İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DALGALANAN HIZLA DÖNEN KİRİŞLERDE KAOTİK TİTREŞİMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur TATLIER

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Dinamiği, Titreşim ve Akustik Dalı

TEMMUZ 2023

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DALGALANAN HIZLA DÖNEN KİRİŞLERDE KAOTİK TİTREŞİMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uğur TATLIER
(503191423)

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Dinamiği, Titreşim & Akustik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Özgür TURHAN

TEMMUZ 2023

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 503191423 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Uğur TATLIER, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "DALGALANAN HIZLA DÖNEN KİRİŞLERDE KAOTİK TİTREŞİMLER" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Özgür TURHAN** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Prof. Dr. Haluk EROL** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Gökhan BULUT Haliç Üniversitesi	.....

Teslim Tarihi : 26 Mayıs 2023
Savunma Tarihi : 03 Temmuz 2023

Sevdiklerime…

ÖNSÖZ

Tez çalışması boyunca engin bilgilerini ve desteklerini sunduğu için kıymetli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Özgür TURHAN'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte başta Arş. Gör. Kasım ERDEM olmak üzere daima yanımda olan kıymetli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Benim için çok değerli olan sevgili eşim Müh. Ümran DEMİRBAŞ TATLIER ile beni yetiştiren ve daima destekçim olan değerli aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

Temmuz 2023

Uğur TATLIER
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **vii**
İÇİNDEKİLER ..... **ix**
SEMBOLLER ..... **xi**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xiii**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xv**
ÖZET ..... **xxi**
SUMMARY ..... **xxiii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEORİ **5**
2.1 Hız Dalgalanması Problemi 5
2.1.1 Bir serbestlik dereceli model 9
2.1.2 İki serbestlik dereceli model 9
2.1.3 Üç serbestlik dereceli model 10
2.2 Kaos 10
2.2.1 Konum-zaman ve hız-zaman grafikleri 11
2.2.2 Faz diyagramı 12
2.2.3 Poincaré tasviri 13
2.2.4 Çatallanma diyagramları 14
2.2.5 Lyapunov üsleri 15
3. HIZ DALGALANMASI VE KAOS **19**
3.1 Bir Serbestlik Dereceli Model 19
3.1.1 $\bar{\omega}$-δ düzlemine ait kaos kartı 19
3.1.2 β_0-δ düzlemine ait kaos kartı 28
3.1.3 $\bar{\omega}$-β_0 düzlemine ait kaos kartı 32
3.2 İki Serbestlik Dereceli Model 37
3.2.1 $\bar{\omega}$-δ düzlemine ait kaos kartı 37
3.2.2 β_0-δ düzlemine ait kaos kartı 51
3.2.3 δ-α düzlemine ait kaos kartı 59
3.2.4 $\bar{\omega}$-α düzlemine ait kaos kartı 64
3.2.5 β_0-α düzlemine ait kaos kartı 73
3.2.6 $\bar{\omega}$-β_0 düzlemine ait kaos kartı 78
3.3 Üç Serbestlik Dereceli Model 87
3.4 Bir, İki ve Üç Serbestlik Dereceli Modellerin Karşılaştırılması 105
3.4.1 $\bar{\omega}$-δ düzleminde 3 modelin karşılaştırılması 105
3.4.2 δ-β_0 düzleminde 2 modelin karşılaştırılması 109
3.4.3 $\bar{\omega}$-β_0 düzleminde 2 modelin karşılaştırılması 110
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **113**
KAYNAKLAR **115**
EKLER **117**
ÖZGEÇMİŞ **145**

SEMBOLLER

r	**:** Göbek yarıçapı
l	**:** Kiriş uzunluğu
A	**:** Kiriş kesit alanı
E	**:** Elastiklik modülü
I	**:** Atalet momenti
ρ	**:** Yoğunluk
x,y	**:** Koordinat takımı
u,v	**:** Boyutsuz koordinat takımı
ζ^*	**:** Kelvin-Voigt model malzeme sönümü
ω	**:** Rotor açısal hızı
ω_0	**:** Rotor dönme hız genliği
ω*	**:** Frekans çarpanı
β_0	**:** Boyutsuz hız genliği
β	**:** Boyutsuz değişken hız
$\dot{\beta}$	**:** Boyutsuz ivme
δ	**:** Dalgalanma katsayısı
$\bar{\omega}$	**:** Boyutsuz dalgalanma frekansı
α	**:** Boyutsuz göbek çapı
ζ	**:** Boyutsuz sönüm
$\bar{\sigma}, \bar{\eta}$	**:** s'nin yerini tutan kukla değişkenler
n	**:** Serbestlik derecesi
$x_n(t)$	**:** Durum-uzay modelinde n. koordinata ait konum ifadesi
$\dot{x}_n(t)$	**:** Durum-uzay modelinde n. koordinata ait hız ifadesi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β_0=3, ζ=0.1). **23**
Çizelge 3.2 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **29**
Çizelge 3.3 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1). **34**
Çizelge 3.4 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β_0=3, ζ=0.1). **41**
Çizelge 3.5 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **54**
Çizelge 3.6 : Kaos kartına göre örnek noktalar (β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5). **61**
Çizelge 3.7 : Kaos kartına göre örnek noktalar (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1). **68**
Çizelge 3.8 : Kaos kartına göre örnek noktalar (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6). **75**
Çizelge 3.9 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1). **82**
Çizelge 3.10 : Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β=3, ζ=0.1). **90**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Hız dalgalanmasına maruz kalan dışa ve içe yönelik kiriş-göbek modeli. **5**

Şekil 2.2 : Kaotik ve peryodik konum-zaman ile hız-zaman grafikleri ve faz diyagramları. **12**

Şekil 2.3 : Peryodik ve kaotik hareket ait Poincaré tasvirleri[5]. **13**

Şekil 2.4 : Örnek çatallanma diyagramı [19]. **14**

Şekil 2.5 : Lyapunov üssü hesabı. **17**

Şekil 3.1 : $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$). **20**

Şekil 3.2 : δ paramatresine göre çatallanma diyagramı ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=4$) **21**

Şekil 3.3 : Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=4$) b) Kaos kartı ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$) **22**

Şekil 3.4 : 1 noktasına ait ($\delta=1$) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=4$). **24**

Şekil 3.5 : 2 noktasına ait ($\delta=2$) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=4$). **25**

Şekil 3.6 : 4 noktasına ait ($\delta=2.65$) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=4$). **25**

Şekil 3.7 : 16 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\delta=0.5$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=15$). **26**

Şekil 3.8 : 10 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=2$, $\beta_0=3$, $\delta=1.7$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=10.5$). **27**

Şekil 3.9 : $\beta_0-\delta$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=1$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$). **28**

Şekil 3.10 : Kaos kartında örnek noktalar ($\alpha=1$, $\beta_0=3$, $\zeta=0.1$) **29**

Şekil 3.11 : 1 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=1$, $\beta_0=4$, $\delta=1$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$). **30**

Şekil 3.12 : 8 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=1$, $\beta_0=7$, $\delta=4.2$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$). **31**

Şekil 3.13 : $\bar{\omega}-\beta_0$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$). **33**

Şekil 3.14 : $\bar{\omega}-\beta_0$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$). **33**

Şekil 3.15 : 1 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri ($\alpha=1$, $\beta_0=4.5$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=6.2$). **35**

Şekil 3.16 : 1 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=7.6, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.1). **36**

Şekil 3.17 : $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı(α=2, β=3, ζ=0.1). **38**

Şekil 3.18 : δ parametresine göre çatallanma diyagramı a) 0-1.3 aralığı b) 0-5 aralığı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **39**

Şekil 3.19 : Örnek noktalar a) Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1). **40**

Şekil 3.20 : 1 noktasına ait (δ = 0.7) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **43**

Şekil 3.21 : 1 noktasına ait (δ = 0.7) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **43**

Şekil 3.22 : 2 noktasına ait (δ=1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **44**

Şekil 3.23 : 2 noktasına ait (δ=1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **44**

Şekil 3.24 : 3 noktasına ait (δ=1.05) için konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **45**

Şekil 3.25 : 3 noktasına ait (δ=1.05) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **45**

Şekil 3.26 : 5 noktasına ait (δ=1.12) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **46**

Şekil 3.27 : 5 noktasına ait (δ=1.12) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8). **46**

Şekil 3.28 : 15 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=3.8). **48**

Şekil 3.29 : 15 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=3.8). **49**

Şekil 3.30 : 11 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9). **49**

Şekil 3.31 : 11 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9). **50**

Şekil 3.32 : β_0-δ düzleminde kaos kartı (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **51**

Şekil 3.33 : β_0 parametresine göre çatallanma diyagramı (α=1, δ =3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **52**

Şekil 3.34 : Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1) **53**

Şekil 3.35 : 20 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=3.7, δ=9.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **56**

Şekil 3.36 : 20 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=3.7, δ=9.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **57**

Şekil 3.37 : 17 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **57**

Şekil 3.38 : 17 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7)..... **58**

Şekil 3.39 : δ-α düzleminde kaos kartı(β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **59**

Şekil 3.40 : Kaos kartında seçilen örnek noktalar (β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **60**

Şekil 3.41 : 5 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=5, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **62**

Şekil 3.42 : 5 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=5, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **62**

Şekil 3.43 : 6 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1.3, β_0=5, δ=3.4, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **63**

Şekil 3.44 : 6 noktasıa ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1.3, β_0=5, δ=3.4, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5)..... **64**

Şekil 3.45 : $\bar{\omega}$-α düzleminde kaos kartı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1)..... **65**

Şekil 3.46 : α=2 için $\bar{\omega}$ parametresine göre çatallanma diyagramı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1). **66**

Şekil 3.47 : Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1) b) Kaos kartı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1)..... **67**

Şekil 3.48 : 19 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-1.5, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=2). **70**

Şekil 3.49 : 19 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-1.5, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=2). **71**

Şekil 3.50 : 13 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-1.9, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4.7). **71**

Şekil 3.51 : 13 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-1.9, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4.7). **72**

Şekil 3.52 : β_0-α düzleminde kaos kartı (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6)..... **73**

Şekil 3.53 : Kaos kartında seçilen örnek noktalar (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6). **74**

Şekil 3.54 : 9 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-3, β_0=0.8, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6). **76**

Şekil 3.55 : 9 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=-3, β_0=0.8, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6). **76**

Şekil 3.56 : 5 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2.9, β_0=3.6, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6)..... **77**

Şekil 3.57 : 5 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2.9, β_0=3.6, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6)..... **77**

Şekil 3.58 : $\bar{\omega}$-β_0 düzleminde kaos kartı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1)..... **79**

Şekil 3.59 : β_0 parametresine göre çatallanma diyagramı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5). **80**

Şekil 3.60 : Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5) b) Kaos kartı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1)..... **81**

Şekil 3.61 : 18 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=8.4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=16.6). **85**

Şekil 3.62 : 18 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=8.4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=16.6). **85**

Şekil 3.63 : 15 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9.3). **86**

Şekil 3.64 : 15 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9.3). **86**

Şekil 3.65 : $\bar{\omega}$ - δ düzleminde kaos kartı (α=2, β=3, ζ=0.1). **87**

Şekil 3.66 : δ parametresine göre çatallanma diyagramı (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$ = 9)... **88**

Şekil 3.67 : Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1). **90**

Şekil 3.68 : 1 noktasına ait (δ=0.5) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **94**

Şekil 3.69 : 1 noktasına ait (δ=0.5) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **94**

Şekil 3.70 : 1 noktasına ait (δ=0.5) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **95**

Şekil 3.71 : 2 noktasına ait (δ=1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **96**

Şekil 3.72 : 2 noktasına ait (δ=1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **96**

Şekil 3.73 : 2 noktasına ait (δ=1) için konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **97**

Şekil 3.74 : 4 noktasına ait (δ=1.1) için konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **98**

Şekil 3.75 : 4 noktasına ait (δ=1.1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **98**

Şekil 3.76 : 4 noktasına ait (δ=1.1) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **99**

Şekil 3.77 : 5 noktasına ait (δ=1.19) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **99**

Şekil 3.78 : 5 noktasına ait (δ=1.19) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **100**

Şekil 3.79 : 5 noktasına ait (δ=1.19) konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9). **100**

Şekil 3.80 : 16 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **101**

Şekil 3.81 : 16 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **102**

Şekil 3.82 : 16 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7). **102**

Şekil 3.83 : 10 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6.2). **103**

Şekil 3.84 : 10 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6.2). **104**

Şekil 3.85 : 10 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6.2). **104**

Şekil 3.86 : Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması(α=2, β=3, ζ=0.1). **106**

Şekil 3.87 : Bir ve üç serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması(α=2, β=3, ζ=0.1). **107**

Şekil 3.88 : İki ve üç serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması (α=2, β=3, ζ=0.1). **108**

Şekil 3.89 : Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması (α=1, ζ=0.1 $\bar{\omega}$=6). **109**

Şekil 3.90 : Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$-δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması (α=1, δ=1.6, ζ=0.1). **110**

DALGALANAN HIZLA DÖNEN KİRİŞLERDE KAOTİK TİTREŞİMLER

ÖZET

Türbinli jet motorları, rüzgâr türbinleri, helikopter ve uçak pervaneleri, kompresörler gibi önemli mühendislik uygulamaları nedeniyle rotor-pala sistemlerinin titreşimleri önemli bir araştırma konusu oluşturur. Titreşimlerden ortaya çıkan problemlerin, çalışma koşullarında sistem üzerinde hasar oluşturabilir. Bunun sonucu olarak yüksek maliyetlere sebep ve hayatî riskler meydana geleceğinden bu problemleri önlemek amacıyla titreşimlerin ele alınması gerekir. Bundan dolayı bu sistemlerin henüz prototip aşamasında titreşimlerden kaynaklanan problemlerin gerçek bir felakete sebep olmasına engel olmak için titreşim karakteristiklerinin öngörülmesi çok önemlidir.

Bu çalışmada ilk olarak, rijit bir göbeğe ankastre bağlı elastik bir kiriş şeklinde modellenen rotor-pala sistemlerinde, rotorun bağlı olduğu milin burulma titreşimlerinden dolayı rotorda meydana gelen hız dalgalanmalarının palanın eğilme titreşimleri üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Konsol kiriş sınır koşullarına sahip palanın titreşimleri, dönen elastik bir kirişin üçüncü dereceye kadar lineer olmayan terimlerin hesaba dahil edildiği düzlem içi eğilme titreşimleri olarak modellenmiştir. Kısmî türevli bir integro-diferansiyel denklemden ibaret olan hareket denklemi boyutsuz parametreler kullanılarak boyutsuzlaştırıldıktan sonra Galerkin yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılmıştır ve sonlu sayıda denklemden oluşan bir adi diferansiyel denklemler takımı elde edilmiştir. Böylece kirişin hem parametre tahriği hem de dış zorlamaya maruz kaldığı tespit edilmiştir. Daha sonra hareketi kontrol eden kontrol 5 tane parametre sırasıyla boyutsuz göbek yarıçapı α, boyutsuz ortalama dönme hızı β_0, boyutsuz dalgalanma katsayısı δ, boyutsuz viskoz sönüm faktörü ζ ve boyutsuz dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ olarak belirlenmiştir. Böylece bu parametrelerin hareket üzerinde etkileri gözlemlenebilir duruma gelmiştir. Ardından bir, iki ve üç serbestlik dereceli modeller üzerinde durularak titreşim davranışlarının Lyapunov üsleri hesabına dayalı kaos kartları, çatallanma diyagramları ve Poincaré tasvirleri vb. kaos kriterleri açısından değerlendirilerek kaotik sonuçlar verdiğine dair önemli bulgulara rastlanmıştır.

Bölüm 1'de çalışmanın amacı belirtilerek literatürde yapılmış olan çalışmalar özetlenmiştir ve ardından çalışmanın gerekliliği ortaya konmuştur. Bölüm 2'de rotor hız dalgalanması probleminin teorisine ve kaos kriterlerine yer verilmiştir. Elde edilen hız dalgalanması probleminin Bölüm 3'te bir, iki ve üç serbestlik dereceli modellerine ilişkin incelemeler yapılarak bunlara ait kaos kartları verilmiştir. Kaos kartları kullanılarak modellerin karşılaştırılması yapılmıştır. Bölüm 4'te çalışmadan elde edilen sonuçlar özetlenerek ileride yapılacak olan çalışmalara ilişkin önerilerde bulunulmuştur.

CHAOTIC VIBRATIONS IN ROTATING BEAMS WITH FLUCTUATING SPEED

SUMMARY

Dynamics and especially vibrations of rotor-blade systems, which are used in engineering applications such as turbine jet engines, wind turbines, helicopter and aircraft propellers, compressors have long been a subject of constant research interest. Problems arising from the mechanical vibrations should be handled in order to prevent possible damages causing both high costs and catastrophes to the system under operating conditions. Considering these facts, it is very important to anticipate vibration characteristics in order to prevent a real disaster caused by vibration problems at the prototype phase.

In this study, chaotic vibrations on the nonlinear model of blade connected to a rotor with angular velocity fluctuations are studied. The rotor is considered as a rigid hub, while the blade attached to the rotor is modeled as a homogeneous Euler-Bernoulli beam with uniform cross-section and Kelvin-Voigt material model with viscous damping. The chaotic behaviors in the in-plane bending vibrations of the beam caused by the harmonically varying angular velocity of the hub are considered in discrete submodels obtained from the continuous model in terms of certain control parameters of the equation of motion.

The main purpose of the thesis is firstly to determine the possible chaotic vibration behaviors of single, two and three degrees-of-freedom discrete sub-models generated from the continious beam-hub model, which represents the nonlinear dynamics of rotor-blade systems; then to decide the most ideal model by determining to what the extent the chaos cards obtained from models with different degrees-of-freedom confirm each other.

The thesis study is organized under four main titles: "Introduction", "Theory", "Angular Velocity Fluctuation Problem", "Conclusions"

The first part of the thesis, the "Introduction" section, summarizes the studies in the literature. Due to the detection of chaotic behaviors in single and two degree of freedom nonlinear models of beams, the possibility of chaotic behavior of rotating beams has emerged. The aim was to detect the chaotic behaviors of one, two, and three degree of freedom submodels of a rotating beams attacted to hub representing rotor-blade systems, emphasizing the importance of nonlinear vibrations of this system, which has been overlooked in the literature.

The second part of the thesis, the "Theory" section covers the methods and approaches used in theory and the chaos criteria.

In Section 2.1, the bending vibrations of a rotating rotor-blade system with angular velocity fluctuations are modeled as in-plane bending vibrations of a uniform cross-section elastic Euler-Bernoulli beam rotating with a rigid hub. Geometrical and dynamical nonlinearities, up to the third-degree terms are taken into account. By using the Euler-Bernoulli beam theory and adding Kelvin-Voigt viscoelastic material damping to model, equation of motion (EOM) of continuous system is obtained. Then, the it is non-dimensionalized by using dimensionless quantities and parameters. The related dimensionless integro-differential equation of the continous model is discretized using the Galerkin method by selecting the eigenfunctions of a linear stationary cantilever beam as weight functions, and a finite set of nonlinear ordinary differential equations are obtained. Then, system parameters which governing the motion were determined as dimensionless hub radius α, average rotation speed β_0, dimensionless fluctuation coefficient δ, viscous damping factor ζ, and dimensionless fluctuation frequency $\bar{\omega}$. In addition, single, two and three degrees-of-freedom models are derived using the discretized equation of motion.

Section 2.2 includes how chaos criteria, such as position-time and velocity-time graphs, phase diagrams, Poincaré maps, bifurcation diagrams, and Lyapunov exponents, were obtained and interpreted.

In the third part of the thesis, the "Angular Velocity Fluctuation and Chaos" section the probability of chaotic vibrations in a rotating beam due to angular velocity fluctuation will be investigated. The analyzes will be carried out on the single, two and three degrees-of-freedom models obtained in Section 2.1, respectively. For this purpose, each of the chaos criteria introduced in Section 2.2 will be applied separately to ensure the reliability of the results to be obtained.

In Section 3.1, the single degree of freedom model is discussed.

In Section 3.1.1, Three of the control parameters governing the motion are selected as α=2, β=3, ζ=0.1 and the chaos chart based on Lyapunov exponent calculation in the other two parameters $\bar{\omega}$-δ plane is shown in Figure 3.1. Thus, chaotic motion is observed when either one or both of the ω and δ parameters are large. By selecting $\bar{\omega}$=4, the bifurcation diagram in Figure 3.2 is obtained when the bifurcation parameter δ. Thus, the parameters that cause periodic and chaotic motion are determined. In Table 3.1, sample cases and their Poincaré points, motion periods, Lyapunov exponents and behaviors are given, and some sample cases, which are given in Figures 3.4-3.8, are selected and the parameters that cause periodic and chaotic motion are shown. These are also confirmed using the chaos criteria such as position-time, velocity-time, phase diagram, and Poincaré section. So, it has been determined that there are chaotic behaviors of the single degree-of-freedom model.

In Section 3.1.2, α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7 are selected and the chaos chart in δ–β_0 plane given in Figure 3.9. Then, chaotic motion is observed when either one or both of the δ and β_0 parameters are large, also periodic motion inter-areas are shown in the chaotic areas. Crisis are determined. In Table 3.2, sample cases are given.

In Section 3.1.3, α=1, δ=1.6, ζ=0.1 are selected and the chaos chart in β_0-$\bar{\omega}$ plane given in Figure 3.13. Chaotic motion is not observed in regions where dimensionless fluctuation frequency $\bar{\omega}$ and/or average rotational speed β_0 is small, it is seen that

chaotic motion can occur only if at least one of them is large. For a result of the system where $\bar{\omega}$ cannot be selected, only β_0 can be changed in order to avoid from chaotic behaviors. In Table 3.3, sample cases are given.

In Section 3.2, the two degrees of freedom model is discussed.

In Section 3.2.1, again $\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$ are selected and the chaos chart in $\bar{\omega}$-δ plane given in Figure 3.17. Then, chaotic motion is observed when either one or both of the $\bar{\omega}$ and δ parameters are large. By selecting $\bar{\omega}=8$, bifurcation diagram in Figure 3.19 is obtained when the bifurcation parameter δ. Period-doubling parameters and also Feigenbaum constant are obtained. In Table 3.4, sample cases are given in Figures 3.20-3.31 and six of them are discussed in terms of the other chaos criteria. Both of the Galerkin coordinates are coupled each other.

In Section 3.2.2, $\alpha=1$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$ are selected and the chaos chart in δ–β_0 plane given in Figure 3.32. Then, chaotic motion is observed when either one or both of the δ and β_0 parameters are large, also periodic motion inter-areas are shown in the chaotic areas. Crisis are determined also. By selecting $\delta=3$, bifurcation diagram in Figure 3.33 is obtained when the bifurcation parameter β_0. Period-doubling parameters are determined. In Table 3.5, sample cases are given in Figures 3.25-3.38 and six of them are discussed in terms of the other chaos criteria. and it is shown that the chaos card and the bifurcation diagram confirm each other. Both of the Galerkin coordinates are coupled each other.

In Section 3.2.3, $\beta_0=5$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=1.6$ are selected and the chaos chart in δ-α plane given in Figure 3.40. Then, chaotic motion is observed when both inward($\alpha<0$) and outward($\alpha>0$) oriented beam also when $\delta=0$ fluctuation does not exist and there are no chaotic behaviors. In Table 3.6, sample cases are given in Figures 3.41-3.44. When $\alpha=0$ there is no hub and again there are no chaotic behaviors. Periodic behavior occurs when α is large and δ is small.

In Section 3.2.4, $\beta_0=2.4$, $\delta=1.8$, $\zeta=0.1$ are selected and the chaos chart in $\bar{\omega}$-α plane given in Figure 3.45. Chaotic motion is not observed in regions where fluctuation frequency $\bar{\omega}$ is small, dimensionless hub radius α is positive, and where ripple frequency $\bar{\omega}$ is large and dimensionless core radius $|\alpha|$ is small. There is a possibility that chaotic motion may occur in regions other than this. By selecting $\alpha=2$, bifurcation diagram in Figure 3.46 is obtained when the bifurcation parameter $\bar{\omega}$. Some crisis regions are determined and sample cases are given in Table 3.7.

In Section 3.2.5, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=6$ are selected and the chaos chart in β_0-α plane given in Figure 3.52. Chaotic motion is observed in regions where the average rotational speed β_0 is large and the dimensionless hub radius α is small, and in the regions where mean rotation speed β_0 is small and the dimensionless hub radius α is large, chaotic motion is only observed if both of these are large($|\alpha|>0$) can occur. Thus, since chaotic motion behavior can occur in both $\alpha>0$ (outward-oriented beam) and $\alpha<0$ (inward-oriented beam) cases, chaos analysis should be performed for both problems.

In Section 3.2.6, $\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$ are selected and the chaos chart in β_0-$\bar{\omega}$ plane given in Figure 3.58. Chaotic motion is not observed in regions where dimensionless

fluctuation frequency $\bar{\omega}$ and/or average rotational speed β_0 is small, it is seen that chaotic motion can occur only if at least one of them is large. For a result of the system where $\bar{\omega}$ cannot be selected, only β_0 can be changed in order to avoid from chaotic behaviors. By selecting $\bar{\omega}$=5, bifurcation diagram in Figure 3.23 is obtained when the bifurcation parameter β_0. Period-doubling parameters and some crisis regions are determined. In Table 3.9, sample cases are given and it is shown that the chaos card and the bifurcation diagram confirm each other.

In Section 3.3, the three degrees of freedom model is discussed. One more time α=2, β=3, ζ=0.1 selected and the chaos chart in $\bar{\omega}$-δ plane given in Figure 3.65. Then, chaotic motion is observed when either one or both of the $\bar{\omega}$ and δ parameters are large. By selecting $\bar{\omega}$=9, bifurcation diagram in Figure 3.66 is obtained when the bifurcation parameter δ. Period-doubling parameters and also Feigenbaum constant are obtained. In Table 3.10, sample cases are given in Figures 3.68-3.85 and four of them are discussed in terms of the other chaos criteria. All three of the Galerkin coordinates are correlated.

In Section 3.4, The chaos cards obtained in Section 3.1, Section 3.2 and Section 3.3 are plotted on the same parametric plane and compared.

In Section 3.4.1, The chaos cards obtained in Section 3.1.1, Section 3.2.1 and Section 3.4 are plotted on the same parametric plane $\bar{\omega}$-δ by setting the α=2, β=3, ζ=0.1. There is a serious jump in transition from the chaos card of the single degree of freedom model to the two degree of freedom model. When switching from the chaos card of the two-degree-of-freedom model to the three-degrees-of-freedom model, there is not much jump. The time spent solving the problem of the three-degree-of-freedom model is too much and the chaos chart gain is low. In addition, even if the time spent on solving the problem of the single degree of freedom model is very small, it has been decided that the most optimal model is the model with 2 degrees of freedom, since it has a significant difference from the others.

In Section 3.4.2 δ-β_0 by setting the α=1, ζ=0.1 $\bar{\omega}$=6. There is a serious jump in transition from the chaos card of the single degree of freedom model to the two degree of freedom model in Figure 3.89. Similar effects but detailed results are obtained from two degree of freedom model.

In Section 3.4.3 δ-β_0 by setting the α=1, ζ=0.1 $\bar{\omega}$=6. There is a serious jump in transition from the chaos card of the single degree of freedom model to the two degree of freedom model in Figure 3.90. Again similar effects but detailed results are obtained from two degree of freedom model.

In the fourth and last part of the thesis, “Conclusion” part includes results obtained from the study are summarized and suggestions are made for future studies.

1. GİRİŞ

Türbinli jet motorları, helikopter ve uçak pervaneleri, rüzgar türbinleri, kompresörler gibi mühendislik uygulamalarında karşılaşılan rotor-pala sistemlerinin dinamiği ve titreşimleri güncel araştırma konularından birisidir.

Makina, havacılık, uzay, enerji gibi mühendislik alanlarında kullanılan bu sistemlerde çalışma anında meydana gelebilecek hasarların maliyetlerinin yüksek olması, daha da önemlisi hayatî risk oluşturması, bu sistemlerin titreşim davranışlarının ele alınmasının gerekliliğini ortaya koyar. Sisteme ait matematiksel model üzerinde ve prototip aşamasında yürütülecek analizlerde titreşim davranışlarının önceden belirlenmesi önem taşır.

Rotor-pala şistemlerinin karmaşık geometrisi, bu sistemlerin egzakt modellerinin kurulup incelemenin onlar üzerinde gerçekleştirilmesini güçleştirir. Kurulabilecek sonlu elemanlar modelleri aşırı boyutluluktan kaynaklanan sorunlar çıkartır ve bu, model boyutlarının düşürülmesine yönelik yaklaşıklıklar devreye sokulmasını zorunlu kılar. Mildeki olası burulma titreşimlerinin palalarda kaotik titreşimlere yol açma olasılığının incelenmesinin hedeflendiği bu çalışmada, inceleme, palaların bağlandığı göbeğin rijid, palaların ise düzgün kesitli homojen birer ankastre kiriş olarak düşünüldüğü basitleştirilmiş bir model üzerinde yürütülecektir. Somut bir rotor-pala sistemini temsil etme olanağı bulunmadığı açık olmakla birlikte, bu basit model, rotor-pala sistemlerinde mil burulma titreşimlerinin palalarda kaotik titreşimler doğurmasının mümkün olup olmadığı konusunda net bir fikir edinme olanağı verecektir.

Literatürde, rotor milinde meydana gelen burulma titreşimlerinin pala üzerinde oluşturduğu eğilme titreşimleri ve palaya etki eden harmonik bir dış kuvvetin pala üzerinde oluşturduğu eğilme titreşimleri gibi problemler lineer ve lineer olmayan modeller yardımıyla ele alınmıştır. Peryodik bir etkiyle zorlanan lineer sistemlerin peryodik ve kuaziperyodik olmak üzere iki farklı davranış olasılığı varken lineer

olmayan sistemlerde peryodik, kuaziperyodik ve kaotik olmak üzere üç farklı davranışın mevcut olduğu bilinmektedir.

Bu çalışmada, lineer olmayan bir rotor-pala modelinde oluşacak titreşimlerin kaotik davranışlar sergileme olasılığı ve bu olasılığın gerçekleşmesine yol açacak parametre kombinasyonlarının belirlenmesi problemi ele alınmıştır.

Bir serbestlik dereceli lineer olmayan modellere ilişkin literatürdeki çalışmalardan bazıları şöyledir: Fang ve Dowell [1], Duffing osilatörüne ait lineer ve kübik yay terimleri içeren Bir serbestlik dereceli modelin harmonik dış kuvvet altında kaotik davranışlarını incelemiştir. Argyris ve diğerleri [2], lineer olmayan gerilme-şekil değiştirme ilişkisi kullanılan viskoelastik bir kiriş modelinin tek modlu davranışının Duffing denklemiyle modellenebileceğini göstermiş ve büyük genlikli harmonik bir eksenel dış kuvvet etkisiyle kaotik davranış göstereceğini ortaya koymuşlardır. Ayrıca, Chang [3], Duffing sisteminde lineer-lineer olmayan sönüm terimlerinin kaotik davranışa etkisini incelemiştir. Tongue [4], lineer-kübik yay terimlerinin etkilerini incelemiştir. Yagazaki [5], iki ucundan ankastre mesnetlenmiş kirişin kuaziperyodik zemin tahriki altındaki, Abhyankar ve diğ. [6] ise, basit mesnetli bir Euler-Bernoulli kirişinin harmonik zemin tahriki ve eksenel dış kuvvet etkisindeki titreşimlerini bir serbestlik dereceli modeller yardımıyla incelediler. Moon ve Shaw [7] da, bir ucu ankastre diğer ucu değişken sınır koşullarına sahip bir kirişin titreşimlerini yine tek modlu bir yaklaşımla inceledi.

Awrejcewicz ve diğ. ait üç çalışmadan ilkinde [8], Kármán tipinde lineer olmayan geometri modeli içeren düzgün kesitli ve doğrusal bir Euler-Bernoulli kirişini farklı sınır koşullarında incelendi. Ayrıca harmonik bir dış kuvvet altında iki ucundan ankastre kirişe ait kaos kartları elde etti. İkinci çalışmada [9], düzgün kesitli ve her iki ucundan mafsallanmış bir Euler-Bernoulli kirişinin hem harmonik bir dış zorlanmaya hem de beyaz gürültüye maruz kaldığı lineer olmayan bir modelinin kaotik titreşimlerini irdelediler. Üçüncü ve son olarak [10], basit mesnetli bir Euler-Bernoulli kirişinin harmonik dış zorlanma ve renkli gürültülerle tahrik edilmesinin kaotik titreşime sebep olacağını ortaya koymuşlardır.

Zhang ve diğ. [11], dış zorlama ve parametre tahrikli konsol kirişin düzlem dışı hareketini incelediler ve sistem parametrelerinden sönümün, dış zorlama kuvvetinin ve parametre tahrikinin bazı kombinasyonları altında kaotik titreşim hareketine

rastladılar. Maewal [12], basit mesnetli düzgün kesitli kirişin titreşimlerini harmonik dış kuvvet altında burulma ve eğilme etkilerinin hesaba katıldığı bir model üzerinde ele aldı. Kuvvet genliğinin ve frekansın bazı değerlerine ait Hopf çatallanmaları ve kaotik titreşim davranışlarını tespit etti. Yao ve diğ. [13], eksenel harmonik kuvvet ile enine kuaziperyodik kuvvet altında basit mesnetli bir kompozit piezoelektrik kirişin hareket denklemlerini, üçüncü mertebeden kayma deformasyonu teorisini kullanarak Hamilton prensibi yöntemiyle elde etti. Galerkin yöntemini kullanılarak iki serbestlik dereceli bir kiriş modelin elde edildiği çalışmada eksenel kuvvet genliği, enine kuvvet genliği ve piezoelektrik parametrelerinin kombinasyonlarında kaotik titreşim davranışın meydana geldiği ortaya konuldu.

Araştırmacılar dönen kirişlerin açısal hız dalgalanmasından ötürü kaotik davranacağına dair bulgulara rastladı. Zhang ve diğ. [14], açısal hız dalgalanmasına uğrayan bliskin kanadı üzerinde bir dış kuvvet etkisini iki serbestlik dereceli bir kiriş modeli üzerinde kaotik titreşim davranışlarının olduğunu saptadılar.

Bu tez kapsamında, rotor-pala sistemleri rijit bir göbeğe bağlı olarak dönen düzgün kesitli ve homojen bir Euler-Bernoulli kirişi biçiminde modellendi. Bu sürekli sistemin düzlem içi eğilme titreşimlerine ait lineer olmayan model, kısmi türevli bir integro-diferansiyel denklem olarak ifade edildi. Bu model, Galerkin yöntemi kullanılarak ayrıklaştırıldı. Galerkin yönteminde kullanılan karşılaştırma fonksiyonları hareketsiz bir konsol kirişin özfonksiyonları şeklinde seçilerek sonlu sayıda nonlineer adi diferansiyel denklemden oluşan bir ayrık modele gelindi. Sistemin dinamik davranışları üzerinde, malzeme sönümü, göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, hız dalgalanma katsayısı ve hız dalgalanma frekansı parametrelerinin etkili olacağı belirlendi. Daha sonra bir, iki ve üç serbestlik dereceli modeller aracılığıyla, bu parametrelerin sistem davranışına etkileri incelendi. Bu amaçla, Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartları elde edilip, bunların öngörüleri çatallanma diyagramları, konum-zaman, hız-zaman grafikleri, faz diyagramları ve Poincaré tasvirleri yardımıyla kontrol edildi. İlkin, bir serbestlik dereceli modele ait dalgalanma frekansı-dalgalanma katsayısı düzlemine ait kaos kartı; ikinci olarak iki serbestlik dereceli modele ait dalgalanma frekansı-dalgalanma katsayısı; dalgalanma katsayısı-dönme hızı; dalgalanma katsayısı-göbek yarıçapı; dalgalanma frekansı-göbek yarıçapı; dönme hızı-göbek yarıçapı ve dalgalanma frekansı-dönme hızı düzlemlerinde kaos kartları; üçüncü ve son olarak da üç serbestlik dereceli modele ait dalgalanma frekansı-

dalgalanma katsayısı düzleminde kaos kartı elde edildi. Böylece dönen kirişe ait farklı yaklaşıklık düzeyindeki modellerle peryodik ve kaotik titreşim davranışları saptandıktan sonra bu sonuçlar karşılaştırılarak hem modellerin performansı hem de incelenen sistem üzerinde yorumlar yapılmıştır.

2. TEORİ

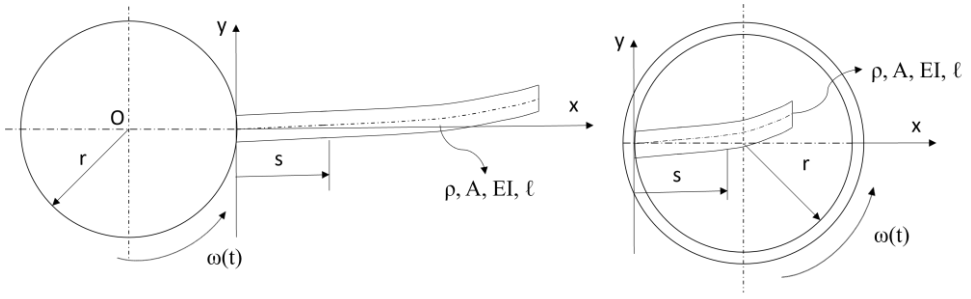
Bu bölümde, incelenecek sistemin matematiksel modelinin (hareket denkleminin) elde edilişine yer verilip kaotik hareketlerin teşhisinde kullanılacak kaos ölçütleri tanıtılacaktır.

Bu çerçevede, Bölüm 2.1'de, açısal hız dalgalanmasına maruz kalarak dönen bir rotor-pala sisteminin eğilme titreşimleri, rijit bir göbeğe bağlı olarak dönen düzgün kesitli bir Euler-Bernoulli kirişinin düzlem içi eğilme titreşimleri biçiminde modellenmiştir. Lineer olmayan bu integro-diferansiyel denklem Galerkin yöntemi kullanılarak sonlu sayıda adi diferansiyel denkleme ayrıştırılmıştır. Hareketi yöneten sistem parametreleri belirlendikten sonra sırasıyla bir, iki ve üç serbestlik dereceli modeller türetilerek incelemeye hazır hâle getirilmiştir.

Bölüm 2.2'de, konum-zaman ve hız-zaman grafikleri, faz diyagramları, Poincaré tasvirleri, çatallanma diyagramları ve Lyapunov üsleri gibi kaos kriterlerinin nasıl elde edildikleri ve ne şekilde yorumlanacakları sergilenmektedir.

2.1 Hız Dalgalanması Problemi

Rotor-pala sistemlerinin düzlem içi eğilme titreşimlerinin modellenmesi problemi ele alınsın. İlgili sistemde palanın rotora bağlı olarak döndüğü ve rotorun açısal hızının harmonik olarak dalgalandığı kabulleri altında palayı elastik bir kiriş, rotoru ise rijit bir göbek olarak ele alalım.



Şekil 2.1: Hız dalgalanmasına maruz kalan dışa ve içe yönelik kiriş-göbek modeli.

Şekil 2.1'de verilen modeldeki Euler-Bernoulli kirişinin malzeme yoğunluğu ρ, eğilme rijitliği EI, kesit alanı A, boyu l olsun. Ayrıca göbek yarıçapı r olsun. Rotora bağlı pala, Kelvin-Voigt malzeme modelinde ζ^* viskoz sönümüne sahip ve düzgün kesitli homojen bir kiriş olarak incelenirse bu kirişe ait eğilme titreşimleri

$$\begin{aligned}
&EI\left(y^{IV}+\frac{1}{2}y^{IV}y'^2+3y'y''y'''+y''^3\right)+EI\zeta^*\dot{y}^{IV}+\rho A\left[\left(1-\frac{1}{2}y'^2\right)\ddot{y}+\right.\\
&y'y''\int_s^l\ddot{y}d\bar{\sigma}+y'\int_0^s(\dot{y}^2+y'\ddot{y}')d\bar{\eta}-y''\int_s^l\int_0^{\bar{\sigma}}(\dot{y}'^2+y'\ddot{y}')d\bar{\eta}d\bar{\sigma}\Big]+\\
&\rho A\omega^2\left[-y''\left[r(l-s)+\frac{1}{2}(l-s)+\frac{1}{2}(l^2-s^2)\right]+y'(r+s)-y\left(1-\right.\right.\\
&\left.\frac{1}{2}y'^2\right)-\frac{1}{2}y'\int_0^s y'^2d\bar{\eta}-y'y''\int_s^l yd\bar{\sigma}+\frac{1}{2}y''\int_s^l\int_0^{\bar{\sigma}}y'^2\,d\bar{\eta}\,d\bar{\sigma}\Big]+\\
&\rho A\dot{\omega}\left[yy'+(r+s)\left(1-\frac{1}{2}y'^2\right)+y'y''\left[r(l-s)+\frac{1}{2}(l^2-s^2)\right]-\right.\\
&\left.\frac{1}{2}\int_0^s y'^2\,d\bar{\eta}-y''\int_s^l y\,d\bar{\sigma}\right]+2\rho A\omega\left[\dot{y}y'-\int_0^s y'\,\dot{y}d\bar{\eta}-y''\int_s^l\dot{y}\,d\bar{\sigma}\right]=0
\end{aligned}\tag{2.1}$$

denklemi ile ifade edilir[15]. Burada $\bar{\eta}$ ile $\bar{\sigma}$, s yerine geçen kukla değişkenlerdir. Üsler konuma, noktalar ise zamana göre türevi ifade eder. Bu denklemde eğrilik ifadesinin lineer olmayan terimleri hesaba katılmıştır ve üçüncü dereceye kadar olan terimler ele alınmıştır. Denklemdeki terimler; elastiklikten kaynaklanan geri getirme kuvvetini, viskoz sönüm elemanından kaynaklanan sönüm kuvvetini, eylemsizlik kuvvetini, merkezkaç kuvvetini, teğetsel ivmeden kaynaklanan kuvvet ile Coriolis etkisinden kaynaklanan kuvveti içerir. Açısal hızın ω_0 değeri civarında ω_1 genliğinde ve ν frekansında harmonik olarak dalgalandığı kabulü ile açısal hız

$$\omega(t)=\ \omega_0+\omega_1\sin(\nu t)\tag{2.2}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca denkleme ait terimleri boyutsuzlaştırmak için aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır.

$$\begin{gathered}
u=\frac{s}{l},\ v=\frac{y}{l},\ \tau=\nu t,\ \alpha=\frac{r}{l},\ \sigma=\frac{\bar{\sigma}}{l},\ \eta=\frac{\bar{\eta}}{l},\ \omega^*=\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}},\ \bar{\omega}=\frac{\nu}{\omega^*},\\
\zeta=\zeta^*\omega^*,\ \beta=\frac{\omega}{\omega^*},\ \beta_0=\frac{\omega_0}{\omega^*},\ \delta=2\frac{\omega_1}{\omega_0}
\end{gathered}\tag{2.3}$$

O halde boyutsuz dönme hızı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\beta(\tau) = \beta_0\left(1 + \frac{\delta}{2}\sin\tau\right) \tag{2.4}$$

Üsler u'ya , noktalar ise τ'ya göre türevleri göstermek üzere denklem de şu hâle gelir.

$$\begin{aligned}
&L(v) = \ddot{v} + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\dot{v}^{IV} + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[v^{IV} + \frac{1}{2}v^{IV}v'^2 + 3v'v''v''' + v''^3\right] - \frac{1}{2}v'^2\ddot{v} + \\
&v'v''\int_u^1 \ddot{v}\,d\sigma + v'\int_0^u(\dot{v}'^2 + v'\ddot{v}')d\eta - v''\int_u^1\int_0^\sigma(\dot{v}'^2 + v'\ddot{v}')\,d\eta\,d\sigma + \\
&\frac{\beta^2}{\bar{\omega}^2}\left[-v''\left[\alpha(1-u) + \frac{1}{2}(1-u^2)\right] + v'(\alpha+u) - v\left(1 - \frac{1}{2}v'^2\right) - \right. \\
&\left.\frac{1}{2}v'\int_0^u v'^2\,d\eta - v'v''\int_u^1 v\,d\sigma + \frac{1}{2}v''\int_u^1\int_0^\sigma v'^2\,d\eta d\sigma\right] + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}\left[vv' + \right. \\
&\left.(\alpha+u)\left(1 - \frac{1}{2}v'^2\right) + v'v''\left[\alpha(1-u) + \frac{1}{2}(1-u^2)\right] - \frac{1}{2}\int_0^u v'^2\,d\eta - \right. \\
&\left.v''\int_u^1 v\,d\sigma\right] + \frac{2\beta}{\bar{\omega}}\left[\dot{v}v' - \int_0^u v'\,\dot{v}'d\eta - v''\int_u^1 \dot{v}\,d\sigma\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Böylece boyutsuz hareket denklemi elde edilmiş olur. Bu kısmi türevli integro-diferansiyel denklem, Galerkin yöntemi kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Burada kullanılan Galerkin serisi Denklem (2.6)'da verilir.

$$v(u,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(u)g_i(\tau) \tag{2.6}$$

Burada g_i'ler Galerkin koordinatlarını oluşturmaktadır; φ_i'ler ise lineer hareketsiz konsol kirişe ait özfonksiyonlardır. Bu özfonksiyonlar

$$\begin{aligned}
&\varphi_i(u) = \cosh(\lambda_i u) - \cos(\lambda_i u) - \kappa_i(\sinh(\lambda_i u) - \sin(\lambda_i u)), \\
&\kappa_i = \frac{\cosh\lambda_i + \cos\lambda_i}{\sinh\lambda_i + \sin\lambda_i}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

biçiminde ifade edilir ve denklemdeki λ_i'ler probleme ait özfrekanslar olup $1+\cos(\lambda)\cosh(\lambda) = 0$ şeklinde elde edilen frekans denkleminin çözümüyle bu özfrekanslara ulaşılır ve ilk üç özfrekans sırasıyla $\lambda_1 = 1.87510$, $\lambda_2 = 4.69409$ ve $\lambda_3 = 7.85475$ olarak hesaplanmıştır. Özfonksiyonlar ve boyutsuz hareket denklemi kullanılarak probleme ait domende ($u_{alt\ sınır} = 0$, $u_{üst\ sınır} = 1$) Denklem (2.8)'deki integrasyon işlemi yapılıp n adet ortogonalizasyon şartı yazılarak

$$\int_0^1 L(v)\varphi_i(u)du = 0;\ i=1,2,\ldots,n \tag{2.8}$$

Galerkin yöntemi uygulanmış olur ve aşağıdaki ayrıklaştırılmış denklem elde edilir.

$$\ddot{g}_i + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_i^4 \dot{g}_i + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_i^4 g_i - \beta(\tau)^2 \sum_{j=1}^{n}\left(\alpha A_{ij} + B_{ij} + \delta_{ij}\right) g_j\right] + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} C_{ijkl} g_j g_k \ddot{g}_l + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} D_{ijkl} g_j g_k \dot{g}_l + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(E_{ijkl} - \beta(\tau)^2 F_{ijkl}\right) g_j g_k g_l + \frac{2\beta(\tau)}{\bar{\omega}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} G_{ijk} g_j \dot{g}_k + \frac{\dot{\beta}(\tau)}{\bar{\omega}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha H_{ijk} + K_{ijk}\right) g_j g_k = -\frac{\dot{\beta}(\tau)}{\bar{\omega}}(\alpha c_i + d_i);\ i=1,2,\ldots,n \tag{2.9}$$

Böylece, kirişin titreşim hareketini ifade eden kısmi türevli bir integro-diferansiyel denklemden Denklem (2.9)'da verilen n tane lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Denklem (2.9)'daki A_{ij}, B_{ij}, C_{ijkl}, D_{ijkl}, E_{ijkl}, F_{ijkl}, G_{ijk}, H_{ijk}, K_{ijk}, c_i ve d_i katsayılarının hesabı Ek A'da verilmiştir. Ayrıca δ_{ij} Kronecker deltasıdır.

Lineer olmayan bu adi diferansiyel denklem takımının egzakt çözümü olmadığından ayrık modellere ilişkin elde edilen hareket denklemleri mecburi olarak sayısal yöntem (Runge-Kutta 4) aracılığı ile çözülür.

Denklem (2.9) incelenirse rotora ait dönme hızının harmonik olarak dalgalanmasının problemde hem parametre tahrikine hem de dış zorlamaya sebep olduğu görülür. İnceleme boyunca hareket peryodu, parametre tahriki ile dış zorlamanın ortak peryodu olan $T=2\pi$ olarak alınır.

Burada hareketi kontrol eden 5 tane sistem parametresi görülmektedir : α, β_0, ζ, δ ve $\bar{\omega}$ ve bunlar sırasıyla; boyutsuz göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma katsayısı ve boyutsuz dalgalanma frekansına denk gelen boyutsuz parametrelerdir. Dolayısıyla bu parametrelerin sistem davranışı üzerindeki etkileri önem kazanmaktadır ve bu etkiler Bölüm 3'te incelenecektir.

