ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Genelleştirilmiş Dönüşüm Yarıgrupları

Cansu KAPLAN

Matematik Anabilim Dalı

Eylül, 2023

İÇİNDEKİLER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Genelleştirilmiş Dönüşüm Yarıgrupları

Cansu KAPLAN

Danışman: Prof. Dr. Gonca AYIK

Matematik Anabilim Dalı

ÖZ

X ve Y herhangi iki (ayrık) boştan farklı küme ve $T(X,Y)$ kümesi de X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm dönüşümlerin kümesi olsun. Sabitlenmiş herhangi bir $\theta: Y \to X$ dönüşümü için $T(X,Y)$ kümesi üzerinde " $*$ " sandviç işlemi her $\alpha, \beta \in T(X,Y)$ elemanları için

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

olarak tanımlanır. O zaman $T(X,Y)$ kümesi bu tanımlanan " $*$ " sandviç işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu denir ve bu yarıgrup $T(X,Y;\theta)$ ile gösterilir.

Bu tezde $T(X,Y;\theta)$ nin doğuray kümeleri ve rankları hakkındaki önemli sonuçlar içeren bazı çalışmaları derleyeceğiz ve bunları araştırmacıların bilgisine sunacağız.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları, doğuray kümesi, rank.

CUKUROVA UNIVERSITY

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

MSc THESIS

Generalized Transformation Semigroups

Cansu KAPLAN

Advisor: Prof. Dr. Gonca AYIK

Department of Mathematics

ABSTRACT

Let X and Y be two non-empty (disjoint) sets and let $T(X,Y)$ denote the set of all (full) transformations from X to Y. For any fixed transformation $\theta: Y \to X$ define a sandwich operation " $*$ " on $T(X,Y)$ by

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

for all $\alpha, \beta \in T(X,Y)$. Then, the set $T(X,Y)$ together with the sandwich operation " $*$ " is a semigroup which is called a generalized transformation semigroup, and it is denoted by $T(X,Y;\theta)$.

In this thesis we will compile some studies that contain important results about generating sets and ranks of $T(X,Y;\theta)$ and present them to the information of the researchers.

Keywords: Generalized transformation semigroups, generating set, rank.

TEŞEKKÜR

“Ben hayatta en çok babamı sevdim.” şiirinin sahibi Can Yücel’ e, neden hep babana şiir yazarsın? diye sorduklarında “Anneme şiir yazacak kadar şair değilim.” der. Hayatta en çok sevdiğim, koca yürekli, büyük Fenerbahçeli babama; kendisine dair ne desem az kalacak olan candan sevdiğim kıymetli anneme ve beni bugünlere taşıyan kardeşlerime teşekkür ederim.

Kendisiyle çalıştığım için onur duyduğum, her konuda en büyük destekçim, bir sonraki adımda bana hep daha ileriyi gösteren, esin kaynağım hocam ve danışmanım Prof. Dr. Gonca AYIK’ a ve çok kıymetli hocam Prof. Dr. Hayrullah AYIK’ a teşekkürlerimi sunarım.

Ulu önder Mustafa Kemal ATATÜRK’ ün “Beni Türk hekimlerine emanet ediniz.” dediği ve büyük şair Nazım Hikmet’ in dizelerinden esinle “bütün işi gücü yaşatmak olan” çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. Meltem SERİN’ e, Prof. Dr. Timuçin ÇİL’ e ve Prof. Dr. Enver REYHAN’ a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Bana önemli katkılar sağlayan Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’ nün tüm akademik ve idari personeline teşekkür ederim. Aldığım derslerle matematik alanında zihnimde yeni bir ufuk açan çok değerli hocam Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT’ a ve kocaman gülümsemesiyle içimi ısıtan çok değerli hocam Doç. Dr. Dilek ERSALAN’ a teşekkürlerimi sunarım.

Hayata başka bir alandan bakmamı sağlayan, beni yetiştiren Çukurova Üniversitesi Psikolojik Danışma ve Rehberlik Bölümü’ nün tüm akademik ve idari personeline teşekkürlerimi sunarım.

Psikoloji alanındaki bilgi ve deneyimleriyle beni hep destekleyen, Orta Doğu ve Balkanlar’ ın en sevilen hocası değerli hocam Doç. Dr. Metehan ÇELİK’ e, psikoterapinin perisi sevgili hocam Dr. Fatma DEVECİ’ ye, hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Mustafa USLU’ ya, matematik ve psikoloji alanına birlikte katkı sunabileceğim fırsatı yakalamamı sağlayan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Nahide Dicle DÖVENCİOĞLU’ na teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan can dostum Uzm. Dr. Gizem AYDOĞAN’ a, bana olan desteğini hep bildiğim sevgili Uzm. Dr. Bengisu LEYLEK’ e, çok sevdiğim yakın arkadaşlarım Özkan KOÇ, Öznur SELVİ, Gökçe KABA, İlknur ÇELİK, Özge TAŞ ve Cansu ULUSOY’ a teşekkür ederim.

İyi ki varlar dediğim, Konya’daki aile dostlarımız hocalarım Gülümser CENGİZ ve Hasan AĞBAHCA’ ya; tanıdığım en cesur yürekli kadın olan değerli Yeliz KORAY’a; Aydın’ daki kıymetli abim Ahmet Yasir KUZU ve ailesine teşekkür ederim.

Son olarak onca sebep varken yine de vazgeçmediğim ve çaba harcadığım için kendime teşekkür ederim.

Bu tezimi 6 Şubat depreminde başta memleketim Hatay olmak üzere deprem bölgelerinde hayatını kaybeden tüm iyi insanlara ve kederli yakınlarına ithaf ediyorum.

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tezde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları $T(X,Y;\theta)$, hakkında izomorfizm, doğuray kümesi ve rank ile ilgili önemli sonuçlar içeren bazı çalışmaları derleyip araştırmacıların bilgisine sunacağız.

Bu tezde bahsedilmeyen yarıgrup teorinin terminolojisinde yer alan tanım ve teoremler için Ganyushkin and Mazorchuk (2009) ve Howie (1995) kitapları temel alınmıştır.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere eğer X kümesi n elemanlı sonlu bir küme ise izomorfizme göre $X = X_n = \{1,2,\dots,n\}$ şeklinde kabul edilebilir ve bu durumda T_X ve S_X yerine genel olarak T_n ve S_n gösterimi kullanılır.

Bu tezde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları hakkındaki çalışmaları özellikle Symons (1975), Ayık ve Abusarris' in (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

$\alpha, \beta \in T(X,Y)$ olmak üzere $T(X,Y)$ kümesi üzerindeki çarpmayı

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

olarak tanımlarsak $(T(X,Y),*)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba **genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu** ve $"*"$ işlemine **sandviç işlemi** denir. Ayrıca genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu $(T(X,Y),*)$ yarıgrubu $T(X,Y;\theta)$ ya da $GT(X,Y;\theta)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $X = Y$ ise o zaman $T(X,Y;\theta)$ yerine $T(X;\theta)$ yazılır. Eğer $\theta \in T(X)$ dönüşümü X üzerinde birim dönüşüm ise $T(X;\theta) = T(X)$ olur. Genel olarak $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun regüler olmadığını Magill (1966) çalışmasında gösterdi.

S bir yarıgrup olmak üzere a, S yarıgrubunun bir sabit elemanı olsun. $\forall x, y \in S$ için $"*_a"$ sandviç işlemi

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

olarak tanımlanırsa $(S,*_a)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba $\boldsymbol{a}$ **elemanına göre** $\boldsymbol{S}$ **yarıgrubunun varyantı** denir ve S^a ile gösterilir.

$X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ iki ayrık küme ve $Z = X \cup Y$ olmak üzere $T(Z)$ kümesi Z üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi olsun.

$$T(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

olarak tanımlayalım. $T(Z,Y)$ kümesi, $T(Z)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olup bu $T(Z,Y)$ alt yarıgrubuna **kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu (semigroups of transformation with restricted range)** denir.

1967, 1967a, 1967b makalesinde Magill, $T(X,Y,\theta)$ yarıgrubunu, alışılan dönüşüm yarıgrubu $T(X)$ yarıgrubunun genelleştirilmişi olarak göz önünde bulundurdu. Bu yarıgrup Sullivan tarafından da çalışıldı. Magill, θ nın örten olması durumunda otomorfizmleri ve $T(X,Y,\theta)$ nın izomorfik olduğu yarıgrubu tanımladı.

$T(Z,Y)$ yarıgrubu Symons (1975a, 1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z,Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir.

$$F(Z,Y)=\{\alpha\in T(Z):\mathrm{im}(\alpha)=Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z,Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgruptur.

$T=T(X,Y;\theta)$ olmak üzere $\alpha,\beta\in T$ için ℓ,r,d bağıntılarını sırasıyla

- $\alpha\ell\beta \Leftrightarrow \theta\alpha=\theta\beta$
- $\alpha r\beta \Leftrightarrow \alpha\theta=\beta\theta$
- $\alpha d\beta \Leftrightarrow \theta\alpha\theta=\theta\beta\theta$

olarak tanımlayalım.

Herhangi bir $\alpha\ell\beta$ alalım. $\alpha\ell\beta \Leftrightarrow \theta\alpha=\theta\beta \Leftrightarrow (\theta\alpha)\theta=(\theta\beta)\theta$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. Benzer şekilde $\alpha r\beta \Leftrightarrow \alpha\theta=\beta\theta \Leftrightarrow \theta(\alpha\theta)=\theta(\beta\theta)$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. O halde $\ell\subseteq d$ ve $r\subseteq d$ elde edilir. d,ℓ,r bağıntıları $T(X,Y;\theta)$ üzerinde birer kongrüanstır.

Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 1.7.' de $T(X,Y;\theta)/d\cong T(Y;\theta)$ olduğu gösterilmiştir.

Sullivan (1975) çalışmasında

$$Z=\begin{cases}X\cup\{a\}, & |X|\geq|Y|\\ Y\cup\{a\}, & |Y|\geq|X|\end{cases}\qquad a\notin X\cup Y$$

kümesi için $T(Z)$, Z üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi ve $\omega\in T(Z)$ olmak üzere $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun bir $T(Z)^{\omega}$ yarıgrubunun içine gömülebileceğini gösterdi. Burada $S=T(Z)$ için $S^{a}=T(Z)^{\omega}$ olarak alınırsa $T(Z)^{\omega}$ yarıgrubunun, ω elemanına göre $T(Z)$ yarıgrubunun varyantı olduğunu hatırlayalım.

Boştan farklı (ayrık) herhangi iki X,Y kümeleri için $Z=X\cup Y$ olmak üzere Z kümesi üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubu $T(Z)$ yi göz önünde bulunduralım. O halde

$$T(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) \colon \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

kümesi $T(Z)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Bu $T(Z,Y)$ yarıgrubuna kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu denir. Bu yarıgrup hakkındaki çalışmalara örnek olarak Fernandes ve ark. (2016), Sanwong ve ark. (2020), Sun ve ark. (2016) çalışmalarını verebiliriz. $T(Z,Y)$ yarıgrubu Symons (1975a,1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z,Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir. Ancak

$$F(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) = Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z,Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgrubudur. Ayık ve Abusarris (2022) $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun $T(X \cup Y, Y)$ içine gömülebileceğini gösterdi. Eğer $\theta \colon Y \to X$ birebir bir dönüşüm ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X, \mathrm{im}\theta)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Özel olarak θ dönüşümü, hem birebir hem de örten ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Eğer $|X| \geq |Y|$ ise $T(X,Y;\theta) \cong T\big(X, \mathrm{im}(\rho)\big)^{\Theta}$ olur.

Dönüşüm yarıgruplarının rankının ve minimal doğuray kümesinin bulunduğu çalışmalara örnek olarak Ayık ve ark. (2018), Fernandes ve ark (2014) ve Sommanee ve ark. (2013) çalışmaları verilebilir. $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ ve $Y \subset Z$ olmak üzere $T(Z,Y)$ yarıgrubunun rankını Fernandes ve ark (2014) çalışmasında hesaplamıştır. Fernandes ve ark (2014) çalışmasında $S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\mathrm{rank}\big(T(Z,Y)\big) = S(m,n)$$

olarak bulmuşlardır. Ayrıca Sommanee ve ark. (2013) çalışmalarında $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ olmak üzere $2 \leq n \leq m-1$ için

$$\mathrm{rank}\big(F(Z,Y)\big) = n^{m-n}$$

olarak hesaplamışlardır.

Son bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri ve rankları hakkındaki Ayık ve Abusarris’ in (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derledik.

Bir S yarıgrubunun boştan farklı bir T alt kümesi için

$$T^2 = \{st \colon s, t \in T\}$$

olsun. Boştan farklı ayrık X ve Y kümeler olmak üzere $\theta: Y \rightarrow X$ dönüşümünün $\mathrm{im}(\theta)$ kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $|\mathrm{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olarak alacağız.

$|\mathrm{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| \leq r\}$$

olduğu Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında gösterildi.

Eğer θ dönüşümü ne birebir ne de örten ise $T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2$ kümesi $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesidir.

Eğer θ dönüşümü ne birebir nede örten ise $S(m,k)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} \frac{n!\,S(m,k)}{(n-k)!}$$

Eğer θ örten fakat birebir değil (yani $r = m < n$) ise

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \binom{n}{m}$$

olduğu Ayık ve Abusarris' in (2022) çalışmasında gösterildi.

Eğer θ birebir fakat örten değil (yani $r = n < m$) ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X,\mathrm{im}\theta)$ olduğundan, $S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = S(m,n)$$

olduğu Fernandes ve ark. (2014) çalışmasında gösterildi.

Son olarak θ birebir ve örten olsun. Dikkat edilirse θ birebir ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X,\mathrm{im}\theta)$ ve θ örten ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X)$ olacağından

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \mathrm{rank}\big(T(X)\big) = 3$$

olduğu elde edilir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarındaki özellikleri anlayabilmemiz için ihtiyaç duyduğumuz, yarıgrup teorideki ve dönüşüm yarıgruplarındaki temel kavramları açıklayarak kullanacağımız teoremleri bir araya toplayacağız. Bu tezde bahsedilmeyen yarıgrup teorinin terminolojisinde yer alan tanım ve teoremler için Ganyushkin and Mazorchuk (2009) ile Howie (1995) kitapları temel alınmıştır.

2.1. Yarıgruplar ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1. S boştan farklı bir küme olmak üzere $S \times S$ den S ye tanımlı herhangi bir fonksiyona S üzerinde **ikili işlem** denir. (S, φ) sıralı ikilisi ise **grupoid** olarak adlandırılır.

(S, φ) bir grupoid ve φ ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğini sağlıyorsa, yani $\forall a, b, c \in S$ olmak üzere

$$\big((a, b)\varphi, c\big)\varphi = (a, (b, c)\varphi)\varphi$$

ise (S, φ) ikilisine bir **yarıgrup** denir. Dikkat edilecek olursa, yukarıdaki eşitlikte dönüşüm, sembollerin sağında belirtilmiştir. $\forall a, b \in S$ için $(a, b)\varphi$ yerine $a \cdot b$ yazılırsa yukarıda yer alan ifade

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

birleşme özelliği biçimine dönüşür. Bu durumda (S, φ) yerine $(S,\cdot)$ yazılır. Genellikle işlemin ne olduğu belli ise $(S,\cdot)$ yerine sadece S ve $a \cdot b$ yerine de kısaca ab yazılabilir.

Tanım 2.1.2. S bir yarıgrup olmak üzere her $a, b \in S$ için $ab = ba$ oluyorsa S yarıgrubuna **değişmeli yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olmak üzere $\forall e \in S$ için $e \cdot e = e$ oluyorsa e elemanına S yarıgrubunun **idempotent elemanı** denir. Bir S yarıgrubundaki tüm idempotent elemanların kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup olsun. Eğer her $a \in S$ için $e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $e \in S$ elemanı varsa e elemanına bir **sol birim eleman** denir. Eğer her $a \in S$ için $a \cdot f = a$ olacak şekilde bir $f \in S$ elemanı varsa f elemanına bir **sağ birim eleman** denir. Eğer e hem sağ hem de sol birim elemanı ise e ye **birim eleman** denir.

Önerme 2.1.5. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun birim elemanı varsa tektir.

İspat: S yarıgrubunun iki birim elemanı e ve $\tilde{e}$ olsun. e birim eleman olduğundan $e\tilde{e} = \tilde{e}$ ve benzer biçimde $\tilde{e}$ birim eleman olduğunda $e\tilde{e} = e$ olmasından $e = \tilde{e}$ olur. □

Bir S yarıgrubunun birim elemanı 1 veya 1_S ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. Birim elemanlı bir S yarıgrubuna bir **monoid** denir. Ayrıca S yarıgrubunda her eleman bir idempotent oluyorsa S yarıgrubuna bir **band** denir. Buna ek olarak olarak değişmeli bir S yarıgrubu band ise S yarıgrubuna **yarılatis** denir.

Tanım 2.1.7. Bir S yarıgrubunda $\forall a \in S$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\underbrace{a.a \dots a}_{n \text{ tane}} = a^n$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $|S|$ kardinal sayısına S yarıgrubunun **derecesi** denir. $|S|$ kardinal sayısı S yarıgrubunun eleman sayısını gösterir.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun.

i. $\forall\, a \in S$ için $za = z$ olacak şekilde bir $z \in S$ elemanı varsa z elemanına S yarıgrubunun bir **sol sıfır elemanı** denir.
ii. $\forall\, a \in S$ için $az = z$ olacak şekilde bir $z \in S$ elemanı varsa z elemanına S yarıgrubunun bir **sağ sıfır elemanı** denir.
iii. Eğer z hem sağ hem de sol sıfır eleman ise z elemanına S yarıgrubunun **sıfır elemanı** denir.

Önerme 2.1.9. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat: S yarıgrubunda iki sıfır eleman b ve b' olsun. b nin sıfır eleman olmasından $bb' = b$ ve aynı yolla b' nün sıfır eleman olmasından $bb' = b'$ olup $b = b'$ olur. □

Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı 0 veya 0_S ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. S sıfır elemanını içeren bir yarıgrup olsun. Şayet $a \in S$ için $a^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ varsa a elemanına bir **nilpotent eleman** denir. Bu koşulu sağlayan en küçük n pozitif tamsayısına da S yarıgrubunun **nilpotentlik derecesi** denir.

Tanım 2.1.11. S bir boştan farklı küme olsun.

i. S üzerindeki çarpma her $a, b \in S$ için $ab = a$ ise S bir yarıgrup olur ve S yarıgrubuna **sol sıfır yarıgrup** denir.
ii. S üzerindeki çarpma her $a, b \in S$ için $ab = b$ ise S bir yarıgrup olur ve bu S yarıgrubuna **sağ sıfır yarıgrubu** denir.
iii. S üzerindeki çarpma her $a, b \in S$ ve $0 \in S$ için $ab = 0$ ise bu S yarıgrubuna **sıfır yarıgrubu** denir.

Tanım 2.1.12. S bir yarıgrup olsun. Eğer bir $a \in S$ için $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in S$ varsa $a \in S$ elemanına **regüler eleman** denir. Eğer bir S yarıgrubunun her elemanı regüler ise S yarıgrubuna **regüler yarıgrup** denir.

Tanım 2.1.13. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall b \in S$ için $Sb = S$ ve $bS = S$ oluyorsa S yarıgrubuna bir **grup** denir.

Tanım 2.1.14. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall b \in S$ için

$$eb = b \text{ ve } ab = e \text{ (veya } be = b \text{ ve } ba = e\text{)}$$

olacak şekilde $e, a \in S$ elemanları varsa S yarıgrubuna bir **grup** denir.

S bir grup ise herhangi bir $b \in S$ elemanı için

$$ab = ba = 1$$

olacak şekilde tek bir $a \in S$ vardır. Bu a elemanına b nın tersi denir ve b^{-1} ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. S bir monoid olmak üzere $b \in S$ elemanını alalım.

i. Eğer $a \cdot b = 1$ koşulunu sağlayan bir $a \in S$ elemanı varsa a elemanına b elemanının **sol tersi** denir.
ii. Eğer $b \cdot c = 1$ koşulunu sağlayan bir $c \in S$ elemanı varsa c elemanına b elemanının **sağ tersi** denir.
iii. Eğer b elemanının hem sağ hem de sol tersi varsa b ye bir **birim** denir.
S monoidinin tüm birimlerinin kümesi $U(S)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.16. S bir yarıgrup ve T, S yarıgrubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun.

i) $T^2 \subseteq T$ ise T kümesine S yarıgrubunun **alt yarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.
ii) $ST \subseteq T$ ise T kümesine S yarıgrubunun **sol ideali** denir.
iii) $TS \subseteq T$ ise T kümesine S yarıgrubunun **sağ ideali** denir.
iv) $ST \subseteq T$ ve $TS \subseteq T$ ise T kümesine S yarıgrubunun **ideali** denir ve $T \trianglelefteq S$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.17. S ile T iki yarıgrup ve $\psi: S \to T$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall\, a, b \in S$ için

$$(a \cdot b)\psi = (a\psi) \cdot (b\psi)$$

ise ψ dönüşümüne S den T ye bir (**yarıgrup) homomorfizm** denir.

Tanım 2.1.18. S ile T iki yarıgrup ve ψ: S $\rightarrow$ T bir yarıgrup homomorfizmi olsun. Şayet

- ψ birebir ise ψ dönüşümüne bir **monomorfizm,**
- ψ örten ise ψ dönüşümüne bir **epimorfizm,**
- ψ birebir ve örten ise ψ dönüşümüne bir **izomorfizm,**
- $S = T$ ise ψ ye bir **endomorfizm,**
- $S = T$ ve ψ birebir ise ψ dönüşümüne bir **otomorfizm** denir.

