

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Zelal TEMEL
Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

VAN – 2023

T.C.
VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Zelal TEMEL

VAN – 2023

KABUL VE ONAY SAYFASI

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Musa ÇAKIR danışmanlığında, Zelal TEMEL tarafından sunulan “İntegral Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Problemlerin Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 19/09/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Hakkı Duru

İmza:

Üye: Prof. Dr. Musa Çakır

İmza:

Üye: Prof. Dr. İlhame Amiralı

İmza:

Üye: Doç. Dr. Erkan Çimen

İmza:

Üye: Doç. Dr. Muaz Seydaoğlu

İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /.... /..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İmza

Zelal TEMEL



ÖZET

İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

TEMEL, Zelal

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

Eylül 2023, 125 sayfa

Bu tez çalışmasında, iki integral sınır şartına sahip singüler pertürbe özellikli problemler ve integral sınır şartına sahip singüler pertürbe özellikli Volterra integro diferansiyel problemler olmak üzere iki farklı tipteki problemler ele alınarak nümerik çözümler ortaya konulmaktadır.

Genel olarak, tez sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ele alınan problemin tarihsel olarak ortaya çıkışı ve hangi bilim dallarında kullanıldığı verilmektedir. İkinci bölümde, kaynak bildirişleri sunulmaktadır. Üçüncü bölümde, tez için yararlanacağımız meteryal ve yöntemler belirtilmiştir.

Dördüncü bölümde, singüler pertürbe lineer ve lineer olmayan sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanacağımız bazı temel tanımlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, bir nümerik metod kurularak ikinci mertebeden lineer singüler pertürbe probleminin çözümü verilmiştir. Öncelikle, singüler pertürbe problemin çözümü için açık sınırlar oluşturulmuştur. Ayrıca, Bakhvalov (Düzgün olmayan) şebekesinde bir fark şeması kurulmuştur. Daha sonra, maksimum normdaki pertürbasyon parametresi gözönünde bulundurularak bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Ayrıca yöntemin etkinliği, örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Altıncı bölümde, lineer olmayan singüler pertürbe probleminin hesaplanabilmesi için Bakhvalov şebekede bir fark şeması kurulmuştur. Fark şemasının düzgün yakınsaklığı ispatlanmıştır. Kullanılan metodun etkinliğini göstermek için iki örnek verilerek tablo ve grafikler sunulmuştur.

Yedinci bölümde, integral sınır şartlı lineer singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemini çözmek için fark şeması verilmiştir. Öncelikle, singüler pertürbe problem için açık sınırlar oluşturulmuştur. Ayrıca, fark şeması bir düzgün şebekede kurulmuştur. Daha sonra, pertürbasyon parametresi gözönünde bulundurularak maksimum normda bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Son olarak, yöntemin etkinliği örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Sekizinci bölümde, lineer olmayan singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemi gözönüne alınmıştır. Bu problem ve türevi için önce açık sınırlar oluşturulmuştur. Ayrıca, Shishkin şebekesinde fark şeması verilmiştir. Son bölümünde, iki örnek üzerinde yöntemin etkinliği gösterilmiştir ve problemin tablo verileri sunulmuştur.

Bu tezin son bölümünde, singüler pertürbe özellikli problemler ile yapmış olduğumuz çalışmalar ile ilgili literatüre yapılan katkılar ve daha önce yapılmış çalışmalar ile karşılaştırmalara yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Bakhvalov şebeke, Düzgün şebeke, İntegral sınır şarta sahip sınır değer problemleri, Shishkin şebeke, Volterra integro-diferansiyel denklem

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF SINGULARLY PERTURBED PROBLEMS WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS

TEMEL, Zelal

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Musa ÇAKIR

September 2023, 125 pages

In this thesis, two different types of problems, namely singularly perturbed problems with two integral boundary conditions and singularly perturbed Volterra integro differential problems with integral boundary conditions, are considered and numerical solutions are presented.

Overall, the thesis consists of eight chapters. The first chapter presents the historical emergence of the problem and the disciplines in which it is used. In the second chapter, source statements are presented. In the third chapter, the materials and methods that we will use for the thesis are stated.

In the fourth chapter, some basic definitions that we will use in solving linear and nonlinear boundary value and initial value problems of singularly perturbed are given.

In the fifth chapter, the solution of the second order linear singularly perturbed problem is given by establishing a numerical method. First of all, clear boundaries are established for the solution and derivative of the singularly perturbed problem. Also, a differential scheme has been established in the Bakhvalov (nonuniform) mesh. Then, the smooth convergence of these difference schemes is proved by considering the perturbation parameter at the maximum norm. In addition, the effectiveness of the method has been demonstrated on examples.

In the sixth chapter, a difference scheme in the Bakhvalov mesh is established to calculate the nonlinear singularly perturbed problem. Uniform convergence of the difference scheme has been proven. Tables and graphs are presented by giving 2 examples to show the effectiveness of the method used.

In the seventh chapter, the difference scheme for solving the linear singularly perturbed Volterra integro differential problem with integral boundary condition is given. First, clear boundaries are established for the singularly perturbed problem. Also, the difference scheme is set up in a smooth mesh. Then, by considering this perturbation parameter, the smooth convergence of these difference schemes at the maximum norm is proved. Finally, the effectiveness of the method is demonstrated on examples.

In the eighth chapter, nonlinear singularly perturbed Volterra integro differential equation is considered. For this problem and its derivative, firstly, clear boundaries are established. Also, the difference scheme in the Shishkin mesh is given. In the last part, the effectiveness of the method on two examples is shown and the tables data of the problem is presented.

In the last part of this thesis, the contributions to the literature and comparisons with the previous studies are given.

Keywords: Bakhvalov mesh, Boundary value problems with integral boundary condition, Shishkin mesh, Uniform mesh, Volterra integro-differential equation



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, benimle değerli bilgi ve birikimlerini paylaőan, her zaman ilgili ve örnek bir insan olarak gördüğüm danışmanım Sayın Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a teşekkür ederim. Ayrıca her zaman desteklerini hissettiğim, varlıkları ile beni ödüllendiren çok değerli annem Nesrin Temel'e ve çok değerli babam Cesim Temel'e teşekkür ederim. Her zaman beni destekleyen, yanımda olduğunu hissettiren ve moral ve motivasyonumu yükselten çok değerli kardeőim Dr. Civan Temel'e teőekkürlerimi bir borç bilirim.

2023

Zelal TEMEL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	7
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	11
4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	13
5. İKİ İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ	25
5.1 Sürekli Problem.....	25
5.2 Fark Şemasının Kurulması	31
5.3 Metodun Düzgün Yakınsaklığı ve Hata değerlendirme.....	36
5.4 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar.....	44
5.5 Sonuçlar.....	47
6. İKİ İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ.....	49
6.1 Çözümün Genel Özellikleri.....	49
6.2 Ayrık Problem	55
6.3 Düzgün Yakınsaklık ve Hata Değerlendirmeleri	60
6.4 Nümerik Sonuçlar.....	68
6.5 Sonuçlar.....	66
7. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER SİNGÜLER PERTÜRBE VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMİ	77
7.1 Sürekli Problemin Çözümü için Bazı Değerlendirmeler.....	77
7.2 Ayrık Problem	71
7.3 Düzgün Yakınsaklık ve Hata Değerlendirmeleri	86
7.4 Nümerik Sonuçlar.....	91
7.5 Sonuçlar.....	94
8. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PERTÜRBE VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMİ	95
8.1 Tam Çözüm için Bazı Değerlendirmeler.....	95

8.2	Fark Şemasının Analizi	100
8.3	Hata Analizi ve Düzgün Yakınsaklık	104
8.4	Nümerik Sonuçlar	113
8.5	Sonuçlar	116
9.	TARTIŞMA VE SONUÇ	117
	KAYNAKLAR	121
	ÖZ GEÇMİŞ	127



ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 4.1 Singüler pertürbe diferansiyel denklemin sınır katı durumları	18
Çizelge 5.1 (5.32)-(5.34) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	45
Çizelge 5.2 (5.32)-(5.34) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	44
Çizelge 6.1 (6.30)-(6.32) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	69
Çizelge 6.2 (6.30)-(6.32) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	72
Çizelge 7.1 (7.29)-(7.30) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Düzgün şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	92
Çizelge 7.2 (7.29)-(7.30) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Düzgün şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları.....	93
Çizelge 8.1 (8.23)-(8.24) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N parçalı düzgün (Shishkin) şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları	114
Çizelge 8.2 (8.23)-(8.24) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N parçalı düzgün (Shishkin) şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları	115

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1	Düzgün olmayan (Shishkin) şebeke grafiği	24
Şekil 5.1	Bakhvalov şebeke gösterimi.....	31
Şekil 6.1	Bakhvalov şebeke gösterimi.....	56
Şekil 6.2	$\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için yaklaşık çözüm grafik eğrisi	70
Şekil 6.3	$\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için yaklaşık çözüm grafik eğrisi	70
Şekil 6.4	$\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için yaklaşık çözüm grafik eğrisi	73
Şekil 6.5	$\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için yaklaşık çözüm grafik eğrisi	74
Şekil 8.1	Parçalı düzgün (Shishkin) şebeke	100
Şekil 8.2	Parçalı düzgün (Shishkin) şebeke gösterimi	101



SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında yararlanılan simgeler ve kısaltmalar detaylı bir şekilde açıklamalarıyla aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklama
C	ε ve h 'dan bağımsız bir genel sabit
$C^n[0, l]$	$[0, l]$ aralığında n 'inci sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi
e_ε^N	Şebekede kesin hata
e^N	Şebekede maximum hata
$\ g\ _{\infty, \omega_h}$	ω_h da şebeke normu
g_i	$g(x)$ fonksiyonunun x_i şebeke noktasındaki değeri
h	Şebeke adımı
l	Sonlu fark operatörü
L	Diferansiyel operatörü
N	Şebeke elemanlarının sayısı
$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N-1}$	Baz fonksiyonları
θ_i	Fark şemasının üstel katsayısı
u	Diferansiyel problemin kesin çözümü
y	Diferansiyel problemin nümerik çözümü
ω_h	$(0, l)$ bölgesinde şebeke
$\bar{\omega}_h$	$[0, l]$ bölgesinde düzgün şebeke



1. GİRİŞ

Singüler pertürbe özellikli problemler, en yüksek mertebeden türevlerin olduğu ve katsayılarında bir pozitif küçük parametrenin var olduğu problemler olarak bilinmektedir. Bu tür problemler için, küçük parametrelere sahip olunması, uygun nümerik çözüm bulmada oldukça büyük sorunlar oluşturmaktadır.

Bu pozitif küçük parametrenin varlığından dolayı singüler pertürbe problemlerin çözümleri, tanım bölgesinde sınır katı olarak bilinen ince geçiş katlarında oldukça düzensiz ve hızlı bir şekilde değişirken, diğer tanımlı bölgelerde genellikle çok düzenli ve yavaş değişir. Burada var olan bu düzensiz durum, singüler pertürbe problemlerdeki çözüm için, tanım bölgesinde sınırsız türevlere sahip olmasına neden olmaktadır. Bu durumda, bu şekildeki denklemlerin çözümlerinde ciddi sorunlar baş göstermektedir. Bu ortaya çıkan zorluklar, nümerik çözümlerde de var olmaktadır. Bu nedenle, şebeke adımlarının giderek küçük değerler almasıyla yaklaşık çözüm genellikle kesin çözümden ıraksamaktadır. Genel olarak kullanılan metodlar, sınır katlarının bulunduğu çözümün davranışını taklit edemez ve bu nedenle kesin çözümlerle karşılaştırıldığında daha büyük hatalara neden olmaktadır. Dolayısıyla, singüler pertürbe özelliklere sahip problemleri çözmek için uygun nümerik metodların kurulması büyük öneme sahiptir.

Genel olarak klasik nümerik metodlar, problemin gerçek çözümü için uyumlu nümerik sonuçlar vermediğinden dolayı aynı zamanda bu tez çalışmasındaki gibi, bu tür problemleri çözmek için ϵ parametresine göre düzgün yakınsaklık sonucuna sahip sonlu fark metodu gibi etkili nümerik metodlar kullanılmaktadır.

Bu singüler pertürbe özelliğe sahip denklemlere ilişkin ilk çalışmalar 1900'lerden beri çalışılmaya başlanılmıştır. Singüler pertürbe problemler, mühendislik alanında, tıp biliminde, fen bilimlerinde, ışık yayan dalgalar, iletişim hatları, aerodinamik, oşinografi, meteoroloji, manyetik dinamik, kütlelin hareketi, akışkanlar mekaniği, yayma teorisi, kimyasal reaktör, elektrik akımı, plazmadaki elektron plazma dalgaları, reaksiyon-difüzyon, arıtılmış gaz dinamik, iyon akustik dalgaları, plazma dinamik ve bazı fiziksel modellemelerde ortaya çıkmaktadır (Nayfeh, 1973; Doolan vd., 1980; Kevorkian ve Cole, 1981; O' Malley, 1991; Miller vd., 1996; Farrel vd., 2000; Roos vd., 2008).

Singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel denklemlerin uygulaması, birçok araştırmacı tarafından hem teorik hem de sayısal yönlerin incelendiği literatürde son

zamanlarda çok sayıda çalışılmıştır (Amiraliyev vd., 2007; Yapman vd., 2019; Liu vd., 2020; Temel ve Cakir, 2023).

Gerçek hayat durum problemlerini modelleyen çoğu diferansiyel ve integral denklemin analitik çözümlerinin bilinmediği iyi bilinmektedir. En az karmaşık problemler için bile analitik çözümleri hesaplamak zor bir iştir. Sayısal yaklaşımlar böylece bu tür problemlere yaklaşmak için en iyi alternatifi sağlar. Ancak, bu problemlerin çözümleri hızlı salınımlar (katmanlar) ile karakterize edilen diferansiyel ve integral denklemler için klasik sayısal yöntemler, bunları verimli bir şekilde çözemez.

Bu uygulama alanlarının çeşitliliğinden dolayı, integral sınır şartlarına sahip singüler pertürbe sınır değer problemlerini birçok araştırmacı çalışmıştır (Cannon, 1963; Chegis, 1991; Adzic, 2000; Borovykh, 2002; Jankowski, 2002; 2004; Cakir ve Amiraliyev, 2005; 2007; Amiraliyev vd., 2006; 2007; Cen ve Cai, 2007; Das ve Natesan 2013a; 2013b; Henderson vd., 2016; Cen vd., 2021; Debela ve Duressa, 2019; 2023; Liu ve Yang, 2021).

Lineer ve lineer olmayan singüler pertürbe problemleri için, farklar metodundan yararlanılarak nümerik çözümler sunulmaktadır. Daha açık bir şekilde ifade edilir ise, bu iki farklı yaklaşım verilmektedir:

- i) Düzgün şebekede üstel katsayılı fark şemalarının kurulması;
- ii) Sınır katları için kurullarla belirlenmiş olan düzgün olmayan şebekenin tercihine göre oluşturulan fark metotlarıdır.

İki tip yaklaşımda amaç, singüler pertürbe problemlerin özelliklerini daha iyi bir şekilde aksettirebilecek nümerik metodların oluşturulmasıdır.

Böylece, bu tez çalışmasında aşağıdaki biçimde tanımlanan integral şartlı singüler pertürbe sınır-değer ve başlangıç değer problemleri çalışılmıştır.

Bu tezdeki ilk çalışmada, aşağıdaki iki integral sınır şartlı ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli diferansiyel problemi üzerine çalışılmaktadır:

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l) \quad (1.1)$$

$$u(0) = \int_0^l g_1(x)u(x)dx + A, \quad (1.2)$$

$$u(l) = \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B, \quad (1.3)$$

burada, $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresidir. A ve B verilmiş sabitlerdir. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlar, $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t) \geq \beta > 0$ ve $f(t)$ fonksiyonları yeterince düzgündür. Bu şartlar altında, (1.1)-(1.3) probleminin sadece bir tek çözümü elde edilir. ε 'un küçük değerleri için $u(x)$ çözümünün genelde $x = 0$ civarında bir sınır katı vardır.

İkinci çalışmada, aşağıdaki iki integral sınır şartlı ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli lineer olmayan sınır değer problemi üzerine çalışılmaktadır.

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - f(x, u(x)) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (1.4)$$

$$u(0) = \int_0^l g_1(x)u(x)dx + A, \quad (1.5)$$

$$u(l) = \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B, \quad (1.6)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresi, A ve B verilen sabitlerdir. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlar, $a(x) \geq \alpha > 0$, fonksiyonları $[0, l]$ 'de ve $f(x, u)$ fonksiyonu $(x, u) \in [0, l] \times \mathbb{R}$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlar olsun. Bu şartlar ile (1.4) - (1.6) probleminin sadece bir tek çözümü elde edilir. ε 'un küçük değerleri için $u(x)$ çözümünün genelde $x = 0$ 'da bir sınır katı vardır.

Üçüncü çalışmada, aşağıdaki integral şartlı birinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel problemi ele alınmaktadır:

$$Lu \equiv \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t K(t, s)u(s)ds = f(t), \quad (1.7)$$

$$t \in I = (0, T],$$

$$u(0) = \int_0^T c(s)u(s)ds + A, \quad (1.8)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresidir. $\bar{I} = [0, T]$ olsun ve A verilmiş bir sabittir, $a(t) \geq \alpha > 0$, $c(t)$, $f(t)$ ve $K(t, s)$ fonksiyonları sırasıyla \bar{I} ve $\bar{I} \times \bar{I}$ aralığında yeterince düzgündür. Bu şartlar altında (1.7)-(1.8) problemi bir tek çözüme sahiptir. ε 'un küçük değerleri için $u(x)$ çözümü genelde $x = 0$ civarında bir sınır katı vardır.

Dördüncü çalışmada, aşağıdaki şekilde integral şartlı birinci mertebeden lineer olmayan singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel problemi ele alınmaktadır:

$$Lu \equiv \varepsilon u'(t) + f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s))ds = 0, \quad (1.9)$$

$$t \in I = (0, T],$$

$$u(0) = \int_0^T c(s)u(s)ds + A, \quad (1.10)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresidir. $\bar{I} = [0, T]$ olsun ve A verilmiş bir sabittir. $c(s)$, $f(t, u)$ ve $K(t, s, u)$ fonksiyonları sırasıyla \bar{I} , $\bar{I} \times \mathbb{R}$ ve $\bar{I} \times \bar{I} \times \mathbb{R}$ aralığında yeterince düzgündür. Ayrıca $\frac{\partial f}{\partial u} \geq \alpha > 0$ olarak ifade edilmektedir. Bu şartlar altında (1.9)-(1.10) problemi sadece bir tek çözüme sahiptir. ε 'nun küçük değerleri için, $u(x)$ çözümünün genellikle $x = 0$ civarında bir sınır katı vardır.

Genel olarak, bu çalışmanın amacı, pertürbasyon parametresine birinci mertebeden düzgün yakınsaklığa sahip (1.1)-(1.3), (1.4)-(1.6), (1.7)-(1.8) ve (1.9)-(1.10) problemleri için sonlu fark şeması kurmak ve yakınsaklık analizi vermektir.

Fark şemalarının birinci mertebeden düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Kurulan nümerik yöntem, her bir alt aralıkta tek tip bir ağ üzerinde yeni bir fark operatörü içerir. Fark şeması, üstel temel fonksiyonların kullanımı ve ağırlık ve kalan terimleri integral formda olan ifadelerden oluşturulmaktadır.

Bu kullanılan yöntem, klasik yöntemlere kıyasla çok daha düşük tam çözüm türevleri içeren bir yerel kesme hatasıyla sonuçlanır ve dolayısıyla yakınsamanın incelenmesini kolaylaştırmaktadır.

Bu tez çalışmasında, bildiğimiz kadarıyla şu ana kadar çok az sayıda integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli problemler için Bakhvalov (düzgün olmayan), düzgün ve Shishkin (parçalı düzgün) şebekelerde fark şeması kurulmaktadır. Kullandığımız yöntemin birçok avantajı vardır, çünkü problemimizin tahmini için daha az düzgün şart gereklidir. Dolayısıyla, nümerik metotların çözümü için kolay olmayan integral sınır şartının var olması ve aynı zamanda singüler pertürbe özellikte olması problemlerin çözümü için kullanılan sonlu farklar metodu genellikle kullanışlı ve etkilidir. Dolayısıyla, yöntem iyi sonuçlar vermektedir.

Bu tezde yapılan çalışmalardan yola çıkarak, integral sınır şartları ile karışık tipten ve lokal olmayan şarta sahip daha karmaşık tipteki şartları içeren singüler pertürbe diferansiyel denklemler ve kısmi türevli singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler de çalışılabilir. Ayrıca bu tür problemler için yakınsaklık oranı ikinci mertebeye çıkarılabilir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

Singüler pertürbe diferansiyel denklemler üzerine son yıllarda çok sayıda çalışmalar yapılmaktadır. Singüler pertürbe problemler, mühendislik alanında, tıp biliminde, fen bilimlerinde, iletişim hatları, ışık yayan dalgalar, aerodinamik, meteoroloji, manyetik dinamik, akışkanlar mekaniği, yayma teori, kimyasal reaktör, elektrik akımı, plazmadaki elektron plazma dalgaları, oşinografi, reaksiyon-difüzyon, kütle hareketi artırılmış gaz dinamik, plazma dinamik, iyon akustik dalgaları ve bazı fiziksel modellemelerde ortaya çıkmaktadır (Kevorkian ve Cole, 1981; O' Malley, 1991; Miller vd., 1996; Farrel vd., 2000; Roos vd., 2008).

Kopteva ve O.Riordan (2010), parçalı düzgün Shishkin şebekesinin önemli özelliklerinden bazılarını ele almışlardır. Nümerik analizde yer alan merkezi analitik teknikler, belirli bir singüler pertürbe diferansiyel denklemler sınıfı aracılığıyla açıklanmıştır. Shishkin tarafından tanıtılan nümerik yaklaşımın genelliği vurgulanmıştır.

Samoilenko ve Martynyuk (1991), integral sınır koşullarına sahip diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yaklaşık olarak oluşturulması ve araştırılması için sayısal-analitik bir ardışık yaklaşım yönteminin uygulanması için bir gerekçe sunmuştur.

Henderson vd. (2016), bazı pozitif sabitler içeren Riemann-Stieltjes integral sınır koşulları ile lineer olmayan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemini incelediler. Schauder sabit nokta teoremini ve ilişkili Green fonksiyonlarının bazı özelliklerini kullanarak, bu problemin yeterince küçük sabitler için en az bir pozitif çözümü olduğunu gösterdiler. Daha sonra, pozitif çözümlerin olmaması için yeterli koşulları verdiler.

Ahsan vd. (2023), singüler pertürbe problemlerini başlangıç, sınır, iki nokta, integral ve çok noktalı integral sınır koşulları gibi çeşitli sınır koşulları ile lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için daha yüksek dereceli bir Haar dalgacık yaklaşımı geliştirdiler. Ayrıca, yöntemin teorik yakınsama ve hesaplama kararlılığını sundular ve lineer olmayan durumda, bir yarı lineerleştirme tekniği benimsemişlerdir.

Bu uygulama alanlarının çeşitliliğinden dolayı, integral sınır şartlarına sahip sınır değer problemleri birçok araştırmacı çalışılmıştır (Prandtl, 1904; Nakhushev, 1985; Smith, 1985; Sapagovas ve Chegis, 1987a; 1987b; Shishkin, 1990; Chegis, 1991; Petrovic, 1991; Savin, 1995; Roos, 1998; Linß ve Stynes, 1999; Borovykh, 2002; Jankowski, 2002; Nicoud ve Schönfeld, 2002; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliyev, 2005;

2007; Cen ve Cai, 2007; Nayfeh, 2011; Das vd., 2013a; 2013b; Henderson vd., 2016; Sekar ve Tamilselvan, 2019a; 2019b).

