T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKSİMUM ÇARPIM TİPİ İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Ayşe Kübra YEŞİLNACAR BİNMAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŞANLIURFA
2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM ÇARPIM TİPİ İKİ DEĞİŞKENLİ OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Ayşe Kübra YEŞİLNACAR BİNMAR

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
YIL: 2023, sayfa: 37

Lineer pozitif operatörlerin yaklaşımları Korovkin teoremi yardımı ile hesaplanmış, hata oranları bulunmuştur. Bu hesaplamaların yanı sıra lineer olmayan maksimum çarpım tipi operatörlerle de yaklaşım problemi farklı metotlarla incelenmiştir. Bu çalışmada yeni bir operatör olan maksimum çarpım tipi iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü tanımlanmış, süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım problemleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer operatörler, Lineer olmayan operatörler, Maksimum çarpım tipi operatörler

ABSTRACT

MSc Thesis

APROXIMATION PROPERTIES TWO BIVIARIATE MAXIMUM-PRODUCT TYPE OPERATORS

Ayşe Kübra YEŞİLNACAR BİNMAR

Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY
Year: 2023, Page: 37

The approximations of linear positive operators were calculated with the help of Korovkin's theorem and error rates were found. In addition to these calculations, the approximation problem with non-linear maximum-product type operators has been examined with different methods. In this study, a new operator, the maximum product type two-variable Bernstein-Stancu operator, was defined and approximation problems were examined with the help of the continuous module.

KEYWORDS: Linear operators, Non linear opeartors, Maximum product type variable operators

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenim süreci boyunca gerek desteği gerek yönlendirmesi ile kıymetli hocam Prof. Dr. Sevilay KIRCI SERENBAY hocama teşekkürü borç bilirim. Çalışmamın ve hayatımın her aşamasında bana destek olan annem Fatma Zehra YEŞİLNACAR, babam Ahmet YEŞİLNACAR'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu tez eşim Mehmet BİNMAR ve çoçuklarım M.Hayat BİNMAR, H.Vefa BİNMAR, A.Affan BİNMAR 'a ithaf olunur.

1. GİRİŞ

Korovkin modelli yaklaşım teorisinde herhangi bir süreksiz olmayan fonksiyona düzgün yakınsama işlemi operatör dizileri yardımıyla bulunur. Bu operatör dizileri genellikle lineer ve negatif olmayan operatörlerdir. Temel kuramlardan olan Weierstrass modeli düzgün yaklaşım kuramıdır ve hata oranı genellikle süreklilik modülü yardımıyla bulunur.

Bu tezde pozitif olan ama lineer olmayan operatörlerin yaklaşım ve hata oranları başlangıç olarak verilmektedir. Yaklaşım operatörü olarak lineer yapı tek başına yetmeyebilir. Bundan dolayı yeni bir işlem olan maksimum alma işlemi tanımlanarak lineer olmayan operatörler elde edilmiştir. Bu operatörler pozitif lineer olmayan operatörlerdir.

Beş ana kısımdan oluşan tezin ilk bölümü giriş bölümüdür.

İkinci bölümde ise lineer pozitif operatörler ve lineer olmayan yaklaşım operatörleri için gerekli tanım ve yardımcı lemmalar verilmiştir.

Üçüncü bölümde lineer pozitif operatörlerdeki Korovkin teoremi ve maksimum çarpım tipi operatörlerin tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise maksimum çarpım tipi tek değişkenli Bernstein-Stancu operatörü tanımlanarak yardımcı teorem ve lemmalar verilmiştir. Yeni bir operatör olan maksimum çarpım tipi iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü karesel bölgede tanımlandı, yardımcı lemmalar ve süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım oranı hesaplanarak dördüncü bölüm sonlandırılmıştır.

Beşinci bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1885 yılında Weierstrass kapalı ve sınırlı $[d, e]$ üzerinde tanımlanan reel değerli bir h sürekli fonksiyonuna polinomlar dizisinin yaklaşabileceğini ifade etmiştir. Yani h fonksiyonu $[d, e]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$h \in C[d, e]$ ve$\forall > \epsilon$ için $\exists P(\beta)$ öyle ki $\forall \beta \in [d, e]$ için,

$$|P_z(\beta) - h(\beta)| < \epsilon$$

sağlayan polinom dizisinin varlığını göstermiştir.

Weierstrass teoreminin ispatı, araştırmacılar tarafından uzun ve karmaşık bulunmasıyla teorem için yeni ispat yöntemleri arayışı başlamıştır. Bernstein, 1912 yılında kendi adını verdiği polinomları kullanarak Weierstrass teoremini $[0, 1]$ aralığında ispatlamıştır .

$h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tanımlanmış sürekli bir fonksiyonu olsun,

$$B_z(h : \beta) = \sum_{m=0}^{z} h\left(\frac{m}{z}\right)\binom{z}{m}\beta^m(1-\beta)^{z-m}$$

şeklindeki polinoma Bernstein polinomu adı verilir.

İlerleyen yıllarda Bernstein pozitif lineer operatörleri temel alınarak bir çok farklı operatör kurulmuş ve bunların farklı genelleştirmeleri yapılmıştır.

Günümüzde hala bu operatörler kullanılarak çalışmalar yapılmaktadır. Bernstein operatörlerinin kurulmasının ardından (Kantorovich, 1930) $[0, 1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir h fonksiyonlar için,

$$K_z(h : \beta) = (z+1)\sum_{m=0}^{z}\binom{z}{m}\beta^m(1-\beta)^{z-m}\int_{\frac{m}{z+1}}^{\frac{m+1}{z+1}} h(w)dw$$

operatörleri tanımlamıştır. Bu operatörlere Kantrovich operatörleri denilmektedir.

1937 yılında Cholodowsky $[0, 1]$ aralığını sonsuz aralığa genişleterek;

$$C_z(h : \beta) = \sum_{m=0}^{z}\binom{z}{m}\left(\frac{\beta}{a_z}\right)^m\left(1-\frac{\beta}{a_z}\right)^{z-m} h\left(\frac{m}{z}a_z\right)$$

tipindeki operatörü tanımlamıştır (Chlodovsky, 1937). Burada $0 \leq \beta \leq a_z$ ve a_z dizisi,

$$\lim_{z\to\infty} a_z = \infty$$
$$\lim_{z\to\infty} \frac{a_z}{z} = 0$$

şartını sağlayan bütün pozitif reel sayıların artan dizisidir. $C_z(h,\beta)$ operatörüne Bernstein-Choldowsky operatörü adı verilir. Bernstein polinomları, (Mirajyan, 1941) ve (Szasz, 1950) tarafından sonsuz aralığa genişletilmiştir.

$$S_z(h:\beta) = e^{-z\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z\beta)^m}{m!} h\left(\frac{m}{z}\right), \beta \in [0,\infty] \subset \mathbb{R}, z \in \mathbb{N}$$

operatöre Szasz-Mirajyan operatörü adı verilmiştir.

Bede ve arkadaşları 2016 yılında yayınladıkları kitapta bütün yaklaşım operatörleri lineer olmak zorunda mıdır sorusunun yanıtını vermek için Sherpeard operatörlerini incelemiş ve lineer olmayan operatörlerinde yakınsaklık problemlerinde kullanabileceğini göstermişlerdir. Maksimum çarpım tipi Bernstein operatörleri lineer olmayan, parçalı rasyonel operatörler olup,

$$B_z^{(M)}(h;x) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} \Psi_{z,m}(x) h\left(\frac{m}{z}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} \Psi_{z,m}(x)}, z \in \mathbb{N}$$
$$\Psi_{z,m}(x) = \binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m}$$

biçiminde tanımlanmıştır (Bede ve ark., 2016).

Maksimum çarpım tipi operatörlerle ilgili bir çok çalışmalar yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir.

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde araştırma sürecinde kullanacağımız tanım, teorem ve yardımcı lemmalara yer verilmiştir.

Tanım 2.1. β bir küme ve d, β üzerinde bir metrik yani $\beta \times \beta$ üzerinde, $\forall\, k, \sigma, \Sigma \in \beta$ olmak üzere,

$i)$ d pozitif değerli ve sonlu,

ii) $d(k,\sigma) = 0 \Leftrightarrow k = \sigma$,

iii) $d(k,\sigma) = d(\sigma,k)$,

iv) $d(k,\sigma) \leq d(k,\Sigma) + d(\Sigma,\sigma)$

şartlarını sağlayan (β, d) ikilisi bir metrik tanımlar.

Tanım 2.2. β bir vektör uzayı üzerinde tanımlı ve reel değerli bir küme $\forall k, \Sigma, \in \beta$ ve σ bir skaler olmak üzere

i) $\| k\|$ pozitif reel değerli,

ii) $\| k\| = 0 \Leftrightarrow k = 0$,

iii) $\| \sigma k\| \leq |\sigma| \| k\|$,

iv) $\| k + \Sigma\| \leq \| k\| + \| \Sigma\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanırsa $\| .\|$ gösterimine norm denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.3. Ω ve ψ lineer fonksiyon uzayları ve $F \subset \Omega$ olsun. F'nin her elemanı ψ'nin bir elemanına karşılık getiren kuralla F'den ψ'ye bir operatör adını alır.

Σ , F'den ψ'ye tanımlanan bir operatör olsun. $\Sigma : F \to \psi$ biçiminde tanımlanır. Bu ifade $x \in F$'yi $\Sigma(x) \in \psi$'ye götürdüğünü gösterir ve F, Σ operatörünün tanım kümesidir. $F(\Sigma)$ şeklinde gösterilir. $x \in F$ elemanlarının $\Sigma(x) \in \psi$ operatörünün altındaki görüntülerin oluşturduğu küme, Σ operatörünün değer kümesidir ve

$$K(F) = \{y \in \psi : y = \Sigma(x), x \in F(\Sigma)\}$$

dir (Musayev ve Ark., 2007).