Şayet S den T ye bir izomorfizm varsa S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.19. S ve T iki yarıgrup olmak üzere $\forall\ (a, b), (c, d) \in S \times T$ için

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

şeklindeki ikili işlem ile $S \times T$ kartezyen çarpımı bir yarıgrup olur ve bu yarıgruba S ile T nin **direkt çarpım yarıgrubu** denir.

Tanım 2.1.20. S, T iki yarıgrup ve ψ: S $\rightarrow$ T bir homomorfizm ise

- $\text{im}\psi = \{s\,\psi\!: \ s \in S\}$ kümesine ψ dönüşümünün **görüntü (imaj) kümesi**
- $\ker \psi = \{(a\,, b) \in S \times S\!: \ a\,\psi = b\,\psi\}$ kümesine ψ dönüşümünün **çekirdek (kernel) kümesi** denir.

2.2. Dönüşümler Yarıgrupları

Tanım 2.2.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere herhangi $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine bir **bağıntı** denir.

X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi B_X ile gösterilir. B_X üzerindeki ikili işlemi $\alpha, \beta \in X$ için

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y)\!: \ \exists\ z \in X \text{ için } \ (x, z) \in \alpha \ \text{ ve } \ (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlayalım. B_X kümesi " $\circ$ " işlemi ile bir yarıgrup olur ve $(B_X, \circ)$ ikilisi olarak yazılır. B_X yarıgrubuna **tüm bağıntılar yarıgrubu** denir.

Örnek 2.2.2. $X_2 = \{1,2\}$ olsun.

$$X_2 \times X_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},$$
$$B_{X_2} = \{\emptyset\ ,\ X_2 \times X_2, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}, \{(2,1)\}, \{(2,2)\}, \{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\},$$
$$\{(1,1),(2,2)\}\ , \{(1,2),(2,1)\}\ , \{(1,2),(2,2)\}\ , \{(2,1),(2,2)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\},$$
$$\{(1,1),(1,2),(2,2)\}, \{(1,1),(2,1),(2,2)\}, \{(1,2),(2,1),(2,2)\}\}$$

şeklinde olur.

Yukarıdaki örnekten yola çıkarak; $|X| = n$ ise $|X \times X| = n^2$ olup $X \times X$ kartezyen çarpımının tüm alt kümelerinin sayısı 2^{n^2} olacağından $|B_{\mathrm{x}}| = 2^{n^2}$ olur.

Örnek 2.2.3. $X_2 = \{1,2\}$ olmak üzere $\alpha, \beta \in B_{X_2}$ bağıntıları $\alpha = \{(1,1),(1,2)\}$ ve $\beta = \{(2,1),(2,2)\}$ olsun.

$$(1,2) \in \alpha\ ,\ (2,1) \in \beta\ \rightarrow (1,1) \in \alpha \circ \beta$$
$$(1,2) \in \alpha\ ,\ (2,2) \in \beta\ \rightarrow (1,2) \in \alpha \circ \beta$$

olacağından

$$\alpha \circ \beta = \{(1,1),(1,2)\}$$

elde edilir.

$$(2,1) \in \beta\ ,\ (1,2) \in \alpha \rightarrow (2,2) \in \beta \circ \alpha$$
$$(2,1) \in \beta\ ,\ (1,1) \in \alpha \rightarrow (2,1) \in \beta \circ \alpha$$

olacağından

$$\beta \circ \alpha = \{(2,2),(2,1)\}$$

elde edilir.

Ayrıca $\beta \circ \alpha(x) = \beta(\alpha(x))$ ve $x(\beta \circ \alpha) = ((x)\beta)\alpha$ olduğuna dikkat edelim. Örneğimize dikkat edecek olursak $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$ olduğu görülmektedir. O halde $(B_X, \circ\ )$ bir değişmeli yarıgrup değildir.

Tanım 2.2.4. $\alpha \in B_{\mathrm{X}}$ olsun.

$$\mathrm{dom}(\alpha) = \{x \in X \colon \exists y \in X \text{ için } (x\,, y) \in \alpha\} \subseteq X$$
$$\mathrm{im}(\alpha) = \{y \in X \colon \exists\, x \in X \text{ için } (x\,, y) \in \alpha\} \subseteq X$$

şeklinde tanımlanan X in alt kümelerine sırasıyla α nın **tanım (domain)** ve **görüntü (imaj) kümesi** denir.

Tanım 2.2.5. $\forall x \in X$ ve her $\emptyset \neq Y \subseteq X$ için $x\alpha$ ve $Y\alpha$ kümeleri

$$x\alpha = \{y \in X : (x, y) \in \alpha\}$$
$$Y\alpha = \bigcup_{x \in Y} x\alpha$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımdan dolayı $x \in \mathrm{dom}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşulun $x\alpha \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Dikkat edilecek olursa $x \notin \mathrm{dom}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $x\alpha = \emptyset$ olmasıdır.

Tanım 2.2.6. $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $x \in \mathrm{dom}\alpha \subseteq X$ için $|x\alpha| = 1$ ise α bağıntısına X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir.

Buna denk olarak aşağıdaki tanım da kullanılabilir.

Tanım 2.2.7. $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ ise α bağıntısına X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerinin kümesi P_X ile gösterilir.

Önerme 2.2.8. P_X, B_X yarıgrubunun bir altyarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in P_X$ olsun. $\alpha \circ \beta \in P_X$ olduğunu gösterelim. $\mathrm{dom}(\alpha \circ \beta) = \emptyset$ ise $\alpha \circ \beta$, $\binom{x}{-}$ boş bağıntı olup $\alpha \circ \beta \in P_X$ dir. O zaman $\mathrm{dom}\,(\alpha \circ \beta) \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x \in \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ alalım. $|x(\alpha \circ \beta)| = 1$ olduğunu gösterirsek $\alpha \circ \beta \in P_X$ olur. O zaman $x \in \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ ise $(x, y) \in \alpha \circ \beta$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. $(x, y) \in \alpha \circ \beta$ ise $\exists z \in X$ için $(x, z) \in \alpha$ ve $(z, y) \in \beta$ dır. $(x, u) \in \alpha$ ise $\alpha \in P_X$ olduğundan $|x\alpha| = 1$ olacağından $u = z$ olmalıdır. $(z, v) \in \beta$ ise $\beta \in P_X$ olacağından $|z\beta| = 1$ ise $v = y$ olmalıdır. O halde $x(\alpha \circ \beta) = \{y\}$ olup $|x(\alpha \circ \beta)| = 1$ dir. Böylece $\alpha \circ \beta \in P_X$ dir. P_X, B_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. □

P_X alt yarıgrubuna X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir.

Tanım 2.2.9. $\alpha \in P_X$ için

$$\ker\alpha = \{(x, y) \in X \times X : \; x, y \in \mathrm{dom}(\alpha) \text{ ise } x\alpha = y\alpha \text{ veya } x, y \notin \mathrm{dom}(\alpha)\}$$

kümesine α bağıntısının **çekirdek kümesi** denir.

Tanım 2.2.10. $\alpha \in P_X$ olsun. Eğer $\mathrm{dom}(\alpha) = X$ ise α bağıntısına bir **tam dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi T_X ile gösterilir.

Önerme 2.2.11. T_X, P_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in T_X$ alalım. $\mathrm{dom}\alpha = \mathrm{dom}\beta = X$ dir. Ayrıca $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = |x\beta| = 1$ dir. $\mathrm{dom}(\alpha \circ \beta) = X$ olduğunu gösterirsek $\alpha \circ \beta \in T_X$ olur. $\mathrm{dom}(\alpha \circ \beta) \subseteq X$ olduğunu biliyoruz. $X \subseteq \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ olduğunu göstermeliyiz. Herhangi bir $x \in X$ alalım. $\alpha \in T_X$ olup $x \in \mathrm{dom}\alpha = X$ dir. $x \in \mathrm{dom}\alpha$ olup $(x, y) \in \alpha$ olacak şekilde $y \in X$ vardır. $y \in \mathrm{dom}\beta = X$ olup $(y, z) \in \beta$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. $(x, y) \in \alpha$ ve $(y, z) \in \beta$ olup $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ olur. $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ ise $x \in \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ olup $X \subseteq \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ elde edilir. O halde $X = \mathrm{dom}(\alpha \circ \beta)$ olup $\alpha \circ \beta \in T_X$ olur. T_X, P_X in bir alt yarıgrubudur. □

T_X yarıgrubuna X üzerindeki **tam dönüşümler yarıgrubu** denir.

Tanım 2.2.12. $\alpha \in T_X$ olsun.

i) $\mathrm{im}\alpha = X$ ise α dönüşümüne **örten dönüşüm**,

ii) $\forall\, x, y \in X$ için

$x\alpha = y\alpha \Rightarrow x = y$

oluyorsa α dönüşümüne **birebir (1-1) dönüşüm**,

iii) Eğer α hem örten hem de birebir ise α dönüşümüne X üzerinde bir **permütasyon** denir.

X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir.

Önerme 2.2.13. S_X, T_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in S_X$ ise α, β birebir ve örten olup $\alpha \circ \beta$ dönüşümü de birebir ve örtendir. Böylece $\alpha \circ \beta \in S_X$ dir. S_X, T_X yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. □

Dikkat edilirse

$$S_X \leq T_X \leq P_X \leq B_X$$

olur.

Önerme 2.2.14. $X = X_n = \{1,2, \dots, n\}$ olsun.

- $|X_n \times X_n| = n^2$
- $|B_{X_n}| = 2^{n^2}$
- $|T_{X_n}| = n^n$
- $|P_{X_n}| = (n+1)^n$
- $|S_{X_n}| = n!$

$X = X_n = \{1,2,\dots,n\}$ şeklinde bir sonlu küme olduğunda B_{X_n}, P_{X_n}, T_{X_n}, S_{X_n} yerine kısaca B_n, P_n, T_n, S_n yazılabilir.

Not 2.2.15.

- $\alpha \in B_n$ alalım. $Y_1, Y_2, \dots, Y_k \subseteq X_n$ için α elemanını $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{pmatrix}$ şeklinde yazarız.
- $\alpha = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(4,4)\} \in B_4$ ise $Y_1 = \{2,4\}$, $Y_2 = \{2,3\}$, $Y_3 = \emptyset$, $Y_4 = \{4\}$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \{2,4\} & \{2,3\} & \emptyset & \{4\} \end{pmatrix}$ olarak yazarız.
- $\alpha \in P_n$ ise $\forall x \in \operatorname{dom}\alpha$ için $|x\alpha| = 1$ olduğundan yukardaki Y_i kümelerine ihtiyaç yoktur. Bu durumda $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$ şeklinde yazılır.
- Eğer $x \notin \operatorname{dom}\alpha$ ise $x\alpha$ yerine $-$ yazılır.
- $\alpha = \{(1,2),(2,2),(4,4)\}$ ise $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & - & 4 \end{pmatrix}$ şeklinde yazılır.
- $\alpha \in T_n$ ise $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$ olarak yazılır.
- $\alpha \in S_n$ ise α, birebir ve örten olduğundan $\operatorname{im}\alpha$, n nin sıralanışı olacağından $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$ olarak gösterilir.

Tanım 2.2.16. Bir $\alpha: X_n \to X_n$ dönüşümü $\forall x, y \in X_n$ için

$$x \leq y \text{ iken } x\alpha \leq y\alpha$$

oluyorsa α dönüşümüne **sıra koruyan dönüşüm** denir.

Tüm sıra koruyan dönüşümlerin kümesini O_n ile gösterelim.

Teorem 2.2.17. O_n, T_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in O_n$ olmak üzere eğer $x \leq y$ ise $\alpha \in O_n$ olduğundan $x\alpha \leq y\alpha$ olur. $\beta \in O_n$ olduğundan $x\alpha \leq y\alpha$ ise $(x\alpha)\beta \leq (y\alpha)\beta$ olur. O halde $x \leq y$ ise $(x\alpha)\beta \leq (y\alpha)\beta$ olup $\alpha\beta \in O_n$ elde edilir. O_n, T_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.□

Teorem 2.2.18. $|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ olur.

İspat: Sıra koruyan dönüşüm yarıgrubunun eleman sayısını bulalım. Herhangi bir $\alpha \in O_n$ alalım. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$ olarak gösterelim. Dikkat edilirse $\alpha \in O_n$ olduğundan $1\alpha \leq 2\alpha \leq \cdots \leq n\alpha$ dir. Burada

$$1\alpha \text{ dan } x_1 \text{ tane, } 2\alpha \text{ dan } x_2 \text{ tane, } \cdots, n\alpha \text{ dan } x_n \text{ tane}$$

olmak üzere

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \ \ (x_i \geq 0)$$

olur. O halde $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \ \ (x_i \geq 0)$ denkleminin çözüm sayısı kadar O_n yarıgrubunun elemanı vardır. O halde kombinatorik hesaplardan yukarıdaki denklemin $\binom{n+(n-1)}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1}$ çözümü olup

$$|O_n| = \binom{n + (n-1)}{n-1} = \binom{2n - 1}{n-1}$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$\binom{2n - 1}{n-1} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\left((2n-1)-(n-1)\right)!} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!\,n!} = \binom{2n-1}{n}$$

olup

$$|O_n| = \binom{2n - 1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.19. $n = 3$ için $|O_3| = \binom{2.3-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ olarak hesaplanır. Ayrıca

$$O_{3=}\left\{\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,2\,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,3\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,2\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}\right\}$$

olur.

Dikkat edilirse $O_3 \cap S_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ olup genel olarak $O_n \cap S_n = \begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix}$ olacağından $|O_n \cap S_n| = 1$ olur. Bazen O_n yarıgrubunun elemanları sayılırken S_n yarıgrubunun elemanları hariç tutulur ve bu durumda $|O_n| = \binom{2n-1}{n} - 1$ ya da $|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} - 1$ şeklinde yazılır. Yani bazen $\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix} \notin O_n$ kabul edilir.

Tanım 2.2.20. Bir $\alpha: X_n \to X_n$ dönüşümü, $\forall x \in X_n$ için $x\alpha \leq x$ koşulunu sağlıyorsa α dönüşümüne **sıra azalan dönüşüm** denir.

Tüm sıra azalan dönüşümlerin kümesini D_n ile gösterelim.

Örnek 2.2.21. Dikkat edilirse

$$D_3 = \left\{\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,1\,3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}\right\}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.22. D_n bir yarıgruptur.

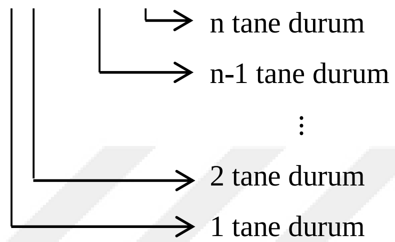
İspat: $\alpha, \beta \in D_n$ olsun. $\forall x \in X$ için $x\alpha \leq x, x\beta \leq x$ olur. $\forall x \in X_n$ için $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \leq (x)\beta \leq x$ olup $x(\alpha\beta) \leq x$ dir. O halde $\alpha\beta \in D_n$ olup D_n bir yarıgrup olur. □

Teorem 2.2.23. $|D_n| = n!$ olur.

İspat: Sıra azalan dönüşüm yarıgrubunun eleman sayısını bulalım. Herhangi bir $\alpha \in D_n$ alalım. $\alpha \in D_n$ ise

.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ . & . & \dots & . & . \end{pmatrix}$$



olup $|D_n| = n(n-1)\cdots 1 = n!$ elde edilir. □

Dikkat edilirse $\alpha \in D_n$ ise $1\alpha = 1$ olur. Ayrıca $D_n \cap S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right\}$ dir. O halde hem O_n hem de D_n de permütasyon olan bir tek $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ birim dönüşümü vardır.

Teorem 2.2.24. Bir $\alpha: X_n \to X_n$ dönüşümü, $\forall x \in X_n$ için $x \leq x\alpha$ koşulunu sağlıyorsa α dönüşümüne **sıra arttıran dönüşüm** denir.

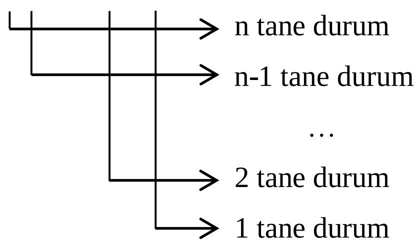
Tüm sıra arttıran dönüşümlerin kümesi D_n^* ile gösterelim. D_n^* bir yarıgruptur.

Örnek 2.2.25. $D_3^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ olur.

Teorem 2.2.26. $|D_n^*| = n!$ olur.

İspat: Sıra arttıran dönüşüm yarıgrubunun eleman sayısını bulalım. Herhangi bir $\alpha \in D_n^*$ alalım. $\alpha \in D_n^*$ ise $\forall x \in X_n$ için $x\alpha \geq x$ olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ . & . & \dots & . & . \end{pmatrix}$$



olup $|D_n^*| = n!$ elde edilir. □

C_n ile X_n üzerindeki hem sıra azaltan hem de sıra koruyan dönüşümlerin kümesini gösterelim. Yani $C_n = O_n \cap D_n$ olsun.

Örnek 2.2.27. Dikkat edilirse

$$C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklindedir.

Ayrıca $|C_n| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1}$ olduğunu Ayık ve arkadaşlarının (2011) çalışmasından dolayı biliyoruz. Bu sayı n inci **catalan sayısı** olup

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

şeklinde yazılır.

Bir dönüşüm yarıgrubunda bir tek sabit dönüşüm varsa o sabit dönüşüm sıfır elemandır. D_n ve C_n de bir tane sabit dönüşüm $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ olup bu eleman aynı zamanda sıfır elemandır. Dikkat edilirse

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Ayrıca T_n de birden fazla sabit dönüşüm olduğundan T_n yarıgrubunun sıfır elemanı yoktur. T_n yarıgrubunun sabit dönüşümleri T_n yarıgrubunun sağ sıfır elemanıdır.

$C_n^* = O_n \cap D_n^*$ ile sıra koruyan ve sıra arttıran dönüşümleri gösterelim. $C_n^* \cong C_n$ olduğunu Ayık ve arkadaşlarının (2011) çalışmasından dolayı biliyoruz. D_n^* ve C_n^* yarıgruplarının sıfır elemanı vardır ve $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$ dir.

Önerme 2.2.28. P_n, T_{n+1} yarıgrubunun bir alt yarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: $\alpha \in P_n$ olsun. $\alpha^* : X_{n+1} \to X_{n+1}$ dönüşümünü $x \in X_{n+1}$ için

$$x\alpha^* = \begin{cases} x\alpha, & x \in \mathrm{dom}\alpha \subseteq X_n \\ n+1, & x \notin \mathrm{dom}\alpha \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. α^* iyi tanımlı ve $\forall x \in X_{n+1}$ için tanımlı olup $\alpha^* \in T_{n+1}$ dir.

$\phi: P_n \to T_{n+1}$ dönüşümünü her $\alpha \in P_n$ için $\phi(\alpha) = \alpha^*$ olarak tanımlayalım. ϕ bir homomorfizmdir. $S = \phi(P_n)$, T_{n+1} in bir alt yarıgrubuna izomorfik olduğunu iddia ediyoruz. (ϕ örten olmak zorunda değildir.) $\forall\alpha,\beta\in P_n$ için $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha^*=\beta^*$ olduğu açıktır. O halde ϕ iyi tanımlı ve birebirdir. □

Tanım 2.2.29. $\alpha\in P_n$ olmak üzere $\forall x,y\in \mathrm{dom}(\alpha)$ için $x\le y$ iken $x\alpha\le y\alpha$ oluyor ise α dönüşümüne **kısmi sıra koruyan dönüşüm** denir.

Tüm kısmi sıra koruyan dönüşümler kümesini PO_n ile gösterelim.

Dikkat edilirse $\alpha\in PO_n$ ise $\alpha^*\in O_{n+1}$ olmak zorunda değildir. Yani $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&-&1\end{pmatrix}\in PO_3$ ise $\alpha^*=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&1&4\end{pmatrix}\notin O_4$ olur.

Örnek 2.2.30. PO_2 kümesini yazalım.

$$PO_2=\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

olur.

Teorem 2.2.31. $|PO_n|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1+k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1+k}{n-1}$ olur.

İspat: PO_n nin elemanlarının sayısını bulalım. PO_n nin elemanlarının sayısını bulmak için $\alpha\in PO_n$ elemanının $\mathrm{dom}\alpha$ kümesinin eleman sayısını düşünelim. $\alpha\in PO_n$ ise

$|\mathrm{dom}(\alpha)|=n\Rightarrow|O_n|$ tane α var yani $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ $\quad(x_i\ge 0)$

$|\mathrm{dom}(\alpha)|=n-1\Rightarrow\binom{n}{n-1}$ tane seçim için $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$-1 $\quad(x_i\ge 0)$

$\vdots$

$|\mathrm{dom}(\alpha)|=2\Rightarrow\binom{n}{2}$ tane seçim için $x_1+x_2+\cdots+x_n=2$ $\quad(x_i\ge 0)$

$|\mathrm{dom}(\alpha)|=1\Rightarrow\binom{n}{1}$ tane seçim için $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ $\quad(x_i\ge 0)$

$|\mathrm{dom}(\alpha)|=0\Rightarrow\binom{n}{0}$ tane seçim için $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ $\quad(x_i\ge 0)$

elde edilir. Tüm bunlar toplanırsa

$$|PO_n|=\binom{n}{n}\binom{2n-1}{n}+\binom{n}{n-1}\binom{2n-2}{n-1}+\cdots+\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}+\binom{n}{1}\binom{n}{1}+\binom{n}{0}\binom{n-1}{0}$$

olur. Böylece

$$|PO_n|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1+k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-1+k}{n-1}$$

elde edilir. □

Örnek 2.2.32. $|PO_2|$ ve $|PO_3|$ sayılarını hesaplayalım.