2.1.1 Bir serbestlik dereceli model

Hereketin bir serbestlik dereceli modeli Denklem (2.9)'da n=1 alınarak elde edilir ve

$$\ddot{g}_1 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_1^4\dot{g}_1 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}[\lambda_1^4 - \beta^2(\alpha A_{11} + B_{11} + \delta_{11})]g_1 + C_{1111}g_1^2\ddot{g}_1 + D_{1111}g_1\dot{g}_1^2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}[E_{1111} - \beta^2 F_{1111}]g_1^3 + \frac{2\beta}{\bar{\omega}}[G_{111}g_1\dot{g}_1] + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}[\alpha H_{111} + K_{111}]g_1^2 = -\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c_1 + d_1) \quad (2.10)$$

denklemine gelinir. Burada g_1 birinci Galerkin koordinatıdır ve denklemdeki katsayılar; A_{11}=-1.5709, B_{11}=-1.1933, C_{1111}=2.14329, D_{1111}=4.59671, E_{1111}=10.10964, F_{1111}=-0.155066, G_{111}=0, H_{111}=-1.73647, K_{111}=-0.290533, c_1=0.78298, d_1=0.56882 ve λ_1=1.87510 olarak hesaplanmıştır. δ_{11}=1'dir. Bu modelin, hareketi kontrol eden parametrelerin bazı kombinasyonlarında kaotik titreşim davranışları sergileme ihtimali Bölüm 3.1'de incelenmiştir.

2.1.2 İki serbestlik dereceli model

Denklem (2.9)'da n=2 alınarak sistemin iki serbestlik dereceli modeli

$$\begin{aligned}
&\ddot{g}_1 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_1^4\dot{g}_1 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_1^4 g_1 - \beta^2\left((\alpha A_{11} + B_{11} + \delta_{11})g_1 + (\alpha A_{12} + B_{12} + \delta_{12})g_2\right)\right] + C_{1111}g_1g_1\ddot{g}_1 + C_{1112}g_1g_1\ddot{g}_2 + C_{1121}g_1g_2\ddot{g}_1 + \\
&C_{1122}g_1g_2\ddot{g}_2 + C_{1211}g_2g_1\ddot{g}_1 + C_{1212}g_2g_1\ddot{g}_2 + C_{1221}g_2g_2\ddot{g}_1 + C_{1222}g_2g_2\ddot{g}_2 + D_{1111}g_1\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{1112}g_1\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{1121}g_1\dot{g}_2\dot{g}_1 + \\
&D_{1122}g_1\dot{g}_2\dot{g}_2 + D_{1211}g_2\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{1212}g_2\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{1221}g_2\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{1222}g_2\dot{g}_2\dot{g}_2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}([E_{1111} - \beta^2 F_{1111}]g_1g_1g_1 + [E_{1112} - \\
&\beta^2 F_{1112}]g_1g_1g_2 + [E_{1121} - \beta^2 F_{1121}]g_1g_2g_1 + [E_{1122} - \beta^2 F_{1122}]g_1g_2g_2 + [E_{1211} - \beta^2 F_{1211}]g_2g_1g_1 + [E_{1212} - \\
&\beta^2 F_{1212}]g_2g_1g_2 + [E_{1221} - \beta^2 F_{1221}]g_2g_2g_1 + [E_{1222} - \beta^2 F_{1222}]g_2g_2g_2) + \frac{2\beta}{\bar{\omega}}[G_{111}g_1\dot{g}_1 + G_{112}g_1\dot{g}_2 + G_{121}g_2\dot{g}_1 + \\
&G_{122}g_2\dot{g}_2] + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}([\alpha H_{111} + K_{111}]g_1g_1 + [\alpha H_{112} + K_{112}]g_1g_2 + \\
&[\alpha H_{121} + K_{121}]g_2g_1 + [\alpha H_{122} + K_{122}]g_2g_2) = -\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c_1 + d_1)
\end{aligned} \quad (2.11)$$

ve

$$\ddot{g}_2 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_2^4\dot{g}_2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_2^4 g_2 - \beta^2\left((\alpha A_{21} + B_{21} + \delta_{21})g_1 + (\alpha A_{22} + B_{22} + \delta_{22})g_2\right)\right] + C_{2111}g_1\dot{g}_1\ddot{g}_1 + C_{2112}g_1\dot{g}_1\ddot{g}_2 + C_{2121}g_1\dot{g}_2\ddot{g}_1 + C_{2122}g_1\dot{g}_2\ddot{g}_2 + C_{2211}g_2\dot{g}_1\ddot{g}_1 + C_{2212}g_2\dot{g}_1\ddot{g}_2 + C_{2221}g_2\dot{g}_2\ddot{g}_1 + C_{2222}g_2\dot{g}_2\ddot{g}_2 + D_{2111}g_1\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{2112}g_1\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{2121}g_1\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{2122}g_1\dot{g}_2\dot{g}_2 + D_{2211}g_2\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{2212}g_2\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{2221}g_2\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{2222}g_2\dot{g}_2\dot{g}_2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}([E_{2111} - \beta^2 F_{2111}]g_1g_1g_1 + [E_{2112} - \beta^2 F_{2112}]g_1g_1g_2 + [E_{2121} - \beta^2 F_{2121}]g_1g_2g_1 + [E_{2122} - \beta^2 F_{2122}]g_1g_2g_2 + [E_{2211} - \beta^2 F_{2211}]g_2g_1g_1 + [E_{2212} - \beta^2 F_{2212}]g_2g_1g_2 + [E_{2221} - \beta^2 F_{2221}]g_2g_2g_1 + [E_{2222} - \beta^2 F_{2222}]g_2g_2g_2) + \frac{2\beta}{\bar{\omega}}[G_{211}g_1\dot{g}_1 + G_{212}g_1\dot{g}_2 + G_{221}g_2\dot{g}_1 + G_{222}g_2\dot{g}_2] + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}([\alpha H_{211} + K_{211}]g_1g_1 + [\alpha H_{212} + K_{212}]g_1g_2 + [\alpha H_{221} + K_{221}]g_2g_1 + [\alpha H_{222} + K_{222}]g_2g_2) = -\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c_2 + d_2) \quad (2.12)$$

şeklinde elde edilir. Burada g_1 ile g_2 ilk iki Galerkin koordinatıdır. Bu modelin kaotik titreşim davranışları sergileme ihtimali Bölüm 3.2'de incelenmiştir.

2.1.3 Üç serbestlik dereceli model

Sistem için 3 serbestlik dereceli bir model Denklem (2.9)'da n=3 alınarak elde edilebilir. Bu modele ait, çok sayıda terim içerdikleri için hayli hacimli olan üç denklem, Ek B'de verilmiştir. Bu denklemlerde g_1, g_2 ve g_3 ilk üç Galerkin koordinatı olup bu modelin kaotik davranışları da Bölüm 3.3'te incelenmiştir.

2.2 Kaos

Kaos, başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık durumu ve düzensizliğin düzeni şeklinde tanımlanır [16]. Lorenz'in [17], "kelebek etkisi" olarak açıkladığı ve kelebeğin kanat çırpmasının kasırgaya sebep olması, kaotik bir sistemin davranışının başlangıç koşullarına aşırı duyarlı olduğunu göstermek için kullanılan en yaygın örnektir. Kaotik sistemlerde küçük sapmalar öngörülemez ve tekrarlanmayan davranışlara neden olabilir. Sistemin doğasını bilmek, önlem alındığı takdirde olası problemlerin önüne geçmeyi sağlar. Peryodik davranışa sahip olan bir sistemin zamanla nasıl davranacağını bilmek mümkündür ancak kaotik davranışa sahip olan bir sistemin

zamanla nasıl davranacağını kestirmek mümkün değildir, bu sebeple sistem davranışının peryodik olması yeğlenir. Ayrıca, Biswas ve diğ. [18] sistemin kaotik davranışının niteliklerini şu biçimde sıralamışlardır:

- Peryodik olmayan davranış,
- Başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık,
- Kaotik hareketin öngörülmesinin zor veya imkânsız olması,
- Rastgele gibi görünen hareket,
- Lineer olmayan dinamik

Kaotik sistemlerin benzersiz ve karmaşık doğasını açıklamada bu nitelikler yardımcı olur. Dinamik sistemin konum, hız gibi durum değişkenleri ve zaman üzerinde yapılan birtakım incelemeler kaotik sistem davranışını nitelendirmeyi sağlar. Buna ek olarak, sistemin kaotik davranışını tespit etmek amacıyla kullanılan birçok kriter vardır ve bunlardan bazıları şunlardır:

- Konum-zaman ve hız-zaman grafiklerinin incelenmesi
- Faz diyagramı
- Poincaré tasviri
- Çatallanma diyagramları
- Lyapunov üsleri

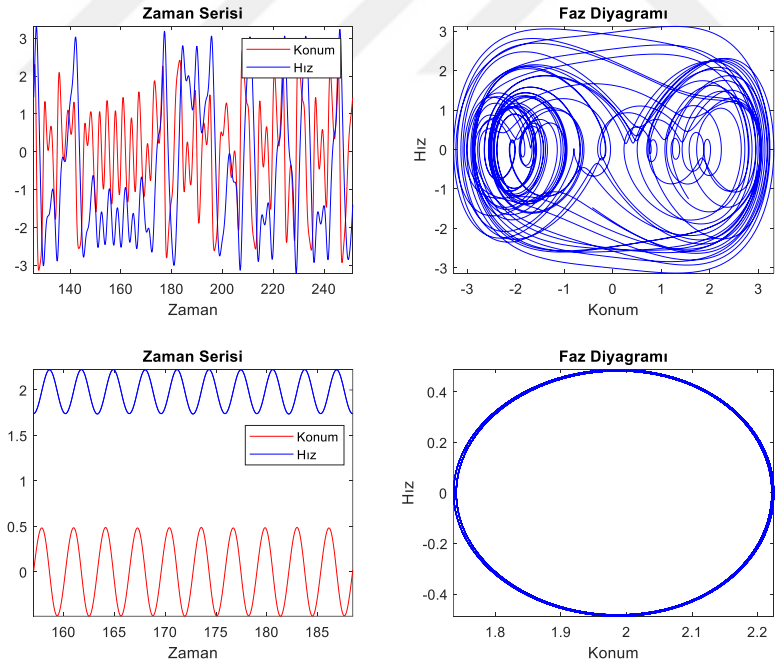
Bu kriterler, dinamik sistemin hareketini yöneten lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünden elde edilen sonuçları değerlendirmek amacıyla kullanılır ve farklı kriterler uygulanarak elde edilen sonuçların birbirini desteklemesi beklenir.

2.2.1 Konum-zaman ve hız-zaman grafikleri

Dinamik sistemin davranışını anlamak için konum ve hız ($g_i(\tau)$, $\dot{g}_i(\tau)$) durum değişkenleri kullanılabilir. Konumun zaman içerisinde değişimini gözlemlemek için konum-zaman grafikleri kullanılır. Konum-zaman grafikleri (τ–$g_i(\tau)$) biçiminde çizdirilir. Hız-zaman grafikleri ise zaman içerisinde sistemin hızının nasıl değiştiğini gözlemlemek için kullanılır. Hızlanma, yavaşlama ve durma gibi gibi harekete dair bilgi verir. Hız-zaman grafikleri (τ–$\dot{g}_i(\tau)$) biçiminde çizdirilir. Peryodik bir sisteme ait grafikler tekrarlayan davranışlar sergiler. Kaotik bir sisteme ait grafiklerde ise tekrarlamayan, düzensiz ve karmaşık davranışlar gözlenir.

2.2.2 Faz diyagramı

Dinamik sistemin tüm durum değişkenlerini içeren çok boyutlu uzaya, faz uzayı denir. Faz portresi, farklı başlangıç koşullarından başlayan durum değişkenlerinin zamanla değişimlerini 2 boyutlu düzlemde gösterir. Faz uzayının, 2 boytlu düzlemlere izdüşümlerinden oluşan yörüngelere gösteren diyagrama, faz yörüngesi ya da faz diyagramı denir. İncelenen problemlerde durum uzayı gösterilimine geçilirse durum değişkenleri: Bir serbestlik dereceli modelde, g_1 ve $\dot{g}_1$; iki serbestlik derecelide, g_1, $\dot{g}_1$, g_2 ve $\dot{g}_2$; üç serbestlik derecelide, g_1, $\dot{g}_1$, g_2, $\dot{g}_2$, g_3 ve $\dot{g}_3$'dan oluşan konum ve hızlardır. Bu modellerde durum uzayları sırasıyla 2, 4 ve 6 boyutludur. Faz diyagramları oluşturulurken en uygun seçim, aynı koordinata ait konum ve hızdan oluşan izdüşümlerden oluşan 2 boyutlu grafiklerdir. Bu diyagramlarda, uzun süreler boyunca konum ve hızdan oluşan yörünge zamandan bağımsız olarak ele alınır. Faz diyagramında, kapalı ve tekrar eden bir yörünge peryodik bir sistem davranışını; kapalı olmayan, kendini tekrar etmeyen ve faz diyagramını doldurma eğiliminde olan bir yörünge ise kaotik bir sistem davranışını ifade eder.



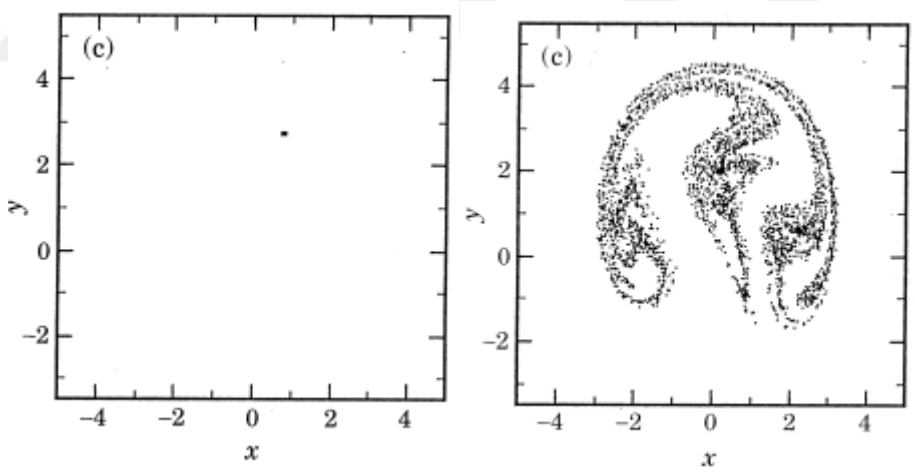
Şekil 2.2: Kaotik ve peryodik konum-zaman ile hız-zaman grafikleri ve faz diyagramları.

Şekil 2.2'de kaotik ve peryodik davranışlar sergileyen bir Duffing sistemine ait grafikler verilmiştir. Sol üstteki grafikte, kaotik konum-zaman ve hız-zaman davranışı

sergileyen ve kendini tekrar etmeyen düzensiz bir sistem davranışı görülmekte ve sağ üstteki grafikte aynı sistemin, faz diyagramını dolduran, kapalı ve tekrar etmeyen bir yörüngeye sahip olduğu görülmekte. Sol alttaki grafikte ise, sistemin peryodik konum-zaman ve hız-zaman davranışı görülmektedir. Ayrıca faz diyagramı kapalı bir yörüngeden oluşmaktadır.

2.2.3 Poincaré tasviri

Poincaré tasviri, faz diyagramı üzerinde belli aralıklarla (stroboskopik) sürdürülen bir incelemedir. Sistem davranışının peryodikliğini saptamak için kullanılır. Konum-hız ifadelerinin tahrik peryodunun tam katlarındaki değerleri dikkate alınır. Konum ve hızdan oluşan bir düzlemde $g_i(kT)$, $\dot{g}_i(kT)$) biçiminde çizdirilirerek (i koordinat numarası, T tahrik peryodu ve k doğal sayı) elde edilir. Eğer tasvirde, sonlu sayıda nokta gözlemlenirse peryodik; noktalar kümesi kapalı bir eğri oluşturuyorsa kuaziperyodik; fraktal yapıda sonsuz noktalar kümesi oluşturuyorsa kaotik sistem söz konusudur. Nokta sayısı arttıkça hareketin peryodunun katlanarak arttığı ve kaotik hareketin peryodunun sonsuza gittiği söylenir.



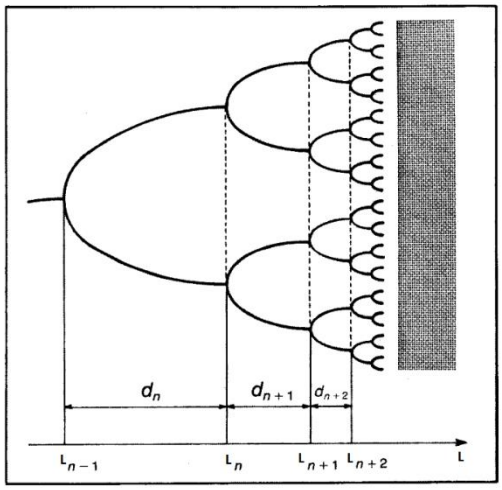
Şekil 2.3: Peryodik ve kaotik hareket ait Poincaré tasvirleri[5].

Şekil 2.3'te verilen grafikte soldaki tasvirde tek noktadan oluşan bir peryodik sistem davranışını temsil eder ve peryod tahrik peryoduna eşittir. Sağdaki tasvirde görülen sonsuz nokta, sistem davranışının kaotik bir hareket olduğunu ve hareket peryodunun sonsuza gittiğini göstermektedir.

2.2.4 Çatallanma diyagramları

Çatallanma diyagramları, peryodik sistem davranışının belirlenmesinde kullanılan bir kriterdir. Sistemin hareketini yöneten bir parametrenin değiştirilip buna denk gelen sistemin davranışına ait Poincaré noktalarının kaydedilmesi ile elde edilir. Yatay eksende değiştirilen parametre ve düşey eksende de Poincaré noktalarından konuma ait veriler çizdirilerek elde edilir. Hareketi yöneten çatallanma parametresi L ile gösterilmek kaydıyla L-g_i(kT) biçiminde elde edilir.

Şekil 2.4'te verilen örneğe göre, L_{n-1} değerinde bir çatallanma meydana gelir ve burada harekete ait peryod iki katına çıkar (2T). Ayrıca L_n, L_{n+1} ve L_{n+2} değerlerinde de çatallanma durumu meydana gelir ve peryod katlanarak sırasıyla 4T, 8T ve 16T değerlerine erişir. Şekilde, artan L ile çoğalan çatal sayısının, yani hareketin peryodunun sonsuza gittiği bir bölgeye varılmaktadır. Bu bölgede hareket kaotiktir.



Şekil 2.4: Örnek çatallanma diyagramı [19].

Çatallanma diyagramlarının ilginç bir özelliği, kaosa giden yolda, çatallanma noktalarındaki L değerlerinin aşağıdaki kurala uymasıdır.

$$\delta_F = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}-L_n}{L_{n+2}-L_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 4.669201660 \qquad (2.13)$$

Bu oran, evrensel Feigenbaum sabiti olarak adlandırılır ve kaosa doğru gidişin bir göstergesidir [20]. Bu sabiti kullanarak, kaosa yakın bölgelerde çatallanmaların hangi noktalarda meydana geleceğini tahmin etmek de mümkündür.

2.2.5 Lyapunov üsleri

Lyapunov üsleri, kaotik sistem davranışını belirlemek amacıyla sık kullanılan kriterlerden birisidir. Komşu yörüngelerin zaman içinde birbirinden üstel olarak ortalama ayrılma hızının bir değerlendirme ölçütüdür. Wolf [21], komşu yörüngeler arasındaki fark başlangıçta neredeyse yok denecek kadar küçükken belirli bir zamandan sonra üstel olarak yörüngesel sapmaların çok farklı hareketlere sebep olacağını belirtti.

x, sistemin bir t anına ait n boyutlu durum değişkenleri vektörü; x_1, x_2 … x_n ise sisteme ait durum değişkenleri

$$\mathbf{x} = \{x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\}^T \tag{2.14}$$

ve n boyutlu dinamik sistemin lineer olmayan diferansiyel denklemleri $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x})$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\dot{x_1} \quad \dot{x_2} \quad \cdots \quad \dot{x_n}\}^T = \{f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n\}^T, \; t>0 \text{ ve } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.15}$$

biçiminde verilir. Yörüngeden ufak $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$ sapmaları için lineerleştirilmiş varyasyonel denklem yazılsın.

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}\mathbf{x}(t) = J\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t), \; \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_0 \tag{2.16}$$

Burada J_{ij}, n x n boyutlu Jacobien matrisini ifade eder ve

$$J_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f_i}}{\partial \mathbf{x_j}} \tag{2.17}$$

Aşağıdaki genişletilmiş denklem takımının sağlanması gerekir.

$$\dot{M}(t) = JM(t), \; M(0) = I \tag{2.18}$$

Burada M(0) ise her bir sütunu standart birim vektörleri olan bir matristir ve I ile gösterilen n x n boyutunda bir birim matrise eşittir.

$$M(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

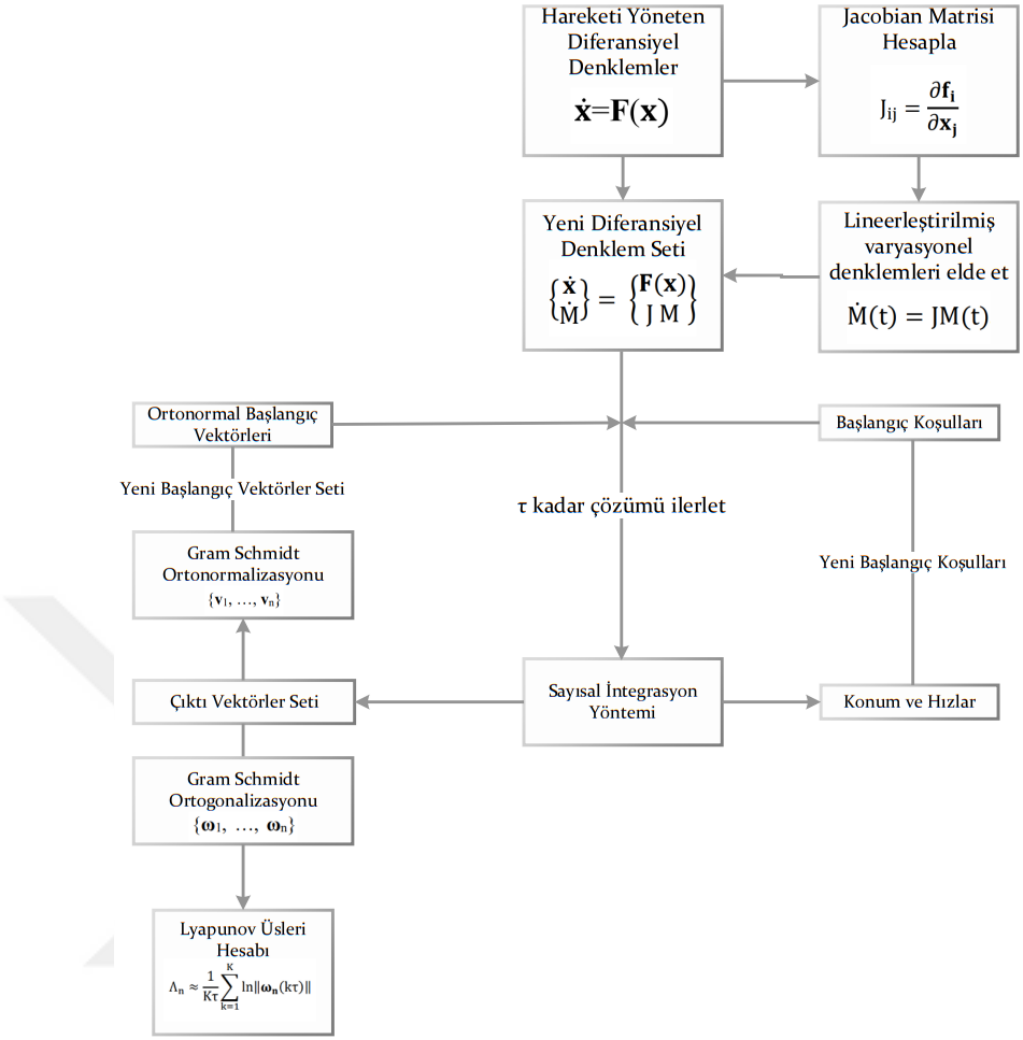
Denklem (2.18) zamana bağlı lineer diferansiyel denklemdir ve katsayıları dinamik sistemi ifade eden orijinal Denklem (2.15)'te verilmiştir ve her bir adımda tekrardan hesaplanması gerekir. Bu yüzden birleştirilmiş diferansiyel denklem sisteminin beraber çözümü için sayısal integrasyon uygulamak gerekir.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathrm{M}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \mathrm{J\,M} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t_0) \\ \mathrm{M}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x_0} \\ \mathrm{I_{nxn}} \end{Bmatrix}, \tag{2.20}$$

x_0 rastgele bir başlangıç koşulu olmak üzere Denklem (2.20)'de verilen problem bir sayısal integrasyon yöntemlerinden biri (Runge-Kutta 4 Yöntemi) seçilerek zamanla çözüm ilerletilir. Geçici titreşimlerin etkileri atılarak geriye kalan kısım üzerinde inceleme yapılır. Her zaman adımında bu süreç tekrarlanarak Gram-Schmidt yönteminden elde edilen ortogonal vektörler $\{\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n\}$ ile üs hesabı yapılırken ortonormal vektörler $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ile yeni hesaba geçilir. Harekete ait Lyapunov üsleri M matrisinin sütun elemanlarını oluşturan ortogonal vektörler $\{\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n\}$ ile hesaplanır.

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &\approx \frac{1}{K\tau}\sum_{k=1}^{K} \ln\|\boldsymbol{\omega_1}(k\tau)\| \\ \Lambda_2 &\approx \frac{1}{K\tau}\sum_{k=1}^{K} \ln\|\boldsymbol{\omega_2}(k\tau)\| \\ &\vdots \\ \Lambda_n &\approx \frac{1}{K\tau}\sum_{k=1}^{K} \ln\|\boldsymbol{\omega_n}(k\tau)\| \end{aligned} \tag{2.21}$$

Böylece elde edilen üsler ile sistemin davranışını hakkında yorum yapmak mümkün olur [22–24]. Bütün bu süreç Şekil 2.5 özetlenmiştir.



Şekil 2.5: Lyapunov üssü hesabı.

Lyapunov üssü pozitif ise, zamanla yörüngelerin birbirinden üstel olarak uzaklaşması anlamına gelir ve sistemin kaotik davranışına işaret eder. Lyapunov üssü negatif ise, zamanla yörüngelerin birbirine üstel olarak yakınsaması anlamına gelir ve sistemin peryodik davranışına işaret eder. Lyapunov üssü 0 ise, zaman yörüngeler ne birbirinden uzaklaşır ne de birbirine yakınlaşır. Sistemin hareketini yöneten parametrelerden ikisi hariç geriye kalanlar sabitlenerek serbest parametrelerin olduğu bir düzlem üzerinde Lyapunov üsleri hesabına dayalı kaos kartları üretilir. Böylece sistemin davranışına parametrelerin etkilerini geniş bir çerçevede değerlendirmek mümkündür.

3. HIZ DALGALANMASI VE KAOS

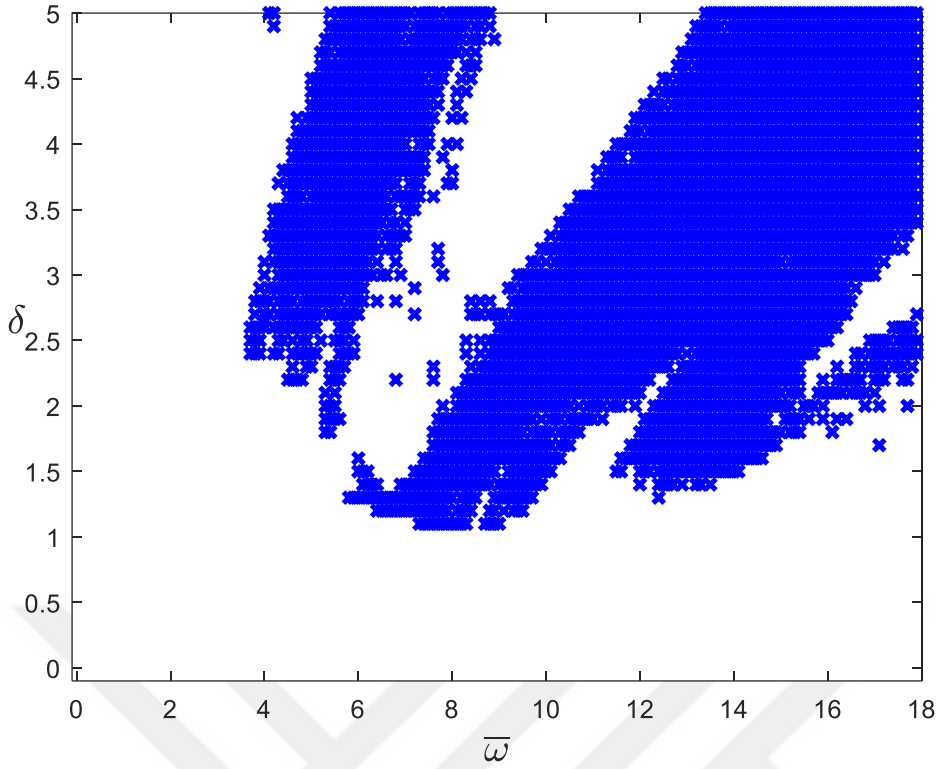
Bu bölümde, rotor açısal hızındaki dalgalanmaların dönen kirişte kaotik titreşimler doğurma olasılığı incelenecektir. İncelemeler, sırasıyla, Bölüm 2.1'de elde edilmiş olan bir, iki ve üç serbestlik dereceli ayrık modeller üzerinde yürütülecek, bu amaçla, Bölüm 2.2'de tanıtılmış olan kaos kriterlerinin her birine ayrı ayrı başvurularak elde edilecek sonuçların güvenilirliği güvence altına alınmaya çalışılacaktır. Ayrıca elde edilen modeller birbirleriyle karşılaştırılarak en iyi modele karar verilecektir.

3.1 Bir Serbestlik Dereceli Model

Denklem (2.10)'da verilen Bir serbestlik dereceli model ele alınır. Hareketi kontrol eden 5 parametreden sırasıyla $\delta-\bar{\omega}$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı), $\delta-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma katsayısı−Ortalama dönme hızı), $\bar{\omega}-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Ortalama dönme hızı) düzlemlerinde Lyapunov üsleri hesabına dayalı kaos kartları oluşturulmuştur. Böylece kaotik sistem davranışına sebep olan parametre bileşenleri elde edilmiştir ve bu bileşenlere ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasvirleri verilerek sonuçların birbirini doğrular nitelikte olduğuna dair bulgular sunulmuştur.

3.1.1 $\bar{\omega}-\delta$ düzlemine ait kaos kartı

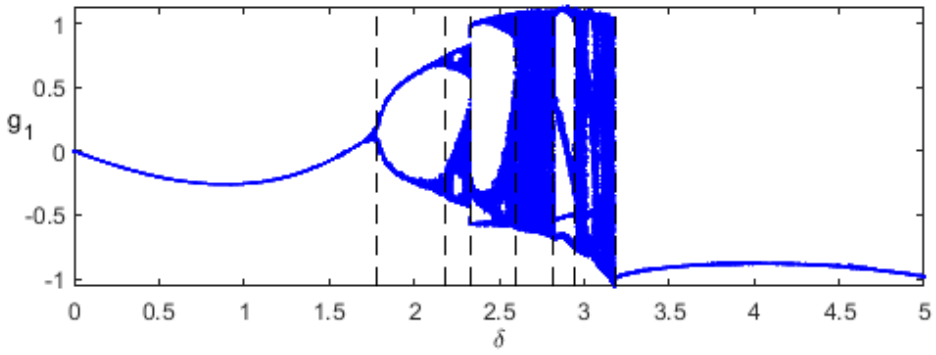
Denklem (2.10)'da verilen Bir serbestlik dereceli model ele alınır ve ilkin, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü $\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$ (Boyutsuz göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}-\delta$ (Boyutsuz Dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 9000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.1 elde edilir.



Şekil 3.1: $\bar{\omega}$–δ düzleminde kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 2 büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede birkaç tekil mavi noktanın, mavi bölgenin içinde ise bazı beyaz noktaların bulunduğu görülmektedir. Ayrıca, mavi bölgelerin içine uzanan ince beyaz hatlar da bulunmaktadır. Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve/veya dalgalanma katsayısı δ'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

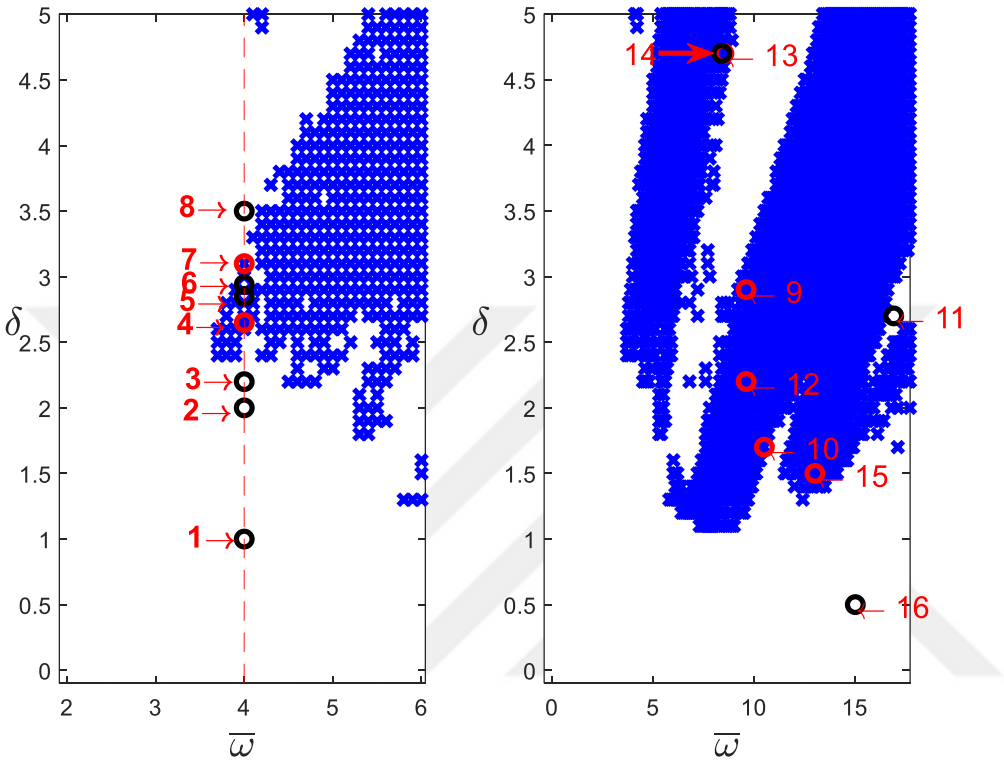
Ardından, yine α=2, β=3, ζ=0.1 alınır, dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$'da δ dalgalanma katsayısının belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; $\bar{\omega}$=4'e sabitlenip δ'nın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 500 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.2 elde edilir.



Şekil 3.2: δ paramatresine göre çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4)

Bu diyagramda düşey eksen Poincaré noktalarını, yatay eksen ise çatallanma parametresi δ'yı göstermektedir. Bir veya birden çok sonlu sayıdaki noktalar sistemin peryodik titreşim yapacağına, sonsuz nokta ise sistemin kaotik titreşim hareketi yapacağına işaret etmektedir. Buna göre δ<1.78 iken tek Poincaré noktası ayırd edilir yani hareket peryodu parametre tahriki ve dış zorlanmanın ortak peryodu olan T=2π peryoduyla gerçekleşir. Daha sonra δ=1.78'de çatallanma olur. İki Poincaré noktası ayırd edilmeye başlanır ve hareket peryodu katlanarak 2T=4π olur. δ=2.181'de tekrar bir çatallanma olur. 2.181<δ<2.32 aralığında ayırd edilen noktalar 4 tane olur ve hareket peryodu 4T=8π olur. δ=2.32'de tekrar bir çatallanma meydana gelir. 2.32<δ<2.6 aralığında peryodik davranış sergileyen sistemin peryodu 3T=6π olur. 2.6<δ<2.82 ile 2.94<δ<3.18 değerlerinde ise Poincaré noktaları ayırt edilemez, dolayısıyla sistem peryodu sonsuza gider ve kaotik davranış sergiler. Bu bölgenin arasındaki 2.82<δ<2.94 bölgesinde ayırd edilen dört tane Poincaré noktası vardır yani sistem, hareket peryodu T=8π olacak biçimde peryodik hareket sergiler. δ>3.18 olan değerlerde tek bir Poincaré noktası bulunduğu görülür yani bu bölgede sistemin T=2π peryoduyla hareket eden peryodik davranışta bulunacağı söylenir. Çatallanma diyagramı Lyapunov üsleri hesabına dayanarak elde edilen kaos kartı ile benzer sistem davranışını göstermektedir fakat yer yer uyumsuzluklar da bulunmaktadır. Bu sorunla başa çıkmak için Lyapunov üssü hesabında tarama adımları küçültülebilir fakat yine de kaba hesap olmaktan öteye gitmez. Bundan dolayı probleme ait sonuçlar diğer kriterler ile ayrıca doğrulanmalıdır. Tarama adımlarının küçültülmesi hesap maliyetini ciddi oranda artıran bir durumdur. Yani sistem parametrelerinin 4 tanesi (α, β_0, ζ, $\bar{\omega}$) bir değere sabitlendikten sonra dalgalanma katsayısı δ'nın artması, peryod katlanmalarına ve kaotik sistem davranışlarına sebep olabilmektedir.

Ayrıca Şekil 3.1'de verilen kaos kartı üzerinden seçilen 16 nokta Şekil 3.3'te verilmiştir. Buradaki ilk 8 nokta Şekil 3.2'de verilen çatallanma diyagramı ile Şekil 3.1'de verilen kaos kartının aynı sonuçları verdiğini göstermek üzere seçilmiştir. Ayrıca diğer noktalar kaos kartının farklı bölgelerde de doğru sonuçlar verdiğini göstermek üzere seçilmiştir.



Şekil 3.3: Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1)

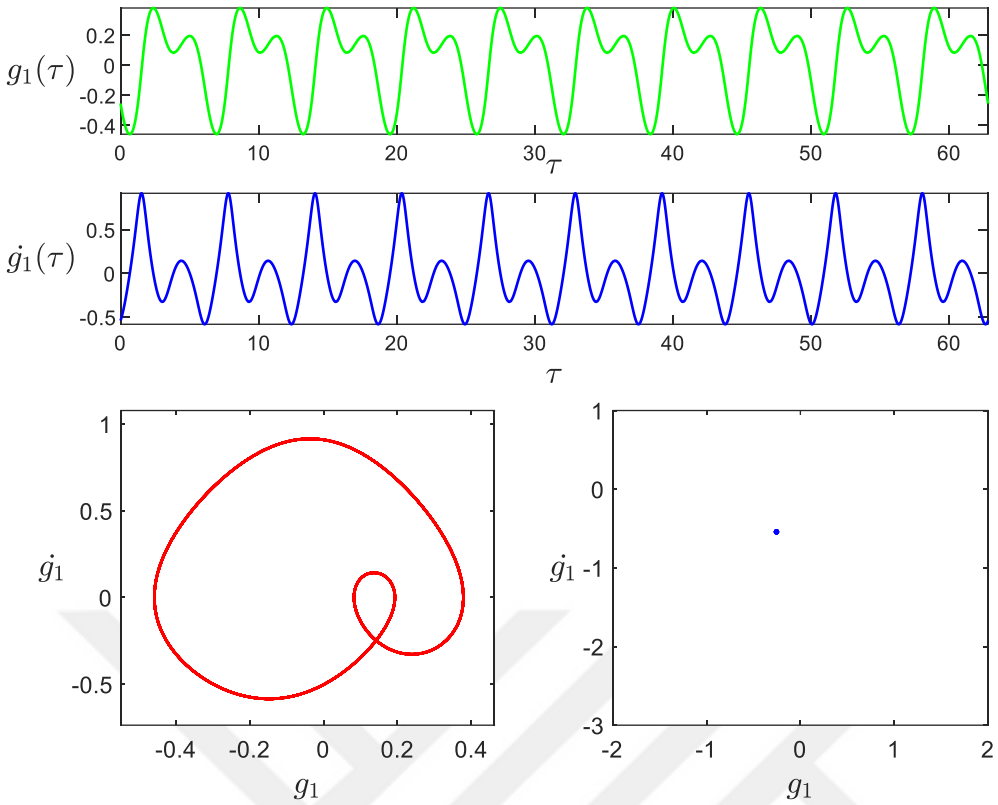
Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.3a'da verilen noktalar hem Şekil 3.1'deki kaos kartını hem de Şekil 3.2'deki çatallanma diyagramını; Şekil 3.3b'de verilen noktalar yalnız kaos kartını doğrulamak üzere seçilmiştir. Büyük mavi bölge içine ve sınırlarına sırasıyla denk gelen 12, 15 ile 9, 10 noktaları kaotik, 11 noktası ise peryodiktir. Küçük mavi bölge içinde ve sınırlarında ise 4 ile 7, 13 noktaları kaotik, 5, 6 ile 8, 14 noktaları peryodiktir. Beyaz bölge içinde geriye kalan 1, 2, 3 ve 16 noktaları peryodiktir. Bu noktaların tamamına ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Çizelge 3.1: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2)	Durum
1	$\bar{\omega}$=4, δ=1	1	T	-0.13551 -0.13638	Peryodik
2	$\bar{\omega}$=4, δ=2	2	2T	-0.10679 -0.12317	Peryodik
3	$\bar{\omega}$=4, δ=2.2	4	4T	-0.00165 -0.22080	Peryodik
4	$\bar{\omega}$=4, δ=2.65	∞	∞	0.05260 -0.25387	Kaotik
5	$\bar{\omega}$=4, δ=2.85	4	4T	-0.08423 -0.10202	Peryodik
6	$\bar{\omega}$=4, δ=2.94	8	8T	-0.00754 -0.16995	Peryodik
7	$\bar{\omega}$=4, δ=3.1	∞	∞	0.05865 -0.24206	Kaotik
8	$\bar{\omega}$=4, δ=3.5	1	T	-0.09554 -0.09644	Peryodik
9	$\bar{\omega}$=9.6, δ=2.9	∞	∞	0.06814 -0.08693	Kaotik
10	$\bar{\omega}$=10.5, δ=1.7	∞	∞	0.05321 -0.11346	Kaotik
11	$\bar{\omega}$=16.9, δ=2.7	3	3T	-0.00029 -0.00938	Peryodik
12	$\bar{\omega}$=9.6, δ=2.2	∞	∞	0.06977 -0.09062	Kaotik
13	$\bar{\omega}$=8.5, δ=4.7	∞	∞	0.00849 -0.02005	Kaotik
14	$\bar{\omega}$=8.4, δ=4.7	2	2T	-0.03419 -0.05764	Peryodik
15	$\bar{\omega}$=13, δ=1.5	∞	∞	0.01876 -0.04847	Kaotik
16	$\bar{\omega}$=15, δ=0.5	1	T	-0.03895 -0.03828	Peryodik

Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi dahi pozitif olan noktalar kaotik parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında harmonik(bir nokta) ve harmonik altı(birden fazla nokta) titreşim davranışı gözlenir.

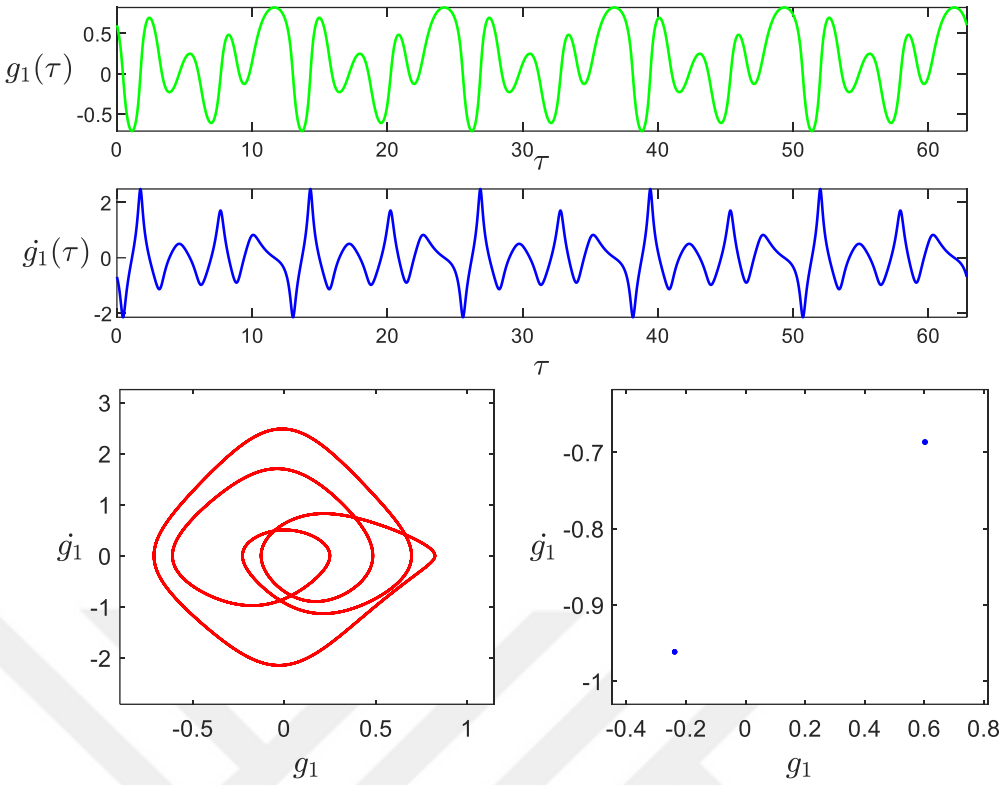
Ardından Şekil 3.1'deki kaos kartı ile Şekil 3.2'deki çatallanma diyagramını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.1'de verilen noktalardan 1, 2 ve 4 no'lu örnekler seçilmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.4, Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.



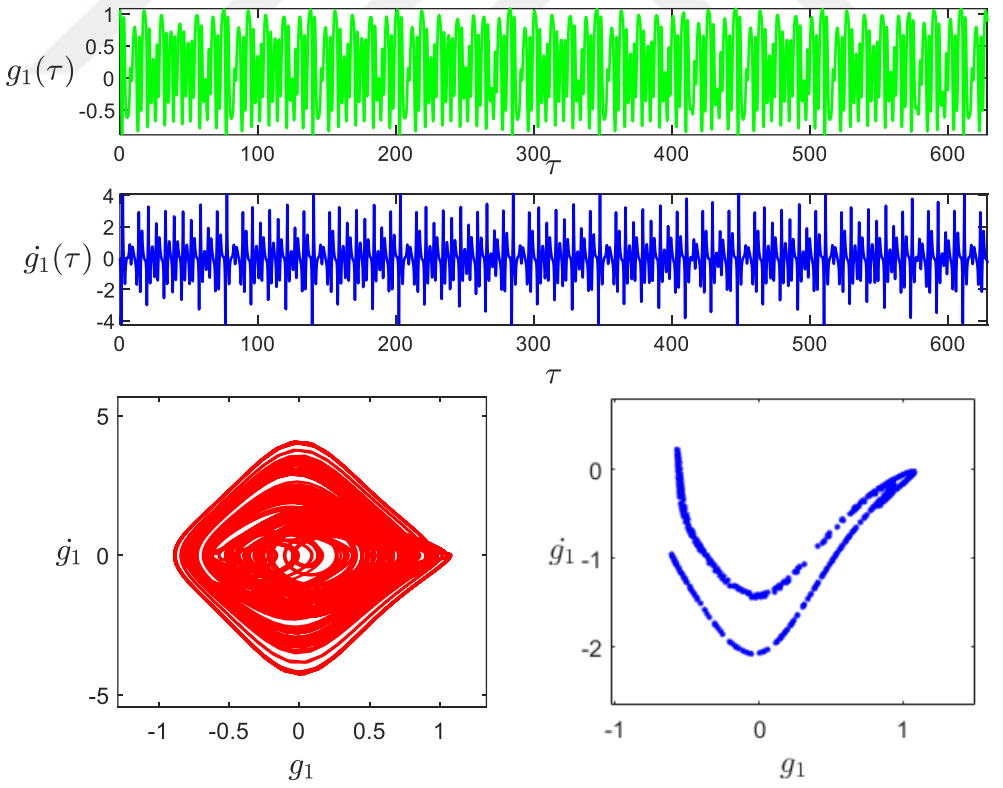
Şekil 3.4: 1 noktasına ait (δ=1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4).

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında beyaz peryodik bölgeye denk gelen ve Şekil 3.2'de verilen çatallanma diyagramında şeklin en soluna düşen 1 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) Şekil 3.4 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=–0.13551 ile Λ_2=–0.13638 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirinde n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Faz diyagramında kapalı bir yörünge izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler, bu parametre bileşenlerinde peryodik hareket sergileyeceğine dair işarettir.