Tanım 2.4. $\Sigma : \Omega \to \psi$ bir operatör olsun. Ω ve ψ aynı F cismi üzerinde tanımlanan iki lineer uzay olsun. $\forall\ \kappa, k \in \Sigma$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Sigma(a\kappa + kb; x) = a\Sigma(\kappa; x) + b\Sigma(k; x)$$

şartını sağlayan operatöre lineer denir (Gadzhiev, 1976).

Tanım 2.5. $0 \leq \ \kappa$ ve Σ bir operatör olsun

$$0 \leq \Sigma(\kappa)$$

ise Σ operatörü pozitiftir. Pozitiflik ve lineerlik şartlarını sağlayan her Σ operatörüne lineer pozitif operatör adı verilir (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.6. *Σ lineer pozitif bir operatör olsun,*

$$\kappa \leq k \Rightarrow \ \Sigma(\kappa) \leq \Sigma(k)$$

şartı sağlanırsa Σ operatörü monoton artandır (Gadzhiev, 1976).

Lemma 2.7. *Σ lineer pozitif bir operatör olsun,*

$$|\Sigma(\kappa)| \leq \Sigma(|\kappa|)$$

eşitsizliği sağlanır (Gadzhiev, 1976).

Tanım 2.8. $z \in \mathbb{N}$ için $B_z(\kappa, x)$ ifadesine operatör dizisi denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.9. $[\varsigma, k]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar bir araya gelerek $C[\varsigma, k]$ fonksiyon uzayı tanımlar ve normu,

$$\|\kappa(x)\|_{C[\varsigma,k]} = \max_{\varsigma \leq x \leq k} |\kappa(x)|$$

şeklindedir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.10. $x \in [\varsigma, k]$ olmak üzere (κ_μ) fonksiyon dizisi, (κ) fonksiyonuna yakınsasın,

$$\lim_{\mu \to \infty} \|\kappa_\mu - \kappa\|_{C[\varsigma,k]} = 0$$

veya

$$\lim_{\mu \to \infty} \max_{x \in [\varsigma,k]} |\kappa_\mu(x) - \kappa(x)| = 0$$

sağlanırsa (κ_μ) fonksiyon dizisi, (κ) fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir. Düzgün yakınsama,

$$\kappa_\mu \rightrightarrows \kappa$$

şeklinde de ifade edilebilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 2.11. Pozitif reel sayılar $\mathbb{R}^+$ olsun. $\mathbb{R}^+$ üzerinde $\bigvee$ (maksimum) ve . (çarpım) işlemlerini alalım $(\mathbb{R}^+, \bigvee, .)$ yarı halkasına sahip bu yapıya maksimum çarpım cebiri denir (Bede ve ark., 2016).

Tanım 2.12. $H \subseteq \mathbb{R}$ sonlu veya sonsuz bir aralık ve

$$CB_{+}(H) = \{c : H \rightarrow \mathbb{R}^{+}\}$$

c, H üzerinde sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. Doğal sayılar kümesinden alınan herhangi bir eleman $m \in \mathbb{N}, c \in CB_{+}(H), K_m(., t_i) \in CB_{+}(H), t_i \in H$ olmak üzere

$$T_m : CB_{+}(H) \rightarrow CB_{+}(H)$$

maksimum çarpım tipi operatör dizisi,

$$T_m(c)(t) = \bigvee_{i=0}^{m} K_m(t, t_i)c(t_i)$$

veya

$$T_m(c)(t) = \bigvee_{i=0}^{\infty} K_m(t, t_i)c(t_i)$$

biçiminde tanımlanan, bu operatörler pozitif ama lineer olmayan operatörlerdir (Bede ve ark., 2016).

Ayrıca $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+}$ ve $c, f : H \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ şartı için,

$$K_m(acVbf)(t) = aK_m(c)(t)VbK_m(f)(t)$$

$\forall 0 \leq \gamma$ için,

$$K_m(c\gamma)(t) = \gamma K_m(c)(t)$$

pozitif homojenlik özelliklerini sağlar.

Lemma 2.13. *$H \subseteq \mathbb{R}$ sonlu veya sonsuz bir aralık olsun. $j, d \in CB_{+}(H)$ ve*

$$K_m : CB_{+}(H) \rightarrow CB_{+}(H)$$

lineer olmayan operatör dizisi için

i) $j \leq d$ ve $\forall m \in \mathbb{N}$ ise $K_m(j) \leq K_m(d)$ (monoton artanlık)

ii) $K_m(j + d) \leq K_m(j) + K_m(d)$ (alt lineerlik)

şartları gerçekleşsin. O zaman $j, d \in CB_{+}(H)$ ve $x \in H$ için,

$$|K_m(j)(x) - K_m(d)(x)| \leq K_m(|j - d|)(x)$$

olur (Bede ve ark., 2016).

Lemma 2.14. $K_m : CB_+(H) \to CB_+(H)$ *pozitif, monoton, alt lineer bir operatör dizisi olsun ve* $x \in H$ *ve* $d \in CB_+(H)$,

$$|K_m(d)(x) - d(x)| \leq \left[\frac{1}{\delta}K_m(V_m)(x) + K_m(e_0)(x)\right] W_1(d;\delta)_H + d(x)|K_m(e_0)(x) - 1|$$

olur. Burada

$\delta > 0$, $\forall m \in H, x \in H, e_0(m) = 1, V_m(x) = |m - x|$ *ve*

$$W_1(d;\delta)_H = sup\{|d(x) - d(\nu)| : x, \nu \in H, |x - \nu| \leq \delta\}$$

süreklilik modülüdür (Bede ve ark., 2016).

Sonuç 2.15. $\forall m \in \mathbb{N}, x \in H$, $K_m(e_0) = e_0$ *olmak üzere Lemma 2.14 şartları sağlanırsa,*

$$|K_m(d)(x) - d(x)| \leq \left[1 + \frac{1}{\delta}K_m(V_m)(x)\right] W_1(d;\delta)_H$$

olur. Süreklilik modülü,

$$W_1(d;\delta)_H = sup\{|d(x) - d(\nu)| : x, \nu \in H, |x - \nu| \leq \delta\}$$

dir (Bede ve ark., 2016).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde lineer pozitif operatörlerle ilgili tanım, lemma ve teoeremler verilmiştir. Lineer operatörlerin sürekli fonksiyonalara düzgün yakınsama teoreminden yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

3.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu bölümde bazı lineer pozitif operatörler ve özelliklerine yer verilmiştir.

Teorem 3.1. *κ, $[b,s]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyon ve gerçel sayılar kümesinde,*

$$|\kappa(x)| \leq M_f$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun,

i) $\varphi_m(1;x) \rightrightarrows 1$,

ii) $\varphi_m(t;x) \rightrightarrows x$,

iii) $\varphi_m(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

şartlarını sağlıyorsa φ_m operatör dizisi $[b,s]$ üzerinde düzgün yakınsak olur.

$$\varphi_m(\kappa;x) \rightrightarrows \kappa(x)$$

şeklinde gösterilir. Başka şekilde ifade edersek;

$$\|\varphi_m(\kappa) - \kappa\|_{C[b,s]} \to 0 \qquad (m \to \infty)$$

ya da buna eş değer olan,

$$\lim_{(m\to\infty)} \max_{b\leq x\leq s} \mid \varphi_m(\kappa;x) - \kappa(x) \mid = 0$$

biçiminde gösterilir (Döne, 2011).

Tanım 3.2. $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun,

$$P_z(\kappa : x) = \sum_{m=0}^{z} \kappa\left(\frac{m}{z}\right)\binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m} \qquad x \in [0,1]$$

veya

$$P_z(\kappa : x) = \sum_{m=0}^{z} \kappa\left(\frac{m}{z}\right) p_{z,m}(x),$$

$$p_{z,m}(x) = \binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m}$$

şeklindeki operatöre Bernstein operatörü adı verilir (Lorentz, 1953).

Lemma 3.3. *Tanım 3.2'de verilen Bernstein operatörleri için Korovkin teoremi koşulları,*

$$P_z(1 : x) \rightrightarrows 1,$$

$$P_z(t : x) \rightrightarrows x,$$

$$P_z(t^2 : x) \rightrightarrows x^2$$

bu biçimde $[0,1]$ *aralığında sağlanır (Lorentz, 1953).*

Tanım 3.4. $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ için,

$$1^z = (1 - x + x)^z = \sum_{m=0}^{z} \binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m}$$

$$1^h = (1 - y + y)^h = \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} y^j (1-y)^{h-j}$$

özdeşliklerinden,

$$1 = \sum_{m=0}^{z} \sum_{j=0}^{h} \binom{z}{m}\binom{h}{j} x^m (1-x)^{z-m} y^j (1-y)^{h-j}$$

yazılır.

$$p_{z,m}(x) = \binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = \binom{h}{j} y^j (1-y)^{h-j}$$

dir.

Buradan,

$$\sum_{m=0}^{z} \sum_{j=0}^{h} p_{z,m}(x) p_{h,j}(y) = 1,$$

$$\sum_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) = 1, \sum_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) = 1$$

dir. Bu eşitliklerden yararlanarak κ sürekli fonksiyonunun iki değişkenli Bernstein operatörü

$$P_{z,h}(\kappa : x,y) = \sum_{m=0}^{z}\sum_{j=0}^{h} \kappa\left(\frac{m}{z},\frac{j}{h}\right) p_{z,m}(x)p_{h,j}(y)$$

şeklinde elde edilir (Büyükyazıcı, 1999).