$|PO_2| = \sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\binom{2-1+k}{k} = \binom{2}{0}\binom{1}{0} + \binom{2}{1}\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8$ olur.
$|PO_3| = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\binom{3-1+k}{k} = \binom{3}{0}\binom{2}{0} + \binom{3}{1}\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\binom{4}{2} + \binom{3}{3}\binom{5}{3}$ =38 olur.

Bazen PO_n den $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ atılarak PO_n eleman sayısının yazıldığına dikkat edelim.

Tanım 2.2.33. $X_n = \{1,2,\dots,n\}$ kümesinin bir Y alt kümesi $|Y| = r$ olmak üzere $\alpha: Y \to X_n$ birebir (1-1) bir dönüşüm ise α dönüşümüne **kısmi birebir dönüşüm** denir.

Tüm kısmi birebir dönüşümlerin kümesini I_n ile gösterilir. I_n dönüşümlerin bileşkesi işlemiyle bir yarıgruptur.

Teorem 2.2.34. $|I_n| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 r!$ olur.

İspat: Tüm kısmi birebir (1-1) dönüşümlerin yarıgrubu I_n nin eleman sayısını hesaplayalım. $\alpha \in I_n$ ve $\alpha: Y \subseteq X_n \to X_n$ olmak üzere $|Y| = r$ olsun. X_n kümesinin $\binom{n}{r}$ tane r elemanlı Y alt kümesi vardır. Her bir Y için $P(n,r) = \binom{n}{r}r!$ tane α dönüşümü tanımlanabilir. Böylece $r \le n$ ve $|Y| = r$ olmak üzere Y kümesinden X_n ye 1-1 dönüşümlerin sayısı $P(n,r) = \binom{n}{r}r!$ dir. Dolayısıyla

$$|I_n| = \binom{n}{n}P(n,n) + \binom{n}{n-1}P(n,n-1) + \cdots + \binom{n}{1}P(n,1) + \binom{n}{0}P(n,0)$$

ve $P(n,r) = \binom{n}{r}r!$ olduğundan

$$|I_n| = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\,P(n,r) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{r}r! = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^2 r!$$

elde edilir. □

Ayrıca belirtmek gerekirse $S(n,r) = \binom{n}{r}$ olarak gösterilir. $P(n,r) = \binom{n}{r}r!$ olduğundan $|I_n| = \sum_{r=0}^{n} S(n,r)P(n,r)$ elde edilir. I_n, P_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur. Dikkat edilecek olursa $S_n \le I_n \le P_n$ olur.

$X_n = \{1,2,\dots,n\}$ ve $1 \le r \le n-1$ olmak üzere

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}\alpha| \le r\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.35. $K_{n,r}$, T_n nin bir alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in K_{n,r}$ ise $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}\beta$ olduğundan $|\mathrm{im}(\alpha\beta)| \leq |\mathrm{im}(\beta)| \leq r$ ise $|\mathrm{im}(\alpha\beta)| \leq r$ olup $\alpha\beta \in K_{n,r}$ dir. Böylece $K_{n,r}$, T_n nin bir alt yarıgrubudur. □

$1 \leq k \leq r$ olmak üzere $|\mathrm{im}\alpha| = k$ olacak şekilde kaç tane $\alpha \in K_{n,r}$ vardır? Yani $|K_{n,r}|$ i bulmak için şu adımları hesaplayalım. $Y \subseteq X_n$, $|Y| = k$ olacak şekilde $\binom{n}{k}$ tane Y alt kümesi vardır. X_n den Y kümesine $k!\binom{n}{k} = k!\,S(n,k)$ tane örten fonksiyon vardır. Böylece $\alpha \in K_{n,r}$ için,

$$|\mathrm{im}\alpha| = |Y| = 1 \text{ ise } \binom{n}{1}1!\binom{n}{1} \text{ tane } \alpha,$$
$$|\mathrm{im}\alpha| = |Y| = 2 \text{ ise } \binom{n}{2}2!\binom{n}{2} \text{ tane } \alpha,$$
$$\vdots$$
$$|\mathrm{im}\alpha| = |Y| = r \text{ ise } \binom{n}{r}r!\binom{n}{r} \text{ tane } \alpha$$

vardır. Tüm bunlar toplanırsa

$$|K_{n,r}| = \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\binom{n}{k}}_{S(n,k)} \underbrace{k!\binom{n}{k}}_{P(n,k)} = \sum_{k=1}^{r} S(n,k)P(n,k)$$

olarak elde edilir. □

Ayrıca

$$K_{n,1} \leq K_{n,2} \leq \cdots \leq K_{n,r-1} \leq K_{n,r} \quad \text{ve}$$
$$K_{n,1} \trianglelefteq K_{n,2} \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_{n,r-1} \trianglelefteq K_{n,r}$$

olduğunu biliyoruz.

Tanım 2.2.36. S bir yarıgrup ve A ise S üzerindeki bir bağıntı ($A \subseteq S \times S$) olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall (p,q) \in A$ için

- $(sp, sq) \in A$ ise A bağıntısına **sol uyumlu bağıntı**,
- $(ps, qs) \in A$ ise A bağıntısına **sağ uyumlu bağıntı**,
- $\forall (p,q), (b,d) \in A$ için $(pb, bd) \in A$ ise A bağıntısına **uyumlu (compatible) bağıntı** denir.

Tanım 2.2.37. S bir yarıgrup olmak üzere S üzerinde sağ (sol) uyumlu bir A denklik bağıntısına **sağ (sol) kongrüans** denir. S üzerinde uyumlu bir denklik bağıntısına **kongrüans** denir.

Tanım 2.2.38. S bir yarıgrup ve δ da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere $\forall\ u\rho, v\rho \in S/\delta$ için

$$(u\delta)(v\delta) = (uv)\delta$$

şeklindeki çarpma işlemiyle S/δ (δ denklik sınıflarının kümesi) bir yarıgruptur. S/δ yarıgrubuna **bölüm yarıgrubu** denir.

$\alpha \in T_n$ ve $\text{im}\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subseteq X_n$ olsun. Bu durumda $1 \leq i \leq m$ olmak üzere

$$A_i = x_i\alpha^{-1} = \{x \in X_n : x\alpha = x_i\}$$

olarak tanımlansın. Dikkat edilirse $x_i \in \text{im}\alpha$ olup $A_i \neq \emptyset$ olur. α iyi tanımlı olup $i \neq j$ ise $x_i \neq x_j$ olacağından $A_i \cap A_j = \emptyset$ dir. $\forall y \in X_n$ için $y\alpha = x_i$ olacak şekilde bir $x_i \in \text{im}\alpha$ vardır. Böylece $\forall y \in X_n$ elemanı $y \in A_i$ dir. $\forall y \in X_n$ için $y \in A_i$ olup $X_n = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ dir. O halde $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ sıralı m lisi X_n nin bir parçalanışıdır. Ayrıca $\ker\alpha = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i$ dir. Böylece α dönüşümü

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

2.3. İdempotent Elemanlar ve İdempotent Elemanların Sayısı

Tanım 2.3.1. Bir S yarıgrubunda $\alpha^2 = \alpha$ ise $\alpha \in S$ elemanına **idempotent eleman** denir.

Tanım 2.3.2. $\alpha \in T_n$ ve $\emptyset = Y \subseteq X_n$ olsun. $\beta : Y \to X_n$ dönüşümü $\forall y \in Y$ için $y\beta = y\alpha$ olarak tanımlanış ise $\beta \in T_n$ olup β dönüşümüne, α dönüşümünün Y **kümesine kısıtlaması** denir. Bu durumda $\alpha|_Y = \beta$ şeklinde yazılır.

Önerme 2.3.3. $\alpha \in T_n$ olsun. α dönüşümünün idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\alpha|_{\text{im}\alpha}$ kısıtlamasının $\text{im}\alpha$ üzerinde birim dönüşüm olmasıdır. (Yani $\forall y \in \text{im}\alpha$ için $y\alpha = y$ olmasıdır.)

İspat: ($\Rightarrow$) α idempotent eleman olsun. Yani $\alpha^2 = \alpha$ olur. Herhangi bir $y \in \text{im}\alpha$ için $y\alpha = y$ olduğunu göstermeliyiz. O zaman $x\alpha = y$ olacak şekilde $x \in X_n$ vardır. $\alpha^2 = \alpha$ olduğundan

$$y\alpha = (x\alpha)\alpha = (x)\alpha^2 = x\alpha = y$$

olup $y\alpha = y$ olur. Böylece $\alpha|_{\text{im}\alpha}$ dönüşümü $\text{im}\alpha$ üzerinde birim dönüşümdür.

($\Leftarrow$) $\alpha|_{\text{im}\alpha}$ dönüşümü imα üzerinde birim dönüşüm olsun. Her $x \in X_n$ $\alpha^2 = \alpha$ olduğunu gösterelim. $\alpha|_{\text{im}\alpha}$ dönüşümü imα üzerinde birim dönüşüm olup her $y \in \text{im}\alpha$ için $y\alpha = y$ dir. Dolayısıyla her $x \in X_n$ için $x\alpha \in \text{im}\alpha$ olup

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

olur. O halde $\alpha^2 = \alpha$ olup α idempotenttir. □

S yarıgrubundaki tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4. T_n, tüm dönüşümler yarıgrubu, S_n de permütasyonlar grubu olmak üzere $ST_n = Sing_n = T_n \setminus S_n$ olarak tanımlanan ST_n kümesine **tüm singüler dönüşümler kümesi**, ST_n kümesinin elemanlarına da **singüler dönüşümler** denir.

Önerme 2.3.5. $|E(ST_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$ olur.

İspat: $\alpha \in E(ST_n)$ ve $|\text{im}(\alpha)| = r$ olsun. Dikkat edilirse $\alpha \in ST_n$ olup $1 \leq r \leq n-1$ ve $X_n \setminus \text{im}\alpha \neq \emptyset$ olur. Böylece

$$\alpha|_{\underbrace{X_n \setminus \text{im}\alpha}_{\substack{\text{boştan} \\ \text{farklıdır.}}}} : X_n \setminus \text{im}\alpha \rightarrow \text{im}\alpha$$

şeklinde bir fonksiyondur. Ayrıca α idempotent olup $\alpha|_{\text{im}\alpha}$ dönüşümü imα üzerinde birim dönüşümdür. Yani $\alpha|_{\text{im}\alpha} : \text{im}\alpha \rightarrow \text{im}\alpha$ birim dönüşümüdür. Böylece $\text{im}\alpha = Y$ ve $|Y| = r$ ise

$$\alpha|_Y : \ Y \rightarrow Y$$

birim dönüşüm ve

$$\alpha|_{X_n \setminus Y} : \ X_n \setminus Y \rightarrow Y$$

bir dönüşümdür.

Tersine Y, X_n nin r elemanlı bir alt kümesi $1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere $\beta : Y \rightarrow Y$ birim dönüşümü ve $\theta : \ X_n \setminus Y \rightarrow Y$ bir dönüşüm ise $\alpha : \ X_n \rightarrow X_n$ dönüşümünü $\forall x \in X_n$ için

$$x\alpha = \begin{cases} x, & x \in Y \\ x\theta, & x \notin Y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha \in E(ST_n)$ dir. Gerçekten de

$$x \in Y \text{ ise } x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$
$$x \notin Y \text{ ise } x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = (x\theta)\alpha = x\theta = x\alpha$$

olup α bir idempotenttir.

Böylece $1 \leq r \leq n-1$ olmak üzere X_n kümesinin her r elemanlı Y alt kümesi için ST_n de $\mathrm{im}\alpha = Y$ olacak şekilde r^{n-r} tane idempotent eleman vardır. Her farklı r elemanlı Y alt kümesi için bulunan idempotentler farklı olup görüntüsünde r eleman bulunan idempotentlerin sayısı $\binom{n}{r} r^{n-r}$ olur. r nin her seçimi için tüm idempotentlerin sayısı $\sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$ şeklinde elde edilir. Sonuç olarak

$$|E(ST_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r}$$

elde edilir. □

Sonuç 2.3.6. $|E(T_n)| = |E(ST_n)| + |E(S_n)|$,

$|E(T_n)| = \sum_{r=1}^{n-1} \binom{n}{r} r^{n-r} + 1$,

$|E(T_n)| = \sum_{r=n}^{n} \binom{n}{r} r^{n-r}$.

2.4. Green Denklik Bağıntıları

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve $p, q \in S$ olmak üzere

$p\mathcal{L}q \Leftrightarrow S^1p = S^1q$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}$ bağıntısına **sol Green**

$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow pS^1 = qS^1$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{R}$ bağıntısına **sağ Green**

$p\mathcal{J}q \Leftrightarrow S^1pS^1 = S^1qS^1$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{J}$ bağıntısına $\mathcal{J}$ **−Green**

bağıntısı denir.

Önerme 2.4.2. S bir yarıgrup ve $p, q \in S$ olsun.

i) $p\mathcal{L}q \Leftrightarrow p = xq$ ve $q = yp$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
ii) $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow p = qx$ ve $q = py$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
iii) $p\mathcal{J}q \Leftrightarrow p = xqy$ ve $q = upv$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Önerme 2.1.1. e bakınız. □

Önerme 2.4.3. Bir S yarıgrubu üzerinde yukarıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ Green bağıntılarını ele alalım.

i) $\mathcal{L}$ bir sağ kongrüanstır.

ii) $\mathcal{R}$ bir sol kongrüanstır.

İspat: (i) $\mathcal{L}$ bir denklik bağıntısı olup $\mathcal{L}$ nin sağ uyumlu olduğunu göstermeliyiz. $(p,q) \in \mathcal{L}$ ve $s \in S$ alalım. $(p,q) \in \mathcal{L}$ ise $S^1p = S^1q$ olur. Buradan $S^1pS = S^1qS$ elde edilir. Böylece $(ps,qs) \in \mathcal{L}$ olup $\mathcal{L}$ sağ uyumlu olup bir sağ kongrüanstır.

(ii) Şimdi $(p,q) \in \mathcal{R}$ alalım. $(p,q) \in \mathcal{R}$ ise $pS^1 = qS^1$ olur. Buradan $SpS^1 = SqS^1$ elde edilir. Böylece $(sp,sq) \in \mathcal{R}$ olup $\mathcal{R}$ sol uyumlu olup bir sol kongrüanstır. □

Önerme 2.4.4. $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ değişmelidir. ($\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$)

İspat: $(p,q) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ alalım. $(p,c) \in \mathcal{L}$ ve $(c,q) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. $(p,c) \in \mathcal{L}$ ise $c = xp,\ p = yc$ olacak şekilde $x,y \in S^1$ ve $(c,q) \in \mathcal{R}$ ise $q = cu,\ c = qv$ olacak şekilde $u,v \in S^1$ vardır. $d = ycu$ alırsak $pu = ycu = d$ ve

$$dv = (ycu)v = y(cu)v = yqv = yc = p$$

olup $(p,d) \in \mathcal{R}$ elde edilir.

$$yq = ycu = d \text{ ve } xd = x(ycu) = x(yc)u = xpu = cu = b$$

olup $(d,q) \in \mathcal{L}$ elde edilir. O halde $(p,d) \in \mathcal{R}$, $(d,q) \in \mathcal{L}$ olup $(p,q) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olur. $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ R$ olduğu gösterilir. Böylece $\mathcal{L} \circ R = R \circ \mathcal{L}$ olur. □

Tanım 2.4.5. S bir yarıgrup $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ de S üzerinde sağ ve sol Green bağıntıları olsun. $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ olarak tanımlı denklik bağıntısına **$\boldsymbol{\mathcal{H}}$ −Green denklik bağıntısı** denir. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısına **$\boldsymbol{\mathcal{D}}$ −Green denklik bağıntısı** denir. $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ şeklinde ifade edilir.

S bir yarıgrup ve $p \in S$ olmak üzere p yi içeren $\mathcal{L},\ \mathcal{R},\ \mathcal{J},\ \mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıflarını $\mathcal{L}_p, \mathcal{R}_p, \mathcal{J}_p, \mathcal{H}_p$ ve $\mathcal{D}_p$ ile göstereceğiz.

Denklik sınıflarının ayrık olmasından $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı, ayrık $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıflarının (ve ayrık $\mathcal{L}$ −Green denklik sınıflarının) birleşimidir.

$p\mathcal{D}q$ olsun. Öyleyse $(p,q) \in \mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olup $(p,c) \in \mathcal{L}$ ve $(c,q) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $c \in S$ vardır. $c \in \mathcal{L}_p$ ve $c \in \mathcal{R}_q$ olur. O halde $c \in \mathcal{L}_p \cap \mathcal{R}_q$ dir. Öyleyse $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{R}_b \neq \emptyset$ dır. $p \in \mathcal{D}$ olmak üzere $\mathcal{H}_p$ Green denklik sınıfını alırsak

$$\begin{aligned} q \in \mathcal{H}_p &\Leftrightarrow (p,q) \in \mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} \Leftrightarrow (p,q) \in \mathcal{L} \text{ ve } (p,q) \in \mathcal{R} \\ &\Leftrightarrow q \in \mathcal{L}_p \text{ ve } q \in \mathcal{R}_p \\ &\Leftrightarrow q \in \mathcal{L}_p \cap \mathcal{R}_p \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{H}_p = \mathcal{L}_p \cap \mathcal{R}_p$ dir.

Böylece $\mathcal{D}$ −Green denklik sınıfı bir yumurta kutusu (egg box) şeklinde olup her bir satır $\mathcal{R}$ −Green denklik sınıfını, her bir sütun $\mathcal{L}$-Green denklik sınıfını, her bir hücre ise $\mathcal{H}$ −Green denklik sınıfını gösterir.

Tablo şeklinde gösterirsek bir $\mathcal{D}$- Green sınıfı aşağıdaki yapıdadır.

D_i:

		L_i	
R_i		H_i	

Şekil 2.1. $\mathcal{D}$- Green Denklik Sınıfı Tablosu (Egg Box)

Teorem (Green Teoremi) 2.4.6. S bir yarıgrup $p, q \in S$ olmak üzere

- $(p, q) \in \mathcal{R}$ ise $ps = q$ ve $qt = p$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{array}{ccc} \delta_s : \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_q & \qquad & \delta_t : \mathcal{L}_q \to \mathcal{L}_p \\ x \to xs & & y \to yt \end{array}$$

şeklinde tanımlanan δ_s ve δ_t fonksiyonları 1-1 ve örten fonksiyonlardır. Ayrıca δ_s ve δ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Bu fonksiyonlar bir $\mathcal{H}$ −sınıfını yine bir $\mathcal{H}$ −sınıfına götürür.

- $(p, q) \in \mathcal{L}$ ise $sp = q$ ve $tq = p$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{array}{ccc} \phi_s : \mathcal{R}_p \to \mathcal{R}_q & \qquad & \phi_t : \mathcal{R}_q \to \mathcal{R}_p \\ x \to sx & & y \to ty \end{array}$$

şeklinde tanımlanan ϕ_s ve ϕ_t fonksiyonları 1-1 ve örten fonksiyonlardır. Ayrıca ϕ_s ve ϕ_t fonksiyonları birbirlerinin tersidir. Bu fonksiyonlar bir $\mathcal{H}$ −sınıfını yine bir $\mathcal{H}$ −sınıfına götürür.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1. ve Lemma 2.2.2. ye bakınız. □

Önerme 2.4.7. $\alpha, \beta \in T_n$ olsun.

(i) $\alpha\mathcal{L}\beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$.

(ii) $\alpha\mathcal{R}\beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

(iii) $\alpha\mathcal{D}\beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$.

İspat: $\alpha, \beta \in T_n$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ j_1 & j_2 & \dots & j_r \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n kümesinin $(A_1, \dots, A_m)$, $(B_1, \dots, B_r)$ parçalanışları ve $(i_1, \dots, i_m), (j_1, \dots, j_r) \subseteq X_n$ alt kümeleri vardır.

(i) $(\Rightarrow)$ $\alpha\mathcal{L}\beta$ olsun. $\theta\alpha = \beta$ ve $\lambda\beta = \alpha$ olacak şekilde $\theta, \lambda \in T_n$ vardır. (Hatırlatma: $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha\beta) \supseteq \ker(\alpha)$ olduğunu biliyoruz.) Buradan

$$\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\lambda\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\theta\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha)$$

olup $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ olsun. $m = r$ ve $\{j_1, \dots, j_m\} = \{i_1, \dots, i_m\}$ olur. Ayrıca $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ ve $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ olup $i_1 = j_1$, $i_2 = j_2$, … , $i_m = j_m$ olur.
$k_1 \in A_1$, $k_2 \in A_2$,… ,$k_m \in A_m$ olmak üzere

$$\theta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\theta\alpha = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \beta$$

elde edilir. Böylece $\theta\alpha = \beta$ olup istenilen ispatlanmış olur.