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında beyaz peryodik bölgeye düşen 2 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) Şekil 3.5 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=–0.10679 ve Λ_2=–0.12317 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirinde n=2 nokta bulunmakta, böylece hareketin 2T=4π peryodlu ve harmonik altı olduğu söylenir. Faz diyagramında kapalı bir yörünge izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde peryodik hareket sergileyeceğine dair işarettir.



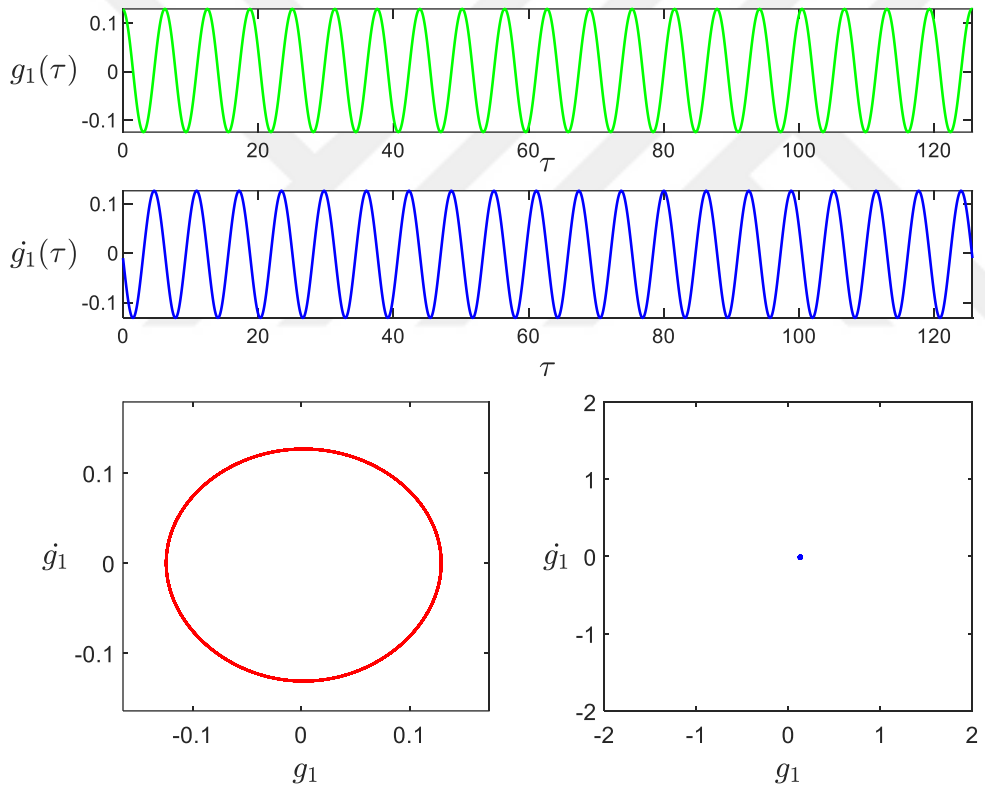
Şekil 3.5: 2 noktasına ait (δ=2) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4).



Şekil 3.6: 4 noktasına ait (δ=2.65) konum−zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4).

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında küçük mavi bölgeye denk gelen 4 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=2.65, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) Şekil 3.6 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.05260 ve Λ_2=−0.25387 olarak hesaplanmıştır, üslerden biri pozitiftir. Poincaré tasvirinde fraktal şekli bulunmakta ve tasviri oluşturan noktaların sonsuz olduğu görülmektedir, böylece hareketin peryodunun sonsuz olduğu söylenir. Faz diyagramında yörüngenin kendini tekrar etmediği, düzlemi doldurduğu görülmektedir. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri düzensiz ve karmaşık bir davranışta olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

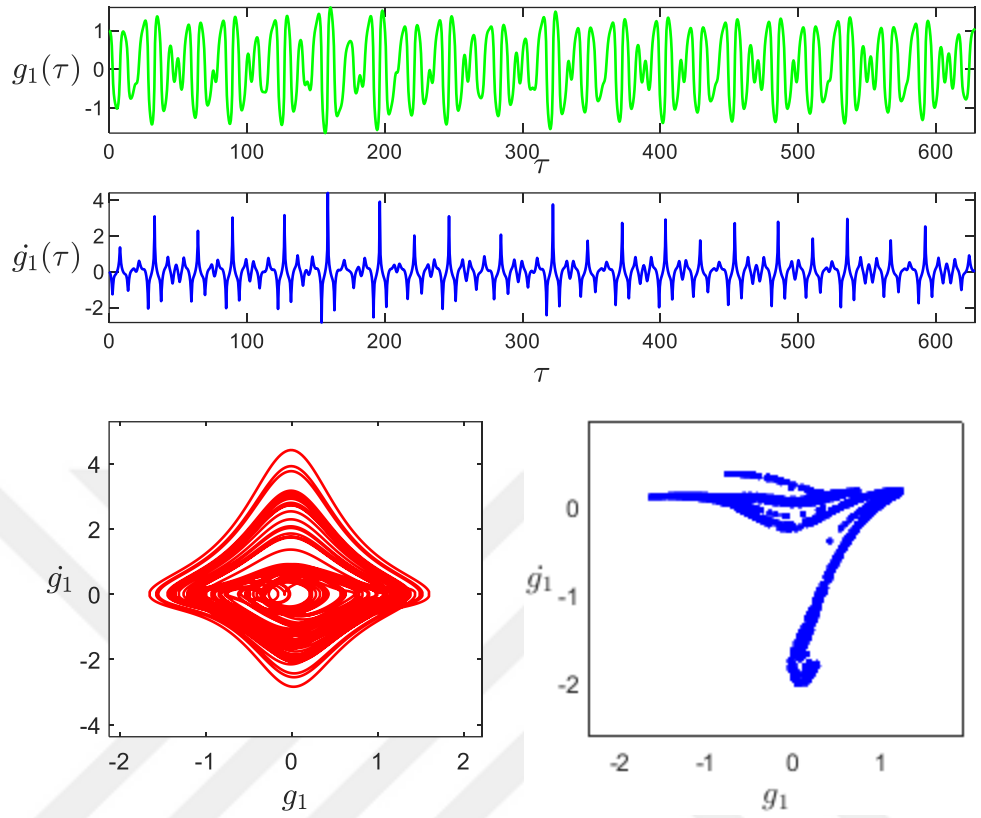
Bu örnekler çatallanma diyagramını ve Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartını doğrulamaktadır. Kaos kartının güvenilirliğini artırmak amacıyla 16 ve 10 noktaları da Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de incelenmiştir.



Şekil 3.7: 16 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=0.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=15).

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında beyaz bölgeye denk gelen 16 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=0.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=15) Şekil 3.7 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.03895 ve Λ_2=−0.03828 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirinde n=1 nokta bulunmakta. Faz diyagramında kapalı bir yörünge görülmekte. Konum−zaman ve

hız−zaman grafikleri düzgün ve peryodik davranışta olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde peryodik hareket davranışına dair işarettir.



Şekil 3.8: 10 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=1.7, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=10.5).

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgeye denk gelen 10 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1.7, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=10.5) Şekil 3.8 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.05321 ve Λ_2=−0.11346 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmakta. Faz diyagramında kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörünge görülmekte. Konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde karmaşık davranışlar tespit edilmiş olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

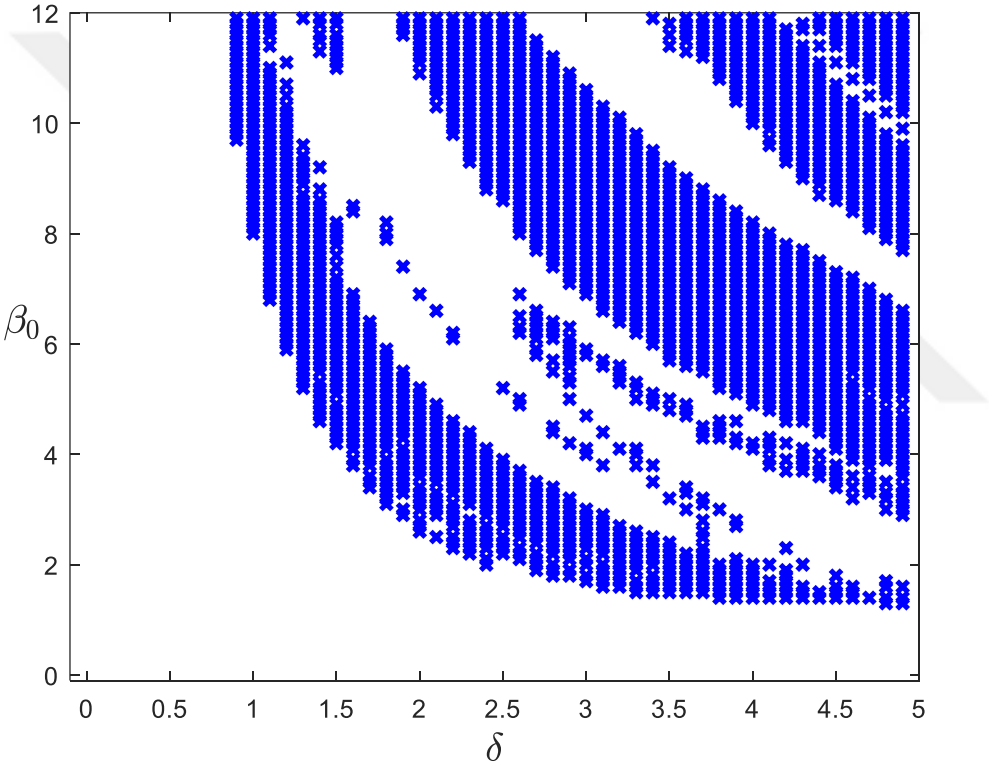
Böylece kaos kartı üzerinden seçilen 2 noktanın kartı doğruladığını söylemek mümkündür. Ayrıca Çizelge 3.1'de verilen sonuçlar Şekil 3.1'deki kaos kartını doğrulamaktadır.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Rotorun hızının dalgalanma frekansı ile dalgalanma katsayısı bir düzlemde, bir serbestlik dereceli model kullanılarak incelenmiştir ve kaotik titreşim davranışlarına rastlanmıştır. Bundan dolayı rotor-pala

sistemlerinin çalışma koşullarında ortaya çıkabilecek olası kaotik titreşim davranışlarının tasarım aşamasında ele alınması gerektiği sonucu çıkarılır.

3.1.2 $\beta_0-\delta$ düzlemine ait kaos kartı

Denklem (2.10)'da verilen Bir serbestlik dereceli model ele alınır ve hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü $\alpha=1$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$ (Boyutsuz göbek yarıçapı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma frekansı) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\beta_0-\delta$ (Ortalama dönme hızı−Boyutsuz Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 6000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.9 elde edilir.

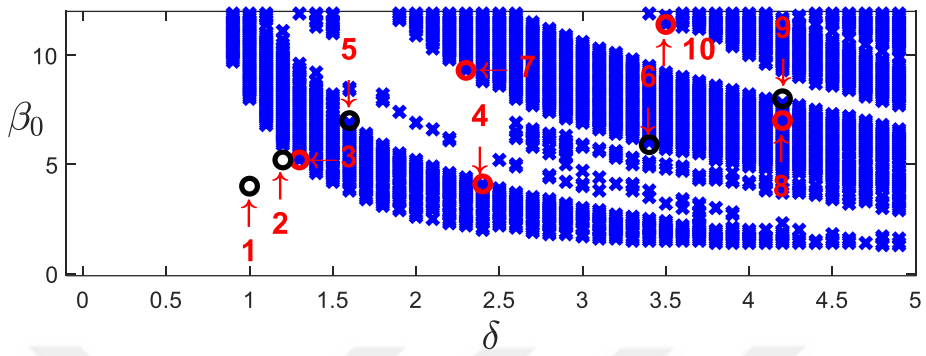


Şekil 3.9: $\beta_0-\delta$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=1$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=7$).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. Üç büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede birkaç tekil mavi noktanın ve üç mavi hat bulunmakta, mavi bölgelerin içinde bir ince peryodik hat bulunur ve büyük mavi bölgelerin dışında peryodik bölgeler bulunmaktadır. Dalgalanma katsayısı δ ve/veya ortalama dönme hızı β_0'ın küçük olduğu bölgelerde

kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Ayrıca Şekil 3.9'da verilen kaos kartı üzerinden seçilen 10 nokta işaretlenerek Şekil 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.10: Kaos kartında örnek noktalar (α=1, β_0=3, ζ=0.1)

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.10'daki noktaların Şekil 3.9'daki kaos kartını doğrulaması beklenmektedir. Büyük dış mavi bölge içine ve sınırlarına sırasıyla denk gelen 3,4 noktaları kaotik, 2,5 noktaları ise peryodiktir. Ortada kalan mavi bölge sınırları ile içinde ise 7 ile 8 noktaları kaotik, 6,9 noktası peryodiktir. Küçük mavi bölgenin sınırında 10 noktası kaotiktir. Beyaz bölgede kalan 1 noktası peryodiktir. Bu noktaların Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.2'de verilmiştir.

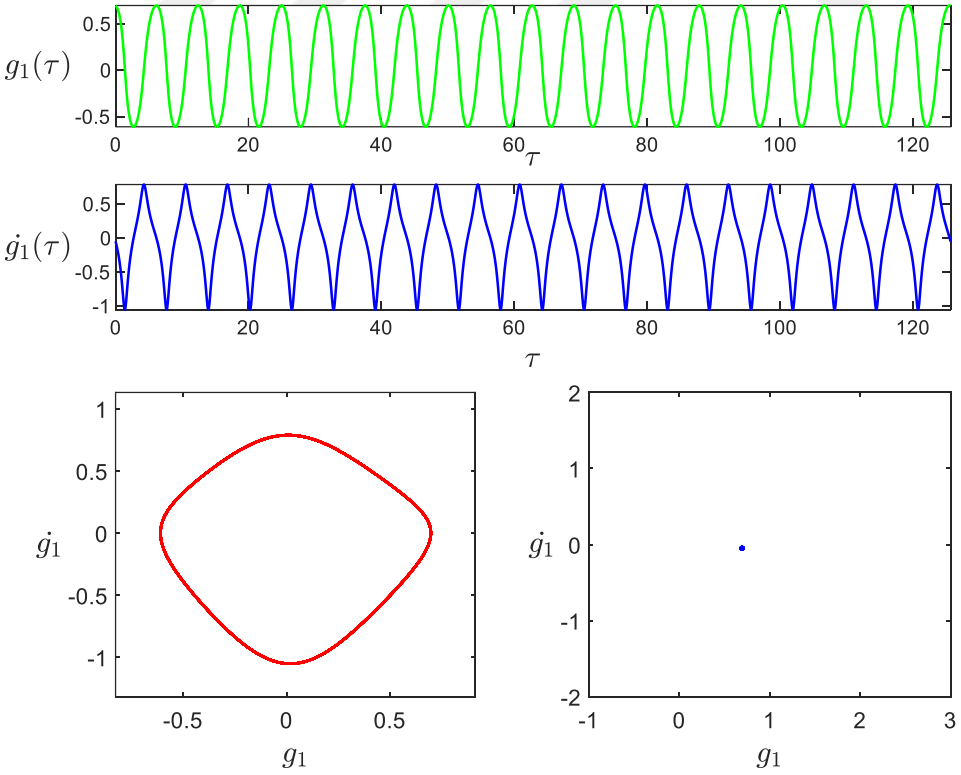
Çizelge 3.2: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Numara	Parametre Kombinasyonu (δ, β_0)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2)	Durum
1	δ=1, β_0=4	1	T	-0.02261 -0.09846	Peryodik
2	δ=1.3, β_0=5.2	∞	∞	0.01381 -0.11672	Kaotik
3	δ=1.2, β_0=5.2	1	T	-0.00467 -0.09694	Peryodik
4	δ=2.4, β_0=4.1	∞	∞	0.03440 -0.08584	Kaotik
5	δ=1.6, β_0=7	2	2T	-0.00355 -0.02373	Peryodik
6	δ=3.4, β_0=5.9	2	2T	-0.00870 -0.11042	Peryodik

Çizelge 3.2 (devam): Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, ϖ=7).

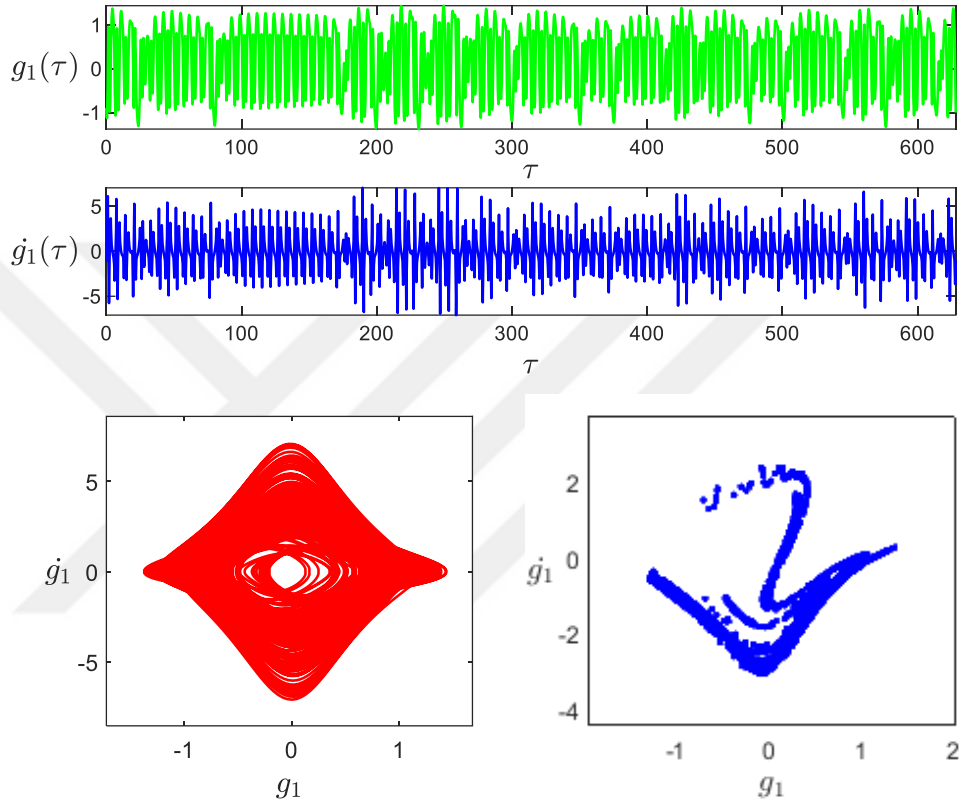
Numara	Parametre Kombinasyonu (δ, β_0)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2)	Durum
7	δ=2.3, β_0=9.3	∞	∞	0.04403 -0.06364	Kaotik
8	δ=4.2, β_0=7	∞	∞	0.42021 -0.44401	Kaotik
9	δ=4.2, β_0=8	2	2T	-0.04664 -0.05517	Peryodik
10	δ=3.5, β_0=11.4	∞	∞	0.67967 -0.68235	Kaotik

Buna göre, verilen noktalar kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında peryodik titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise kaotik noktalar bulunmaktadır. Şekil 3.9'daki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.2'de verilen noktalardan 1 ve 8 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.11 ve Şekil 3.12'de konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.



Şekil 3.11: 1 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=1, ζ=0.1, ϖ=7).

Şekil 3.11'de verilen kaos kartında beyaz bölgeye denk gelen 1 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4) Şekil 3.7 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=–0.03895 ve Λ_2=–0.03828 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirinde n=1 nokta bulunmakta. Faz diyagramında kapalı bir yörünge görülmekte. Konum-zaman ve hız-zaman grafikleri düzgün ve periyodik davranışta olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde periyodik hareket davranışına dair işarettir.



Şekil 3.12: 8 noktasına ait konum–zaman ve hız–zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=7, δ=4.2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Şekil 3.12'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgeye denk gelen 10 noktasına ait (α=1, β_0=7, δ=4.2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7)Şekil 3.8 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.05321 ve Λ_2=–0.11346 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmakta. Faz diyagramında kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörünge görülmekte. Konum–zaman ve hız–zaman grafiklerinde karmaşık davranışlar tespit edilmiş olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Dalgalanma katsayısı ile ortalama dönme hızı düzleminde, bir serbestlik dereceli model kullanılarak incelenmiştir ve kaotik

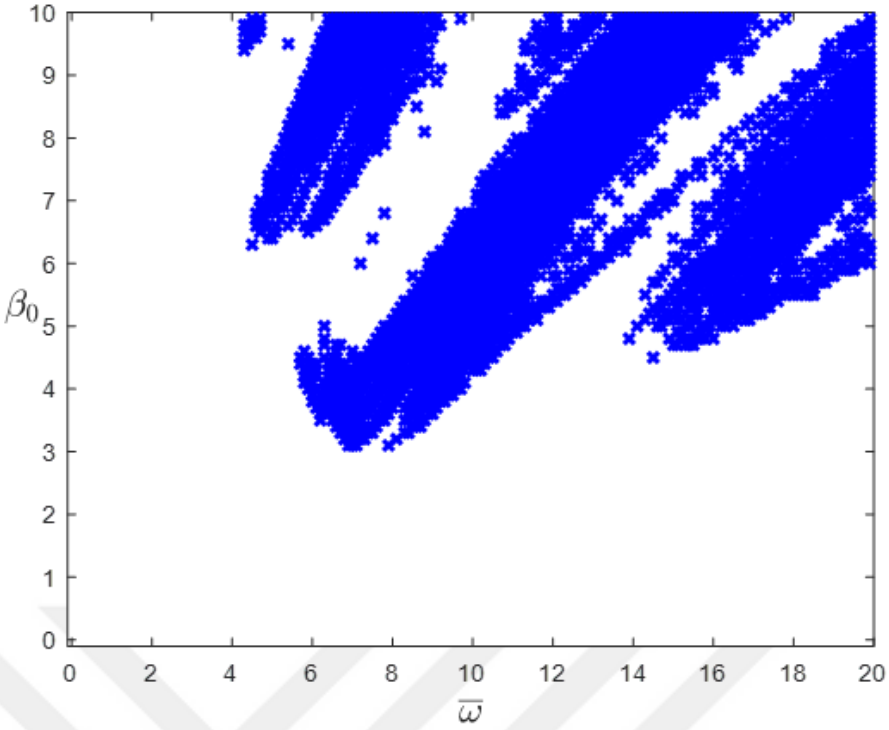
titreşimler davranışlarına rastlanmıştır. Düşük hızlarda meydana gelmeyen kaotik titreşimler davranışlarının hız arttıkça meydana gelme ihtimali artar. Öte yandan dalgalanma katsayısının düşük olduğu noktalarda hızın artması kaotik titreşimlere sebep olmazken yüksek dalgalanma katsayısında düşük hızlara rağmen kaotik titreşimler meydana gelmektedir. Ayrıca bir sistemin doğrudan bir hıza gitmesi mümkün değildir, bir hız aralığını tarayarak belli bir hıza gitmesi gerekir, bu takdirde dalgalanma hızının sabit olduğu ama hızın arttığı yönde kaotik hareketlere rastlamak mümkündür. Bundan dolayı rotor−pala sistemlerinin çalışma koşullarında kaotik titreşim davranışının ortaya çıkması olasıdır ve bunun ise ortalama rotor hızının değiştirilerek önlenebilmesi mümkündür.

3.1.3 $\bar{\omega}-\beta_0$ düzlemine ait kaos kartı

Denklem (2.10)'da verilen bir serbestlik dereceli model ele alınır ve hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü α=1, δ=1.6, ζ=0.1 (boyutsuz göbek yarıçapı, boyutsuz dalgalanma katsayısı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı− Ortalama dönme hızı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 20000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.13 elde edilir.

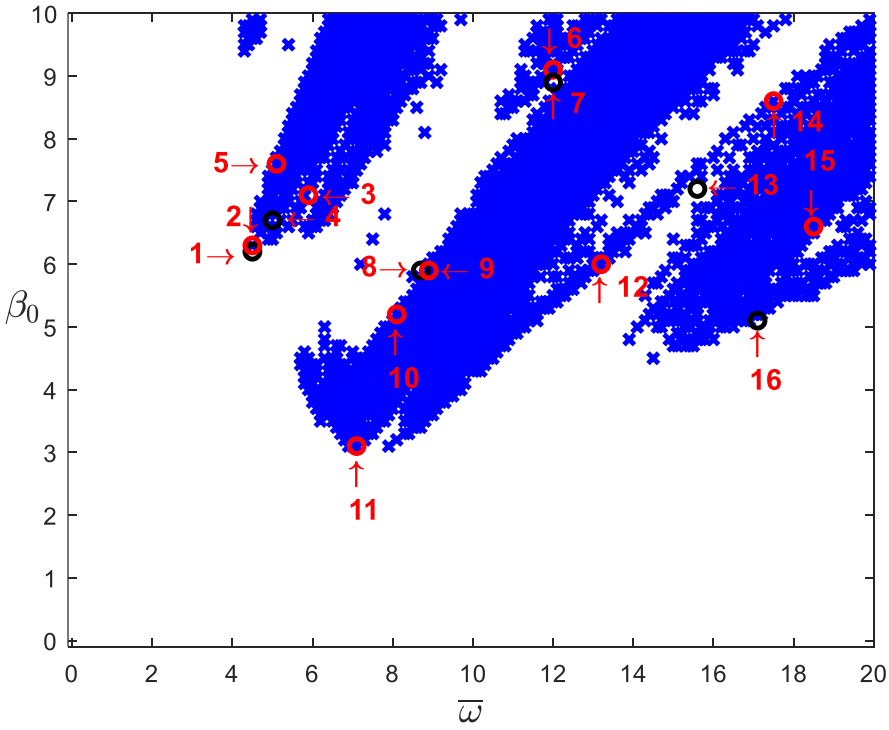
Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. İki büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede mavi kalın uzun bir hat ile birkaç tekil noktanın, mavi bölgenin içinde ise beyaz iki küçük bölgenin, iki ince hattın ve birkaç tekil noktanın bulunduğu görülmektedir. Büyük mavi bölgenin sol tarafında ufak mavi bölge bulunmaktadır. Küçük mavi bölgenin solunda ise çok daha küçük bir mavi bölge bulunmaktadır.

Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve/veya ortalama dönme hızı β_0'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.



Şekil 3.13: $\overline{\omega}-\beta_0$ düzleminde kaos kartı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1).

Ayrıca Şekil 3.13'te verilen kaos kartı üzerinden seçilen 10 nokta işaretlenerek Şekil 3.14'te verilmiştir. Buradaki noktalar kaos kartının verdiği sonuçların doğruluğunu kanıtlamak üzere verilmiştir.



Şekil 3.14: $\overline{\omega}-\beta_0$ düzleminde kaos kartından seçilen noktalar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1).

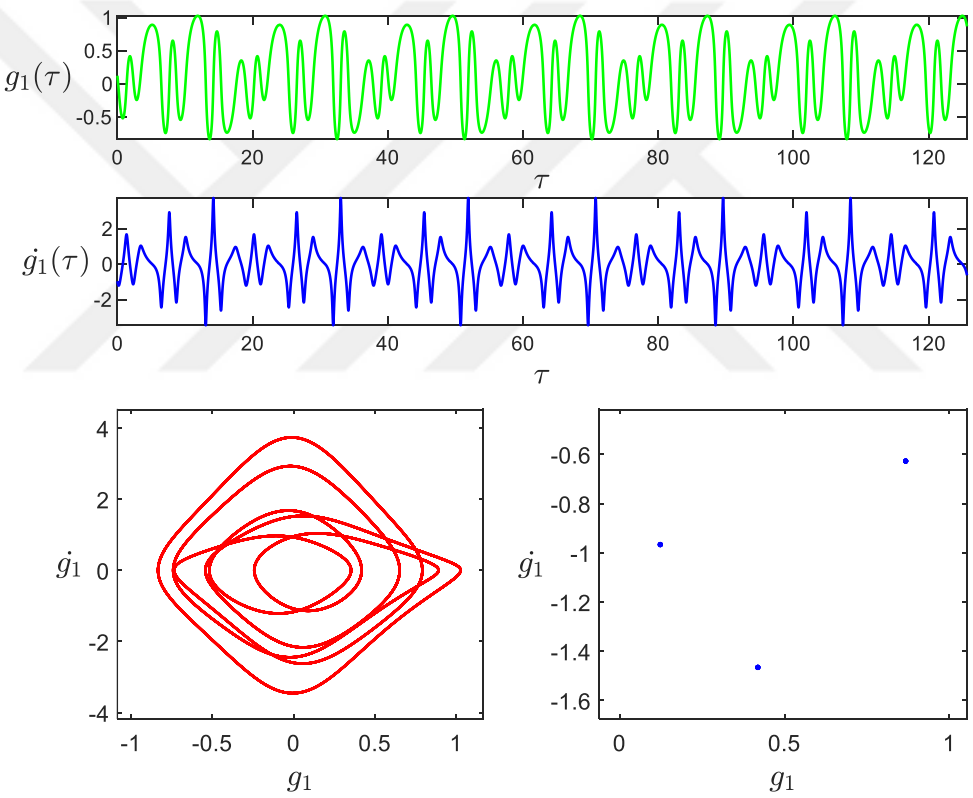
Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.14'teki noktaların kaos kartını doğrulaması beklenir Sol üstteki küçük mavi bölgenin içine ve sınırlarına denk gelen gelen 2,5 ve 3 noktaları kaotik, 1 ve 4 noktaları peryodiktir. Ortadaki büyük bölgenin ile küçük bölge arasında 7 noktası peryodik. Küçük bölgenin sınırında 6 noktası kaotiktir. Ayrıca 9,10,11,12,14 noktaları kaotikken 8 noktaları kaotiktir. En sağdaki bölge ile ortadaki bölge arasında 13 noktası peryodiktir. En sağdaki bölgenin iç sınırına denk gelen 15 noktası kaotik, dış sınırına denk gelen 16 noktası da peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.3'de verilmiştir.

Çizelge 3.3: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, β_0)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2)	Durum
1	$\bar{\omega}$=4.5, β_0=6.2	3	3T	0.00766 -0.17043	Peryodik
2	$\bar{\omega}$=4.5, β_0=6.3	∞	∞	0.02407 -0.19816	Kaotik
3	$\bar{\omega}$=5.9, β_0=7.1	∞	∞	0.00381 -0.15105	Kaotik
4	$\bar{\omega}$=5, β_0=6.7	6	6T	-0.01862 -0.14530	Peryodik
5	$\bar{\omega}$=5.1, β_0=7.6	∞	∞	0.09549 -0.24108	Kaotik
6	$\bar{\omega}$=12, β_0=9.1	∞	∞	0.41900 -0.41667	Kaotik
7	$\bar{\omega}$=12, β_0=8.9	6	6T	-0.00223 -0.02041	Peryodik
8	$\bar{\omega}$=8.7, β_0=5.9	1	T	-0.00748 -0.02581	Peryodik
9	$\bar{\omega}$=8.9, β_0=5.9	∞	∞	0.05689 -0.10580	Kaotik
10	$\bar{\omega}$=8.1, β_0=5.2	∞	∞	0.04269 -0.10103	Kaotik
11	$\bar{\omega}$=7.1, β_0=3.1	∞	∞	0.04507 -0.15860	Kaotik
12	$\bar{\omega}$=13.2, β_0=6	∞	∞	0.04109 -0.08139	Kaotik
13	$\bar{\omega}$=15.6, β_0=7.2	6	6T	-0.01006 -0.02190	Peryodik
14	$\bar{\omega}$=17.5, β_0=8.6	∞	∞	0.03939 -0.06053	Kaotik
15	$\bar{\omega}$=18.5, β_0=6.6	∞	∞	0.03716 -0.05756	Kaotik
16	$\bar{\omega}$=17.1, β_0=5.1	2	2T	-0.00790 -0.01859	Peryodik

Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar (iki tanesi pozitif olan örneklere de rastlanmıştır) kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında harmonik ve harmonik altı titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

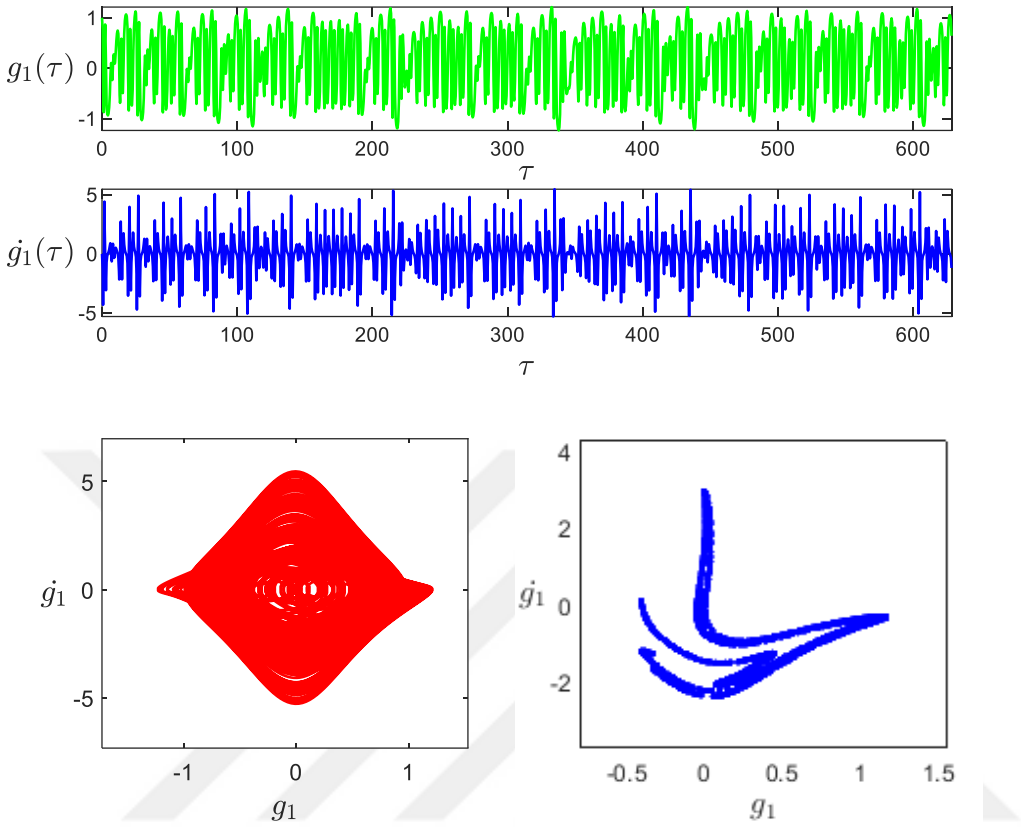
Şekil 3.13'teki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.3'te verilen noktalardan 1 ve 5 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'da konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.



Şekil 3.15: 1 noktasına ait konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4.5, δ=1.6, ζ=0.1, ϖ=6.2).

Şekil 3.1'de verilen kaos kartında beyaz bölgeye denk gelen 1 noktasına ait (α=1, β_0=4.5, δ=1.6, ζ=0.1, ϖ=6.2) Şekil 3.15 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=–0.00766 ve Λ_2=–0.17043 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirinde n=3 nokta bulunmakta. Faz diyagramında kapalı bir yörünge görülmekte. Konum−zaman ve

hız−zaman grafikleri düzgün ve peryodik davranışta olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde peryodik hareket davranışına dair işarettir.



Şekil 3.16: 1 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=7.6, δ=1.6, ζ=0.1, ϖ=5.1).

Şekil 3.12'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgeye denk gelen 10 noktasına ait (α=1, β_0=7.6, δ=1.6, ζ=0.1, ϖ=5.1) Şekil 3.16 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.09549 ve Λ_2=−0.24108 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmakta. Faz diyagramında kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörünge görülmekte. Konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde karmaşık davranışlar tespit edilmiş olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Dalgalanma katsayısı−ortalama dönme hızı düzleminde, bir serbestlik dereceli model kullanılarak kaos incelemesi gerçekleştirilmiştir ve kaotik titreşim davranışlarına rastlanmıştır. Ayrıca sistemin doğrudan bir hızla harekete başlaması mümkün değildir, bir hız aralığını tarayarak gitmesi gerekir, bu takdirde dalgalanma hızının sabit olduğu ama hızın arttığı yönde

kaotik hareketlere rastlamak mümkündür. Bundan dolayı rotor−pala sistemlerinin çalışma koşullarında ortaya çıkabilecek olası kaotik titreşim davranışının ortalama rotor hızının değiştirilerek önlenebilmesinin imkânı doğar.

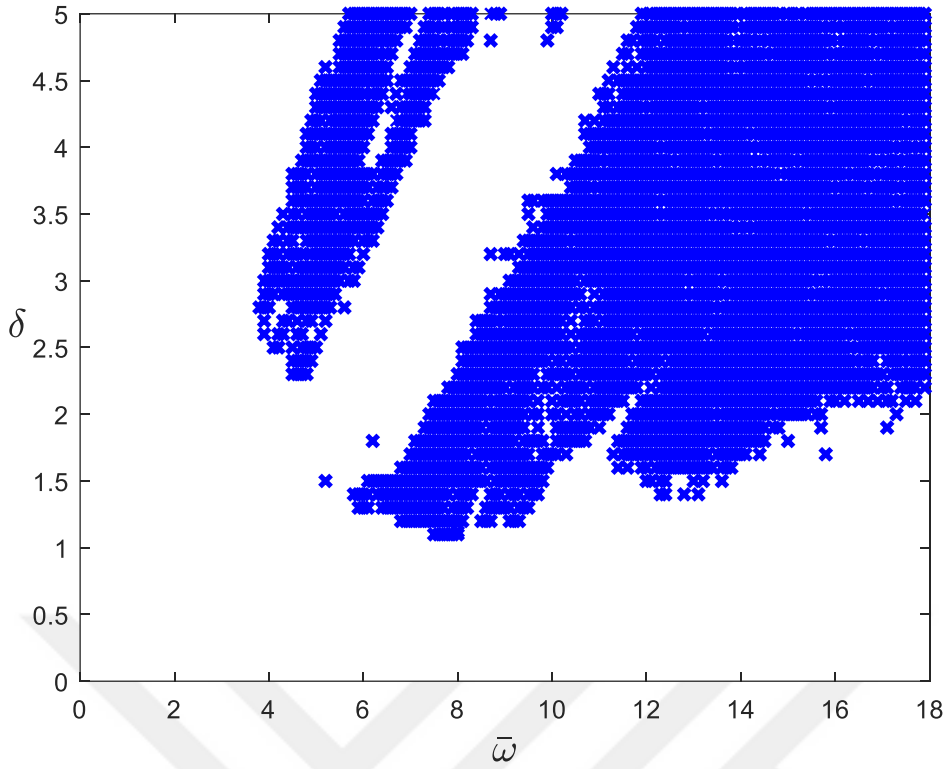
3.2 İki Serbestlik Dereceli Model

Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır. Hareketi kontrol eden 5 parametreden sırasıyla $\delta-\bar{\omega}$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı), $\delta-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma katsayısı−Ortalama dönme hızı), $\alpha-\delta$ (Boyutsuz göbek yarıçapı−Dalgalanma katsayısı), $\alpha-\bar{\omega}$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Boyutsuz göbek yarıçapı), $\beta_0-\alpha$ (Ortalama dönme hızı−Boyutsuz göbek yarıçapı), $\bar{\omega}-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Ortalama dönme hızı) düzlemlerinde Lyapunov üsleri hesabına dayalı kaos kartları oluşturulmuştur. Böylece kaotik sistem davranışına sebep olan parametre bileşimleri elde edilmiştir. Bunlardan nispeten önemli olanlarına dair çatallanma diyagramları elde edilip hareket peryodunun arttığı ve kaotik davrandığı parametrelere ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasvirleri verilerek sonuçların birbirini doğrular nitelikte olduğuna dair bulgular sunulmuştur.

Bu bölümde ele alınan iki serbestlik dereceli model, incelenen sürekli sistemi Bölüm 3.1'de ele alınan bir serbestlik dereceli modele göre daha iyi bir yaklaşıklıkla temsil etmektedir. Bu nedenle burada elde edilen sonuçlar bir serbestlik dereceli modelin doğrulamasının yapılması ve yeterliliğinin tartışılması imkanını verecektir.

3.2.1 $\bar{\omega}-\delta$ düzlemine ait kaos kartı

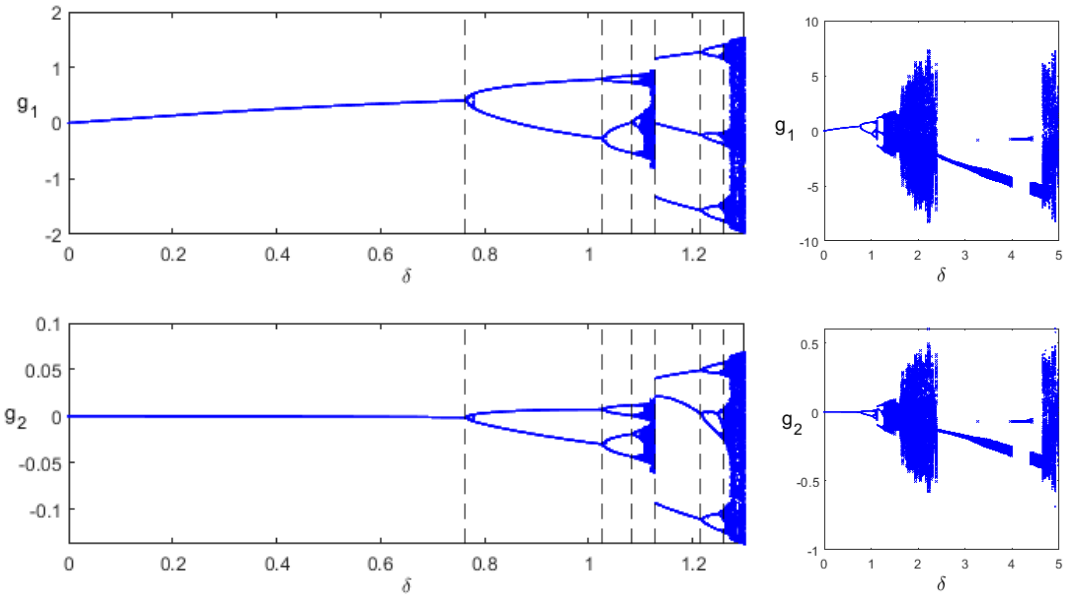
Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve ilkin, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü $\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$ (Boyutsuz göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}-\delta$ (Boyutsuz Dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 9000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.17 elde edilir.



Şekil 3.17: $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı($\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 2 büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede birkaç tekil mavi noktanın, mavi bölgenin içinde ise bazı beyaz noktaların bulunduğu görülmektedir. Ayrıca, mavi bölgelerin içine uzanan ince beyaz hatlar da bulunmaktadır. Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve/veya dalgalanma katsayısı δ'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Ardından, yine $\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$ alınır, dalgalanma frekans da δ dalgalanma katsayısının belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; $\bar{\omega}=8$'e sabitlenip δ'nın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 130 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.18 elde edilir.



Şekil 3.18: δ parametresine göre çatallanma diyagramı a) 0−1.3 aralığı b) 0−5 aralığı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).

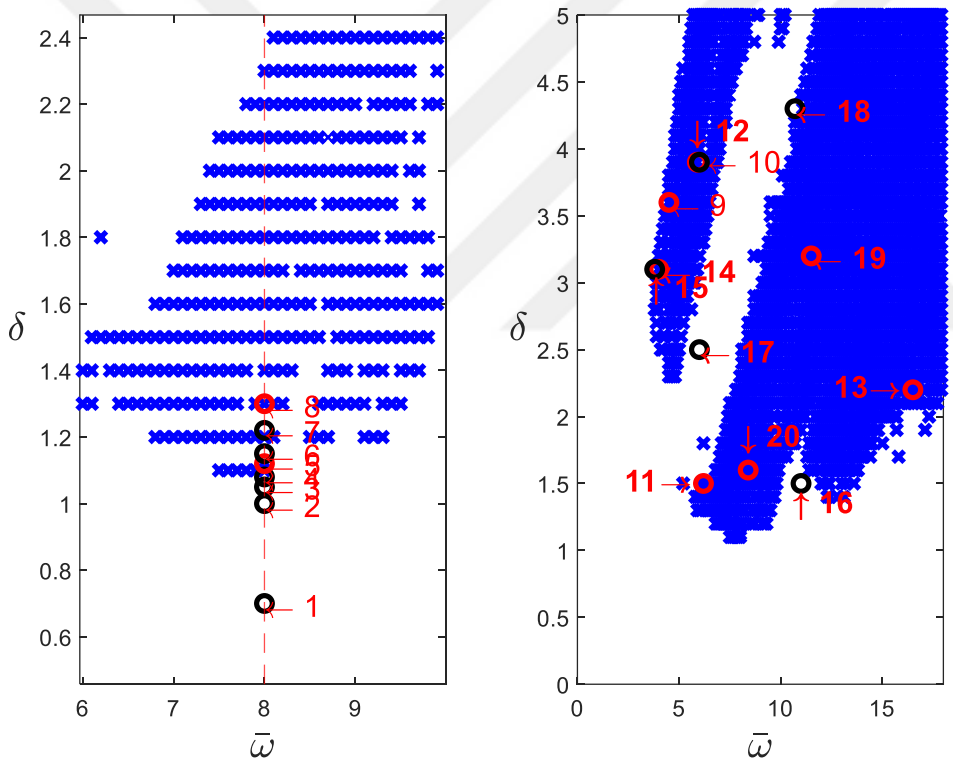
Bu diyagramda her iki grafik için de düşey eksen Poincaré noktalarını, yatay eksen ise çatallanma parametresi δ'yı göstermektedir. Bir veya birden çok sonlu sayıdaki noktalar sistemin peryodik titreşimler, sonsuz noktalar ise sistemin kaotik titreşimler davranışımda bulunacağına işaret etmektedir. Buna göre δ<0.761 iken tek Poincaré noktası ayırd edilir yani hareket T=2π peryoduyla gerçekleşir. δ=0.761'de çatallanma olur ve 0.761<δ<1.027 bölgesinde iki koordinat için de iki Poincaré noktası ayırt edilerek 2T = 4π peryoduyla hareket gerçekleşir. δ=1.027'de tekrar çatallanma olur ve 1.027<δ<1.084 aralığında ayırd edilen noktalar dört tane olur ve peryod tekrar katlanarak T=8π olur. 1.084<δ<1.128, 1.25<δ<1.46 ve 1.5<δ<2.38 bölgelerinde iki koordinata ait Poincaré noktası da sonsuza gider, yani hareketin peryodu sonsuz olur ve bu bölgelerde kaos hakimdir. Bunu dışındaki δ=1.128 değerinde tekrar çatallanma sonucu ve 1.128<δ<1.214 bölgesinde ayırd edilen Poincaré noktaları üç tane olur ve bu bölgede peryod düşerek T=6π olur. δ=1.214 değerinde tekrar çatallanma ve 1.214<δ<1.25 bölgesinde de altı tane Poincaré noktası ayırd edilir ve peryod katlama gerçekleşerek T=12π olur 1.46<δ<1.5'de üç tane Poincaré noktası ayırd edilen ara peryodik bölge bulunmaktadır. 2.38<δ<4.65 arasında peryodik bölge ve sıçrama fenomenleri göze çarpmaktadır. δ>4.65 iken de hareket tekrar kaos bölgesine girerek Poincaré koordinatlarının büyüklüğü sonsuza gitmektedir. Çatallanma diyagramı Lyapunov üsleri hesabına dayanarak elde edilen kaos kartını doğrulayacak şekilde sistem davranışını göstermektedir. Yani sistem parametrelerinin 4 tanesi (α, β_0, ζ, $\bar{\omega}$)

bir değere sabitlendikten sonra dalgalanma katsayısı δ'nın artması, peryod katlanmalarına ve kaotik sistem davranışlarına sebep olabilmektedir.

Burada, Denklem 2.20'de verilen ve kaosa gidişin bir işareti olan Feigenbaum sabitinin varlığını gözlemlemek de mümkündür. Nitekim, ilk kaotik bölgenin hemen öncesinde ilgili oran

$$\delta_F = \frac{1.027 - 0.761}{1.084 - 1.027} = 4.667 \tag{3.1}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca Şekil 3.9'da verilen kaos kartı üzerinden seçilen 20 nokta Şekil 3.11'de verilmiştir. Buradaki ilk 8 nokta Şekil 3.18'de verilen çatallanma diyagramındaki noktaları kapsamaktadır.