İntegral sınır şartlı singüler pertürbe problemleri için varlık ve teklik konusunda birçok çalışma yapılmıştır (Cannon, 1963; Borovykh, 2002; Jankowski, 2004; Cen ve Cai, 2007; Das ve Natesan, 2013a; 2013b).

Birçok araştırmacı, integral sınır koşulları ile singüler pertürbe diferansiyel denklemler için sayısal yöntemler üzerinde çalışmıştır (Bakhvalov, 1969; Ionkin 1977; Kevorkian ve Cole, 1981; Chegis, 1988; Byszewski, 1991; Herceg, 1990; Herceg ve Surla, 1991; Benchohra, 2000; Dunne vd., 2007; Kopteva, 2007; Andreev ve Kopteva, 2008; Kellogg vd., 2008; Linß ve Stynes, 2009; Cakir, 2010; Das ve Natesan, 2013a; 2013b; Arslan, 2017; Kudu, 2018; Kudu vd., 2018; Yapman vd., 2019; Kumar ve Kumar, 2020; Cen vd., 2021; Kumar ve Vigo Agular J, 2022; Liu ve Yang, 2022; Debela ve Duressa, 2019; 2023).

Cakir (2016), integral sınır koşullu singüler pertürbe yarı lineer problemleri parçalı düzgün bir şebeke (Shishkin tipi şebeke) üzerinde sonlu bir fark yöntemi sunmuştur ve yöntemin ayırık maksimum normda bağımsız olarak birinci dereceden yakınsak olduğu kanıtlamıştır.

Cakir ve Amiraliyev (2005), lokal olmayan şarta sahip singüler pertürbe özellikli sınır değer problemleri için düzgün şebekede fark şemasını kullanarak nümerik çözümler geliştirmişlerdir.

Amiraliyev ve Cakir (2002), integral sınır şartlı singüler pertürbe sınır değer problemleri için sonlu fark metodunu geliştirmişlerdir.

Arslan (2020), singüler pertürbe çok noktalı sınır koşullarını içeren lineer olmayan problemin en iyi yaklaşımını bulmak için sonlu farklar yöntemini sunmuştur. Ayrıca Bakhvalov şebekesini kullanarak sonlu farklar şeması oluşturdu ve hata tahminine dayanarak, bu yöntemin birinci dereceden, ayırık maksimum normda düzgün yakınsak bir yöntem olduğunu kanıtlamıştır.

Munyakazi ve Kehinde (2022), lineer olmayan singüler pertürbe konveksiyon-difüzyon problemlerini çözmek için nümerik bir yaklaşım sundular. Yöntemin, logaritmik faktör dışında tekil pertürbasyon parametresinden bağımsız olarak, ayırık maksimum normda birinci dereceden yakınsak olduğunu kanıtlanmıştır.

Debela ve Duressa (2019), integral sınır şartlı singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemi çözmek için üstel olarak yerleştirilmiş sonlu farklar yöntemi ele alınmıştır. İntegral sınır şartını ele almak için Simpson kuralı uygulamışlardır ve önerilen yöntemin kararlılığı ve düzgün yakınsaklığı kanıtlanmıştır.

Sekar ve Tamilselvan (2019b), integral sınır şartına sahip konveksiyon difüzyon tipi üçüncü mertebeden singüler pertürbe gecikmeli diferansiyel denklemler sınıfı ele almışlardır. Ayrıca Shishkin şebeke üzerindeki sonlu farklar şemasına dayanan sayısal bir yöntem sunulmuştur ve önerilen yöntemin hemen hemen birinci dereceden yakınsak olduğunu göstermişlerdir.

Liu vd. (2020), lineer olmayan birinci mertebeden singüler pertürbe integral sınır koşuluna sahip bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü ele almışlardır. Yöntem, bir Euler formülü ile üretilmiştir ve şebeke elde edilmiştir.

Liu vd. (2021), İntegral sınır koşuluna sahip yarı lineer singüler pertürbe problemin sayısal çözümü ele alınmıştır. Diferansiyel denklemi ayrıklaştırmak için, Euler formülünü kullanarak ve integral sınır koşulu için dikdörtgen formülü ile düzgün olmayan şebeke üzerine inşa etmişlerdir. Kesme hatası analizi ve şebeke, eşit dağılım ilkesine dayalı olarak, uyarlanabilir bir şebeke elde etmek için uygun bir yöntem göstermişlerdir.

Bildiğimiz kadarıyla, singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemler için sadece birkaç araştırmacı sayısal yöntemleri tartışmışlardır. Örneğin, Kudu vd. (2016), lineer birinci dereceden singüler pertürbe Volterra gecikmeli-integro-diferansiyel problemler için bir Shishkin şebeke üzerinde bir sonlu fark şeması oluşturmuştur.

Yapman ve Amiraliev (2021), lineer olmayan bir singüler pertürbe gecikmeli Volterra integro-diferansiyel problemler için bir sonlu fark metodu sundular ve pertürbasyon parametresinde birinci dereceden düzgün yakınsayan bir şebeke üzerinde uygun bir fark şeması önerdiler.

Yapman ve Amiraliev (2021), birinci mertebeden singüler pertürbe Volterra diferansiyel denklemini çözmek için ikinci dereceden homojen (hibrit olmayan) tip fark şemasıyla ilgilendiler ve yöntemin düzgün yakınsaması gösterdiler.

Yapman ve Amiraliev (2020), düzgün olmayan şebeke üzerinde sonlu bir fark şeması sundular ve şemanın pertürbasyon parametresinden bağımsız olarak ayrık maksimum normda birinci dereceden yakınsak olduğunu kanıtladılar.

Kumar ve Kumar (2022), lineer olmayan singüler pertürbe Volterra integro diferansiyel denklemini ele alarak, düzgün olmayan bir şebeke üzerinde bir sonlu farklar şemasıyla ayrıklaştırmışlardır. Şema, türev terimi için örtük bir fark operatöründen ve integral terimi için uygun bir dikdörtgen metodundan oluşturmuşlardır. Ayrıca küçük pertürbasyon parametresinde, düzgün bir şekilde düzgün fark şeması için hata tahminleri oluşturmuşlardır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Giriş ve kaynak bildirişleri bölümlerine bakılırsa eğer literatürde integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli problemler ve integral sınır şartlı singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemler ile alakalı etkili birçok çalışmanın olduğu gözlemlenmektedir.

Bu tezde, meteryal olarak düşünölen bazı çalışmaları, tezin kaynaklar kısmında iki integral sınır şartlı singüler pertürbe ve integral şartlı singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemleri için verilmiştir ve tez konusunda geçen bazı temel bilgileri kapsayan kitaplar gösterilmiştir.

Bu tez, 1. Giriş, 2. Kaynak Bildirişleri ve 3. Materyal ve Yöntem bölümleri ile birlikte dokuz bölümden oluşmaktadır.

Dördüncü bölümde, tez çalışmasında gözönüne aldığımız sınır değeri problemlerini çözebilmek için kullanacağımız metodlarla ilgili bazı temel tanım, ve lemmalar verilmiştir.

Beşinci bölümde, integral şartlı ikinci mertebeden lineer singüler pertürbe diferansiyel problemleri için fark şemasının kurulması, yakınsaklığı ve hata değeri değerlendirilmesi yapılmaktadır. Ayrıca Bakhvalov şebekede fark şeması kurulmuştur.

Altıncı bölümde, integral şartlı ikinci mertebeden lineer olmayan singüler pertürbe diferansiyel problemi için önce fark şeması kurularak, düzgün yakınsaması ve hata değeri değerlendirilmesi yapılarak sonlu fark metodu sayesinde sonuçlar elde edilmektedir. Daha sonra, Bakhvalov şebekede fark şeması kurulmuştur.

Yedinci bölümde, integral şartlı birinci mertebeden lineer singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemi için fark şeması kurularak ardından düzgün yakınsaklığını ve hata değeri değerlendirmeleri sonlu fark metodu yardımıyla yapılmaktadır. Düzgün şebekede fark şeması kurulmuştur.

Sekizinci bölümde, integral sınır şartlı birinci mertebeden lineer olmayan singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemi için fark şeması kurularak düzgün yakınsaması ve hata değeri değerlendirilmesi yapılarak sonlu fark metodundan yararlanılmaktadır. Daha sonra, Shishkin şebekede fark şeması kurulmuştur.

Tezin son bölümde ise tezimizde yaptığımız bu dört ana başlık altında verdiğimiz integral sınır şartlı singüler pertürbe problemlerinin sonuçlarını, literatüre etki edecek faydalarını

ve daha önce yapılmış literatürde yer alan bazı çalışmaların karşılaştırılması yapılmaktadır.



4. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, fark şemasının oluşturulmasında faydalanılan, sürekli bölgede tanımlanmış fonksiyonlar için bazı temel tanımlar ve yardımcı teoremler detaylı bir şekilde ele alınmaktadır.

Tanım 4.1 Düzgün Şebekede Fark Türevleri

$\bar{\Omega}$ aralığındaki $v(x)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki şekilde verilmiştir (Samarskii, 2001).

- a) $v_{x,i} = \frac{v_{i+1}-v_i}{h}$ eşitliğine birinci mertebeden ileri fark türevi,
- b) $v_{\bar{x},i} = \frac{v_i-v_{i-1}}{h}$ eşitliğine birinci mertebeden geri fark türevi,
- c) $v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1}-v_{i-1}}{2h}$ eşitliğine birinci mertebeden merkezi fark türevi,
- d) $v_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2}$ eşitliğine ikinci mertebeden fark türevi denir.

Tanım 4.2 Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri

$\bar{\Omega}$ aralığındaki $v(x)$ fonksiyonunun düzgün olmayan şebeke için fark türevleri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

- a) $v_{x,i} = \frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}}$ ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi,
- b) $v_{\bar{x},i} = \frac{v_i-v_{i-1}}{h_i}$ ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi,
- c) $v_{\hat{x},i} = \frac{v_{x,i}+v_{\bar{x},i}}{2}$ ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi,
- d) $v_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{v_{x,i}+v_{\bar{x},i}}{\bar{h}_i}$ ifadesine ikinci mertebeden fark türevi denir.

Ayrıca, $h_i = x_i - x_{i-1}$ ve $\bar{h}_i = \frac{h_i+h_{i+1}}{2}$ biçimindedir (Samarskii, 2001).

Tanım 4.3 Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

a) $\bar{\Omega}$ aralığında sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanan fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir.

b) $\bar{\Omega}$ aralığında tanımlanan

$$\bar{\omega} = \{x_i | 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\} \quad (4.1)$$

ayrık noktalar kümesine $\bar{\Omega}$ 'da tanımlanan düzgün olmayan şebeke denir. x_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. $h_i = x_i - x_{i-1}$ şebeke adımındır.

c) Düzgün olmayan şebekede tanımlanan $v_i \equiv v(x_i)$ fonksiyonuna x_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu denir (Amirali ve Amirali, 2023).

Tanım 4.4

$v(x)$, $\bar{\Omega}$ aralığında tanımlı herhangi bir sürekli fonksiyon olsun.

a) $C^{(n)}(\bar{\Omega})$ ifadesine $\bar{\Omega}$ aralığında x 'e göre n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi denir.

b)

$$\|v\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \max_{0 \leq x \leq l} |v(x)|, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2)$$

ifadesine $\bar{\Omega}$ aralığında sürekli fonksiyonlar için maksimum norm denir (Amirali ve Amirali, 2023).

Tanım 4.5 Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \quad (4.3)$$

denkleminin

$$lu = \mu(x), \quad x \in \Gamma \quad (4.4)$$

koşuluna (sınır şartı veya başlangıç şart olabilir) uygun bir çözüm bulunacağını düşünelim, ayrıca $f(x)$, $\mu(x)$ fonksiyonları belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), l belirli bir lineer diferansiyel operatör olsun. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup l_h$ şebekenin kurulduğunu varsayarsak, burada ω_h -iç şebeke, l_h -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümleri için yoğunluğu ifade eden parametredir (şebeke adımı). (4.3)-(4.4) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \quad (4.5)$$

$$l_h y = X_h, \quad x \in l_h \quad (4.6)$$

fark problemi olsun.

(4.3)-(4.4) fark problemi, belirli sınıflardan oluşan her bir φ_h , X_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüm var olduğunu düşünelim. (4.3)-(4.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h$, \tilde{X}_h olan çözümünü \tilde{y} olarak verelim.

Eğer, h 'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri var ise, yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{X}_h - X_h\|_3 \quad (4.7)$$

eşitsizliğinin sağladığını varsayalım, O halde (4.5)-(4.6) fark şeması sağ tarafına ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir (Samarskii, 2001).

Tanım 4.6 Yakınsaklık

u , problemin bir kesin çözümü ve y ise herhangi bir şebekedeki ele alınan probleme uygun fark probleminin bir çözümü olsun. $z = y - u$, hata fonksiyonu olarak verilmektedir.

Varsayalım ki, $h \rightarrow 0$ olduğunda $\|z\|_0 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$ ise bu durumda y fark problemin çözümü u probleminin çözümüne yakınsıyor denir (Samarskii 2001).

Tanım 4.7 Düzgün Yakınsaklık

$u(x)$ diferansiyel problemin çözümü, y_i uygun fark probleminin çözümü, $\|\cdot\|$ ise belli bir şebeke normu olsun. Eğer ε 'dan ve h 'dan bağımsız bir C sabiti için

$$\|y - u\| \leq Ch^p, \quad p > 0 \quad (4.8)$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu ise, bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızıyla ε 'a göre düzgün yakınsaktır denir (Amirali ve Amirali, 2023).

Lemma 4.1 Farz edelim ki, $v(x), v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$, $Lv(x) \geq 0$ ($0 < x < l$), $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ifadelerini sağlayan fonksiyon olsun. Böylece $v(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq l$) olur.

İspat. Aksini ispatlayalım. Eğer, $v(x_0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ olduğuna göre öyle x_0 ve x_1 noktaları vardır ki $v(x_0) = 0$, $v(x_1) = 0$, $v(x) < 0$ ($x_0 < x < x_1$)'dir. Böylece, bir $\xi \in (x_0, x_1)$ noktası vardır ki,

$$v''(\xi) = \frac{v(x_1) - 2v((x_0 + x_1)/2) + v(x_0)}{((x_1 - x_0)/2)^2} \geq 0 \quad (4.9)$$

olur. Bu durumdan ve $v(\xi) < 0$ olmasından dolayı $Lv(\xi) < 0$ olur. Böylece Lemma 4.1 ifadesi ile çelişmiş olur (Amirali ve Amirali, 2023).

Tanım 4.8

$\varepsilon = 0$ şartı için P_0 probleminin çözümü için, başka bir biçimde $L(u_0, 0) = 0$ eşitliğiyle tanımlanan problemin çözümü, u_0 olduğunu varsayalım. P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir.

Dolayısıyla, P_0 indirgenmiş problemi, verilen problemlerle aynı biçime ve aynı mertebeye sahip ise, aynı zamanda her iki problemin de bir tek çözümü var ise P_ε problemine regüler pertürbe olmuş problem, aksi takdirde singüler pertürbe olmuş problem denir (Amirali ve Amirali, 2023).

Tanım 4.9 Sınır Katı

Singüler pertürbe problemlerinin çözümlerinin çok hızlı değişebildiği herhangi bir seçilen sınır noktasının komşuluğu, bu sınır noktasının bir sınır katı olarak tanımlanır. Sınır katının var olduğu durumlar dışındaki üstel küçük değerleri olan fonksiyonlara ise sınır katı fonksiyonu denir. Başlangıç-değer problemleri için kullanılan sınır katına ise başlangıç katı denir (Amirali ve Amirali, 2023).

Böyle bir ikinci mertebeden singüler pertürbe reaksiyon-difüzyon-konveksiyon problemi verilsin;

$$\varepsilon u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x) \quad (4.10)$$

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 1 \quad (4.11)$$

Burada singüler pertürbeli diferansiyel denklemin sınır katı durumları aşağıdaki tablo da verilmiştir (Kadalbajoo ve Gupta, 2010).

Çizelge 4.1 Singüler pertürbe diferansiyel denklemin sınır katı durumları

	$p(x)$ 'in durumu	Çözümde görülen değişim
$p(x) \neq 0$	$p(x) < 0$	$x = a$ noktasında sınır katı
$p(x) \neq 0$	$p(x) > 0$	$x = b$ noktasında sınır katı
$p(x) = 0$	$q(x) > 0$	$x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki sınır katı
$p(x) = 0$	$q(x) < 0$	Hızlı salınımlı çözüm
$p(x) = 0$	$q(x)$, işaret değiştiriyorsa	Klasik dönüm noktası
$p'(x) \neq q(x)$	$p'(0) < 0$	Sınır katı yok ya da $x = 0$ da iç sınır katı var
$p(0) = 0$	$p'(0) > 0$	$x = a$ ve $x = b$ de sınır katı var $x = 0$ da iç sınır katı yoktur.

Tanım 4.10 Bariyer Fonksiyonu

Diferansiyel problemlerin çözümlerini değerlendirebilmek için problemlerin başlangıç verilerini ele alarak maksimum prensibi ile kullanılan fonksiyonlara bariyer fonksiyonu denir (Doolan vd., 1980).

Tanım 4.11 Kuadratür Formülleri

Problemin çözümü için oluşturulan fark şemalarının oluşturulması ve incelenmesi için aşağıdaki şekilde kuadratür formülleri ele alınacaktır (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amirali ve Amirali, 2023).

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1 - \sigma)f(a) \} \\ + f(a; b) \int_a^b (x - x^{(\sigma)})p(x)dx + R(f). \quad (4.12)$$

Burada, σ reel bir parameter olsun, $p(x) \in [a, b]$ aralığında bir ağırlık fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

$$R(f) = \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x, \xi)d\xi, \quad f \in C^n, \\ n = 1 \text{ veya } 2, \quad (4.13)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dxp'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)K_{n-1}(x, \xi)d\xi, \quad f \in C^n, n \\ = 1 \text{ veya } n = 2 \quad (4.14)$$

$$\bar{R}(f) = - \int_a^b dxp(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi)K_0(x, \xi)d\xi, \quad f \in C^2[a, b]. \quad (4.15)$$

Ayrıca,

$$K_0(a, \xi) = K_0(b, \xi) = 0, \quad (4.16)$$

$$K_1(a, \xi) = K_1(b, \xi) = K_1(x, a) = K_1(x, b) = 0 \quad (4.17)$$

ve

$$K_1(x, \xi) = K_1(\xi, x) \quad (4.18)$$

olduğu kolayca görülebilir.

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(x)dx + R^*(f), \quad (4.19)$$

burada

$$\begin{aligned} R^*(f) &= \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}^*(x, \xi) d\xi \\ &+ (n-1)f(a; b) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) p(x) d(x), \quad n \\ &= 1 \text{ veya } n = 2, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} K_s^*(x, \xi) &= T_s(x - \xi) - T_s\left(\frac{a+b}{2} - \xi\right) \\ &+ (b-a)^{-1}(b-\xi)^s \left(\frac{a+b}{2} - x\right), \quad s = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Tanım 4.12 Dikdörtgen Metodu

$[a, b]$ aralığında $\{x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n; h = (b-a)/n\}$ düğümlerini verelim. Genelleştirilmiş dikdörtgen formülü aşağıdaki şekilde verilir (Amirali ve Amirali, 2023):

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_i^n f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + R(f) \quad (4.22)$$

ve

$$R(f) = \sum_{i=1}^n R_i(f) = \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f'''(\eta_i) \quad (4.23)$$

Tanım 4.13

Landau gösterimi deneni o ve O gösterimini (“büyük oh” ya da “geniş oh”) tanıtalım: f ve g reel (veya kompleks) sayılar kümesinin bir $D \subset X \rightarrow Y$ alt kümesi üzerinde bir fonksiyon olsun. $X = Y = \mathbb{R}$. A 'yı D bölgesinin bir alt kümesi olarak alalım (Nayfeh, 1973).

Eğer, $|f(x)| \leq M|g(x)|$, $\forall x \in A$ için $M > 0$ sayıları varsa, bu durumda f 'ye A üzerinde g mertebesinden denir ve onu $f(x) = O(g(x))$ ile gösteririz. g 'nin mertebesi, A üzerinde g ile asimptotik olarak daha küçük veya eşit düşünülebilen tam fonksiyonların sınıflarıdır. Eşdeğer olarak, $g(x)$, A üzerinde sıfırdan farklı ise,

$$\sup_{x \in A} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty, \quad (4.24)$$

yani $\left| \frac{f}{g} \right|$, A üzerinde sınırlıdır (Nayfeh, 2011).

Örnek 4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (4.25)$$

olduğundan $x \rightarrow 0$ için $\sin(x) = O(x)$ olarak gösterilir.

Tanım 4.14 Herhangi $\varepsilon > 0$ için X_∞ ,

$$z \in U_\varepsilon \cap A \Rightarrow |f(z)| \leq \varepsilon |g(z)| \quad (4.26)$$

olacak şekilde U_ε 'un z_0 komşuluğunda içeriyorsa, o halde $A \subset X_\infty$ için de $z \rightarrow z_0$ olursa f 'e g 'nin küçük mertebesi denir ve $z \rightarrow z_0$ iken $f(z) = o(g(z))$ olur. Aynı biçimde, eğer g , z_0 yakınında sıfırdan farklı ise ve $z_0 \in A$ için $f(z_0) = 0$ olduğunda

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ x \in A}} \frac{f(z)}{g(z)} = 0 \quad (4.27)$$

yazılabilir (Nayfeh, 1973).

Örnek 4.2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{1} \right| = 0 \quad (4.28)$$

olduğundan $x \rightarrow 0$ için $\sin(x) = o(1)$ olarak gösterilir.

Tanım 4.15 İntegral Denklemler ve Sınıflandırılması

λ bir parametre olacak şekilde,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (4.29)$$

biçiminde yazılabilen denklemlere integral denklem denir. Burada $K(x, t)$ fonksiyonu çekirdek fonksiyonudur ve $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ integral sınırları olarak adlandırılır. Bu integral denklemler çeşitlerine göre sınıflara ayrılır.

1. Homojen olmayan lineer Volterra integral denklemi aşağıdaki şekilde verilir;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (4.30)$$

2. Homojen lineer Volterra integral denklemi aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (4.31)$$

3. Linear olmayan Volterra integral denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, u(t))dt \quad (4.32)$$

Aynı zamanda, özelliklerine göre integral denklemler, birinci çeşit ve ikinci çeşit denklemler olacak biçimde gösterilir. İkinci çeşit Volterra integral denklemi aşağıdaki şekilde verilir;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (4.33)$$

Birinci çeşit Volterra integral denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir;

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt; \quad (4.34)$$

(Wazwaz, 2010).

Tanım 4.16. Gronwall Eşitsizliği

$y_j \geq 0$ fonksiyonu

$$y_j \leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{a_k y_k + b_k y_{k-1} f_k\}, \quad (4.35)$$

$$y_0 \leq \alpha \quad (4.36)$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda

$$y_j \leq \alpha P_j + \tau \sum_{k=1}^j \frac{f_k}{1 - \tau a_k} P_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

olur.

Eğer, ayrıca $a_k = c_0 = sbt$, $b_k = c_1 = sbt$ ise, o zaman

$$y_j \leq \alpha \exp\left[\frac{(c_0 + c_1)t_j}{1 - \tau c_0}\right] + \frac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{k=1}^j f_k \exp\left[\frac{(c_0 + c_1)t_{j-k}}{1 - \tau c_0}\right], j = 1, 2, \dots \quad (4.38)$$

olur (Amirali ve Amirali, 2023).

5. İKİ İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Burada ki çalışmada aşağıdaki şekilde iki integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli sınır değer problemi ele alınmaktadır.