Benzer şekilde $\ell_1 \in B_1$, $\ell_2 \in B_2$, ⋯, $\ell_m \in B_m$ olmak üzere

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\lambda\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \alpha$$

elde edilir. $\theta\alpha = \beta$ olur. O halde $\alpha\mathcal{L}\beta$ ispatlanmış olur.

(ii) $(\Rightarrow)$ $\alpha\mathcal{R}\beta$ olsun. $\alpha\theta = \beta$, $\beta\lambda = \alpha$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in T_n$ vardır. $\ker(\alpha) = \ker(\beta\lambda) \supseteq \ker(\beta) = \ker(\alpha\theta) \supseteq \ker(\alpha)$ olup $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olur.

$(\Leftarrow)$ $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. Bunun anlamı $(A_i = B_i)$ α ve β nın parçalanışı aynıdır. $\theta: X_n \to X_n$ dönüşümü

$$x\theta = \begin{cases} j_k, & x = i_k \in \{i_1, \dots, i_m\} = K \\ x, & \mathrm{x} \in X_n - K \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\alpha\theta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \beta$$

olur. Benzer şekilde $\beta\lambda = \alpha$ olacak şekilde $\lambda \in T_n$ tanımlanır. $\alpha\mathcal{R}\beta$ ispatlanmış olur.

(iii) $(\Rightarrow)$ $\alpha\mathcal{D}\beta$ olsun. $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğundan $\alpha\mathcal{L}\theta$, $\theta\mathcal{R}\beta$ olacak şekilde $\theta \in T_n$ vardır.

$$\theta\mathcal{R}\beta \Rightarrow \ker(\theta) = \ker(\beta) \Rightarrow |\mathrm{im}(\theta)| = |\mathrm{im}(\beta)|$$

olur.

$$\alpha\mathcal{L}\theta \Rightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\theta) \Rightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\theta)|$$

olur. O halde $|\mathrm{im}(\theta)| = |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ olsun. $r = m$ olur. $\alpha\mathcal{L}\theta,\ \theta\mathcal{R}\beta$ olacak şekilde $\theta \in T_n$ tanımlayalım. (Sonuçta $\alpha\mathcal{D}\beta$ olur.)

$$\theta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

alırsak $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\theta)$ olup $\alpha\mathcal{L}\theta$ ve $\ker(\beta) = \ker(\theta)$ olup $\theta\mathcal{R}\beta$ olur. Böylece $\alpha\mathcal{L}\theta$ ve $\theta\mathcal{R}\beta$ olup $\alpha\mathcal{D}\beta$ elde edilir. □

Örnek 2.4.8. T_3 yarıgrubunun Green denklik sınıflarının yapısını gösteren tablo aşağıdaki gibidir. İmajı $\{1,2,3\}$ olan tüm dönüşümler D_3 sınıfını, imajı $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ olan tüm dönüşümler D_2 sınıfını, imajı $\{1\},\{2\},\{3\}$ olan tüm dönüşümler D_1 sınıfını oluşturur. Sütunlar L sınıflarını, satırlar R sınıflarını göstermek koşulu ile D sınıflarının tabloları, yukarıdaki teoremi kullanarak aşağıdaki gibi oluşturulur. Dikkat edilecek olursa D_3 sınıfı simetrik grup S_3 grubunun elemanlarından oluşur.

D_3:

	$L_{1,2,3}$
$R_{1,2,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

D_2:

	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$
$R_{1,23}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$
$R_{12,3}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$
$R_{13,2}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$

D_1:

	L_1	L_2	L_3
R_{123}	$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$

Şekil 2.2. T_3 yarıgrubunun D sınıfları

Teorem 2.4.9. $\alpha, \beta \in P_n$ olsun.

i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$

ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$

İspat: i) $(\Rightarrow)\, \alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. O zaman $\lambda\alpha = \beta$ ve $\mu\beta = \alpha$ olacak şekilde $\lambda,\ \mu \in P_n$ vardır. $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\mu\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta) = \mathrm{im}(\lambda\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha)$ olup $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ olsun. $\alpha, \beta \in P_n$ olup $\mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(\beta) = \{x_1, \dots, x_2\}$ olmak üzere

$$a = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Her $1 \leq i \leq m$ için $y_i \in A_i$ elemanını seçelim. $\lambda \in P_n$ dönüşümünü

$$\lambda = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ y_1 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\lambda\alpha = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix} = \beta$$

elde edilir. Dikkat edilirse A_{m+1}, B_{m+1} boş küme de olabilir. Benzer şekilde $\mu\beta = \alpha$ olacak şekilde $\mu \in P_n$ tanımlanır ve böylece $\alpha \mathcal{L} \beta$ elde edilir.

ii) $(\Rightarrow) \alpha \mathcal{R} \beta$ olsun. $\alpha\lambda = \beta$ ve $\beta\mu = \alpha$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in P_n$ vardır. Böylece

$$\ker\beta = \ker\alpha\lambda \supseteq \ker\alpha = \ker\beta\lambda \supseteq \ker\beta$$

olup $\ker\alpha = \ker\beta$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\alpha, \beta \in P_n$ için $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun. $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $Y = X_n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ olmak üzere $\lambda \in P_n$ dönüşümü

$$\lambda = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m & Y \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\alpha\lambda = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m & Y \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m & A_{m+1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix} = \beta$$

olur.

Benzer şekilde $\beta\mu = \alpha$ olacak şekilde $\mu \in P_n$ mevcut olup $\alpha\mathcal{R}\beta$ elde edilir. □

Bir $\alpha: X_n \to X_n$ dönüşümü $\forall x, y \in X_n$ için

$$x \leq y \text{ iken } x\alpha \leq y\alpha$$

oluyorsa α dönüşümünü sıra koruyan dönüşüm olarak tanımlandığımızı ve tüm sıra koruyan dönüşümlerin kümesini O_n ile gösterdiğimizi hatırlayalım. O_n, T_n yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olduğunu biliyoruz. Ayrıca O_n yarıgrubunun eleman sayısının

$$|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$$

olduğunu gösterdik.

O_n yarıgrubunun Green denklik bağıntılarını bulalım.

Tanım 2.4.10. $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_m \leq n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2, \dots, r_1\} \\ A_2 &= \{r_1+1, r_1+2, \dots, r_2\} \\ &\vdots \\ A_{m-1} &= \{r_{m-2}+1, r_{m-2}+2, \dots, r_{m-1}\} \\ A_m &= \{r_{m-1}+1, r_{m-1}+2, \dots, n\} \end{aligned}$$

ise X_n alt kümelerinden oluşan $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ parçalanışına **sıralı konveks parçalanış** denir.

Eğer $\alpha \in O_n$ ise $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $x \in A_k$ ve $y \in A_{k+1}$ olsun. Bu durumda $x\alpha = i_k < i_{k+1} = y\alpha$ olur. Eğer $y < x$ olsaydı $y\alpha < x\alpha$ olup $i_{k+1} < i_k$ çelişkisi elde edilirdi. Böylece $x \in A_k$, $y \in A_{k+1}$ için $x < y$ elde edilir. O halde $\alpha \in O_n$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

şeklinde olup X_n kümesinin alt kümelerinden oluşan $(A_1, \dots, A_m)$ bir sıralı konveks parçalanışı vardır. Sonuç olarak, $\alpha \in O_n$ ise $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$ olacak şekilde X_n nin sıralı konveks parçalanışı $(A_1, \dots, A_m)$ ve $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ sayıları vardır.

Önerme 2.4.11. $\alpha, \beta \in O_n$ olsun.

(i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$.

(ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

(iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$.

İspat: (i) $(\Rightarrow)$ yönlü ispatlar $O_n \subseteq T_n$ olduğu için T_n yarıgrubunda olduğu gibidir.

$(\Leftarrow)$ $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n kümesinin alt kümelerinden oluşan $(A_1, \dots, A_m)$, $(B_1, \dots, B_m)$ sıralı konveks parçalanışı ve $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ sayıları vardır.

Her $1 \le k \le m$ için $j_k \in A_k$ seçelim. $(A_1, \dots, A_m)$ sıralı konveks parçalanış olduğundan $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ olup

$$\theta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $\theta \in O_n$ ve $\theta\alpha = \beta$ olur. Benzer şekilde $\lambda\beta = \alpha$ olacak şekilde $\lambda \in O_n$ vardır. $\theta\alpha = \beta$ ve $\lambda\beta = \alpha$ olacak şekilde $\theta, \lambda \in O_n$ olup $\alpha\mathcal{L}\beta$ dir.

(ii) ($\Leftarrow$) $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n kümesinin alt kümelerinden oluşan $(A_1, \dots, A_m)$ sıralı konveks parçalanış ve $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ ve $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ sayıları vardır. Böylece

$$B_1 = \{1,2, \dots, i_1\}$$
$$B_2 = \{i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, i_2\}$$
$$\vdots$$
$$B_m = \{i_{m-1} + 1, i_{m-1} + 2, \dots, i_m\}$$
$$B_{m+1} = X_n \setminus \{1,2, \dots, i_m\}$$

olmak üzere θ dönüşümünü

$$\theta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlayalım. X_n kümesinin alt kümelerinden oluşan $(B_1, \dots, B_m, B_{m+1})$ sıralı konveks parçalanışı ve $j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ sayıları olup $\theta \in O_n$ elde edilir. O halde

$$\alpha\theta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m & B_{m+1} \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \beta$$

olur. Benzer şekilde $\beta\lambda = \alpha$ olacak şekilde $\lambda \in O_n$ vardır. $\alpha\theta = \beta, \beta\lambda = \alpha$ olacak şekilde $\theta, \lambda \in O_n$ olup $\alpha\mathcal{R}\beta$ elde edilir.

(iii) ($\Leftarrow$) $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n kümesinin alt kümelerinden oluşan $(A_1, \dots, A_m)$, $(B_1, \dots, B_m)$ sıralı konveks parçalanışları ve $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ sayıları vardır. Bu durumda θ dönüşümünü

$$\theta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\theta \in O_n$ elde edilir. Ayrıca dikkat edilirse $\ker\alpha = \ker\theta$, $\mathrm{im}\alpha = \mathrm{im}\theta$ olup $\theta\mathcal{R}\beta$ ve $\alpha\mathcal{L}\theta$ olur. Böylece $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğu hatırlanırsa $\alpha\mathcal{L}\theta$ ve $\theta\mathcal{R}\beta$ olup $\alpha\mathcal{D}\beta$ elde edilir. □

$X_n \neq \emptyset$ bir küme olsun. X_n kümesinden X_n kümesine tanımlı tüm kısmi birebir (1-1) dönüşümlerin kümesini I_n ile gösterdiğimizi ve $I_n \leq P_n$, $S_n \leq P_n$ ve $I_n \setminus S_n \trianglelefteq I_n$ olduğunu hatırlayalım.

Teorem 2.4.12. $\alpha, \beta \in I_n$ olsun.

i) $\alpha\mathcal{L}\beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ dır.

ii) $\alpha\mathcal{R}\beta \Leftrightarrow \mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ dır.

İspat: i) ($\Rightarrow$) $\alpha\mathcal{L}\beta$ olsun. $\lambda\alpha = \beta$ ve $\mu\beta = \alpha$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in I_n$ vardır. $\alpha, \beta \in I_n \subseteq P_n$ olup P_n yarıgrubu için yapılan ispata benzer şekilde işlemler yapılırsa $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ olduğu açıktır.

($\Leftarrow$) $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ olsun. $|\mathrm{im}(\alpha)| = m$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_1, \dots, x_m\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_m & \{z_1, \dots, z_m\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $\{x_1, \dots, x_m\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\{z_1, \dots, z_m\}$ alt kümeleri vardır. Burada $\{x_1, \dots, x_m\}^t = X_n \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ anlamındadır. $\lambda \in I_n$ dönüşümü

$$\lambda = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_m & \{z_1, \dots, z_m\}^t \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa $\lambda\alpha = \beta$ elde edilir. Benzer şekilde $\theta\beta = \alpha$ olacak şekilde $\theta \in I_n$ vardır. O halde $\alpha\mathcal{L}\beta$ elde edilir.

ii) Herhangi bir

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_i\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix} \in I_n$$

elemanı için

$$\ker(\alpha) = \{(x_i, x_i) : i \in \{1,2,\dots,m\}\} = \{(x_i, x_i) : x_i \in \mathrm{dom}\alpha\}$$

olur. $\ker(\alpha)$ nın denklik sınıfları, $\{[x_i] : x_i \in \mathrm{dom}(\alpha)\}$ olur.

($\Rightarrow$) $\alpha\mathcal{R}\beta$ olsun. $\alpha, \beta \in I_n \subseteq P_n$ olup $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$ yani $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ elde edilir.
($\Leftarrow$) $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ olsun. $|\mathrm{dom}(\alpha)| = m$ ise

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_i\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_i\}^t \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m & - \end{pmatrix}$$

olacak şekilde X_n kümesinin m elemanlı $\{x_i\}_{i=1}^m$, $\{y_i\}_{i=1}^m$, $\{z_i\}_{i=1}^m$ alt kümeleri vardır. Böylece $\lambda \in I_n$ dönüşümü

$$\lambda = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m & \{y_i\}^t \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m & - \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\alpha\lambda = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_i\}^t \\ z_1 & z_2 & \dots & z_m & - \end{pmatrix} = \beta$$

elde edilir. Yani $\alpha\lambda = \beta$, $\lambda \in I_n$ olup $\alpha = \beta\lambda^{-1}$ olur. Böylece $\alpha\mathcal{R}\beta$ elde edilir. □

Teorem 2.4.13. $\alpha, \beta \in I_n$ olsun.

i) $\alpha\mathcal{H}\beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$ ve $\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta)$ dır.

ii) $\alpha\mathcal{D}\beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ dır.

İspat: i) H sınıfının tanımından açıktır.

ii) ($\Rightarrow$) $\alpha\mathcal{D}\beta$ olsun. $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olduğundan $\alpha\mathcal{L}\lambda$, $\lambda\mathcal{R}\beta$ olacak şekilde $\lambda \in I_n$ vardır. O zaman $\mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\lambda)$ ve $\mathrm{dom}(\lambda) = \mathrm{dom}(\beta)$ dır. $\lambda \in I$, birebir olup $|\mathrm{dom}(\lambda)| = |\mathrm{im}(\lambda)|$ dır. Buradan $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\lambda)| = |\mathrm{dom}(\lambda)| = |\mathrm{dom}(\beta)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ olup $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)| = m$ olsun. $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \{x_i\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m & \{u_i\}^t \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & - \end{pmatrix}$ şeklindedir. $\lambda = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m & \{u_i\}^t \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m & - \end{pmatrix} \in I_n$ için

$$\mathrm{im}(\lambda) = \mathrm{im}(\alpha) \Rightarrow \alpha\mathcal{L}\lambda$$
$$\mathrm{dom}(\lambda) = \mathrm{dom}(\beta) \Rightarrow \lambda\mathcal{R}\beta$$

olacağından $\alpha\mathcal{D}\beta$ elde edilir.

Örnek 2.4.14. I_2 için D sınıflarının yapısını inceleyelim.

D_2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ elemanlarından oluşmaktadır. D_0: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} = \emptyset$ şeklinde olup tek elemanlıdır. Satırları R sınıfı, sütunları L sınıfı olarak düzenlenen D_1 sınıfının tablosu aşağıdaki gibidir.

D_1:

	L_1	L_2
R_1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & - \end{pmatrix}$
R_2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ - & 2 \end{pmatrix}$

Şekil 2.3. I_2 yarıgrubunun D sınıfları

Yukarıda bulunan D_0, D_1, D_2 sınıflarının eleman sayıları toplanarak I_2 yarıgrubunun eleman sayısı $|I_2| = 7$ elde edilir.

Örnek 2.4.15. $n = 3$ için I_3 yarıgrubunun D sınıflarını belirleyelim.

D_3 sınıfı S_3 simetrik grubunun elemanlarından oluşur. Böylece $D_3 = S_3$ ve $|D_3| = |S_3| = 3! = 6$ olur. Ayrıca D_0 sınıfının $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ - & - & - \end{pmatrix} = \emptyset$ şeklinde bir tek elemanı vardır. Satırları R sınıfı, sütunları L sınıfı olarak düzenlenen D_1 ve D_2 sınıfının tablosu aşağıdaki gibidir.

D_1:

	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$
R_1	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & - & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & - & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & - & -\end{pmatrix}$
R_2	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 1 & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 2 & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 3 & -\end{pmatrix}$
R_3	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & - & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & - & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & - & 3\end{pmatrix}$

D_2:

	$L_{1,2}$	$L_{1,3}$	$L_{2,3}$
R_{12}	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & -\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & -\end{pmatrix}$
R_{13}	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & - & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & - & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & - & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & - & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & - & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & - & 2\end{pmatrix}$
R_{23}	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ - & 3 & 2\end{pmatrix}$

Şekil 2.4. I_3 yarıgrubunun D sınıfları

Yukarıda bulunan D_0, D_1, D_2, D_3 sınıflarının eleman sayıları toplanarak I_3 yarıgrubunun eleman sayısı

$$|I_3| = 6 + 18 + 9 + 1 = 34$$

elde edilir.

Dikkat edilirse I_n yarıgrubunun $\mathcal{D}$ sınıflarının sayısı $n+1$ dir. Her bir $\mathcal{L}$ sınıfında ve $\mathcal{R}$ sınıfında eşit sayıda eleman vardır. Görüntüsünde r tane eleman olan dönüşümlerin kümesi D_r olmak üzere $\mathcal{D}$- Green denklik sınıfı ile gösterelim.

• $\binom{n}{r}$ kadar $\mathcal{L}$ sınıfı ve $\mathcal{R}$ sınıfı vardır. $\binom{n}{r}^2$ kadar $\mathcal{H}$ sınıfı vardır.

• Bir $\mathcal{H}$ sınıfında $r!$ tane eleman vardır. Yani r elemanlı bir kümeden r elemanlı bir kümeye birebir (1-1) ve örten dönüşümlerin sayısı $r!$ dir.

• Dolayısıyla her bir $\mathcal{L}$ sınıfında ve $\mathcal{R}$ sınıfında $P(n,r) = \binom{n}{r} r!$ tane eleman vardır.

2.5. Doğuray Kümeleri ve Ranklar

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq B \subseteq S$ olsun. S yarıgrubunun, B alt kümesini içeren en küçük alt yarıgrubuna B **tarafından doğurulan altyarıgrup** denir. B tarafından doğurulan altyarıgrup $\langle B \rangle$ şeklinde gösterilir. Eğer $S = \langle B \rangle$ ise B kümesine S yarıgrubunun bir **doğuray kümesi** denir.

Tanım 2.5.2. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq B \subseteq S$ için $S = \langle B \rangle$ olsun. Eğer $B \subseteq S$ sonlu bir küme ise S yarıgrubu **sonlu doğuraylıdır** denir.

Tanım 2.5.3. Eğer S yarıgrubu bir tek $x \in S$ tarafından doğuruluyorsa S ye **tek doğuraylı yarıgrup** denir ve $S = \langle x \rangle$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.5.4. Eğer S yarıgrubu sadece idempotent elemanlardan oluşan bir B alt kümesi tarafından doğuruluyor ise bu B kümesine S yarıgrubunun bir **idempotent doğuray kümesi** denir.

Tanım 2.5.5. S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olsun. Bu durumda

$$\min \{|B| : S = \langle B \rangle \text{ ve } B \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısı mevcut olup bu sayıya S yarıgrubunun **rankı** denir ve $\text{rank}(S)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.5.6. S yarıgrunun $\text{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine **minimal doğuray kümesi** denir.

Tanım 2.5.7. S bir sonlu idempotent doğuraylı yarıgrup olsun. Bu durumda

$$\min \{|X| : S = \langle B \rangle,\ B \subseteq E(S) \text{ ve } B \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısı mevcut olup bu sayıya S yarıgrubunun **idempotent rankı** denir ve $\text{idrank}(S)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.5.8. $\rho \in S_n$ olsun. $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r \in X_n$ farklı elemanlar olmak üzere her $j = 1, 2, \dots, r-1$ için

$$\rho_j\, \rho = \rho_{j+1},\ \ \rho_r\, \rho = \rho_1 \text{ ve}$$
$$\forall\, x \in X_n \backslash \{\, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r \,\} \text{ için } x\rho = x$$

ise ρ ya bir r-**devir** denir ve $\rho = (\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_r)$ şeklinde yazılır. $(\rho_1 \rho_2)$ şeklindeki 2-devire ise **transpozisyon** denir.

Tanım 2.5.9. $i, j \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i\}$ ve $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j\}$ iki ayrık küme ise $(\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_k)$ ve $(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_l)$ devirlerine **ayrık devir** denir.

S_n yarıgrubunun (permütasyon grubunun) her elemanı ayrık devirlerin çarpımı olarak yazılabilir. $(i_1 i_2 \cdots i_r)$, S_n yarıgrubunun bir deviri ise

$$(i_1 i_2 \cdots i_r) = (i_r\, i_{r-1})\,(i_{r-1}\, i_{r-2})\ \dots\ (i_3\, i_2)(i_2\, i_1)$$

transpozisyonlarının (uzunluğu 2 olan devir) bir çarpımı olarak yazılabilir. O halde S_n yarıgrubunun her elemanı transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir.