Lemma 3.5. $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ *İki değişkenli Bernstein operatörleri için Korovkin teoremi,*

$$P_{z,h}(1 : x,y) = 1,$$

$$P_{z,h}(t : x,y) = x,$$

$$P_{z,h}(\upsilon : x,y) = y,$$

ve

$$P_{z,h}(t^2+\upsilon^2 : x,y) = x^2 + \frac{x(1-x)}{z} + y^2 + \frac{y(1-y)}{h}$$

şartları $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ *aralığı için sağlanır (Büyükyazıcı, 1999).*

3.2. Bir ve İki Değişkenli Bernstein-Stancu Operatörleri

Bu kısımda bir ve iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörleri ile ilgili gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

3.2.1. Bir değişkenli Bernstein-Stancu operatörü

Bernstein operatörünün birçok genellemesi tanımlanmış ve yaklaşım özelliği incelenmiştir. Stancu, Bernstein operatörünü tanımlamış, Bernstein-Stancu operatörü adını vermiştir.

Tanım 3.6. $P_{z,\rho,\theta} : C[0,1] \to C[0,1]$, $0 \le \rho \le \theta$ şartını sağlayan pozitif reel sayılar ρ,θ olmak üzere,

$$P_{z,\rho,\theta}(\kappa;x) = \sum_{m=0}^{z} \kappa\left(\frac{m+\rho}{z+\theta}\right)\binom{z}{m} x^m(1-x)^{z-m}$$

biçiminde tanımlanan $P_{z,\rho,\theta}$ operatörüne Bernstein-Stancu operatörü denir (Döne, 2011) .

Bernstein-Stancu operatörünün düğüm noktaları $[0,1]$ aralığının $(\frac{m+\rho}{z+\theta})$ noktalarıdır. $\rho = \theta = 0$ için klasik Bernstein operatörü sonucu bulunur. Buradan pozitif ve lineer olduğu açıkça görülür.

Teorem 3.7. *Bernstein-Stancu operatörü için $z \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$,*

i) $P_{z,\rho,\theta}(1;x) = 1,$

ii) $P_{z,\rho,\theta}(t;x) = \frac{m}{m+\theta}x + \frac{\rho}{m+\theta},$

iii) $P_{z,\rho,\theta}(t^2;x) = \frac{1}{(m+\theta)^2}(m(m-1)x^2 + (1+2\rho)mx + \rho^2,$

vi) $P_{z,\rho,\theta}((t-x)^2;x) = \frac{1}{(m+\theta)^2}(mx(1-x) + (x\theta-\rho)^2$

eşitlikleri sağlanır (Döne, 2011).

Teorem 3.8. *κ, $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun,*

$$\lim_{m\to\infty} \|P_{z,\rho,\theta}(\kappa;x) - (\kappa;x)\|_{C[0,1]} = 0$$

olur (Döne, 2011).

3.2.2. İki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü

İki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

Tanım 3.9. $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$ olsun, $o \leq \rho_k \leq \theta_k$ ve $k = 1,2$ koşullarını sağlayan pozitif sayılar ve bir değişkenli Bernstein-Stancu operatörünü iki değişken biçiminde $[0,1] \times [0,1]$ bölgesinde x değişkenine göre z'ninci dereceden ve y değişkenine göre h'ninci dereceden olsun.

$$P_{z,h}^{\rho_k,\theta_k}(\kappa;x,y) = \sum_{m=0}^{z}\sum_{j=0}^{h} \kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)\binom{z}{m}x^m(1-x)^{z-m}\binom{h}{j}y^j(1-y)^{h-j}$$

şeklinde tanımlanır ve

$$P_{z,h}^{\rho_k,\theta_k}(\kappa;x,y) = \sum_{m=0}^{z}\sum_{j=0}^{h} \kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)p_{z,m}(x)p_{h,j}(y)$$

olacak şekilde ifade edilir. Burada,

$$p_{z,m}(x) = \binom{z}{m}x^m(1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = \binom{h}{j} y^j (1-y)^{h-j}$$

dır (İbikli ve Büyükyazıcı, 2004).

Lemma 3.10. *$m, z \in \mathbb{N}$ ve $P_{z,h}^{\rho_k \theta_k} \kappa(x,y)$, $[0,1] \times [0,1]$ bölgesi üzerindeki iki değişkenli Bernstein-Stancu polinomu ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$ olsun, $o \leq \rho_k \leq \theta_k$ ve $k = 1, 2$ koşullarını sağlayan pozitif sayılar olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
P_{z,h}^{\rho_k \theta_k}(1; x, y) &= 1, \\
P_{z,h}^{\rho_k \theta_k}(t; x, y) &= \frac{z}{z+\theta_1} x + \frac{\rho_1}{z+\theta_1}, \\
P_{z,h}^{\rho_k \theta_k}(\varkappa; x, y) &= \frac{h}{h+\theta_2} y + \frac{\rho_2}{h+\theta_2}, \\
P_{z,h}^{\rho_k \theta_k}(t^2 + \varkappa^2; x, y) &= \left(\frac{z}{z+\theta_1}\right)^2 \left(\frac{z-1}{z}\right) x^2 + \frac{z}{(z+\theta_1)^2} x(1+2\rho_1) \\
&\quad + \frac{\rho_1^2}{(m+\theta_1)^2} + \left(\frac{h}{h+\theta_2}\right)^2 \left(\frac{h-1}{h}\right) y^2 \\
&\quad + (1+2\rho_2) y \frac{h}{(h+\theta_2)^2} + \frac{\rho_2^2}{(h+\theta_2)^2}
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır (Döne, 2011).

Teorem 3.11. *κ $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun,*

$$\lim_{m \to \infty} \| P_{z,h}^{\rho_k, \theta_k}(\kappa; x) - (\kappa; x) \|_{C[0,1] \times C[0,1]} = 0$$

dir (Döne, 2011).

Tanım 3.12. $\varrho_m \to 0, (m \to \infty)$ olsun.

$$|P_{m,\rho,\theta}(\kappa; x) - \kappa(x)| < c \varrho_m$$

olacak biçimde yaklaşım hızı bulunur. ϱ_m ler değişkenlik gösterebilir (Szasz, 1950).

Operatörlerin yaklaşım hızını hesaplamak için birçok yardımcı faktörden faydalanırız.

Tanım 3.13. $F \subset \mathbb{R}^+$ sınırlı aralığı üzerinde $\kappa : F \to \mathbb{R}^+$ sınırlı fonksiyonunu alalım. Herhangi $\delta > 0$ için, Süreklilik modülü;

$$\omega(\kappa; \delta) = \sup_{\substack{|t-x| \leq \delta \\ (t,x) \in F}} |\kappa(x) - \kappa(t)|$$

biçiminde tanımlanır. $\omega(\kappa; \delta), \delta > 0$ için δ değişkenine göre fonksiyonun pozitif olduğu görülür (Lorentz, 1953).

İki değişkenli fonksiyonların süreklilik modülünü tanımlamak için önce $\mathbb{H} = [-1,1] \times [-1,1]$ karesel bölgesinden $M_h = \{\vartheta_h, \aleph_h\}$, $h = 1,2,...$ ve $M_z = \{\vartheta_z, \aleph_z\}$, $z = 1,2,...$ farklı noktalar alalım, M_h, M_z noktaları arasındaki uzaklığı $\rho(M_h, M_z)$ şeklinde gösterelim,

$$\rho(M_h, M_z) = \sqrt{(\vartheta_h - \vartheta_z)^2 + (\aleph_h - \aleph_z)^2}$$

Tanım 3.14. κ, $\mathbb{H}$ karesel bölgesinde tanımlı, reel değerli ve sınırlı bir fonksiyon , $\delta > 0$

$$\omega(\kappa;\delta) = \max_{\substack{\rho(M_1,M_2)\leq\delta \\ M_1,M_2\in\mathbb{H}}} |\kappa(\vartheta_1,\aleph_1) - \kappa(\vartheta_2,\aleph_2)|$$

$\omega(\kappa;\delta)$ fonksiyonuna κ fonksiyonun tam süreklilik modülü denir (Martinez, 1989).

Tanım 3.15. $\omega(\kappa;\delta)$ süreklilik modülünün δ değişkenine göre özellikleri aşağıda verilmiştir,

$$\omega(\kappa;\delta) = \sup_{\substack{|t-x|\leq\delta \\ (t,x)\in C[0,A]}} |\kappa(x) - \kappa(t)|$$

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıda gösterilmiştir.

i) $\omega(\kappa;\delta) \geq 0$,

ii) $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \omega(\kappa;\delta_1) \leqslant \omega(\kappa;\delta_2)$,

iii) $\omega(\kappa + \mathfrak{g};\delta) \leqslant \omega(\kappa;\delta) + \omega(\mathfrak{g};\delta)$,

iv) $\xi \in \mathbb{N}$ için $\omega(\kappa;\xi\delta) = \xi\omega(\kappa;\delta)$,

v) $\Upsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(\kappa;\Upsilon\delta) \leqslant (1+\Upsilon)\omega(\kappa;\delta)$,

vi) $|\kappa(t) - \kappa(x)| \leqslant \omega(\kappa;|t-x|)$,

vii) $|\kappa(t) - \kappa(x)| \leqslant \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(\kappa;\delta)$

(Altomare ve Campiti, 1994).

3.3. Maksimum Çarpım Tipi Operatörler

Bu bölümde maksimum çarpım tipi Bernstein operatörü ve maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörlerinden bahsedilecek gerekli tanımlar verilecektir.