Şekil 3.19: Örnek noktalar a) Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, ω̄=8) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

Şekil 3.19'da verilen kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.11a'daki noktalar hem Şekil 3.17'deki kaos kartını hem de Şekil 3.18'deki çatallanma diyagramını doğrulamaktadır. Ayrıca Şekil 3.19b'deki noktalar kaotik ve peryodik bölgelerin sınırlarından ve içlerinden seçilerek

kaos kartını doğrulamak amaçlanmaktadır. Büyük mavi bölge içine ve sınırlarına sırasıyla denk gelen 13, 19, 20 ile 11 noktaları kaotik; 16, 18 noktaları ise peryodiktir. Küçük mavi bölge içinde ve sınırlarında ise 5, 8, 12 ile 9, 14 noktaları kaotik; 6, 7, 10 ile 4, 14 noktaları peryodiktir. Beyaz bölge içinde geriye kalan 1, 2, 3 ve 17 noktaları peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.4'te verilmiştir.

Çizelge 3.4: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

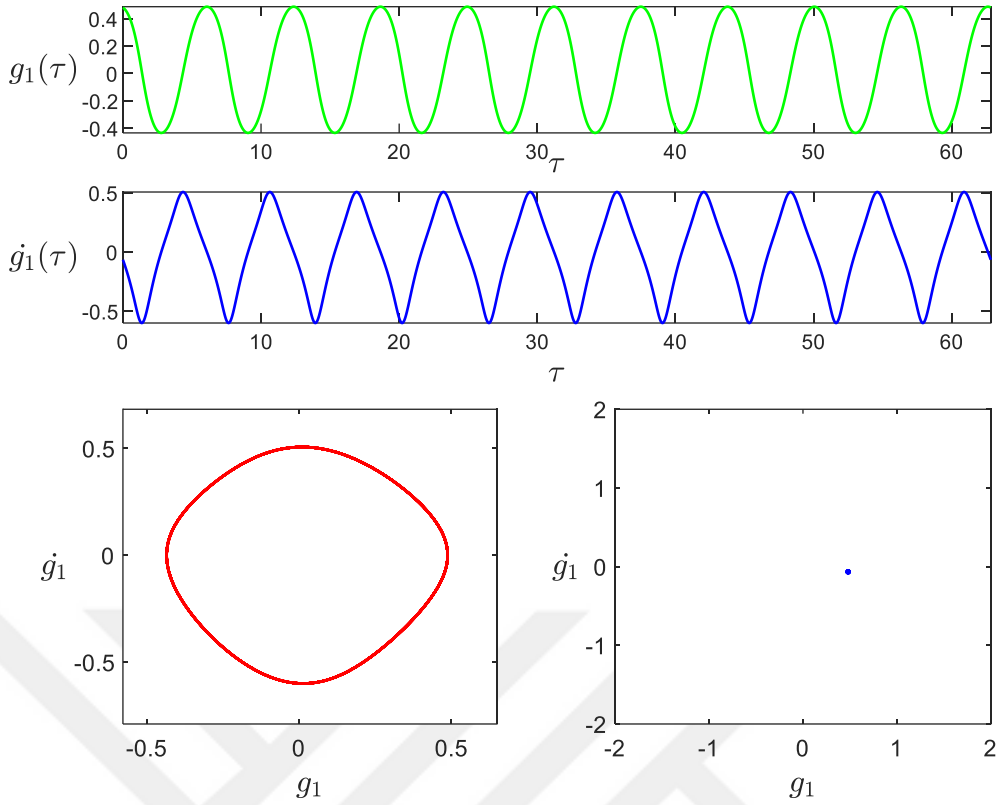
Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	$\bar{\omega}$=8, δ=0.7	1	T	-0.06974 -0.06959 -2.25278 -2.25315	Peryodik
2	$\bar{\omega}$=8, δ=1	2	2T	-0.05471 -0.05660 -1.75721 -1.75836	Peryodik
3	$\bar{\omega}$=8, δ=1.05	4	4T	-0.01258 -0.09391 -1.71416 -1.72043	Peryodik
4	$\bar{\omega}$=8, δ=1.08	6	6T	-0.00322 -0.10523 -1.68931 -1.69028	Peryodik
5	$\bar{\omega}$=8, δ=1.12	∞	∞	0.03538 -0.14169 -1.676201 -1.67794	Kaotik
6	$\bar{\omega}$=8, δ=1.15	3	3T	-0.03603 -0.04155 -1.10363 -1.10507	Peryodik
7	$\bar{\omega}$=8, δ=1.22	6	6T	-0.00096 -0.06909 -1.00244 -1.00337	Peryodik
8	$\bar{\omega}$=8, δ=1.3	∞	∞	0.03946 -0.11791 -1.14380 -1.15389	Kaotik
9	$\bar{\omega}$=4.5, δ=3.6	∞	∞	0.06612 -0.27295 -0.91476 -2.94345	Kaotik
10	$\bar{\omega}$=5.9, δ=3.9	∞	∞	0.06782 -0.23925 -2.28795 -2.46119	Kaotik

Çizelge 3.4 (devam): Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

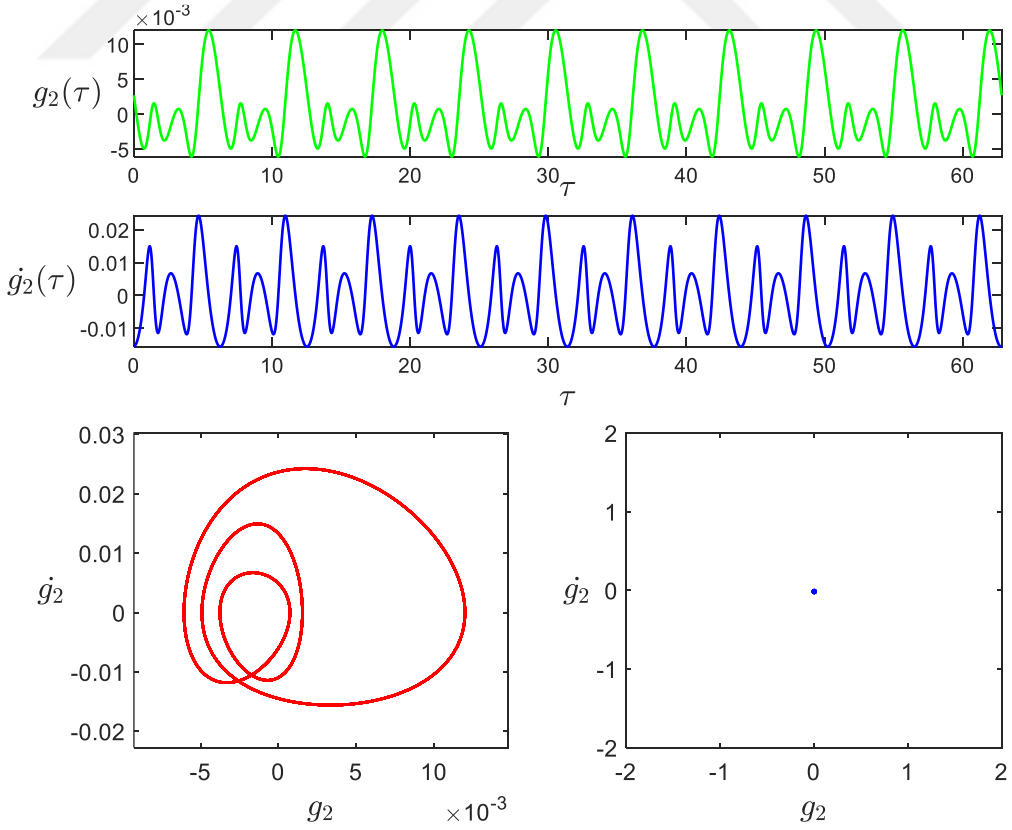
Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
11	$\bar{\omega}$=6.2, δ=1.5	∞	∞	0.09517 -0.23026 -2.05024 -2.05784	Kaotik
12	$\bar{\omega}$= 6, δ=3.9	4	4T	-0.00914 -0.18408 -2.32008 -2.31864	Peryodik
13	$\bar{\omega}$=16.5, δ=2.2	∞	∞	0.02022 -0.06040 -0.63277 -0.73761	Kaotik
14	$\bar{\omega}$=4, δ=3.1	∞	∞	0.05391 -0.29197 -3.51580 -3.62255	Kaotik
15	$\bar{\omega}$=3.8, δ=3.1	1	T	-0.12123 -0.12941 -3.83560 -3.84094	Peryodik
16	$\bar{\omega}$=11, δ=1.5	2	2T	-0.00844 -0.02313 -0.34459 -0.37638	Peryodik
17	$\bar{\omega}$=6, δ=2.5	1	T	-0.00368 -0.01268 -0.24696 -0.26551	Peryodik
18	$\bar{\omega}$=10.7, δ=4.3	1	T	-0.01229 -0.02335 -0.39612 -0.41093	Peryodik
19	$\bar{\omega}$=11.5, δ=3.2	∞	∞	0.03937 -0.05868 -0.11156 -0.30893	Kaotik
20	$\bar{\omega}$=8.4, δ=1.6	∞	∞	0.05081 -0.10808 -0.84216 -0.85753	Kaotik

Buna göre birbirini doğrulaması amacıyla çatallanma diyagramı ile kaos kartı üzerinden verilen noktaların ilk 8 tanesi seçilmiştir. Geriye kalan noktaların tamamı kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinden yalnız birinin pozitif olduğu durumda dahi kaotik davranış gözlenmektedir. Büyük kaotik bölgenin içinde nadiren peryodik noktalar gözlenmiştir ve ayrıca noktalar sınırlardan seçilerek Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartının doğru sonuçlar verdiği görülmektedir.

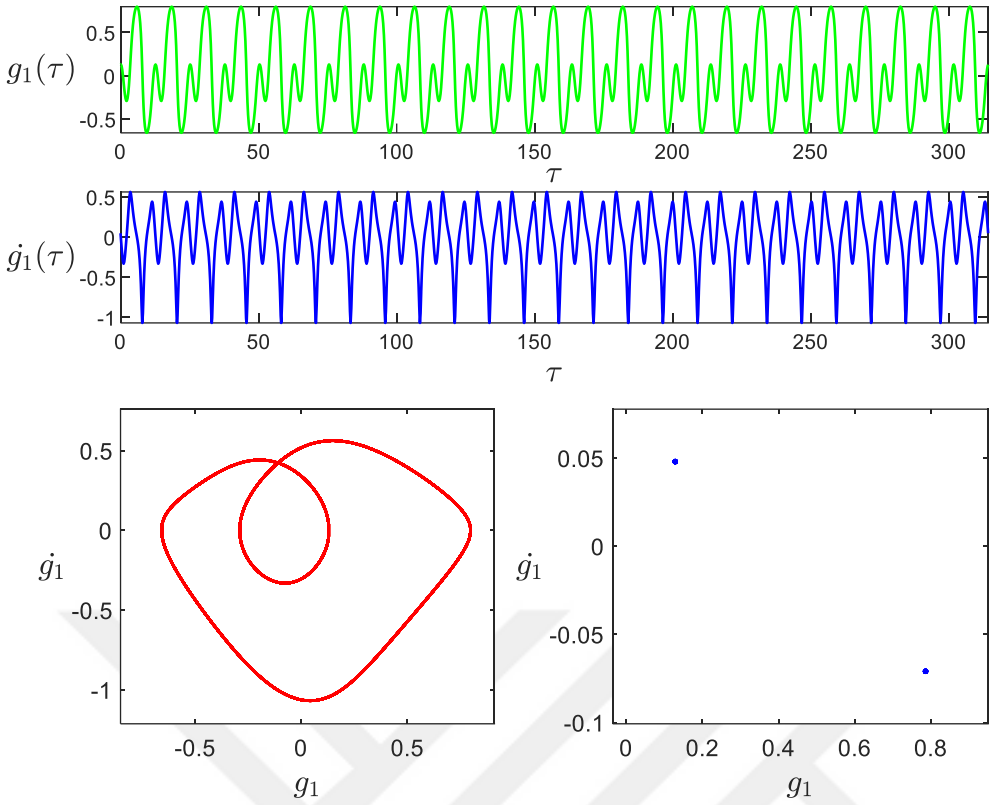
Çizelge 3.4'te verilen noktalardan 1, 2, 3 ve 5 no'lu örnekler aşağıda sırasıyla Şekil 3.20-3.17'da konum-zaman ve hız-zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri bakımından ayrıca incelenecektir.



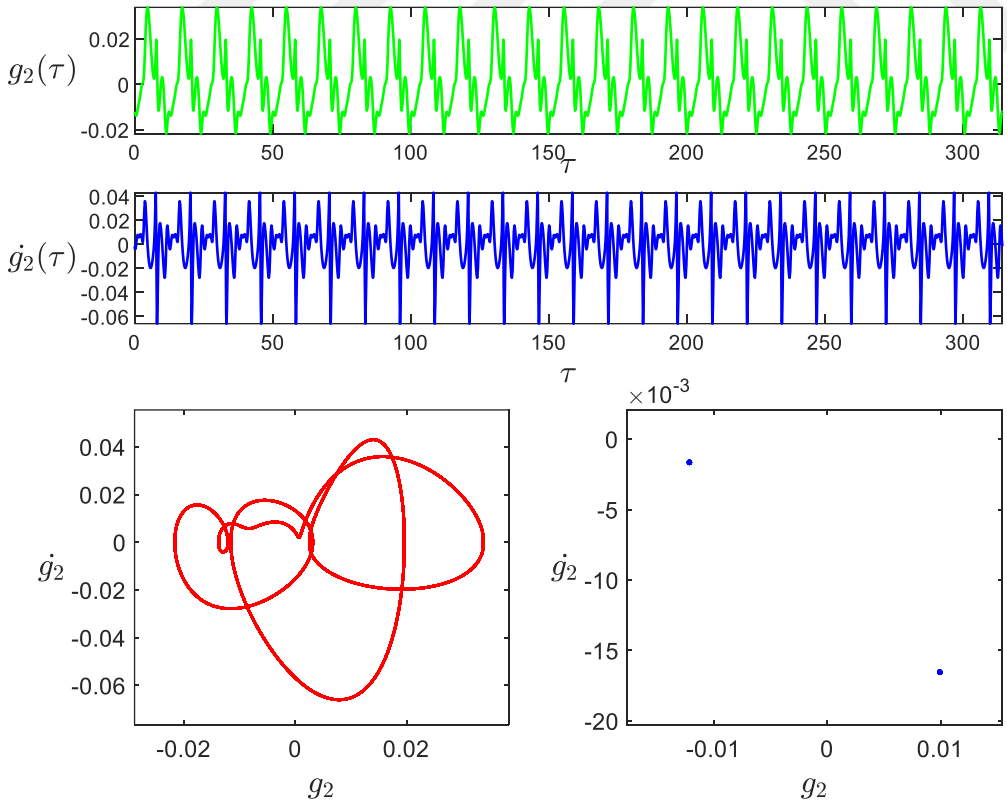
Şekil 3.20: 1 noktasına ait (δ = 0.7) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



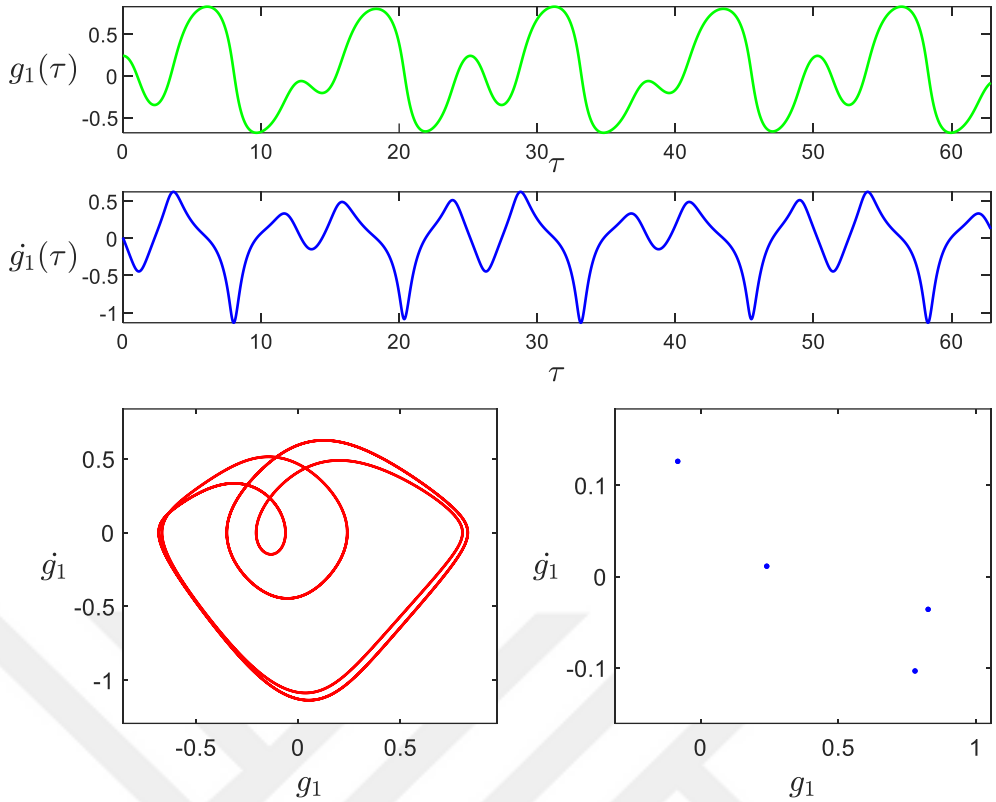
Şekil 3.21: 1 noktasına ait (δ = 0.7) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



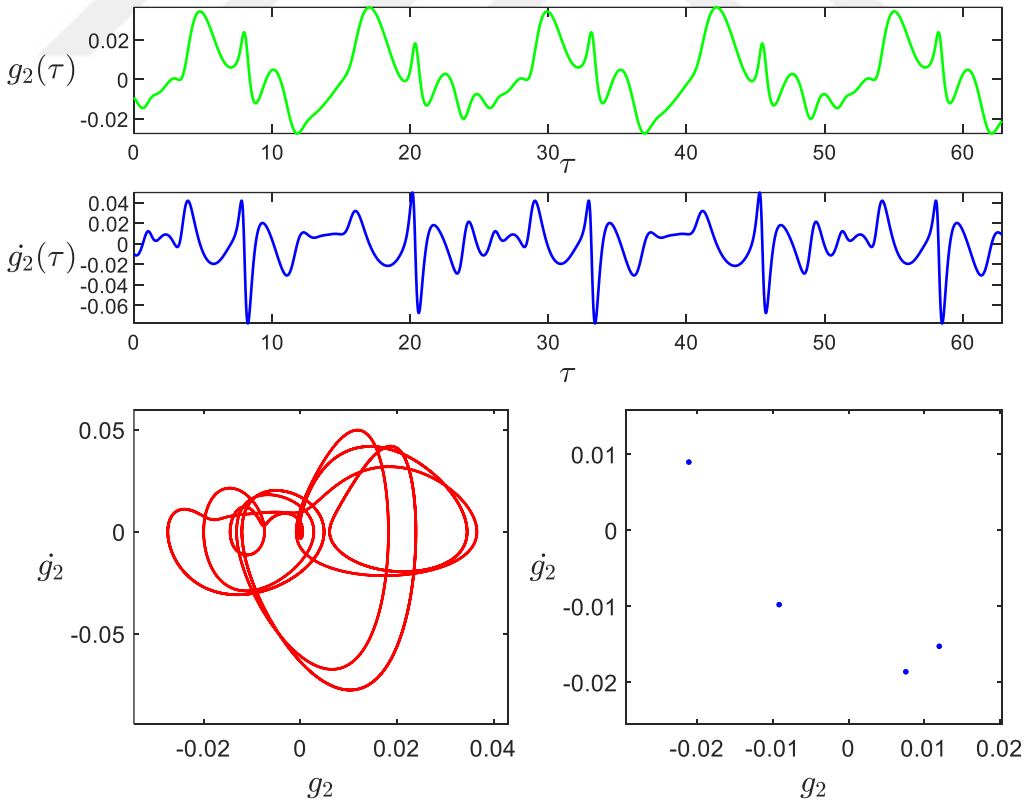
Şekil 3.22: 2 noktasına ait (δ=1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



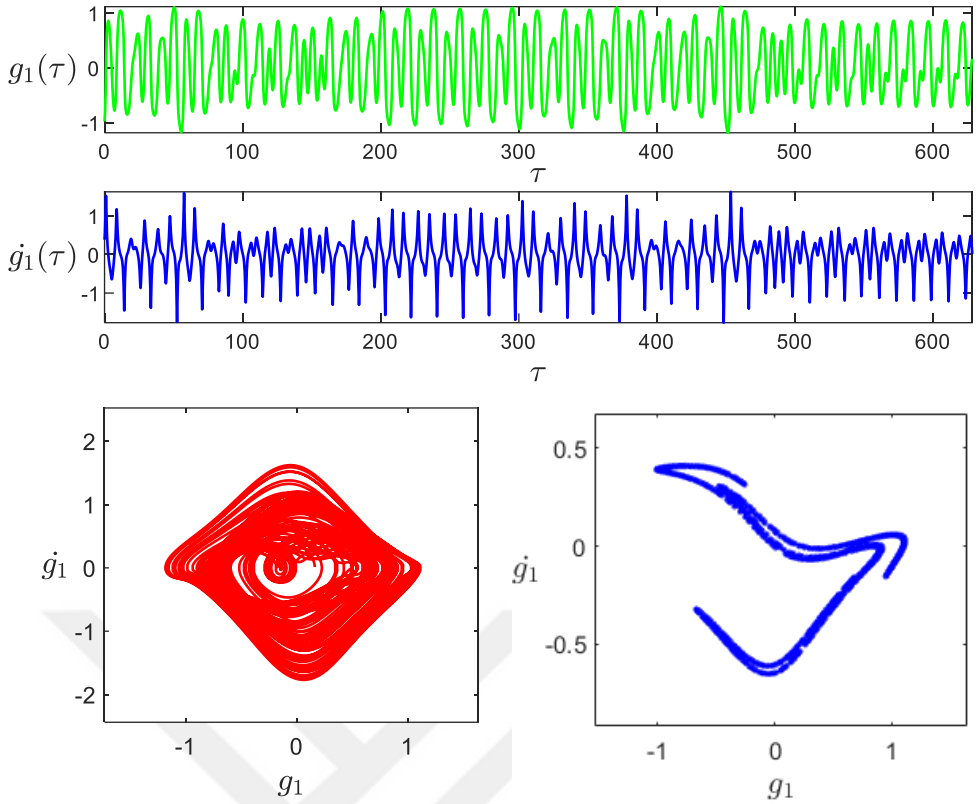
Şekil 3.23: 2 noktasına ait (δ=1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



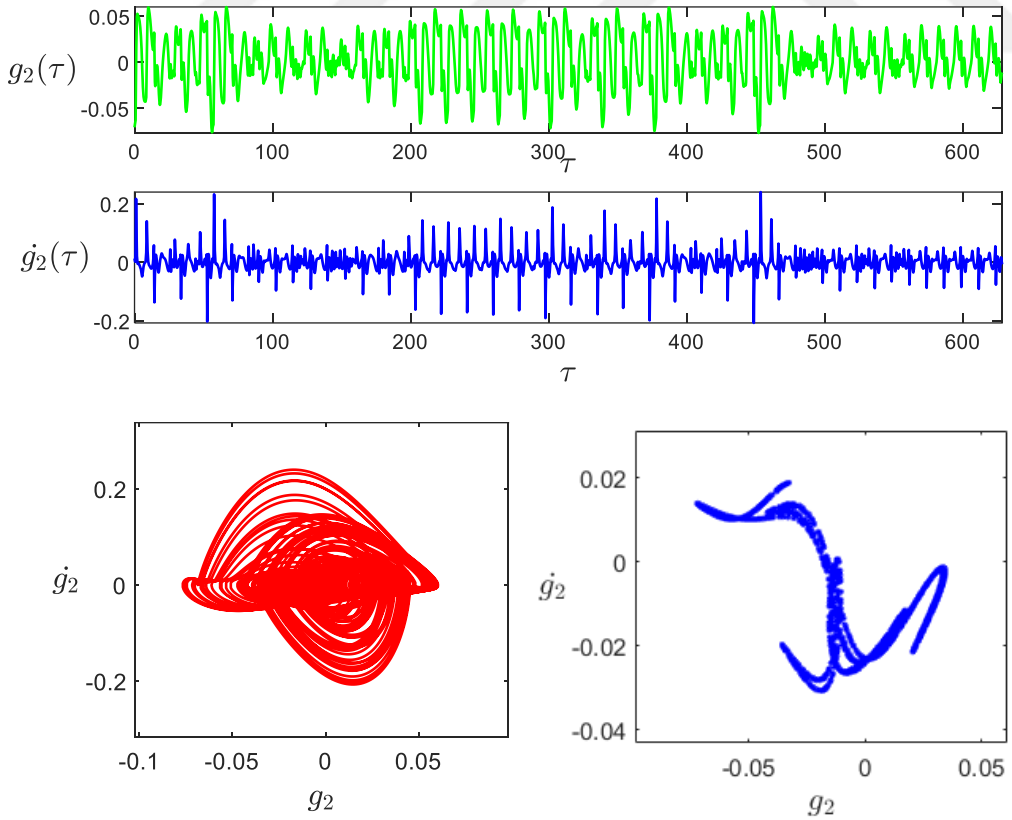
Şekil 3.24: 3 noktasına ait (δ=1.05) için konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



Şekil 3.25: 3 noktasına ait (δ=1.05) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



Şekil 3.26: 5 noktasına ait (δ=1.12) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).



Şekil 3.27: 5 noktasına ait (δ=1.12) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8).

Şekil 3.17'de verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 1 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=0.7, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) Şekil 3.20 ve Şekil 3.21 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.06973, Λ_2=−0.06959, Λ_3=−2.25277 ve Λ_4=−2.25315 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. İki koordinata da ait faz diyagramında bir kapalı eğriden oluşan yörüngeler izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her iki koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

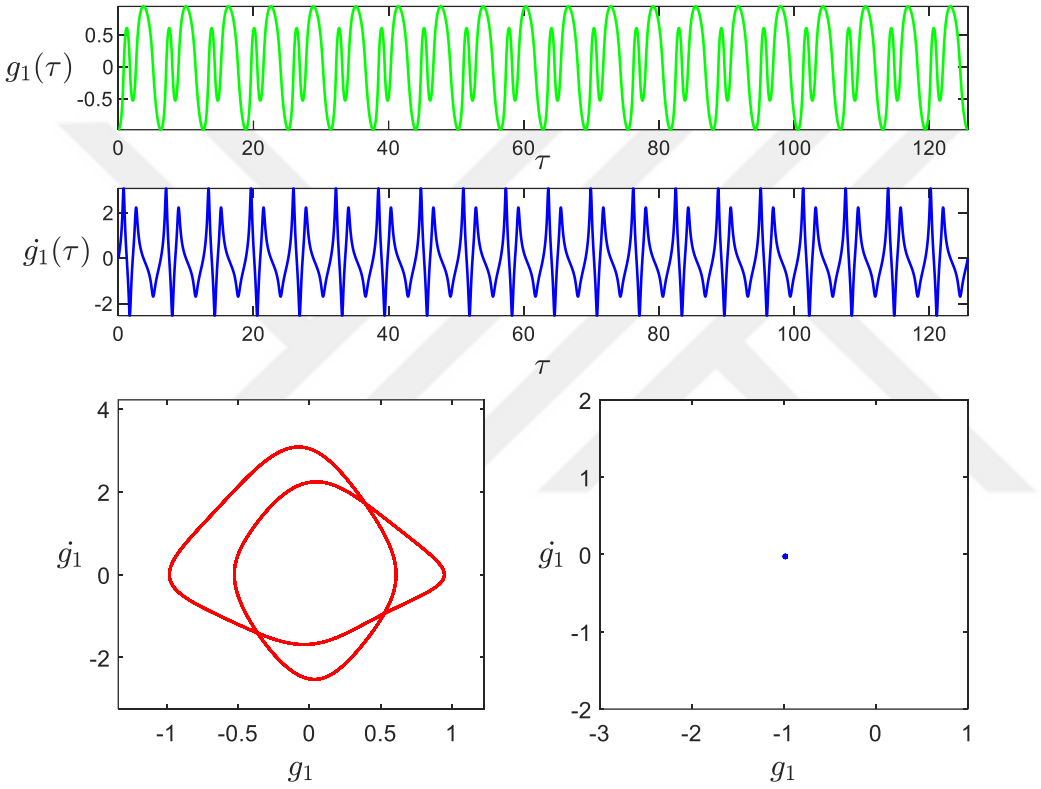
Şekil 3.17'de verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 2 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) Şekil 3.22 ve Şekil 3.23 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.05471, Λ_2=−0.05659, Λ_3=−1.75720 ve Λ_4=−1.75836 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=2 nokta bulunmakta, böylece hareketin 2T=4π peryodlu ve harmonik altı olduğu söylenir. İki koordinata da ait faz diyagramında kapalı eğriden oluşan bir yörünge izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her iki koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

Şekil 3.17'de verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 3 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1.05, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) Şekil 3.24 ve Şekil 3.25 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.01257, Λ_2=−0.09391, Λ_3=−1.71415 ve Λ_1=−1.72042 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=4 nokta bulunmakta, böylece hareketin 4T=8π peryodlu ve harmonik altı olduğu söylenir. İlk koordinata ve ikinci koordinata ait olanda ise birden fazla kez kendi üzerine kapanan bir yörünge izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her iki koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler bu parametre bileşimlerinde peryodik hareket sergileyeceğine dair işarettir.

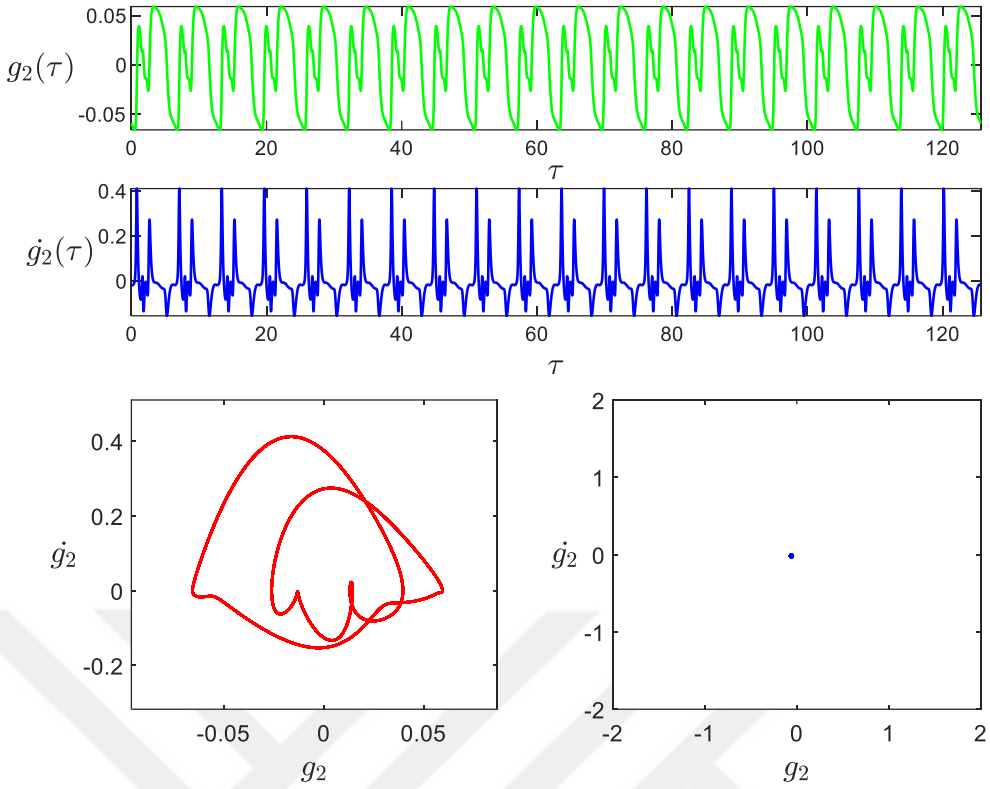
Şekil 3.17'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgeye düşen 5 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1.12, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) Şekil 3.26 ve Şekil 3.27 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.03538, Λ_2=−0.14168, Λ_3=−1.67620 ve Λ_4=−1.67794 olarak hesaplanmıştır ve üslerden bir tanesi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de sonsuz nokta bulunmakta, böylece harekete ait peryodun sonsuz olduğu ve sistemin aperyodik davrandığı söylenir. İlk ve ikinci koordinata ait faz

diyagramlarında yörüngeler tekrarlanmayan ve düzlemi dolduran bir davranış sergiler. Konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde de davranışların rastgele gibi ve düzensiz olduğu görülür. Bütün kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket olacağına dair işarettir.

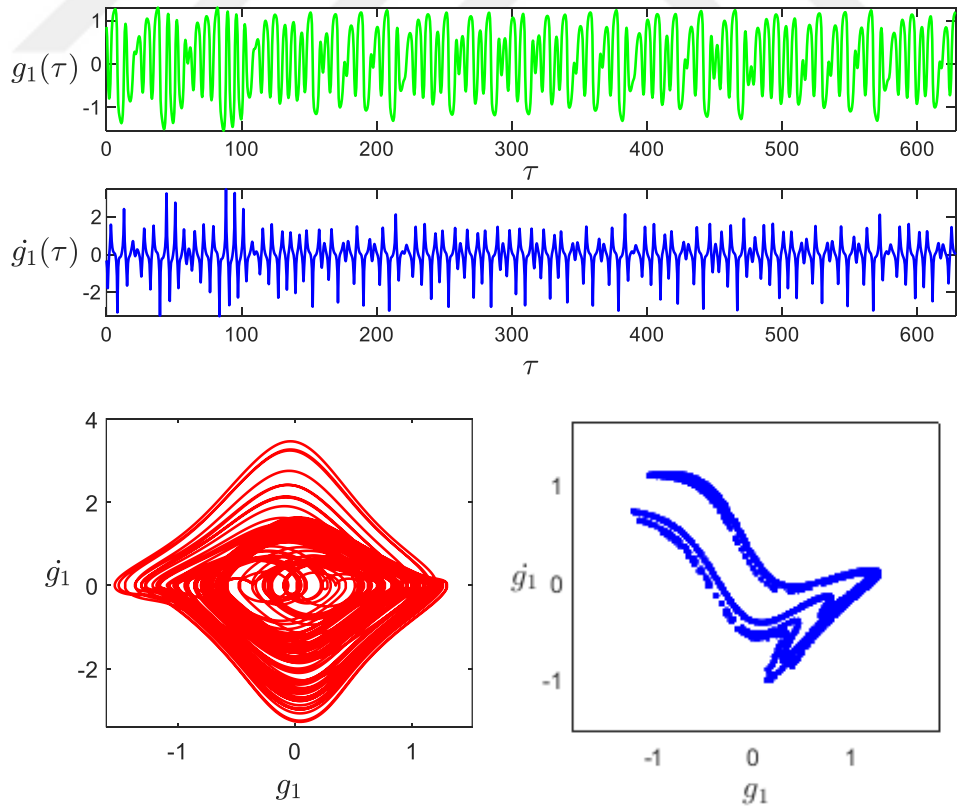
Böylece, seçilen noktalarda, çatallanma diyagramı ve kaos kartının birbirini doğrulayan sonuçları, diğer kriterlerle de doğrulanmış olmaktadır. Ayrıca, kaos kartının hassasiyetini test etmek amacıyla 11, 15 noktaları da incelenerek Şekil 3.28−3.31'de verilmiştir.



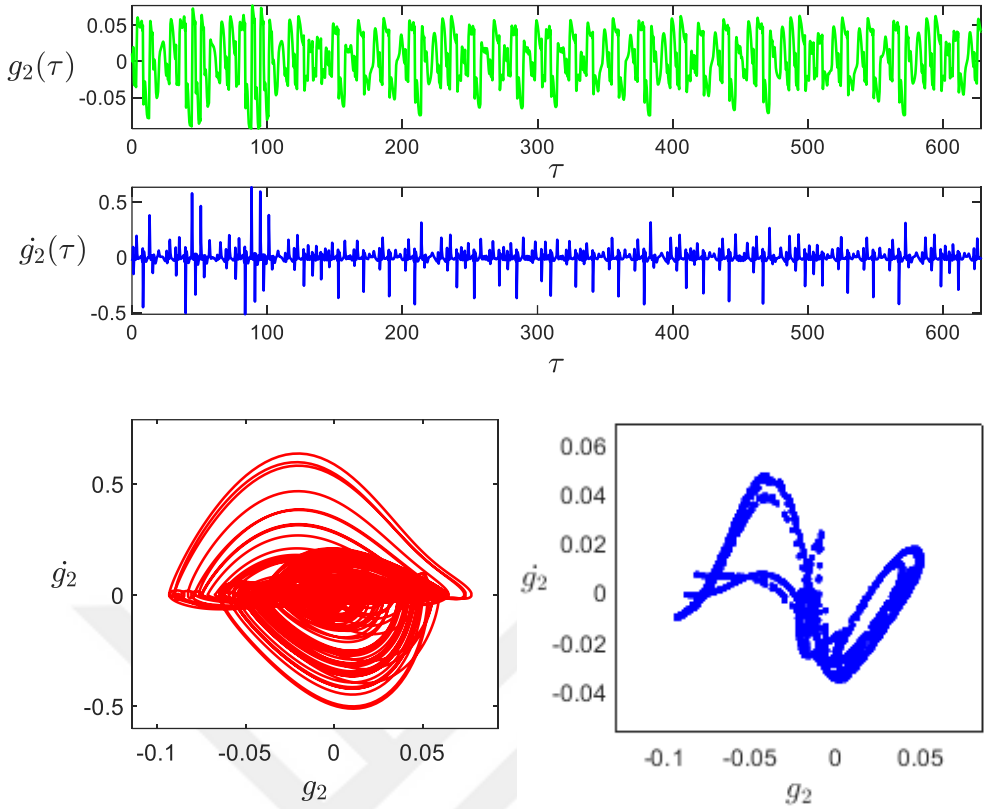
Şekil 3.28: 15 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=3.8).



Şekil 3.29: 15 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=3.8).



Şekil 3.30: 11 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9).



Şekil 3.31: 11 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9).

Şekil 3.17'de verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 15 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=0.7, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=8) Şekil 3.28 ve Şekil 3.29 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.12123, Λ_2=−0.12941, Λ_3=−3.83559 ve Λ_4=−3.84093 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

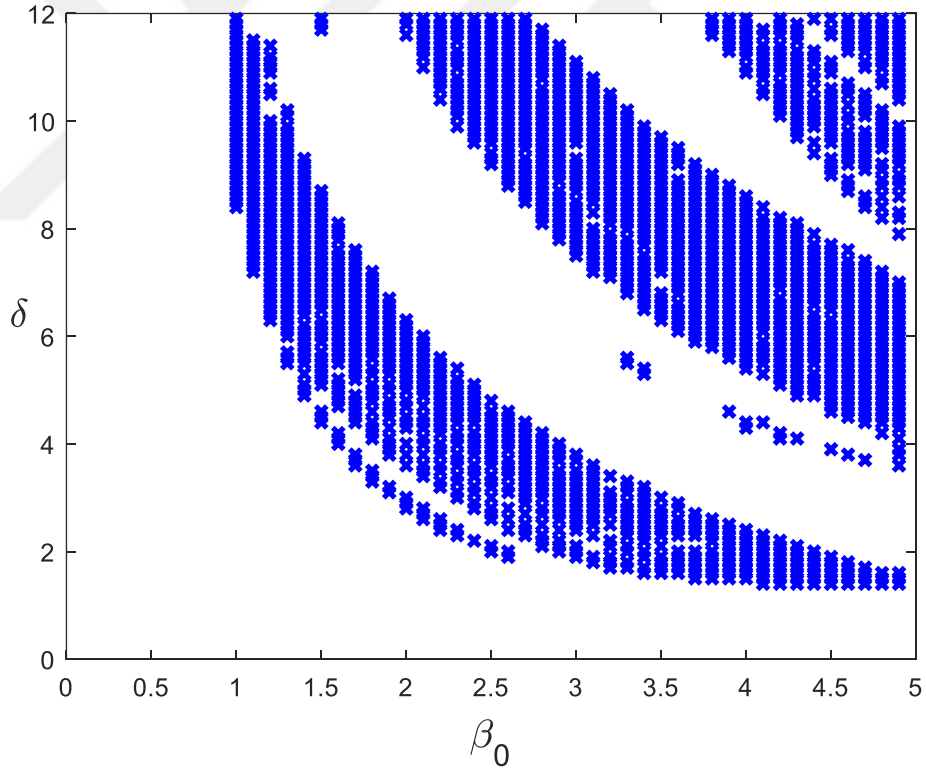
Şekil 3.17'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgeye denk gelen 11 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9) Şekil 3.30 ve Şekil 3.31 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.09517, Λ_2=−0.23025, Λ_3=−2.05024 ve Λ_4=−2.05784 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramı kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmakta. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Böylece kaos kartı üzerinden seçilen 2 noktada da kartın doğrulandığı görülmektedir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Bölüm 3.1.1'de yapılan yorumlar burada geçerliliğini korumaktadır. Dalgalanma frekans−dalgalanma katsayısı düzleminde, iki serbestlik dereceli model kullanılarak yapılan inceleme, bu parametrelerin bazı bileşimlerinde kaotik titreşimler oluşacağını ortaya koymaktadır..

3.2.2 β_0−δ düzlemine ait kaos kartı

Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve ikinci olarak, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7 (Boyutsuz göbek yarıçapı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma frekansı) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu β_0−δ (Ortalama dönme hızı−Boyutsuz Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 6000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.32 elde edilir.

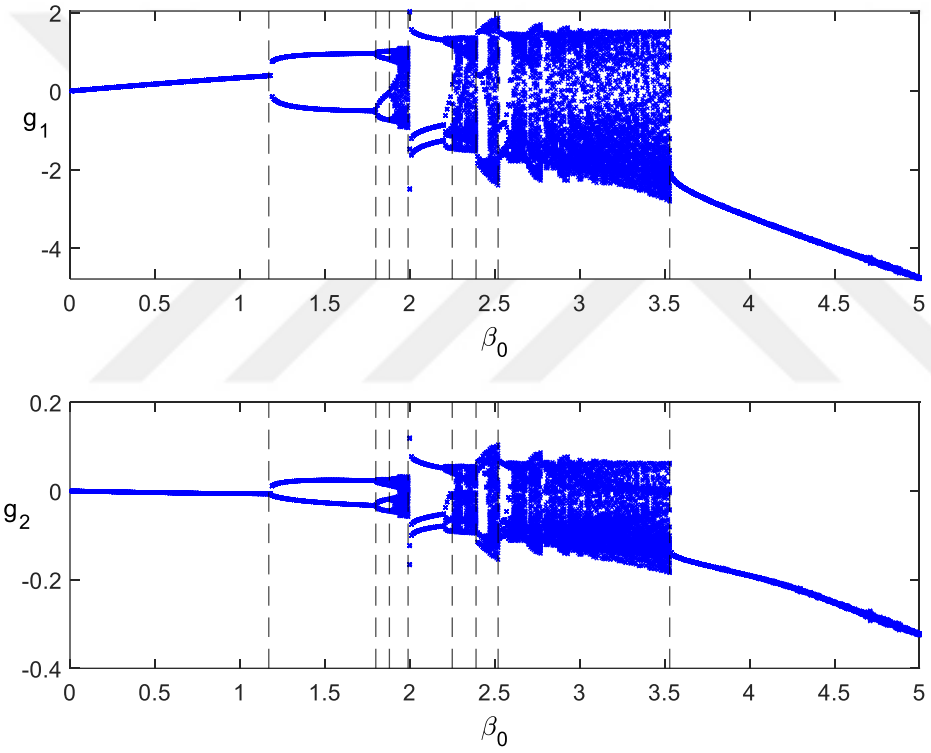


Şekil 3.32: β_0−δ düzleminde kaos kartı (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 3 büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede birkaç tekil mavi

noktanın ve bir mavi hat bulunmakta, mavi bölgelerin içinde 2 ince peryodik hat bulunur ve büyük mavi bölgelerin dışında peryodik bölgeler bulunmaktadır. Dalgalanma katsayısı δ ve/veya ortalama dönme hızı β_0'ın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Ardından, yine α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7 alınır, ortalama dönme hızı β_0'ın belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; δ=3'e sabitlenip β_0'ın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 500 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.33 elde edilir.

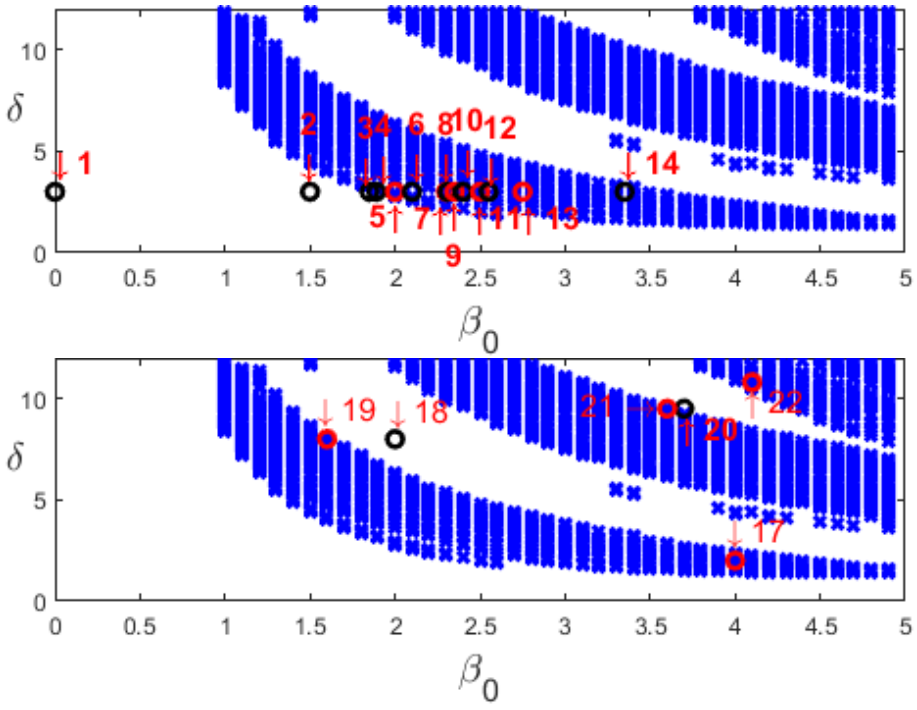


Şekil 3.33: β_0 parametresine göre çatallanma diyagramı (α=1, δ =3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Bu diyagramda her iki grafik için de düşey eksendeki noktalar Poincaré noktalarıdır, yatay eksende ise ortalama dönme hızı β_0 çatallanma parametresi olarak bulunmaktadır. Bir veya birden çok sonlu sayıdaki noktalar sistemin peryodik titreşimler, sonsuz noktalar ise sistemin kaotik titreşimler davranışımda buluncağına işaret etmektedir. Buna göre β_0<1.17 iken tek Poincaré noktası ayırd edilir yani hareket peryodu T=2π olur. β_0=1.17 değerinde bir çatallanma olur ve 1.17<β_0<1.8 bölgesinde iki koordinat için de iki Poincaré noktası ayırd edilir ve 2T=4π peryoduyla hareket

gerçekleşir. β_0=1.8'de yeniden çatallanma olur ve 1.8<β_0<1.88 aralığında ayırd edilen noktalar dört tane olur ve peryod tekrar katlanarak 4T=8π olur. 1.88<β_0<1.99 aralığında çatallanma ile noktalar sonsuza giderek ayırd edilemez hâle gelir ve harekete ait peryod da sonsuza gider. Bu bölgede kaos hakimdir. β_0=1.99 değerinde kaos bölgesindenn çıkan sistemde gelişen çatallanma sonucu Poincaré noktaları üç tane olur ve bu bölgede peryod düşerek 3T=6π olur ve bu durum β_0=2.25 değerine kadar devam eder. Ardından tekrar çatallanma meydana gelerek tekrar kaos bölgesine giren sistem β_0 = 2.39 değerine kadar kaotik davranışa sahip olur. β_0=2.46 değerine kadar ayırd edilen Poincaré noktaları sırasıyla üç ve altıdır. 2.46<β_0<2.5 arasında tekrar bir kaos bölgesi hakim olur. Böylece kaotik–peryodik bölgeler birbiri içine girmiştir. Bu bölgelerdeki ani peryodik bölgeden kaotik bölgeye geçen değişimlere Kriz denir[25]. 2.52<β_0<3.53 değerleri arasındaki bölgede tekrar kaos hakim olur. β_0>3.53 değerlerinde ise tek Poincaré noktası ayırt edilir. Bu noktada hareket T=2π peryoduyla peryodik olur. Böylece sonuçların kaos kartını doğruladığı söylemek mümkündür.

Ayrıca Şekil 3.32'deki kaos kartı ve Şekil 3.33'teki çatallanma diyagramı üzerinden seçilen 14 ortak nokta ve kaos kartından ayrıca seçilen 8 diğer nokta Şekil 3.34'te verilmiştir.