$\alpha = (123 \cdots n)$ ve $\beta = (12)$ olsun. α^n elemanının birim permütasyon olduğunu biliyoruz. O zaman $1 \leq i \leq n$ için

$$\alpha^{n-i}\beta\alpha^i = \alpha^n\alpha^{-i}\beta\alpha^i = (\alpha^{-1})^i\beta\alpha^i$$

olur. $\alpha = (123 \cdots n)$ ise $\alpha^{-1} = (n \;\; n-1 \;\; \cdots 2 \; 1)$ olduğunu biliyoruz.

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = (n \, n-1 \ldots 21)\,(12)(12 \ldots n) = \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix} = (23)$$

$$(\alpha^{-1})^2\beta\alpha^2 = \alpha^{-1}(\alpha^{-1}\beta\alpha)\alpha = \alpha^{-1}(23)\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix} = (34)$$

$$\vdots$$

$$(\alpha^{-1})^{n-2}\beta\alpha^{n-2} = (n-1 \;\; n)$$

elde edilir. Böylece $(12), (23), (34), \ldots, (n-1 \;\; n) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olur.

Teorem 2.5.10. $n \geq 3$ için $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ ve $\text{rank}(S_n) = 2$ olur.

İspat: $i, j \in X_n$ için $i \neq j$ olsun. $(ij) = (ji)$ olduğundan $i < j$ kabul edebiliriz. Eğer $j = i + 1$ ise $(i \;\; i+1) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğunu yukarıda gösterdik. $|j - i| > 1$ olduğunu kabul edebiliriz.

$$(ij) = (i \; i+1)(i+1 \;\; i+2) \ldots (j-2 \;\; j-1)(j-1 \;\; j) \ldots (i+1 \;\; i+2)(i \;\; i+2)$$

olup $(ij) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olur. Herhangi bir permütasyon $\lambda \in S_n$, transpozisyonlarının çarpımı olarak yazılabildiğinden $\lambda \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olur. O halde $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ elde edilir.

S_n devirli olmadığından S_n nin herhangi bir doğuray kümesi, en az iki elemanlıdır. S_n nin $\{\alpha, \beta\}$ iki elemanlı bir doğuray kümesi olduğundan $\text{rank}(S_n) = 2$ olur. □

$\text{rank}T_n \geq 3$ olmalıdır. Çünkü $\text{rank}(S_n) = 2$ ve $T_n \setminus S_n \neq \emptyset$ dir. $\text{rank}T_n = 3$ olduğunu gösterelim. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix} = \|12\|$ olsun. Ayrıca $\theta_{i,j}$ dönüşümünü

$$\theta_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots i \ldots & j \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots j \ldots & j \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{cases} j, & x = i \\ x, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $\theta_{i,j} = \theta$ olduğuna dikkat edelim. $\forall i, j \geq 3$ için

$$(1\,i)\circ\theta\circ(1\,i)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & i-1 & 2 & i+1 & \dots & n\end{pmatrix}=\theta_{i,2}$$

$$(2\,j)\circ\theta\circ(2\,j)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n\\ j & 2 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n\end{pmatrix}=\theta_{1,j}$$

$$(1\,i)\circ(2\,j)\circ\theta\circ(2\,j)\circ(1\,i)=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n\\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n\end{pmatrix}=\theta_{i,j}$$

elde edilir. Böylece $\theta_{i,j}\in\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$ olur.

Teorem 2.5.11. $n\geq 3$ için $T_n=\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$ ve $\operatorname{rank}(T_n)=3$ dir.

İspat: Herhangi bir $a^*\in T_n$ alalım. $|\operatorname{im}(a^*)|=n$ ise $a^*\in S_n$ olup $a^*\in\langle\alpha,\beta\rangle$ dir. $|\operatorname{im}(a^*)|\leq n-1$ ise $z\in X_n\setminus\operatorname{im}(a^*)$ olacak şekilde en az bir $z\in X_n$ vardır. Ayrıca $|\operatorname{im}(a^*)|<n$ olup a^* birebir değildir. O halde a^* birebir değilse $ia^*=ja^*$ olacak şekilde bir $i\neq j$ olmak üzere (ij) çifti vardır. $a^\wedge: X_n\to X_n$ dönüşümü $\forall x\in X_n$ için

$$xa^\wedge=\begin{cases} z, & x=i\\ xa^*, & x\neq i\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $ia^*=ja^*$ olup $a^*=\theta_{i,j}\,a^\wedge$ elde edilir.

Ayrıca $|\operatorname{im}(a^\wedge)|=|\operatorname{im}(a^*)|+1$ dir. Eğer $a^\wedge\in S_n$ ise

$$\theta_{i,j}\,a^\wedge=a^*\in\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$$

elde edilir. $a^\wedge\notin S_n$ ise benzer şekilde $a^{\wedge\wedge}$ tanımlanırsa

$$\left|\operatorname{im}\left(a^{\wedge\wedge}\right)\right|=|\operatorname{im}(a^\wedge)|+1 \text{ ve } a^\wedge=\theta_{k,l}\,a^{\wedge\wedge}$$

olacak şekilde $k,l\in X_n$ ve $a^{\wedge\wedge}\in T_n$ vardır. Görüntü kümesinin eleman sayısı her defasında 1 arttığından sonlu adım sonunda

$$a^*=\theta_{i,j}\,\theta_{k,l}\dots\theta_{p,q}\,a^{\wedge\dots\wedge}\in\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$$

olduğu görülür. Herhangi bir $a^*\in T_n$ için $a^*\in\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$ olup $T_n=\langle\alpha,\beta,\theta\rangle$ dir. $\operatorname{rank}(S_n)=2$, $T_n\neq S_n$ ve $S_n\subseteq T_n$ olup $\operatorname{rank}T_n\geq 3$ olmalıdır. O halde T_n yarıgrubunun 3 elamanlı bir doğuray kümesi $\{\alpha,\beta,\theta\}$ mevcut olduğundan $\operatorname{rank}T_n=3$ elde edilir. □

Şimdi $ST_n = Sing_n = T_n \setminus S_n$ için doğuray kümesi bulalım. $a \in ST_n$ ise $|\mathrm{im}(a)| \leq n-1$ dir. $K^*_{n,r} = \{\alpha \in T_n : |\mathrm{im}(a)| = r\}$ olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $K^*_{n,n} = S_n$ ve $\bigcup_{r=1}^{n-1} K^*_{n,r} = ST_n$ olur.

Önerme 2.5.12. Eğer bir $X \subseteq ST_n$ alt kümesi için $K^*_{n,n-1} \subseteq \langle X \rangle$ ise $ST_n = \langle X \rangle$ olur.

İspat: Bir $X \subseteq ST_n$ alt kümesi için $K^*_{n,n-1} \subseteq \langle X \rangle$ olsun. Herhangi bir $a \in ST_n$ elemanını alalım. $ST_n = \bigcup_{r=1}^{n-1} K^*_{n,r}$ olup $a \in ST_n$ elemanı $a \in K^*_{n,r}$ olacak şekilde $1 \leq r \leq n-2$ vardır. ($r = n-1$ olsa $a \in K^*_{n,n-1} \subseteq \langle X \rangle$ olduğundan ispat biter.)

O zaman bir $1 \leq r \leq n-2$ için $a \in K^*_{n,r}$ olduğundan $i \neq j$ olmak üzere bir $(ij) \in X_n \times X_n$ çifti için $ia = ja$ ve bir $y \in X_n \setminus \mathrm{im}(a)$ vardır.

Teorem 2.5.11. in ispatında bahsedildiği üzere $a^{\wedge}: X_n \to X_n$ dönüşümü $\forall x \in X_n$ için

$$xa^{\wedge} = \begin{cases} y, & x = i \\ xa, & x \neq i \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha = \theta_{i,j} a^{\wedge}$ ve $|\mathrm{im}(a^{\wedge})| = |\mathrm{im}(a)| + 1$ olur. Benzer şekilde bu işleme $a^{\wedge \cdots \wedge} \in K^*_{n,n-1}$ olana kadar devam edilirse

$$a = \theta_{i,j}\theta_{k,l} \dots \theta_{p,q}\, a^{\wedge \cdots \wedge}$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse $\theta_{i,j}\theta_{k,l} \dots \theta_{p,q} \in K^*_{n,n-1}$ ve $a^{\wedge \cdots \wedge} \in K^*_{n,n-1}$ olup $a \in \langle K^*_{n,n-1} \rangle$ elde edilir. $a \in \langle K^*_{n,n-1} \rangle \subseteq \langle X \rangle$ olur. O halde $a \in \langle K^*_{n,n-1} \rangle \subseteq \langle X \rangle$ olup $a \in \langle X \rangle$ olur. Böylece herhangi bir $a \in ST_n$ elemanını için olup $ST_n \subseteq \langle X \rangle$ olur. Ayrıca $X \subseteq ST_n$ alt kümesi için $\langle X \rangle \subseteq ST_n$ olduğu açıktır. O halde $ST_n = \langle X \rangle$ elde edilir.□

Böylece ST_n nin herhangi bir X alt kümesi, görüntüsü $n-1$ elemanlı olan dönüşümleri doğuruyorsa bu X kümesi ST_n kümesini de doğurur.

Sonlu yarıgruplarda H sınıfları ve J sınıfları aynı olduğunu hatırlayalım. Herhangi bir D sınıfını $|\mathrm{im}(a)| = r$ ise D_r ile gösterdiğimizi hatırlarsak D_n sınıfının elemanı olan $\alpha \in D_n$ için $|\mathrm{im}(a)| = n$ olacağından simetrik grup S_n grubunun elemanlarından oluşur.

D_1 sınıfının her α elemanı için $|\mathrm{im}(a)| = 1$ olacağından sabit dönüşümlerin kümesidir.

D_{n-1} sınıfının her α elemanı için $|\mathrm{im}(a)| = n-1$ olacağından $1a = 2a$ olması durumunda [1,2] ifadesini kullanırsak $\binom{n}{2}$ tane R sınıfı olur ve aşağıdaki gibi D_{n-1} tablosunu elde ederiz.

D_{n-1}

R sınıfları

L sınıfları

	[1,2]	[1,3]	...	$[n-1,n]$
$\mathrm{im}\alpha = \{1,2,\dots,n-1\}$				
$\mathrm{im}\alpha = \{1,2\dots n-2,n\}$				
$\vdots$				
$\mathrm{im}\alpha = \{2,3,\dots,n\}$				

Şekil 2.5. D_{n-1} sınıfı

Tanım 2.5.13. $\alpha \in T_n$ olmak üzere, $\mathrm{Fix}(\alpha)$, $\mathrm{Shift}(\alpha)$, $\mathrm{Defect}(\alpha)$ kümeleri ve eleman sayıları sırasıyla,

$$\mathrm{Fix}(\alpha) = \{x \in \mathrm{dom}(\alpha) : x\alpha = x\}, \qquad \mathrm{fix}\alpha = |\mathrm{Fix}(\alpha)|$$
$$\mathrm{Shift}(\alpha) = \{x \in \mathrm{dom}(\alpha) : x\alpha \neq x\}, \qquad \mathrm{shift}(\alpha) = |\mathrm{Shift}(\alpha)|$$
$$\mathrm{Defect}(\alpha) = X_n \setminus \mathrm{im}(\alpha), \qquad \mathrm{defect}(\alpha) = |\mathrm{Defect}(\alpha)|$$

olarak tanımlanır. Bazen kısaca $\mathrm{Defect}(\alpha)$ yerine $\mathrm{Def}\alpha$ ve $\mathrm{defect}(\alpha)$ yerine kısaca $\mathrm{def}\alpha$ olarak yazacağız.

Teorem 2.5.14 ve Teorem 2.5.16 ilk ispatı J.M. Howie (1966) çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 2.5.14. Her $\alpha \in D_{n-1}$ elemanı ($n \geq 2$) defecti (noksanlığı) 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılabilir.

İspat: $\alpha \in D_{n-1}$ ve $\mathrm{shift}(\alpha) = r$ olsun. $n = 2$ ise $D_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ olup D_1 kümesindeki elemanların hepsi idempotent olduğundan sonuç açıktır. $n \geq 3$ olsun. Ayrıca $r = 1$ ise $\alpha \in E(D_{n-1})$ olur. Yani $r = 1$ ise α, D_{n-1} kümesinde bir idempotent eleman olur. O zaman $r \geq 2$ olsun.

Genelliği bozmadan α elemanının r tane shift elemanı olsun.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Dikkat edilirse $\forall\ 1 \leq i \leq r$ için $\alpha_i \neq i$ olur. $\alpha \in D_{n-1}$ olduğundan $\mathrm{defect}(\alpha) = |\mathrm{Defect}(\alpha)| = 1$ olacağından $\mathrm{Defect}(\alpha) = \{\mathrm{z}\}$ olacak şekilde bir $z \in X_n$ elemanı vardır. O zaman $z \in \{1,2,\dots,r\}$ olur. O halde 4 farklı durum vardır ve bunlar aşağıdaki gibidir.

I. Her $1 \leq\ i \leq r$ için $\alpha_i \in \{1,2,\dots,r\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 \notin \{1,2\}$, z $\notin \{1,2\}$

II. Her $1 \leq i\ \leq r$ için $\alpha_i \in \{1,2,\dots,r\}$, $\alpha_1 = \alpha_2 \notin \{1,2\}$, $z = 1$

III. $\alpha_r = r+1$, $z \in \{1,2,\dots,r-1\}$

IV. $\alpha_r = r+1$, $z = r$.

I. Durum :

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots n \\ 1 & 1 & 3 \dots n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & 2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\theta\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \alpha$$

elde edilir.

II. Durum:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 1 & \alpha_3 & \dots & a_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\beta\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \alpha$$

olur.

III. durum:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & r & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\theta\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_{r-1} & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \alpha$$

olur.

IV. Durum:

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 2 \dots & r-1 & r+1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ r & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 2 \dots & r-1 & \alpha_1 & r+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanırsa

$$\theta\beta\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots r-1 & r & r+1 \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \alpha_{r-1} & r+1 & r+1 \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{r-1} & \alpha_r & r+1 & \dots & n \end{pmatrix} = \alpha$$

elde edilir.

Özetle, buradaki 4 durumda da θ, ξ elemanları D_{n-1} de idempotent elemanlar, $\beta \in D_{n-1}$ ve shift$\beta = r - 1$ ($|\text{Fix}\beta| = |\text{Fix}\alpha| + 1$) olmak üzere

$$\alpha = \theta\beta\,,$$
$$\alpha = \beta\theta,$$
$$\alpha = \theta\beta,$$
$$\alpha = \theta\beta\xi$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Şayet shift$\beta = r - 1 = 1$ ise β idempotent olup α defecti 1 olan idempotentlerin çarpımı olarak yazılmış olur. Eğer $\text{shift}(\beta) = r - 1 \geq 2$ ise benzer adımlar β için yapılarak; her defasında $\text{shift}(\alpha)$ bir azalacağından sonuç elde edilinceye kadar devam edilir. □

S bir yarıgrup olmak üzere S deki tüm idempotent elemanların kümesi $E(S)$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

Tanım 2.5.15. S bir yarıgrup olsun. Eğer bir S yarıgrubu idempotentler tarafından doğuruluyorsa S yarıgrubuna **idempotent doğuraylı yarıgrup** denir ve bu durumda kısaca $\boldsymbol{IG}$ **-yarıgrup** yazılır.

Teorem 2.5.16. Her sonlu yarıgrup bir sonlu regüler IG-yarıgrup içine gömülebilir.

İspat: S sonlu bir yarıgrup olsun. S^1 kümesi de S ye eğer gerekli ise bir birim eleman eklenerek elde edilen yarıgrup olsun. X , S^1 kümesini içeren en az iki tane ekstra elemanı olan sonlu bir küme olsun.

$X \setminus S^1$ deki herhangi bir elemanı seçip sabitleyelim ve kabul edelim ki bu eleman z olsun. $\forall s \in S$ için ρ_s dönüşümünü $\rho_s : X \to X$ olmak üzere $\forall\, x \in X$ için,

$$x\rho_s = \begin{cases} xs, & x \in S^1 \\ z, & x \in X \setminus S^1 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\mathrm{def}(\rho_s) \geq 1$ dir. Dikkat edilirse $\rho_s \in ST_x = T_x \setminus S_x \subseteq T_x$ olur.

$$\varphi : S \to ST_x$$

dönüşümünü $\forall s \in S$ için $s \to \rho_s$ olarak tanımlanırsa φ dönüşümü, birebir (1-1) bir homomorfizm olur. Böylece S kümesinden ST_x kümesine birebir bir homomorfizm mevcut olduğundan S kümesi ST_x kümesinin içine gömülebilir.

Teorem 2.5.14 dan dolayı ST_n idempotent doğuraylı olup ST_n sonlu IG yarıgruptur. ST_n nin regüler olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\alpha \in ST_n$ alalım. ξ dönüşümü $t \in \mathrm{im}(\alpha\xi)$ ve $\xi : X \to X$ olmak üzere

$$X\xi = \begin{cases} x\alpha^{-1}, & x \in X\alpha \\ t, & x \in X \setminus X\alpha \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $\xi \in ST_n$, $\alpha\xi\alpha = \alpha$ olup $\alpha \in ST_n$ elemanı regülerdir. ST_n nin her elemanı regüler olup ST_n regülerdir. ST_n, sonlu regüler IG-yarıgruptur. O halde her sonlu S yarıgrubu bir sonlu regüler IG -yarıgrup ST_n içine gömülebilir. □

Önerme 2.5.17. $\alpha, \beta \in T_n$ ise $\mathrm{def}(\alpha\beta) \geq \mathrm{def}(\alpha)$, $\mathrm{def}(\beta)$ olur.

İspat: $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta) \Rightarrow \mathrm{def}(\alpha\beta) \geq \mathrm{def}(\alpha)$ olduğu açıktır. $\alpha, \beta \in T_n$ elemanlarını

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix}$$
$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{pmatrix}$$

olarak gösterelim. Bu durumda

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{pmatrix}$$

olur. Örneğin; x_1 , x_2 aynı B_1 kümesine ait ise

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 \cup A_2 & A_2 & \dots & A_m \\ x_1\beta & x_3\beta & \dots & x_m\beta \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda $\underbrace{(A_1 \times A_2) \cup (A_1 \times A_2)}_{\alpha \text{ daki durum}} \subseteq \underbrace{(A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2)}_{\alpha\beta \text{ daki durum}}$ olur.

Böylece

$$\ker(\alpha) \subseteq \ker(\beta) \Rightarrow |\mathrm{im}(\alpha\beta)| \leq |\mathrm{im}(\alpha)| \Rightarrow \mathrm{def}(\alpha\beta) \geq \mathrm{def}(\alpha)$$

elde edilir. □

Önerme 2.5.18. $\alpha \in T_n$ ve $\mathrm{def}(\alpha) = 1$ olsun. Eğer $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$ olacak şeklide defecti 1 olan α_i dönüşümleri mevcut ise $\mathrm{def}(\alpha) = \mathrm{def}(\alpha_m)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\alpha_1)$ olur.

İspat: $\alpha \in T_n$ ve $\mathrm{def}(\alpha) = 1$ olsun. $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$ olacak şeklide defecti 1 olan α_i dönüşümlerinin çarpımı olarak yazılabiliyor olsun. $(i, j) \in \ker(\alpha_1)$ alalım. Eğer $(i, j) \in \mathrm{Ker}\alpha_1$ ise

$$i\alpha_1 = j\alpha_1 \Rightarrow (i\alpha_1)\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_m = (j\alpha_1)\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_m$$
$$\Rightarrow i\alpha = j\alpha \Rightarrow (i, j) \in \ker(\alpha)$$

olur. O halde $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\alpha)$ elde edilir. $\mathrm{def}(\alpha_1) = \mathrm{def}(\alpha) \Rightarrow |\mathrm{im}(\alpha_1)| = |\mathrm{im}(\alpha)| = n - 1$ olur. O halde $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\alpha)$ ve $|\mathrm{im}(\alpha_1)| = |\mathrm{im}(\alpha)|$ olup $\ker(\alpha_1) = \ker(\alpha)$ elde edilir.

$$X_n\alpha = X_n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m) = \big(X_n(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{m-1})\big)\alpha_m \subseteq X_n\alpha_m$$

olduğundan

$$\mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_m)$$

elde edilir. O halde $\mathrm{im}(\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\alpha_m)$ olduğundan $\mathrm{def}(\alpha_m) \subseteq \mathrm{def}(\alpha)$ olur. Böylece $\mathrm{def}(\alpha) = \mathrm{def}(\alpha_m) = 1$ ve $\mathrm{def}(\alpha_m) \subseteq \mathrm{def}(\alpha)$ olup $\mathrm{def}(\alpha_m) = \mathrm{def}(\alpha)$ elde edilir. □

P_n nin doğuraylarını bulalım.

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\,3 & \dots & n \\ - & 2\,3 & \dots & n \end{pmatrix} \in P_n$ olsun. O zaman $\forall\ 2 \leq i \leq n$ için

$$(1\ i)\ \xi_1(i\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & i-1 & i & i+1 & \dots n \\ 1 & 2 \dots & i-1 & - & i+1 & \dots n \end{pmatrix} = \xi_i$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 2.5.19. rank $(P_n) = 4$ dür.

İspat: $\alpha \in P_n$ olsun. $\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m & - \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_m & A_{m+1} \end{pmatrix}$, $\theta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m & A_{m+1} \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_m & - \end{pmatrix}$ olarak tanımlanırsa $\theta\beta = \alpha$ elde edilir. (Dikkat edilirse $\forall x \in A_1 \cup \ldots \cup A_m$ için $x\theta = x$ dir.)