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (5.1)$$

$$u(0) = \int_0^l g_1(x)u(x)dx + A, \quad (5.2)$$

$$u(l) = \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B, \quad (5.3)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresi, A ve B verilen sabitlerdir. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlar, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$, $f(x)$, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ bölgesinde yeterince düzgün fonksiyonlar olsun. Bu şartlar ile birlikte (5.1) - (5.3) problem sadece bir çözüme sahiptir. ε 'un küçük değerleri için $u(x)$ çözümünün genellikle $x = 0$ bölgesinde çözümü vardır.

5.1 Sürekli Problem

Burada (5.1) - (5.3) problemini çözebilmek için bazı değerlendirmeler vereceğiz. Bu değerlendirmeler sonraki bölümlerde kullanacağımız uygun nümerik çözümlerin analizinde yardımcı olmaktadır.

Lemma 5.1 $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ ve $g(x) \in C[0, l]$ alalım ve $u(x)$ fonksiyonu, (5.1) - (5.3) probleminin çözümü olsun ve

$$\gamma = \int_0^l (|g_1(x)| + |g_2(x)|)dx < 1 \quad (5.4)$$

şartı sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad (5.5)$$

ve

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.6)$$

burada C_0 aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$C_0 = (1 - \gamma)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}) \|u\|_{\infty} \leq C_0. \quad (5.7)$$

İspat. İlk olarak, (5.5) eşitsizliğini ispatlayacağız. Burada (5.1) - (5.3) problemi için Lemma 4.1'den maksimum yöntemini gözönünde bulunduracağız. (5.1)'de L bir diferansiyel operatör ve $v \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $0 < x < l$ için $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ve $Lv \leq 0$ ise o zaman $0 \leq x \leq l$ için $v(x) \geq 0$ olur. (5.1)-(5.3) problemi için maksimum prensibi kullanılırsa

$$|u(x)| \leq |u(0)| + |u(l)| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}, \quad x \in [0, l] \quad (5.8)$$

eşitsizliğini alırız. Daha sonra (5.2)-(5.3) sınır şartlarından

$$|u(0)| \leq |A| + \int_0^l |g_1(x)| |u(x)| dx \quad (5.9)$$

ve

$$|u(l)| \leq |B| + \int_0^l |g_2(x)| |u(x)| dx \quad (5.10)$$

yazabiliriz. (5.9) ve (5.10) eşitsizliklerini (5.8) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
& |u(x)| \leq |A| + |B| \\
& + \int_0^l |g_1(x)| |u(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| |u(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \\
& \leq |A| + |B| + \max_{[0,l]} |u(x)| \int_0^l |g_1(x)| dx \\
& + \max_{[0,l]} |u(x)| \int_0^l |g_2(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \\
& \leq |A| + |B| + \|u\|_\infty \int_0^l |g_1(x)| dx \\
& + \|u\|_\infty \int_0^l |g_2(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty
\end{aligned} \tag{5.11}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
& (1 - \int_0^l |g_1(x)| dx - \int_0^l |g_2(x)| dx) \|u\|_\infty \leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \\
& \|u\|_\infty \leq \left(1 - \left(\int_0^l |g_1(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| dx \right) \right)^{-1} (|A| + |B| \\
& + \alpha^{-1} \|f\|_\infty) \\
& \leq (1 - \gamma)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

eşitsizliğini buluruz. Burada γ aşağıdaki biçimdedir:

$$\gamma = \int_0^l (|g_1(x)| + |g_2(x)|) dx < 1. \tag{5.13}$$

Böylece (5.5)'i ispatlamış oluruz. Şimdi ise (5.6)'nın ispatını verelim: (5.1) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) = F(x). \tag{5.14}$$

Burada $F(x)$ 'i aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$F(x) = f(x) + b(x)u(x). \quad (5.15)$$

(5.14) denkleminde $u'(x) = v(x)$ alırsak,

$$\varepsilon v'(x) + a(x)v(x) = F(x) \quad (5.16)$$

yazabiliriz. (5.16) denkleminde aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$v(x) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi. \quad (5.17)$$

Buradan,

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi \quad (5.18)$$

bulunur. (5.18)'deki $u'(0)$ özdeşliği için bir değerlendirme sunacağız. (5.18) eşitsizliğinin $[0, l]$ bölgesinde integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} & - \int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B - A \\ & = u'(0) \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19)'dan $u'(0)$ 'ı çekersek,

$$u'(0) = \quad (5.20)$$

$$\frac{B - A + \int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi dx}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} dx}$$

eşitliğini buluruz. (5.20)'deki integralleri sırasıyla değerlendirelim. İlk önce paydadaki integrali ele alalım

$$\begin{aligned} & \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} dx \geq \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \bar{a} d\tau} dx \\ & = \int_0^l e^{-\frac{\bar{a}x}{\varepsilon}} dx = -\frac{\varepsilon}{\bar{a}} \left(e^{-\frac{\bar{a}l}{\varepsilon}} - 1 \right) = \frac{\varepsilon}{\bar{a}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{a}l}{\varepsilon}} \right) \\ & = \delta \varepsilon \quad \left(\delta \neq \delta \varepsilon > 0, \quad \bar{a} = \max_{[0,l]} |a(x)| \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi ise (5.20)'deki pay kısmındaki integralleri değerlendirelim. Bu integrallere ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi dx \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \left[\int_0^x |F(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi \right] dx \\ & \leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi dx \leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi dx \\ & \leq \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\ & = \alpha^{-1} \|F\|_\infty \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\ & \leq \alpha^{-2} \varepsilon \|F\|_\infty \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}} \right) \leq \|F\|_\infty C_1 \leq C_1 \end{aligned} \quad (5.22)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx \right| \\ & \leq \int_0^l |g_1(x)||u(x)|dx + \int_0^l |g_2(x)||u(x)|dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{[0,1]} |u(x)| \left(\int_0^l |g_1(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| dx \right) \\
&\leq \|u\|_\infty \left(\int_0^l |g_1(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| dx \right) \\
&\leq C_2
\end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitsizliklerini bulmuş oluruz. (5.21), (5.22) ve (5.23) bağıntıları, (5.20)'de yerine yazılırsa,

$$|u'(0)| \leq \frac{|A|+|B|+C_2+\|F\|_\infty C_1}{\delta\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon}, \tag{5.24}$$

eşitsizliği bulunur. (5.18) eşitliğinin mutlak değeri alınır,

$$\begin{aligned}
|u'(x)| &\leq |u'(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x |F(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \alpha d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \|F\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x \alpha d\tau} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \|F\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{\|F\|_\infty}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) \varepsilon \alpha^{-1} \\
&= \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C
\end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.25) eşitsizliği (5.6) eşitsizliğini sağlar. Böylece Lemma 5.1'in ispatı tamamlanmış olur.

5.2 Fark Şemasının Kurulması

Bu bölümde, (5.1)-(5.3) singüler pertürbe özellikli problem için bir sonlu fark şeması vereceğiz. Şimdi, $[0, l]$ bölgesinde aşağıdaki şekilde bir ω_N düzgün olmayan (Bakhvalov) şebekenin tanımını verelim:

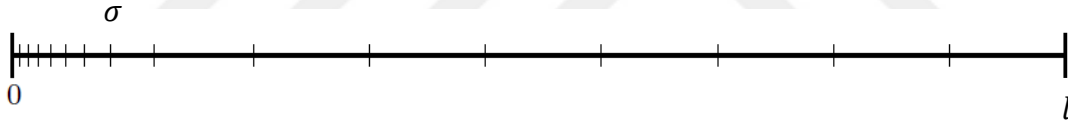
$$\omega_N = \{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l, h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (5.26)$$

ve

$$\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x = 0\}. \quad (5.27)$$

Burada, (5.1) ve (5.3) singüler pertürbe özellikli problemi çözebilmek için düzgün olmayan (Bakvalov) şebeke üzerinde tanımlanan sonlu bir fark metodu kullanıyoruz.

Bakvalov şebeke mantığı aşağıdaki doğrudaki gösterildiği gibidir,



Şekil 5.1 Bakhvalov şebeke gösterimi

N sayısı için, Bakhvalov şebeke $[0, \sigma]$ aralığında $\frac{N}{2} + 1$ noktaya ve $[\sigma, l]$ aralığında $\frac{N}{2} + 1$ noktaya bölünür. Burada,

$$\sigma = \min \left\{ \frac{l}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon| \right\}, \quad (5.28)$$

bir geçiş noktası olarak verilir.

(5.1)-(5.3) probleminin $u(x)$ yaklaşık çözümü Bakhvalov şebekede hesaplanacaktır. $[\sigma, l]$ aralığı, ikiye bölünebilen bir pozitif tamsayı olan N için iki alt aralığa $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ bölünür. Dolayısıyla, sırasıyla $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ 'de h_i adım boyutunu belirtirsek, şebeke noktaları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$x_i \in [0, \sigma]: x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2}, \quad (5.29)$$

$\sigma < \frac{l}{2}$ durumu için,

$$x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{2\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2} \quad (5.30)$$

$\sigma = \frac{l}{2}$ durumu için,

$$x_i \in (\sigma, l]: x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2} \right) h, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \quad (5.31)$$

ve

$$h = \frac{2(l-\sigma)}{N}. \quad (5.32)$$

(5.1) denklemi için fark metodunun yaklaşımı aşağıdaki özdeşlikle başlayacağız:

$$\begin{aligned} & \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \psi_i(x) dx \\ & \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

Burada $\psi_i(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanan baz fonksiyonlarıdır:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \psi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases} \quad (5.34)$$

Burada $\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\psi_i''(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad (5.35)$$

$$\psi_i(x_{i-1}) = 0, \quad \psi_i(x_i) = 1 \quad (5.36)$$

ve

$$\psi_i''(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (5.37)$$

$$\psi_i(x_i) = 1, \quad \psi_i(x_{i+1}) = 0. \quad (5.38)$$

$\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları

$$\psi_i^{(1)}(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad \psi_i^{(2)}(x) = \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}} \quad (5.39)$$

şeklinde açık bir şekilde ifade edilmektedir. Ayrıca,

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x) dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i^{(2)}(x) dx = 1 \quad (5.40)$$

olduğu görülmektedir. (5.33) bağıntısında, Lu yerine (5.1) denklemini yazılırsa,

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon u''(x) \psi_i(x) dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x) u'(x) \psi_i(x) dx$$

$$- \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} b(x) u(x) \psi_i(x) dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.41)$$

eşitliği elde edilir. (5.41)'de ki eşitliğin sağ tarafındaki birinci integrale kısmi integrasyon uygulayarak ve diğer integraller yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \psi_i^{(1)'}(x) dx - \varepsilon \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \psi_i^{(2)'}(x) dx \\ & + a_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \psi_i^{(1)}(x) dx \\ & + a_i \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \psi_i^{(2)}(x) dx - b_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \psi_i^{(1)}(x) dx \\ & + b_i \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) \psi_i^{(2)}(x) dx \end{aligned}$$

$$= f_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i(t) dx - R_i^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.42)$$

elde edilir.

$R_i^{(1)}$ kalan terimi aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$R_i^{(1)} = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] \psi_i(x) u'(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.43)$$

(5.21)'de ki integrallerin her biri için (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralıklarında Tanım 4.11' de ki kuadratür formülleri uygulanır ise,

$$\begin{aligned} -\varepsilon \hbar_i^{-1} u_{\bar{x},i} + a_i u_{\bar{x},i} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x) dx + a_i u_{x,i} \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i^{(2)} dx + \varepsilon \hbar_i^{-1} u_{x,i} \\ - b_i u_i = f_i - R_i^{(1)} - R_i^{(2)} - R_i^{(3)}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon u_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i u_{x,i} - b_i u_i = f_i - R_i^{(1)} - R_i^{(2)} - R_i^{(3)}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.44)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x)u(x) - b(x_i)u(x_i)] \psi_i(x) dx \\ &\equiv \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \psi_i'(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} (bu + f) - T_0(x_i - \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$R_i^{(3)} = -\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \psi_i'(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(\xi) K_0(x, \xi) d\xi, \quad (5.46)$$

$$K_{0,i}^*(x, \xi) = T_0(x - \xi), \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.47)$$

ve

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (5.48)$$

(5.44) denkleminde yararlanarak, (5.1) denklemini için aşağıdaki fark yaklaşımını ele alabiliriz:

$$lu_i \equiv \varepsilon u_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i u_{x,i} - b_i u_i = f_i - R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.49)$$

Burada R_i aşağıdaki şekilde verilir:

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}. \quad (5.50)$$

(5.2)-(5.3) sınır şartlarına uyumlu bir yaklaşım bulabilmek için Tanım 4.12'den sağ taraflı dikdörtgen kuralını kullanıyoruz. Bu kullandığımız dikdörtgen kuralından aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_1 u_i - r_1 + A \quad (5.51)$$

ve

$$u_N = \sum_{i=1}^N h_i g_2 u_i - r_2 + B. \quad (5.52)$$

Burada r_1 ve r_2 kalan terimleri,

$$r_1 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_1(x)u(x)) dx \quad (5.53)$$

ve

$$r_2 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_2(x)u(x)) dx \quad (5.54)$$

biçimindedir.

(5.49), (5.50) ve (5.52)'da sırasıyla verilen R_i, r_1 ve r_2 terimlerini ihmal edelim, o zaman, (5.1)-(5.3) singüler pertürbe özellikli problem için aşağıdaki şekilde bir fark şeması kurulabilir:

$$ly_i \equiv \varepsilon y_{\bar{x}\hat{x},i} + a_i y_{x,i}^\circ - b_i y_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (5.55)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} y_i + A, \quad (5.56)$$

$$y_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} y_i + B. \quad (5.57)$$

5.3 Metodun Düzgün Yakınsaklığı ve Hata Değerlendirmesi

İlk olarak kullandığımız metodun düzgün yakınsaklığını inceleyeceğiz. Burada, $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N$ aralığında bir hata fonksiyonudur. Ayrıca aşağıdaki fark probleminin çözümüdür:

$$lz_i \equiv \varepsilon z_{\bar{x}\hat{x},i} + a_i z_{x,i}^\circ - b_i z_i = R_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (5.58)$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} z_i + r_1, \quad (5.59)$$

$$z_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} z_i + r_2. \quad (5.60)$$

Burada R_i, r_1 ve r_2 kalan terimlerini, sırası ile (5.50), (5.53) ve (5.54) özdeşlikleri ile verebiliriz.

Lemma 5.3.1 Eğer $a(x), b(x), g(x)$ ve $f(x) \in C^1[0, l]$ olsun. Böylece R_i, r_1 ve r_2 kalan terimleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-1}, \quad (5.61)$$

$$|r_1| \leq CN^{-1} \quad (5.62)$$

$$|r_2| \leq CN^{-1}. \quad (5.63)$$

İspat.

Burada, R_i , r_1 ve r_2 kalan terimleri sırasıyla $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ aralıklarında değerlendirilecektir. Böylece aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x_i) - a(x)] u'(x) \psi_i(x) dx \\ &+ \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [g(x) - g(x_i)] u'(x) \psi_i(x) dx, \end{aligned} \quad (5.64)$$

R_i kalan terimdeki fonksiyonlara ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$|a(x_i) - a(x)| \leq Ch_i, \quad (5.65)$$

$$|g(x) - g(x_i)| \leq Ch_i \quad (5.66)$$

eşitsizlikleri bulunur. Ayrıca, $\psi_i(x) \leq 1$ olduğundan

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i(x) dx \leq Ch_i \quad (5.67)$$

ifadesini yazabiliriz. Bu eşitsizlikleri, $|R_i|$ kalan teriminde yerine yazılırsa,

$$|R_i| \leq Ch_i \quad (5.68)$$

değerlendirmesi bulunur.

İlk durumda $\sigma < \frac{l}{2}$ için aşağıdaki ifadeyi ele alabiliriz:

$$x_{i-1} = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right],$$

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] - \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right]. \quad (5.69)$$

h_i ifadesine ortalama değer teoremi uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \frac{2(1-\varepsilon)N^{-1}}{1-2i(1-\varepsilon)N^{-1}} \leq CN^{-1}. \quad (5.70)$$

Dolayısıyla R_i aşağıdaki şekilde bulunur:

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}. \quad (5.71)$$

Şimdi $\sigma = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$ ve $h_i = \frac{2(l-\sigma)}{N}$ durumlarını göz önüne alalım. Önce (5.61) eşitsizliğini ispatlayalım:

$R_i^{(1)}$ de ki $a(x)$ fonksiyonu için ortalama değer teoremi uygulanır ise,

$$\begin{aligned} |a(x) - a(x_i)| &= |a'(\xi)| |x - x_i|, \quad \xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ &\leq \max |a'(x)| |x - x_i| \\ &\leq Ch_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.72)$$

bulunur. Aşağıdaki eşitsizlikten

$$|R_i^{(1)}| \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \psi_i(x) |u'(x)| dx,$$

(5.72) ve $|\psi_i(x)| \leq 1$ 'i (5.43)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx \\ &\leq C \left\{ h_i + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \right\} \\ &\leq C \left\{ h_i + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq 2\alpha^{-1} (1 - \varepsilon) N^{-1} \end{aligned}$$

$$\leq CN^{-1} \quad (5.73)$$

eşitsizliği elde edilir.

$b \in C^1[0, l]$ ve $|\psi_i(x)| \leq 1$ 'i (5.45) de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1 + |u'(\xi)|) d\xi \\ &\leq C \left\{ h_i + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \right\} \\ &\leq C \left\{ h_i + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq CN^{-1} \end{aligned} \quad (5.74)$$

eşitsizliği bulunur.

$R_i^{(3)}$ için (5.46) kalan teriminden ve (5.73)-(5.74) eşitsizlikleri ile benzer şekilde, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(\xi)| d\xi \\ &\leq CN^{-1}. \end{aligned} \quad (5.75)$$

İkinci durumda, $\sigma < \frac{l}{2}$ için aşağıdaki ifadeyi ele alabiliriz:

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i-1)}{N} \right], \\ h_i &= \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N} \right] - \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i-1)}{N} \right] \end{aligned} \quad (5.76)$$

h_i , ifadesine ortalama değer teoremi uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \frac{2\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\right)N^{-1}}{1 - 2i\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}}\right)N^{-1}} \leq CN^{-1}. \quad (5.77)$$

Dolayısıyla R_i aşağıdaki şekilde bulunur:

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N. \quad (5.78)$$

Şimdi, $\sigma = \frac{l}{2}$ ve $\sigma = \frac{l}{2} < -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$ durumlarını gözönüne alalım. Önce (5.61) eşitsizliğini ispatlayalım: $x_i \in (\sigma, l)$ için ve $h = 2(l - \sigma)/N = l/N$ ifadesinden $[0, \sigma]$ sınır katında aşağıdaki ifadeleri elde edebiliriz:

$$\max_{N/2 < i \leq N} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \leq h \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha l}{2\varepsilon}} \leq \frac{2e^{-1}}{\alpha l} = 2e^{-1} \alpha^{-1} CN^{-1}. \quad (5.79)$$

(5.43)'den,

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq C\left(l + \frac{2}{e\alpha}\right)N^{-1} \\ &\leq CN^{-1} \end{aligned} \quad (5.80)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Benzer şekilde $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ için yapılabilir. Sonuç olarak,

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \quad (5.81)$$

elde ederiz. Böylece (5.61) ifadesi tamamlanmış olur.

Daha sonra r_1 ve r_2 kalan terimlerini değerlendiriyoruz. (5.62) ve (5.63) açık ifadelerinden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$|r_1| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \left| \frac{d}{dx} (g_1(x)u(x)) \right| dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.82)$$

ve

$$|r_2| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \left| \frac{d}{dx} (g_2(x)u(x)) \right| dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.83)$$

(5.6) eşitsizliği ile birlikte aşağıdaki değerlendirmeyi elde ederiz:

$$|r_1| \leq \|g_1\|_\infty \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.84)$$

(5.84)'den ve (5.53) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq C \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}+1} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx + C \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \right\} \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{N/2} h_i \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \right\} \\ &\leq CN^{-1}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Benzer şekilde r_2 için aşağıdaki gibi bir değerlendirme alabiliriz:

$$|r_2| \leq \|g_2\|_\infty \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.86)$$

(5.86)'dan ve (5.54) eşitliğinden aşağıdaki değerlendirme sonucuna varırız:

$$\begin{aligned}
|r_2| &\leq C \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}+1} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx + C \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \right\} \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{N/2} h_i \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^{N/2} h_i \right\} \\
&\leq CN^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Böylece, (5.1)-(5.3) probleminin yakınsaklık sonucunu ifade edebiliriz.

Lemma 5.3.2 z_i , ($i = 0, 1, \dots, N$) (5.58)-(5.60) fark probleminin bir çözümü olarak kabul edelim. $\sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) < 1$ olsun. Buradan aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C(\alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2|). \tag{5.88}$$

İspat. Burada (5.58) - (5.60) problemi için Lemma 4.1'den maksimum prensibini kullanacağız. (5.58)'de L diferansiyel operatör ve $v \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $0 < x < l$ için $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ve $Lv \leq 0$ ise o zaman $0 \leq x \leq l$ için $v(x) \geq 0$ olur. (5.58)-(5.60) problemi için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq |z_0| + |z_N| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}. \tag{5.89}$$

(5.59)-(5.60) şartlarından,

$$|z_0| \leq |r_1| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| |z_i|, \quad (5.90)$$

$$|z_N| \leq |r_2| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| |z_i|. \quad (5.91)$$

(5.50)-(5.51) eşitsizlikleri (5.49) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| \\ &+ \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| |z_i| + |r_2| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| |z_i| \\ &\leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2| + \sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) |z_i| \\ &\leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2| + \max_{1 \leq i \leq N} |z_i| \sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) \\ &\leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2| + \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) \end{aligned}$$

$$[1 - \sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|)] \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2| \quad (5.92)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq (1 - \gamma)^{-1} (\alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2|) \quad (5.93)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylece Lemma 5.3.2 ispatlanmış olur.

Teorem 5.3.1 u , (5.1)-(5.3) probleminin bir çözümü ve y ise (5.55)-(5.58) fark probleminin bir çözümü olarak verilsin. O halde Lemma 5.1.1 ve Lemma 5.3.1 şartları altında, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq CN^{-1}. \quad (5.94)$$

İspat. Önceki iki lemmadan Teoremin ispatı ortaya çıkmaktadır.

5.4 Nümerik Örnekler ve Sonuçlar

Burada, (5.1)-(5.3) problemi ve Bakhvalov şebekede kurulan (5.55)-(5.57) fark şeması için nümerik sonuçlar verilmektedir. Fark şemasının çözümü için sayısal sonuçlar tablolar ile gösterilmiştir.