Şekil 3.34: Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, ϖ=4) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1)

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.34a'daki noktalar hem Şekil 3.32'deki kaos kartını hem de Şekil 3.33'teki çatallanma diyagramını doğrular. Ayrıca Şekil 3.34b'de verilen noktalar kaos kartını doğrular. Büyük mavi bölge içine ve sınırlarına sırasıyla denk gelen 7, 9, 11, 13, 17 ile 5, 19 noktaları kaotik, 4, 6, 8, 10, 12 ile 3, 14 noktaları ise peryodiktir. Ortada kalan mavi bölge sınırlarında ise 21 noktası kaotik, 20 noktası peryodiktir. Küçük mavi bölgenin içinde 22 noktası kaotiktir. Beyaz bölge içinde geriye kalan 1, 2 ve ara bölgede kalan 18 noktaları peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.5'te verilmiştir.

Çizelge 3.5: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Numara	Parametre Kombinasyonu (β_0, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	β_0=0, δ=3	1	T	-0.08760 -0.08761 -2.01555 -4.89563	Peryodik
2	β_0=1.5, δ=3	2	2T	-0.06152 -0.06188 -2.01111 -2.01161	Peryodik
3	β_0=1.85, δ=3	4	4T	-0.05911 -0.06094 -1.96036 -1.96055	Peryodik
4	β_0=1.89, δ=3	8	8T	-0.05097 -0.06966 -1.96894 -1.97263	Peryodik
5	β_0=2, δ=3	∞	∞	0.05107 -0.16177 -1.72914 -1.74597	Kaotik
6	β_0=2.1, δ=3	3	3T	-0.03881 -0.05050 -1.31160 -1.31239	Peryodik
7	β_0=2.3, δ=3	∞	∞	0.04699 -0.15200 -1.60944 -1.61796	Kaotik
8	β_0=2.31, δ=3	8	8T	-0.01295 -0.08824 -1.56770 -1.56859	Peryodik
9	β_0=2.35, δ=3	∞	∞	0.05813 -0.16421 -1.61113 -1.61966	Kaotik

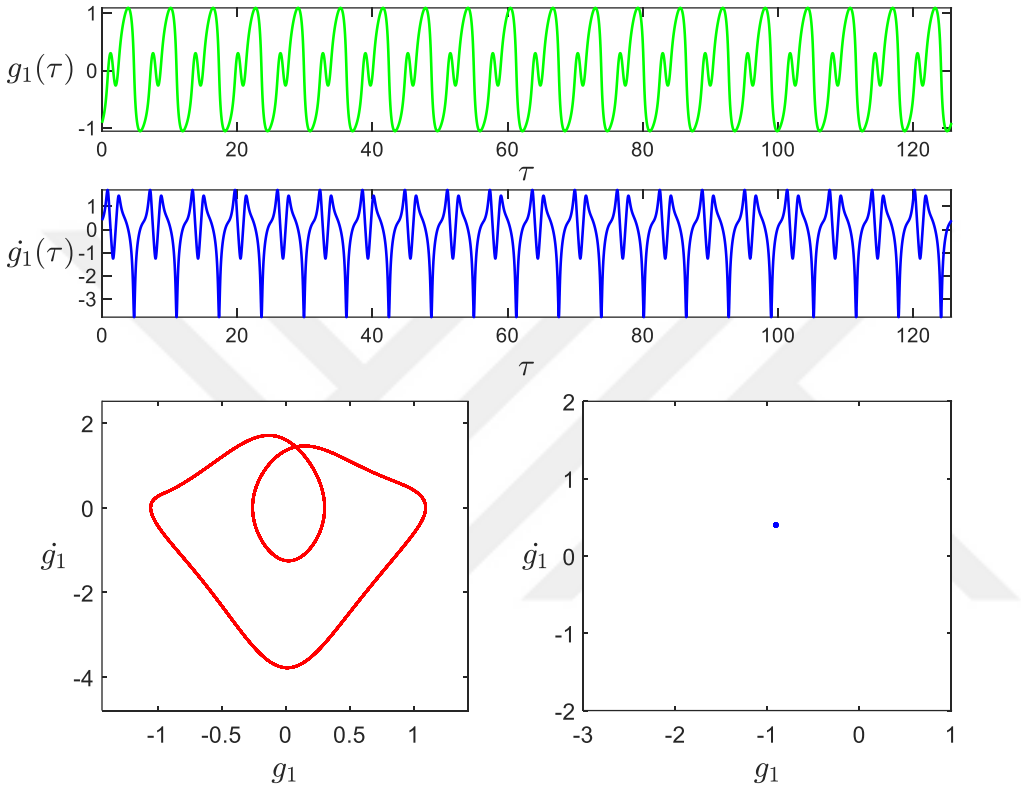
Çizelge 3.5 (devam): Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Numara	Parametre Kombinasyonu (β_0, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
10	β_0=2.4, δ=3	4	4T	-0.02023 -0.05809 -1.15191 -1.15236	Peryodik
11	β_0=2.5, δ=3	∞	∞	0.03595 -0.11284 -1.15827 -1.16731	Kaotik
12	β_0=2.55, δ=3	4	4T	-0.03736 -0.04253 -1.16113 -1.18816	Peryodik
15	β_0=3.5, δ=3	∞	∞	0.03955 -0.11199 -1.12562 -1.13858	Kaotik
16	β_0=3.6, δ=3	1	T	-0.01655 -0.02214 -0.63425 -0.72747	Peryodik
17	β_0=4, δ=2	∞	∞	0.07264 -0.17543 -1.54456 -1.54792	Kaotik
18	β_0=2, δ=8	1	T	-0.05648 -0.06109 -1.79268 -1.79248	Peryodik
19	β_0=1.6, δ=8	∞	∞	0.06802 -0.17269 -1.54772 -1.56792	Kaotik
20	β_0=3.7, δ=9.5	1	T	-0.07096 -0.07436 -2.17335 -2.17440	Peryodik
21	β_0=3.6, δ=9.5	∞	∞	0.01502 -0.00795 -0.07086 -0.09106	Kaotik
22	β_0=4.1, δ=10.8	∞	∞	0.03341 0.00033 -0.00445 -0.03125	Kaotik

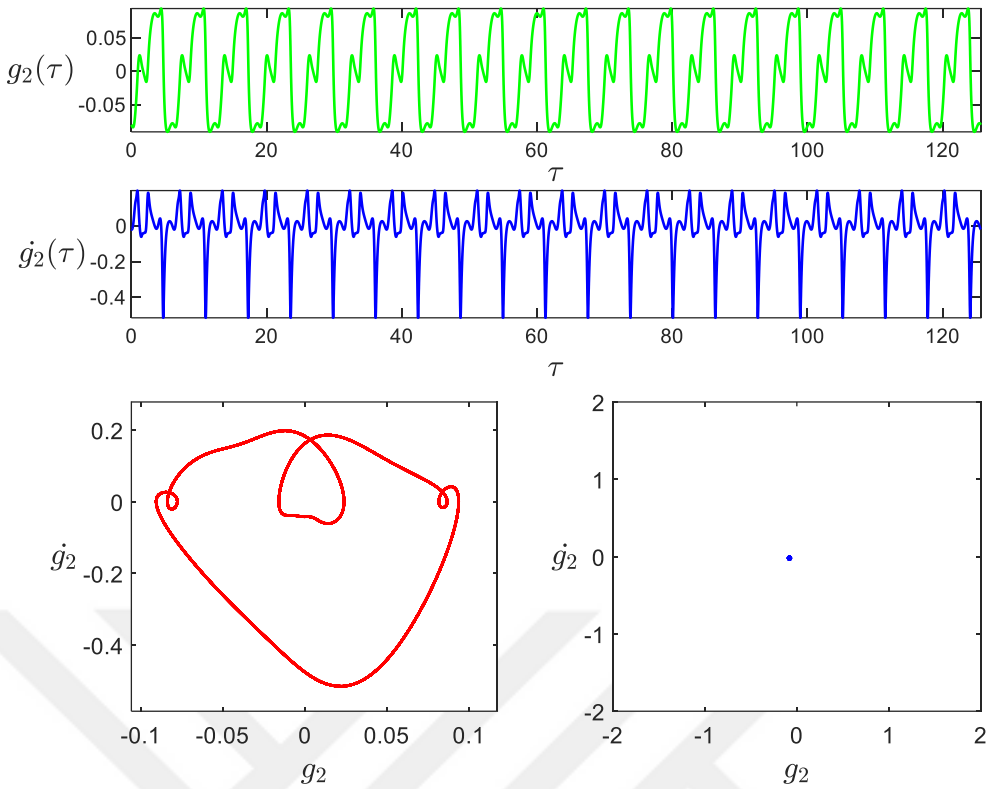
Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar (iki tanesi pozitif olan örneklere de rastlanmıştır) kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her dört üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında harmonik ve harmonik altı titreşim

davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

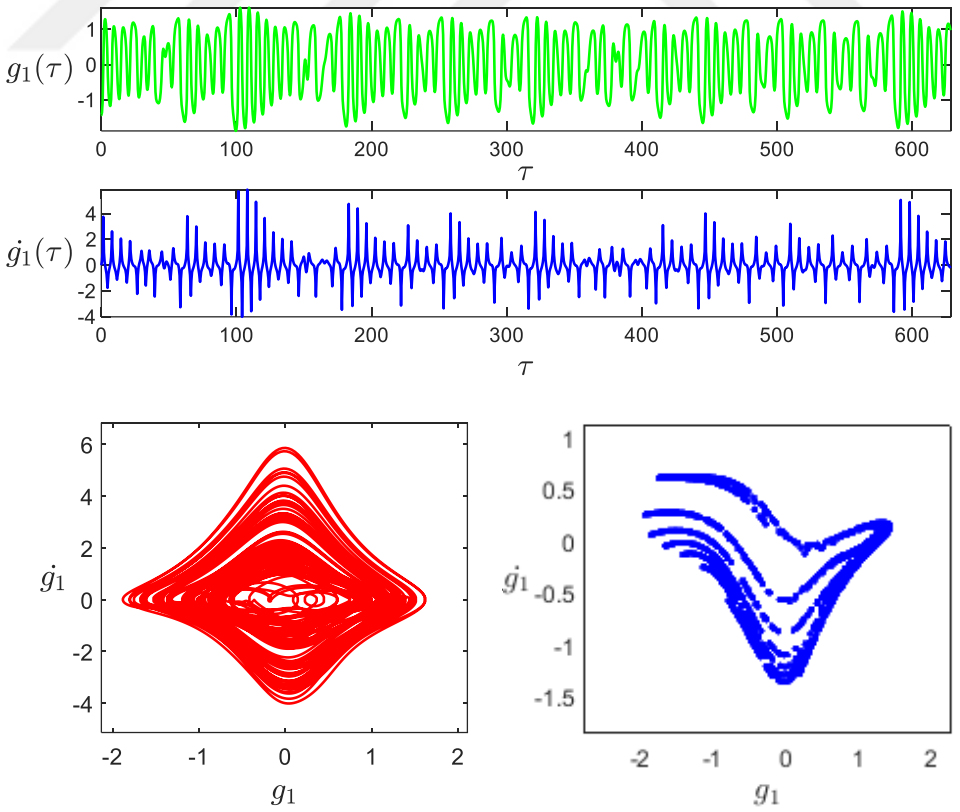
Şekil 3.32'deki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.5'te verilen noktalardan 17 ve 20 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.35–3.38'de konum–zaman ve hız–zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.



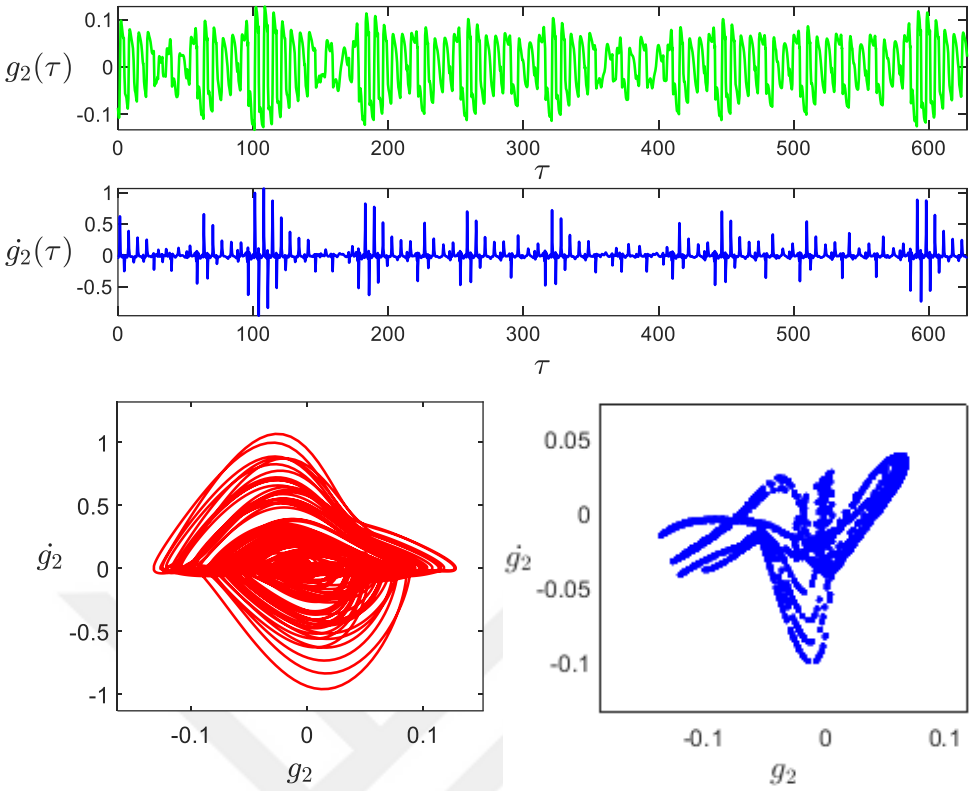
Şekil 3.35: 20 noktasına ait konum–zaman ve hız–zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=3.7, δ=9.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).



Şekil 3.36: 20 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=3.7, δ=9.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).



Şekil 3.37: 17 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).



Şekil 3.38: 17 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

Şekil 3.32'de verilen kaos kartında ortadaki ve köşedeki mavi bölge arasında ve orta mavi bölge sınırına düşen 15 noktasına ait (α=1, β_0=3.7, δ=9.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7) Şekil 3.27 ve Şekil 3.35 ve Şekil 3.36 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=–0.07096, Λ_2=–0.07436, Λ_3=–2.17335 ve Λ_4=–2.17440, olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

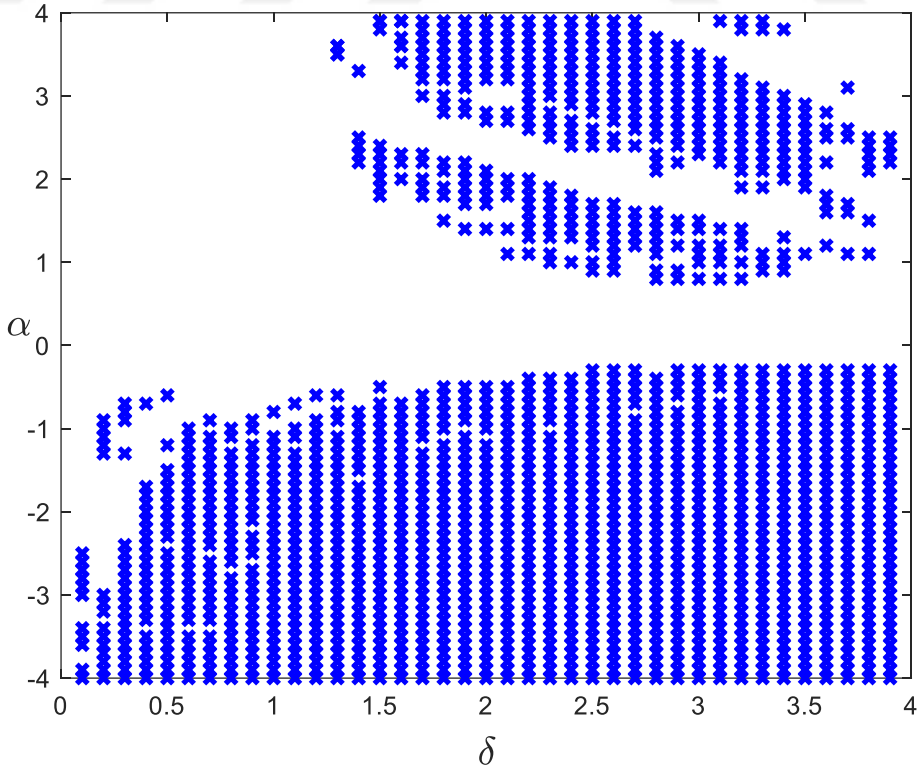
Şekil 3.32'de verilen kaos kartında en dıştaki büyük mavi bölgeye denk gelen 17 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9) Şekil 3.37 ve Şekil 3.38 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1= 0.07264, Λ_2=–0.17543, Λ_3=–1.54456ve Λ_4=–1.54792 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramı kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmakta. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Böylece, çatallanma diyagramının kaos kartını doğruladığı görülmektedir. Öte yandan kaos kartı üzerinden seçilen 2 nokta da kaos kartını doğrulayan sonuçlar vermiştir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Bölüm 3.1.2'de yapılan yorumlar burada geçerliliğini korumaktadır Dalgalanma katsayısı ile ortalama dönme hızının oluşturduğu düzlemde, iki serbestlik dereceli model kullanılarak kaos olasılığı incelenmiştir. Mildeki davranışın bir sonucu olarak ortaya çıkan dalgalanma katsayısı ile ortalama dönme hızı parametrelerinin bazı bileşimlerinde kaotik titreşim meydana gelir. Bundan dolayı rotor−pala sistemlerinin çalışma koşullarında ortaya çıkabilecek olası kaotik titreşim davranışları ortalama rotor hızının değiştirilmesi ile önlenebilir.

3.2.3 δ−α düzlemine ait kaos kartı

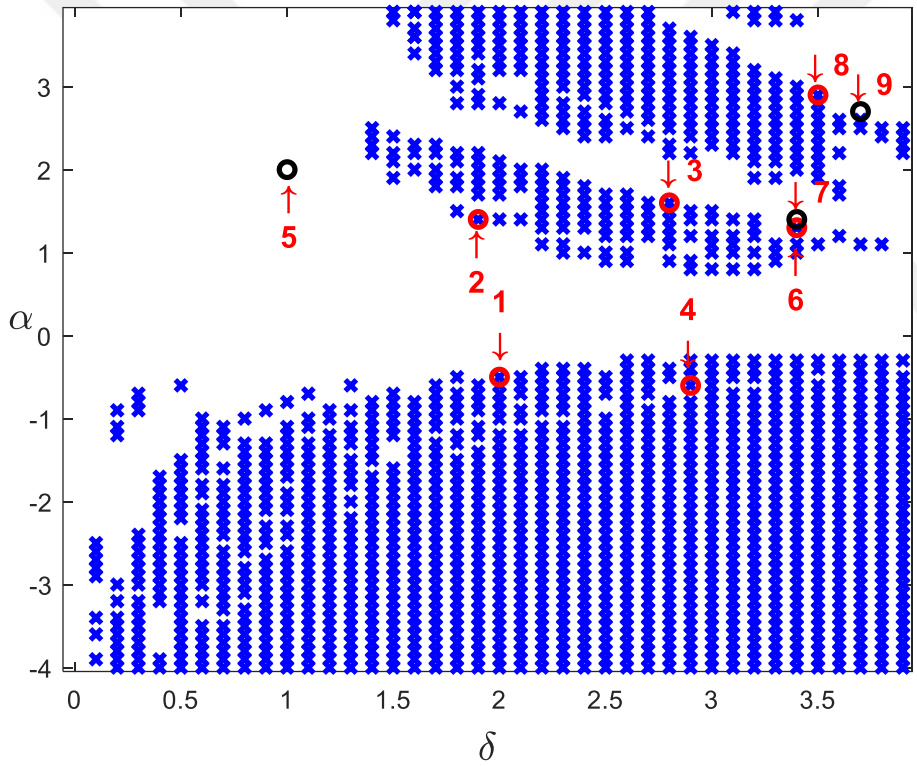
Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve üçüncü olarak, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=1.6 (Ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma frekansı) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu δ−α (Boyutsuz göbek yarıçapı−Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 3200 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.39 elde edilir.



Şekil 3.39: δ−α düzleminde kaos kartı(β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. $\alpha<0$ iken (içe yönelik kiriş) büyük bir mavi bölgenin yanısıra kaotik noktalar bulunmaktadır. Mavi bölgenin iç kısmında yer yer peryodik noktalar da vardır. $\alpha>0$ iken (dışa yönelik kiriş) iki tane kaotik bölge ve arasında peryodik bir başka bölge mevcuttur. Ayrıca kaotik birkaç nokta da bulunmaktadır. Boyutsuz göbek çapı $|\alpha|$'nın küçük olduğu bölgelerde dalgalanma katsayısı δ'nın kaotik hareketin ortaya çıkmasına sebep olmayacağı fakat boyutsuz göbek çapı $|\alpha|$ ve/veya dalgalanma katsayısı δ'nın ikisinden birinin büyük olması halinde kaotik hareketin ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Şekil 3.39'daki kaos kartından ayrıca seçilen 9 nokta Şekil 3.40'de verilmiştir.



Şekil 3.40: Kaos kartında seçilen örnek noktalar (β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

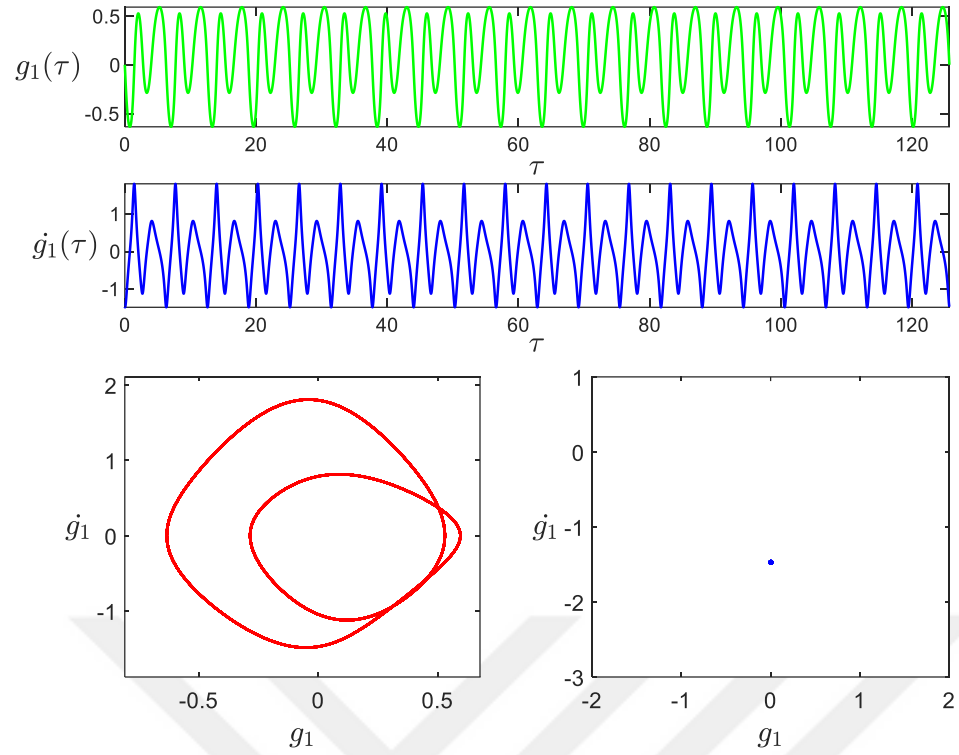
Buna göre kart üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Ayrıca Şekil 3.40'taki noktalar kaotik ve peryodik bölgelerin sınırlarından ve içlerinden seçilerek kaos kartını doğrulamak amaçlanmaktadır. Alttaki büyük mavi bölge içinde 4 sınırında 1 noktası kaotiktir. Ortadaki ara mavi bölge sınırında 2, 3, 6 noktaları kaotik, 7 noktası peryodiktir. Küçük mavi bölge sınırında 8 noktası kaotik, 9

noktası peryodiktir. Beyaz bölge içinde geriye kalan 5 noktası da peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.6'da verilmiştir.

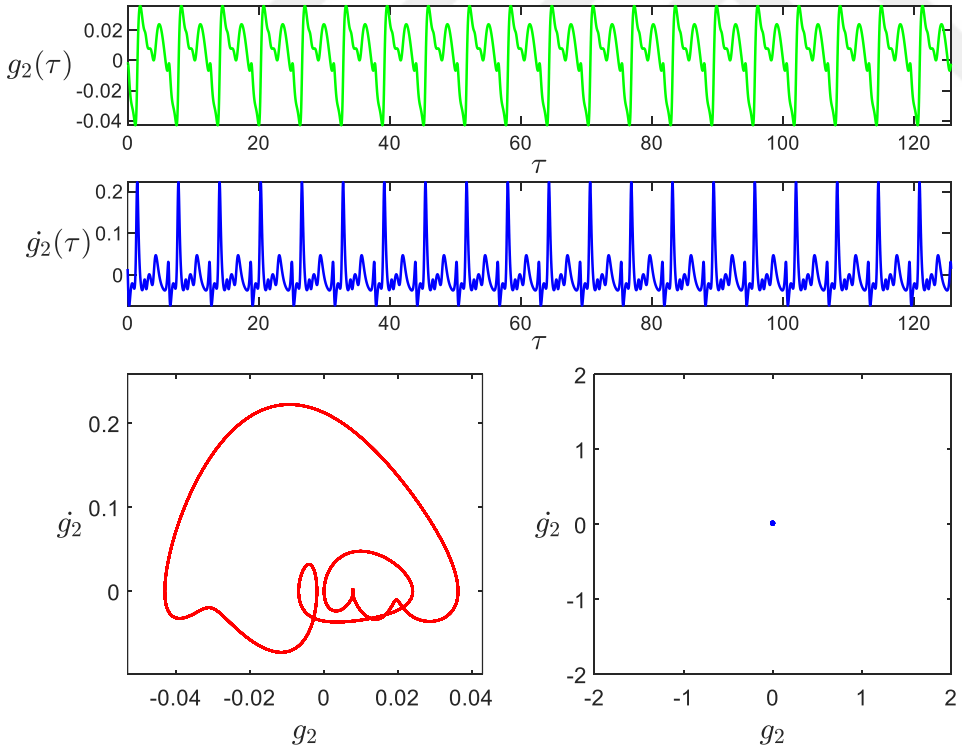
Çizelge 3.6: Kaos kartına göre örnek noktalar (β_0=5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

Numara	Parametre Kombinasyonu (δ, α)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	δ=2, α=-0.5	∞	∞	0.04714 -0.13658 -1.40637 -1.50589	Kaotik
2	δ=1.9, α=1.4	∞	∞	0.03126 -0.23493 -3.17662 -3.19134	Kaotik
3	δ=2.8, α=1.6	∞	∞	0.07464 -0.25623 -2.58188 -2.62361	Kaotik
4	δ=2.9, α=-0.6	∞	∞	0.01918 -0.05292 -0.52888 -0.61261	Kaotik
5	δ=1, α=2	1	T	-0.11319 -0.11361 -3.56629 -3.57571	Peryodik
6	δ=3.4, α=1.3	∞	∞	0.05210 -0.23099 -2.57719 -2.59684	Kaotik
7	δ=3.4, α=1.4	1	T	-0.08841 -0.09996 -2.77350 -2.77862	Peryodik
8	δ=3.5, α=2.9	∞	∞	0.03983 -0.06045 -0.52502 -0.59100	Kaotik
9	δ=3.7, α=2.7	2	2T	-0.06445 -0.29095 -2.42020 -2.79902	Peryodik

Buna göre verilen noktalarda kaos kartı doğrulanmaktadır. Sınır bölgelerinden ve iç noktalardan seçilen kaotik ve peryodik örnekler bunu onaylamaktadır. Şekil 3.39'daki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.6'da verilen noktalardan 5 ve 6 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri Şekil 3.41−3.44'te verilmiştir.



Şekil 3.41: 5 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=5, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

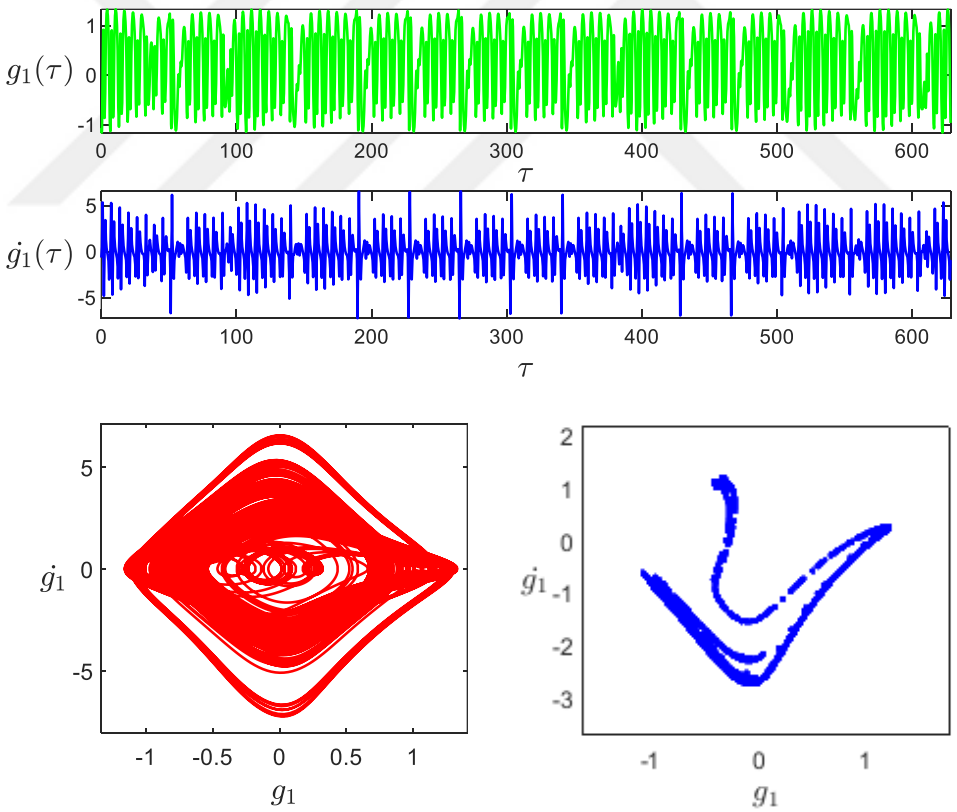


Şekil 3.42: 5 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=5, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

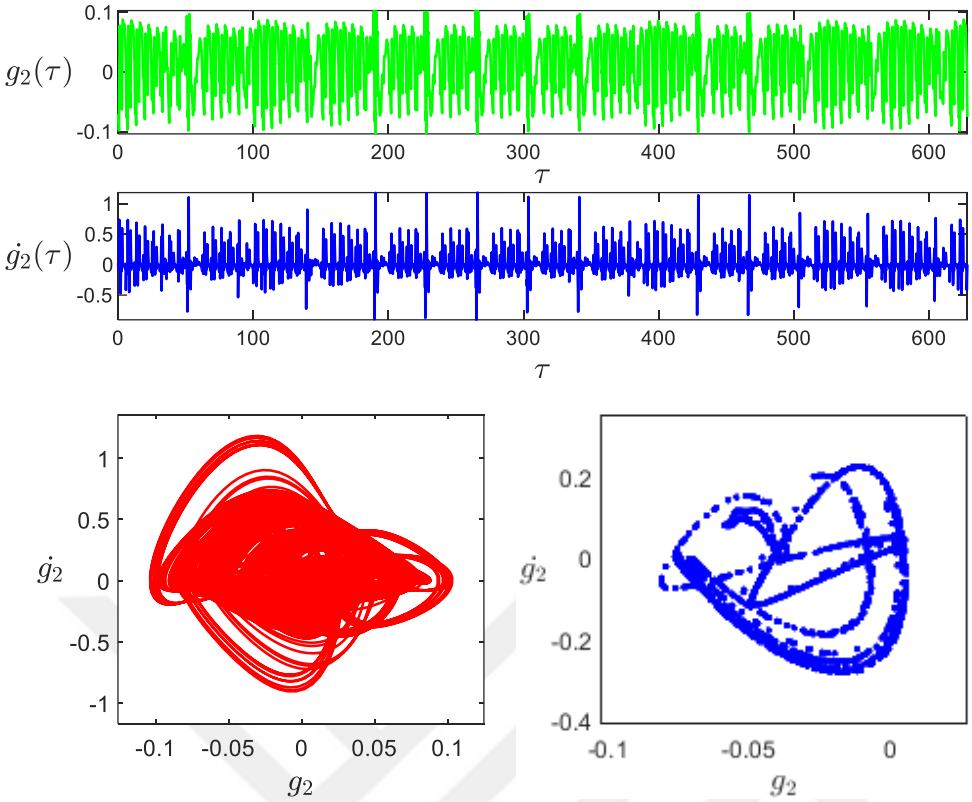
Şekil 3.39'de verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 5 noktasına ait (α=1, β_0=5, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5) Şekil 3.41 ve Şekil 3.42 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov

üsleri Λ_1=–0.11319, Λ_2=–0.11361, Λ_3=–3.56629 ve Λ_4=–3.57571 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

Şekil 3.39'da verilen kaos kartında aradaki küçük mavi bölgeye denk gelen 6 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=3.9, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5.9) Şekil 3.42 ve Şekil 3.43 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.05209, Λ_2=–0.23098, Λ_3=–2.57719 ve Λ_4=–2.59684 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramı kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmaktadır. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.



Şekil 3.43: 6 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1.3, β_0=5, δ=3.4, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).



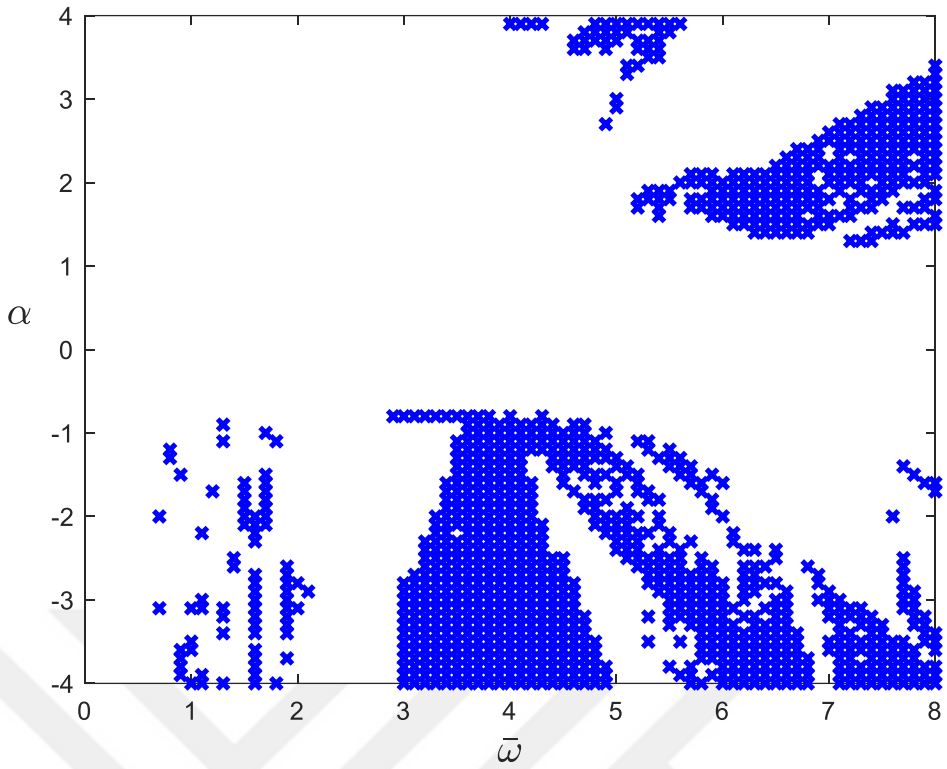
Şekil 3.44: 6 noktasıa ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1.3, β_0=5, δ=3.4, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

Böylece kaos kartı üzerinden seçilen noktaların kartı doğruladığı görülmektedir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Rotorun hızının harmonik dalgalanma katsayısı ile göbek yarıçapı düzleminde, iki serbestlik dereceli model kullanılarak kaotik davranışlar incelenmiş ve bu parametrelerin bazı kombinasyonlarında kaotik titreşimler ortaya çıkacağı görülmüştür.

3.2.4 $\bar{\omega}$−α düzlemine ait kaos kartı

Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve dördüncü olarak, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1 (Ortalama dönme hızı, boyutsuz dalgalanma katsayısı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}$−α (Boyutsuz dalgalanma frekansı – Boyutsuz göbek yarıçapı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 6400 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı, Şekil 3.45'de verilir.

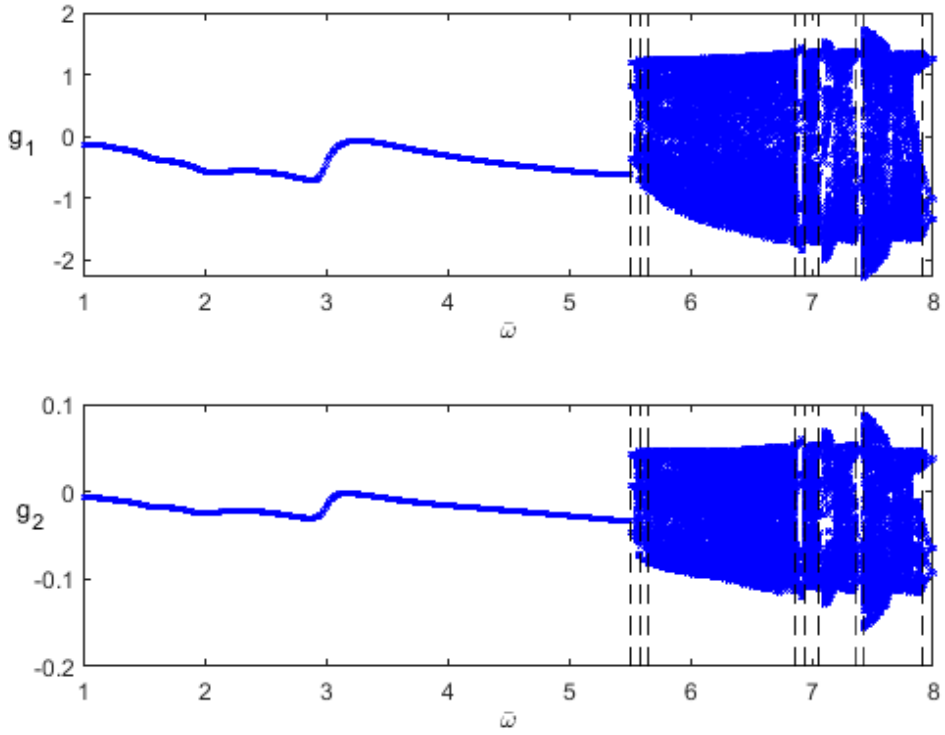


Şekil 3.45: $\bar{\omega}-\alpha$ düzleminde kaos kartı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. Dört mavi bağımsız bölge ve yer yer kaotik hatlar ile tekil noktalar bulunmaktadır. Mavi bölgelerden en büyüğünün içinde büyük beyaz bölge ve tekil noktalar, diğerlerinin içinde ise beyaz tekil noktalar bulunmaktadır.

Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$'nın küçük, boyutsuz göbek yarıçapı α'nın ise pozitif olduğu bölgelerde ve dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$'nın büyük, boyutsuz göbek yarıçapı $|\alpha|$'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamaktadır. Bunun dışındaki bölgelerde kaotik hareketin ortaya çıkabileceği ihtimali vardır.

Ardından, yine β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1 alınır, dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ da α boyutsuz göbek yarıçapının belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; α=2'e sabitlenip $\bar{\omega}$'nın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 800 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.46 elde edilir.

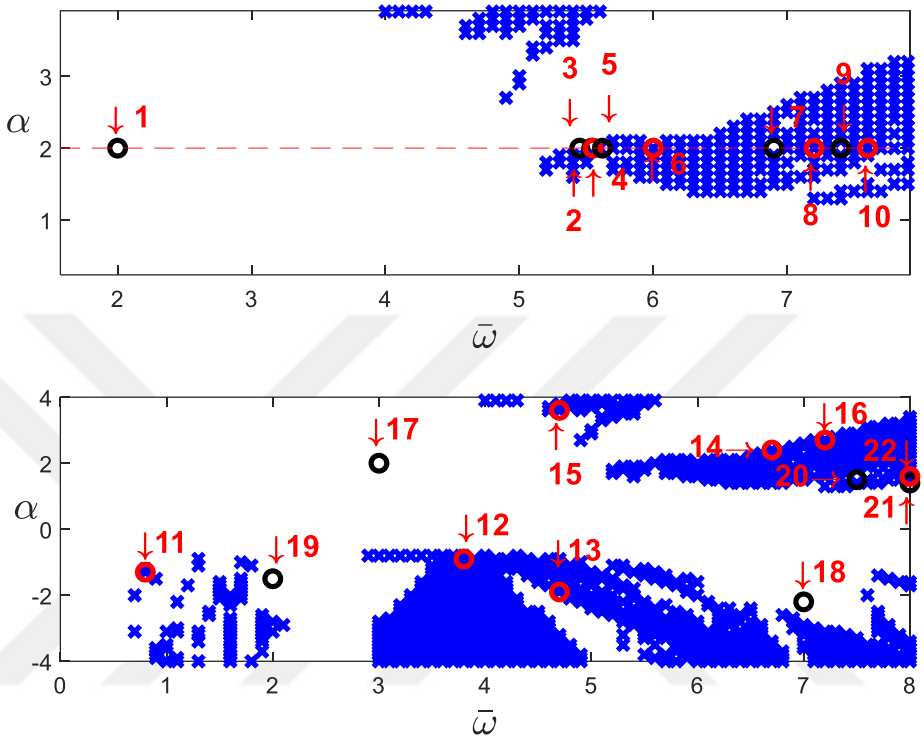


Şekil 3.46: α=2 için ϖ parametresine göre çatallanma diyagramı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1).

Bu diyagramda her iki grafik için de düşey eksendeki noktalar Poincaré noktalarıdır, yatay eksende ise dalgalanma frekansı ϖ çatallanma parametresi olarak bulunmaktadır. Buna göre ϖ<5.51 iken tek Poincaré noktası ayırd edilir. ϖ=5.51 değerinde bir çatallanma olur ve iki koordinat için de üç Poincaré noktası ayırd edilir. 5.51<ϖ<5.56 aralığında peryodu 3T=6π olan peryodik hareketler gerçekleşir. ϖ=5.56'da yeniden çatallanma olur ve kriz bölgesine giren sistemde ϖ=5.6'ya dek kaotik titreşimler meydana gelir ve bu bölgede peryod sonsuza gider. ϖ=5.6'da bir çatallanma daha yaşanır ve ayırd edilen Poincaré noktaları 5.6<ϖ<5.64'da arasında 5 tanedir ve bölgede hareket peryodları 5T=10π olur. Harmonik altı ve peryodik bir hareket bölgesi olduğu görülmekte. Ardından ϖ=6.87 değerine kadarki bölgede hareketin Poincaré noktaları sonsuz olduğu için bu bölgede kesintisiz kaotik bir bölge hakimdir ayrıca ilgili bölgede hareket peryodu sonsuz olur. ϖ=6.87'de bir çatallanma daha yaşanır ve ayırd edilen Poincaré noktaları 6.87<ϖ<6.94'da arasında 5 tanedir ve hareket peryodları 5T=10π olan bir bölge bulunur. 6.94<ϖ<7.36 ve 7.42<ϖ<7.91 bölgelerinde kaos hakimdir ve sonsuz sayıda Poincaré noktası bulunur dolayısıyla Bu bölgede hareket peryodu sonsuza gider. Geriye kalan 7.36<ϖ<7.42 bölgesinde ise ayırd edilen Poincaré noktaları 4 tanedir. Bu bölgede hareket peryodları 4T=8π olan

peryodik bir hareket bölgesi bulunur. Böylece sonuçların kaos kartını doğruladığı söylemek mümkündür.

Ayrıca Şekil 3.45'deki kaos kartı ve Şekil 3.46'teki çatallanma diyagramı üzerinden seçilen 10 ortak nokta ve kaos kartından ayrıca seçilen 12 diğer nokta Şekil 3.47'da verilmiştir.



Şekil 3.47: Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1) b) Kaos kartı (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1).

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.47a'daki noktalar hem Şekil 3.45'teki kaos kartını hem de Şekil 3.46'deki çatallanma diyagramını doğrulamaktadır. Ayrıca Şekil 3.47b'de verilen noktalar kaos kartını doğrulamak üzere seçilmiştir. Alttaki büyük mavi bölge sınırında 12,13 noktaları kaotiktir. Sol alttaki tekil noktalardan 11 kaotik 19 peryodiktir. Üst küçük mavi bölge sınırında 15 kaotiktir. Sağ üstteki bölge sınırlarında 14, 16, 22 noktaları kaotik 20, 21 noktaları peryodiktir. Çatallanma diyagramında sağ üst bölgeye denk gelen yerler incelenmiştir ve 2, 3, 5, 7, 9 noktaları peryodik ve 4, 6, 8, 10 noktaları kaotiktir. Geriye kalan beyaz bölge içindeki 1 noktası da peryodiktir. Bu noktalara ait

Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.7'de verilmiştir.

Çizelge 3.7: Kaos kartına göre örnek noktalar (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1).

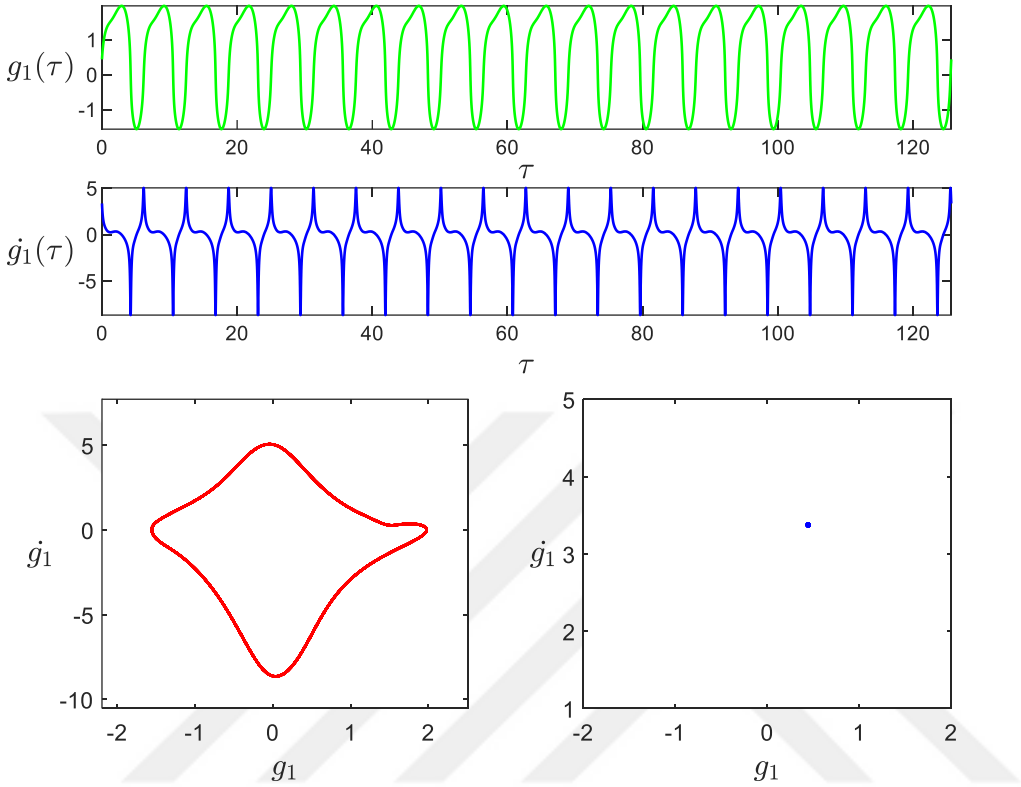
Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, α)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	$\bar{\omega}$=2, α=2	1	T	-0.25825 -0.29148 -10.01350 -10.01580	Peryodik
2	$\bar{\omega}$=5.45, α=2	3	3T	-0.05805 -0.10245 -2.62992 -2.63129	Peryodik
3	$\bar{\omega}$=5.54, α=2	6	6T	-0.00470 -0.14603 -2.31019 -2.31210	Peryodik
4	$\bar{\omega}$=5.55, α=2	∞	∞	0.02201 -0.17247 -2.30890 -2.31732	Kaotik
5	$\bar{\omega}$=5.62, α=2	5	5T	-0.00406 -0.14074 -2.18374 -2.21301	Peryodik
6	$\bar{\omega}$=6, α=2	∞	∞	0.06226 -0.19582 -2.03323 -2.06389	Kaotik
7	$\bar{\omega}$=6.9, α=2	6	6T	-0.00395 -0.08844 -1.37230 -1.39612	Peryodik
8	$\bar{\omega}$=7.2, α=2	∞	∞	0.05815 -0.15890 -1.49838 -1.50720	Kaotik
9	$\bar{\omega}$=7.4, α=2	4	4T	-0.03931 -0.04237 -1.19312 -1.19469	Peryodik
10	$\bar{\omega}$=7.6, α=2	∞	∞	0.06397 -0.15600 -1.36265 -1.37189	Kaotik
11	$\bar{\omega}$=0.8, α=-1.3	∞	∞	0.07889 -1.03541 -15.01250 -18.28730	Kaotik
12	$\bar{\omega}$=3.8, α=-0.9	∞	∞	0.05747 -0.25655 -3.19704 -3.58228	Kaotik

Çizelge 3.7 (devam) : Kaos kartına göre örnek noktalar (β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1).