Eğer $A_{m+1} = \emptyset$ ise $\theta = 1_{X_n}$ olup $\beta = \alpha$ olur. Eğer $A_{m+1} \neq \emptyset$ ise yani $A_{m+1} = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ ise, $\theta = \xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_r}$ olur. Böylece $\xi_{i_1}\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_r}\beta = \alpha$ elde edilir. $\alpha_1 = (1\ 2)$, $\alpha_2 = (1\ 2 \cdots n)$, $\alpha_3 = \|12\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ ve $\alpha_4 = \xi_1$ olsun. Dikkat edilirse $\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ ve $\xi_i \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \rangle$ olup $\alpha \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ olur. O zaman $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ alınırsa $P_n = \langle \mathrm{A} \rangle$ elde edilir. $|A| = 4$ olup rank$P_n \leq 4$ dir. Ayrıca $T_n \leq P_n$, $SP_n = P_n \setminus T_n \trianglelefteq P_n$ ve rank$T_n = 3$ olup rank$P_n \geq 3 + 1 = 4$ tür. Yani rank$P_n \leq 4$ ve rank$P_n \geq 4$ olduğundan dolayı rank$P_n = 4$ olarak elde edilir. □

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARI

Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları hakkında yapılan tüm çalışmaları derleyeceğiz. Herhangi bir $X \neq \emptyset$ kümesinden yine kendisine tanımlı tüm dönüşümlerin kümesinin $T(X)$ ya da T_X olarak gösterilir. $T(X)$ regüler yarıgrup olduğundan her yarıgrubun $T(X)$ yarıgrubunun içine gömülebileceğini hatırlayalım. X ve Y iki küme olmak üzere X kümesinden Y kümesine tanımlı tüm dönüşümlerin kümesini $T(X,Y)$ ile gösterelim. Ayrıca aksi belirtilmedikçe $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ olmak üzere X, Y iki ayrık küme ve $\theta: Y \to X$ herhangi bir dönüşüm olarak kabul edeceğiz.

3.1. Genelleştirilmiş Dönüşüm Yarıgrubu

Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları hakkında Symons (1975) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

Tanım 3.1.1. $\alpha, \beta \in T(X,Y)$ olmak üzere $T(X,Y)$ kümesi üzerindeki çarpmayı

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

olarak tanımlarsak $(T(X,Y),*)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba **genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu** ve "$*$" işlemine **sandviç işlemi** denir. Ayrıca genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu $(T(X,Y),*)$ yarıgrubu $T(X,Y;\theta)$ ya da $GT(X,Y;\theta)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $X = Y$ ise o zaman $T(X,Y;\theta)$ yerine $T(X;\theta)$ yazılır. Eğer $\theta \in T(X)$ dönüşümü X üzerinde birim dönüşüm ise $T(X;\theta) = T(X)$ olur. Genel olarak $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun regüler olmadığını Magill (1966) çalışmasında gösterdi.

Tanım 3.1.2. S bir yarıgrup olmak üzere α, S yarıgrubunun bir sabit elemanı olsun. $\forall x, y \in S$ için $*_\alpha$ sandviç işlemi

$$x *_\alpha y = x \cdot \alpha \cdot y$$

olarak tanımlanırsa $(S,*_\alpha)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba $\boldsymbol{\alpha}$ **elemanına göre** $\boldsymbol{S}$ **yarıgrubunun varyantı** denir ve S^α ile gösterilir.

Tanım 3.1.3. $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ iki ayrık küme ve $Z = X \cup Y$ olmak üzere $T(Z)$ kümesi Z üzerindeki tüm dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrup olsun. Ayrıca

$$T(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

olarak tanımlayalım. $T(Z,Y)$ kümesi, $T(Z)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olup bu $T(Z,Y)$ alt yarıgrubuna **kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu (semigroups of transformation with restricted range)** denir.

$T(Z,Y)$ yarıgrubu Symons (1975a,1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z,Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir.

$$F(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) = Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z,Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgrubudur.

$S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı, $2 \leq n \leq m-1$ olmak üzere

$$S(m,1) = S(m,m) = 1$$
$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + n.S(m-1,n)$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilecek olursa m elemanlı bir kümeden n elemanlı bir kümeye $n!\,S(m,n)$ tane örten fonksiyon vardır.

$T(X,Y;\theta)$ olmak üzere $a,\beta \in T$ için ℓ, r, d bağıntılarını sırasıyla

- $a\ell\beta \Leftrightarrow \theta a = \theta\beta$
- $ar\beta \Leftrightarrow a\theta = \beta\theta$
- $ad\beta \Leftrightarrow \theta a\theta = \theta\beta\theta$

olarak tanımlansın. Herhangi bir $\alpha\ell\beta$ alalım. $\alpha\ell\beta \Leftrightarrow \theta\alpha = \theta\beta \Leftrightarrow (\theta\alpha)\theta = (\theta\beta)\theta$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. Benzer şekilde $\alpha r\beta \Leftrightarrow \alpha\theta = \beta\theta \Leftrightarrow \theta(\alpha\theta) = \theta(\beta\theta)$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. O halde $\ell \subseteq d$ ve $r \subseteq d$ elde edilir.

Lemma 3.1.4. d, ℓ, r bağıntıları $T(X,Y;\theta)$ üzerinde birer kongrüanstır.

İspat: Kongrüansın sağ ve sol uyumlu denklik bağıntısı olduğunu hatırlayalım. d, ℓ, r bağıntılarının denklik bağıntısı olduğu açıktır. d, ℓ, r bağıntılarının sağ ve sol uyumlu olduğunu gösterelim.

Öncelikle d bağıntısının sağ ve sol uyumlu olduğunu gösterelim. $\alpha d\beta$ ve $\forall\, \delta \in T(X,Y;\theta)$ için, $\delta * \alpha\ d\ \delta * \beta$ olduğu gösterilirse d nin sol uyumlu olduğunu göstermiş oluruz. d bağıntısının tanımından $\alpha d\beta \Leftrightarrow \theta\alpha\theta = \theta\beta\theta$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\forall\, \delta \in T(X,Y;\theta)$ için

$$\delta \circ (\theta \circ \alpha \circ \theta) = \delta \circ (\theta \circ \beta \circ \theta)$$

olur. $\delta * \alpha\ d\ \delta * \beta$ olduğunu göstermek için $\theta(\delta * \alpha)\theta = \theta(\delta * \beta)\theta$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\delta \circ (\theta \circ \alpha \circ \theta) = \delta \circ (\theta \circ \beta \circ \theta)$ olduğundan

$$\theta(\delta * \alpha)\theta = \theta(\delta\theta\alpha)\theta = \theta(\delta\theta\alpha\theta) = \theta(\delta\theta\beta\theta) = \theta(\delta\theta\beta)\theta = \theta(\delta * \beta)\theta$$

olup $\theta(\delta * \alpha)\theta = \theta(\delta * \beta)\theta$ elde edilir. O halde $\delta * \alpha \; d \; \delta * \beta$ olur. Böylece d, sol uyumlu bir denklik bağıntısıdır. Benzer şekilde $\alpha d \beta \Rightarrow \alpha * \delta \; d \; \beta * \delta$ olduğunu gösterelim. $\alpha d \beta \Rightarrow \theta\alpha\theta = \theta\beta\theta$ olup $\forall \; \delta \in T(X, Y; \theta)$ için $(\theta\alpha\theta)\delta = (\theta\beta\theta)\delta$ olur. Böylece

$$\theta(\alpha * \delta)\theta = \theta(\alpha\theta\delta)\theta = (\theta\alpha\theta\delta)\theta = (\theta\beta\theta\delta)\theta = \theta(\beta * \delta)\theta$$

olup $\alpha * \delta \; d \; \beta * \delta$ elde edilir. Böylece d sağ uyumlu denklik bağıntısıdır. O halde d hem sağ hem de sol uyumlu denklik bağıntısı olup d uyumlu denklik bağıntısı olacağından d bir kongrüanstır.

ℓ bağıntısının sağ ve sol uyumlu olduğunu gösterelim. $\alpha\ell\beta$ olsun. $\alpha\ell\beta \Leftrightarrow \theta\alpha = \theta\beta$ olur. $\forall \; \delta \in T(X, Y; \theta)$ için $\delta\theta\alpha = \delta\theta\beta$ olduğu açıktır. $\delta * \alpha)\ell(\delta * \beta)$ olduğunu gösterirsek ℓ denklik bağıntısının sol uyumlu olduğunu göstermiş oluruz. $\delta * \alpha \; \ell \; \delta * \beta$ olduğunu göstermek için $\theta(\delta * \alpha) = \theta(\delta * \beta)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\theta(\delta * \alpha) = \theta(\delta\theta\alpha) = \theta(\delta\theta\beta) = \theta(\delta * \beta)$$

olup $\delta * \alpha \; \ell \; \delta * \beta$ olacağından ℓ sol uyumludur. Benzer şekilde $\alpha * \delta \; \ell \; \beta * \delta$ olduğunu gösterirsek ℓ denklik bağıntısının sağ uyumlu olduğunu göstermiş oluruz.

$$\theta(\alpha * \delta) = \theta(\alpha\theta\delta) = (\theta\alpha)\theta\delta = (\theta\beta)\theta\delta = \theta(\beta\theta\delta) = \theta(\beta * \delta)$$

olup $\alpha * \delta \; \ell \; \beta * \delta$ olacağından ℓ sağ uyumludur. ℓ sağ ve sol uyumlu denklik bağıntısı olup ℓ bir kongrüanstır.

Son olarak r bağıntısının sağ ve sol uyumlu olduğunu gösterelim. $\alpha r \beta$ alalım. $\alpha r \beta \Leftrightarrow a\theta = \beta\theta$ olur. $\forall \; \delta \in T(X, Y; \theta)$ için $(\delta * \alpha) r (\delta * \beta)$ olduğunu gösterelim.

$$(\delta * \alpha)\theta = (\delta\theta\alpha)\theta = \delta\theta(\alpha\theta) = \delta\theta(\beta\theta) = (\delta\theta\beta)\theta = (\delta * \beta)\theta$$

olup r sağ uyumludur. Benzer şekilde $\alpha * \delta \;\; r \; \beta * \delta$ olduğunu gösterelim.

$$(\alpha * \delta)\theta = (\alpha\theta\delta)\theta = (\alpha\theta)\delta\theta = (\beta\theta)\delta\theta = (\beta\theta\delta)\theta = (\beta * \delta)\theta$$

olup $\alpha * \delta \; r \; \beta * \delta$ olacağından r sağ uyumludur. r, sağ ve sol uyumlu bir denklik bağıntısı olup r bir kongrüanstır. □

ℓ ve r bağıntılarının daha pratik bir yorumu şu şekilde verilebilir. $\theta : Y \to X$ olmak üzere $\forall\, \alpha, \beta \in T$ için $T(X, Y; \theta)$ olsun. O zaman $\alpha \ell \beta$ olmasının anlamı $\theta\alpha = \theta\beta$ ve $\forall y \in Y$ için $(y\theta)\alpha = (y\theta)\beta$ olacağından $Y\theta$ üzerinde α ile β aynı etkiye sahiptir.

$\alpha r \beta$ olmasının anlamı $\alpha\theta = \beta\theta \Rightarrow \forall x \in X$ için $(x\alpha)\theta = (x\beta)\theta$ olacağından α ve β, X kümesinin her bir elemanını θ nın aynı parçalanış sınıfına götürür.

$\alpha d \beta$ olmasının anlamı $\theta\alpha\theta = \theta\beta\theta \Rightarrow \forall y \in Y$ için $y(\theta\alpha\theta) = y(\theta\beta\theta)$ olacağından α ve β , $Y\theta$ kümesinin her bir elemanını θ nın aynı parçalanış sınıfına götürür.

Böylece her d sınıfı $Y\theta \to Y \setminus \theta \circ \theta^{-1}$ eşlemesi şeklinde olup $|Y\theta| = |Y \setminus \theta \circ \theta^{-1}|$ olacağından $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubu $|Y\theta|^{|Y\theta|}$ tane d sınıfına, $|Y|^{|Y\theta|}$ tane ℓ sınıfına ve $|Y\theta|^{|X|}$ tane r sınıfına sahiptir.

Teorem 3.1.5. ℓ ve r kongrüansları değişmeli ve $d = \ell \circ r = r \circ \ell = \ell \vee r$ olur.

İspat: $d = \ell \circ r$ olduğunu gösterelim.

$(\Rightarrow)$ $\ell \circ r \subseteq d$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $(\alpha, \beta) \in \ell \circ r$ elemanını alalım. Yani $\alpha(\ell \circ r)\beta$ olsun. $(\alpha, \beta) \in \ell \circ r$ olup $(\alpha, \delta) \in \ell$ ve $(\delta, \beta) \in r$ olacak şekilde $\delta \in T(X, Y; \theta)$ vardır. ℓ ve r bağıntılarının tanımından

$$(\alpha, \delta) \in \ell \Rightarrow \theta\alpha = \theta\delta$$
$$(\delta, \beta) \in r \Rightarrow \delta\theta = \beta\theta$$

olur. $\theta\alpha\theta = (\theta\alpha)\theta = (\theta\delta)\theta = \theta(\delta\theta) = \theta(\beta\theta) = \theta\beta\theta$ olacağından $(\alpha, \beta) \in d$ yani $\alpha d \beta$ elde edilir. Böylece $\ell \circ r \subseteq d$ olur.

$(\Leftarrow)$ $d \subseteq \ell \circ r$ olduğunu gösterelim. $\alpha d \beta$ ise $\theta\alpha\theta = \theta\beta\theta$ olduğunu hatırlayalım. Bu durumda δ dönüşümü $\delta : X \to Y$ olmak üzere

$$x\delta = \begin{cases} x\beta, & x \in Y\theta \text{ ise} \\ x\alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse δ dönüşümünün tanımından $\forall x \in X$ için $x\theta \in Y\theta \subseteq X$ olup

$$(x\theta)\delta = (x\theta)\beta \qquad (1)$$

olduğu görülür. $\delta\theta = \alpha\theta$ olduğunu gösterelim

Eğer $x \in Y\theta$ ise $x = y\theta$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. Böylece $x \in Y\theta$ olup

$$\underbrace{x}_{\in Y\theta}\, \delta\theta = x\beta\theta = y\,\underbrace{\theta\beta\theta}_{\theta\alpha\theta} = \underbrace{y\theta}_{x}\,\alpha\theta = x\alpha\theta$$

olup $\delta\theta = \alpha\theta$ elde edilir.

Eğer $x \notin Y\theta$ ise δ dönüşümünün tanımından $x\delta = x\alpha$ olup $x\delta\theta = x\alpha\theta$ elde edilir. Her iki durumda da $\delta\theta = \alpha\theta$ olur. Böylece

$$\theta\delta = \theta\beta \Rightarrow (\delta, \beta) \in \ell \Rightarrow \delta\ell\beta$$
$$\delta\theta = \alpha\theta \Rightarrow (\delta, \alpha) \in r \Rightarrow \delta r \alpha \Rightarrow \alpha r \delta$$

olur. O halde $\alpha r \delta$ ve $\delta\ell\beta$ olup $(\alpha, \beta) \in \ell \circ r$ yani $\alpha(\ell \circ r)\beta$ elde edilir. Böylece $d \subseteq \ell \circ r$ olur. O halde $d = \ell \circ r$ olduğu ispatlanmış olur.

$$d = d^{-1} = (\ell \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ \ell^{-1} = r \circ \ell$$

elde edilir. Böylece $d = \ell \circ r = r \circ \ell = \ell \vee r$ olur. ℓ ve r değişmeli kongrüanslar olup $\ell \circ r = \ell \vee r$ olur (Clifford ve Preston 1967, Lemma 1.4). □

Green denkliklerini içeren pek çok basit sonuç bu denkliklerin kongrüans olma özelliğinden ve $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ eşitliğinden elde edilmiştir. Clifford ve Preston (1967, Lemma 1.4) çalışmasındaki benzer teoremler mevcut olup ispatsız olarak Green Denklikleriyle ilgili bazı teoremleri yeniden ifade edeceğiz.

Teorem 3.1.6. R bir r-sınıfı ve L de bir ℓ-sınıfı olmak üzere R ile L nin çakışıyor olması için gerek ve yeter koşul R ile L nin aynı d-sınıfı tarafından içeriliyor olmasıdır. □

Teorem 3.1.7. $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubunun herhangi bir r-sınıfı ve ℓ-sınıfının ($*$ a göre) küme çarpımı daima bir d sınıfı tarafından içerilir. □

Bu teoremler herhangi bir yarıgruptaki $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}$ Green denklikleriyle, $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubunun ℓ, r, d denkliklerinin benzerlikleri mevcut olup ayrıca ifade edilebilir. Daha önce yapılan Green Lemma aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$\alpha \in T(X, Y; \theta)$ için L_α ile α yı içeren $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubunun ℓ sınıfını gösterelim. $\beta \in T(X, Y; \theta)$ olmak üzere $G(\alpha, \beta): L_\alpha \to L_\beta$ dönüşümünü, $\delta \in L_\alpha$ için

$$\delta G(\alpha,\beta)/_{Y\theta} = \beta/_{Y\theta}$$
$$\delta G(\alpha,\beta)/_{X - Y\theta} = \delta/_{X - Y\theta}$$

olarak tanımlayalım.

$$L_\alpha = \{\delta \in T(X, Y; \theta) : \ \theta\alpha = \theta\delta\}$$
$$= \left\{\delta \in T(X, Y; \theta) : \ \alpha/_{Y\theta} = \delta/_{Y\theta}\right\}$$

olduğundan $G(\alpha,\beta)$ dönüşümü birebir (1-1) ve örtendir.

Üstelik benzer şekilde $G(\beta,\alpha)$ tanımlanırsa $G(\alpha,\beta)$ ile $G(\beta,\alpha)$ birbirlerinin tersidir. Böylece $|L_\alpha| = |L_\beta|$ olup $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun her ℓ-sınıfının eleman sayısı aynıdır.

Eğer $\alpha r \beta$ ise $G(\alpha,\beta)$ dönüşümü r-sınıflarını korur. $\delta \in L_\alpha$ olsun. $\delta' = \delta G(\alpha,\beta)$ alalım. Eğer $x \in Y\theta$ ise

$$x\delta'\theta = x\underbrace{\delta G(\alpha,\beta)}_{x\in Y\theta}\theta = (x\beta)\theta = x\underbrace{\alpha\theta}_{\alpha r\beta}$$

olur. Ayrıca $x \in Y\theta$ ve $\alpha/_{Y\theta} = \delta/_{Y\theta}$ olduğundan

$$x\delta'\theta = x\alpha\theta = x\delta\theta$$

elde edilir. Eğer $x \notin Y\theta$ ise $x\delta' = x\delta$ olur. O halde $\delta'\theta = \delta\theta$ olup $\delta' r \delta$ elde edilir. Benzer şekilde $G(\beta,\alpha)$ dönüşümü r-sınıflarını korur ve $|H_\alpha| = |H_\beta|$ elde edilir. Böylece aşağıdaki teoreme elde edilir.

Teorem 3.1.8. $T(X,Y;\theta)$ nın tüm l sınıflarının kardinalitesi (eleman sayısı) aynıdır ve bir r-sınıfı tarafından içerilen iki h-sınıfı aynı kardinaliteye sahiptir. □

Clifford ve Preston (1967) çalışmasında bahsettiği (sayfa 55-56) Green bağıntıları ile buradaki bağıntılar paralellik gösterir. Green bağıntılarında olduğu gibi D sınıfı içindeki tüm H sınıfları aynı kardinaliteye sahiptir.

Tanım 3.1.9. S üzerindeki λ bağıntısını "$\forall x \in S$ için $xa = xb$ ise $a\lambda b$" olarak ve ρ bağıntısını "$\forall x \in S$ için $ax = bx$ ise $a\rho b$" olarak tanımlayalım.

Eğer δ, $\lambda \cup \rho$ tarafından doğrulan kongrüans ise $S/_\lambda$ sol indirgemeli, $S/_\rho$ sağ indirgemeli ve $S/_\delta$ ise hem sağ hem sol indirgemelidir. $T = T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunda $\lambda = \ell$, $\rho = r$ ve $\delta = d$ olduğu açıktır.

$T = T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun sol (sağ) indirgemeli olması için gerek ve yeter koşul her ℓ (r) sınıfın eleman sayısının 1 olması gerektiğini biliyoruz. Ayrıca her ℓ (r) sınıfın eleman sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul θ dönüşümünün örten (θ dönüşümünün birebir) olmasıdır.

Teorem 3.1.10. $T = T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu için aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) $T = T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu zayıf indirgemelidir,

(ii) Her bir h-sınıfı tek eleman içerir,

(iii) θ dönüşümü ya birebirdir ya da örtendir. □

Örnek 3.1.11. $X = Y = \{1,2,3\}$ olsun. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} = (i\ j\ k)$ şeklinde yazacağız. $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 2\ )$ olmak üzere $T = T(X,Y;\theta) = T(X,\theta)$ yarıgrubu için ℓ, r, d sınıflarını hesaplayalım. Yukarıdaki bilgiler doğrultusunda $x\theta = \{1,2\}$ olup $T = T(X,\theta)$ yarıgrubunun $|x\theta|^{|x\theta|} = 2^2 = 4$ tane d-sınıfı vardır. Her d-sınıfı $\theta: Y \to X$ için $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\theta^{-1} & 2\theta^{-1} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{1\} & \{2,3\} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Y\theta = \{1,2\}$ olmak üzere $\Delta: Y\theta \to \{i\theta^{-1}\}$ yani $\Delta: \{1,2\} \to \{\{1\},\{2,3\}\}$ dönüşümüyle hesaplanır. Burada $\alpha d \beta \Leftrightarrow x\alpha, x\beta \in x\Delta$, $x \in X\theta$ olduğunu biliyoruz.