Örnek 5.4.1 Aşağıdaki test problemini ele alalım:

$$\varepsilon u''(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) u'(x) - 4u(x) + \operatorname{arctanh}(x + u) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (5.95)$$

$$u(0) = \int_0^1 2x^2 \sin xu(x) dx + 1, \quad (5.96)$$

$$u(1) = \int_0^1 3 \tanh x u(x) dx + 2. \quad (5.97)$$

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uygularız. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Farrell vd., 2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmesi,

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (5.98)$$

ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} : i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln\left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}}\right)}{\ln 2} \quad (5.99)$$

ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 5.1 (5.32)-(5.34) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-10}	0.033023 0.97	0.116023 0.99	0.058333 1.00	0.029137 1.00	0.014051 1.00	0.007009
2^{-12}	0.230496 0.98	0.116093 0.99	0.058346 1.00	0.029115 1.05	0.014008 0.99	0.007001
2^{-14}	0.230540 0.97	0.116110 0.99	0.058349 1.00	0.029112 1.07	0.014559 1.08	0.007102
2^{-16}	0.230549 0.98	0.116116 0.99	0.058351 1.00	0.029111 1.00	0.014531 1.03	0.007102
2^{-18}	0.230548 0.98	0.116125 0.99	0.058331 1.00	0.029112 1.00	0.014499 1.02	0.007106
2^{-20}	0.230559 0.98	0.116150 0.99	0.058287 1.00	0.029140 1.02	0.014359 1.03	0.007001
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
e^N	0.230559	0.116150	0.058351	0.029140	0.014559	0.007009
p^N	0.98	0.99	1.00	1.02	1.08	

Örnek 5.4.2 Aşağıdaki test problemini ele alalım:

$$\varepsilon u''(x) + (1+x)u'(x) - 2u(x) = \operatorname{arctanh}(x), \quad 0 < x < 1 \quad (5.100)$$

$$u(0) = \int_0^1 \cos(\pi x) u(x) dx + 2, \quad (5.101)$$

$$u(1) = \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx + 3. \quad (5.102)$$

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uygularız. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Farrell vd., 2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmeleri,

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (5.103)$$

ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} : i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln(\frac{e_\varepsilon^N}{e_{2\varepsilon}^N})}{\ln 2} \quad (5.104)$$

ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 5.2 (5.32)-(5.34) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Bakhvalov şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-10}	0.228121	0.116023	0.058333	0.029137	0.014051	0.007009
	0.97	0.99	1.00	1.00	1.00	
2^{-12}	0.230496	0.116093	0.058346	0.029115	0.014008	0.007001
	0.98	0.99	1.00	1.05	0.99	
2^{-14}	0.230540	0.116110	0.058349	0.029112	0.014559	0.007102
	0.97	0.99	1.00	1.07	1.08	
2^{-16}	0.230549	0.116116	0.058351	0.029111	0.014531	0.007102
	0.98	0.99	1.00	1.00	1.03	
2^{-18}	0.230548	0.116125	0.058331	0.029112	0.014499	0.007106
	0.98	0.99	1.00	1.00	1.02	
2^{-20}	0.230559	0.116150	0.058287	0.029140	0.014359	0.007001
	0.98	0.99	1.00	1.02	1.03	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
e^N	0.230559	0.116150	0.058351	0.029140	0.014559	0.007009
p^N	0.98	0.99	1.00	1.02	1.08	

5.5 Sonuçlar

Bu çalışmada iki integral sınır şartlı ikinci mertebeden lineer singüler pertürbe özellikli problem gözönüne alınmaktadır. Burada, Bakhvalov şebekede sonlu fark şemaları kullanılarak bu tür problemlerin çözümü için düzgün yakınsak bir nümerik yaklaşım verilmiştir.

İlk olarak burada ε 'na göre düzgün yakınsak bir nümerik metod verilmiştir. Bu metod için problemin çözümü ve türevi için asimptotik değerlendirmeler yapılmıştır ve bu asimptotik değerlendirmeler nümerik metodun analizinde kullanılmıştır. Böylece, bu problemler için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şeması kurulmuştur. Ayrıca lineer baz fonksiyonları kullanılmıştır. Bu problemin kararlılık analizi ve hata değerlendirmeleri yapılmıştır. Son olarak problemin düzgün yakınsaklığını gösteren bir teorem verilmiştir.

Sonuç olarak sunduğumuz metodun etkinliğini ve kesinliğini ölçmek için örnekler üzerinde test edilmektedir ve hesapladığımız sonuçlar, verilmiş teorik sonuçlarla uyumlu

olduğu gözlenmektedir. ε 'nun küçülen değerleri ve N 'nin büyüyen değerlerine göre buradaki yakınsaklık metodun yakınsaklığının birinci mertebeden olduğu gösterilmiştir. Elde ettiğimiz sonuçlar birinci mertebeye yakın olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla hesaplanan sonuçlar teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görölmektedir.



6. İKİ İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, iki integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli lineer olmayan sınır değer problem aşağıda ki şekilde gözönünde bulundurulacaktır.

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - f(x, u(x)) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (6.1)$$

$$u(0) = \int_0^l g_1(x)u(x)dx + A, \quad (6.2)$$

$$u(l) = \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B, \quad (6.3)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresi, A ve B verilmiş sabitlerdir. $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ fonksiyonları $[0, l]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. $a(x) \geq \alpha > 0$ fonksiyonu $[0, l]$ 'de ve $f(x, u)$ fonksiyonu $(x, u) \in [0, l] \times R$ aralığında yeterince düzgün fonksiyonlardır. $\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \geq \beta > 0$ olsun. Bu şartlar ile (6.1) - (6.3) sınır değer problemi sadece bir tek çözüme sahiptir. ε 'un küçük değerleri için $u(x)$ çözümü genelde $x = 0$ civarında sadece bir sınır katı vardır.

6.1 Çözümün Genel Özellikleri

(6.1) - (6.3) sınır değer problemi için bazı değerlendirmeler ve bazı özellikler sunacağız. Burada ki değerlendirmeler problemin çözümü için sonraki bölümlerde kullanacağımız nümerik çözümlerin analizinde gerekli olacaktır.

Lemma 6.1.1 Eğer $a(x), g_1(x), g_2(x) \in C[0, l]$, $f(x, u) \in C^1[0, l]$ ve $\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \geq \beta > 0$ ise aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad (6.4)$$

ve

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6.5)$$

Burada C_0 ve γ aşağıdaki şekildedir:

$$C_0 = (1 - \gamma)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}) \quad (6.6)$$

ve

$$\gamma = \int_0^l (|g_1(x)| + |g_2(x)|) dx < 1. \quad (6.7)$$

İspat.

(6.1) denkleminde, $f(x, u)$ lineer olmayan fonksiyon için ortalama değer teoremi uygulanırsa, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$f(x, u) = f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_*)u, \quad u_* = \gamma u, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (6.8)$$

Buradan aşağıdaki lineer denklemi elde ederiz:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = F(x). \quad (6.9)$$

Burada, $F(x) = f(x, 0)$ ve $b(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u_*)$, $b(x) \geq \beta > 0$ yeterince düzgün fonksiyonlardır. (6.1) - (6.3) sınır değer problemi için Lemma 4.1'den maksimum prensibi uygulanacaktır. (6.1) denkleminde L diferansiyel operator olarak gösterilir ve $v \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $0 < x < l$ için $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ve $Lv \leq 0$ ise o zaman $0 \leq x \leq l$ için $v(x) \geq 0$ olur. (6.1)-(6.3) problemi için maksimum prensibi kullanılırsa,

$$|u(x)| \leq |u(0)| + |u(l)| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}, \quad x \in [0, l], \quad (6.10)$$

eşitsizliğini buluruz. Daha sonra (6.2)-(6.3) sınır şartlarından

$$|u(0)| \leq |A| + \int_0^l |g_1(x)| |u(x)| dx \quad (6.11)$$

ve

$$|u(l)| \leq |B| + \int_0^l |g_2(x)| |u(x)| dx \quad (6.12)$$

yazabiliriz. (6.11) ve (6.12) eşitsizliklerini (6.7) da yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |A| + |B| + \int_0^l |g_1(x)| |u(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| |u(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \\ &\leq |A| + |B| + \max_{[0,l]} |u(x)| \int_0^l |g_1(x)| dx + \max_{[0,l]} |u(x)| \int_0^l |g_2(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \\ &\leq |A| + |B| + \|u\|_\infty \int_0^l |g_1(x)| dx + \|u\|_\infty \int_0^l |g_2(x)| dx + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \end{aligned} \quad (6.13)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} (1 - \int_0^l |g_1(x)| dx - \int_0^l |g_2(x)| dx) \|u\|_\infty &\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty, \\ \|u\|_\infty &\leq \left(1 - \left(\int_0^l |g_1(x)| dx + \int_0^l |g_2(x)| dx \right) \right)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty) \\ &\leq (1 - \gamma)^{-1} (|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty) \end{aligned} \quad (6.14)$$

bulunur. Burada γ aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\gamma = \int_0^l (|g_1(x)| + |g_2(x)|) dx < 1. \quad (6.15)$$

Böylece, (6.4) eşitsizliğini ispatlanmış olur. Şimdi ise (6.5)'in ispatını verilsin:
(6.1) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) = \Phi(x). \quad (6.16)$$

Bu elde edilen denklem ile beraber, $\Phi(x)$ 'i aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\Phi(x) = f(x) + b(x)u(x). \quad (6.17)$$

(6.16) denklemden $u'(x) = v(x)$ alınır ise,

$$\varepsilon v'(x) + a(x)v(x) = \Phi(x) \quad (6.18)$$

yazabilmektedir. (6.18) denklemden aşağıdaki eşitlik verilebilir:

$$v(x) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi. \quad (6.19)$$

Buradan

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi \quad (6.20)$$

bulunur. (6.19)'de ki $u'(0)$ için bazı değerlendirmeler vermemiz gerekmektedir. (6.19) eşitliğine $[0, l]$ aralığında integral uygulanır ise,

$$\begin{aligned} & -\int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx + B - A \\ & = u'(0)\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l \int_0^x \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi dx \end{aligned} \quad (6.21)$$

elde edilir. (6.21)'den $u'(0)$ çekilir ise,

$$\begin{aligned} & u'(0) \\ & = \frac{B-A + \int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^l \int_0^x \Phi(\xi)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi dx}{\int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} dx} \end{aligned} \quad (6.22)$$

elde edilmiş olur. (6.22)'deki integralleri sırasıyla değerlendirelim. İlk önce paydadaki integrali ele alırız ise:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(\tau) d\tau} dx \geq \int_0^l e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \bar{a} d\tau} dx \\
& = \int_0^l e^{-\frac{\bar{a}x}{\varepsilon}} dx = -\frac{\varepsilon}{\bar{a}} \left(e^{-\frac{\bar{a}l}{\varepsilon}} - 1 \right) = \frac{\varepsilon}{\bar{a}} \left(1 - e^{-\frac{\bar{a}l}{\varepsilon}} \right) \\
& = \delta \varepsilon \quad \left(\delta \neq \delta \varepsilon > 0, \bar{a} = \max_{[0,l]} |a(x)| \right) \tag{6.23}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Şimdi ise (6.22)'deki pay kısmındaki integralleri değerlendirelim. Bu integrallere ortalama değer teoremi uygulanır ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x \Phi(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(\tau) d\tau} d\xi dx \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \left[\int_0^x |\Phi(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a d\tau} d\xi \right] dx \\
& \leq \frac{\|\Phi\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a d\tau} d\xi dx, \quad (a(x) \geq \alpha > 0) \\
& \leq \frac{\|\Phi\|_\infty}{\varepsilon} \int_0^l \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi dx \\
& \leq \frac{\|\Phi\|_\infty}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\
& = \alpha^{-1} \|\Phi\|_\infty \int_0^l \left[1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right] dx \\
& \leq \alpha^{-2} \varepsilon \|\Phi\|_\infty \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \|\Phi\|_{\infty} C_1 \leq C_1 \quad (6.24)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^l g_1(x)u(x)dx + \int_0^l g_2(x)u(x)dx \right| \\ & \leq \int_0^l |g_1(x)||u(x)|dx + \int_0^l |g_2(x)||u(x)|dx \\ & \leq \max_{[0,l]} |u(x)| \left(\int_0^l |g_1(x)|dx + \int_0^l |g_2(x)|dx \right) \\ & \leq \|u\|_{\infty} \left(\int_0^l |g_1(x)|dx + \int_0^l |g_2(x)|dx \right) \\ & \leq \|u\|_{\infty} (\|g_1\|_1 + \|g_2\|_1) \\ & \leq (\|g_1\|_1 + \|g_2\|_1) C_0 \\ & \leq C_2, \end{aligned} \quad (6.25)$$

eşitsizlikleri bulunur.

(6.23), (6.24) ve (6.25)'de yaptığımız bu değerlendirmeler (6.22) eşitliğinde yazılırsa,

$$|u'(0)| \leq \frac{|A|+|B|+ \alpha^{-1}l\|\Phi\|_{\infty}+(\|g_1\|_1+\|g_2\|_1)C}{\delta\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (6.26)$$

eşitsizliği bulunur.

(6.20) eşitliğinin mutlak değeri alınır ise,

$$\begin{aligned}
|u'(x)| &\leq |u'(0)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\tau)d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x |\Phi(\xi)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a(\tau)d\tau} d\xi \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a d\tau} + \frac{1}{\varepsilon}\|\Phi\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\xi^x a d\tau} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon}\|\Phi\|_\infty \int_0^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(x-\xi)} d\xi \\
&= \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + \frac{\|\Phi\|_\infty}{\varepsilon}\left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right)\varepsilon\alpha^{-1} \\
&= \frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C
\end{aligned} \tag{6.27}$$

elde edilir. (6.27) eşitsizliği (6.5) eşitsizliğini sağlar. Böylece Lemma 6.1.1 ispatı tamamlanmış olur.

6.2 Ayrık Problem

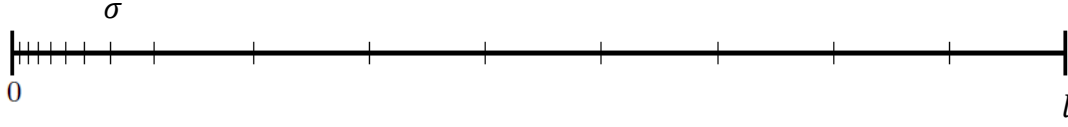
Bu bölümde, (6.1)-(6.3) sınır değer probleminden yararlanarak sonlu fark şemasını oluşturacağız. $[0, l]$ kapalı aralığında aşağıdaki şekilde ω_N düzgün olmayan (Bakhvalov) şebekenin tanımı verilmektedir:

$$\omega_N = \{0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l, h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x = 0\}. \tag{6.28}$$

Burada, (6.1) ve (6.3) probleminin çözümü için düzgün Bakvalov şebeke üzerinde tanımlanan sonlu bir fark metodu kullanıyoruz.

Bakhvalov şebeke mantığı aşağıdaki doğruada gösterildiği gibidir,



Şekil 6.1 Bakhvalov şebeke gösterimi

N sayısı için, Bakhvalov şebeke $[0, \sigma]$ aralığında $\frac{N}{2} + 1$ noktaya ve $[\sigma, l]$ aralığında $\frac{N}{2} + 1$ noktaya bölünür. Aşağıdaki biçimde σ geçiş noktasıdır:

$$\sigma = \min \left\{ \frac{l}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon |\ln \varepsilon| \right\}. \quad (6.29)$$

(6.1)-(6.3) probleminin $u(x)$ yaklaşık çözümü Bakhvalov şebekede hesaplanacaktır. $[\sigma, l]$ aralığı, ikiye bölünebilen bir pozitif tamsayı olan N için iki alt aralığa $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ bölünür. Dolayısıyla, sırasıyla $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ 'de h_i adım boyutunu belirtirsek, şebeke noktaları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$x_i \in [0, \sigma]: x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2}, \quad (6.30)$$

$\sigma < \frac{l}{2}$ durumu için

$$x_i = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{2\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N} \right], \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2} \quad (6.31)$$

ele alınır.

$\sigma = \frac{l}{2}$ durumu için,

$$x_i \in (\sigma, l]: x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2} \right) h, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \quad (6.32)$$

$$h = 2(l - \sigma)/N$$

ifadeleri ele alınmaktadır.

(6.1) denklemini için fark metodunun yaklaşımı aşağıdaki özdeşlikle başlayacağız:

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x)\psi_i(x)dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (6.33)$$

Burada $\psi_i(x)$ aşağıdaki gibi tanımlanan baz fonksiyonlarıdır:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \psi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \psi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}). \end{cases} \quad (6.34)$$

Burada $\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\varepsilon\psi_i''(x) - a_i\psi_i'(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad (6.35)$$

$$\psi_i(x_{i-1}) = 0, \quad \psi_i(x_i) = 1 \quad (6.36)$$

ve

$$\varepsilon\psi_i''(x) - a_i\psi_i'(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad (6.37)$$

$$\psi_i(x_i) = 1, \quad \psi_i(x_{i+1}) = 0. \quad (6.38)$$

$\psi_i^{(1)}(x)$ ve $\psi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları

$$\psi_i^{(1)}(x) = \frac{e^{\frac{a_i(x-x_{i-1})}{\varepsilon}} - 1}{e^{\frac{a_i h_i}{\varepsilon}} - 1}, \quad \psi_i^{(2)}(x) = \frac{1 - e^{\frac{a_i(x_{i+1}-x)}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{a_i h_{i+1}}{\varepsilon}}} \quad (6.39)$$

gibi açık bir şekilde ifade edilebilir. Ayrıca,

$$\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x)dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_i^{(2)}(x)dx = 1 \quad (6.40)$$

olduğu görülür. (6.33) bağıntısında Lu yerine denklemini yazarsak,

$$\begin{aligned}
& \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - f(x, u(x))] \psi_i(x) dx = \\
& \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon u''(x) \psi_i(x) dx + \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} a(x)u'(x) \psi_i(x) dx \\
& - \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) \psi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.41)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Birinci integrale integrasyon uygulayarak ve ikinci integralin (6.41) 'in sağ tarafı yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \psi_i^{(1)'}(x) dx + \varepsilon \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \psi_i^{(2)'}(x) dx \\
& + a_i \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \psi_i^{(1)}(x) dx + a_i \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \psi_i^{(2)}(x) dx \\
& - f(x_i, u_i) - R_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (6.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada R_i kalan terimi

$$\begin{aligned}
R_i &= \varepsilon \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a_i] \psi_i(x) u'(x) dx \\
& - \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \psi_i'(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} f(\xi, u(\xi)) K_0(x, \xi) d\xi, \quad (6.43)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

(6.42) daki integrallerin her bir (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) alt aralıklarına Tanım 4.11'den kuadratur formları uygulanırsa (Amiraliyev ve Mamedov, 1995),

$$-\varepsilon \hbar_i^{-1} u_{\bar{x},i} + a_i u_{\bar{x},i} \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_i^{(1)}(x) dx$$

$$+a_i u_{x,i} \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Psi_i^{(2)} dx - f(x_i, u_i - R_i) = 0. \quad (6.44)$$

Buradan

$$\varepsilon u_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i u_{x,i} - f(x_i, u_i) - R_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.45)$$

bağıntısı elde edilir. (6.45)'den (6.1) denklemini için

$$l u_i \equiv \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i u_{x,i} - f(x_i, u_i) + R_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.46)$$

fark yaklaşımı bulunur. Burada θ_i katsayısı aşağıdaki şekildedir:

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{a_i \hbar_i}{2\varepsilon} \left(\frac{h_{i+1} \left(e^{\frac{a_i \hbar_i}{\varepsilon}} - 1 \right) + h_i \left(1 - e^{-\frac{a_i \hbar_i}{\varepsilon}} \right)}{h_{i+1} \left(e^{\frac{a_i \hbar_i}{\varepsilon}} - 1 \right) - h_i \left(1 - e^{-\frac{a_i \hbar_i}{\varepsilon}} \right)} \right), & a_i \neq 0, \\ 1, & a_i = 0. \end{cases} \quad (6.47)$$

(6.2)-(6.3) sınır şartlarına uyacak bir yaklaşım oluşturmak için genellikle Tanım 4.12'den sağ taraflı dikdörtgen metodu uygulanmaktadır:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} u_i - r_1 + A \quad (6.48)$$

ve

$$u_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} u_i - r_2 + B. \quad (6.49)$$

Burada r_1 ve r_2 kalan terimleri,

$$r_1 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_1(x) u(x)) dx, \quad (6.50)$$

$$r_2 = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_2(x) u(x)) dx \quad (6.51)$$

biçimindedir. (6.46), (6.48) ve (6.49) bağıntılarında ki R_i , r_1 ve r_2 kalan terimleri ihmal edilir ise, (6.1)-(6.3) sınır değer problemi ile aşağıdaki şekilde bir fark şeması oluşturulmaktadır:

$$ly_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i y_{x,i}^\circ - f(x_i, y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.52)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} y_i + A \quad (6.53)$$

ve

$$y_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} y_i + B. \quad (6.54)$$

6.3 Düzgün Yakınsaklık ve Hata değerlendirmeleri

Burada, kullanılan metodun yakınsamasını incelemek için, $z_i = y_i - u_i$, ($i = 0, 1, \dots, N$) hata fonksiyonu ile aşağıdaki fark problemi oluşturulmaktadır:

$$\varepsilon \theta_i z_{\bar{x}\bar{x},i} + a_i z_{x,i}^\circ - [f(x_i, y_i) - f(x_i, u_i)] = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (6.55)$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} z_i - r_1, \quad (6.56)$$

$$z_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} z_i - r_2. \quad (6.57)$$

Burada, R_i , r_1 ve r_2 kalan terimlerini biz sırasıyla (6.16), (6.50) ve (6.51) bağıntıları ile vermekteyiz.

Lemma 6.3.1 z_i , ($i = 0, 1, \dots, N$) (6.55)-(6.57) fark probleminin çözümü olsun. $\sum_{i=1}^{N-1} h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) < 1$ şartı sağlasın. O halde aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C(\alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + |r_2|). \quad (6.58)$$

İspat. (6.43)-(6.46) fark problemi aşağıdaki biçimdedir:

$$lz_i := \varepsilon \theta_i z_{\bar{x}\hat{x},i} + a_i z_{x,i}^\circ - b_i z_i = R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6.59)$$

$$l_1 z := z_0 = \sum_{i=1}^N h_i g_{1,i} z_i - r_1. \quad (6.60)$$

$$l_2 z := z_N = \sum_{i=1}^N h_i g_{2,i} z_i - r_2. \quad (6.61)$$

Burada b_i aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$b_i = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i + \eta z_i), \quad 0 < \gamma < 1. \quad (6.62)$$

(6.59)-(6.61) fark problemine Lemma 4.1'den maksimum prensibi uygulayacağız. (6.59)'de l diferansiyel operatör ve $v \in C^2[0, l]$ olsun. Eğer $0 < x < l$ için $v(0) \geq 0$, $v(l) \geq 0$ ve $Lv \leq 0$ ise o zaman $0 \leq x \leq l$ için $v(x) \geq 0$ olur. (6.59)-(6.61) problemi için maksimum prensibi kullanılırsa,

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq |z_0| + |z_N| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \quad (6.63)$$

eşitsizliği elde edilir.

(6.37)-(6.38) şartlarını kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$|z_0| \leq |r_1| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| |z_i| \quad (6.64)$$

Ve

$$|z_N| \leq |r_2| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| |z_i|. \quad (6.65)$$

(6.64)-(6.65) eşitsizlikleri (6.63) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |r_1| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| |z_i| + |r_2| + \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| |z_i|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r_1| + |r_2| + \left(\sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|) \right) |z_i| \\
&\leq \alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r_1| + |r_2| + \max_{1 \leq i \leq N} |z_i| \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| + \max_{1 \leq i \leq N} |z_i| \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| \\
&\leq \alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r_1| + |r_2| + \|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \sum_{i=1}^N h_i |g_{1,i}| + \|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \sum_{i=1}^N h_i |g_{2,i}| \\
&[1 - \sum_{i=1}^N h_i (|g_{1,i}| + |g_{2,i}|)] \|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \leq \alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r_1| + |r_2| \quad (6.66)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece

$$\|z\|_{\infty,\bar{\omega}_N} \leq (1 - \gamma)^{-1} (\alpha^{-1}\|R\|_{\infty,\omega_N} + |r_1| + |r_2|) \quad (6.67)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylece Lemma 6.3.1 ispatlanmış olur.

Lemma 6.3.2 Eğer $a(x), b(x) \in C^1[0, l]$ ve $f(x, u) \in C^1[[0, l] \times R]$ ise, o zaman R_i, r_1 ve r_2 kalan terimleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|R\|_{\infty,\omega_N} \leq CN^{-1}, \quad (6.68)$$

$$|r_1| \leq CN^{-1}, \quad (6.69)$$

$$|r_2| \leq CN^{-1}. \quad (6.70)$$

İspat.