Tanım 3.16. $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^+$,

$$B_z^{(M)}(\kappa)(x) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)\kappa\left(\frac{m}{z}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)}, z \in \mathbb{N}$$

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

$B_z^{(M)}(\kappa)(x)$ operatörü maksimum çarpım tipi Bernstein operatörü olarak tanımlanır (Bede ve ark., 2016).

Tanım 3.17. $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$,$(x,y) \in [0,1]^2$,

$$B_{z,h}^{(M)}(\kappa)(x,y) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} \bigvee_{j=0}^{h} p_{z,m}(x) p_{h,j}(y) \kappa\left(\frac{m}{z}, \frac{j}{h}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} \bigvee_{j=0}^{h} p_{z,m}(x) p_{h,j}(y)}$$

$$= \frac{\bigvee_{m=0}^{z} \bigvee_{j=0}^{h} p_{z,m}(x) p_{h,j}(y) \kappa\left(\frac{m}{z}, \frac{j}{h}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}, \quad z, h \in \mathbb{N}$$

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m},$$

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j}$$

biçimindeki operatöre iki değişkenli maksimum çarpım tipi Bernstein operatörü adı verilir (Bede ve ark., 2016).

Tanım 3.18. $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ ve $0 \leq \rho \leq \theta$ şartını sağlayan pozitif reel sayılar olsun,

$$P_z^{(M)}(\kappa; x) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)\kappa\left(\frac{m+\rho}{z+\theta}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)}, z \in \mathbb{N}$$

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

şeklindeki operatöre maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörü adı verilir (Kırcı Serenbay ve Yavuz, 2021).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörlerini tek ve çift değişkenli olarak ele alınmıştır. Bu operatörler için yaklaşım ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

4.1. Bir Değişkenli Maksimum Çarpım Tipi Bernstein-Stancu Operatörü

Tanım 4.1. $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $x \in [0,1]$; $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \rho \leq \theta$,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z+\theta} = 0$$

sınırsız ve azalan pozitif reel sayılardaki dizisi olmak üzere, tek değişkenli maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörü,

$$P_z^{(M)}(\kappa; x) = \frac{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \kappa\left(\frac{m+\rho}{z+\theta}\right)}{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)}, z \in \mathbb{N}$$

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

şeklinde tanımlanır. Sürekli κ fonksiyonu için $P_z^{(M)}(\kappa; x)$ pozitif ve $[0,1]$ aralığında süreklidir (Kırcı Serenbay ve Yavuz, 2021).

Maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörleri için süreklilik modülü yardımı ile yaklaşım oranı hesaplanacaktır.

$\forall z \in \mathbb{N}$ için $P_z^{(M)}(\kappa; 0) - \kappa(0) = 0$ olup aşağıdaki tanımlar $0 \leq x \leq 1$ aralığı için verilecektir.

Tanım 4.2. $m, \varpi \in \{0,1,...,z\}$,$x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1} \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,

$$N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x) |\frac{m+\rho}{z+\theta} - x|}{p_{z,\varpi}(x)}$$

ve

$$n_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)}{p_{z,\varpi}(x)}$$

olur.

Tanım 4.3. $m, \varpi \in \{0, 1, ..., z\}$,$x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,

i) $\varpi + 1 \leq m$ $\quad N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(\frac{m+\rho}{z+\theta} - x)}{p_{z,\varpi}(x)}$

ii) $m \leq \varpi - 1$ $\quad N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(x - \frac{m+\rho}{z+\theta})}{p_{z,\varpi}(x)}$

sağlanır.

Tanım 4.4. $m, \varpi \in \{0, 1, ..., z\}$,$x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,

i) $\varpi + 2 \leq m,$ $\quad \overline{N}_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(\frac{m+\rho}{z+\theta+1} - x)}{p_{z,\varpi}(x)}$

ii) $m \leq \varpi - 2,$ $\quad \underline{N}_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(x - \frac{m+\rho}{z+\theta+1})}{p_{z,\varpi}(x)}$

olur.

Lemma 4.5. *$m, \varpi \in \{0, 1, ..., z\}$,$x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,*

i) $\varpi + 2 \leq m,$ $\quad \overline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq N_{m,z,\varpi}(x) \leq 3\overline{N}_{m,z,\varpi}(x),$

ii) $m \leq \varpi - 2,$ $\quad N_{m,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq 6N_{m,z,\varpi}(x)$

dır.

İspat.

i) Burada $\overline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq N_{m,z,\varpi}(x)$ olduğu açıktır.

Eşitsizliğin diğer tarafından,

$$\begin{aligned}
\frac{N_{m,z,\varpi}(x)}{\overline{N}_{m,z,\varpi}(x)} &= \frac{\frac{m+\rho}{z+\theta} - x}{\frac{m+\rho}{z+\theta+1} - x} \leq \frac{\frac{m+\rho}{z+\theta} - \frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}}{\frac{m+\rho}{z+\theta+1} - \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}} \\
&\leq \frac{mz + m\theta + m + \rho - z\varpi - \theta\varpi}{(z+\theta)(m-\varpi-1)} \\
&\leq \frac{m-\varpi}{m-\varpi-1} \cdot \frac{\rho}{(z+\theta)(m-\varpi-1)} \\
&\leq 3
\end{aligned}$$

olur.

$$\overline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq N_{m,z,\varpi}(x) \leq 3\overline{N}_{m,z,\varpi}(x)$$

yazılır.

ii) Burada $N_{m,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x)$ olduğu açıktır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{N}_{m,z,\varpi}(x)}{N_{m,z,\varpi}(x)} &= \frac{x-\frac{m+\rho}{z+\theta+1}}{x-\frac{m+\rho}{z+\theta}} \leq \frac{\frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}-\frac{m+\rho}{z+\theta+1}}{\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}-\frac{m+\rho}{z+\theta}} \\
&= \frac{(z+\theta+1)(\varpi+\rho+1-m-\rho)}{(z+\theta)(\varpi+\rho-m-\rho)-m-\rho} \\
&\leq \frac{(z+\theta+1)(\varpi+1-m)}{(z+\theta)(\varpi+\rho-m-\rho-1)} \\
&= \frac{z+\theta+1}{z+\theta}.\frac{\varpi+1-m}{\varpi-m-1} \\
&\leq 2\frac{\varpi+1-m}{\varpi-m-1} \\
&= 2\left(1+\frac{1}{\varpi-m-1}\right) \leq 6
\end{aligned}$$

Buradan,

$$N_{m,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq 6N_{m,z,\varpi}(x)$$

eşitsizliği elde edilir. □

Lemma 4.6. *$m,\varpi \in \{0,1,...,z\}$, $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho,\theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,*

$$n_{m,z,\varpi}(x) \leq 1$$

dir.

İspat. İki durumda incelenir.

i) $\varpi \leq m$ için,

$\frac{1-x}{x}$ fonksiyonu $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ için artmayan fonksiyon olduğundan,

$$\frac{n_{m,z,\varpi}(x)}{n_{m+1,z,\varpi}(x)} = \frac{m+1}{z-m}.\frac{1-x}{x} \geq \frac{m+1}{z-m}.\frac{1-\frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta}}{\frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta}} \geq 1$$

$$n_{0,z,\varpi}(x) \leq ... \leq n_{m+2,z,\varpi}(x) \leq n_{m+1,z,\varpi}(x) \leq n_{m,z,\varpi}(x)$$

olur.

ii) $m \leq \varpi$ için,

$$\frac{n_{m,z,\varpi}(x)}{n_{m-1,z,\varpi}(x)} = \frac{z-m+1}{m}.\frac{x}{1-x} \geq \frac{z-m+1}{m}.\frac{\frac{\varpi+\rho}{z+\theta}}{1-\frac{\varpi+\rho}{z+\theta}} \geq 1$$

$$n_{0,z,\varpi}(x) \leq ... \leq n_{m-2,z,\varpi}(x) \leq n_{m-1,z,\varpi}(x) \leq n_{m,z,\varpi}(x)$$

$\forall m, \varphi \in \{0,1,2,...,z\}$, $n_{m,z,\varphi}(x) = 1$

olduğu elde edilir. □

Lemma 4.7. *$m, \varpi \in \{0,1,...,z\}$, $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ ve $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olmak üzere,*

i) $m \in \{\varpi+2, \varpi+3, ..., z-1\}$, $\varpi \leq (m+\rho) - \sqrt{m+\rho+1}$ için,

$$\overline{N}_{m+1,z,\varpi}(x) \leq \overline{N}_{m,z,\varpi}(x),$$

ii) $m \in \{1,2,...,\varpi-2\}$, $(m+\rho) + \sqrt{m+\rho} \leq \varpi$ için,

$$\underline{N}_{m-1,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x)$$

dir.

İspat.

i) $m \in \{\varpi+2, \varpi+3, ..., z-1\}$, $\varpi \leq (m+\rho) - \sqrt{m+\rho+1}$ için,

$$\frac{\overline{N}_{m,z,\varpi}(x)}{\overline{N}_{m+1,z,\varpi}(x)} = \frac{m+\rho+1}{z+\theta-m-\rho}.\frac{1-x}{x}.\frac{\frac{m+\rho}{z+\theta+1}-x}{\frac{m+\rho+1}{z+\theta+1}-x},$$

$\psi(x) = \frac{1-x}{x}.\frac{\frac{m+\rho}{z+\theta+1}-x}{\frac{m+\rho+1}{z+\theta+1}-x}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında artmayan fonksiyon olduğundan, $\psi(x) \geq \psi(\frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}) = \frac{z+\theta-\varpi-\rho}{\varpi+\rho+1}\frac{m+\rho-\varpi-\rho-1}{m+\rho-\varpi-\rho} = \frac{z+\theta-\varpi-\rho}{\varpi+\rho+1}\frac{m-\varpi-1}{m-\varpi}$, $\forall x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ için sağlar.