$\Delta = \{1,2\} \to \{\{1\},\{2,3\}\}$ olmak üzere ℓ, r, d sınıfları aşağıdaki gibidir.

d_1: $1 \to \{1\}$ ve $2 \to \{2,3\}$ için

	$1 \to 1$ $2 \to 2$	$1 \to 1$ $2 \to 3$
$3 \to \{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
$3 \to \{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d_2: $1 \to \{2,3\}$ ve $2 \to \{1\}$ için

	$1 \to 2$ $2 \to 1$	$1 \to 3$ $2 \to 1$
$3 \to \{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$3 \to \{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d_3: $1 \to \{1\}$ ve $2 \to \{1\}$ için

	$1 \to 1$ $2 \to 1$
$3 \to \{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$3 \to \{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d_4: $1 \to \{2,3\}$ ve $2 \to \{2,3\}$ için

	$1 \to 2$ $2 \to 2$	$1 \to 2$ $2 \to 3$	$1 \to 3$ $2 \to 2$	$1 \to 3$ $2 \to 3$
$3 \to \{2,3\}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&3\end{pmatrix}$
$3 \to \{1\}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{pmatrix}$

Şekil 3.1. $T(X,\theta)$ yarıgrubunun d sınıfı

Dikkat edilirse ℓ, r, d sınıflarının sayısı aşağıdaki gibidir.

d sınıfları	ℓ sınıfı sayısı	r sınıfı sayısı
$d_1: \begin{cases} 1 \to \{1\} \\ 2 \to \{2,3\} \end{cases}$	2	2
$d_2: \begin{cases} 1 \to \{2,3\} \\ 2 \to \{1\} \end{cases}$	2	2
$d_3: \begin{cases} 1 \to \{1\} \\ 2 \to \{1\} \end{cases}$	1	2
$d_4: \begin{cases} 1 \to \{2,3\} \\ 2 \to \{2,3\} \end{cases}$	4	2
TOPLAM	**9**	**8**

Şekil 3.2. $T(X,\theta)$ yarıgrubunun ℓ ve r sınıflarının eleman sayısı

Dikkat edilirse ℓ sınıfı sayısı $|Y|^{|Y\theta|} = 3^2 = 9$ ve r sınıflarının sayısı $|Y\theta|^{|X|} = 2^3 = 8$ olarak hesaplanır.

Örnek 3.1.12. $X = Y = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere $\theta = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&4\end{smallmatrix}\right)$ olarak tanımlayalım.

$\Delta: Y\theta \to \{i\theta^{-1}\}$ olmak üzere $\Delta: \{2,3,4\} \to \{\{1\},\{3\},\{2,4\}\}$ olur. O halde $|Y\theta|^{|Y\theta|} = 3^3 = 27$ tane d sınıfı vardır. Δ dönüşümünün

- d_1: $2 \to \{1\}$, $3 \to \{3\}$, $4 \to \{2,4\}$
- d_2: $2 \to \{2,4\}$, $3 \to \{2,4\}$, $4 \to \{2,4\}$

eşlemelerine karşılık gelen $T = T(X,Y;\theta) = T(X,\theta)$ yarıgrubu için d_1 ve d_2, d-sınıflarını bulalım.

d_1: $2 \to \{1\}$, $3 \to \{3\}$, $4 \to \{2,4\}$

	$\mathbf{2 \to 1}$ $\mathbf{3 \to 3}$ $\mathbf{4 \to 2}$	$\mathbf{2 \to 1}$ $\mathbf{3 \to 3}$ $\mathbf{4 \to 4}$
$\mathbf{1 \to \{1\}}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&1&3&2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&1&3&4 \end{pmatrix}$
$\mathbf{1 \to \{3\}}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&1&3&2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 3&1&3&4 \end{pmatrix}$
$\mathbf{1 \to \{2,4\}}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&3&2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 2&1&3&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&3&4 \end{pmatrix}$

d_2: $2 \to \{2,4\}$, $3 \to \{2,4\}$, $4 \to \{2,4\}$

	$\mathbf{2 \to 2}$ $\mathbf{2 \to 2}$ $\mathbf{2 \to 2}$	$\mathbf{2 \to 3}$ $\mathbf{2 \to 2}$ $\mathbf{2 \to 3}$	$\mathbf{2 \to 2}$ $\mathbf{2 \to 2}$ $\mathbf{2 \to 1}$	$\mathbf{2 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$	$\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$	$\mathbf{1 \to 2}$ $\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$	$\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$	$\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$ $\mathbf{1 \to 3}$
$\mathbf{2 \to 2}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$
$\mathbf{2 \to 2}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$
$\mathbf{2 \to 2}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&4&4&4 \end{pmatrix}$

Şekil 3.3. $T(X,\theta)$ yarıgrubunun d_1 ve d_2, d-sınıfları

Her bir d sınıfında satırlar r sınıfını ve sütunlar ℓ sınıfını gösterir. Her bir hücre r sınıfı ve ℓ sınıfının ortak elemanlarını, yani $T = T(X,Y;\theta) = T(X,\theta)$ yarıgrubunun h-sınıfının elemanlarını gösterir.

Örnekte dikkat edilirse aynı d sınıfındaki h sınıfları aynı kardinaliteye sahiptir.

3.2. Genelleştirilmiş Dönüşüm Yarıgrubunun İzomorfik Olduğu Yarıgruplar

Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının izomorfik olduğu yarıgruplar hakkındaki Symons (1975), Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

Teorem 3.2.1. $T(X,Y;\theta)/d \cong T(Y;\theta)$ dır.

İspat: Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 1.7.' ye bakınız. □

Teorem 3.2.2. $|X\alpha|$ sonsuz olmak üzere $|X\alpha| > |Y\theta|$ ve $\alpha \in T(X,Y;\theta)$ ise $|H_\alpha| > 1$ olur. Daha da ötesi $|X\alpha| = |X\alpha'|$ olacak şekilde $\alpha \neq \alpha' \in H_\alpha$ elemanı vardır.

İspat: Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 1.9.' a bakınız. □

Teorem 3.2.3. Eğer $\phi: T(X,Y;\theta_1) \to T(X,Y;\theta_2)$ izomorfizm ise ϕ dönüşümü $T(X,Y;\theta_1)$ yarıgrubunun ℓ (r,d,h) -sınıflarının her biri ile $T(X,Y;\theta_2)$ yarıgrubunun ℓ (r,d,h) -sınıflarının her birini birebir ve örten olarak eşler.

İspat: Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 2.1.' e bakınız. □

Teorem 3.2.4. $\phi: T(X,Y;\theta_1) \to T(X,Y;\theta_2)$ dönüşümü bir izomorfizm ve

$$\rho: (T(X,Y)\theta_1, \circ) \to (T(X,Y)\theta_2, \circ)$$
$$\lambda: (\theta_1 T(X,Y), \circ) \to (\theta_2 T(X,Y), \circ)$$

dönüşümleri sırasıyla

$$(\alpha\theta_1)\rho = \alpha\phi\theta_2 \ \ (\forall\alpha\theta_1 \in T(X,Y)\theta_1)$$
$$(\theta_1\alpha)\lambda = \theta_2\alpha\phi \ \ (\forall\theta_1\alpha \in T(X,Y)\theta_1)$$

olarak tanımlansın. O zaman ρ ve λ dönüşümleri birer izomorfizmdir ve

$$T(X,Y)\theta_1 \cong T(X,Y)\theta_2,$$
$$\theta_1 T(X,Y) \cong \theta_2 T(X,Y)$$

olur.

İspat: Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 2.2.' ye bakınız. □

Lemma 3.2.5. Y_1 ve Y_2 sırasıyla X_1 ve X_2 kümelerinin en az 3 eleman içeren alt kümeleri olmak üzere

$$(T(X_1,Y_1),\circ) \cong (T(X_1,Y_1),\circ) \Leftrightarrow |X_1 \setminus Y_1| = |X_2 \setminus Y_2|, |Y_1| = |Y_2| \text{ dir. } \square$$

Teorem 3.2.6. $T(X,Y;\theta_1) \cong T(X,Y;\theta_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $g \in S_Y$ ve $h \in S_X$ olmak üzere $\theta_1 h = g\theta_2$ olmasıdır.

İspat: Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 2.5.' e bakınız. □

Sullivan (1975) çalışmasında

$$Z = \begin{cases} X \cup \{a\}, & |X| \geq |Y| \\ Y \cup \{a\}, & |Y| \geq |X| \end{cases} \qquad a \notin X \cup Y$$

kümesi için $T(Z)$, Z üzerindeki tüm dönüşümlerin yarıgrubu ve $\omega \in T(Z)$ olmak üzere $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun bir $T(Z)^\omega$ yarıgrubunun içine gömülebileceğini gösterdi. Burada $S = T(Z)$ için

$S^a = T(Z)^\omega$ olarak alınırsa $T(Z)^\omega$ yarıgrubu, ω elemanına göre $T(Z)$ yarıgrubunun varyantı olduğunu hatırlayalım.

Boştan farklı (ayrık) herhangi iki X, Y kümeleri için $Z = X \cup Y$ olmak üzere Z kümesi üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubu $T(Z)$ yi göz önünde bulunduralım. O halde

$$T(Z, Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

kümesi $T(Z)$ yarıgrubunun alt yarıgrubudur. Bu $T(Z, Y)$ yarıgrubuna kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu denildiğini hatırlayalım. Bu yarıgrup hakkındaki çalışmalara örnek olarak Fernandes ve ark. (2016), Sanwong ve ark. (2020), Sun ve ark. (2016) çalışmalarını verebiliriz. $T(Z, Y)$ yarıgrubu Symons (1975a, 1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z, Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir.

$$F(Z, Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) = Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z, Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgrubudur. Ayık ve Abusarris (2022), $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubunun $T(X \cup Y, Y)$ içine gömülebileceğini gösterdi. Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının izomorfik olduğu yarıgruplar hakkındaki Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

Lemma 3.2.7. $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubu, $T(X \cup Y; Y)$ yarıgrubunun içine gömülebilir.

İspat: $Z = X \cup Y$ olsun. Her bir $\alpha \in T(X, Y; \theta)$ olarak tanımlanan $\hat{\alpha} \in T(Z, Y)$ dönüşümünü göz önünde bulunduralım. Herhangi $\alpha, \beta \in T(X, Y; \theta)$ için

$$\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$$

olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in Z$ alalım. $x \in X$ ise

$$x(\widehat{\alpha * \beta}) = x\big(\alpha \mathbin{\widehat{\circ\, \theta \circ}} \beta\big) = \big((x\alpha)\theta\big)\beta = (x\alpha)\hat{\beta} = (x\hat{\alpha})\hat{\beta} = x(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta})$$

olur. $x \in Y$ olsun. $x\hat{\alpha} = (x\theta)\alpha$ olduğundan

$$\begin{aligned} x\big(\widehat{\alpha * \beta}\big) &= x\big(\alpha \mathbin{\widehat{\circ\, \theta \circ}} \beta\big) = (x\theta)(\alpha \circ \theta \circ \beta) \\ &= \Big(\big((x\theta)\alpha\big)\theta\Big)\beta = \big((x\hat{\alpha})\theta\big)\beta \\ &= (x\hat{\alpha})\hat{\beta} = x\big(\hat{\alpha} \circ \hat{\beta}\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki durumda da $\widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta}$ olduğu görülür. $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubundan, $T(X \cup Y; Y)$ yarıgrubuna birebir bir homomorfizm tanımlayalım.

$\psi: T(X,Y;\theta) \to T(Z,Y)$ dönüşümü $\alpha \in T(X,Y;\theta)$ için

$$\alpha\psi = \hat{\alpha}$$

olarak tanımlansın. ψ dönüşümünün birebir (1-1) bir homomorfizm olduğunu göstermeliyiz . $\alpha, \beta \in T(X,Y;\theta)$ için $\alpha\psi = \beta\psi$ ise $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ olur. $\forall x \in Z$ için $x\hat{\alpha} = x\hat{\beta}$ olur. Özel olarak $x \in X$ $(Z = X \cup Y)$ için $x\hat{\alpha} = x\hat{\beta}$ ise $x\alpha = x\beta$ olur. Böylece her $x \in X$ için $x\alpha = x\beta$ olup $\alpha = \beta$ elde edilir. Böylece ψ dönüşümünün birebir dönüşüm olduğu gösterilmiş olur.

ψ dönüşümünün homomorfizm olduğunu göstermek için $\alpha, \beta \in T(X,Y;\theta)$ olmak üzere

$$(\alpha * \beta)\psi = \alpha\psi \circ \beta\psi$$

olduğunu göstermek yeterlidir. O halde

$$(\alpha * \beta)\psi = \widehat{\alpha * \beta} = \hat{\alpha} \circ \hat{\beta} = \alpha\psi \circ \beta\psi$$

olduğundan ψ bir homomorfizmdir. Böylece ψ birebir bir homomorfizmdir. Öyleyse $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X \cup Y; Y)$ yarıgrubunun içine gömülebilir. □

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $|X| \geq |Y|$ olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.2.8. Eğer $\theta: Y \to X$ birebir bir dönüşüm ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X, \mathrm{im}\theta)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Özel olarak θ dönüşümü, hem birebir hem de örten ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X)$ yarıgrubuna izomorfiktir.

İspat: $\phi: T(X,Y;\theta) \to T(X, \mathrm{im}\theta)$ dönüşümünü her $\alpha \in T(X,Y;\theta)$ için

$$\alpha\phi = \alpha \circ \theta$$

olarak tanımlayalım. ϕ iyi tanımlıdır. ϕ dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in T(X,Y;\theta)$ için $\alpha\phi = \beta\phi$ olsun. O zaman

$$\alpha\phi = \beta\phi \Rightarrow \alpha \circ \theta = \beta \circ \theta$$

olur. Böylece her $x \in X$ için

$$\alpha \circ \theta = \beta \circ \theta \Rightarrow (x\alpha)\theta = (x\beta)\theta$$

ve θ dönüşümü birebir olup

$$(x\alpha)\theta = (x\beta)\theta \Rightarrow x\alpha = x\beta$$

olacağından $\alpha = \beta$ elde edilir. Böylece ϕ dönüşümü birebir olur.

ϕ dönüşümünün homomorfizm olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in T(X, Y; \theta)$ elemanları için

$$(\alpha * \beta)\phi = (\alpha\phi) \circ (\beta\phi)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. ϕ dönüşümünün tanımından

$$(\alpha * \beta)\phi = (\alpha * \beta) \circ \theta = (\alpha \circ \theta \circ \beta) \circ \theta = (\alpha \circ \theta) \circ (\beta \circ \theta) = (\alpha\phi) \circ (\beta\phi)$$

olup ϕ dönüşümü bir homomorfizmdir. Böylece ϕ birebir bir homomorfizm olup $T(X, Y; \theta)$, $T(X, \mathrm{im}\theta)$ içine gömülebilir.

$\breve{\theta}$: $Y \to \mathrm{im}\theta \subseteq X$ dönüşümünü her $y \in Y$ elemanı için $y\breve{\theta} = y\theta$ olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $\breve{\theta}$, birebir ve örtendir. Her bir $\beta \in T(X, \mathrm{im}\theta)$ için $\beta \circ \breve{\theta}^{-1} \in T(X, Y; \theta)$ ve

$$\left(\beta \circ \breve{\theta}^{-1}\right)\phi = \left(\beta \circ \breve{\theta}^{-1}\right) \circ \theta = \beta \circ 1_{\mathrm{im}\theta} = \beta$$

olup ϕ örtendir. ϕ , birebir örten bir homomorfizm olup

$$T(X, Y; \theta) \cong T(X, \mathrm{im}\theta)$$

elde edilir. Ayrıca eğer θ hem birebir hem örten ise $\mathrm{im}\theta = X$ olup

$$T(X, Y; \theta) \cong T(X, X) = T(X)$$

elde edilir. □

Her $x \in \mathrm{im}\theta$ için $x\theta^{-1} \subseteq Y$ alt kümesini göz önünde bulunduralım. Seçme aksiyomundan dolayı $y_x \in x\theta^{-1}$ elemanını alıp sabitleyelim. $Y_1 = \{y_x : x \in \mathrm{im}\theta\}$ $|X| \geq |Y|$ ve $|Y_1| = |\mathrm{im}\theta|$ olduğundan $|X \setminus \mathrm{im}\theta| \geq |Y \setminus Y_1|$ olup bir

$$\rho_1 : Y \setminus Y_1 \to X \setminus \mathrm{im}\theta$$

birebir dönüşümü vardır. $\rho : Y \to X$ dönüşümü her $y \in Y$ için

$$y\rho = \begin{cases} x, & y = y_x \quad x \in \mathrm{im}\theta \\ y\rho_1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. ρ_1, birebir olduğundan (ρ dönüşümünün tanımından) ρ dönüşümü birebirdir. Ayrıca $\mathrm{im}\theta \subseteq \mathrm{im}\rho$ olur. Her bir $\alpha \in T(X, Y; \theta)$ için $\tilde{\alpha} \in T(X)$ dönüşümünü her bir $x \in X$ için

$$x\tilde{\alpha} = (x\alpha)\rho$$

olarak tanımlayalım. Dikkat edilirse $\tilde{\alpha} \in T(X, \mathrm{im}\rho)$ dur. Dahası, herhangi bir $\theta \in T(Y, X)$ için $x_0 \in \mathrm{im}(\theta)$ elemanı seçelim ve sabitleyelim. Her $x \in X$ için

$$x\Theta = \begin{cases} (x\rho^{-1})\theta, & x \in \mathrm{im}\rho \\ x_0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\Theta \in T(X)$ dönüşümünü göz önünde bulunduralım. Dikkat edilirse $\mathrm{im}\theta \subseteq \mathrm{im}\rho$ olduğundan $\Theta \in T(X, \mathrm{im}(\rho))$ olur. Yukarıdaki notasyonla aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 3.2.9. Eğer $|X| \geq |Y|$ ise $T(X, Y; \theta) \cong T\big(X, im(\rho)\big)^{\Theta}$ olur.

İspat: Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında Theorem 2.3' e bakınız. □

3.3. Genelleştirilmiş Dönüşüm Yarıgrubunun Rankı

S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olmak üzere S yarıgrubunun rankının

$$\mathrm{rank}(S) = \min\{|B| : S = \langle B \rangle \text{ ve } B \text{ sonlu}\}$$

olduğu ve $\mathrm{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine minimal doğuray kümesi dendiğini hatırlayalım. Heseplanabilir cebirde en önemli araştırma alanlarından birisi dönüşüm yarıgrupları gibi bazı önemli cebirsel yapıların rankını ve minimal doğuray kümesini bulmaktır. Dönüşüm yarıgruplarının rankının ve minimal doğuray kümesinin bulunduğu çalışmalara örnek olarak Ayık ve ark. (2018), Fernandes ve ark (2014) ve Sommanee ve ark. (2013) çalışmaları verilebilir. $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ ve $Y \subset Z$ olmak üzere $T(Z, Y)$ yarıgrubunun rankını Fernandes ve ark (2014) çalışmasında hesaplamıştır.

$S(m, n)$ ikinci tip Stirling sayısı, $2 \leq n \leq m - 1$ olmak üzere

$$S(m, 1) = S(m, m) = 1$$
$$S(m, n) = S(m - 1, n - 1) + n.S(m - 1, n)$$

olarak tanımlanır. Fernandes ve ark (2014) çalışmasında $S(m, n)$ Stirling sayısı olmak üzere

$$\text{rank}\big(T(Z,Y)\big) = S(m,n)$$

olarak bulmuşlardır. Ayrıca Sommanee ve ark. (2013) çalışmalarında $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ olmak üzere $2 \leq n \leq m-1$ için

$$\text{rank}\big(F(Z,Y)\big) = n^{m-n}$$

olarak hesaplamışlardır.

Bu bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri ve rankları hakkındaki Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

Bir S yarıgrubunun boştan farklı bir T alt kümesi için

$$T^2 = \{st: s,t \in T\}$$

olsun. X ve Y boştan farklı ayrık kümeler olmak üzere $\theta: Y \to X$ dönüşümünün $\text{im}(\theta)$ kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Aksi belirtilmedikçe $|\text{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olarak alalım.

Teorem 3.3.1. $|\text{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta): |\text{im}(\theta)| \leq r\}$$

olur.