Burada R_i kalan terimi

$$\begin{aligned}
R_i &= \varepsilon \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a_i] \psi_i(x) u'(x) d(x), \\
& - \hbar_i^{-1} \chi_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \psi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} f(\xi, u(\xi)) K_0^*(x, \xi) d\xi, \quad (6.71)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitsizliği alabiliriz:

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left\{ \varepsilon \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |x_{i-1}| + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left| \frac{\partial f(\xi, u(\xi))}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \right\} \\
&\leq C \left\{ h_i + h_{i+1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1 - |u'(\xi)|) d\xi \right\}. \quad (6.72)
\end{aligned}$$

(6.5) ile beraber aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|R_i| \leq C \left\{ h_i + h_{i+1} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} d(x) \right\}. \quad (6.73)$$

Böylece,

$$|R_i| \leq C h_i \quad (6.74)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $\sigma < \frac{l}{2}$, $\sigma = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$ ve $h_i = \frac{2(l-\sigma)}{N}$ durumlarını göz önüne alalım.

Aşağıdaki eşitlikleri verelim

$$x_{i-1} = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right] \quad (6.75)$$

ve

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2i}{N} \right] - \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - (1 - \varepsilon) \frac{2(i-1)}{N} \right]. \quad (6.76)$$

h_i ifadesine ortalama değer teoremi uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \frac{2(1-\varepsilon)N^{-1}}{1-2i(1-\varepsilon)N^{-1}} \leq CN^{-1}. \quad (6.77)$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1 + |u'(\xi)|) d\xi \\ &\leq C \left\{ h + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \right\} \\ &\leq C \left\{ h + \alpha^{-1} \left(e^{\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq C \{ h + \alpha^{-1} N^{-1} \}, \\ |R_i| &\leq CN^{-1}, \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2} \end{aligned} \quad (6.78)$$

eşitsizliği bulunur.

Burada $\sigma = \frac{l}{2}$, $\sigma = -\alpha^{-1} \varepsilon \ln \varepsilon$ ve $h_i = \frac{2(l-\sigma)}{N}$ durumlarını göz önüne alalım.

Aşağıdaki eşitlikleri verelim:

$$x_{i-1} = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i-1)}{N} \right] \quad (6.79)$$

ve

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2i}{N} \right] - \alpha^{-1} \varepsilon \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}} \right) \frac{2(i-1)}{N} \right]. \quad (6.80)$$

h_i ifadesine ortalama değer teoremi uygulanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$h_i = \alpha^{-1} \varepsilon \frac{2(1-e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}})N^{-1}}{1-2i(1-e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}})N^{-1}} \leq CN^{-1}. \quad (6.81)$$

Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1 + |u'(\xi)|) d\xi \\ &\leq C \left\{ h + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \right\} \\ &\leq C \left\{ h + \alpha^{-1} \left(e^{\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq C \{ h + \alpha^{-1} N^{-1} \}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Böylece,

$$|R_i| \leq CN^{-1}, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \quad (6.83)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz:

$$x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2} \right) h, \quad i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \quad (6.84)$$

$$h = \frac{2(l-\sigma)}{N} \quad (6.85)$$

ve

$$|R_i| \leq Ch \leq CN^{-1}. \quad (6.86)$$

(6.68) ifadesi tamamlanmış olur. Daha sonra r kalan terimini tahmin ederiz. (6.69) ve (6.70) açık ifadelerini oluşturuyoruz:

$$|r_1| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_1(x)u(x)) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.87)$$

ve

$$|r_2| \leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) \frac{d}{dx} (g_2(x)u(x)) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.88)$$

(6.5) eşitsizliği ile birlikte aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$|r_1| \leq \|g_1\|_\infty \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.89)$$

(6.89) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq C \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}+1} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx + C \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \right\} \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \sum_{i=1}^N h_i \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^N h_i \right\} \\ &\leq CN^{-1} \end{aligned} \quad (6.90)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde r_2 için de aynı yol izlenir,

$$|r_2| \leq \|g_2\|_\infty \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.91)$$

böylece bu eşitsizlik elde edilir. (6.51) eşitliğinden aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
|r_2| &\leq C \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}+1} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx + C \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^N h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}}\right) dx \right\} \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \alpha^{-1} \sum_{i=1}^N h_i \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) \right\} \\
&\leq C \left\{ N^{-1} + \sum_{i=1}^N h_i \right\} \\
&\leq CN^{-1}. \tag{6.92}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (6.1)-(6.3) sınır değer probleminin yakınsaklığını elde ederiz.

Teorem 6.3.1 u , (6.1)-(6.3) sınır değer problemi için bir çözüm ve y ise (6.52)-(6.54) fark problemi için bir çözüm olduğunu varsayalım. Böylece, Lemma 6.1.1 ve Lemma 6.3.2 ile birlikte aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq CN^{-1}. \tag{6.93}$$

İspat. Önceki iki lemmadan teoremin ispatı ortaya çıkmaktadır.

6.4 Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde, (6.1)-(6.3) sınır değer probleminin, Bakhvalov şebekede kurulmuş olan (6.52)-(6.54) fark problemi için nümerik sonuçlar sunulmaktadır. Fark şemasının çözümü için sayısal sonuçlar tablo ve grafikler ile gösterilmiştir.

Örnek 6.4.1 Aşağıdaki test problemini ele alalım:

$$\varepsilon u''(x) + \left(\frac{1+x}{2}\right) u'(x) - \tan(x+u) + u^2 - \varepsilon x = 0 \quad 0 < x < 1, \quad (6.94)$$

$$u(0) = \int_0^1 \sin(2\pi x) u(x) dx + 1, \quad (6.95)$$

$$u(1) = \int_0^1 \cos(\pi x) u(x) dx + 1. \quad (6.96)$$

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uyguluyoruz. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Farrell vd., 2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmesi,

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (6.97)$$

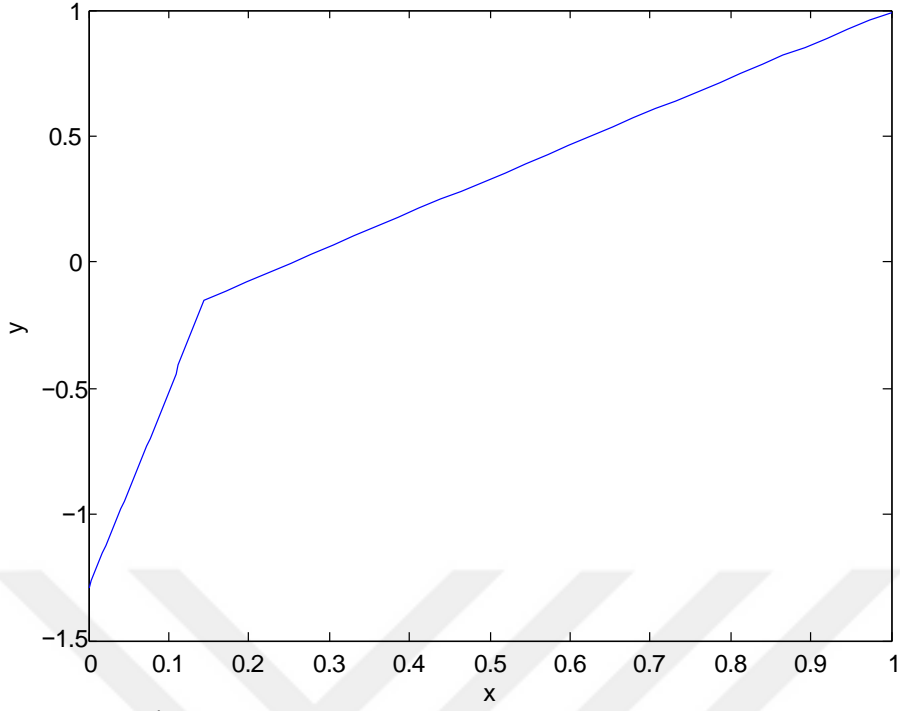
ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2}; i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln\left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}}\right)}{\ln 2} \quad (6.98)$$

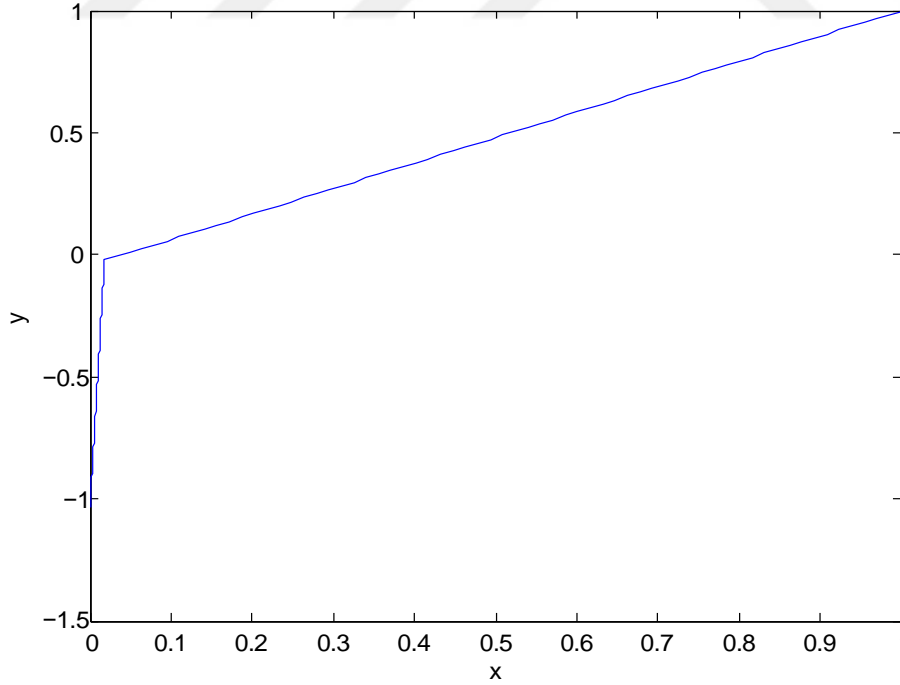
ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 6.1 (6.30)-(6.32) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.02075619 0.9625	0.01066801 0.9814	0.00540788 0.9908	0.00272253 0.9954	0.00136592 0.9977	0.00068404
2^{-4}	0.01697993 0.9688	0.00868855 0.9833	0.00439879 0.9915	0.00221330 0.9958	0.00111013 0.9979	0.00055586
2^{-6}	0.01647393 0.9889	0.00831395 0.9885	0.00419396 0.9925	0.00210888 0.9960	0.00105763 0.9980	0.00052955
2^{-8}	0.01652099 0.9950	0.00830367 0.9978	0.00416198 0.9972	0.00208599 0.9971	0.00104531 0.9982	0.00052333
2^{-10}	0.01652118 0.9945	0.00830620 0.9972	0.00416490 0.9987	0.00208531 0.9994	0.00102838 1.0005	0.00051379
e^N	0.02075619	0.01066801	0.00540788	0.00272253	0.00136592	0.00068404
p^N	0.9625	0.9814	0.99908	0.9954	0.9957	



Şekil 6.2 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için yaklaşık ve kesin çözüm grafik eğrisi



Şekil 6.3 $\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için yaklaşık ve kesin çözüm grafik eğrisi

Örnek 6.4.2 Aşağıdaki test problemini ele alıyoruz.

$$\varepsilon u''(x) + (1+x)u'(x) + \exp(-u) + \frac{u^2}{4} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (6.99)$$

problemini ele alalım. Burada

$$u(0) = \int_0^1 \sin(\pi x) u(x) dx + 1, \quad (6.100)$$

$$u(1) = \int_0^1 \tan\left(\frac{\pi x}{5}\right) u(x) dx + 1. \quad (6.101)$$

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uyguluyoruz. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Farrell vd., 2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmesi,

$$e_\varepsilon^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (6.102)$$

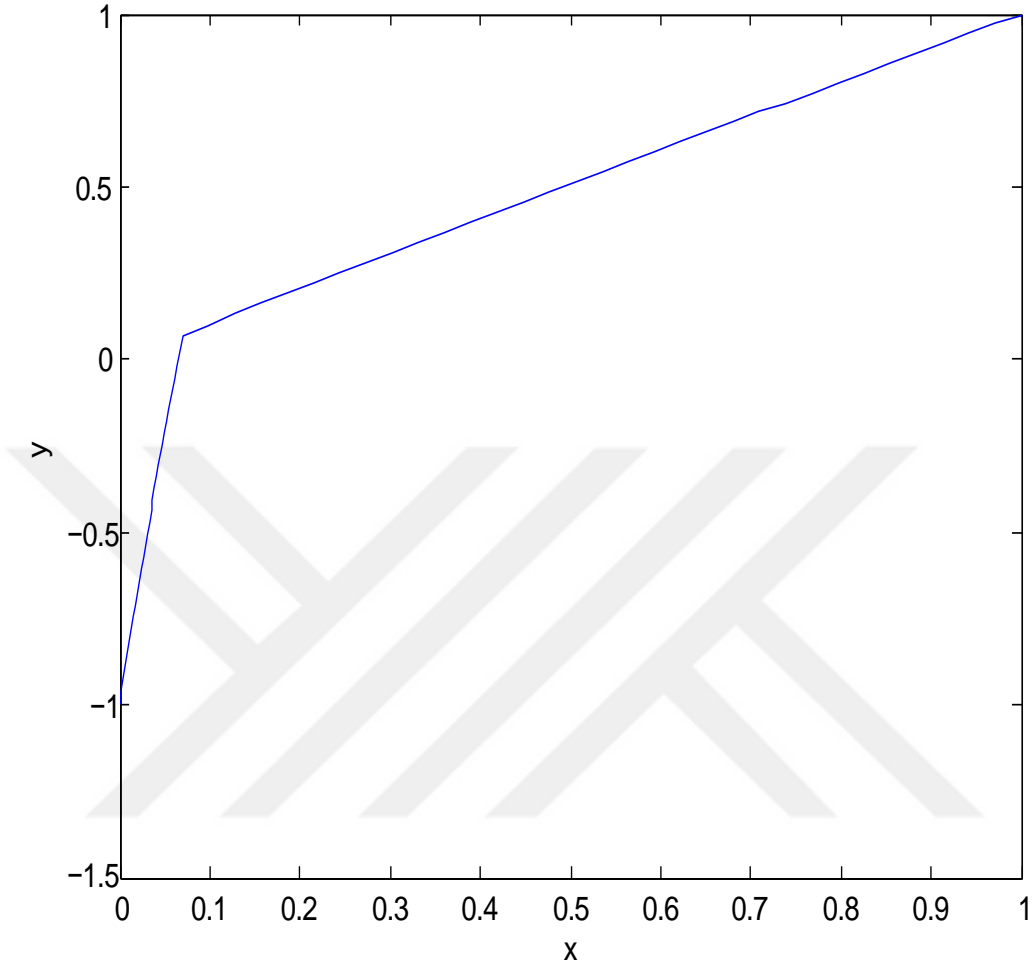
ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} : i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln\left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}}\right)}{\ln 2} \quad (6.103)$$

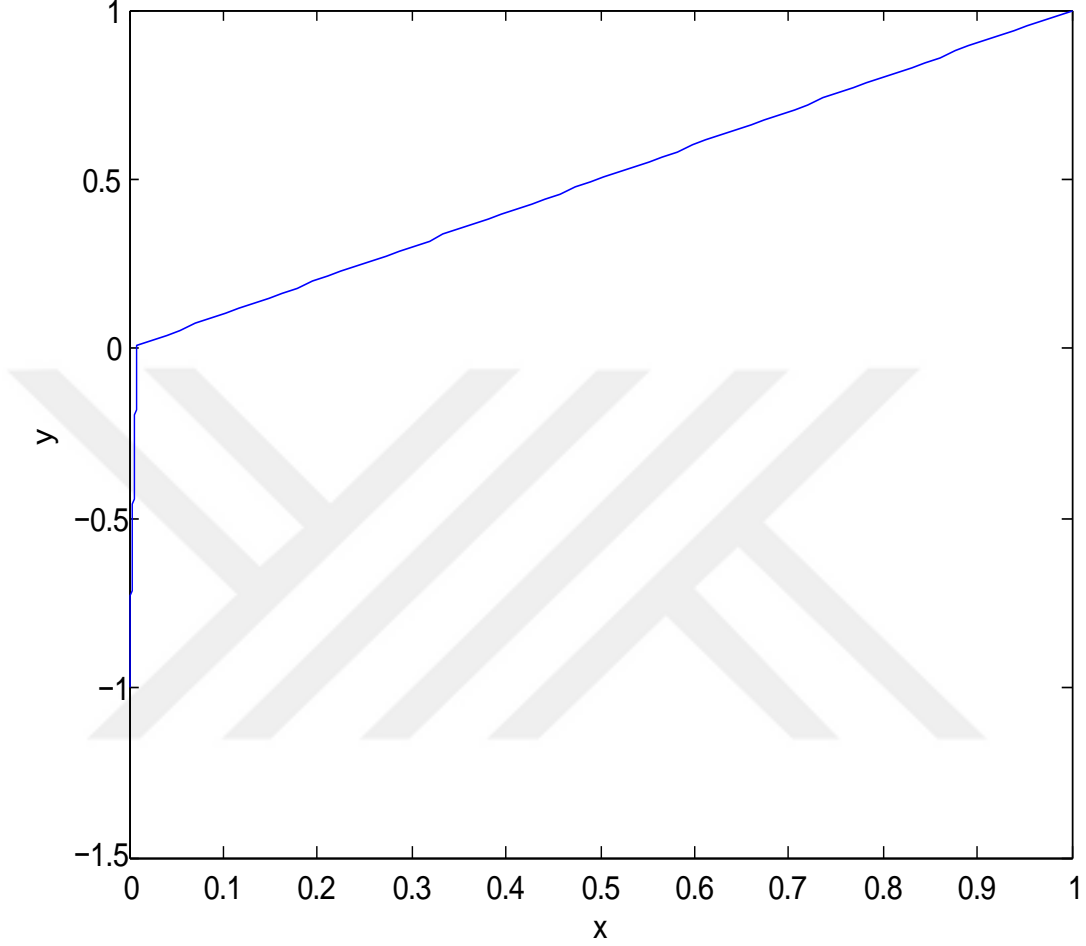
ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 6.2 (6.30)-(6.32) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.056424	0.030112	0.001555	0.007963	0.004024	0.002068
	0.84	0.89	0.95	0.97	0.98	
2^{-4}	0.058452	0.030321	0.001554	0.007951	0.004016	0.002035
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-6}	0.059015	0.030213	0.001550	0.007864	0.004013	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-8}	0.059015	0.030124	0.001551	0.007834	0.004008	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-10}	0.059013	0.030985	0.001549	0.007829	0.004005	0.001995
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-12}	0.059013	0.030988	0.001549	0.007827	0.004005	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-14}	0.059014	0.030986	0.001550	0.007827	0.004006	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
e^N	0.059024	0.030988	0.001555	0.007963	0.004024	0.002035
p^N	0.85	0.89	0.95	0.97	0.99	



Şekil 6.4 $\varepsilon = 2^{-4}$ ve $N = 64$ için yaklaşık ve kesin çözüm grafik eğrisi



Şekil 6.5 $\varepsilon = 2^{-8}$ ve $N = 128$ için yaklaşık ve kesin çözüm grafik eğrisi

6.5 Sonuçlar

Bu çalışmada integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli problem ele alındı. Bu şekildeki problemleri çözebilmek için Bakhvalov şebekede sonlu fark şemalarından faydalanarak düzgün yakınsak nümerik yaklaşım verilmektedir.

Burada, ε 'a göre düzgün yakınsak bir nümerik metod verildi. Bu metod için problemin çözümü ve türevi için asimptotik değerlendirmeler yapıldı ve bu asimptotik değerlendirmeler nümerik metodun analizinde kullanıldı. Daha sonra bu problem için düzgün olmayan şebeke üzerinde fark şeması kuruldu. Burada lineer baz fonksiyonları

kullanıldı. Bu problemin kararlılık analizi ve hata değerlendirmeleri yapıldı. Son olarak problemin düzgün yakınsaklığını gösteren bir teorem verildi.

Sonuç olarak sunduğumuz metodun etkinliğini ve kesinliğini ölçmek için örnekler üzerinde test edildi ve hesapladığımız sonuçlar, verilmiş teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmektedir. ε 'nın küçülen değerleri ve N 'nin büyüyen değerlerine göre buradaki yakınsaklık metodun yakınsaklığının birinci mertebeden olduğu gösterildi. Elde ettiğimiz sonuçlar birinci mertebeye yakın olduğu gözlemlendi. Dolayısıyla hesaplanan sonuçlar teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.





7. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER SİNGÜLER PERTÜRBE VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bu çalışmada aşağıdaki birinci mertebeden integral şartlı singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel problemi ele alınmaktadır:

$$Lu \equiv \varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)ds = f(t),$$
$$t \in I = (0, T], \quad (7.1)$$

$$u(0) = \int_0^T c(s)u(s)ds + A, \quad (7.2)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresidir. $\bar{I} = [0, T]$, A verilen bir sabit, $a(t) \geq \alpha > 0$, $c(t)$, $f(t)$ ve $K(t, s)$ fonksiyonları sırasıyla \bar{I} ve $\bar{I} \times \mathbb{R}$ aralığında yeterince düzgündür. Bu şartlar altında (7.1)-(7.2) probleminin bir tek çözümü vardır. ε 'nin küçük değerleri için $u(t)$ çözümü genelde $t = 0$ civarında sınır katına sahiptir.

7.1 Sürekli Problemin Çözümü için Bazı Değerlendirmeler

Burada (7.1)-(7.2) singüler pertürbe problemini çözebilmek için bazı değerlendirmeler vermekteyiz. Bu değerlendirmeler gelecek bölümlerde nümerik çözümlerin analizinde gerekli olacaktır.

Lemma 7.1.1. $a(t)$, $c(t)$, $f(t) \in C^1[0, T]$, $K(t, s) \in C^1[0, T]^2$ olsun. $u(t)$ fonksiyonu (7.1)-(7.2) probleminin çözümüdür.

Burada,

$$\gamma = T\|c\|_\infty + \alpha^{-1}\bar{K}T < 1 \quad (7.3)$$

şartı sağlansın. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad (7.4)$$

ve

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right\}, \quad t \in \bar{I}, \quad (7.5)$$

burada

$$C_0 = (1 - \gamma)^{-1} \{ |A| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} \} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T}, \quad (7.6)$$

ve

$$\bar{K} = \max_{0 \leq t \leq T} |K(t, s)|. \quad (7.7)$$

İspat. (7.1) denkleminden aşağıdaki ifadeyi alabiliriz:

$$\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) = F(t), \quad t \in I, \quad (7.8)$$

$$u(0) = \int_0^T c(s)u(s)ds + A. \quad (7.9)$$

Burada,

$$F(t) = f(t) - \int_0^l K(t, s)u(s)ds \quad (7.10)$$

şeklindedir.

Burada (7.8) - (7.9) problemi için Lemma 4.1'den maksimum yöntmini kullanacağız. (7.1)'de bir L diferansiyel operatör ve $v \in C^1[0, l]$ olsun. Eğer $0 < t < T$ için $v(0) \geq 0$, $Lv \geq 0$ ise o zaman $0 \leq t \leq T$ için $v(t) \geq 0$ olur. Buna göre maksimum prensibini kullanırsak, (7.8) - (7.9) probleminden

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |u(0)| + \alpha^{-1}\|F\|_{\infty} \\
&+ \alpha^{-1}\max_{0 \leq t \leq T} |K(t,s)| \int_0^t |u(t)| dt
\end{aligned} \tag{7.11}$$

eşitsizliğini alırız. Daha sonra (7.2) sınır şartından

$$|u(0)| \leq |A| + \int_0^T |c(s)||u(s)| ds \tag{7.12}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği (7.8) eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq |A| + \int_0^T |c(s)||u(s)| ds + \alpha^{-1}\|F\|_{\infty} \\
&+ \alpha^{-1}\bar{K} \int_0^t |u(t)| dt \\
&\leq |A| + T\|c\|_{\infty}\|u\|_{\infty} + \alpha^{-1}\|F\|_{\infty} + \alpha^{-1}\bar{K}\|u\|_{\infty}
\end{aligned} \tag{7.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Böylece

$$|u(t)| \leq \delta + \alpha^{-1}\bar{K} \int_0^t |u(t)| dt \tag{7.14}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (7.14) ifadesinden

$$|u(t)| \leq \delta \alpha^{-1}\bar{K}T \tag{7.15}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten

$$\|u\|_{\infty} \leq (|A| + T\|c\|_{\infty}\|u\|_{\infty} + \alpha^{-1}\|F\|_{\infty})\alpha^{-1}\bar{K}T$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{1 - T\|c\|_{\infty}\alpha^{-1}\bar{K}T} (|A| + \alpha^{-1}\|F\|_{\infty})\alpha^{-1}\bar{K}T \quad (7.16)$$

ifadesini buluruz. Bu ise (7.4) şartının ispatını vermektedir. Şimdi ise (7.5)'ün ispatını verelim: (7.8)'in bir kez türevini alırsak

$$\varepsilon v'(t) + a(t)v'(t) = G(t), \quad t \in \bar{I} \quad (7.17)$$

eşitliğini buluruz. Burada

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t), \\ G(t) &= f'(t) - a'(t)u(t) - K(t,t)u(t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} K(t,s)u(s)ds \end{aligned} \quad (7.18)$$

şeklinde verilir. (7.1) denkleminde

$$\begin{aligned} |u'(0)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \{|a(0)||u(0)| + |f(0)|\} \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (7.19)$$

yazabiliriz.