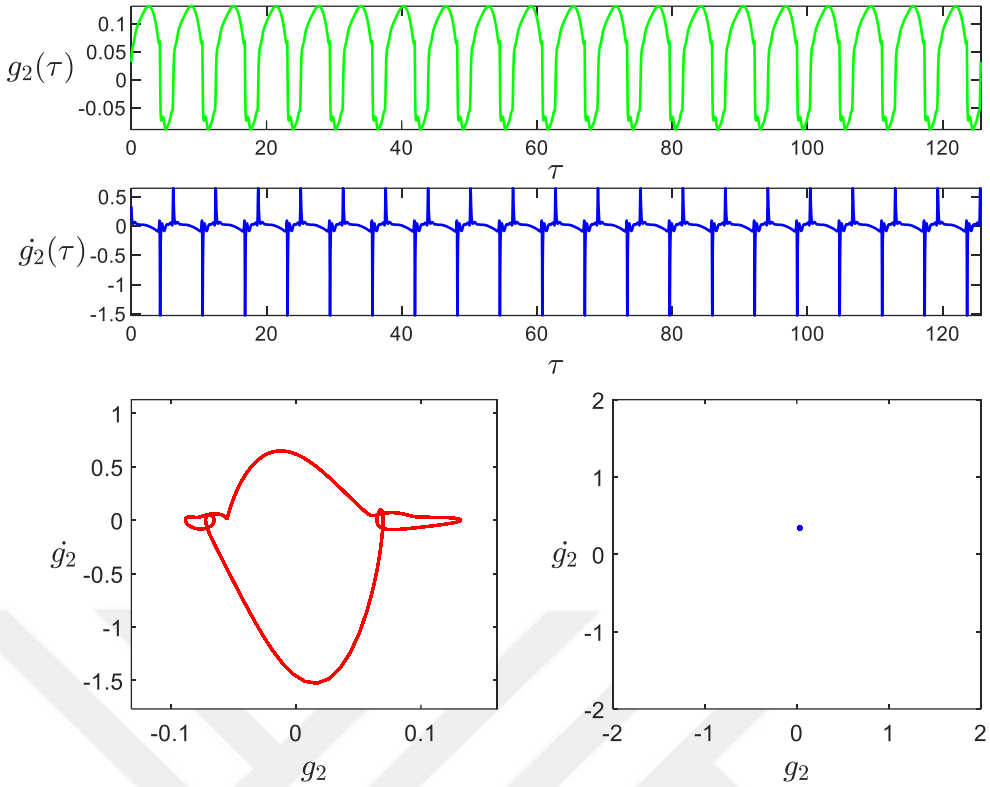
Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, α)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
13	$\bar{\omega}$=4.7, α=-1.9	∞	∞	0.03450 -0.07829 -0.74470 -0.75943	Kaotik
14	$\bar{\omega}$=6.7, α=2.4	∞	∞	0.03025 -0.10601 -1.20056 -1.21278	Kaotik
15	$\bar{\omega}$=4.7, α=3.6	∞	∞	0.03204 -0.23658 -3.04753 -3.05803	Kaotik
16	$\bar{\omega}$=7.2, α=2.7	∞	∞	0.04445 -0.12345 -1.21439 -1.23075	Kaotik
17	$\bar{\omega}$=3, α=2	1	T	-0.10988 -0.21513 -5.44418 -5.44562	Peryodik
18	$\bar{\omega}$=7, α=-2.2	2	2T	-0.01389 -0.01415 -0.46801 -0.46858	Peryodik
19	$\bar{\omega}$=2, α=-1.5	1	T	-0.05157 -0.16170 -3.09003 -3.09305	Peryodik
20	$\bar{\omega}$=7.5, α=1.5	3	3T	-0.02009 -0.03321 -0.82623 -0.82757	Peryodik
21	$\bar{\omega}$=8, α=1.4	1	T	-0.01686 -0.08740 -1.64432 -1.64554	Peryodik
22	$\bar{\omega}$=8, α=1.6	∞	∞	0.02098 -0.11565 -1.41566 -1.42569	Kaotik

Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üsleri pozitif olanlar kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında peryodik titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

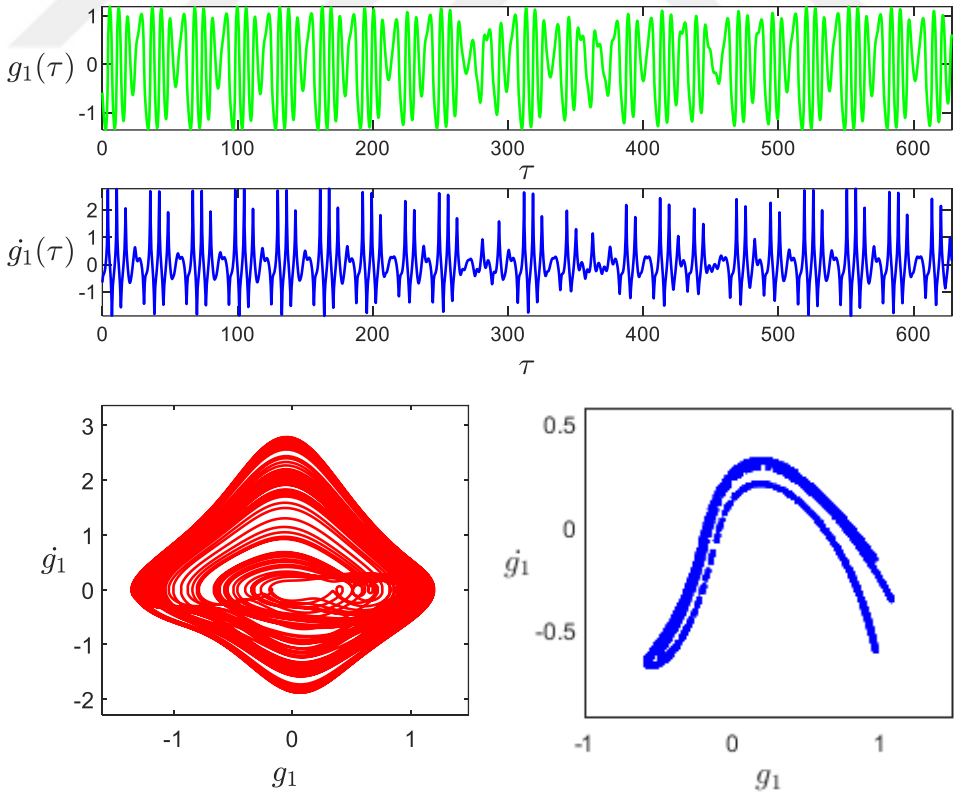
Şekil 3.45'teki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.7'de verilen noktalardan 13 ve 19 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.48−3.51'de konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.



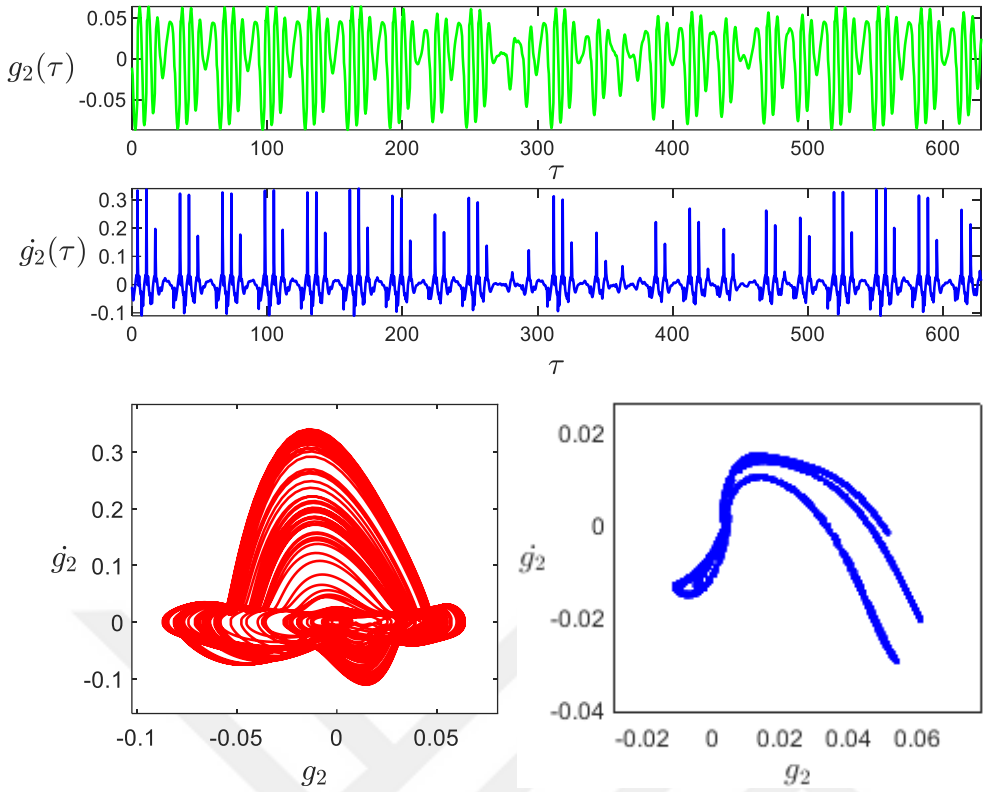
Şekil 3.48: 19 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−1.5, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=2).



Şekil 3.49: 19 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−1.5, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=2).



Şekil 3.50: 13 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−1.9, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4.7).



Şekil 3.51: 13 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−1.9, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4.7).

Şekil 3.45'te verilen kaos kartında peryodik bir bölgeye düşen 15 noktasına ait (α=−1.5, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=2) Şekil 3.48 ve Şekil 3.49 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.05157, Λ_2=−0.16170, Λ_3=−3.09003 ve Λ_4=−3.09305 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

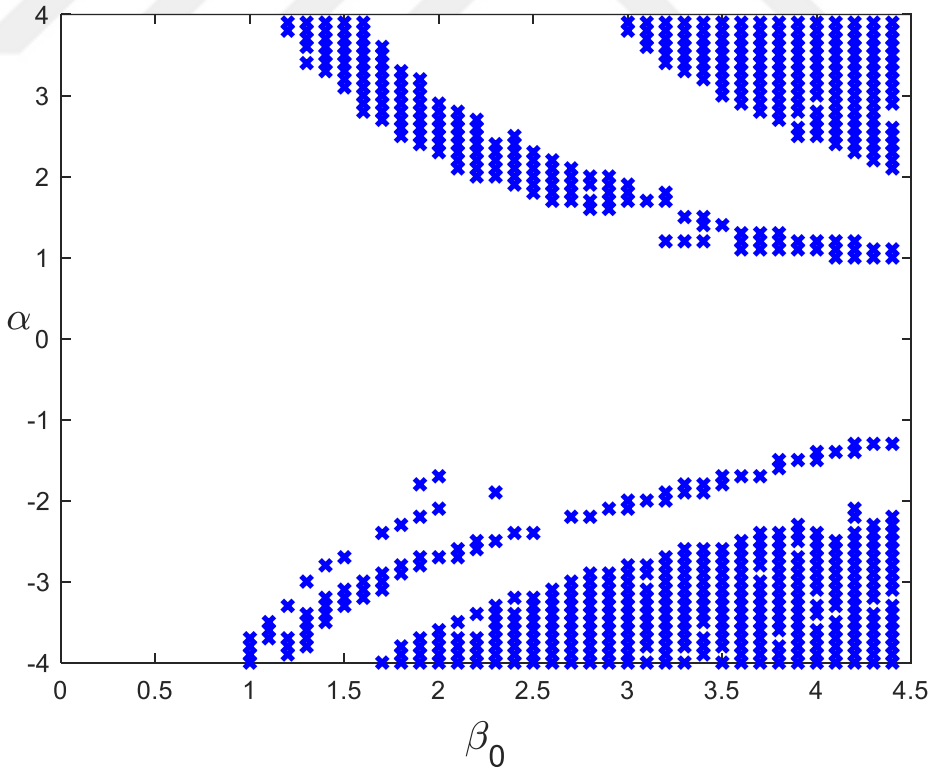
Şekil 3.45'te verilen kaos kartında alttaki büyük mavi bölgenin sınırına denk gelen 13 noktasına ait (α=−1.9, β_0=2.4, δ=1.8, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=4.7) Şekil 3.50 ve Şekil 3.51 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.03450, Λ_2=−0.07829, Λ_3=−0.74470 ve Λ_4=−0.75943 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramları kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmakta. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Kaos kartı üzerinden seçilen noktaların verdiği sonuçlar, kaos kartına uyumlu olmaktadır.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: İki serbestlik dereceli model kullanılarak rotor hızının dalgalanma frekansı ile göbek yarıçapının oluşturduğu düzlemde Lyapunov üsleri hesabına dayalı kaos kartı oluşturulmuştur ve kaotik titreşim davranışlarına rastlanmıştır. Olası kaotik titreşim davranışını engellemek amacıyla tasarım aşamasında göbek yarıçapı veya rotorun bağlı olduğu mil malzemesi değiştirilebilir.

3.2.5 β_0−α düzlemine ait kaos kartı

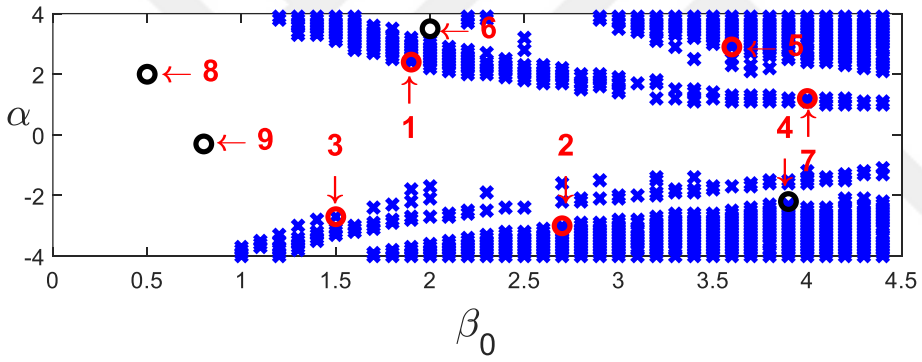
Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve beşinci olarak, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6 (boyutsuz dalgalanma katsayısı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma frekansı) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu β_0−α (Ortalama dönme hızı−Boyutsuz göbek yarıçapı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 3600 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.52 elde edilir.



Şekil 3.52: β_0−α düzleminde kaos kartı (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 2 büyük ve 2 küçük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra birkaç tekil mavi nokta bulunur ve mavi bölgelerin dışında peryodik bölgeler bulunmaktadır ve mavi bölgelerin içinde birkaç tane beyaz tekil noktalar bulunmaktadır. Ortalama dönme hızı β_0'nın büyük, boyutsuz göbek yarıçapı α'nın küçük olduğu bölgelerde ve ortalama dönme hızı β_0'nın küçük, boyutsuz göbek yarıçapı α'nın büyük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmakta, kaotik hareketin ancak bunlardan ikisinin de büyük olması halinde($|\alpha|>0$) ortaya çıkabileceği görülmektedir. Böylece hem $\alpha>0$ (dışa yönelik kiriş) hem de $\alpha<0$ (içe yönelik kiriş) durumlarında kaotik hareket davranışı olabileceğinden dolayı iki problem için de kaos incelemesi yapılması gerekmektedir.

Şekil 3.52'teki kaos kartı üzerinden seçilen 9 nokta Şekil 3.53'te verilmiştir.



Şekil 3.53: Kaos kartında seçilen örnek noktalar (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Alttaki büyük mavi bölge sınırında 2 noktası kaotik, 4 noktası peryodiktir. Yine alttaki küçük mavi bölge sınırında 3 noktası kaotiktir. Üstteki ince bölge sınırında 1 ve 7 noktaları kaotiktir. Sağ üst köşede kalan mavi bölgede ise 5 noktası kaotiktir. Bu iki bölge arasında kalan 6 noktası peryodiktir. Ayrıca büyük beyaz bölge içinde kalan 8 ve 9 noktaları da kaotiktir. Şekil 3.53'teki noktalar ile Şekil 3.52'de verilen kaos kartını doğrulamak amaçlanmaktadır. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.8'de verilmiştir.

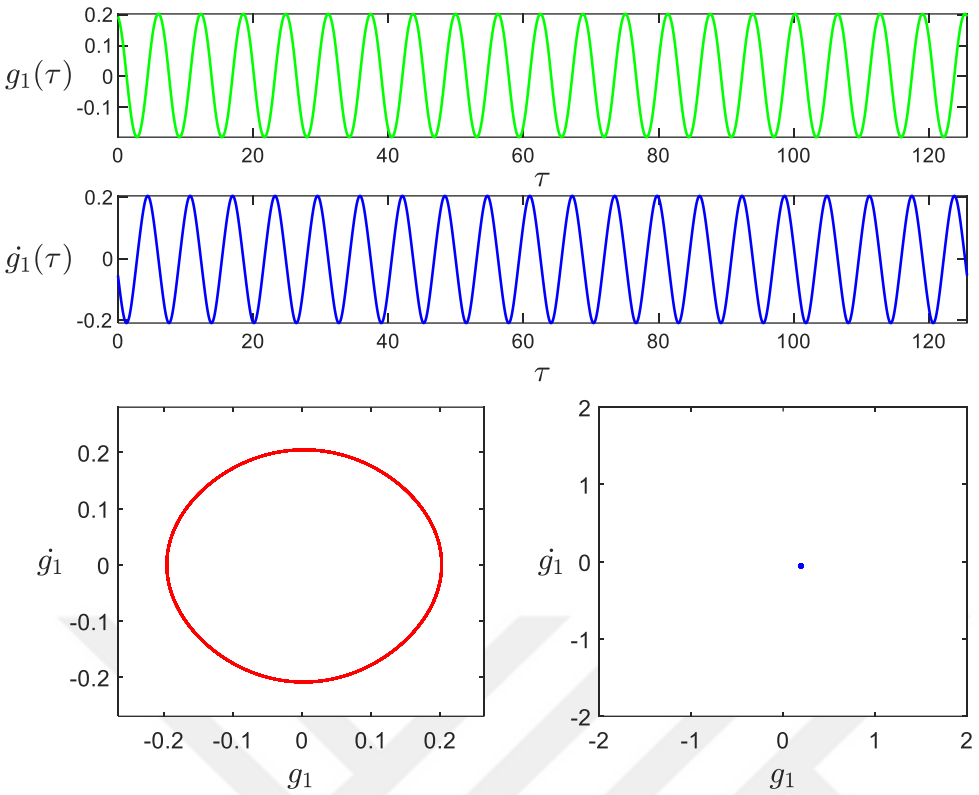
Buna göre, verilen noktalar kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün

negatif olduğu parametre kombinasyonlarında peryodik titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

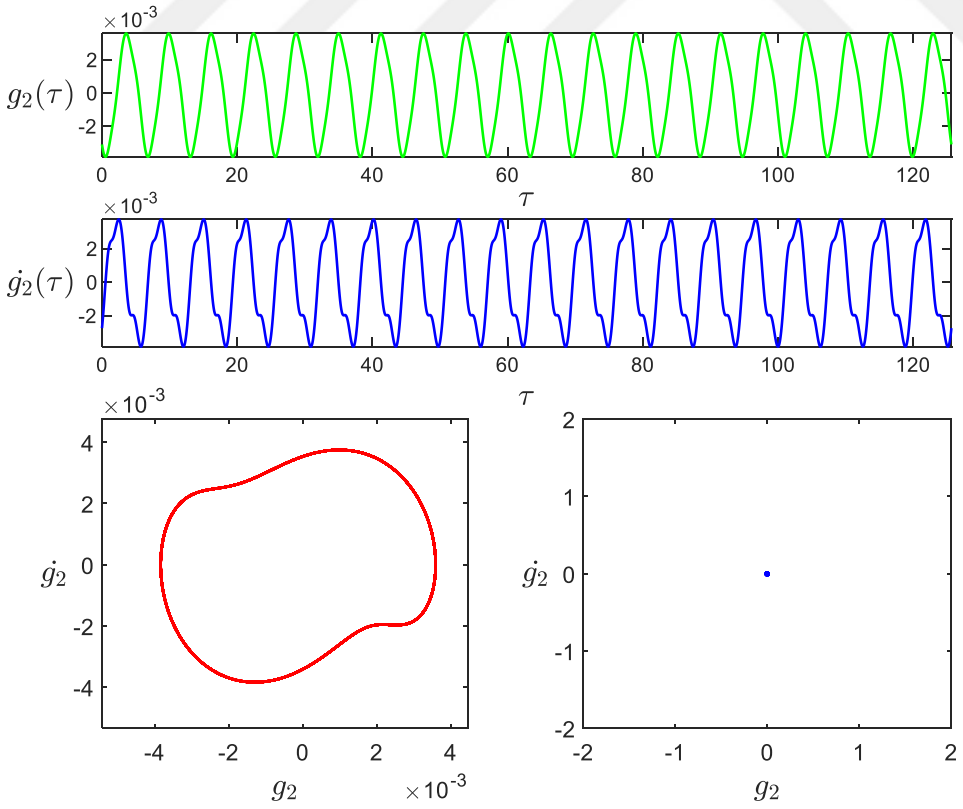
Şekil 3.44'teki kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.8'de verilen noktalardan 5 ve 9 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.54−3.57'da konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri bakımından ayrıca incelenmiştir.

Çizelge 3.8: Kaos kartına göre örnek noktalar (δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).

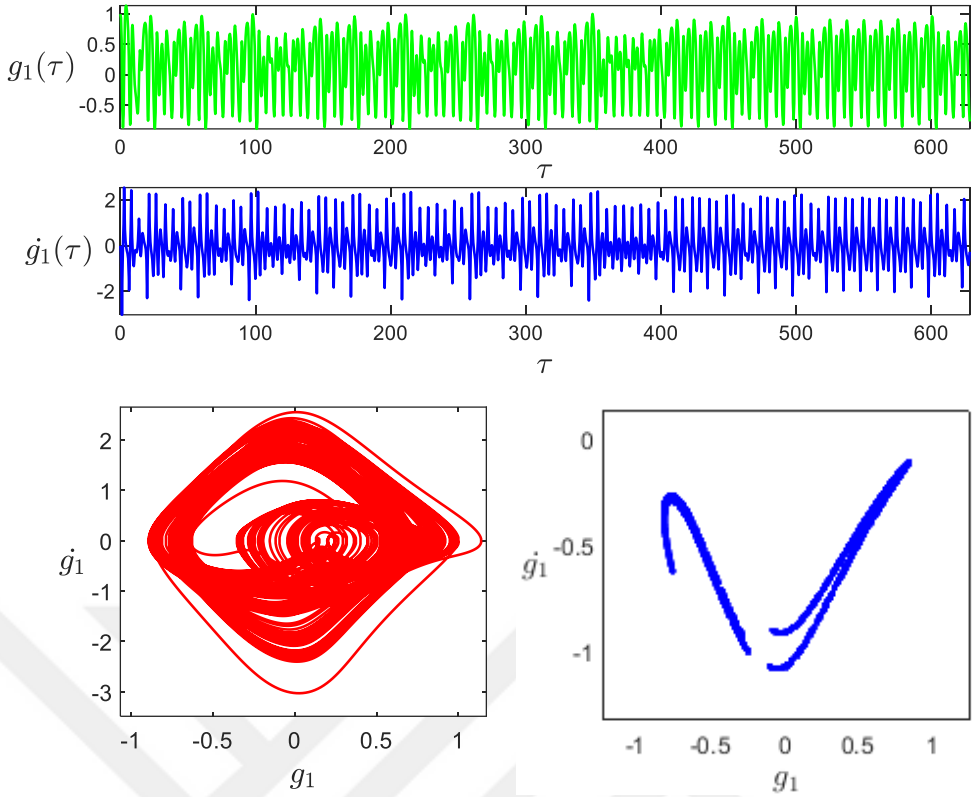
Numara	Parametre Kombinasyonu (β_0, α)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	β_0=1.9, α=2.4	∞	∞	0.05511 -0.20088 -2.37245 -2.37583	Kaotik
2	β_0=2.7, α=-3	∞	∞	0.03231 -0.05945 -0.44823 -0.47965	Kaotik
3	β_0=1.5, α=-2.7	∞	∞	0.04974 -0.14234 -1.44162 -1.45997	Kaotik
4	β_0=3.9, α=-2.2	3	3T	-0.00893 -0.01534 -0.38998 -0.40546	Peryodik
5	β_0=3.6, α=2.9	∞	∞	0.02989 -0.03429 -0.24090 -0.26355	Kaotik
6	β_0=2, α=3.5	1	T	-0.00719 -0.02129 -0.54862 -0.56253	Peryodik
7	β_0=4, α=1.2	∞	∞	0.07360 -0.20818 -1.94840 -1.95032	Kaotik
8	β_0=0.5, α=2	1	T	-0.09756 -0.09786 -2.92720 -4.51692	Peryodik
9	β_0=0.8, α=-3	1	T	-0.09790 -0.09721 -2.83210 -4.42687	Peryodik



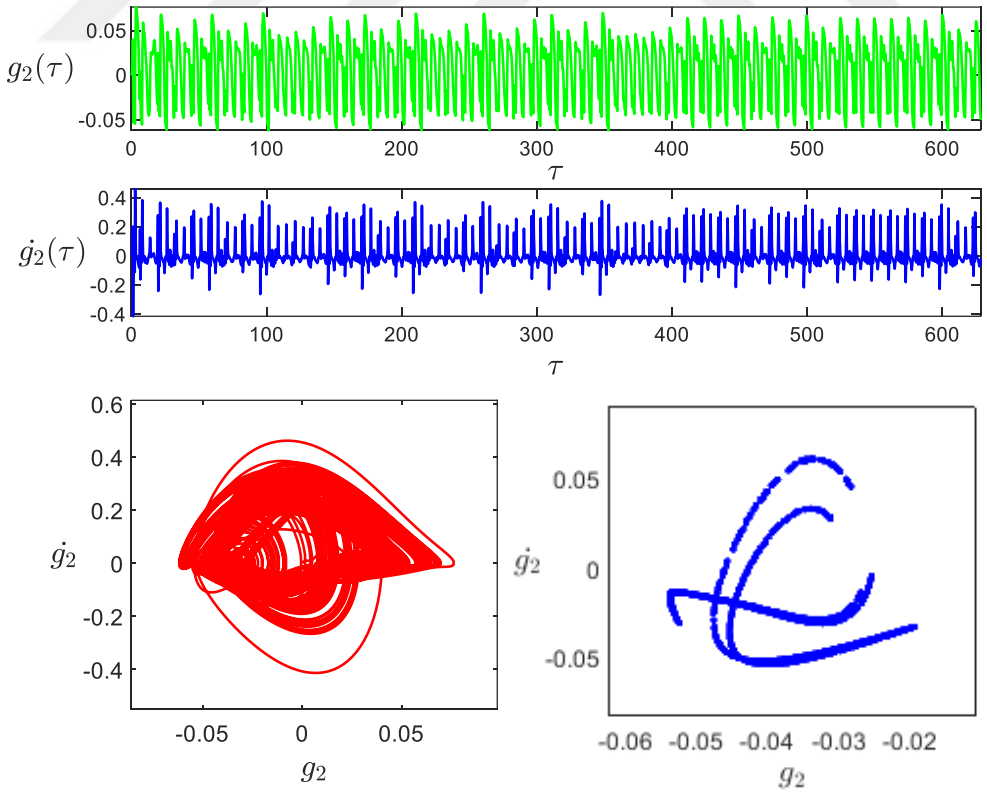
Şekil 3.54: 9 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−3, β_0=0.8, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).



Şekil 3.55: 9 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=−3, β_0=0.8, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).



Şekil 3.56: 5 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2.9, β_0=3.6, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).



Şekil 3.57: 5 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2.9, β_0=3.6, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6).

Şekil 3.52'de verilen kaos kartında periyodik bir bölgeye düşen 9 noktasına ait ($\alpha=-3$, $\beta_0=0.8$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=6$) Şekil 3.54 ve Şekil 3.55 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri $\Lambda_1=-0.12123$, $\Lambda_2=-0.12941$, $\Lambda_3=-3.83559$ ve $\Lambda_4=-3.84093$ olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin $T=2\pi$ peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde periyodik olacağına işarettir.

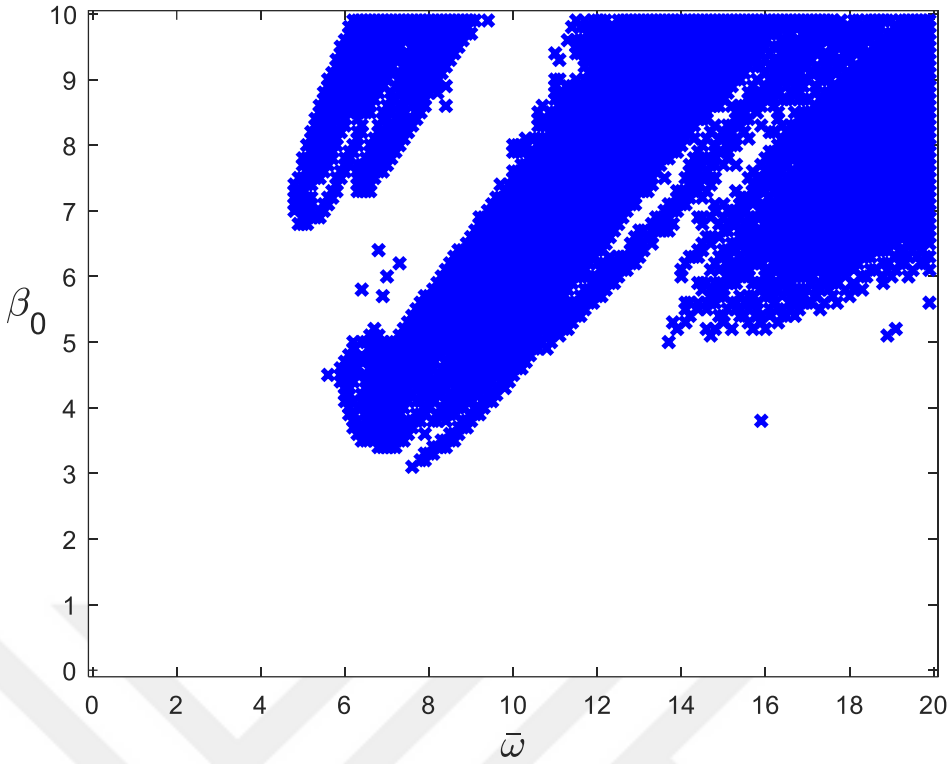
Şekil 3.52'de verilen kaos kartında üst köşedeki küçük mavi bölgenin periyodik bölge sınırında 5 noktasına ait ($\alpha=2.9$, $\beta_0=3.6$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=6$) Şekil 3.56 ve Şekil 3.57 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri $\Lambda_1=0.02988$, $\Lambda_2=-0.03428$, $\Lambda_3=-0.24089$ ve $\Lambda_4=-0.26355$ olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramları kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmakta. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Böylece verilen noktaların kaos kartına uygun sonuçlar verdiği görülmektedir.

Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Tasarım parametresi olan göbek yarıçapı ile çalışma koşulu olan ortalama dönme hızı düzleminde, iki serbestlik dereceli model kullanılarak inceleme yapılmış ve bazı parametre çiftlerinde kaotik titreşim meydana geleceği görülmüştür. Bundan dolayı ortaya çıkabilecek olası kaotik titreşim davranışı, göbek yarıçapının veya ortalama dönme hızının değiştirilmesi ile önlenebilir.

3.2.6 $\bar{\omega}-\beta_0$ düzlemine ait kaos kartı

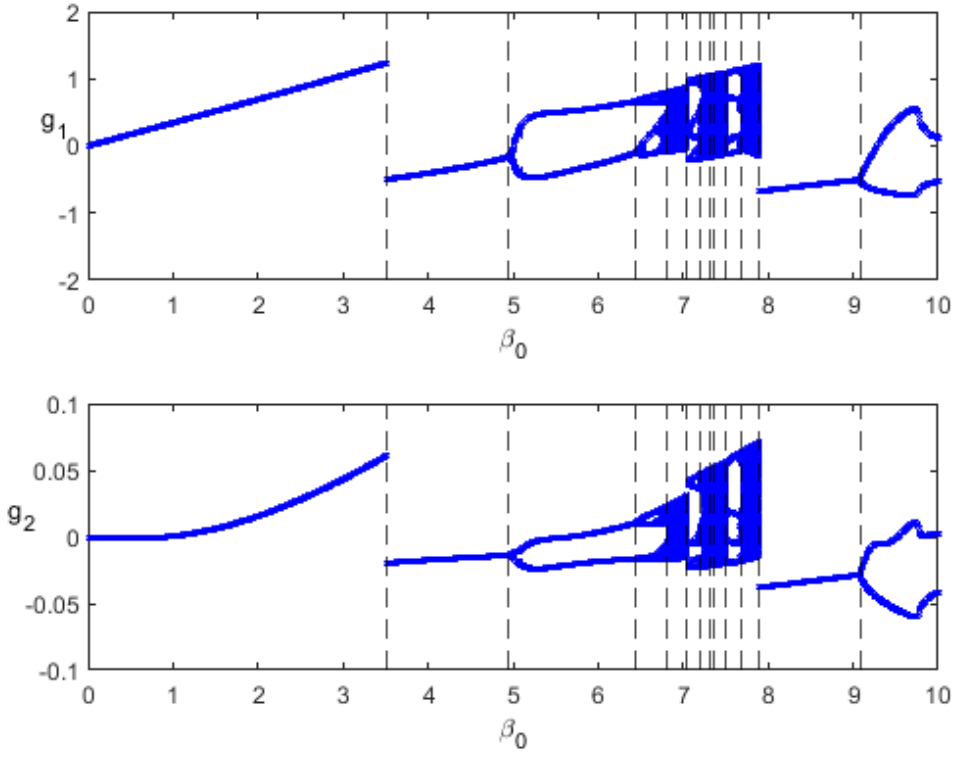
Denklem (2.11) ve Denklem (2.12)'de verilen iki serbestlik dereceli model ele alınır ve altıncı ve son olarak, hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü $\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$ (boyutsuz göbek yarıçapı, boyutsuz dalgalanma katsayısı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı− Ortalama dönme hızı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 20000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.58 elde edilir.



Şekil 3.58: $\bar{\omega}-\beta_0$ düzleminde kaos kartı ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 2 büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki bölgede birkaç tekil mavi noktanın, mavi bölgenin içinde ise iki küçük beyaz bölgenin, iki ince hattın ve birkaç tekil noktaların bulunduğu görülmektedir. Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve/veya ortalama dönme hızı β_0'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Ardından, yine $\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$ alınır, dalgalanma frekans da δ dalgalanma frekansının belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; $\bar{\omega}=5$'e sabitlenip β_0'nın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 1000 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.59 elde edilir.

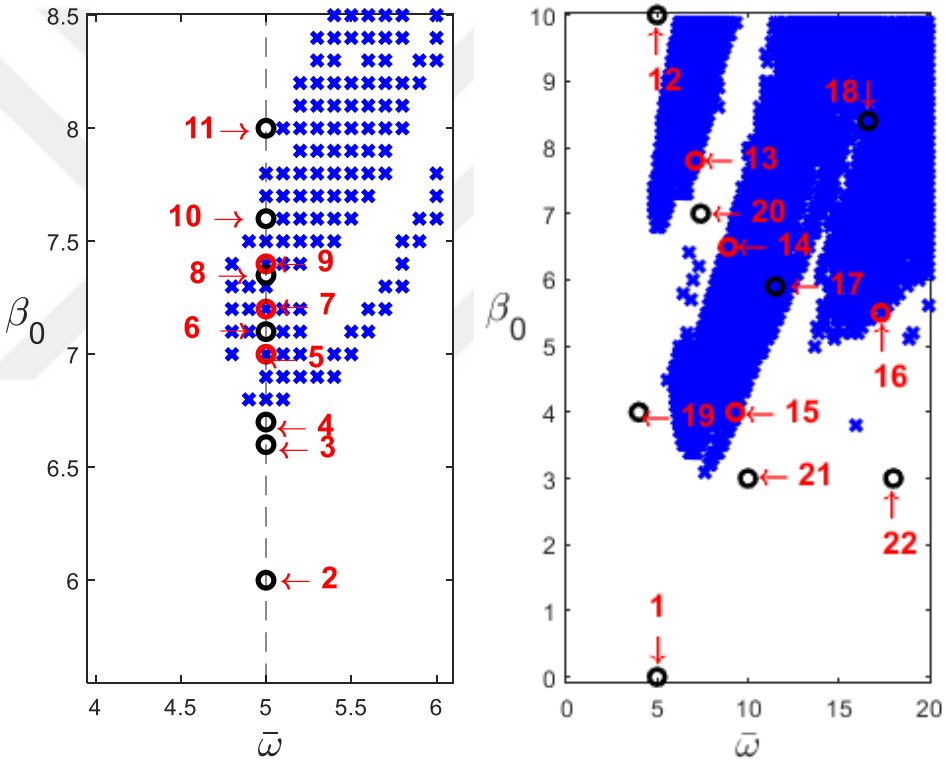


Şekil 3.59: β_0 parametresine göre çatallanma diyagramı (α=1, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=5).

Bu diyagramda her iki grafik için de düşey eksendeki noktalar Poincaré noktalarıdır, yatay eksende ise ortalama dönme hızı β_0 çatallanma parametresi olarak bulunmaktadır. Bir veya birden çok sonlu sayıdaki noktalar sistemin peryodik titreşimler, sonsuz noktalar ise sistemin kaotik titreşimler davranışımda buluncağına işaret etmektedir. β_0=3.51 iken bir sıçrama fenomeni gerçekleşir (Dikkat edilirse konsol kirişin 1. doğal frekansına denk gelmektedir, lineer kiriş modelinin rezonans noktası sıçrama fenomenine neden olmaktadır). Buna göre β_0<4.95 iken tek Poincaré noktası ayırd edilir yani hareket T=2π peryoduyla gerçekleşir. β_0=4.95 değerinde bir çatallanma olur ve iki koordinat için de iki Poincaré noktası ayırd edilir ve 2T=4π peryoduyla hareket gerçekleşir. β_0=6.45'de yeniden çatallanma olur ve 6.45<β_0<6.82 aralığında ayırd edilen noktalar dört tane olur ve peryod tekrar katlanarak 4T=8π/5 olur. 6.82<β_0<7.05 aralığında çatallanma ile noktalar sonsuza giderek ayırd edilemez hâle gelir ve harekete ait peryod da sonsuza gider. Bu bölgede kaos hakimdir. β_0=7.05 değerinde kaos bölgesinden çıkan sistemde gelişen çatallanma sonucu Poincaré noktaları altı tane olur ve bu bölgede peryod 6T=12π olur ve bu durum β_0=2 değerine kadar devam eder.

Ardından $7.2<\beta_0<7.32$, $7.37<\beta_0<7.5$ ve $7.68<\beta_0<7.89$ değerinde çatallanmalar sonsuza giderek Poincaré noktaları ayırd edilemez olur. Bu üç bölgede kaos yeniden hakim olur ve hareket peryodları da sonsuza giderek aperyodik bir hareket ortaya çıkar. Bunların dışındaki bölgelerden ilki $7.32<\beta_0<7.37$ bölgesinde beş; ikincisi $7.35<\beta_0<7.68$ bölgesinde ise dört tane ayırt edilen Poincaré noktası bulunur. Peryotlar da $5T=10\pi$ ve $4T=8\pi$ olur. $\beta_0=7.89$ noktasında ise yeniden çatallanma gerçekleşir ve tek Poincaré noktası ayırt edilir. Ayrıca $\beta_0=9.08$ noktasında peryod katlama gerçekleşir ve iki Poincaré noktası ayırt edilir.

Şekil 3.58'deki kaos kartı ve Şekil 3.59'daki çatallanma diyagramı üzerinden seçilen 12 ortak nokta ve kaos kartından ayrıca seçilen 10 diğer nokta Şekil 3.60'ta verilmiştir.



Şekil 3.60: Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$, $\bar{\omega}=5$) b) Kaos kartı ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$)

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.60a'daki noktalar kaos kartından hem Şekil 3.58'deki kaos kartından hem de Şekil 3.59'deki çatallanma diyagramından seçilmiştir. Ayrıca Şekil 3.60b'de verilen noktalar kaos kartını doğrulamak üzere seçilmiştir. Büyük mavi bölge sınırında 14, 15, 16 noktaları kaotiktir, iç bölgede bulunan 17, 18 noktaları peryodiktir. Ayrıca beyaz

alandaki 19, 20, 21 ve 22 noktaları da peryodiktir. Küçük bölge sınırına denk gelen 13 noktası da kaotiktir. Çatallanma diyagramından seçilen noktalar için 1, 2, 3, 12 noktaları beyaz alana denk düşen peryodik noktalardır. Küçük bölgenin sınırındaki 4, 10, 11 noktaları peryodik iken 5, 7, 9 noktaları ise kaotiktir. Küçük bölgenin içindeki 6, 8 noktaları ise peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.9'da verilmiştir.

Çizelge 3.9: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, β_0)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
1	$\bar{\omega}$=5, β_0=0	1	T	-0.12288 -0.12298 -2.82045 -6.86516	Peryodik
2	$\bar{\omega}$=5, β_0=6	2	2T	-0.10836 -0.10953 -3.49868 -3.66115	Peryodik
3	$\bar{\omega}$=5, β_0=6.6	4	4T	-0.10305 -0.11200 -3.31948 -3.36688	Peryodik
4	$\bar{\omega}$=5, β_0=6.7	8	8T	-0.01465 -0.19943 -3.28938 -3.29059	Peryodik
5	$\bar{\omega}$=5, β_0=7	∞	∞	0.05698 -0.26688 -3.11727 -3.13412	Kaotik
6	$\bar{\omega}$=5, β_0=7.1	6	6T	-0.00692 -0.19571 -3.10838 -3.16815	Peryodik
7	$\bar{\omega}$=5, β_0=7.2	∞	∞	0.01035 -0.21295 -3.08606 -3.11473	Kaotik
8	$\bar{\omega}$=5, β_0=7.35	8	8T	-0.03627 -0.16547 -3.00403 -3.00585	Peryodik
9	$\bar{\omega}$=5, β_0=7.4	∞	∞	0.04855 -0.25008 -2.95220 -2.96037	Kaotik

Çizelge 3.9 (devam): Kaos kartına göre örnek durumlar (α=1, δ=1.6, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, β_0)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4)	Durum
10	$\bar{\omega}$=5, β_0=7.6	8	8T	-0.00898 -0.18696 -2.91278 -2.97612	Peryodik
11	$\bar{\omega}$=5, β_0=8	1	T	-0.10611 -0.10923 -3.50668 -3.50836	Peryodik
12	$\bar{\omega}$=5, β_0=10	2	2T	-0.11307 -0.11520 -3.59971 -3.60096	Peryodik
13	$\bar{\omega}$=7.1, β_0=7.8	∞	∞	0.02936 -0.17705 -2.18196 -2.20930	Kaotik
14	$\bar{\omega}$=8.9, β_0=6.5	∞	∞	0.05165 -0.12625 -1.08843 -1.11568	Kaotik
15	$\bar{\omega}$=9.3, β_0=4	∞	∞	0.04451 -0.13841 -1.44062 -1.44070	Kaotik
16	$\bar{\omega}$=17.3, β_0=5.5	∞	∞	0.01230 -0.04999 -0.60357 -0.61383	Kaotik
17	$\bar{\omega}$=11.5, β_0=5.9	2	2T	-0.00501 -0.02698 -0.11605 -0.19269	Peryodik
18	$\bar{\omega}$=16.6, β_0=8.4	2	2T	-0.01792 -0.02505 -0.46843 -0.58191	Peryodik
19	$\bar{\omega}$=4, β_0=4	1	T	-0.09567 -0.18218 -4.89972 -4.91986	Peryodik
20	$\bar{\omega}$=7.4, β_0=7	1	T	-0.00261 -0.01865 -0.26758 -0.65448	Peryodik
21	$\bar{\omega}$=10, β_0=3	2	2T	-0.01384 -0.02006 -0.47562 -0.48222	Peryodik
22	$\bar{\omega}$=18, β_0=3	1	T	-0.02712 -0.03485 -1.12636 -1.13623	Peryodik

Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında harmonik ve harmonik altı titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

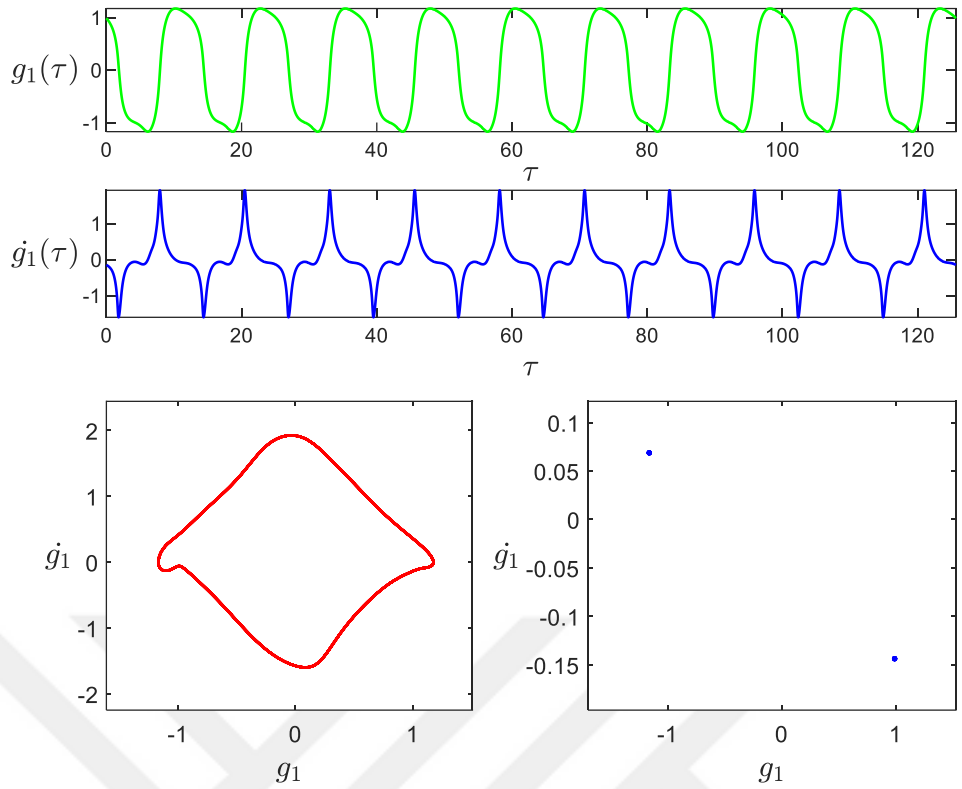
Şekil 3.50'de verilen kaos kartını doğrulamak amacıyla Çizelge 3.9'de verilen noktalardan 15 ve 18 no'lu örnekler incelenmiştir ve bu noktalara ait Şekil 3.53−3.56'da konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri verilmiştir.

Şekil 3.50'de verilen kaos kartında büyük mavi bölgenin içinde bulunan peryodik bir bölgeye düşen 18 noktasına ait (α=1, β_0=8.4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=16.6) Şekil 3.53 ve Şekil 3.54 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.01792, Λ_2=−0.02504, Λ_3=−0.46843 ve Λ_4=−0.58191 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her iki koordinat için de n=2 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=4π peryodlu olduğu söylenir. Kapalı faz diyagramları, kendini tekrar eden konum−zaman ve hız−zaman grafikleri hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.