$\varpi \leq (m+\rho) - \sqrt{m+\rho+1}$ 'den

$$(m+\rho+1)(m+\rho-\varpi-\rho-1) \geq (\varpi+\rho+1)(m+\rho-\varpi-\rho)$$

ve

$$(m+\rho+1)(m-\varpi-1) \geq (\varpi+\rho+1)(m-\varpi)$$

olur.

$$\frac{\overline{N}_{m,z,\varpi}(x)}{\overline{N}_{m+1,z,\varpi}(x)} \geq \frac{m+\rho+1}{z+\theta-m-\rho}.\frac{z+\theta-\varpi-\rho}{\varpi+\rho+1}.\frac{m-\varpi-1}{m-\varpi} \geq 1$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $m \in \{1,2,...,\varpi-2\}$, $(m+\rho)+\sqrt{m+\rho} \leq \varpi$ için,

$$\frac{\underline{N}_{m,z,\varpi}(x)}{\underline{N}_{m+1,z,\varpi}(x)} = \frac{z+\theta-m-\rho+1}{m+\rho}.\frac{x}{1-x}.\frac{x-\frac{m+\rho}{z+\theta+1}}{x-\frac{m+\rho-1}{z+\theta+1}},$$

$g(x) = \frac{x}{1-x}\frac{x-\frac{m+\rho}{z+\theta+1}}{x-\frac{m+\rho-1}{z+\theta+1}}$, fonksiyonu $[0,1]$ aralığında azalmayan fonksiyon olduğundan $g(x) \geq g(\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}) = \frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1-\varpi-\rho}\frac{\varpi-m}{\varpi-m+1}$, $\forall x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ için sağlar.

$$(m+\rho)+\sqrt{m+\rho} \leq \varpi+\rho$$

ve

$$(\varpi+\rho)(\varpi-m) \geq (m-\rho)(\varpi-m-1)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\frac{\underline{N}_{m,z,\varpi}(x)}{\underline{N}_{m+1,z,\varpi}(x)} \geq \frac{z+\theta-m-\rho+1}{m+\rho}.\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1-\varpi-\rho}.\frac{\varpi-m}{\varpi-m+1} \geq 1$$

elde edilir. □

Lemma 4.8. $m,\varpi \in \{0,1,...,z\}$, $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$, $z \in \mathbb{N}$ *ve* $\rho,\theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ *olmak üzere,*

$$\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) = p_{z,\varpi}(x).$$

Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

dir.

İspat. $m,\varpi \in \{0,1,...,z\}$, $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ ve $\rho,\theta \in \mathbb{R}^+$ $0 \leq \rho \leq \theta$ olsun. $x \in \left[0, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ için,

$$0 \leq m+\rho \leq m+\rho+1 \leq z,$$

$$0 \leq p_{z,m+1}(x) \leq p_{z,m}(x)$$

olduğunu gösterelim.

$$0 \leq \binom{z}{m+1} x^{m+1}(1-x)^{z}-m-1 \leq \binom{z}{m} x^{m}(1-x)^{z}-m$$

$$0 \leq x\left[\binom{z}{m+1}+\binom{z}{m}\right] \leq \binom{z}{m}$$

dir. $\binom{z}{m+1}+\binom{z}{m}=\binom{z+1}{m+1}$ eşitliğinden,

$$0 \leq x \leq \frac{m+1}{z+1}$$

olur.

$m=0,...,z$ alınarak yukarıdaki eşitsizlikte,

$$p_{z,\rho+1}(x) \leq p_{z,\rho}(x), x \in \left[0, \frac{\rho+1}{z+\theta+1}\right]$$

$$p_{z,\rho+2}(x) \leq p_{z,\rho+1}(x), x \in \left[0, \frac{\rho+2}{z+\theta+1}\right]$$

$$p_{z,\rho+3}(x) \leq p_{z,\rho+2}(x), x \in \left[0, \frac{\rho+3}{z+\theta+1}\right]$$

...

biçiminde devam edilirse,

$$p_{z,m+1}(x) \leq p_{z,m}(x), x \in \left[0, \frac{m+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$$

bulunur.

$$p_{z,z-2}(x) \leq p_{z,z-3}(x), x \in \left[0, \frac{z+\theta-2}{z+\theta+1}\right]$$

$$p_{z,z-1}(x) \leq p_{z,z-2}(x), x \in \left[0, \frac{z+\theta-1}{z+\theta+1}\right]$$

$$p_{z,z}(x) \leq p_{z,z-1}(x), x \in \left[0, \frac{z+\theta}{z+\theta+1}\right]$$

bu eşitsizliklerden,

$x \in \left[0, \frac{\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ ise $m=0,...,z$ için $p_{z,m+\rho}(x) \leq p_{z,\rho}(x)$,

$x \in \left[\frac{\rho+1}{z+\theta+1}, \frac{\rho+2}{z+\theta+1}\right]$ ise $m=0,...,z$ için $p_{z,m+\rho}(x) \leq p_{z,\rho+1}(x)$,

$x \in \left[\frac{\rho+2}{z+\theta+1}, \frac{\rho+3}{z+\theta+1}\right]$ ise $m=0,...,z$ için $p_{z,m+\rho}(x) \leq p_{z,\rho+2}(x)$,

...

$x \in \left[\frac{\rho+z}{z+\theta+1}, \frac{\rho+z+1}{z+\theta+1}\right]$ ise $m = 0, ..., z$ için $p_{z,m}(x) \leq p_{z,z}(x)$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.9. *$\kappa : [0,1] \to [0,1]$, κ, $[0,1]$ aralığında sürekli ve sınırlı bir fonksiyon ve $x \in [0,1]$,*

$$|P_z^{(M)}(\kappa)(x) - \kappa(x)| \leq 12\omega_1\left(\kappa, \frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}\right)$$

dir.

Burada, $\omega_1(\kappa,\delta) = sup(|\kappa(x) - \kappa(t)| : x, t \in [0,1], |x-t| \leq \delta)$ şeklindedir.

İspat. Maksimum çarpım tipi Bernstein operatörleri sonuç 2.15 deki koşulları gerçekleştirdiğinden,

$$|P_z^{(M)}(\kappa)(x) - \kappa(x)| \leq \left(1 + \frac{1}{\delta_z}P_z^{(M)}(\varrho_x)(x)\right)\omega_1(\kappa;\delta_z)$$

ve $(\varrho_x)(t) = |t-x|$ yazılarak,

$$E_z(x) = P_z^{(M)}(\varrho)(x) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)\kappa\left|\frac{m+\rho}{z+\theta} - x\right|}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)}, x \in [0,1]$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitlikten, $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ ve $\varpi \in \{0, 1, ..., z\}$,

$$E_z(x) = \max_{m=0,1,\ldots,z}\{N_{m,z,\varpi}(x)\}, x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$$

dir.

$\varpi = 0$ için $E_z(x) \leq \frac{1}{z+\theta+1}$, $x \in \left[0, \frac{1}{z+\theta+1}\right]$ bu durumda her bir koşul için üst sınır elde edilmelidir. $N_{m,z,\varpi}(x)$, $\varpi = 0, 1, ..., z$ ve $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ olduğunda $m = 0, 1, ...$ için,

$$N_{m,z,\varpi}(x) \leq 6\frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

olduğu gösterilmelidir.

Buradan $E_z(x) \leq 6\frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$ ve $x \in \left[0, \frac{1}{z+\theta+1}\right]$ için $\delta_z = 6\frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$ elde edilir.

$$|P_z^{(M)}(\kappa)(x) - \kappa(x)| \leq 12\omega_1\left(\kappa, \frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}\right)$$

ifadesindeki tahmin bulunur.

$$N_{m,z,\varpi}(x) \leq 6\frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

oldğunu göstermek için üç durum söz konusudur.

i) $m \in \{\varpi - 1, \varpi, \varpi + 1\}$

ii) $m \geq \varpi + 2$

iii) $m \leq \varpi - 2$

i. Durum: $m \in \{\varpi - 1, \varpi, \varpi + 1\}$,

Eğer $m = \varpi$ ise,

$$N_{\varpi,z,\varpi}(x) = \left|\frac{\varpi+\rho}{z+\theta} - x\right|$$

olur. $x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ aralığında,

$$N_{\varpi,z,\varpi}(x) \leq \frac{1+\rho}{z+\theta+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer $m = \varpi + 1$ ise,

$$N_{\varpi+1,z,\varpi}(x) = n_{\varpi+1,z,\varpi}(x)\left(\frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta} - x\right)$$

$$n_{\varpi+1,z,\varpi}(x) \leq 1$$

olduğundan,

$$N_{\varpi+1,z,\varpi}(x) \leq \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta} - x \leq \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta} - \frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1} \leq \frac{3+\rho}{z+\theta+1}$$

dir.

Eğer $m = \varpi - 1$ ise,

$$N_{\varpi-1,z,\varpi}(x) = n_{\varpi-1,z,\varpi}(x)\left(x - \frac{\varpi+\rho-1}{z+\theta}\right)$$

$$n_{\varpi-1,z,\varpi}(x) \leq 1$$

$$N_{\varpi-1,z,\varpi}(x) \leq x - \frac{\varpi+\rho-1}{z+\theta} \leq \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1} - \frac{\varpi+\rho-1}{z+\theta} \leq \frac{2+\rho}{z+\theta+1}$$

elde edilir.

ii.Durum: $m \geq \varpi + 2$ için iki alt durum vardır.