Ayrıca $\bar{K} = \max_{(t,s) \in \bar{I}} |K(t,s)|$ ve $|u(t)| \leq C$ durumlarından dolayı $G(t)$ için aşağıdaki eşitsizliği alabiliriz:

$$\begin{aligned} |G(t)| &\leq |f'(t)| + |a'(t)||u(t)| + |K(t,t)||u(t)| + \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial t} K(t,s) \right| |u(s)| ds \\ &\leq C. \end{aligned} \quad (7.20)$$

(7.18) eşitliğinden

$$v(t) = v(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \alpha(x) dx} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t G(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t \alpha(x) dx} d\xi. \quad (7.21)$$

elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitliği alabiliriz:

$$|u'(t)| \leq |u'(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \alpha(x) dx} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |G(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t \alpha(x) dx} d\xi. \quad (7.22)$$

(7.19), (7.20) ve (7.21) değerlendirmelerinden,

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} C \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (7.23)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan (7.5) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Lemma 7.1.1 ispatlanmıştır.

7.2 Ayrık Problem

Bu kısımda (7.1)-(7.2) singüler pertürbe problemine uygun sonlu fark şemasını vereceğiz. İlk olarak, $[0, T]$ bölgesinde aşağıdaki şekilde bir ω_h düzgün şebeke tanımı vereceğiz:

$$\omega_h = \left\{ t_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad h = \frac{T}{N} \right\} \quad (7.24)$$

Herhangi bir $g(t)$ fonksiyonu için $g_i = g(t_i)$ olarak ayarladığımız gösterimi basitleştirirsek, $g_i, g(t)$ 'nin bir yaklaşımı olduğunu gösterir. Burada

$$g_{\bar{t},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}, \quad \|g\|_\infty \equiv \|g\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \leq i \leq N} |g_i| \quad (7.25)$$

biçiminde verilir.

(7.1) denklemi için fark metodunun yaklaşımı aşağıdaki özdeşlikle başlayacağız:

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Lu(t)\psi_i(t)dt &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\psi_i(t)dt, \quad i \\ &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Burada $\psi_i(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\psi_i(t) = e^{-\frac{a_i(t_i-t)}{\varepsilon}}, \quad t_{i-1} < t < t_i. \quad (7.27)$$

Ayrıca χ_i aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$\chi_i = h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t)dt = \frac{1 - e^{-a_i\rho}}{a_i\rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}. \quad (7.28)$$

$\psi_i(t)$ aşağıdaki problemin çözümüdür,

$$-\varepsilon\psi_i'(t) + a_i\psi_i(t) = 0, \quad t_{i-1} < t < t_i, \quad (7.29)$$

$$\psi_i(t_i) = 1. \quad (7.30)$$

(7.26) denklemi düzenlenirse aşağıdaki ifadeyi buluruz

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t)u(t)] \psi_i(t) dt \\
& + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_0^t [K(t,s)u(s)ds] \psi_i(t) dt \\
& = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \psi_i(t) dt.
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Birinci integrale kısmi integrasyon uygulayarak ve ikinci integralin (7.31) 'in sağ tarafı yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\varepsilon u'(t) + a(t)u(t)] \psi_i(t) dt \\
& + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon u'(t) \psi_i(t) dt \\
& = \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \psi_i(t) dt + R_i^{(1)}
\end{aligned} \tag{7.32}$$

elde edilir. Burada $R_i^{(1)}$ kalan terimi

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [a(t) - a_i] u(t) \psi_i(t) dt \tag{7.33}$$

biçimindedir.

(7.32) daki integrallerin her bir (t_{i-1}, t_i) aralığına, Tanım 4.11'de ki (4.6) ve (4.7) kuadratür formları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon u'(t) \psi_i(t) dt + \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} u(t) \psi_i(t) dt \\
& + R_i^{(1)} = \varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + R_i^{(1)}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada θ_i ve ρ aşağıdaki biçimdedir:

$$\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}. \quad (7.35)$$

(7.22) denkleminin sağ tarafındaki integral için

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t) \psi_i(t) dt = f_i + R_i^{(2)} \quad (7.36)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $R_i^{(2)}$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - f_i] \psi_i(t) dt. \quad (7.37)$$

Tanım 3.11’de ki uygun interpolasyon kuadratur formlarını ve Tanım 3.12’de verilen sağ taraflı dikdörtgen kuralını uygulayarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \psi_i \int_0^t K(t, s) u(s) ds &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_0^{t_i} K(t_i, s) u(s) ds f_i + R_i^{(3)} \\ &= h \sum_{j=1}^i K_{ij} u_j + R_i^{(3)} + R_i^{(4)}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Burada

$$R_i^{(3)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \psi_i(t) \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) u(s) ds \right) d\xi, \quad (7.39)$$

ve

$$R_i^{(4)} = - \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t_i, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (7.40)$$

eşitlikleri bulunur.

(7.34), (7.35) ve (7.36) eşitliklerinden (7.1) denklemini için aşağıdaki fark şemasını yazabiliriz:

$$\varepsilon \theta_i u_{\bar{t},i} + a_i u_i + h \sum_{j=1}^i K_{ij} u_j + R_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.41)$$

burada kalan terim

$$R_i = R_i^{(1)} - R_i^{(2)} + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} \quad (7.42)$$

şeklinde ifade edilir.

(7.2) şartına uygun bir yaklaşım elde etmek için Tanım 4.12'den sağ taraflı dikdörtgen kuralını kullanıyoruz. Buradan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\int_0^T c(s)u(s)ds = h \sum_{i=1}^N c_i u_i + r. \quad (7.43)$$

Elde edilen r kalan terimi,

$$r = - \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} (c(t)u(t)) dt \quad (7.44)$$

biçimindedir. Sonuç olarak

$$u_0 = h \sum_{i=1}^N c_i u_i + r + A \quad (7.45)$$

ele alabiliriz.

(7.41) ve (7.45) de R_i ve r terimleri ihmal edilirse, (7.1)-(7.3) singüler pertürbe özellikli problem için aşağıdaki şekilde bir fark şeması bulunur:

$$ly_i \equiv \varepsilon \theta_i y_{\bar{t},i} + a_i y_i + h \sum_{j=1}^i K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.46)$$

$$y_0 = h \sum_{i=1}^N c_i u_i + A. \quad (7.47)$$

Burada θ_i katsayısı (7.35) bağıntısıyla tanımlanmaktadır.

7.3 Düzgün Yakınsaklık ve Hata Değerlendirmeleri

Bu metodun yakınsaklığı hakkında bazı değerlendirmeler vereceğiz, $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N$ hata fonksiyonunu aşağıdaki fark problemi şeklinde ele alıyoruz:

$$lz_i \equiv \varepsilon \theta_i z_{\bar{t},i} + a_i z_i + h \sum_{j=1}^i K_{ij} z_j = -R_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (7.48)$$

$$z_0 = h \sum_{i=1}^N c_i z_i + A - r. \quad (7.49)$$

R_i ve r kalan terimleri (7.42) ve (7.44) bağıntılarıyla verilmiştir.

Lemma 7.3.1. Eğer $a(t)$, $c(t)$, $f(t) \in C^1[0, T]$ ve $K(t, s) \in C^1[0, T]^2$ ise o zaman R_i ve r kalan terimleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq Ch \quad (7.50)$$

ve

$$|r| \leq Ch. \quad (7.51)$$

İspat. Burada $R_i^{(k)}$ ($k = 1,2,3,4$) durumlarını göz önüne alalım. Önce (7.50) eşitsizliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \chi_i^{-1} \hbar^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\alpha'(\xi_i)| |t - t_i| |u(t)| \psi_i(t) dt, \quad \xi \\ &\in [t_{i-1}, t_i] \leq Ch \chi_i^{-1} \hbar^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_i(t) dt \leq Ch. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Aynı şekilde $R_i^{(2)}$ terimi içinde alınabilir:

$$|R_i^{(2)}| \leq Ch. \quad (7.53)$$

(7.37) ifadesinden, $\frac{\partial K}{\partial \xi}$ ve $|u(t)| \leq C$ şartlarından aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|R_i^{(3)}| \leq \int_0^t \left| \frac{\partial K}{\partial \xi}(\xi, s) \right| |u(s)| ds \leq Ch. \quad (7.54)$$

Ve son olarak (7.23) ifadesinden

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| &= \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\xi - t_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (K(t_i, \xi) u(\xi)) \right| d\xi \\ &\leq h \int_0^T \left\{ \left| \frac{\partial K(t_i, \xi)}{\partial \xi} \right| |u(\xi)| + |K(t_i, \xi)| |u'(\xi)| \right\} d\xi \end{aligned} \quad (7.55)$$

eşitsizliği elde edilir. (7.4) ve (7.5) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| &\leq Ch \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} \right) d\xi \leq Ch \left\{ T + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{\varepsilon}} \right) \right\} \\ &\leq Ch. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Bu değerlendirmelerden dolayı aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$|R_i| \leq Ch, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.57)$$

Böylece (7.50) ifadesi tamamlanmış olur. Daha sonra r kalan terimini tahmin ederiz. (7.51) açık ifadesini aşağıdaki şekilde oluşturuyoruz:

$$\begin{aligned} |r| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) |c'(t)u(t) + c(t)u'(t)| dt \\ &\leq h \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{ |c'(t)||u(t)| \\ &\quad + |c(t)||u'(t)| \} dt. \end{aligned} \quad (7.58)$$

(7.4) ve (7.5) eşitsizliklerinden aşağıdaki ifadeye ulaşabiliriz:

$$|r| \leq Ch \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (1 + |u'(t)|) dt \leq Ch \quad (7.59)$$

Böylece (7.1)-(7.2) probleminin yakınsaklık sonucunu ifade edebiliriz.

Lemma 7.3.2 K , a ve c 'nin Lemma 7.1.1'deki varsayımları sağlansın. Ayrıca

$$\|c\|_{\infty, \bar{\omega}_h} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} < 1 \quad (7.60)$$

şartı sağlansın. z_i , (7.48)-(7.49) nin çözümleridir. Bu şartlar altında aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq C \{ \|R\|_{\infty, \omega_h} + |r| \} \quad (7.61)$$

İspat. Farz edelim ki, l (7.48)-(7.49) de bir fark operatörü olsun. Eğer v bir şebeke fonksiyonu ise $v_0 \geq 0$, $lv_i \geq 0$ ise o zaman $0 \leq t \leq T$ için $v_i \geq 0$ olur. Buna göre Lemma 4.1'den maksimum prensibini kullanırsak,

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq |z_0| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} + \alpha^{-1} h \sum_{j=1}^i |K_{ij}| |z_j| \quad (7.62)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Daha sonra (7.49) şartından aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|z_0| \leq h \sum_{j=1}^N |c_j| |z_j| + r. \quad (7.63)$$

(7.62) ve (7.63) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} &\leq |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} + h \sum_{j=1}^N |c_j| |z_j| + \alpha^{-1} h \sum_{j=1}^i |K_{ij}| |z_j|, \quad i = 1, \dots, N. \\ &\leq \bar{\delta} + \alpha^{-1} \bar{K} h \sum_{j=1}^N |z_j| \end{aligned} \quad (7.64)$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$\bar{\delta} = |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} + h \sum_{j=1}^N |c_j| |z_j| \quad (7.65)$$

olarak tanımlanır.

(7.64) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$|z_i| \leq \bar{\delta} e^{\alpha^{-1} \bar{K} t_i}. \quad (7.66)$$

Dolayısıyla biz aşağıdaki eşitsizliği yazabiliri

$$\begin{aligned}
|z_i| &\leq \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} + h \sum_{j=1}^i |c_j| |z_j| \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} \\
&\leq \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} + \max_{1 \leq j \leq N} |c_j| h \sum_{j=1}^i |z_j| \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} \\
&\leq \left[|r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} \right] e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} + hN \|c\|_{\infty, \bar{\omega}_h} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h}.
\end{aligned} \tag{7.67}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
&\left(1 - hN \|c\|_{\infty, \bar{\omega}_h} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} \right) \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T} \\
\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \frac{1}{1 - hN \|c\|_{\infty, \bar{\omega}_h} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T}} \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_h} \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{K} T}
\end{aligned} \tag{7.68}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Lemma 7.3.2 ispatlanmış olur.

Teorem 7.3.1 *u*, (7.1)-(7.2) probleminin çözümü ve *y* de (7.46)-(7.47) fark probleminin çözümü olduğunu varsayalım. O halde, Lemma 7.1.1 ve Lemma 7.3.2 koşulları ile beraber, aşağıdaki şekilde bir eşitsizlik sağlanır:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_h} \leq Ch. \tag{7.69}$$

İspat. Önceki iki lemmadan Teoremin ispatı çıkar.

7.4 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda (7.1)-(7.2) sürekli problemi için düzgün şebeke üzerinde kurulan (7.46)-(7.47) fark şeması için nümerik sonuçlar verilmektedir. Fark şemasının çözümü için sayısal sonuçlar tablolar ile gösterilmiştir.

Örnek 7.4.1

$$\varepsilon u'(t) + (1+t)u(t) + \frac{1}{10} \int_0^t tu(s)ds =$$

$$te^{-\frac{t}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{(1+t)^2} + 1 + \frac{t}{10} \left[\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \right) + \ln 2 \right], \quad t \in I = (0,1), \quad (7.70)$$

$$u(0) = \int_0^1 \frac{s}{2} u(s) dt = 3 - \varepsilon(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 - \ln 2 \quad (7.71)$$

problemi gözönünde bulundurulsun. Burada problem için kesin çözüm,

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{1}{1+t} \quad (7.72)$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 7.1 (5.29)-(5.30) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.02075619	0.01066801	0.00540788	0.00272253	0.00136592	0.00068404
	0.9625	0.9814	0.9908	0.9954	0.9977	
2^{-4}	0.01697993	0.00868855	0.00439879	0.00221330	0.00111013	0.00055586
	0.9688	0.9833	0.9915	0.9958	0.9979	
2^{-6}	0.01647393	0.00831395	0.00419396	0.00210888	0.00105763	0.00052955
	0.9889	0.9885	0.9925	0.9960	0.9980	
2^{-8}	0.01652099	0.00830367	0.00416198	0.00208599	0.00104531	0.00052333
	0.9950	0.9978	0.9972	0.9971	0.9982	
2^{-10}	0.01652118	0.00830620	0.00416490	0.00208531	0.00102838	0.00051379
	0.9945	0.9972	0.9987	0.9994	1.0005	
e^N	0.02075619	0.01066801	0.00540788	0.00272253	0.00136592	0.00068404
p^N	0.9625	0.9814	0.99908	0.9954	0.9957	

Örnek 7.4.2. Aşağıdaki test problemini ele alıyoruz:

$$\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^T K(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in I = (0,1], \quad (7.73)$$

$$a(t) = t + 1, \quad f(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\varepsilon}}}{2} + t + \left(e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right)\left(-\frac{t}{2}\right), \quad (7.74)$$

$$K(t,s) = t + s \quad (7.75)$$

ve

$$u(0) = 1 + \int_0^1 \frac{1}{2} \cos(\pi s) u(s) ds. \quad (7.76)$$

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uyguluyoruz. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümler ile karşılaştırıyoruz (Farrell vd.,

2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmesi,

$$e_{\varepsilon}^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (7.77)$$

ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2}: i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_{\varepsilon}^N = \frac{\ln\left(\frac{e_{\varepsilon}^N}{e_{\varepsilon}^{2N}}\right)}{\ln 2} \quad (7.78)$$

ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 7.2 (7.29)-(7.30) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N şebekesinde hesaplanmış e_{ε}^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.056424	0.030112	0.001555	0.007963	0.004024	0.002068
	0.84	0.89	0.95	0.97	0.98	
2^{-4}	0.058452	0.030321	0.001554	0.007951	0.004016	0.002035
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-6}	0.059015	0.030213	0.001550	0.007864	0.004013	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-8}	0.059015	0.030124	0.001551	0.007834	0.004008	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-10}	0.059013	0.030985	0.001549	0.007829	0.004005	0.001995
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-12}	0.059013	0.030988	0.001549	0.007827	0.004005	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
2^{-14}	0.059014	0.030986	0.001550	0.007827	0.004006	0.001996
	0.85	0.87	0.94	0.96	0.99	
e^N	0.059024	0.030988	0.001555	0.007963	0.004024	0.002035
p^N	0.85	0.89	0.95	0.97	0.99	

7.5 Sonuçlar

Bu çalışmada integral şartlı singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel başlangıç değer problemi ele alındı. Böyle problemler için elde edilecek çözümler için, düzgün şebeke üzerinde sonlu fark şemaları kullanılarak düzgün yakınsak analizler yapılmaktadır.

Burada, ϵ 'na göre düzgün yakınsak bir nümerik metod verildi ve bu metod için problemin zm ve türevi için asimptotik değerlendirmeler yapıldı ve bu asimptotik değerlendirmeler nümerik metodun analizinde kullanıldı. Daha sonra bu problem için düzgün şebeke üzerinde fark şeması kuruldu. Burada lineer baz fonksiyonları kullanıldı. Bu problemin kararlılık analizi ve hata değerlendirmeleri yapıldı. Son olarak problemin düzgün yakınsaklığını gösteren bir teorem verildi.

Sonuç olarak sunduğumuz metodun etkinliğini ve kesinliğini ölçmek için örnekler üzerinde test edildi ve hesapladığımız sonuçlar, verilmiş teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmektedir. ϵ 'nun küçülen değerleri ve N 'nin büyüyen değerlerine göre buradaki yakınsaklık metodun yakınsaklığının birinci mertebeden olduğu gösterildi. Elde ettiğimiz sonuçlar birinci mertebeye yakın olduğu gözlemlendi. Dolayısıyla hesaplanan sonuçlar teorik sonuçlarla uyumlu olduğu grlmektedir.

8. İNTEGRAL SINIR ŞARTLI LİNEER OLMAYAN SİNGÜLER PERTÜRBE VOLTERRA-İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Bu çalışmada aşağıdaki şekilde integral sınır şartlı lineer olmayan singüler pertürbe Volterra integro-diferansiyel problemleri gözönünde bulundurulmaktadır:

$$\begin{aligned} Lu \equiv \varepsilon u'(t) + f(t, u(t)) + \int_0^t K(t, s, u(s)) ds = 0, \\ t \in I = (0, T], \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$u(0) = \int_0^T c(s)u(s)ds + A, \quad (8.2)$$

burada $0 < \varepsilon \ll 1$ singüler pertürbasyon parametresidir. A verilen bir sabittir. $f(t, u)$ ve $K(t, s, u)$ fonksiyonları sırasıyla $\bar{I} = [0, T]$ 'de $\bar{I} \times \mathbb{R}$ ve $\bar{I} \times \bar{I} \times \mathbb{R}$ aralığında yeterince düzgündür. $c(t) \leq 0$ bir sürekli fonksiyondur. Ayrıca $\frac{\partial f}{\partial u} \geq \alpha > 0$ yazılabilir. Bu şartlar altında (8.1)-(8.2) probleminin bir tek çözümü vardır. ε 'nin küçük değerleri için $u(t)$ çözümü genelde $t = 0$ civarında sınır katı oluşturmaktadır.

8.1 Tam Çözüm için Bazı Değerlendirmeler

Burada (8.1) - (8.2) singüler pertürbe problemini çözebilmek için bazı değerlendirmeler vermekteyiz. Bu değerlendirmeler gelecek bölümlerde nümerik çözümlerin analizinde gerekli olacaktır.

Lemma 8.1.1 $f \in C^1[0, T]$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial t^m} \in C^1[0, T]$, $m = 0, 1$ olsun, $u(t)$ fonksiyonu (8.1)-(8.2) probleminin çözümüdür.

Burada,

$$\delta = \alpha^{-1} \bar{G} \|c\|_1 e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} < 1 \quad (8.3)$$

şartı sağlansın. Burada $G(t, s) = \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, \tilde{u}(s))$ olarak verilsin. O zaman aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\|u\|_{\infty} \leq C_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.4)$$

ve

$$|u'(t)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right\}, \quad t \in \bar{I}, \quad (8.5)$$

burada

$$C_0 = (1 - \delta)^{-1} \left\{ |A| + \alpha^{-1} (1 + \|c\|_1) \|f\|_{\infty} \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T}, \quad (8.6)$$

ve

$$\bar{G} = \max_{(t,s) \in \bar{I} \times \bar{I}} |G(t, s)|. \quad (8.7)$$

İspat. (8.1) denkleminde aşağıdaki ifadeyi alabiliriz:

$$\varepsilon u'(t) + a(t)u(t) + \int_0^t G(t, s)u(s)ds = F(t), \quad t \in I. \quad (8.8)$$

Buradan aşağıdaki eşitlikleri alabiliriz:

$$a(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \bar{u}(t)), \quad \bar{u}(t) = \mu u(t), \quad 0 < \mu < 1, \quad (8.9)$$

$$G(t, s) = \frac{\partial K}{\partial u}(t, s, \tilde{u}(s)), \quad \tilde{u}(s) = \eta u(s), \quad 0 < \eta < 1, \quad (8.10)$$

ve

$$F(t) = -f(t, 0) - \int_0^t K(t, s, 0) ds. \quad (8.11)$$

Burada (8.8) denkleminde $u(t)$ için aşağıdaki eşitliği alabiliriz:

$$u(t) = u(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left[\int_0^\xi G(\xi, s) u(s) ds \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi. \quad (8.12)$$

(8.12) ve (8.2) sınır şartından

$$u(0) = \frac{A + \int_0^T c(t) \left[\int_0^t F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi \right] dt}{1 - \int_0^T c(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\tau) d\tau} dt} - \frac{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(t) \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\xi G(\xi, s) u(s) ds \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi \right\}}{1 - \int_0^T c(t) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t a(\tau) d\tau} dt} \quad (8.13)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece, (8.13)' nin payı şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(t) \left[\int_0^t F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi \right] dt \right| \\
& + \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T c(t) \left\{ \int_0^t \left[\int_0^\xi G(\xi, s) u(s) ds \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t a(\tau) d\tau} d\xi \right\} dt \right| \\
& \leq |A| + \alpha^{-1} \|F\|_\infty \int_0^T |c(t)| \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt \\
& \quad + \alpha^{-1} \bar{G} \|u\|_\infty T \int_0^T |c(t)| \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} \right) dt \\
& \leq |A| + \alpha^{-1} \|F\|_\infty \int_0^T |c(t)| dt + \alpha^{-1} \bar{G} T \|u\|_\infty \int_0^T |c(t)| dt \\
& \leq |A| + \alpha^{-1} \|c\|_1 \|F\|_\infty + \alpha^{-1} \bar{G} T \|c\|_1 \|u\|_\infty. \tag{8.14}
\end{aligned}$$

(8.13)'ün paydası alttan 1 ile sınırlıdır. Buradan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz

$$|u(0)| \leq |A| + \alpha^{-1} \|c\|_1 (\|F\|_\infty + \bar{G} T \|u\|_\infty). \tag{8.15}$$

Daha sonra maksimum prensibinden $L_0 u = \varepsilon u'(t) + a(t)u(t)$ ve (8.8) formundan aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty & \leq |u(0)| + \alpha^{-1} \|F\|_\infty + \alpha^{-1} \bar{G} \int_0^t |u(s)| ds \\
& \leq |A| + \alpha^{-1} \|c\|_1 (\|F\|_\infty + \bar{G} T \|u\|_\infty) \\
& \quad + \alpha^{-1} \|F\|_\infty + \alpha^{-1} \bar{G} \int_0^t |u(s)| ds. \tag{8.16}
\end{aligned}$$

Burada,

$$\gamma = |A| + \alpha^{-1} \|F\|_\infty + \alpha^{-1} \|c\|_1 (\|F\|_\infty + \bar{G} T \|u\|_\infty) \tag{8.17}$$

olarak seçilir ise, böylece

$$|u(x)| \leq \gamma + \alpha^{-1} \bar{G} \int_0^t |u(s)| ds \quad (8.18)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(8.18) eşitsizliğine Gronwall eşitsizliğini uygularsak

$$\|u\|_\infty \leq \gamma e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \quad (8.19)$$

ifadesi bulunur.