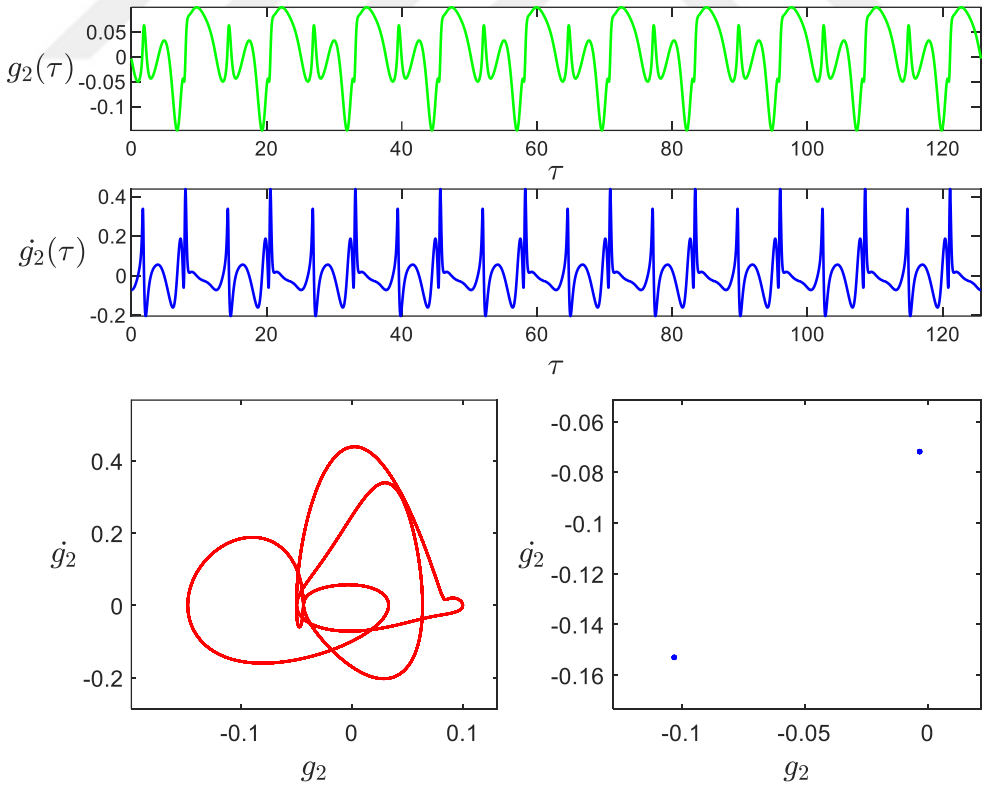
Şekil 3.50'de verilen kaos kartında alttaki büyük mavi bölgenin içindeki 13 noktasına ait (α=1, β_0=4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9.3) Şekil 3.55 ve Şekil 3.56 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.04451, Λ_2=−0.13841, Λ_3=−1.44062 ve Λ_4=−1.44069 olarak hesaplanmıştır, üslerden birisi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde sonsuz noktadan oluşan bir fraktal bulunmaktayken faz diyagramları kapalı olmayan ve düzlemi dolduran bir yörüngeden oluşmakta. Ayrıca konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde kaotik davranışlar mevcut olup bütün bu kriterler bu parametre bileşenlerinde kaotik hareket davranışına dair işarettir.

Seçilen örnekler kaos kartını doğrulayan sonuçlar vermektedir.

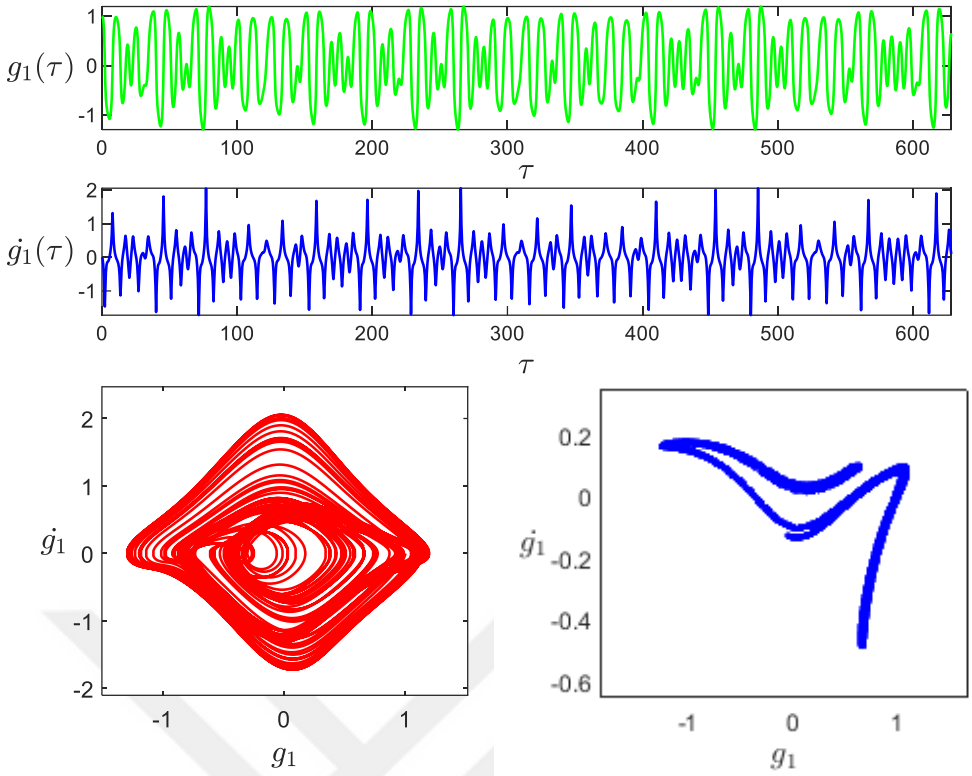
Fiziksel olarak yorumlanacak olursa: Rotor hızının dalgalanma frekansı ile ortalama dönme hızı, iki serbestlik dereceli model kullanılarak inceleme gerçekleştirilmiştir ve kaotik titreşimler davranışlarına rastlanmıştır. Ortaya çıkan kaotik titreşimler ortalama dönme hızı değiştirilerek önlenebilir.



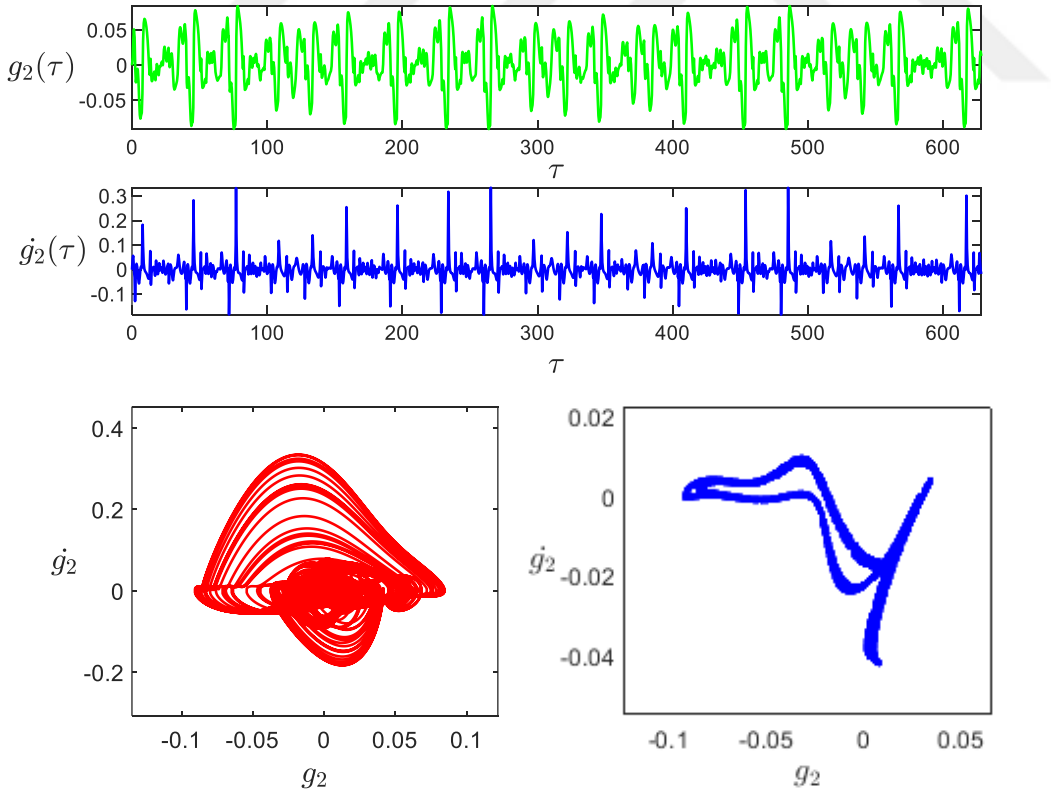
Şekil 3.61: 18 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=8.4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=16.6).



Şekil 3.62: 18 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=8.4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=16.6).



Şekil 3.63: 15 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9.3).

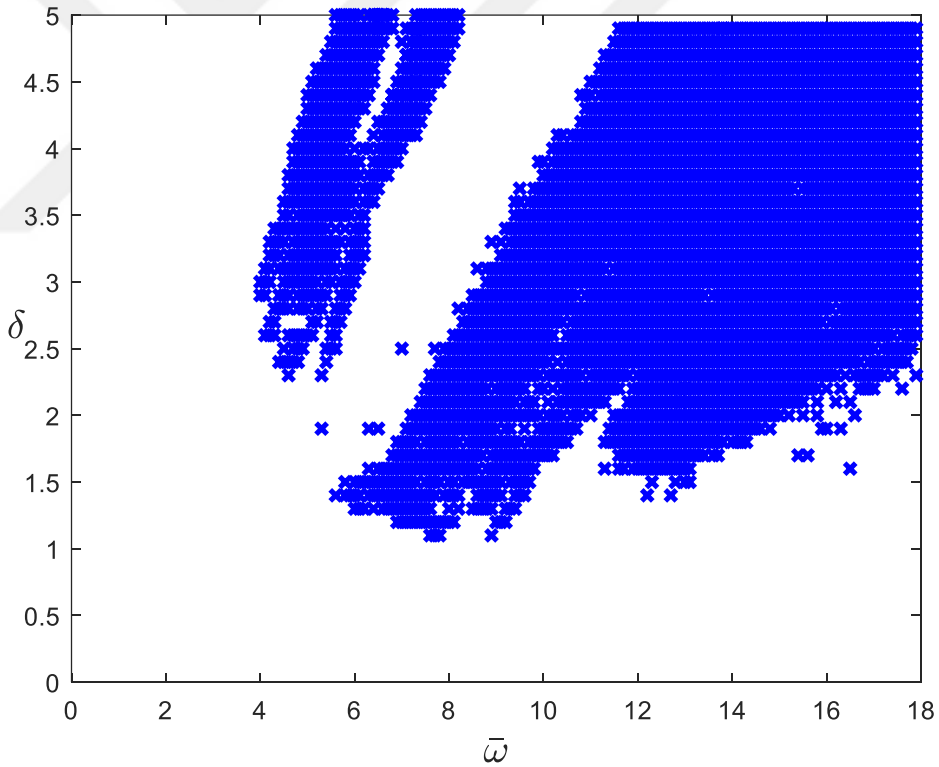


Şekil 3.64: 15 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=1, β_0=4, δ=1.6, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9.3).

3.3 Üç Serbestlik Dereceli Model

Yukarıdaki incelemeler, denklemleri Ek B'de verilen üç serbestlik dereceli model üzerinde yinelenecektir. Bu, Bölüm 3.1'deki bir serbestlik dereceli ve Bölüm 3.2'deki iki serbestlik dereceli modellerden elde dilen sonuçların kontrolüne ve incelemelerde bu modellerden biri üzerinde karar kılınıp kılınamayacağı ve daha yüksek serbestlik dereceli modellere gerek olup olmadığı konularında karar verilmesine olanak sağlayacaktır.

Hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü α=2, β=3, ζ=0.1 (Boyutsuz göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}$–δ (Boyutsuz Dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 9000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulursa Şekil 3.65 elde edilir.

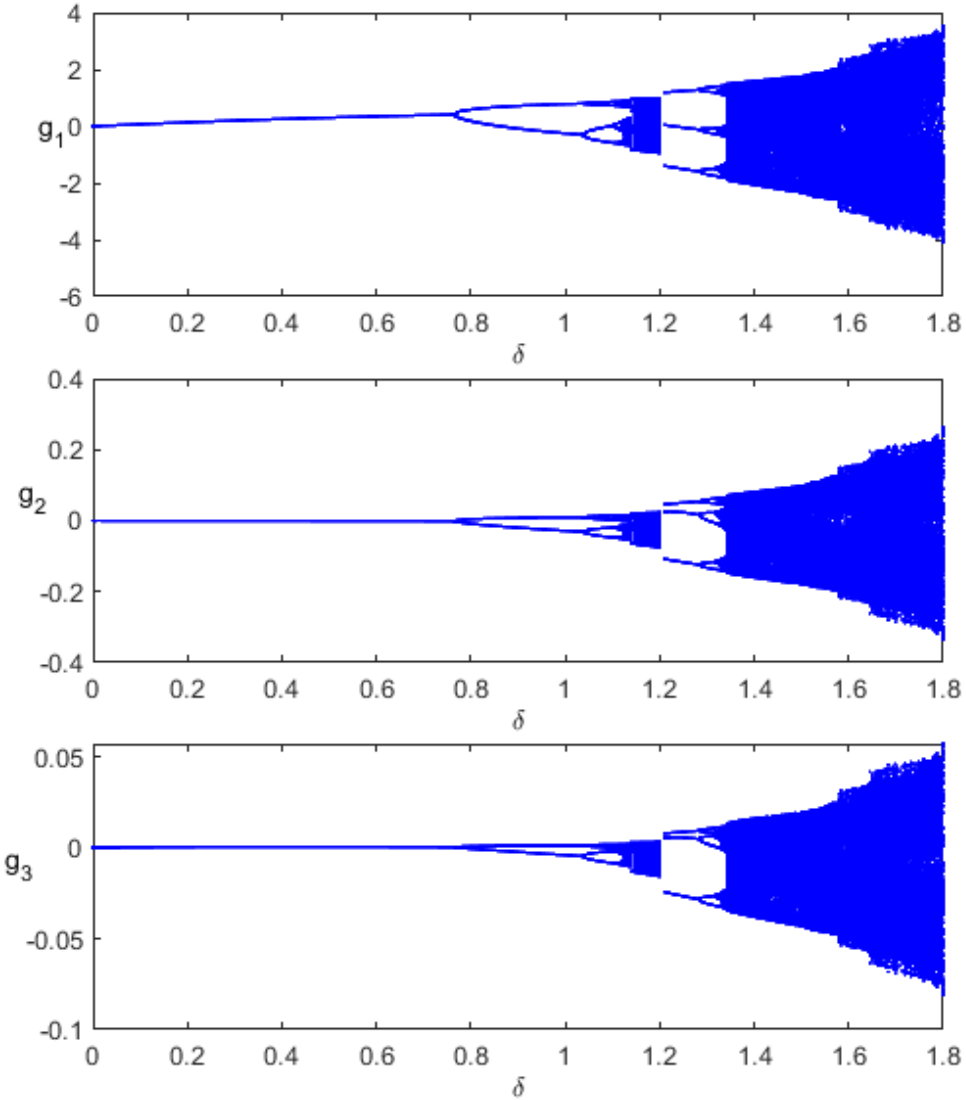


Şekil 3.65: $\bar{\omega}$−δ düzleminde kaos kartı (α=2, β=3, ζ=0.1).

Bu şekilde boyalı bölgeler kaotik hareketlere, beyaz bölgeler ise peryodik hareketlere karşılık gelmektedir. Buna göre mavi bölgelere isabet eden parametre kombinasyonlarında sistemin kaotik titreşimler yapacağı anlaşılmaktadır. 2 büyük bağımsız mavi bölgenin yanı sıra bunların arasındaki ve büyük mavi bölgenin

dışındaki bölgede birkaç tekil mavi noktanın, mavi bölgenin içinde ise bazı beyaz noktaların ve küçük mavi bölgenin içinde ise daha küçük beyaz bölgeler bulunduğu görülmektedir. Dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve/veya dalgalanma katsayısı δ'nın küçük olduğu bölgelerde kaotik harekete rastlanmamakta, kaotik hareketin ancak bunlardan en az birinin büyük olması halinde ortaya çıkabileceği görülmektedir.

Ardından, yine α=2, β=3, ζ=0.1 alınır, dalgalanma frekans da δ dalgalanma katsayısının belli değerlerinde kaotik hareketlerin ortaya çıkacağı anlaşılan bir değere; $\bar{\omega}$=9'e sabitlenip δ'nın çatallanma parametresi olarak alındığı bir çatallanma diyagramı 0.01 çözünürlüğüyle 180 nokta taranarak oluşturulursa Şekil 3.66 elde edilir.



Şekil 3.66: δ parametresine göre çatallanma diyagramı (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9).

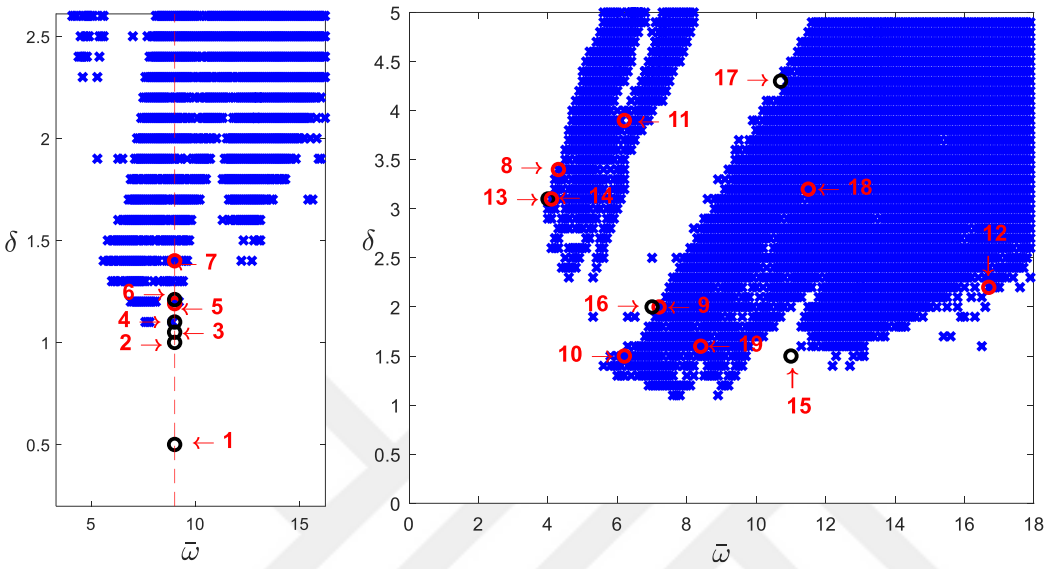
Bu diyagramda her üç grafik için de düşey eksendeki noktalar Poincaré noktalarıdır, yatay eksende ise δ çatallanma parametresi bulunmaktadır. Bir veya birden çok sonlu sayıdaki noktalar sistemin peryodik titreşimler, sonsuz noktalar ise sistemin kaotik titreşimler davranışımda buluncağına işaret etmektedir. Buna göre $\delta<0.761$ iken tek Poincaré noktası ayırd edilir yani hareket $T=2\pi$ peryoduyla gerçekleşir. $\delta=0.761$'de çatallanma olur ve üç koordinat için de iki Poincaré noktası ayırd edilir ve $2T=4\pi$ peryoduyla hareket gerçekleşir. $\delta=1.04$'de tekrar bir çatallanma olur ve $1.041<\delta<1.101$ aralığında ayırd edilen noktalar dört tane olur ve peryod tekrar katlanarak $4T=8\pi$ olur. $\delta=1.101$ değerinde çatallanma ile noktalar sonsuza giderek ayırd edilemez hâle gelir ve harekete ait peryod da sonsuza gider. Bu bölgede kaos hakimdir ($1.101<\delta<1.138$). $\delta=1.138$ değerinde hareket tekrar çatallanarak ayırd edilen Poincaré noktaları beş tane olur ve bu bölgede peryod düşerek $5T=10\pi$ olur. $1.138<\delta<1.2$ bölgesinde Poincaré noktaları ayırd edilemez ve sonsuza gider. Bölgede kaos hakimdir ve hareket peryodu sonsuz olur. $\delta=1.2$ değerinde tekrar çatallanma meydana gelir. Üç tane Poincaré noktası ayırd edilir ve peryod $3T=6\pi$ olur. $\delta=1.281$ değerinde tekrar çatallanma meydana gelir. Altı tane Poincaré noktası ayırd edilir peryod $6T=12\pi$ olur. $1.326< \delta<3.4$ olduğu bölgede arasında kaos hakimdir. Poincaré noktaları sonsuza gitmektedir ve hareket peryodu bu bölgede sonsuz olmaktadır. Burada Feigenbaum sabitinin varlığını gözlemlemek de mümkündür. Örneğin, ilk kaosa giriş öncesinde

$$\delta_F = \frac{1.041 - 0.761}{1.101 - 1.041} = 4.667 \tag{3.2}$$

oranı hesaplanmaktadır. Ayrıca Şekil 3.65'deki kaos kartı ve Şekil 3.66'deki çatallanma diyagramı üzerinden seçilen 7 ortak nokta ve kaos kartından ayrıca seçilen 12 diğer nokta Şekil 3.67'da verilmiştir.

Buna göre kartlar üzerinde siyah ile yuvarlak içine alınmış noktalar peryodik, kırmızı ile yuvarlak içine alınmış noktalar ise kaotik parametre kombinasyonunu temsil eder. Şekil 3.59a'daki noktalar hem Şekil 3.57'deki kaos kartını hem de Şekil 3.58'deki çatallanma diyagramını doğrulamaktadır. Ayrıca Şekil 3.59b'de verilen noktalar kaos kartını doğrulamak üzere seçilmiştir. Büyük mavi bölge içinde ve sınırında sırasıyla 18, 19 ile 9, 10, 12 noktaları kaotiktir, sınırda bulunan 15, 16, 17 noktaları peryodiktir. Küçük bölge sınırına denk gelen 8, 14 noktaları kaotik, 5, 13 noktaları peryodiktir.

Ayrıca iç bölgede 7, 11 noktaları da kaotiktir. Çatallanma diyagramından seçilen noktalar için 1, 2, 3 noktaları beyaz alana denk düşen peryodik noktalardır. Küçük bölgenin sınırındaki 4 noktası ve içindeki 6 noktası ise peryodiktir. Bu noktalara ait Poincaré noktaları, peryodlar, Lyapunov üsleri ve hareket durumları Çizelge 3.10'da verilmiştir.



Şekil 3.67: Örnek noktalar a)Kaos kartı ve çatallanma diyagramı (α=2, β_0=3, ζ=0.1, ω̄=9) b) Kaos kartı (α=2, β_0=3, ζ=0.1).

Çizelge 3.10: Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β=3, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu (ω̄, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4, Λ_5, Λ_6)	Durum
1	ω̄=9, δ=0.5	1	T	-0.06666 -0.0664 -1.49263 -2.31063 -2.32076 -34.09364	Peryodik
2	ω̄=9, δ=1	2	2T	-0.04644 -0.06645 -1.78599 -1.86973 -2.15140 -23.78553	Peryodik
3	ω̄=9, δ=1.05	4	4T	-0.01860 -0.09232 -1.73244 -1.83305 -2.24759 -22.71677	Peryodik

Çizelge 3.10 (devam): Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β=3, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4, Λ_5, Λ_6)	Durum
4	$\bar{\omega}$=9, δ=1.1	8	8T	-0.00144 -0.10928 -1.68839 -1.73015 -2.43613 -22.10090	Peryodik
5	$\bar{\omega}$=9, δ=1.19	∞	∞	0.05857 -0.17038 -1.60774 -1.65477 -2.65539 -20.76002	Kaotik
6	$\bar{\omega}$=9, δ=1.21	3	3T	-0.03883 -0.04953 -1.12217 -1.12410 -4.68507 -10.44847	Peryodik
7	$\bar{\omega}$=9, δ=1.4	∞	∞	0.035281 -0.12200 -1.13666 -1.16810 -4.09651 -11.90503	Kaotik
8	$\bar{\omega}$=4.3, δ=3.4	∞	∞	0.04663 -0.26672 -3.28302 -3.52491 -7.28352 -41.95564	Kaotik
9	$\bar{\omega}$=7.2, δ=2	∞	∞	0.04987 -0.13961 -1.17559 -1.19438 -5.48493 -11.07536	Kaotik
10	$\bar{\omega}$=6.2, δ=1.5	∞	∞	0.08231 -0.22639 -2.08390 -2.10995 -4.90365 -24.14718	Kaotik
11	$\bar{\omega}$=6.2, δ=3.9	∞	∞	0.00165 -0.19565 -2.21919 -2.33013 -6.44775 -28.48688	Kaotik

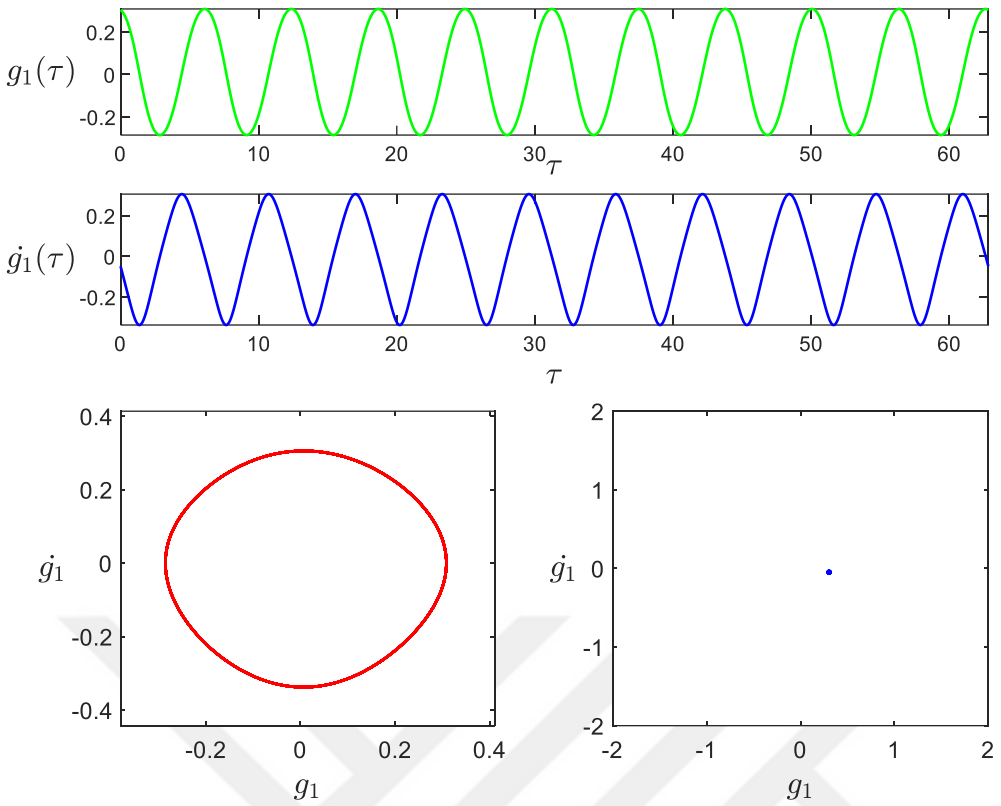
Çizelge 3.10 (devam): Kaos kartına göre örnek noktalar (α=2, β=3, ζ=0.1).

Numara	Parametre Kombinasyonu ($\bar{\omega}$, δ)	Poincaré Noktası	Peryod (T)	Lyapunov Üsleri (Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4, Λ_5, Λ_6)	Durum
12	$\bar{\omega}$=16.7, δ=2.2	∞	∞	0.01455 -0.04125 -0.24063 -0.35646 -0.99400 -2.41547	Kaotik
13	$\bar{\omega}$=4, δ=3.1	4	4T	-0.01451 -0.22797 -3.49610 -3.78952 -7.43217 -45.13464	Peryodik
14	$\bar{\omega}$=4.1, δ=3.1	∞	∞	0.05207 -0.29130 -3.51360 -3.67628 -7.40360 -44.92405	Kaotik
15	$\bar{\omega}$=11, δ=1.5	2	2T	-0.00913 -0.02409 -0.37405 -0.38038 -2.29744 -2.41853	Peryodik
16	$\bar{\omega}$=7, δ=2	1	T	-0.02004 -0.02885 -0.65933 -0.65862 -4.42423 -4.77800	Peryodik
17	$\bar{\omega}$=10.7, δ=4.3	1	T	-0.02407 -0.04100 -0.45747 -0.46476 -2.89362 -3.03530	Peryodik
18	$\bar{\omega}$=11.5, δ=3.2	∞	∞	0.06421 -0.06892 -0.20136 -0.32434 -0.96040 -1.31566	Kaotik
19	$\bar{\omega}$=8.4, δ=1.6	∞	∞	0.06366 -0.15929 -1.31419 -1.32395 -4.546429 -13.52738	Kaotik

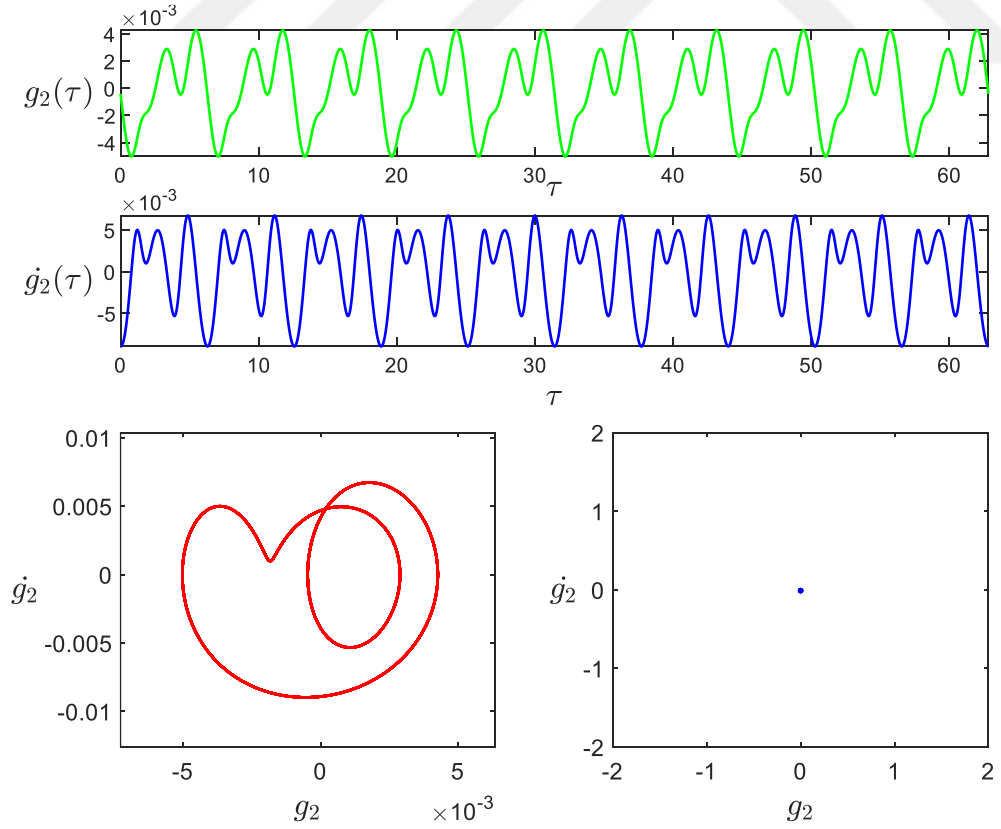
Buna göre, verilen noktalar çatallanma diyagramını ve kaos kartını doğrulamaktadır. Lyapunov üslerinin bir tanesi pozitif olanlar kaotik olan parametre kombinasyonuna sahiplerdir. Her iki üssün negatif olduğu parametre kombinasyonlarında harmonik ve harmonik altı titreşim davranışı gözlenir. Ayrıca büyük kaotik bölgenin içinde ve sınırlarında kaotik ve yer yer peryodik noktalar bulunurken, beyaz bölgenin içinde ve sınırlarında ise peryodik noktalar bulunmaktadır.

Çizelgede verilen noktalardan 1, 2, 4 ve 5 no'lu örnekler sırasıyla Şekil 3.34−3.43 arasındaki grafiklerde konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri bakımından ayrıca incelenecektir.

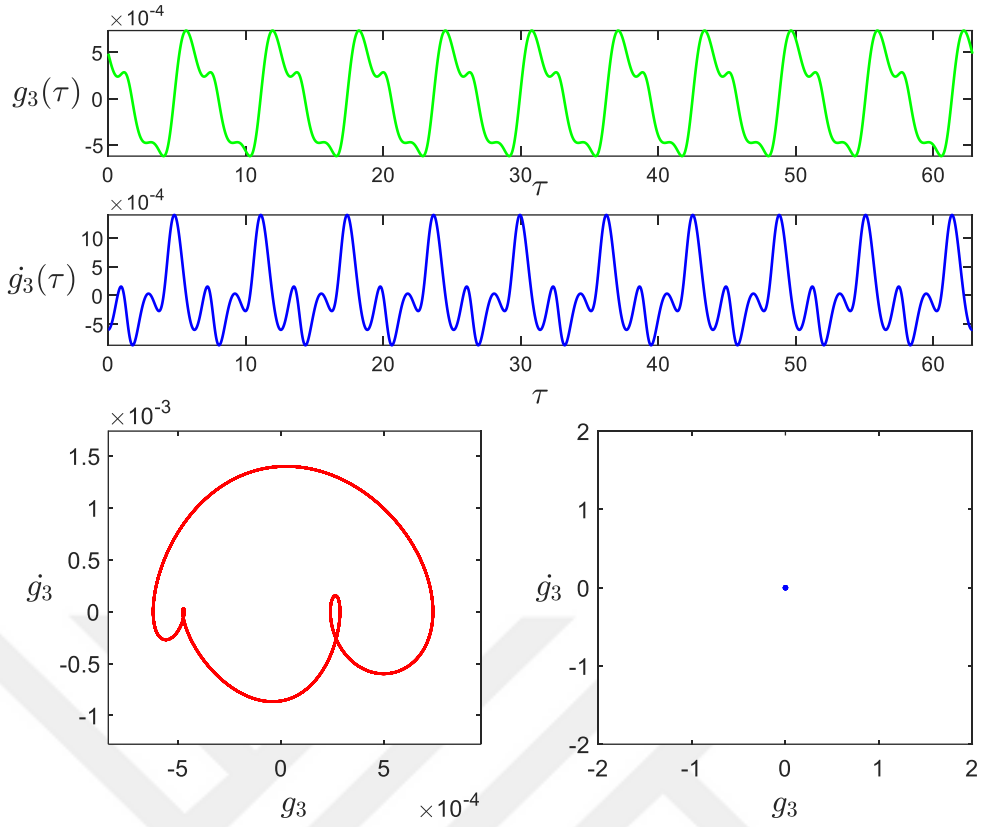
Şekil 3.65'te verilen kaos kartında bir peryodik bir bölgeye düşen 1 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=0.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9) Şekil 3.68, Şekil 3.69 ve Şekil 3.70 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.06666179, Λ_2=−0.06647894, Λ_3=−1.492634, Λ_4=−2.310635, Λ_5=−2.320768 ve Λ_6=−34.09364 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her üç koordinat için de n=1 nokta bulunmakta, böylece hareketin T=2π peryodlu olduğu söylenir. Faz diyagramında üç koordinata ait kapalı yörüngelerin izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her üç koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.



Şekil 3.68: 1 noktasına ait (δ=0.5) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9).

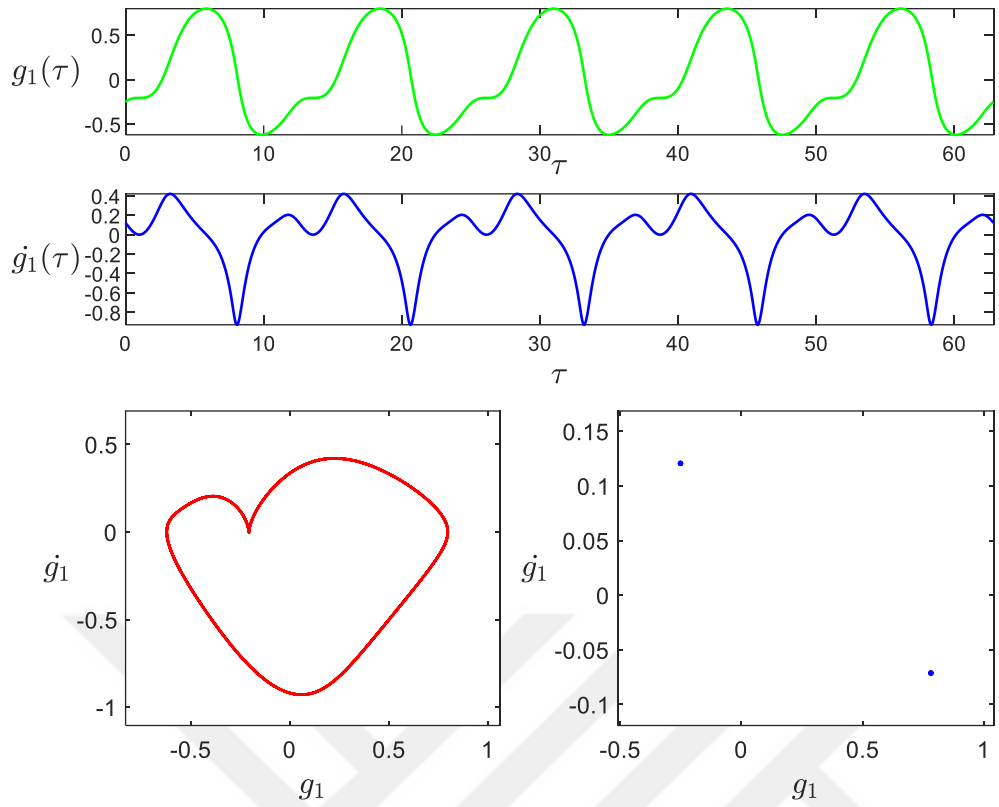


Şekil 3.69: 1 noktasına ait (δ=0.5) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9).

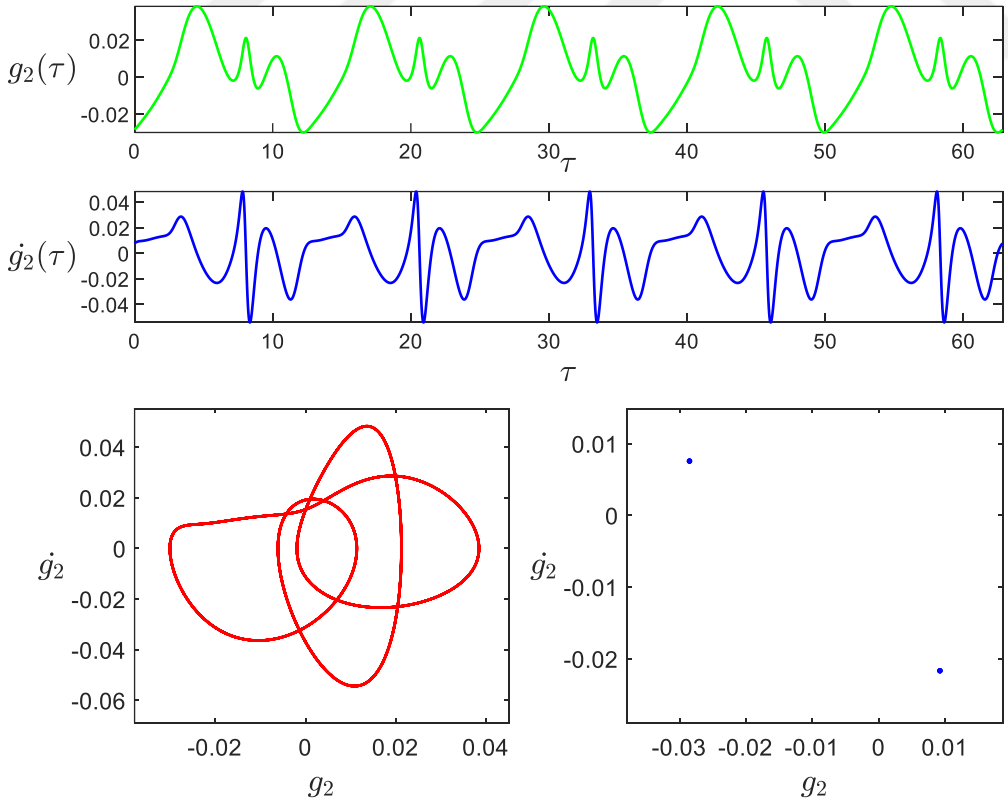


Şekil 3.70: 1 noktasına ait (δ=0.5) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).

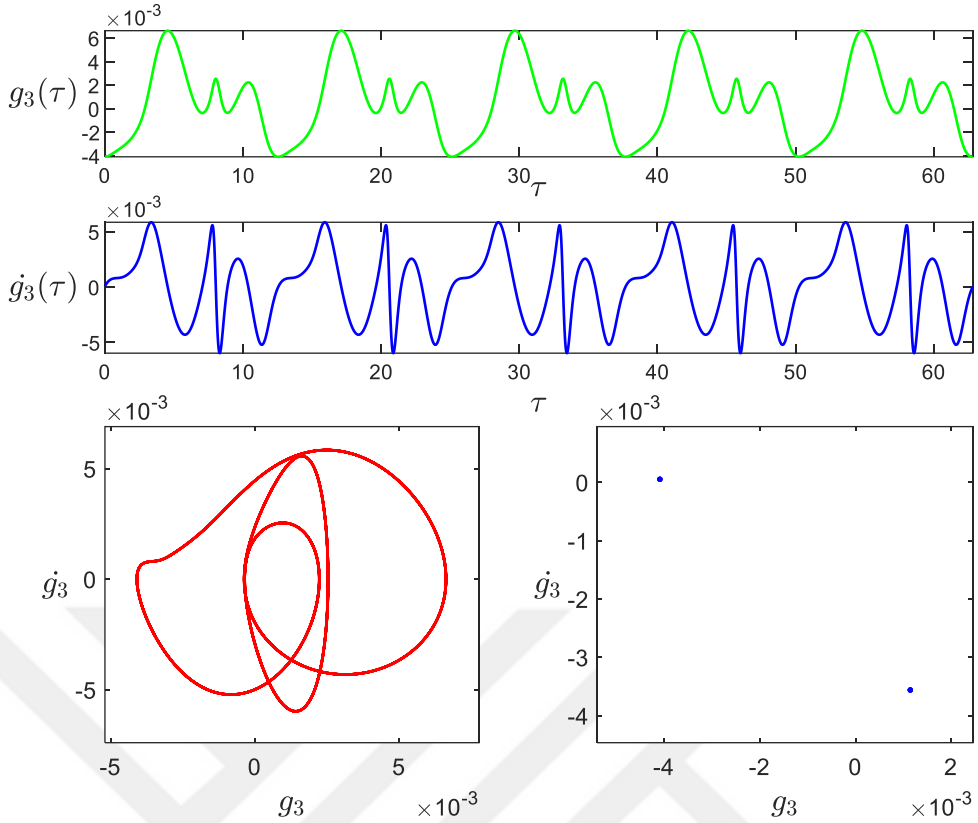
Şekil 3.57'de verilen kaos kartında bir peryodik bir bölgeye düşen 2 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1, ζ=0.1, ϖ=9) Şekil 3.71, Şekil 3.72 ve Şekil 3.73 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.04644368, Λ_2=−0.06645711, Λ_3=−1.785995, Λ_4=−1.869736, Λ_5=−2.151403 ve Λ_6=−23.78553 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her üç koordinat için de n=2 nokta bulunmakta, böylece hareketin 2T=4π peryodlu olduğu ve harmonik altı olduğu söylenir. Faz diyagramında üç koordinata ait kapalı yörüngelerin izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her üç koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.



Şekil 3.71: 2 noktasına ait (δ=1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).

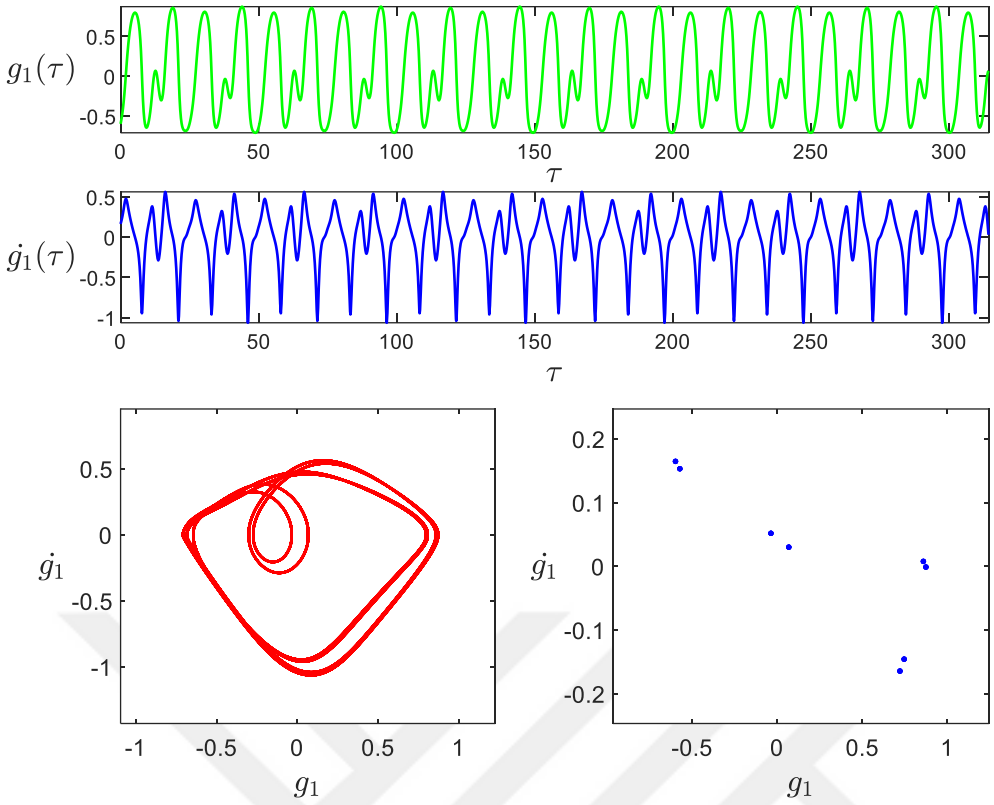


Şekil 3.72: 2 noktasına ait (δ=1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).

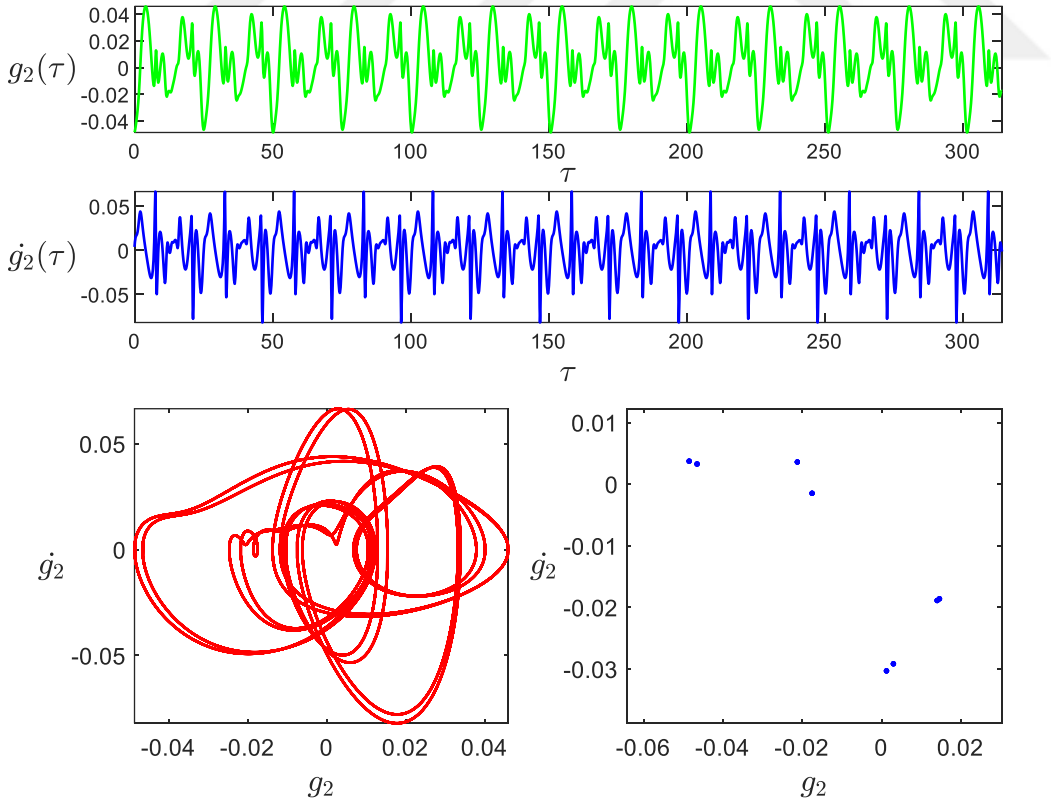


Şekil 3.73: 2 noktasına ait (δ=1) için konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).