Birinci alt durum,

$$m + \sqrt{m+1} \leq \varpi$$

ise,

$$\begin{aligned}
\overline{N}_{m,z,\varpi}(x) &= n_{m,z,\varpi}(x)\left(\frac{m+\rho}{z+\theta+1} - x\right) \\
&\leq \frac{m+\rho}{z+\theta+1} - x \leq \frac{m+\rho}{z+\theta+1} - \frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{m+\rho}{z+\theta+1} - \frac{m+\sqrt{m+1}}{z+\theta+1} \\
&= \frac{\sqrt{m+1}+\rho}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}
\end{aligned}$$

İkinci alt durum,

$$m - \sqrt{m+1} \geq \varpi$$

ise,

$\vartheta(x) = x - \sqrt{x+1}$, $x \in [0,1]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon $\overline{m} \in \{0, ..., z\}$, $\overline{m} - \sqrt{\overline{m}+1} < \varpi$ olup buradan $m_1 = \overline{m} + 1$ sağlanır.

$$m_1 - \sqrt{m_1+1} \geq \varpi$$

ise,

$$\begin{aligned}
\overline{N}_{\overline{m},z,\varpi}(x) &= n_{\overline{m},z,\varpi}(x)\left(\frac{\overline{m}+\rho+1}{z+\theta+1} - x\right) \\
&\leq \frac{\overline{m}+\rho+1}{z+\theta+1} - x \leq \frac{\overline{m}+\rho+1}{z+\theta+1} - \frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{\overline{m}+\rho+1}{z+\theta+1} - \frac{\overline{m}-\sqrt{\overline{m}+1}}{z+\theta+1} \\
&= \frac{\sqrt{\overline{m}+1}+1+\rho}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{2+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}
\end{aligned}$$

$m_1 \geq \varpi + 2$ ve $x \in [0,1]$ aralığında ϑ azalmayan fonksiyon olup,

$$\vartheta(\varpi + 1) \leq \varpi,$$

$$\overline{N}_{\overline{m}+1,z,\varpi}(x) \geq \overline{N}_{\overline{m}+2,z,\varpi}(x) \geq ... \geq \overline{N}_{z,z,\varpi}$$

eşitsizliği yazılır. $m \in \overline{m}+1, \overline{m}+2, ..., z$ için

$$\overline{N}_{\overline{m},z,\varpi}(x) = \frac{2+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

yazılır.

Her iki alt durumdan,

$$N_{m,z,\varpi}(x) \leq \frac{6+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

elde edilir.

iii.Durum: $m \leq \varpi - 2$ için iki alt durum söz konusudur.

Birinci alt durum,

$m + \sqrt{m} \geq \varpi$ olsun,

$$\begin{aligned}
\underline{N}_{m,z,\varpi}(x) &= n_{m,z,\varpi}(x)\left(x - \frac{m+\rho}{z+\theta+1}\right) \\
&\leq x - \frac{m+\rho}{z+\theta+1} \leq \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1} - \frac{m+\rho}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{m+\sqrt{m}+\rho+1}{z+\theta+1} - \frac{m+\rho}{z+\theta+1} \\
&= \frac{\sqrt{m}+\rho+1}{z+\theta+1} \\
&\leq \frac{2+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}
\end{aligned}$$

olur.

İkinci alt durum,

$$m + \sqrt{m} \leq \varpi$$

$\underline{m} \in \{0, ..., z\}$ minumum değerinden $\underline{m} - \sqrt{\underline{m}} < \varpi$ olup $m_2 = \underline{m} - 1$ elde edilir.

$$m_2 - \sqrt{m_2} \geq \varpi$$

için,

$$\begin{aligned}\underline{N}_{\underline{m},z,\varpi}(x) &= n_{\underline{m},z,\varpi}(x)\left(x-\frac{\underline{m}+\rho-1}{z+\theta+1}\right)\\ &\leq x-\frac{\underline{m}+\rho+1}{z+\theta+1} \leq \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}-\frac{\underline{m}+\rho-1}{z+\theta+1}\\ &\leq \frac{\underline{m}+\sqrt{\underline{m}+1}}{z+\theta+1}-\frac{\underline{m}+\rho-1}{z+\theta+1}\\ &= \frac{\sqrt{\underline{m}}+2+\rho}{z+\theta+1}\\ &\leq \frac{3+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}.\end{aligned}$$

$\varpi \geq 2$ olduğu zaman,

$$m_2 \geq \varpi - 2$$

şartı için,

$$\underline{N}_{\underline{m}-1,z,\varpi}(x) \geq \underline{N}_{\underline{m}-2,z,\varpi}(x) \geq \ldots \geq \underline{N}_{0,z,\varpi}$$

sağlanır.

$$\underline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq \frac{3+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

$x \in \left[\frac{\varpi+\rho}{z+\theta+1}, \frac{\varpi+\rho+1}{z+\theta+1}\right]$ aralığında $m \leq \varpi - 2$ için

$$N_{m,z,\varpi}(x) \leq \frac{3+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}$$

elde edilir.

$$\delta_z = \frac{3+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}, z \in \mathbb{N}$$

$(\varrho_x)(t) = |t-x|$ alınırsa,

$$|P_z^{(M)}(\kappa)(x) - \kappa(x)| \leq 12\omega_1\left(\kappa, \frac{1+\rho}{\sqrt{z+\theta+1}}\right)$$

ispat tamamlanmış olur. □

4.2. İki Değişkenli Maksimum Çarpım Tipi Bernstein-Stancu Operatörü

Bu kısımda iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörüyle ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.10. $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$; $x, y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi, \iota \in \mathbb{N}, m = \{0,1,...,z\}, j = \{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+, (k = 1,2)$ ve $0 \le \rho_k \le \theta_k$ olmak üzere,

$$P^{(M)}_{z,h,\varpi_k,\iota_k}(\kappa : x, y) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)\kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

şeklindeki operatöre maksimum çarpım tipi iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü denir. Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

ve

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j}$$

dir.

Teoremlerin ispatları için bazı yardımcı tanım ve lemmalara aşağıda yer verilmiştir. İki değişkenli operatörlerde çalıştığımız için x ve y değişkenleri için ayrı ayrı tanımlar verilecektir.

Tanım 4.11. $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x, y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi, \iota \in \mathbb{N}$, $m = \{0,1,...,z\}$, $j = \{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1,2)$, $0 \le \rho_k \le \theta_k$ olmak üzere,

$$N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)\left|\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1} - x\right|}{p_{z,\varpi}(x)}, \qquad n_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)}{p_{z,\varpi}(x)}$$

$$N_{j,h,\iota}(y) = \frac{p_{h,j}(y)\left|\frac{j+\rho_2}{h+\theta_2} - y\right|}{p_{h,\iota}(y)}, \qquad n_{j,h,\iota}(y) = \frac{p_{h,j}(y)}{p_{h,\iota}(y)}$$

dir.

Tanım 4.12. $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x, y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi, \iota \in \mathbb{N}$, $m = \{0,1,...,z\}$, $j = \{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1,2)$, $0 \le \rho_k \le \theta_k$ olmak üzere,

i) $\varpi + 1 \le m$, $\qquad N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1} - x)}{p_{z,\varpi}(x)}$

ii) $m \le \varpi - 1$, $\qquad N_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)(x - \frac{m+\rho_1}{z+\theta_1})}{p_{z,\varpi}(x)}$

iii) $\iota+1 \leq j,$ $\quad N_{j,h,\iota}(y)=\frac{p_{h,j}(y)(\frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}-y)}{p_{h,\iota}(y)}$

iv) $j \leq \iota-1,$ $\quad N_{j,h,\iota}(y)=\frac{p_{h,j}(y)(y-\frac{j+\rho_2}{h+\theta_2})}{p_{h,\iota}(y)}$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 4.13. $\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x,y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1},\frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right]\times\left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1},\frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi,\iota \in \mathbb{N}$, $m=\{0,1,...,z\}$, $j=\{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k,\theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k=1,2)$, $0\leq\rho_k\leq\theta_k$ olmak üzere,

i) $m \leq \varpi-2,$ $\quad \underline{N}_{m,z,\varpi}(x)=\frac{p_{z,m}(x)(x-\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1+1})}{p_{z,\varpi}(x)}$

ii) $j \leq \iota-2,$ $\quad \underline{N}_{j,h,\iota}(y)=\frac{p_{h,j}(y)(y-\frac{j+\rho_2}{h+\theta_2+1})}{p_{h,\iota}(y)}$

şeklindedir.

Lemma 4.14. *$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x,y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1},\frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right]\times\left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1},\frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi,\iota \in \mathbb{N}$, $m=\{0,1,...,z\}$, $j=\{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k,\theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k=1,2)$, $0\leq\rho_k\leq\theta_k$ olmak üzere,*

i) $\varpi+2 \leq m,$ $\quad \overline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq N_{m,z,\varpi}(x) \leq 3\overline{N}_{m,z,\varpi}(x)$

ii) $\iota+2 \leq j,$ $\quad \overline{N}_{j,h,\iota}(y) \leq N_{j,h,\iota}(y) \leq 3\overline{N}_{j,h,\iota}(y)$

dır.