Yukarıdaki eşitsizlikten aşağıdaki ifade bulunur;

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &\leq [|A| + \alpha^{-1} (1 + \|c\|_1) \|F\|_\infty] e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \\ &\quad + \alpha^{-1} \bar{G} T \|u\|_\infty e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \|c\|_1 \\ &\leq (1 - \delta)^{-1} [|A| + \alpha^{-1} (1 + \|c\|_1) \|F\|_\infty] e^{\alpha^{-1} \bar{G} T}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Burada,

$$\delta = \alpha^{-1} \bar{G} T \|c\|_1 e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} < 1 \quad (8.21)$$

şartı sağlanır.

Bu da (8.4)'ün ispatını verir. Şimdi ise (8.5)'ün ispatını yapalım: (8.8) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\varepsilon u''(t) + a(t)u'(t) = \varphi(t), \quad t \in I \quad (8.22)$$

burada

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -f'(t, 0) - K(t, t, 0) - \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, 0) ds - G(t, t)u(t) \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} G(t, s)u(s) ds - a'(t)u(t). \end{aligned} \quad (8.23)$$

$|u| \leq C_0$, $\bar{G} = \max_{(t,s) \in I \times I} |G(t,s)|$ ve Lemma 8.1.1 ifadelerinden aşağıdaki eşitsizliği verebiliriz:

$$|\varphi(t)| \leq C. \quad (8.24)$$

Böylece, (8.1) denkleminde aşağıdaki ifadeyi alabiliriz:

$$|u'(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon}. \quad (8.25)$$

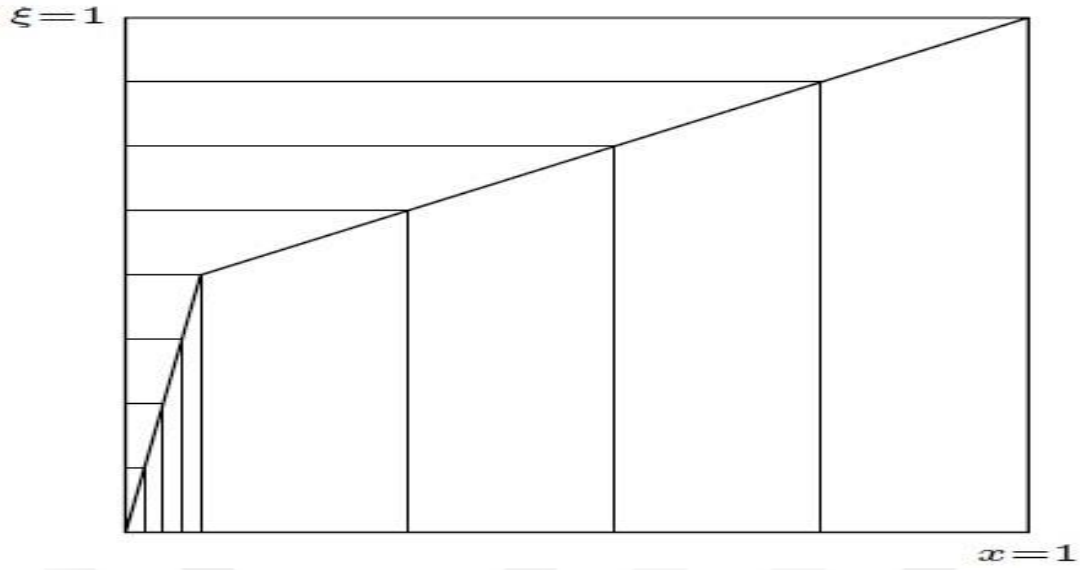
(8.22), (8.24) ve (8.25) değerlendirmelerinden,

$$\begin{aligned} |u'(t)| &\leq |u'(0)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t |\varphi(\xi)| e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^t \alpha(\tau) d\tau} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{\alpha(t-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} + \alpha^{-1} C \left(1 - e^{-\frac{\alpha(t-\xi)}{\varepsilon}} \right) \end{aligned} \quad (8.26)$$

eşitsizliği bulunur. Buradan (8.5) eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Lemma 8.1.1 ispatlanmıştır.

8.2. Fark Şemasının Analizi

Bu kısımda (8.1)-(8.2) singüler pertürbe özellikli problem için sonlu fark şeması vereceğiz. Singüler pertürbe problemin davranışına örnek olarak aşağıdaki grafik verilebilir:



Şekil 8.1 Parçalı düzgün (Shishkin) şebeke

Bu tarz problemlerin çözümleri için farklı şebekeler kullanılabilir. Parçalı düzgün (Shishkin) şebeke mantığı aşağıdaki doğrudan gösterildiği gibidir (Nayfeh, 1993):



Şekil 8.2 Parçalı düzgün (Shishkin) şebeke gösterimi

İlk olarak, $[0, T]$ bölgesinde aşağıdaki şekilde bir, ω_h parçalı düzgün şebeke tanımını verelim:

$$\begin{aligned} \omega_N &= \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T, \\ \tau_i &= t_i - t_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

Şebeke noktalarını aşağıdaki gibi seçebiliriz:

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} t_i = i\tau^{(1)}, & i = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, & t_i \in [0, \sigma], \\ t_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2}\right)\tau^{(2)}, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, & t_i \in [\sigma, T] \end{cases} \quad (8.28)$$

ve

$$\begin{aligned}\tau^{(1)} &= 2\sigma N^{-1}, & \tau^{(2)} &= 2(T - \sigma)N^{-1}, & \tau &\leq TN^{-1}, \\ TN^{-1} &\leq \tau^{(2)} < 2TN^{-1}, & \tau^{(1)} + \tau^{(2)} &= 2TN^{-1}.\end{aligned}\quad (8.29)$$

Şimdi burada, (8.1) ve (8.2) problemini bir düzgün olmayan şebeke üzerinde sonlu fark yöntemi ile uygulayacağız. Düzgün olmayan şebekeyi, N pozitif tamsayısı için $[0, T]$ aralığını iki alt aralığa $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, T]$ ayırarak ifade ederiz. Genellikle $\sigma \ll 1$ olarak alınır, burada σ aşağıdaki gibi belirlenen geçiş noktasıdır:

$$\sigma = \min \left\{ \frac{T}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln N \right\}. \quad (8.30)$$

(8.1) denklemini için fark metodunun yaklaşımını aşağıdaki özdeşlikle vereceğiz:

$$\begin{aligned}&\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon u'(t) dt + \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u) dt \\ &+ \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_0^t K(t, s, u(s)) ds \right] dt = 0.\end{aligned}\quad (8.31)$$

Kuadratur kurallarından yararlanarak ilk terime integrasyon uygulanırsa ve ikinci terim yeniden düzenlenirse,

$$\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon u'(t) dt + \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, u) dt = \varepsilon u_{\bar{t}, i} + f(t_i, u_i) + R_i^{(1)} \quad (8.32)$$

elde edilir. Buradan biz aşağıdaki kalan terimi bulabiliriz:

$$R_i^{(1)} = -\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, u(\xi)) d\xi. \quad (8.33)$$

(8.31) de ki terimlerin her bir (t_{i-1}, t_i) aralığına, Tanım 4.11'de ki (4.9) ve (4.10) kuadratur formları uygulanır ise aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
& \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\int_0^t K(t, s, u(s)) ds \right] dt \\
&= \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt \int_0^t K(t, s, u(s)) ds = \int_0^t K(t, s, u(s)) ds + R_i^{(2)}. \tag{8.34}
\end{aligned}$$

Burada $R_i^{(2)}$ aşağıdaki şekildedir:

$$R_i^{(2)} = -\tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^t K(\xi, s, u(s)) ds d\xi. \tag{8.35}$$

(8.34)'te çekirdek fonksiyonu içeren terim için Tanım 4.12'den orta dikdörtgen kuralı uygulandıktan sonra aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^{t_i} K(t_i, s, u(s)) ds + R_i^{(2)} = \sum_{j=1}^i \tau_i K_{ij}(t_i, t_j, u_j) + R_i^{(3)} + R_i^{(2)} \tag{8.36}$$

Burada $R_i^{(3)}$ aşağıdaki şekilde verilir:

$$R_i^{(3)} = \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\xi - t_{j-1}) \frac{d}{d\xi} K(t_i, \xi, u(\xi)) d\xi. \tag{8.37}$$

(8.32) ve (8.36) ifadelerinden (8.1) denklemini için aşağıdaki fark şemasını alabiliriz:

$$\varepsilon u_{\bar{i},i} + f(t_i u_i) + \sum_{j=1}^i \tau_i K_{ij}(t_i, t_j, u_j) + R_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{8.38}$$

Burada elde edilen kalan terim aşağıdaki gibidir:

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)}. \tag{8.39}$$

(8.2) sınır koşuluna uyumlu bir yaklaşım oluşturmak için için Tanım 4.1'den sağ taraflı dikdörtgen kuralını kullanıyoruz. Böylece aşağıdaki ifadeyi buluruz:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N \tau_i c_i u_i + A + r. \quad (8.40)$$

Burada r kalan terimini aşağıdaki gibi alırız:

$$r = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} (c(t)u(t)) dt. \quad (8.41)$$

(8.38) ve (8.40) deki R_i ve r terimleri ihmal edelim, o halde (8.1)-(8.2) problemi için aşağıdaki şekilde bir fark şeması oluşturabiliriz:

$$L_N y_i \equiv \varepsilon y_{\bar{t},i} + f(t_i, y_i) + \sum_{j=1}^i \tau_i K_{ij}(t_i, t_j, y_j) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.42)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^N \tau_i c_i y_i + A. \quad (8.43)$$

8.3 Hata Analizi ve Düzgün Yakınsaklık

Bu bölümde metodun yakınsaklığını değerlendirmek için, $z_i = y_i - u_i$, $0 \leq i \leq N$ hata fonksiyonunu aşağıdaki biçimdeki fark problemi şeklinde alıyoruz:

$$L_N z_i \equiv \varepsilon z_{\bar{t},i} + [f(t_i, y_i) - f(t_i, u_i)] + \sum_{j=1}^i \tau_i [K_{ij}(t_i, t_j, y_j) - K_{ij}(t_i, t_j, u_j)] = -R_i, \quad (8.44)$$

$$(8.45)$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^N \tau_i c_i z_i - r.$$

Burada verilen R_i ve r kalan terimleri sırasıyla (8.39) ve (8.41) eşitliklerinde tanımlanmıştır.

Lemma 8.3.1 $a(x)$ ve $f(x) \in C^1[0, T]$ şartları var ve Lemma 8.1.1 deki şartları gözönüne alındığında, R_i ve r kalan terimleri Shishkin şebeke üzerinde aşağıdaki şekilde eşitsizlikleri sağlar:

$$\|R\|_{\infty, \omega_N} \leq CN^{-1} \ln N \quad (8.46)$$

ve

$$|r| \leq CN^{-1} \ln N. \quad (8.47)$$

İspat. Burada $R_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) durumlarını göz önüne alalım. Önce (8.33) eşitsizliğini ispatlayalım:

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, u(\xi)) \right| d\xi, \quad \xi \in [t_{i-1}, t_i] \\ &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, u(\xi)) + \frac{\partial}{\partial u} f(\xi, u(\xi)) u'(\xi) \right| d\xi \\ &\leq C \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) |1 + u'(\xi)| d\xi \\ &\leq C \left\{ \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi)| d\xi \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Aynı şekilde $R_i^{(2)}$ terimi için $\left| \frac{\partial K}{\partial \xi} \right| \leq C$ ve $|u(x)| \leq C$, şartları altında aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
|R_i^{(2)}| &\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^t K_1(\xi, s, u(s)) ds \right| d\xi, \quad \xi \\
&\in [t_{i-1}, t_i] \\
&\leq \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) \left| K_1(\xi, t, u(t)) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} K_1(\xi, s, u(s)) ds \right| d\xi \\
&\leq C \tau_i^{-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{i-1}) |1 + u'(\xi)| d\xi \\
&\leq C \left\{ \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi)| d\xi \right\} \leq C \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{8.49}
\end{aligned}$$

(8.37) kalan terim ifadesinden, $\frac{\partial K}{\partial \xi}$ ve $|u(t)| \leq C$ şartları altında aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
|R_i^{(3)}| &\leq \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi - t_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K_1(t_i, \xi, u(\xi)) \right| d\xi, \quad \xi \\
&\in [t_{i-1}, t_i] \\
&\leq \sum_{j=1}^i \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\xi \\
&\quad - t_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K_1(t, \xi, u(\xi)) + \frac{\partial}{\partial u} K_1(t, \xi, u'(\xi)) \right| d\xi \\
&\leq C \max_{1 \leq j \leq i} \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |1 + u'(\xi)| d\xi \\
&\leq C \left\{ \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi)| d\xi \right\} \leq C \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{8.50}
\end{aligned}$$

Bu (8.48), (8.49) ve (8.50) değerlendirmelerinden dolayı biz aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R_i| \leq C \left\{ \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u'(\xi)| d\xi \right\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.51)$$

Buradan elde ettiğimiz sonuçlardan dolayı ve Lemma 8.1.1 de ki (8.5) eşitsizliği ile aşağıdaki sonuca varmış oluruz:

$$|R_i| \leq C \left\{ \tau_i + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}} dt \right\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.52)$$

Böylece (8.46) ifadesi tamamlanmış olur. şimdi, ilk durum için hata yaklaşımlarını Shishkin şebekenin düğüm noktalarına göre tahmin ediyoruz. İlk olarak, $\sigma = \frac{T}{2}$ durumunu ele alıyoruz. Daha sonra, $\frac{T}{2} \leq \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$, $\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \tau = TN^{-1}$ durumlarını ele alıyoruz. Sonuç olarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|R_i| \leq C \{N^{-1} + \varepsilon^{-1} TN^{-1}\} \leq C \{N^{-1} + \alpha^{-1} N^{-1} \ln N\}. \quad (8.53)$$

Buradan, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$|R_i| \leq CN^{-1} \ln N, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (8.54)$$

İkinci durum için $\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$ ve $\alpha^{-1} N^{-1} \ln N \leq \frac{T}{2}$ değerlendirmelerini ele alalım. $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, T]$ aralıkları üzerinde R_i kalan terimlerini tahmin ediyoruz. $[0, \sigma]$ sınır katı bölgesinde, (8.52) eşitsizliği aşağıdaki ifadeye indirgenir:

$$|R_i| \leq C(1 + \varepsilon^{-1}) \tau^{-1} \leq C(1 + \varepsilon^{-1}) \frac{2\alpha^{-1} \varepsilon \ln N}{N}. \quad (8.55)$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|R_i| \leq C \left\{ \tau^{(2)} + \alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha t_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha t_i}{\varepsilon}} \right) \right\}, \quad i = \frac{N}{2}, \dots, N. \quad (8.56)$$

Böylece, aşağıdaki ifadeye varmış oluruz:

$$|R_i| \leq CN^{-1} \ln N. \quad (8.57)$$

Daha sonra r kalan terimini tahmin ederiz. (8.41) açık ifadesini oluşturuyoruz ve aşağıdaki gibi bir değerlendirme alabiliriz:

$$\begin{aligned} |r| &\leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - t_{i-1}) \frac{d}{dt} (c(t)u(t)) dt \\ &\leq \sum_{i=1}^N \tau_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \{ |c'(t)| |u(t)| + |c(t)| |u'(t)| \} dt \\ &\leq Ch \sum_{i=1}^N (1 + |u'(t)|) dt \end{aligned} \quad (8.58)$$

(8.4) ve (8.5) ifadelerinden aşağıdaki eşitsizliği alabiliriz,

$$\begin{aligned}
|r| &\leq C \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} \tau^{(1)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\quad + C \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \tau^{(2)} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\leq C \tau^{(1)} \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\quad + C \tau^{(2)} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\leq C \tau^{(1)} \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\quad + C \tau^{(2)} \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\leq C(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) \int_0^T \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha t}{\varepsilon}}\right) dt \\
&\leq C(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) \left(T + \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha T}{\varepsilon}}\right)\right) \\
&\leq C(\tau^{(1)} + \tau^{(2)}) \leq CN^{-1} \ln N. \tag{8.59}
\end{aligned}$$

Böylece (8.42)-(8.43) probleminin yakınsaklık sonucunu ifade edebiliriz.

Lemma 8.3.2

Aşağıdaki fark problemini ele alalım:

$$l_N v_i := \varepsilon v_{\bar{t},i} + a_i + v_i = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{8.60}$$

$$v_0 = A. \tag{8.61}$$

Burada, $|F_i| \leq \mathcal{F}_i$ ve \mathcal{F}_i azalmayan bir fonksiyon olsun. O halde (8.60) ve (8.61) için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$|v_i| \leq |A| + \alpha^{-1}\mathcal{F}_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (8.62)$$

İspat. Lemma'nın ispatı kaynaklarda verilen çalışmayla benzerdir. Bknz (Kudu vd., 2016).

Lemma 8.3.3 c, K ve f, Lemma 8.3.1.'deki varsayımları geçerli olsun. Ayrıca,

$$\|c\|_{\infty, \bar{\omega}_N} e^{\alpha^{-1}\bar{c}T} < 1 \quad (8.63)$$

olsun. z_i , (8.44)-(8.45) nin çözümleridir. Bu şartlar altında aşağıdaki ifadeyi alabiliriz:

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \{ \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} + |r| \}. \quad (8.64)$$

İspat. (8.44) ve (8.45) yeniden yazılırsa aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$\varepsilon z_{\bar{t}, i} + a_i z_i + \sum_{j=1}^i \tau_j G_{ij} z_j = -R_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.65)$$

$$z_0 = \sum_{j=1}^N \tau_j c_j z_j - r. \quad (8.66)$$

Burada,

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial u}(t_i, u_i + \eta z_i^N), \quad 0 < \eta < 1, \quad (8.67)$$

ve

$$G_{ij} = \frac{\partial K}{\partial u}(t_i, t_j, u_j + \eta z_j^N), \quad 0 < \eta < 1 \quad (8.68)$$

eşitliklerini verebiliriz. Dolayısıyla,

$$\left| \sum_{j=1}^i \tau_j G_{ij} z_j \right| \leq \bar{G} \sum_{j=1}^i \tau_j |z_j| \quad (8.69)$$

eşitsizliği verilir.

(8.65) ve (8.66) den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|z_i| \leq |z_0| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \alpha^{-1} \bar{G} \sum_{j=1}^i \tau_j |z_j|. \quad (8.70)$$

Daha sonra (8.66) şartından aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|z_0| \leq \sum_{j=1}^N \tau_j |c_j| |z_j| + |r|. \quad (8.71)$$

(8.70) ve (8.71) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \\ &+ \sum_{j=1}^N \tau_j |c_j| |z_j| + \alpha^{-1} \bar{G} \sum_{j=1}^i \tau_j |z_j|, \quad i = 1, \dots, N, \\ &\leq \bar{\delta} + \alpha^{-1} \bar{G} \sum_{j=1}^N \tau_j |z_j|, \end{aligned} \quad (8.72)$$

ifadesini elde ederiz. Buradan

$$\bar{\delta} = |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \sum_{j=1}^N \tau_j |c_j| |z_j| \quad (8.73)$$

elde edilir.

(8.72) eşitsizliğine Gronwall fark benzeri eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$|z_i| \leq \bar{\delta} e^{\alpha^{-1} \bar{G} t_i} \quad (8.74)$$

Dolayısıyla, biz aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |z_i| &\leq \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + \sum_{j=1}^i \tau_j |c_j| |z_j| \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \\ &\leq \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \right. \\ &\quad \left. + \max_{1 \leq j \leq N} |c_j| \sum_{j=1}^i \tau_j |z_j| \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T}. \end{aligned} \quad (8.75)$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği bulabiliriz:

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \left[|r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \right] e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \\ &\quad + \tau N \|c\|_{\infty, \bar{\omega}_N} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_h}. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} &\left(1 - \tau N \|c\|_{\infty, \omega_N} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \right) \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \\ \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \frac{1}{1 - \tau N \|c\|_{\infty, \bar{\omega}_N} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T}} \left\{ |r| + \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} \right\} e^{\alpha^{-1} \bar{G} T} \end{aligned} \quad (8.77)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Lemma 8.3.3 ispatlanmış olur.

Teorem 8.3.1 u , (8.1)-(8.3) probleminin bir çözümü olsun ve y ise (8.42)-(8.43) fark probleminin bir çözümü olmak üzere, Lemma 8.2.1 ve Lemma 8.3.2 koşulları altında, aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-1} \ln N. \quad (8.78)$$

İspat. Önceki iki lemmadan Teoremin ispatlandığını görebiliriz.

8.4. Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, (8.1)-(8.3) singüler pertürbe problemi için Shishkin (parçalı düzgün) şebekede kurulan (8.42)-(8.43) fark şeması için nümerik sonuçlar verilmektedir. Fark şemasının çözümü için sayısal sonuçlar tablolar ile gösterilmiştir.

Örnek 8.4.1

$$\varepsilon u'(t) + u^2(t) + 2u(t) + \int_0^t u^2(s) ds = f(t), t \in I = (0, T], \quad (8.79)$$

$$f(t) = e^{-\frac{2t}{\varepsilon}} + e^{-\frac{t}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\varepsilon}}\right), \quad (8.80)$$

$$u(0) + \int_0^1 su(s) ds = 1 - \varepsilon(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{\varepsilon}} + \varepsilon^2. \quad (8.81)$$

Problemin kesin çözümü

$$u(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \quad (8.82)$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 8.1 (8.23)-(8.24) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Shishkin şebekesinde hesaplanmış e_ε^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.004013	0.002108	0.001083	0.000549	0.000276	0.000139
	0.9354	0.9640	0.9786	0.9884	0.9938	
2^{-4}	0.005270	0.002711	0.001509	0.000800	0.000413	0.000210
	0.9586	0.8785	0.9275	0.9527	0.9750	
2^{-6}	0.008103	0.004249	0.002184	0.001109	0.000559	0.000210
	0.9399	0.9616	0.9779	0.9880	0.9989	
2^{-8}	0.010661	0.005648	0.002929	0.001496	0.000756	0.000380
	0.9269	0.9471	0.9692	0.9837	0.9914	
2^{-10}	0.012812	0.006959	0.003642	0.001868	0.000947	0.000477
	0.8806	0.9340	0.9645	0.9798	0.9892	
e^N	0.012812	0.006959	0.003642	0.000800	0.000947	0.000477
p^N	0.8806	0.8785	0.9275	0.9527	0.9750	

Örnek 8.4.2 Aşağıdaki test problemini ele alıyoruz:

$$\varepsilon u'(t) + 2 + \cosh u(t) + \int_0^t \sinh u(s) ds = 0, \quad t \in I = (0, T], \quad (8.83)$$

$$u(0) + \int_0^1 e^s u(s) ds = 2 \quad (8.84)$$

problemini ele alalım.

