- [20] Sasaki, S. (1980). On paracontact Riemannian manifolds. TRU Mathematics 16, 75-86
- [21] O'Neill, B. (1983). Semi - Riemannian Geometry, Academic Press.
- [22] Bahadır, O. and Chaubey, S.K. (2020). Some Notes On LP-Sasakian Manifolds With Generalized Symmetric Metric Connection, Honam Mathematical J. 42
- [23] Lee, J.M. (2003). Introduction to smooth manifolds, Springer-Verlag.
- [24] Bulut, Ş. ve İnelöz, P. Para-Sasaki-like Manifolds with Generalized Symmetric Metric Connection, preprint, arXiv:2304.00911v1.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO : 0009-0007-8501-9753
Ad-Soyad : Vildan KORUCU AKAN
Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2008-2012, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü/Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Matematik Anabilim Dalı
- 2010-2012, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü/Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyon
- 2018- , Öğretmen, Milli Eğitim Bakanlığı