İspat. Lemma 4.5 in (i) kısmından x ve y değişkenleri için benzer şekilde ispat elde edilir. □

Lemma 4.15. *$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x,y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1},\frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right]\times\left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1},\frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi,\iota \in \mathbb{N}$, $m=\{0,1,...,z\}$, $j=\{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k,\theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k=1,2)$, $0\leq\rho_k\leq\theta_k$ olmak üzere,*

i) $m \leq \varpi-2,$ $\quad N_{m,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x) \leq 6N_{m,z,\varpi}(x)$

ii) $j \leq \iota-2,$ $\quad N_{j,h,\iota}(y) \leq \underline{N}_{j,h,\iota}(y) \leq 6N_{j,h,\iota}(y)$

olur.

İspat. Lemma 4.5 in (ii) kısmından x ve y değişkenleri için benzer şekilde ispat elde edilir. $\square$

Lemma 4.16. *$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x,y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi,\iota \in \mathbb{N}$, $m=\{0,1,...,z\}$, $j=\{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k,\theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k=1,2)$, $0\leq\rho_k\leq\theta_k$ olmak üzere,*

i) $n_{m,z,\varpi}(x) \leq 1$,

ii) $n_{j,h,\iota}(y) \leq 1$

dır.

İspat. Lemma 4.6 'dan x ve y değişkenleri için benzer şekilde ispat yapılır. $\square$

Lemma 4.17. *$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$,$x,y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi,\iota \in \mathbb{N}$, $m=\{0,1,...,z\}$, $j=\{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k,\theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k=1,2)$, $0\leq\rho_k\leq\theta_k$ olmak üzere,*

i) $m \in \{\varpi+2, \varpi+3, ..., z-1\} \quad \varpi \leq m-\sqrt{m+1}$ *için,*

$$\overline{N}_{m+1,z,\varpi}(x) \leq \overline{N}_{m,z,\varpi}(x),$$

ii) $m \in \{1,2,...,\varpi-2\}$, $m+\sqrt{m} \leq \varpi$ *için,*

$$\underline{N}_{m-1,z,\varpi}(x) \leq \underline{N}_{m,z,\varpi}(x),$$

iii) $j \in \{\iota+2, \iota+3, ..., h-1\}$, $\iota \leq j-\sqrt{j+1}$ *için,*

$$\overline{N}_{j+1,h,\iota}(y) \leq \overline{N}_{j,h,\iota}(y),$$

iv) $j \in \{1,2,...,\iota-2\}$, $j+\sqrt{j} \leq \iota$ *için,*

$$\underline{N}_{j-1,h,\iota}(y) \leq \underline{N}_{j,h,\iota}(y)$$

dir.

İspat. Lemma 4.7'nin (i) ve (ii)'den x ve y değişkenleri için benzer şekilde ispat yapılır. $\square$

Lemma 4.18. *$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+, x, y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi, \iota \in \mathbb{N}$, $m = \{0,1,...,z\}$, $j = \{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1,2)$, $0 \leq \rho_k \leq \theta_k$ olmak üzere,*

$$\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) = p_{z,\varpi}(x)$$

$$\bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) = p_{h,\iota}(y)$$

dir. Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j}$$

biçimindedir.

İspat. Lemma 4.8'den x ve y değişkenleri için benzer şekilde ispat yapılır. □

Tanım 4.19. (İki Değişkenli Bernstein-Stancu Operatörünün Maksimim Çarpımı)

$\kappa : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$, $x, y \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$, $\varpi, \iota \in \mathbb{N}$, $m = \{0,1,...,z\}$, $j = \{0,1,...,h\}$ ve $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1,2)$, $0 \leq \rho_k \leq \theta_k$ olmak üzere,

$$P_{z,h,\varpi_k,\iota_k}^{(M)}(\kappa : x, y) = \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j}$$

dir.

Lemma 4.20. *$x, y \in [0,1]^2$ve $(x,y) \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$,*

$\varpi = 0,...z$, $\iota = 0,...h$ ve $P_{z,h,\varpi_k,\iota_k}^{(M)}(\kappa : x, y)$ operatörü $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1,2)$, $0 \leq \rho_k \leq \theta_k$ olmak üzere,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m} = \binom{z}{m} x^m (1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j} = \binom{h}{j} y^j (1-y)^{h-j}$$

için,

$$\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x). \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) = p_{z,\varpi}(x) p_{h,\iota}(y)$$

dir.

İspat. $\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) > 0$, $\bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) > 0$ olduğundan $\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x). \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) > 0$ olur ve $x, y \in [0,1]$,

$$(x,y) \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$$

$\varpi = 0, ...z, \iota = 0, ...h,$

$$0 \leq p_{z,m+1}(x) \leq p_{z,m}(x)$$

$$0 \leq p_{h,j+1}(y) \leq p_{h,j}(y).$$

Burada $x \in \left[0, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right]$, $y \in \left[0, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$ olmak üzere

$$0 \leq \binom{z}{\varpi+1} x^{\varpi+1} (1-x)^{z-\varpi-1} \leq \binom{z}{\varpi} x^{\varpi} (1-x)^{z-\varpi},$$

$$0 \leq \binom{h}{\iota+1} y^{\iota+1} (1-y)^{h-\iota-1} \leq \binom{h}{\iota} y^{\iota} (1-y)^{h-\iota}$$

ve

$$0 \leq x \left[\binom{z}{\varpi+1} + \binom{z}{\varpi}\right] \leq \binom{z}{\varpi}$$

$$0 \leq y \left[\binom{z}{\iota+1} + \binom{h}{\iota}\right] \leq \binom{h}{\iota}$$

olup, ayrıca $\binom{z}{\varpi+1} + \binom{z}{\varpi} = \binom{z+1}{\varpi+1}$ kurallından $0 \leq x \leq \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta 1+1}$, $0 \leq y \leq \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}$ olur.

$$A_{m,z,\varpi}(x) = \frac{p_{z,m}(x)}{p_{z,\varpi}(x)} = \frac{\binom{z}{m}}{\binom{z}{\varpi}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{m-\varpi}, \qquad (1)$$

$$A_{j,h,\iota}(y) = \frac{p_{h,m}(y)}{p_{h,\iota}(y)} = \frac{\binom{h}{j}}{\binom{h}{\iota}} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{j-\iota} \qquad (2)$$

(1) ve (2)'den $A_{m,z,\varpi,j,h,\iota}(x,y) = A_{m,z,\varpi}(x).A_{j,h,\iota}(y)$ olur. Yaklaşım sonucunun ispatından,

$$x, y \in [0,1], (x,y) \in \left[\frac{\varpi + \rho_1}{z + \theta_1 + 1}, \frac{\varpi + \rho_1 + 1}{z + \theta_1 + 1} \right] \times \left[\frac{\iota + \rho_2}{h + \theta_2 + 1}, \frac{\iota + \rho_2 + 1}{h + \theta_2 + 1} \right]$$

$\varpi = 0, ...z, \iota = 0, ...h$ için,

$$P^{(M)}_{z,h,\varpi_k,\iota_k}(\kappa : x, y) = \bigvee_{m=0}^{z} \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) A_{m,z,\varpi,j,h,\iota}(x,y) \kappa \left(\frac{m + \rho_1}{z + \theta_1}, \frac{j + \rho_2}{h + \theta_2} \right)$$

olur.

$$P^{(M)}_{z,h,\varpi_k,\iota_k}(\kappa : x, y) = P^{(M)}_{z,\varpi_k,x} \left[P^{(M)}_{h,\iota_k,y}(\kappa) \right] (x,y)$$

eşitliği;

$F = F(x,y)$ 'nin değişkenine göre $P^{(M)}_{z,x}(F)$ tek değişkenli Bernstein-Stancu maksimum çarpım operatörü $P^{(M)}_{z}(F)$ 'nin x değişkenine göre F ye uygulandığı anlamına gelir aynı biçimde $P^{(M)}_{z,y}(F)$ tek değişkenli Bernstein-Stancu maksimum çarpım operatörü olan $P^{(M)}_{z}(F)$ 'nin y değişkenine göre F'ye uygulandığını gösterir. Yani iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörlerinin maksimum çarpımı, tek değişkenli Bernstein-Stancu operatörlerinin maksimum çarpımının tensör çarpımıdır. $\square$

Tanım 4.21. $\kappa : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

i) $\kappa(x,y)$, $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde x'e göre artan (azalan) ise,

$$\kappa(x + \phi, y) - \kappa(x,y) \geq 0 (\leq 0), \forall y \in [0,1], \forall x, x + \phi \in [0,1], \phi > 0$$

ii) $\kappa(x,y)$, $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde y'e göre artan (azalan) ise,

$$\kappa(x, y + \phi) - \kappa(x,y) \geq 0 (\leq 0), \forall x \in [0,1], \forall y, y + \Phi \in [0,1], \Phi > 0$$

iii) $\kappa(x,y)$, $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde üst(alt) iki boyutlu monoton olduğundan,

$$\Delta_2 \kappa(x,y) = \kappa(x + \phi, y + \phi) - \kappa(x, y + \phi) - \kappa(x + \phi, y) + \kappa(x,y) \geq 0 (\leq 0)$$

$$\forall x \in [0,1], \forall y, y + \phi \in [0,1], \phi > 0$$

$$\forall y \in [0,1], \forall x, x+\phi \in [0,1], \phi > 0$$

olur (Bede ve ark., 2016).