İspat: $\text{im}(\theta) = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ ve $T = \{\alpha \in T(X,Y;\theta): |\text{im}(\theta)| \leq r\}$ olarak alalım. Bu durumda $T(X,Y;\theta)^2 = T$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha, \beta \in T(X,Y;\theta)$ için

$$|\text{im}(\alpha * \beta)| = |\text{im}(\alpha \circ \theta \circ \beta)| \leq |\text{im}(\theta)| \leq r$$

olduğundan

$$\alpha * \beta \in T(X,Y;\theta)^2 \Rightarrow \alpha * \beta \in T(X,Y;\theta)^2 \subseteq T$$

olur. $T \subseteq T(X,Y;\theta)^2$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\alpha \in T$ alalım. Kabul edelim ki $1 \leq s \leq r$ olmak üzere $\text{im}(\alpha) = \{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ ve $A_i = y_i\alpha^{-1}$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman her bir $1 \leq i \leq s$ için bir tek $z_i \in x_i\theta^{-1}$ elemanını seçelim ve $B = X \setminus \{x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}\}$ olmak üzere

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \cdots A_{s-1}\, A_s \\ z_1 \cdots z_{s-1}\;\, z_s \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_{s-1}\;\, B \\ y_1 \cdots y_{s-1}\, y_s \end{pmatrix}$$

dönüşümlerini göz önünde bulunduralım. $\beta, \gamma \in T(X, Y; \theta)$ olduğu açıktır. $x_s \in B$ olduğundan

$$\alpha = \beta \circ \theta \circ \gamma = \beta * \gamma \in T(X, Y; \theta)^2$$

olup $T \subseteq T(X, Y; \theta)^2$ elde edilir. Böylece $T = T(X, Y; \theta)^2$ ispatlanmış olur. □

$1 \leq s \leq r + 1$ olmak üzere

$$D_s = \{\alpha \in T(X, Y; \theta) : |\mathrm{im}(\theta)| = s\}$$

olarak tanımlansın.

Önerme 3.3.2. (i) Eğer θ dönüşümü birebir değil ise o zaman her $1 \leq s \leq r - 1$ için $D_s \subseteq D_{s+1}^2$ dir.
(ii) Eğer θ dönüşümü birebir ve örten değil ise o zaman $D_r \subseteq D_{r+1}^2$ dir.

İspat: Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında Önerme 3.2' e bakınız. □

Herhangi bir S yarıgrubunun herhangi bir A doğuray kümesi $S \setminus S^2$ kümesini içermek zorundadır. Eğer $\emptyset \neq S \setminus S^2$ kümesi S yarıgrubunun bir doğuray kümesi ise $S \setminus S^2$ kümesi S yarıgrubunun minimum doğuray kümesi olur.

Teorem 3.3.3. Eğer θ dönüşümü ne birebir ne de örten ise $T(X, Y; \theta) \setminus T(X, Y; \theta)^2$ kümesi $T(X, Y; \theta)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesidir.

İspat: Herhangi bir $\alpha \in T(X, Y; \theta)$ elemanını alalım. $\alpha \in T(X, Y; \theta) \setminus T(X, Y; \theta)^2$ ise ispat biter. Eğer $\alpha \in T(X, Y; \theta)^2$ ise Teorem 3.3.1.' den dolayı $|\mathrm{im}(\alpha)| \leq r$ olur. $1 \leq s \leq r$ olmak üzere $\alpha \in D_s$ ise Önerme 3.3.2.' den $\alpha \in D_{s+1}^2$ olur. Böylece $\alpha = \delta * \delta'$ olacak şekilde $\delta, \delta' \in D_{s+1}$ vardır. Bu prosedüre $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_t \in D_{r+1}$ olmak üzere

$$\alpha = \delta_1 * \delta_2 * \cdots * \delta_t$$

olana kadar devam edilebilir. Yani bir $1 \leq i \leq t$ için $\delta_t \notin T(X,Y;\theta)^2$ olur. Böylece $\alpha \in < T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2 >$ olur. Ve

$$T(X,Y;\theta) = < T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2 >$$

elde edilir. Dikkat edilirse $T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2$ kümesi $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesidir. □

$m,n,r \in \mathbb{N}$ için $|X| = m$, $|Y| = n$ ve $|\mathrm{im}\theta| = r$ olsun. $\theta: Y \to X$ olmak üzere θ örten değil ise $|\mathrm{im}\theta| = r < m$ ve θ birebir değil ise $r < n$ olduğu açıktır.

Teorem 3.3.4. Eğer θ dönüşümü ne birebir ne de örten ise $S(m,k)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} \frac{n!\,S(m,k)}{(n-k)!}$$

olur.

İspat: θ örten değil ise $|\mathrm{im}\theta| = r < m$ ve θ birebir değil ise $r < n$ olduğundan $\alpha \in T(X,Y;\theta)$ elemanı için $|\mathrm{im}\alpha| = \min(m,n)$ olur. Eğer θ dönüşümü ne birebir ne de örten ise Teorem 3.3.3.' den dolayı $T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2$ kümesinin $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesi olduğunu biliyoruz. O zaman

$$\mathrm{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = |T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2|$$

sayısını hesaplamalıyız. Teorem 3.3.1.' den dolayı $|\mathrm{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| \leq r\}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| \geq r+1\}$$

olur. Böylece

$$T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| \geq r+1\}$$

$$T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2 = \bigcup_{k=r+1}^{\min(m,n)} \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| = k\}$$

elde edilir. $r+1 \le k \le n$ için $P_k(Y)$ ile Y kümesinin k elemanlı tüm alt kümelerinin kümesi olsun. Her bir $U \in P_k(Y)$ için X kümesinden U kümesine $k!\,S(m,k)$ tane örten fonksiyon vardır. $|P_k(Y)| = \binom{n}{k}$ olduğundan

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = |T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2|$$

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \left| \bigcup_{k=r+1}^{\min(m,n)} \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |im(\theta)| = k\} \right|$$

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} |\{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |im(\theta)| = k\}|$$

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} \binom{n}{k} k!\,S(m,k)$$

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} \frac{n!\,S(m,k)}{(n-k)!}$$

elde edilir. □

Teorem 3.3.5. Eğer θ örten fakat birebir değil (yani $r = m < n$) ise

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \binom{n}{m}$$

olur.

İspat: Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında Teorem 3.6' ya bakınız. □

Teorem 3.3.6. Eğer θ birebir fakat örten değil (yani $r = n < m$) ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X, \operatorname{im}\theta)$ olduğundan

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = S(m,n)$$

olur.

İspat: Fernandes ve ark. (2014) çalışmasındaki Teorem 2.3.' e bakınız. □

Son olarak θ birebir ve örten olsun. θ birebir ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X, \operatorname{im}\theta)$ ve θ örten ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X)$ olacağından

$$\operatorname{rank}(T(X,Y;\theta)) = \operatorname{rank}(T(X)) = 3$$

elde edilir.

4. SONUÇ

Bu tezde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrupları hakkındaki bazı çalışmaları özellikle de Symons (1975) ve Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derleyeceğiz.

$\alpha, \beta \in T(X,Y)$ olmak üzere $T(X,Y)$ kümesi üzerindeki çarpmayı

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

olarak tanımlarsak $(T(X,Y),*)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba **genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu** ve " $*$ " işlemine **sandviç işlemi** denir. Ayrıca genelleştirilmiş dönüşüm yarıgrubu $(T(X,Y),*)$ yarıgrubu $T(X,Y;\theta)$ ya da $GT(X,Y;\theta)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $X = Y$ ise o zaman $T(X,Y;\theta)$ yerine $T(X;\theta)$ yazılır. Eğer $\theta \in T(X)$ dönüşümü X üzerinde birim dönüşüm ise $T(X;\theta) = T(X)$ olur. Genel olarak $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun regüler olmadığını Magill (1966) çalışmasında gösterdi.

S bir yarıgrup olmak üzere a, S yarıgrubunun bir sabit elemanı olsun. $\forall x, y \in S$ için " $*_a$ " sandviç işlemi

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

olarak tanımlanısa $(S,*_a)$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba ***a* elemanına göre *S* yarıgrubunun varyantı** denir ve S^a ile gösterilir.

$X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$ iki ayrık küme ve $Z = X \cup Y$ olmak üzere $T(Z)$ kümesi Z üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi olsun. Buradan

$$T(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

olarak tanımlayalım. $T(Z,Y)$ kümesi, $T(Z)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubu olup bu $T(Z,Y)$ alt yarıgrubuna, **kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu (semigroups of transformation with restricted range)** denir.

$T(Z,Y)$ yarıgrubu Symons (1975a,1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z,Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir. Ayrıca

$$F(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) = Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z,Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgrubudur.

$S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı, $2 \leq n \leq m-1$ olmak üzere

$$S(m,1) = S(m,m) = 1$$
$$S(m,n) = S(m-1,n-1) + n.S(m-1,n)$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilecek olursa $n!\,S(m,n)$ tane, m elemanlı bir kümeden n elemanlı bir kümeye örten fonksiyon vardır.

$T(X,Y;\theta)$ olmak üzere $a,\beta \in T$ için ℓ, r, d bağıntılarını sırasıyla

- $a\ell\beta \Leftrightarrow \theta a = \theta\beta$
- $ar\beta \Leftrightarrow a\theta = \beta\theta$
- $ad\beta \Leftrightarrow \theta a\theta = \theta\beta\theta$

olarak tanımlayalım.

Herhangi bir $\alpha\ell\beta$ alalım. $\alpha\ell\beta \Leftrightarrow \theta\alpha = \theta\beta \Leftrightarrow (\theta\alpha)\theta = (\theta\beta)\theta$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. Benzer şekilde $\alpha r\beta \Leftrightarrow \alpha\theta = \beta\theta \Leftrightarrow \theta(\alpha\theta) = \theta(\beta\theta)$ olacağından $\alpha d\beta$ olur. O halde $\ell \subseteq d$ ve $r \subseteq d$ elde edilir.

d, ℓ, r bağıntıları $T(X,Y;\theta)$ üzerinde birer kongrüanstır.

Symons (1975) çalışmasındaki Theorem 1.7.' de $T(X,Y;\theta)/d \cong T(Y;\theta)$ olduğu gösterilmiştir.

Sullivan (1975) çalışmasında

$$Z = \begin{cases} X \cup \{a\}, & |X| \geq |Y| \\ Y \cup \{a\}, & |Y| \geq |X| \end{cases} \qquad a \notin X \cup Y$$

kümesi için $T(Z)$, Z üzerindeki tüm dönüşümlerin kümesi ve $\omega \in T(Z)$ olmak üzere$T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun bir $T(Z)^{\omega}$ yarıgrubunun içine gömülebileceğini gösterdi. Burada $S = T(Z)$ için $S^{a} = T(Z)^{\omega}$ olarak alınırsa $T(Z)^{\omega}$ yarıgrubu, ω elemanına göre $T(Z)$ yarıgrubunun varyantı olduğunu hatırlayalım.

Boştan farklı (ayrık) herhangi iki X, Y kümeleri için $Z = X \cup Y$ olmak üzere Z kümesi üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubu $T(Z)$ yi göz önünde bulunduralım. O halde

$$T(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) \subseteq Y\}$$

kümesi $T(Z)$ yarıgrubunun alt yarıgrubudur. Bu $T(Z,Y)$ yarıgrubuna kısıtlanmış imaj ile dönüşümler yarıgrubu olduğunu hatırlayalım. Bu yarıgrup hakkındaki çalışmalara örnek olarak Fernandes ve ark. (2016), Sanwong ve ark. (2020), Sun ve ark.(2016) çalışmalarını verebiliriz. $T(Z,Y)$ yarıgrubu Symons (1975a,1975b) çalışmasında tanıtılmıştır. $T(Z,Y)$ yarıgrubu regüler yarıgrup değildir.

$$F(Z,Y) = \{\alpha \in T(Z) : \mathrm{im}(\alpha) = Y\alpha\}$$

kümesi $T(Z,Y)$ yarıgrubunun içerdiği en büyük regüler alt yarıgrubudur. Ayık ve Abusarris (2022) $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun $T(X \cup Y, Y)$ içine gömülebileceğini gösterdi. Eğer $\theta: Y \to X$ birebir bir dönüşüm ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X, \mathrm{im}\theta)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Özel olarak θ dönüşümü, hem birebir hem de örten ise $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubu, $T(X)$ yarıgrubuna izomorfiktir. Eğer $|X| \geq |Y|$ ise $T(X,Y;\theta) \cong T\big(X, im(\rho)\big)^{\Theta}$ olur.

Dönüşüm yarıgruplarının rankının ve minimal doğuray kümesinin bulunduğu çalışmalara örnek olarak Ayık ve ark. (2018), Fernandes ve ark (2014) ve Sommanee ve ark. (2013) çalışmaları verilebilir. $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ ve $Y \subset Z$ olmak üzere $T(Z,Y)$ yarıgrubunun rankını Fernandes ve ark (2014) çalışmasında hesaplamıştır. Fernandes ve ark (2014) çalışmasında $S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\mathrm{rank}\big(T(Z,Y)\big) = S(m,n)$$

olarak bulmuşlardır. Ayrıca Sommanee ve ark. (2013) çalışmalarında $|Z| = m$ ve $|Y| = n$ olmak üzere $2 \leq n \leq m-1$ için

$$\mathrm{rank}\big(F(Z,Y)\big) = n^{m-n}$$

olarak hesaplamışlardır.

Son bölümde genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının doğuray kümeleri ve rankları hakkındaki Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında bulunan sonuçları derledik.

Bir S yarıgrubunun boştan farklı bir T alt kümesi için

$$T^2 = \{st : s, t \in T\}$$

olsun. Boştan farklı ayrık X ve Y kümeleri olmak üzere $\theta: Y \to X$ dönüşümünün $\mathrm{im}(\theta)$ kümesinin sonlu olduğunu kabul edelim. Aksi belirtilmedikçe $|\mathrm{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olarak alalım. $|\mathrm{im}(\theta)| = r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $T(X,Y;\theta)^2 = \{\alpha \in T(X,Y;\theta) : |\mathrm{im}(\theta)| \leq r\}$ olduğu Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında gösterildi.

Eğer θ dönüşümü ne birebir ne de örten ise $T(X,Y;\theta) \setminus T(X,Y;\theta)^2$ kümesi $T(X,Y;\theta)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesidir.

Eğer θ dönüşümü ne birebir nede örten ise $S(m,k)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\operatorname{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \sum_{k=r+1}^{\min(m,n)} \frac{n!\,S(m,k)}{(n-k)!}$$

eğer θ örten fakat birebir değil (yani $r = m < n$) ise

$$\operatorname{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = \binom{n}{m}$$

olduğu Ayık ve Abusarris (2022) çalışmasında gösterildi.

Eğer θ birebir fakat örten değil (yani $r = n < m$) ise $T(X,Y;\theta) \cong T(X,\mathrm{im}\theta)$ olduğundan ve $S(m,n)$ ikinci tip Stirling sayısı olmak üzere

$$\operatorname{rank}\big(T(X,Y;\theta)\big) = S(m,n)$$

olduğu Fernandes ve ark. (2014) çalışmasında gösterildi.

θ dönüşümünün burada bahsedilen özellikleri dışındaki özelliklerine bağlı olarak $T(X,Y;\theta)$ genelleştirilmiş dönüşüm yarıgruplarının benzer özellikleri bundan sonraki çalışmalarda incelenebilir.

KAYNAKLAR

Al-Kharousi, F., Kehinde, R., Umar, A., 2014. Combinatorial Results for Certain Semigroups of Partial Isometries of a Finite Chain. Australas. J. Combin, 58(3), 365-375.

Ayık, G., Ayık, H., Koç M., 2011. Combinatorial results for order-preserving and order-decreasing transformations, Turkish Journal of Mathematics, cilt.35, sa.4, ss.617-625.

Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., Howie, J.M., 2008. Rank Properties of The Semigroup of Singular Transformations on a Finite Set, Communications in Algebra, 36: 2581-2587.

Ayık, H., Toker, K., 2018. On the Rank of Transformation Semigroup $T(n,m)$. Turkish Journal of Mathematics, 42, 1970-1977.

Bugay, L., Yağcı, M., Ayık, H., 2018. The Ranks of Certain Semigroups of Partial Isometries, Semigroup Forum, 97(2), 214-222.

Catarino, P., Higgins, P.M., 1999. The Monoid of Orientation-Preserving Mappings on a Chain, Semigroup Forum, 58(2), 190–206.

Chinram, R., 2008a. Regularity and Green's Relations of Generalized One-To-One Partial Transformation Semigroups, Far East J. Math. Sci., 30(3). 513–521.

Chinram, R, 2008b. Regularity and Green's Relations of Generalized Partial Transformation Semigroups, Asian-Eur. J. Math., 1(3). 295–302.

Clifford, A.H., Preston, G.B., 1967. The Algebraic Theory of Semigroups. Vol. 1. Mathematical Surveys, Vol. 7, American Mathematical Society, Providence.

Dolinka, I., Durdev, I., East, J., Honyam, P., Sangkhanan, K., Sanwong, J., Sommanee, W., 2018. Sandwich Semigroups in Locally Small Categories II: Transformations., Algebra Universalis, 79(3), Paper No. 76, 53 pp.

East, J., 2020. Transformation Representations of Sandwich Semigroups. Experimental Mathematics, 29(3), 291-295.

Fernandes, V.H., Honyam, P., Quinterio, T.M., Singha, B., 2014. On Semigroups of Endomorphisms of a Chain with Restricted Range, Semigroup Forum, 89 ,77-104.

Fernandes, V.H., Honyam, P., Quinterio, T.M., Singha, B, 2016. On Semigroups of Orientation-preserving Transformations with Restricted Range, Communications in Algebra, 44:1, 253-264.

Fernandes, V.H., Sanwong, J., 2014. On the Ranks of Semigroups of Transformations on a Finite Set with Restricted Range, Algebra Colloq., 21(3), 497- 510.

Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups, Springer-Verlag, London, 314 p.

Garba, G.U., 1990. Idempotents in Partial Transformation Semigroups. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 116A:359--366.

Garba, G.U, 1994. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations, Portugal. Math., 51: 185--204.

Gomes, G.M.S., Howie, J.M. 1987. On the Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 101(3):395-403.

Gomes, G.M.S., Howie, J.M, 1992. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations, Semigroup Forum, 45: 272--282.

Howie, J.M., 1966. The Subsemigroup Generated by The Idempotents of a Full Transformation Semigroup, J. London Math. Soc., 41, 707-716.

Howie, J.M, 1978. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 81(3-4):317-323.

Howie, J.M., 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 p.

Howie, J.M., McFadden, R.B., 1990. Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 114A:161--167.

Laysiriku, E., 2016. Semigroups of Full Transformations with Restriction on the Fixed Set is Bijective, Thai Journal of Mathematics Volume 14, Number 2: 497–50.

Levi, I., 2006. Nilpotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations, Semigroup Forum, 72: 459-476.

Magill, K.D. Jr., 1967. Semigroup Structures for Families of Functions, I. Some Homomorphism Theorems, J. Austral. Math. Soc. 7 (1), 81-94.

Magill, K.D. Jr., Subbiah, S., 1975. Green’s Relations for Regular Elements of Sandwich Semigroups, I. General Results, Proc. London Math. Soc., 31 (2)194-210.

Mc-Alister, D.B., 1998. Semigroups Generated by a Group and an Idempotent, Comm. Algebra, 26:515–547.

Mendes-Gonçalves, S., Sullivan, R.P., 2010. Semigroups of Transformations Restricted by an Equivalence, Cent. Eur. J. Math., 8(6), 1120-1131.

Mendes-Gonçalves, S., Sullivan, R.P, 2013. Regular Elements and Green’s Relations in Generalised Transformation, Asian-European Journal of Mathematics, Vol. 6, No. 1. 1350006 (11p).

Nenthein, S., Youngkhong, P., Kemprasit, Y., 2005. Regular Elements of Some Transformation Semigroups, Pure Math. Appl. ,16 (3) 307-314.

Pookpienlert, C., Honyam, P., Sanwong, J., 2018. Green’s Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range that Preserves an Equivalence Relation and a Cross-Section, Mathematics, 6, 134.

Sangkhanan, K., 2016. Green’s Relations on Semigroup of Regressive Transformations with Restricted Range, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 108 No. 2, 467-476.

Sangkhanan, K., Sanwong, J., 2020. Regularity and Greens Relations on Semigroups of Transformations with Restricted Range that Preserve an Equivalence, Semigroup Forum, 87(1), 568-584.

Sanwong, J., 2011. The Regular Part of a Semigroup of Transformations with Restricted Range, Semigroup Forum, 83(1), 134-146.

Sanwong, J., Sommanee, W., 2008. Regularity and Green’s Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range, Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 794013, 11 p.

Sommanee, W., Sanwong, J., 2013. Rank and Idempotent Rank of Finite Full Transformation Semigroups with Restricted Range, Semigroup Forum, 87:230–242.

Sullivan, R.P., 1975. Generalised Partial Transformation Semigroups, J. Aust. Math. Soc., 19. 470–473.

Sun, L., Sun, J. 2016. A Natural Partial Order on Certain Semigroups of Transformations with Restricted Range, Semigroup Forum, 92(1), 135-141.

Symons, J.S.V., 1975a. On a Generalization of The Transformation Semigroup, J. Austral. Math. Soc., 19 (series A), 47-61.

Symons, J.S.V, 1975b. Some Results Concerning a Transformation Semigroup, J. Aust. Math. Soc. (Series A), 19(4), 413-425.

Tinpun, K., Koppitz, J., 2016a. Relative Rank of the Finite Full Transformations with Restricted Range, Acta Mathematica Universatatis Comenianae, 85(2), 347-356.

Tinpun, K., Koppitz, J., 2016b. Generating Sets of Infinite Full Transformation Semigroups with Restricted Range, Acta Sci. Math., 82, 55–63.

ÖZGEÇMİŞ

Cansu KAPLAN. Ortaöğretimini İskenderun Demir Çelik Anadolu Lisesinde tamamladı. Lisans öğrenimini Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümünde tamamladı. Üniversite öğretiminde Erasmus Programıyla Pavol Jozef Safairik University' de öğrenim gördü. 2018 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Psikolojik Danışma ve Rehberlik Bölümü lisans öğretimine başladı ve 2022 yılında mezun oldu.