Bu problemin çözümü bilinmemektedir. Böylece, hesapladığımız problemin, çözümlerindeki oluşan hataları ve bu çözümden elde ettiğimiz yakınsaklık oranlarını değerlendirmek için çift şebeke yöntemi uygularız. Dolayısıyla, hesapladığımız çözümleri ikiye bölünmüş bir çift şebekede ki çözümlerle karşılaştırıyoruz (Farrell vd., 2000; Linß, 2003; Cakir ve Amiraliev, 2007; Roos vd., 2008). Bu yöntemle oluşturduğumuz hata değerlendirmesi,

$$e_{\varepsilon}^N = \max_{\omega_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}| \quad (8.85)$$

ile verilmektedir. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$, $\bar{\omega}_{2N} = \{x_{i/2} : i = \overline{0, 2N}\}$ şebekesinde ilgili metodun yaklaşık çözümüdür ve $i = \overline{1, N-1}$ için $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Uygun yakınsaklık oranları

$$p_{\varepsilon}^N = \frac{\ln\left(\frac{e_{\varepsilon}^N}{e_{\varepsilon}^{2N}}\right)}{\ln 2} \quad (8.86)$$

ile hesaplanmaktadır.

Çizelge 8.2 (8.23)-(8.24) problemi için ε 'un azalan ve N 'nin artan değerlerinin, ω_N Shishkin şebekesinde hesaplanmış e_{ε}^N hata değerleri ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-2}	0.056424 0.84	0.030112 0.89	0.001555 0.95	0.007963 0.97	0.004024 0.98	0.002068
2^{-4}	0.058452 0.85	0.030321 0.87	0.001554 0.94	0.007951 0.96	0.004016 0.99	0.002035
2^{-6}	0.059015 0.85	0.030213 0.87	0.001550 0.94	0.007864 0.96	0.004013 0.99	0.001996
2^{-8}	0.059015 0.85	0.030124 0.87	0.001551 0.94	0.007834 0.96	0.004008 0.99	0.001996
2^{-10}	0.059013 0.85	0.030985 0.87	0.001549 0.94	0.007829 0.96	0.004005 0.99	0.001995
2^{-12}	0.059013 0.85	0.030988 0.87	0.001549 0.94	0.007827 0.96	0.004005 0.99	0.001996
2^{-14}	0.059014 0.85	0.030986 0.87	0.001550 0.94	0.007827 0.96	0.004006 0.99	0.001996
e^N	0.059024	0.030988	0.001555	0.007963	0.004024	0.002035
p^N	0.85	0.89	0.95	0.97	0.99	

8.5 Sonuçlar

Bu çalışmada integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli problem ele alındı. Bu türden problemler için çözüm, parçalı düzgün (Shishkin) şebekede sonlu fark şemalarından faydalanılarak düzgün yakınsak bir nümerik yaklaşım verilmektedir.

Burada ϵ 'na göre düzgün yakınsak bir nümerik metod verildi. Bu verilen metod için problemin çözümü ve türevi için asimptotik değerlendirmeler yapıldı ve bu asimptotik değerlendirmeler nümerik metodun analizinde kullanıldı. Daha sonra bu problem için parçalı düzgün (Shishkin) şebeke üzerinde fark şeması kuruldu. Burada lineer baz fonksiyonları kullanıldı. Bu problemin kararlılık analizi ve hata değerlendirmeleri yapıldı. Son olarak problemin düzgün yakınsaklığını gösteren bir teorem verildi.

Sonuç olarak sunduğumuz metodun etkinliğini ve kesinliğini ölçmek için örnekler üzerinde test edildi ve hesapladığımız sonuçlar, verilmiş teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmektedir. ϵ 'nın küçülen değerleri ve N 'nin büyüyen değerlerine göre buradaki yakınsaklık metodun yakınsaklığının birinci mertebeden olduğu gösterildi. Elde ettiğimiz sonuçlar birinci mertebeye yakın olduğu gözlemlendi. Dolayısıyla hesaplanan sonuçlar teorik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

9. TARTIŞMA VE SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan singüler pertürbe özellikli problemler bir çok alanda kullanımı, giriş bölümünde ve literatür bildirişlerinde detaylı bir şekilde verilmiştir.

Singüler pertürbe özellikli problemler, en yüksek mertebeden türevlerin olduğu ve katsayılarında bir pozitif küçük parametrenin var olduğu problemler olarak bilinmektedir. Bu tür problemler için, küçük parametrelere sahip olunması, uygun nümerik çözüm bulmada oldukça büyük sorunlar oluşturmaktadır.

Bu pozitif küçük parametrenin varlığından dolayı bu tür singüler pertürbe problemlerin çözümleri, tanım bölgesinde sınır katı olarak bilinen ince geçiş katlarında oldukça düzensiz ve hızlı bir şekilde değişirken, diğer tanımlı bölgelerde genellikle çok düzenli ve yavaş değişir. Burada var olan bu düzensiz durum, singüler pertürbe problemlerde ki çözüm için, tanım bölgesinde sınırsız türevlere sahip olmasına neden olmaktadır. Bu durumda, bu şekildeki denklemlerin çözümlerinde ciddi sorunlar baş göstermektedir. Bu ortaya çıkan zorluklar, nümerik çözümlerde de var olmaktadır. Bu nedenle, şebeke adımlarının giderek küçük değerler almasıyla yaklaşık çözüm genellikle kesin çözümden iraksamaktadır. Genel olarak kullanılan metodlar, sınırların bulunduğu çözümün davranışını taklit edemez ve bu nedenle kesin çözümlerle karşılaştırıldığında daha büyük hatalara neden olmaktadır. Dolayısıyla, singüler pertürbe özelliklere sahip problemleri çözmek için uygun nümerik metotların kurulması büyük öneme sahiptir.

Bu “İntegral Sınır Şartlı Singüler Pertürbe Problemlerin Nümerik Çözümleri” tez çalışmasında şu ana kadar çok az sayıda integral sınır şartlı singüler pertürbe özellikli problemler için Bakhvalov ve düzgün şebekelerde fark şemaları kuruldu. Ayrık maksimum normdaki pertürbasyon parametresine göre fark şemaları birinci mertebeden düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Nümerik sonuçlar bölümünde algoritma ile elde edilen sonuçların, teorik sonuçlar ile uyduğu görülmüştür. Nümerik sonuçlarda problemin kesin çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki karşılaştırmalar grafik ve tablolar ile verilmiştir.

Bu çalışmada ele aldığımız dört problem için sırasıyla aşağıdaki değerlendirme sonuçları verilebilir:

Birinci çalışmada, integral sınır şartlı ikinci mertebeden lineer singüler pertürbe problemini çözmek için nümerik metod verilmiştir. İlk olarak, problemin çözümü ve türevi için açık sınırlar oluşturuldu. Daha sonra, Bakhvalov şebekede fark şeması

oluşturulur. Ayrık maksimum normdaki pertürbasyon parametresine göre bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Ayrıca yöntemin etkinliği iki örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler için N nin değerleri, partürbasyon parametresinin değerleri, maksimum hata sonuçları ve yakınsama oranları verilmiştir. N için artan, epsilon azalan değerler aldığında düzgün yakınsama oranlarının monoton olarak bire yakınsadığı görülmüştür. Elde ettiğimiz sonuçlar tablolar ile verilmiştir.

İkinci çalışmada, integral sınır şarlı ikinci mertebeden lineer olmayan singüler pertürbe problemini çözmek için nümerik metod sunulmuştur. Öncelikle, problemin çözümü ve türevi için açık sınırlar oluşturuldu. Daha sonra, Bakhvalov şebekede fark şeması oluşturulmuştur. Ayrık maksimum normdaki pertürbasyon parametresine göre bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Ayrıca yöntemin etkinliği iki örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler için N nin değerleri, partürbasyon parametresinin değerleri, maksimum hata sonuçları ve yakınsama oranları sunulmuştur. N için artan, epsilon azalan değerler aldığında düzgün yakınsama oranlarının monoton olarak bire yakınsadığı görülmüştür. Elde ettiğimiz sonuçlar tablolar ve grafikler ile ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü problemi için, integral sınır şarlı lineer birinci mertebeden singüler pertürbe Volterra integro diferansiyel problemini çözmek için nümerik metod verilmiştir. Öncelikle, problemin çözümü ve türevi için açık sınırlar oluşturuldu. Daha sonra, Düzgün şebekede fark şeması kurulmuştur. Ayrık maksimum normdaki pertürbasyon parametresine göre bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Ayrıca yöntemin etkinliği iki örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler için N nin değerleri, partürbasyon parametresinin değerleri, maksimum hata sonuçları ve yakınsama oranları sunulmuştur. N artan, epsilon azalan değerler aldığında düzgün yakınsama derecesi birinci mertebeden olduğu ispatlanmıştır. Elde ettiğimiz sonuçlar tablolar ile ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Tezin son probleminde, integral sınır şarlı lineer birinci mertebeden singüler pertürbe Volterra integro diferansiyel problemini çözmek için nümerik metod verilmiştir. Öncelikle, problemin çözümü ve türevi için açık sınırlar oluşturuldu. Daha sonra, Shishkin şebekede fark şeması kurulmuştur. Ayrık maksimum normdaki pertürbasyon parametresine göre bu fark şemalarının düzgün yakınsaması kanıtlanmıştır. Ayrıca yöntemin etkinliği iki örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler için N nin değerleri,

partürbasyon parametresinin değerleri, maksimum hata sonuçları ve yakınsama oranları sunulmuştur. N artan, epsilon azalan değerler aldığında düzgün yakınsama oranlarının monoton olarak bire yakınsadığı görölmüştür. Elde ettiğimiz sonuçlar tablolar ile ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

Yöntemimiz, her bir alt aralıkta tek tip bir ağ üzerinde yeni bir fark operatörü içerir. Fark şeması, üstel temel fonksiyonların kullanımı ve ağırlık ve kalan terimlerin integral formda enterpolasyonlu kareleme kuralları ile integral kimlikler yöntemiyle oluşturulur. Bu, klasik yöntemlere kıyasla çok daha düşük tam çözüm türevleri içeren bir yerel kesme hatasıyla sonuçlanır ve dolayısıyla yakınsamanın incelenmesini kolaylaştırır.

Kullandığımız yöntemin birçok avantajı vardır, çünkü problemimizin tahmini için daha az düzgün koşul gereklidir. Bu nedenle yöntem daha kullanışlıdır ve iyi sonuçlar verir.

Dolayısıyla, nümerik metotların çözümü için kolay olmayan hem integral sınır şartlı hem de singüler pertürbe özelliğe sahip bu tür problemler için ele alınan sonlu fark metodu oldukça etkili ve kullanışlıdır. Bu yapılan çalışmalardan yola çıkılarak integral sınır şartları ile karışık tipten ve lokal olmayan daha karmaşık tipteki şartları içeren diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler çalışılabilir. Ayrıca yakınsaklık oranı ikinci mertebeye çıkarılabilir.



KAYNAKLAR

- Amiraliyev, G.M., Mamedov, Y.D. (1995). Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations. *Turkish Journal of Mathematics*, 19(3), 207-222.
- Amiraliyev, G.M., Cakir, M. (2002). Numerical solution of the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Mechanics*, 23, 755-764.
- Amiraliyev, G.M., Kudu, M., Duru, H. (2006). Uniform difference method for a parameterized singular perturbation problem. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 89-100.
- Amiraliyev, G.M., Amiraliyeva, I.G., Kudu, M. (2007). A numerical treatment for singularly perturbed differential equations with integral boundary condition *Applied Mathematics and Computation*, 185(1), 574-582.
- Amirali, G., Amirali, I. (2023). *Nümerik Analiz, Teori ve Uygulamalarla*. Seçkin Yayınevi: Ankara, Türkiye.
- Adzic, N. (2000). Spectral approximation and nonlocal boundary value problems. *Novi Sad Journal Mathematics*, 30(3), 1-10.
- Ahsan, M., Bohner, M., Ullah, A., Khan, A.A., Ahmad, S. (2023). A Haar wavelet multi-resolution collocation method for singularly perturbed differential equations with integral boundary conditions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 204, 166-180.
- Arslan, D. (2017). Finite difference method for solving singularly perturbed multi-point boundary value problem. *Journal of the Institute of Natural and Applied Sciences*, 22 (2), 64-75.
- Arslan, D. (2020). A New error evaluation for singularly perturbed problem with multi-point boundary condition. *Computational Methods for Differential Equations*, 8(2), 236-250.
- Andreev, V., Kopteva N. (2008). Pointwise approximation of corner singularities for a singularly perturbed reaction-diffusion equation in an L – shaped domain. *Mathematics of Computation*, 77(264), 2125-2139.
- Bakhvalov, N.S. (1969). The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer. *USSR Computational Mathematics Physics*, 9(4), 139–166.
- Benchohra, M., Ntouyas, S.K. (2000). Existence of solutions of nonlinear differential equations with nonlocal conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252(1), 477-483.
- Borovykh, N. (2002). Stability in numerical solution of the heat equation with nonlocal boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 42(1-3), 17-27.
- Byszewski, L. (1991). Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 162(2), 494-505.
- Cakir, M., Amiraliyev, G. M. (2005). A finite difference method for the singularly perturbed problem with nonlocal boundary condition. *Applied Mathematics and Computation*, 160 (2), 539-549.

- Cakir, M., Amiraliev, G. M. (2007). Numerical solution of a singularly perturbed three-point boundary value problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 84(10), 1465-1481.
- Cakir, M. (2010). Uniform second-order difference method for a singularly perturbed three-point boundary value problem. *Advances in Difference Equations*, 1-13.
- Cakir, M. (2016). A numerical study on the difference solution of singularly perturbed semilinear problem with integral boundary condition. *Mathematical Modelling and Analysis*, 21(5), 644-658.
- Cannon, J. R. (1963). The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 21 (2), 155-160.
- Cen, Z., Cai, X. (2007). A second-order upwind difference scheme for a singularly perturbed problem with integral boundary condition in natural network. **In Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems: 11th International Conference**, Heidelberg, Berlin.
- Cen Z, Liu L.B, Xu A. (2021). A second-order adaptive grid method for a nonlinear singularly perturbed problem with an integral boundary condition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 385, 113205.
- Chegis, R. (1988). The Numerical Solution of the singularly perturbed nonlocal problem. *Lietuvos Matematikos Rinkinys*, 28, 144-152.
- Chegis, R. (1991). The difference scheme for problems with nonlocal conditions. *Informatica(Lietuva)*, 2, 155-170.
- Das, P., Natesan, S. (2013a). Richardson extrapolation method for singularly perturbed convection-diffusion problems on adaptively generated mesh. *Computer Modeling. Engineering Sciences.*, 90 (6): 463-485.
- Das, P., Natesan, S. (2013b). Numerical solution of a system of singularly perturbed convection diffusion boundary value problems using mesh equidistribution technique. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10 (1), 1-17.
- Debela, H.G., Duressa G.F. (2019). Exponentially fitted finite difference method for singularly perturbed delay differential equations with integral boundary condition. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 11(4), 476-493.
- Debela, H.G., Duressa G.F. (2023). Fitted operator finite difference method for singularly perturbed differential equations with integral boundary condition. *Kragujevac Journal of Mathematics.*, 47(4), 637-651.
- Doolan, E. P., Miller. J. J., Schilders., W. H. (1980). **Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers**. Boole Press: Dublin, Ireland.
- Dunne, R. K., O’Riordan, E., Turner M. M. (2007). A numerical method for a singular perturbation problem arising in the modelling of plasma sheaths. *International Journal of Computing Science and Mathematics*, 1(2-4), 322-342.
- Farrell, P., Hegarty, A., Miller, J. M., O’Riordan, E., Shishkin, G. I. (2000). **Robust Computational Techniques for Boundary Layers**. Chapman Hall/CRC: New York, USA.
- Ionkin, N.I. (1977). The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differentsial'nye Uravneniya*, 13(2), 294-304.

- Henderson, J., Luca, R., Tudorache, A. (2016). Positive solutions for a system of second-order differential equations with integral boundary conditions. *IJAPM*, 6(3), 138-149.
- Herceg, D. (1990). On the numerical solution of a singularly perturbed nonlocal problem. *Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Math*, 20(2), 1-10.
- Herceg, D., Surla, K. (1991). Solving a nonlocal singularly perturbed nonlocal problem by splines in intension. *Faculty of Sciences-University of Novi Sad*, 21, 119-132.
- Jankowski, T. (2002). Application of the numerical-analytic method to systems of differential equations with parameter. *Ukrainian Mathematical Journal*, 54(4), 671-683.
- Jankowski, T. (2004). Existence of solutions of differential equations with nonlinear multipoint boundary conditions. *Computers & Mathematics with applications*, 47(6-7), 1095-1103.
- Kadalbajoo, M.K., Gupta, C.P. (2010). A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation*, 217(8), 3641-3716.
- Kevorkian, J., Cole, J. D. (1981). ***Perturbation Methods in Applied Mathematics***. Springer, New York and Heidelberg.
- Kellogg, R., Linss, T., Stynes, M. (2008). A finite difference method on layer-adapted meshes for an elliptic reaction-diffusion system in two dimensions. *Mathematics of computation*, 77(264), 2085-2096.
- Kudu, M., Amirali I., Amiraliyev, G.M. (2016). A layer analysis of parameterized singularly perturbed boundary value problems. *International Journal of Applied Mathematics*, 29(4), 439-449.
- Kudu, M. (2018). A parameter uniform difference scheme for the parameterized singularly perturbed problem with integral boundary condition. *Advances in Difference Equations*, 1, 1-12.
- Kudu, M., Amirali, I., Amiraliyev, G. M. (2018). Uniform numerical approximation for parameter dependent singularly perturbed problem with integral boundary condition. *Miskolc Mathematical Notes*, 19(1), 337-353.
- Kumar, S., Kumar S, Sumit. (2020). High-order convergent methods for singularly perturbed quasilinear problems with integral boundary conditions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 8. DOI: 10.1002/mma.6854
- Kumar S., Vigo-Agular J. (2022). Analysis of a nonlinear singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 404, 113410.
- Kopteva N.V. (2007). Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem. *Mathematics of Computation*, 76(258), 631.646.
- Kopteva, N. V, O.Riordan E. (2010). Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(3), 393-415.
- Linß, T., Stynes, M. (1999). A hybrid difference on a Shishkin mesh for linear convection-diffusion problems. *Applied numerical mathematics*, 31(3), 255-270.
- Linß, T. (2003). Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(9-10), 1061-1105.

- Linß, T., Stynes, M. (2009). Numerical solution of systems of singularly perturbed differential equations. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 9(2), 165-191.
- Liu, L-B., Long, G., Cen, Z. (2020). A robust adaptive grid method for a nonlinear singularly perturbed differential equation with integral boundary condition *Numerical Algorithms*, 83, 719-739.
- Liu, L-B., Yang, Xiu. (2021). Convergence analysis of Richardson extrapolation for a quasilinear singularly perturbed problem with an integral boundary condition on an adaptive grid. *Applied Mathematics Letters*, 115, 106976.
- Miller, J. J., O’Riordan, E., Shishkin, G. I. (1996). ***Fitted numerical methods for singular perturbation problems : error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions.*** Rev. Ed. World Scientific: Singapore.
- Munyakazi, J.B., Kehinde, O.O. (2022). A new parameter-uniform discretization of semilinear singularly perturbed problems. *Mathematics*, 10(13), 2254.
- Nayfeh, A. H. (1973). ***Perturbation Methods.*** Wiley: New York, USA.
- Nayfeh, A. H., (2011). ***Introduction to Perturbation Techniques.*** John Wiley & Sons, New York.
- Nakhushev, A.M. (1985). On nonlocal boundary value problems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 21, 92-101.
- Nicoud, F., Schönfeld, T. (2002). Integral boundary conditions for unsteady biomedical CFD applications, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40(3-4), 457-465.
- O’Malley, R. E. (1991). ***Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations.*** Springer Verlag: New York.
- Petrovic, N. (1991). On a uniform numerical method for a nonlocal problem. *Univ. U Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Math.*, 21(2), 133-140.
- Prandtl, L. (1904). The concept of the boundary layer in a fluid flow over a surface. **Third International Mathematics Congress**, Heidelberg, Germany.
- Roos, H.G. (1998). Layer-adapted grids for singular perturbation problems. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, 78(5), 291-309.
- Roos, H. G., Stynes, M., Tobiska, L. (2008). ***Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations.*** Springer Verlag: Berlin.
- Samoilenko, A. M., Martynyuk, S. V. (1991). Justification of a numerical-analytic method of successive approximations for problems with integral boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 43(9), 1150-1157.
- Samaraskii, A. A. (2001). ***The Theory of Difference Schemes.*** CRC Press.
- Sapagovas, M., Chegis, R. (1987). Numerical solution of nonlocal problems. *Lietuvos Matematika Rink*, 27, 348-356.
- Sapagovas, M., Chegis R. (1987). On some boundary value problems with a nonlocal condition. *Differentsial'nye Uravneniya*, 23(7), 1268-1274.
- Savin, I.A. (1995). On the rate of convergence, uniform with respect to a small parameter of a difference scheme for an ordinary differential equation. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 35(11), 1758-1765.
- Sekar, E., Tamilselvan, A. (2019a). Singularly perturbed delay differential equations of convection--diffusion type with integral boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 59, 701-722.

- Sekar, E., Tamilselvan, A. (2019b). Finite difference scheme for third order singularly perturbed delay differential equation of convection diffusion type with integral boundary condition. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 61, 73-86.
- Shishkin G.I. (1990). *Grid Approximation of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations*, Second doctoral thesis. Keldysh Institute, Moscow, Russian. Section, 19.
- Smith, D. R. (1985). *Singularly Perturbation Theory: an introduction with applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G.M., Amirali. I. (2019). Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro-differential equation with delay. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 355, 301-309.
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G.M. (2020). A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(6), 1293-1302.
- Yapman, Ö., Amiraliyev, G.M. (2021). Convergence analysis of the homogeneous second order difference method for a singularly perturbed Volterra delay-integro-differential equation. *Chaos, Solitons and Fractal*, 150, 111100.
- Temel, Z., Cakir, M. (2023). A new numerical scheme for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Gazi University Journal of Science*. 36(2), 792-805.
- Wazwaz, A. M. (2010). *Partial differential equations and solitary waves theory*. Springer Science & Business Media.



ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Zelal Temel

Eğitim Bilgileri

Lisans : Matematik Bölümü
Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Fakülte : Fen Fakültesi
Bölüm : Matematik
Mezuniyet Yılı : 2016

Yüksek Lisans : Matematik Bölümü
Üniversite : Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi
Enstitü : Fen Bilimleri
Anabilim Dalı : Matematik
Mezuniyet Yılı : 2019

Akademik Yayınlar

Temel, Z., Cakir, M. (2023). A new numerical scheme for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *Gazi University Journal of Science*. 36(2), 792-805.

VAN YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih 16/10/2023

Tez Başlığı: **İNTEGRAL SINIR ŞARTLI SİNGÜLER PERTÜRBE PROBLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın, kapak sayfası, giriş, ana bölümler ve sonuç bölümlerinden oluşan toplam 125 (YüzYirmiBeş) sayfalık kısmına ilişkin, 16/10/2023, tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre tezimin benzerlik oranı %9 (Dokuz) dur.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit match size to 7 words)

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

Tarih ve İmza
16/10/2023

Adı Soyadı: Zelal TEMEL

Öğrenci No: 19910001316

Anabilim Dalı: Uygulamalı Matematik

Programı: Matematik

Statüsü: () Yüksek lisans (x) Doktora

DANIŞMAN

ENSTİTÜ ONAYI

UYGUNDUR

UYGUNDUR