Teorem 4.22. *$x, y \in [0,1]^2$ve $(x,y) \in \left[\frac{\varpi+\rho_1}{z+\theta_1+1}, \frac{\varpi+\rho_1+1}{z+\theta_1+1}\right] \times \left[\frac{\iota+\rho_2}{h+\theta_2+1}, \frac{\iota+\rho_2+1}{h+\theta_2+1}\right]$ $\varpi = 0, ...z, \iota = 0, ...h$ ve $P^{(M)}_{z,h,\varpi_k,\iota_k}(\kappa : x, y)$ operatörü $[0,1] \times [0,1]$ üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. $\rho_k, \theta_k \in \mathbb{R}^+$, $(k = 1, 2)$, $0 \le \rho_k \le \theta_k$ olmak üzere,*

$$|P^{(M)}_{z,h}(\kappa)(x,y) - \kappa(x,y)| \le 18\omega_1\left(\kappa; \frac{1+\rho_1}{\sqrt{z+\theta_1+1}}, \frac{1+\rho_2}{\sqrt{h+\theta_2+1}}\right)$$

dir. $\forall x, y \in [0,1]$ ve $z, h \in \mathbb{N}$ için,

$$\omega_1(\kappa, \delta, \nu) = sup(|\kappa(x,y) - \kappa(\alpha,\beta)| : x, y, \alpha, \beta \in [0,1], |x-\alpha| \le \delta, |y-\beta| \le \nu)$$

için sağlanır.

İspat. $A_k, B_k \in \mathbb{R}^+$ ve $k \in \{0, 1, ..., s\}$,

$$|\max_{k\in\{0,1,...,s\}}\{A_k\} - \max_{k\in\{0,1,...,s\}}\{A_k\}| \le \max_{k\in\{0,1,...,s\}}\{|A_k - B_k|\}$$

olmak üzere,

$$|P^{(M)}_{z,h}(\kappa)(x,y) - \kappa(x,y)| =$$

$$= \left| \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)} - \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \kappa(x,y)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)} \right|$$

$$\leq \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \left| \kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right) - \kappa(x,y) \right|}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

$$\leq \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \omega_1\left(\kappa; |m+\rho_1/z+\theta_1-x|, |j+\rho_2/h+\theta_2-y)|\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

$$= \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \omega_1\left(\kappa; \delta\frac{|m+\rho_1/z+\theta_1-x|}{\delta}, \nu\frac{|j+\rho_2/h+\theta_2-y|)}{\nu}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

$$= \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \omega_1\left(1 + \frac{|m+\rho_1/z+\theta_1-x|}{\delta} + \frac{|j+\rho_2/h+\theta_2-y|)}{\nu}\right) \omega_1(\kappa,\delta,\nu)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

$$= \omega_1(\kappa,\delta,\nu) \left(1 + \frac{1}{\delta} \frac{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1-x}\right)}{\bigvee_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)} + \frac{1}{\nu} \frac{\bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y) \left(\frac{m+\rho_2}{h+\theta_2-y}\right)}{\bigvee_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)} \right)$$

Burada, $\delta = 6\frac{1+\rho_1}{\sqrt{z+\theta_1+1}}$ ve $\nu = 6\frac{1+\rho_2}{\sqrt{h+\theta_2+1}}$

$$\begin{aligned} |P_{z,h}^{(M)}(\kappa)(x,y) - \kappa(x,y)| &\leq 3\omega_1\left(\kappa; 6\frac{1+\rho_1}{\sqrt{z+\theta_1+1}}, 6\frac{1+\rho_2}{\sqrt{h+\theta_2+1}}\right) \\ &\leq 18\omega_1\left(\kappa; \frac{1+\rho_1}{\sqrt{z+\theta_1+1}}, \frac{1+\rho_2}{\sqrt{h+\theta_2+1}}\right) \end{aligned}$$

dir. İspat tamamlanır. $\square$

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tezde $\kappa : [0,1] \times [0,1]$ bölgesi üzerinde, $x \in [0,1]$; $\rho, \theta \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq \rho \leq \theta$ tanımlanan maksimum çarpım tipi tek değişkenli Bernstein-Stancu operatörü,

$$P_z^{(M)}(\kappa; x) = \frac{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)\kappa\left(\frac{m+\rho}{z+\theta}\right)}{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x)}$$

şeklindedir. Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

dir ve tek değişkenli Bernstein-Stancu operatöründe yola çıkılarak iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü üzerinde çalışmalar yapılmıştır.

$\kappa : [0,1] \times [0,1]$ bölgesi üzerinde tanımlanan, ρ_k, θ_k ve $(k = 1,2)$ için $0 \leq \rho_k \leq \theta_k$ şartını sağlayan iki değişkenli Bernstein-Stancu operatörü,

$$P_{z,h,\varpi_k,\iota_k}^{(M)}(\kappa : x, y) = \frac{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee\limits_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)\kappa\left(\frac{m+\rho_1}{z+\theta_1}, \frac{j+\rho_2}{h+\theta_2}\right)}{\bigvee\limits_{m=0}^{z} p_{z,m}(x) \bigvee\limits_{j=0}^{h} p_{h,j}(y)}$$

biçiminde ifade edilir. Burada,

$$p_{z,m}(x) = C_z^m x^m (1-x)^{z-m}$$

$$p_{h,j}(y) = C_h^j y^j (1-y)^{h-j}$$

dir.

$P_{z,h}^{(M)}(\kappa)(x,y)$ operatörünün süreklilik modülülleri yardımıyla yaklaşım hızı bulunmuştur. ω_1 süreklili modülü ve $x, y \in [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere,

$$|P_{z,h}^{(M)}(\kappa)(x,y) - \kappa(x,y)| \leq 18\omega_1\left(\kappa; \frac{1+\rho_1}{\sqrt{z+\theta_1+1}}, \frac{1+\rho_2}{\sqrt{h+\theta_2+1}}\right)$$

dır.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada karesel bölgede iki değişkenli maksimum çarpım tipi Bernstein-Stancu operatörleri tanımlanıp bu operatörün süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir.

Yaklaşım teorisinin günümüzde mühendislik, biyomedikal, sağlık gibi birçok alanda uygulamaları mevcut olup, bu alanda yeni çalışmalara devam edilmektedir. Özellikle sayısal analiz, çok değişkenli istatistik v.b alanlarda kullanılır ve geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

ALTOMARE, F., and CAMPITI, M., 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and Its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter De Gruyter Berlin- New York, 627s.

BEDE, B., and GAL, S.G. and COROIANU, L., 2016. Approximation By Max-Product Type Operators. Springer, Berlin, no 2 ,1-139s.

BERNSTEIN, S. N., 1912-1913. Demonstration du Theoreme de Weierstrass Fondee Sur le Calcul Des robabilites. Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2): 1-2s.

BÜYÜKYAZICI, İ., 1999. İki Değişkenli Fonksiyonların Bernstein Polinomları. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 56s.

BÜYÜKYAZICI, İ. and İBİKLİ, E., 2004. The Approximation Properties Of Generalized Bernstein Polynomials Of Two Variables. Appl. Math. Comput., 156(2): 367-380s.

CHLODOVSKY, I., 1937. Sur le Deve Loppment Des Functions Definies Dans Un Interval Infini En Series de Polynomes de M. S. Bernstein. Compositio Math., 4: 380-393s.

DÖNE, Y. , 2011. Bernstein -Stancu Polinomlarıyla Yaklaşım. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, 98s.

GADZHIEV, A.D. 1976. Theorems of the Type of P.P. Korovkin’s Theorems. In Russian, Math. Z. 205:781-786 traslated in Math. Notes, 20(5-6), 990-998s.

HACISALİHOĞLU, H., and HACIYEV, A., 1995. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları no:31, Ankara, 1-94s.

İBİKLİ, E. 2005. On Approximation For Functions Of Two Variables On a Triangular domain. Rocky Mountain J.Math., Vol. 5, pp. 152-1531s.

KANTOROVICH, L. V., 1930. Sur Certains Developpements Suivant Les Polynomes De La Forme De S. Bernstein I, II. C.R. Acad. Sci. URSSS, 563-568, 395-600s.

KOROVKIN, P.P., 1953. Convergence Of Linear Positive Operators In The Spaces Of Continuous Functions. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.), Russian, 90, pp. 91-964s.

KREYSZIG, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applications. pp.Toronto, 82-469s.

LORENTZ, G.G. 1953. Bernstein Polynomials. University Of Toronto Press. ISSN 0076-5333 ,Toronto, 130s.

MARTINEZ, F.L. 1989. Some Properties Of Two-Demansional Bernstein Polynomials. Journal of Approximation Theory, Vol. 59, pp. 300-306s.

MIRAKYAN, G. M., 1941. Approximation Of Continuos Functions With The Aid Of Poynomials. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 31:201-205s.

MUSAYEV, B., ALP, M. ve MUSTAFAYEV, N. 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II. Tekağaç Eylül Yayıncılık., Kütahya, 1204 s.

KIRCI SERENBAY, S. and YAVUZ, H., 2021. “Approximation Of Modified Bernstein-Stancu Operators Of Maximum-Product Type,” presented at the İzdaş Kongre, Ankara.

STANCU, D. D., 1963. A Method For Obtaining Polynomials Of Bernstein Type Of

Two Variables. The American Mathematical Monthly, 70(3), 260-264s.
STANCU, D. D., 1968. Approximation Of Function By a New Class Of Polynomial Operators. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13(8): 1173–1194s.
STANCU, D.D. 1969. Asupra Unei Generalizari a Polinoamelor Lui Bernstein. Studia Univ. Babes-Bolyai (Rumence), Ser. Math.-Phys., Vol. 14, pp. 3-45s.
SZASZ O., 1950. Generalization Of S.Bernstein' s Polynomials To The Infinite Interval, J. Res. Nat. Bur. Standards, 45, 239-245s.
WEIERSTRASS, K. Über, 1885. Die Analytische Darstellbarkeit Sogenonnter Willkrlicher Functionan Einer Reellen Vernderlichen. Sitzung Sberichte Der Kriglich Previschen Akademie Der Wissenschaften Zu Berlin, Berlin, 633-639/ 789-805s.