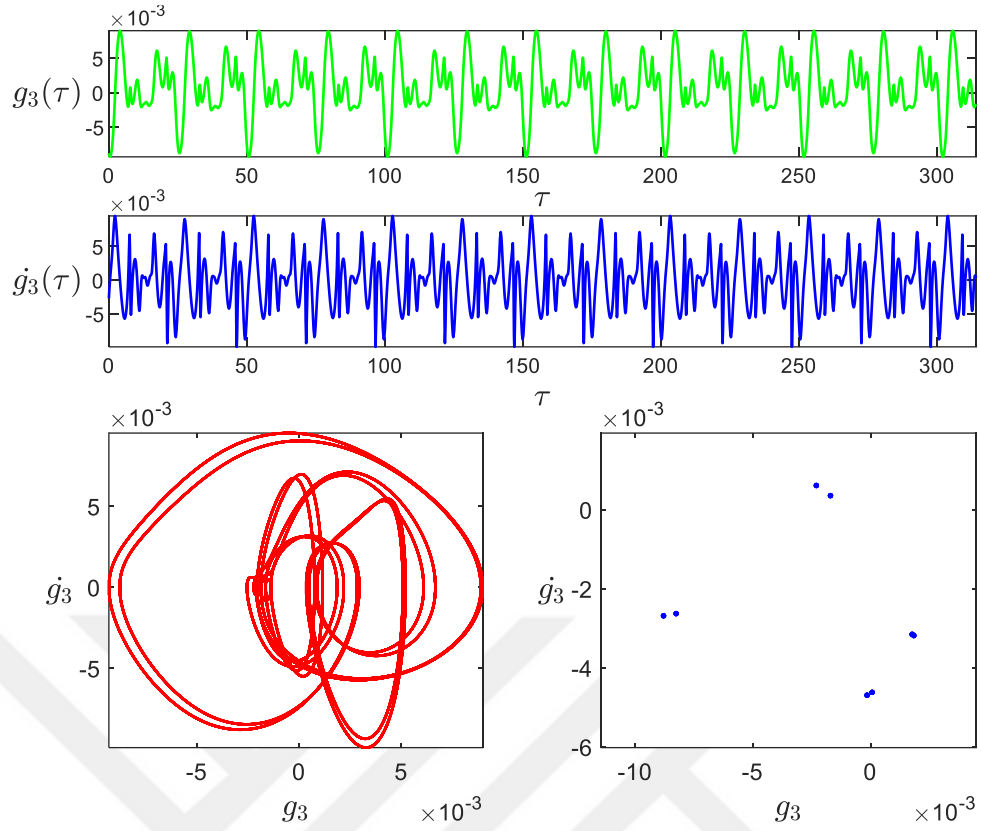
Şekil 3.65'te verilen kaos kartında bir peryodik bir bölgeye düşen 4 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1, ζ=0.1, ϖ=9) Şekil 3.74, Şekil 3.75 ve Şekil 3.76 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.001443691, Λ_2=−0.1092879, Λ_3=−1.688398, Λ_4=−1.730152, Λ_5=−2.436133 ve Λ_6=−22.1009 olarak hesaplanmıştır. Poincaré tasvirlerinde her üç koordinat için de n=8 nokta bulunmakta, böylece hareketin 8T=16π peryodlu olduğu ve harmonik altı olduğu söylenir. Faz diyagramında üç koordinata ait kapalı yörüngelerin izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri her üç koordinat için de kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.



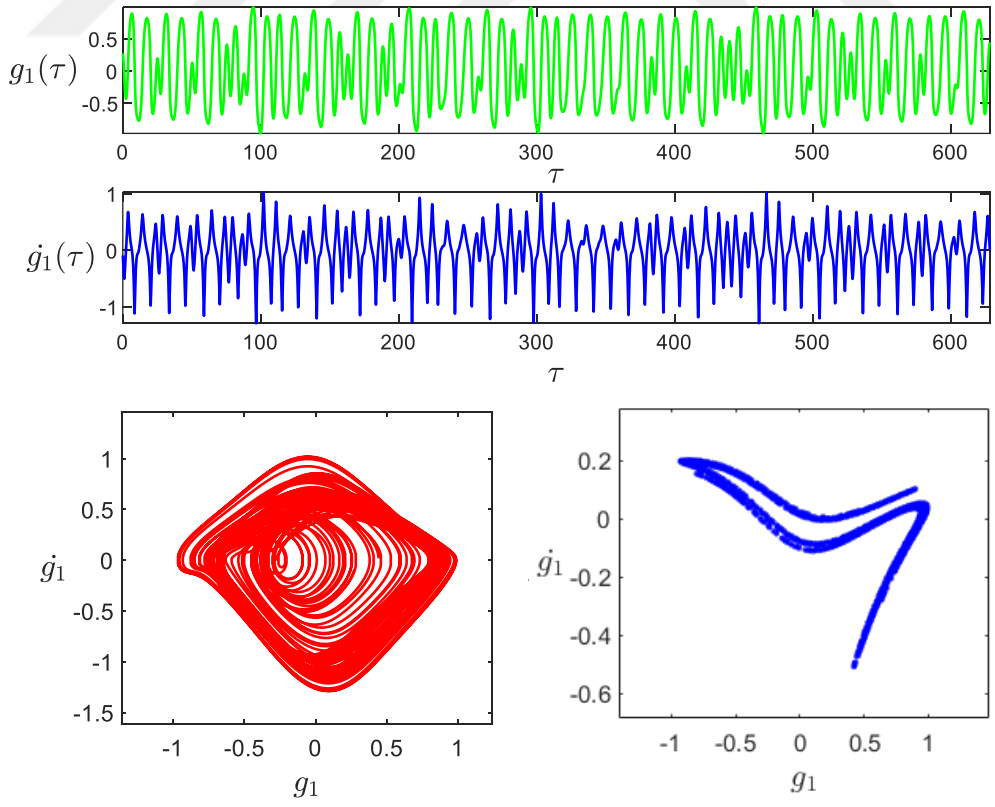
Şekil 3.74: 4 noktasına ait (δ=1.1) için konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9).



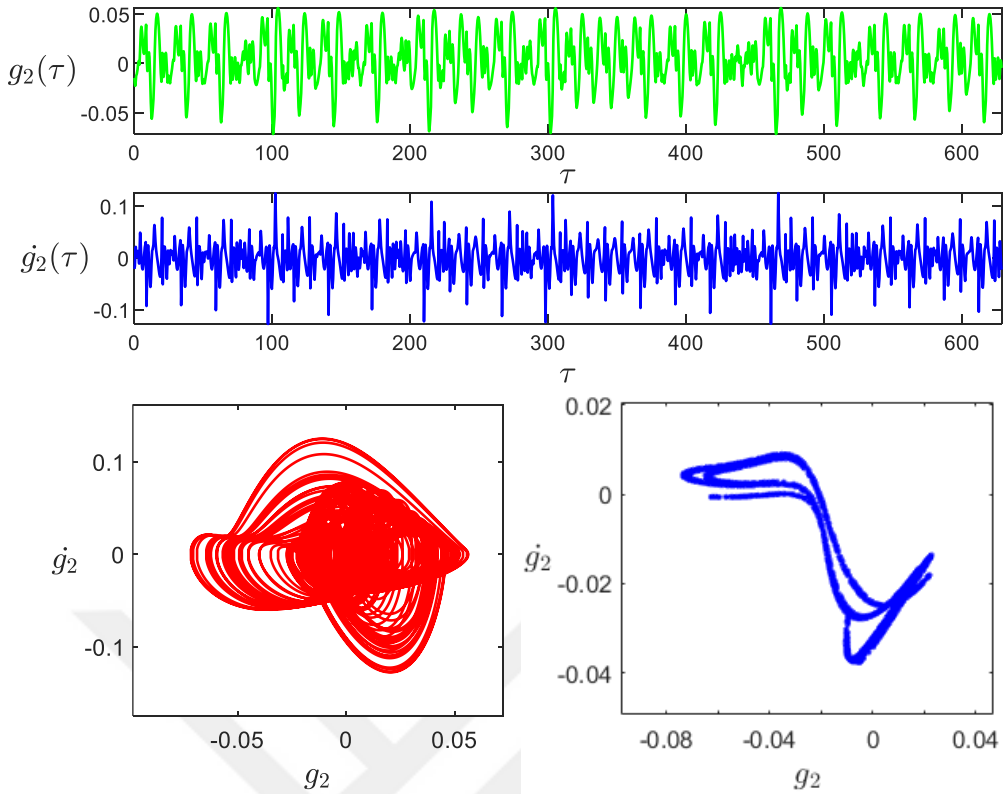
Şekil 3.75: 4 noktasına ait (δ=1.1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9).



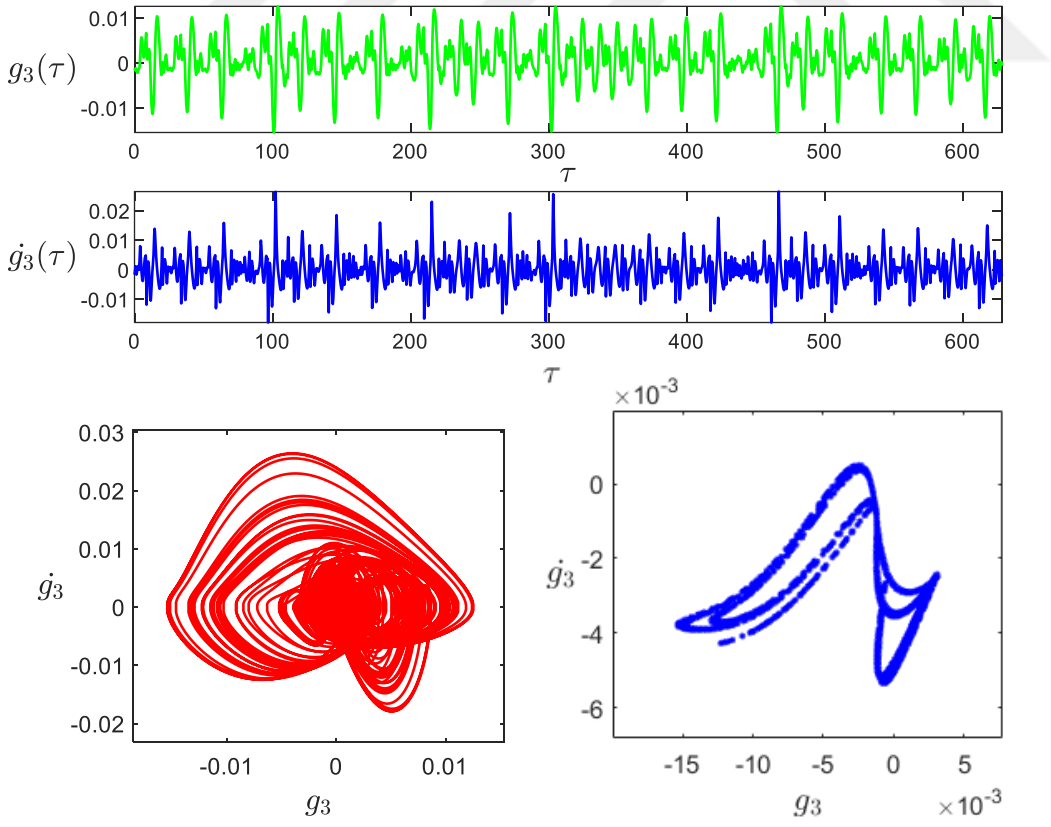
Şekil 3.76: 4 noktasına ait (δ=1.1) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).



Şekil 3.77: 5 noktasına ait (δ=1.19) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).



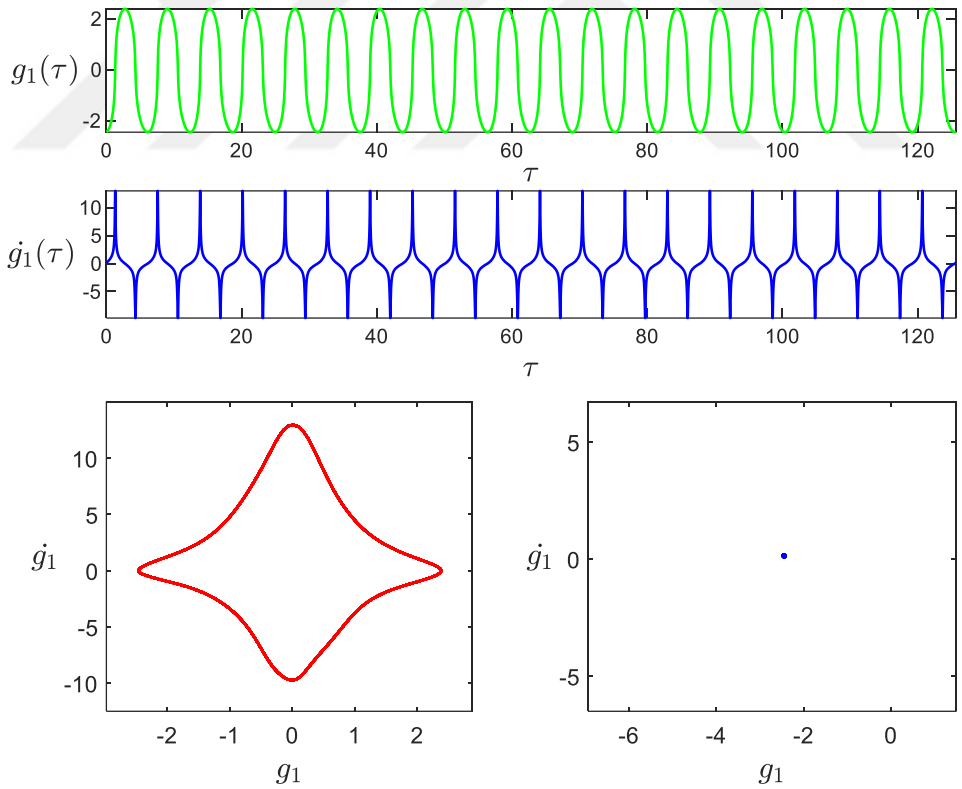
Şekil 3.78: 5 noktasına ait (δ=1.19) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).



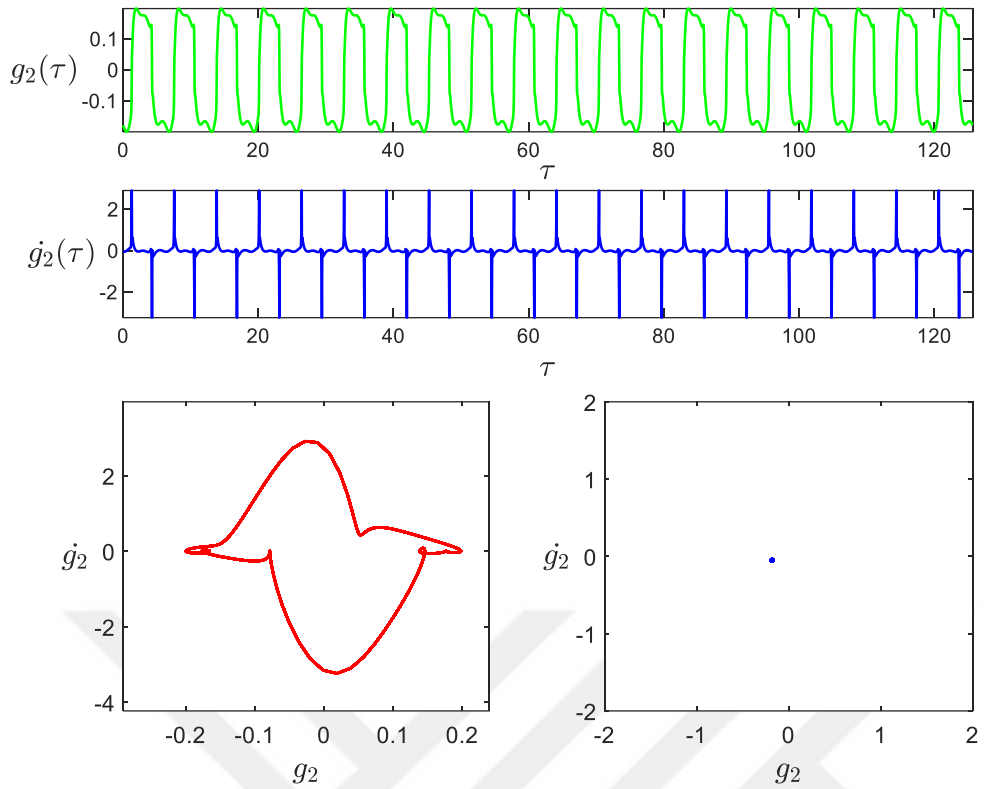
Şekil 3.79: 5 noktasına ait (δ=1.19) konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, ζ=0.1, ϖ=9).

Şekil 3.57'de verilen kaos kartında kaotik bir bölgeye düşen 5 noktasına ait (α=2, β_0=3, δ=1.19, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=9) Şekil 3.77, Şekil 3.78 ve Şekil 3.79 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.05857162, Λ_2=−0.170389, Λ_3=−1.607745, Λ_4=−1.654773, Λ_5=−2.655396 ve Λ_6=−20.76002 olarak hesaplanmıştır, üslerden bir tanesi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde her üç koordinat için de sonsuz nokta bulunmakta, böylece harekete ait peryodun sonsuz olduğu ve sistemin aperyodik davrandığı söylenir. Üç koordinata da ait faz diyagramlarında yörüngeler tekrarlanmayan ve düzlemi dolduran bir davranış sergiler. Konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde de davranışların rastgele gibi ve düzensiz olduğu görülür. Bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde kaotik olacağına dair işarettir.

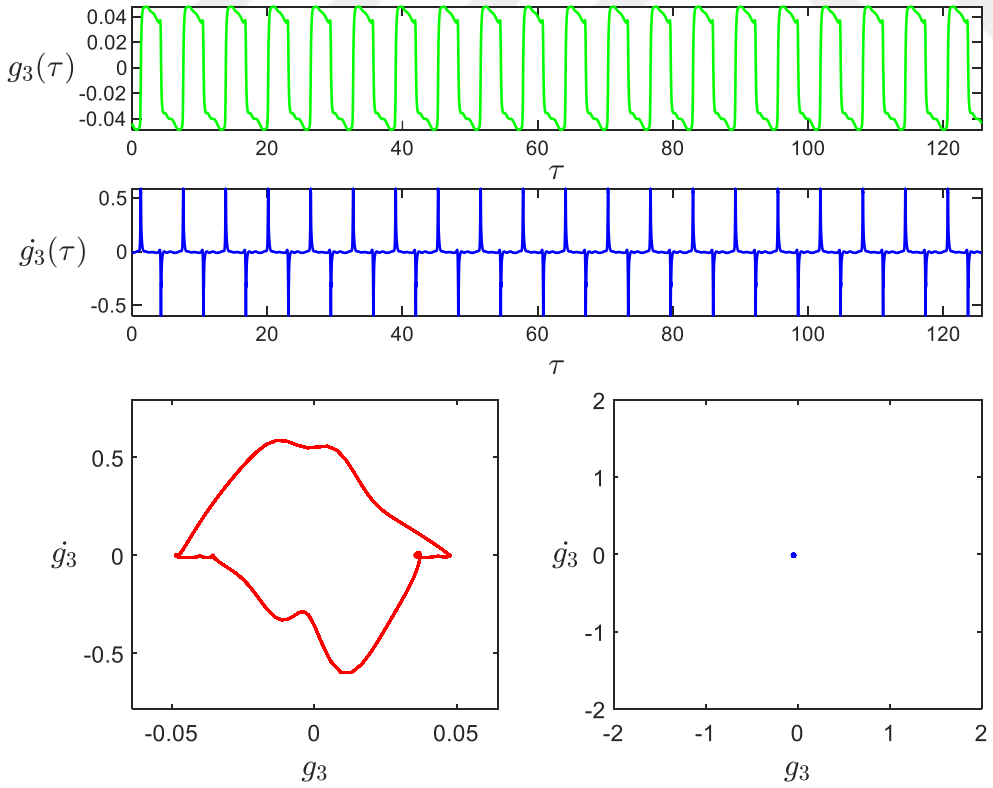
Böylece, çatallanma diyagramı ile Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartını uyumlu olduğu görülmüş ve bunların tespitlerinin diğer ölçütlerce de doğrulandığı anlaşılmış olmaktadır. Ayrıca kaos kartının hassasiyetini kontrol amacıyla 10, 16 noktalarını da inceleyelim.



Şekil 3.80: 16 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=7).

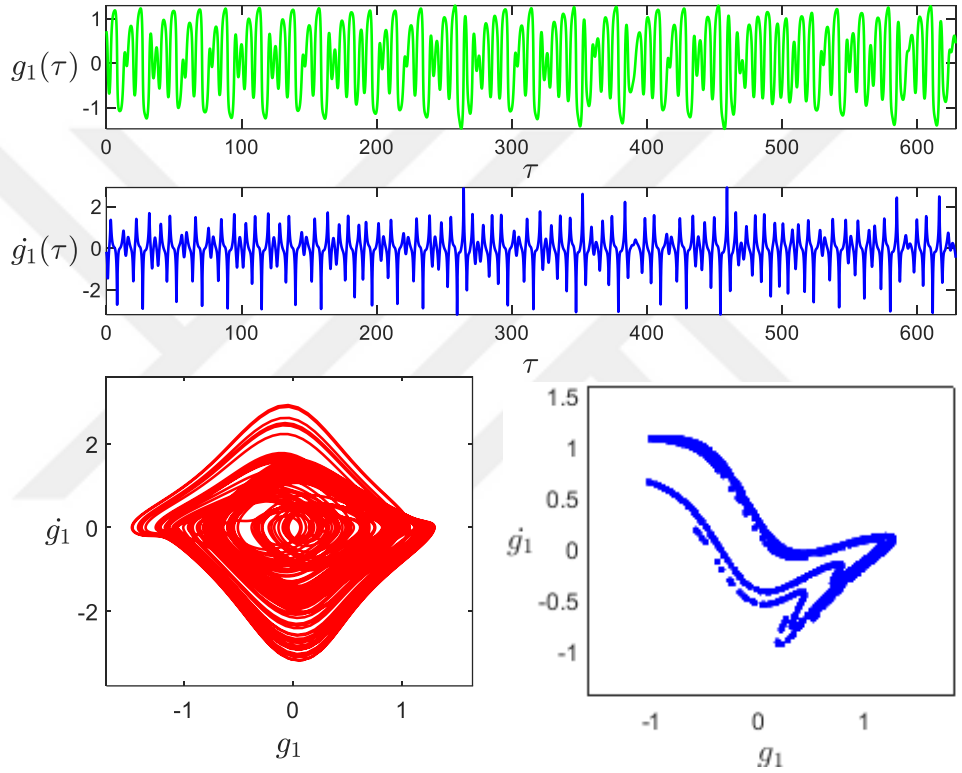


Şekil 3.81: 16 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, ϖ=7).

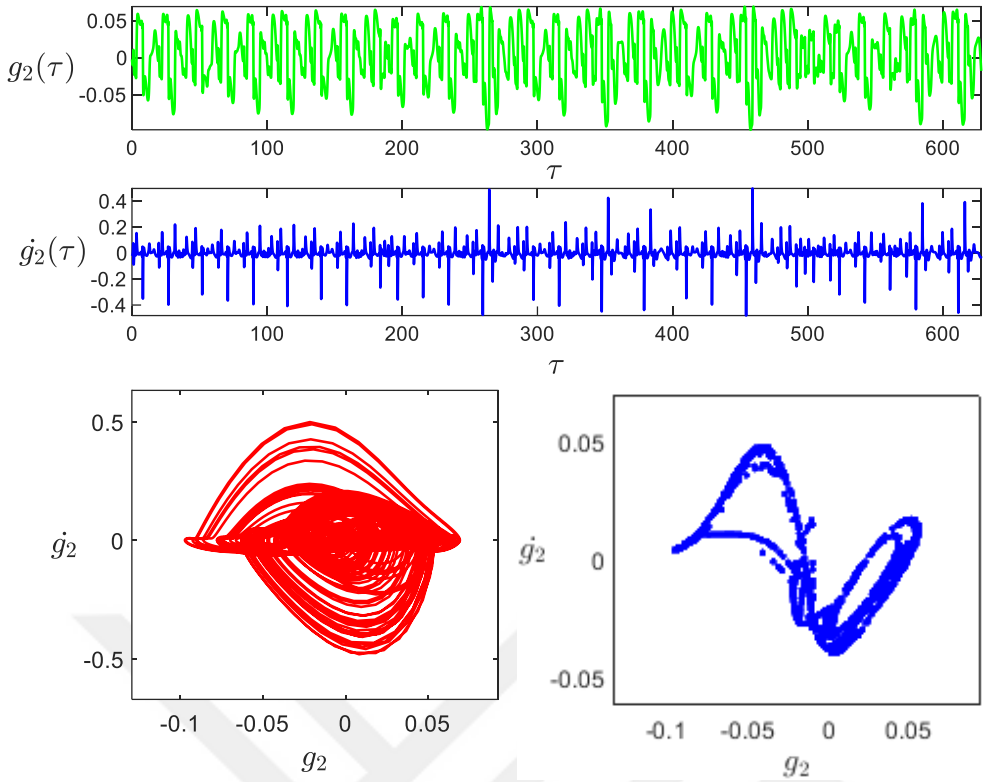


Şekil 3.82: 16 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, ϖ=7).

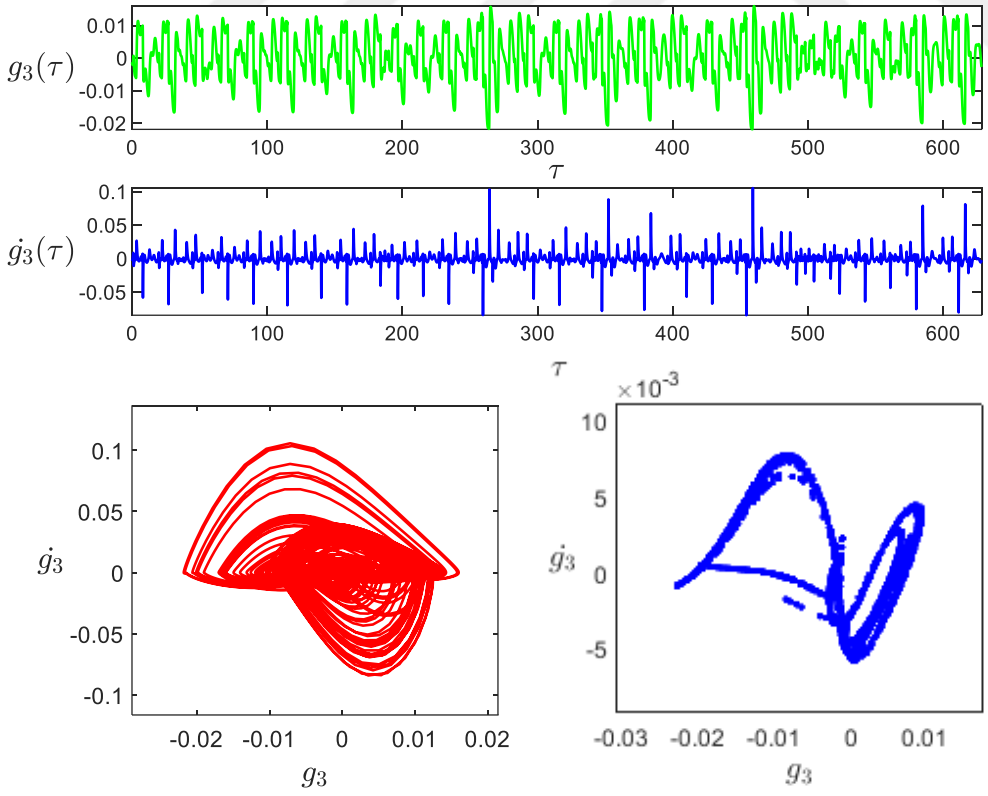
Şekil 3.65'te verilen kaos kartında bir peryodik bir bölgeye düşen 16 noktasına ait (α=2, β=3, δ=2, ζ=0.1, ϖ=7) Şekil 3.80, Şekil 3.81 ve Şekil 3.82 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=−0.02004, Λ_2=−0.02885, Λ_3=−0.65933, Λ_4=−0.65862, Λ_5=−4.42423 ve Λ_6=−4.77800 olarak hesaplanmıştır. Her üç koordinat için: Poincaré tasvirlerinde n=1 nokta bulunmakta, T=2π peryodlu hareket söz konusudur. Faz diyagramlarında kapalı yörüngelerin izlendiği görülür. Konum−zaman ve hız−zaman grafikleri kendilerini tekrar etmekte olup bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde peryodik olacağına işarettir.



Şekil 3.83: 10 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, ϖ=6.2).



Şekil 3.84: 10 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, ϖ=6.2).



Şekil 3.85: 10 noktasına ait konum−zaman ve hız−zaman grafiği, faz diyagramı ve Poincaré tasviri (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, ϖ=6.2).

Şekil 3.65'te verilen kaos kartında kaotik bir bölgeye düşen 10 noktasına ait (α=2, β=3, δ=1.5, ζ=0.1, $\bar{\omega}$=6.2) Şekil 3.83, Şekil 3.84 ve Şekil 3.85 verilmiştir. Bu noktanın Lyapunov üsleri Λ_1=0.08231, Λ_2=−0.22639, Λ_3=−2.08390, Λ_4=−2.10995, Λ_5=−4.90365 ve Λ_6=−24.14718 olarak hesaplanmıştır, üslerden bir tanesi pozitiftir. Poincaré tasvirlerinde her üç koordinat için de sonsuz nokta bulunmakta, böylece hareket peryodunun sonsuz olduğu söylenir. Faz diyagramlarında yörüngeler tekrarlanmayan ve düzlemi dolduran bir davranış sergiler. Konum−zaman ve hız−zaman grafiklerinde de kaotik davranışlar olduğu görülür. Bütün bu kriterler hareketin bu parametre bileşenlerinde kaotik olacağına dair işarettir.

Elde edilen bulgular, çatallanma diyagramının kaos kartını doğruladığını göstermektedir. Ayrıca seçilen noktalar da kaos kartını doğrulamakta olup, bu kartın güvenilirliğini artırmıştır.

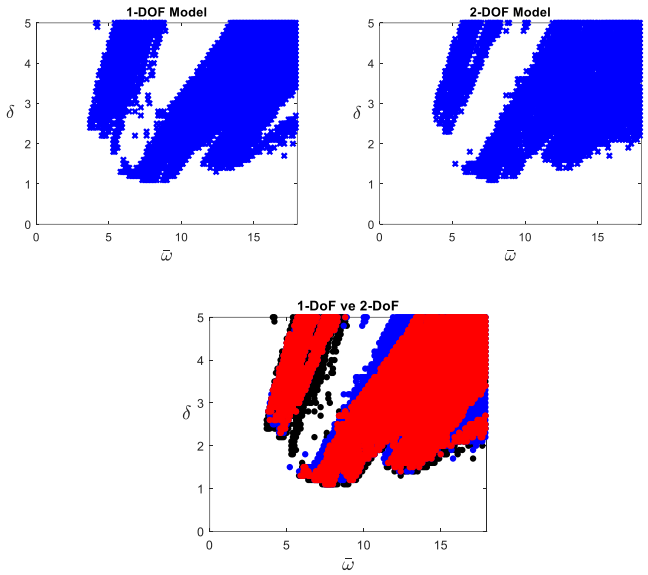
Sonuç olarak: Bölüm 3.1 ve Bölüm 3.2.1'deki incelemeler daha üst bir modelle incelenmiş ve o bölümlerde elde edilen sonuçlara nitel olarak benzer sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçların ayrıntılı bir nicel karşılaştırmasına aşağıda yer verilecektir.

3.4 Bir, İki ve Üç Serbestlik Dereceli Modellerin Karşılaştırılması

Farklı modelleri karşılaştırmak amacıyla aynı parametre düzlemlerinde kaos kartları elde edilmiştir. Bir, iki ve üç serbestlik dereceli modellere ait hareketi yöneten denklemler sırasıyla, Denklem (2.10); Denklem (2.11) ve Denklem (2.12); Ek B olarak verilmiştir.

3.4.1 $\bar{\omega}$−δ düzleminde 3 modelin karşılaştırılması

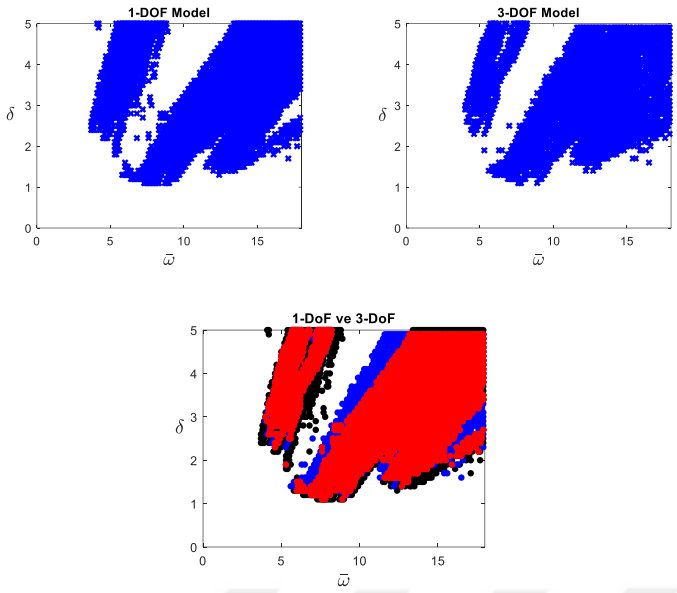
Hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü α=2, β=3, ζ=0.1 (Boyutsuz göbek yarıçapı, ortalama dönme hızı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}$−δ (Boyutsuz Dalgalanma frekansı−Dalgalanma katsayısı) düzleminde sistemin 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 9000 nokta taranarak Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulmuştur. Sırasıyla bir ve iki serbestlik dereceli model, bir ve üç serbestlik dereceli model ile iki ve üç serbestlik dereceli modeller Şekil 3.86, Şekil 3.87 ve Şekil 3.88'de verilen grafikler üzerinden karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.86: Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması($\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$).

Buna göre, düşük serbestlik dereceli modelden yüksek serbestlik dereceli modele geçerken: siyah noktalar, kaotik→peryodik; mavi noktalar, peryodik→kaotik; kırmızı noktalar, kaotik→kaotik; beyaz noktalar, peryodik→peryodik şeklinde gösterilmektedir.

Bir serbestlik dereceli modelden iki serbestlik dereceli modele geçerken büyük bir siyah hat bölgesi ve birkaç tane tekil nokta ile kaotik bölge azalması görülmekte. Öte yandan dört tane mavi bölge ve birkaç tane tekil nokta ile yeni kaotik bölgeler oluştuğu söylenir. Büyük oranda peryodik bölgenin ve kaotik bölgenin korunduğu fakat arada ciddi farklar olduğu belirlenmiştir. Yani eğer incelenen sistemde yalnızca kaotik davranışın varlık tespiti yapılacaksa bir serbestlik dereceli model yeterli iken, kaotik davranışın hangi parametre bileşimlerinde ortaya çıkacağının hassas tespiti amaçlanıyorsa iki serbestlik dereceli model daha iyi bir seçim olacaktır. Öte yandan Bir serbestlik dereceli modele ait problemin çözüm süresi, iki serbestlik dereceli modelin çözüm süresinin yaklaşık dörtte birine denk gelmektedir. (Çözülen denklem sayısı bir SD'li modelde 6 tane, iki SD'li modelde 20 tane)

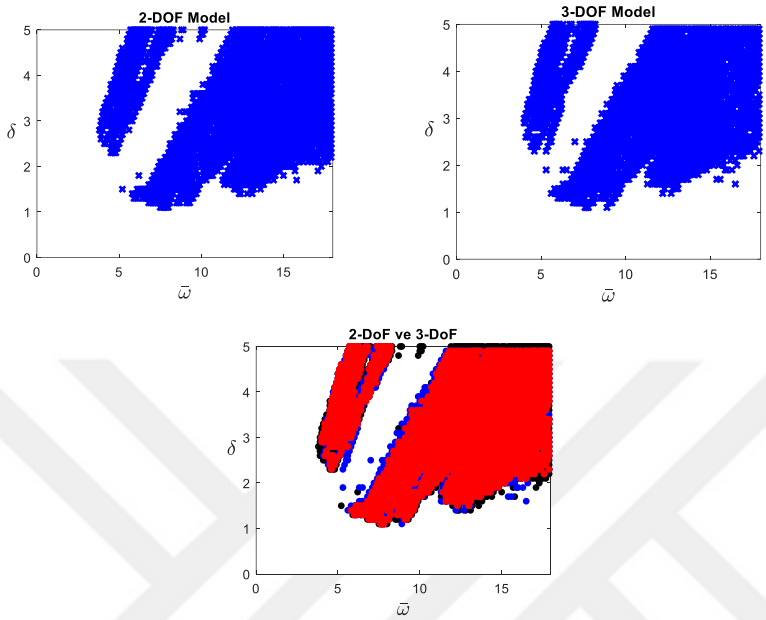


Şekil 3.87: Bir ve üç serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması($\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$).

Bir serbestlik dereceli modelden üç serbestlik dereceli modele geçerken dört tane siyah hat bölgesi ve birkaç tane tekil nokta ile kaotik bölge azalması görülmekte. Öte yandan dört tane mavi bölge ve birkaç tane tekil nokta ile yeni kaotik bölgeler oluştuğu söylenir. Bir ve iki serbestlik dereceli modeldeki gibi burada da büyük oranda peryodik bölgenin ve kaotik bölgenin korunduğu fakat arada ciddi farklar olduğu belirlenmiştir. Yani eğer incelenen sistemde yalnızca kaotik davranışın varlık tespiti yapılacaksa bir serbestlik dereceli model yeterli iken, kaotik davranışın hangi parametre bileşimlerinde ortaya çıkacağının hassas tespiti amaçlanıyorsa iki serbestlik dereceli model daha iyi bir seçim olacaktır. Öte yandan bir serbestlik dereceli modele ait problemin çözüm süresi, üç serbestlik dereceli modelin çözüm süresinin yaklaşık otuzikide birine denk gelmektedir. (Çözülen denklem sayısı bir SD'li modelde 6 tane, üç SD'li modelde 42 tane)

İki serbestlik dereceli modelden üç serbestlik dereceli modele geçerken dört tane ufak bölge ile birkaç nokta azalması görülmekte. Öte yandan kaotik bölge sınırlarında çok ince hatlar ile birkaç nokta ile yeni kaotik bölgeler oluştuğu söylenir. Peryodik bölgenin ve kaotik bölgenin önceki model karşılaştırmalarına nazaran daha iyi korunduğu ve arada ciddi farklar olmadığı belirlenmiştir. Yani iki model birbirine çok yakın sonuçlar vermektedir. Buna göre kaotik davranışın ortaya çıkacağı parametre bileşimlerinin hassas tespiti için üç serbestlik dereceli modelin üstün olacağı açık olmakla birlikte, iki serbestlik dereceli modelle aralarında çok büyük farklar

gözlenmemektedir. Öte yandan, iki serbestlik dereceli modele ait problemin çözüm süresi, üç serbestlik dereceli modelin çözüm süresinin yaklaşık üçte birine denk gelmektedir. (Çözülen denklem sayısı iki SD'li modelde 20 tane, üç SD'li modelde 42 tane)



Şekil 3.88: İki ve üç serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması ($\alpha=2$, $\beta=3$, $\zeta=0.1$).

Her üç model göz önüne alındığında:

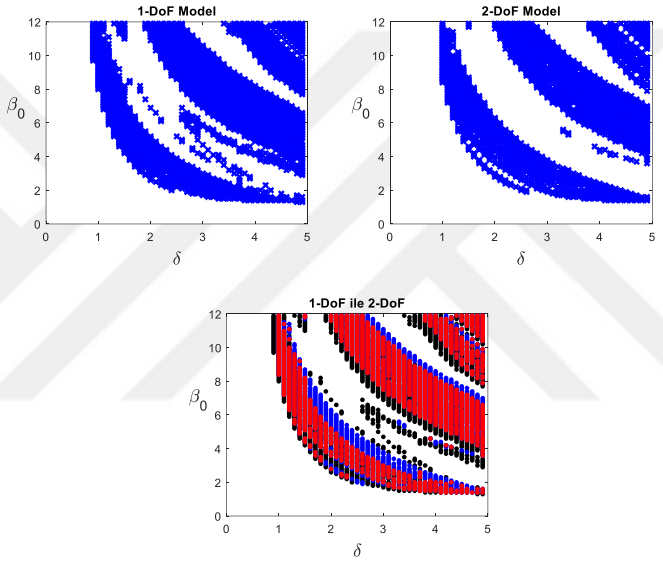
- Bir serbestlik dereceli modelin kaotik davranış tespiti için yeterli ama ayrıntılı parametre tespiti için yetersiz olduğu, çözümünün diğer modellere göre az bilgisayar zamanı gerektirdiği fakat sonuçların diğer modellerden ciddi farklar içerdiği
- İki serbestlik dereceli modelin hem kaotik davranış hem parametre tespiti için yeterli olduğu, çözümü için harcanan sürenin orta uzunlukta olduğu ve zaman maliyeti kendisinden çok daha yüksek olan üç serbestlik dereceli modelden çok farklı sonuç vermediği
- Üç serbestlik dereceli modelin çözümü için harcanan sürenin çok yüksek olduğu fakat iki serbestlik dereceli modelden aşırı farklı sonuçlar vermediği

çıkarılabilir. Böylece üç model arasında en ideal olanının zaman maliyeti çok yüksek olmadığı halde doğru sonuçlara yeterli yakınsama sağladığı anlaşılan iki serbestlik dereceli model olduğuna karar verilmiştir. Aşağıda bu modelin bir

serbestlik dereceli modelle başka parametre düzlemindeki karşılaştırmalarına yer verilmektedir.

3.4.2 δ−β₀ düzleminde 2 modelin karşılaştırılması

Hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü α=1, ζ=0.1 $\bar{\omega}$=6 (Boyutsuz göbek yarıçapı, viskoz sönüm faktörü, boyutsuz dalgalanma frekansı) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu δ−β₀ (Boyutsuz Dalgalanma frekansı katsayısı−Ortalama dönme hızı) düzleminde sistemin 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 6000 nokta taranarak Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulmuştur. Bir ve iki serbestlik dereceli modeller Şekil 89'da verilen grafikler üzerinde karşılaştırılmıştır.



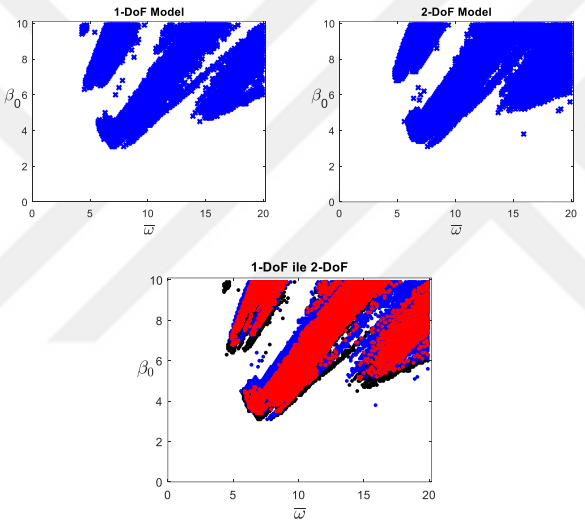
Şekil 3.89: Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}$−δ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması (α=1, ζ=0.1 $\bar{\omega}$=6).

Buna göre, düşük serbestlik dereceli modelden yüksek serbestlik dereceli modele geçerken: siyah noktalar, kaotik→peryodik; mavi noktalar, peryodik→kaotik; kırmızı noktalar, kaotik→kaotik; beyaz noktalar, peryodik→peryodik şeklinde gösterilmektedir. Bir serbestlik dereceli modelden iki serbestlik dereceli modele geçerken üç bölgenin sınırında da siyah hat bölgesi , büyük ve orta bölge arasında bir siyah bölge ile birkaç tane nokta görülmektedir, yani bu bölgelerde kaotik bölgeler peryodik bölgeye dönmektedir. Bir diğer yandan bölgelerin diğer sınır bölgelerinde kalın ve ince mavi bölgeler vardır. Köşedeki küçük bölgenin içinde de mavi bölgeler bulunmaktadır. Buna ek olarak birkaç tane tekil nokta ile yeni kaotik bölgeler oluştuğu söylenir. Büyük oranda peryodik bölgenin ve kaotik bölgenin korunduğu fakat arada

ciddi farklar olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak, bu parametre düzlemindeki incelemelerde de bir serbestlik dereceli modelin 2 serbestlik dereceli model yanında yetersiz kaldığı anlaşılmaktadır.

3.4.3 $\bar{\omega}-\beta_0$ düzleminde 2 modelin karşılaştırılması

Hareketi kontrol eden 5 parametreden üçü $\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$ (Boyutsuz göbek yarıçapı, boyutsuz dalgalanma katsayısı, viskoz sönüm faktörü) şeklinde seçilip diğer iki parametrenin oluşturduğu $\bar{\omega}-\beta_0$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı −Ortalama dönme hızı) düzleminde 0.1 x 0.1 çözünürlüğüyle 20000 nokta taranarak sistemin Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı oluşturulmuştur. Bir ve iki serbestlik dereceli modeller Şekil 90'da verilen grafikler üzerinde karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.90: Bir ve iki serbestlik dereceli modellere ait a) $\bar{\omega}-\delta$ düzleminde kaos kartı b) kaos kartı karşılaştırması ($\alpha=1$, $\delta=1.6$, $\zeta=0.1$).

Buna göre, düşük serbestlik dereceli modelden yüksek serbestlik dereceli modele geçerken: siyah noktalar, kaotik→peryodik; mavi noktalar, peryodik→kaotik; kırmızı noktalar, kaotik→kaotik; beyaz noktalar, peryodik→peryodik şeklinde gösterilmektedir. Bir serbestlik dereceli modelden iki serbestlik dereceliye geçerken ilkin solda küçük siyah bölge bulunmakta. Öte yandan soldaki orta siyah bölgenin sınırında siyah bölge ve mavi hatlar bulunmakta. Sağdaki büyük bölgede ise sınırda kalın bir mavi hat bulunmakta. Bölgenin iç kısmında mavi bölgeler ile yeni kaotik bölgeler doğmaktayken bölgenin sağ sınırında siyah bölgeler ile kaotik bölgeler kayıp olmaktadır. Bazı bölgelerde de siyah−mavi tekil noktalar bulunmaktadır. Büyük oranda peryodik bölgenin ve kaotik bölgenin korunduğu fakat arada ciddi farklar

olduğu belirlenmiştir. Sonuç olarak, yine, bir serbestlik dereceli modelin nicel hassasiyet bakımından yetersiz kaldığı anlaşılmaktadır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Dalgalanan hızla dönen rotor−pala sistemlerine ait üç farklı model üzerinde lineer olmayan titreşim davranışları ele alınmış ve bunlar kaos kriterleri açısından değerlendirilmiştir. Sistem parametreleri; boyutsuz göbek yarıçapı α, ortalama dönme hızı β_0, boyutsuz hız dalgalanma katsayısı δ, boyutsuz hız dalgalanma frekansı $\bar{\omega}$ ve viskoz sönüm faktörü ζ olarak belirlendikten sonra sırasıyla bir, iki ve üç serbestlik dereceli ayrık modeller inşa edilmiştir. Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartları, çatallanma diyagramları, konum−zaman ve hız−zaman grafikleri, faz diyagramları ve Poincaré tasvirleri verilerek kaotik davranışlar hakkında bazı sonuçlar elde edilmiştir.

- Rotordaki açısal hız dalgalanmasının, sistem parametrelerinin bazı kombinasyonlarında palada kaotik titreşim davranışına sebep olacağı görülmüştür ve üretilen 3 farklı modelde de bunu destekleyen sonuçlar elde edilmiştir.
- Sistem parametrelerinden $\delta-\alpha$ (Boyutsuz göbek yarıçapı−Dalgalanma katsayısı), $\bar{\omega}-\alpha$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı – Boyutsuz göbek yarıçapı), $\beta_0 -\alpha$ (Ortalama dönme hızı− Boyutsuz göbek yarıçapı) düzlemlerinde dönen kirişin hem içe yönelik ($\alpha\leq 0$) hem dışa yönelik($\alpha\geq 0$) olduğu durumlarda kaotik titreşim hareketlerine rastlanmıştır.
- Kaos kartları değerlendirilmesiyle, $\delta-\beta_0$ ve $\bar{\omega}-\beta_0$ kartlarından ortalama dönme hızının; $\alpha-\beta_0$ kartından göbek yarıçapı ve/veya dönme hızının; $\delta-\alpha$, $\bar{\omega}-\alpha$ kartlarından ise göbek yarıçapının uygun ayarlanmasıyla kaotik titreşimlerden kaçınmanın mümkün olacağı anlaşılmıştır.
- Bir, iki ve üç serbestlik dereceli modellere ait $\bar{\omega}-\delta$ (Boyutsuz dalgalanma frekansı−Boyutsuz dalgalanma katsayısı) düzleminde Lyapunov üssü hesabına dayalı olarak elde edilen kaos kartları karşılaştırılarak, bir serbestlik dereceli modelin hızlı fakat yetersiz, iki serbestlik dereceli modelin orta hızda ve tatminkar, üç serbestlik dereceli modelin yeterli fakat çok yavaş sonuç verdiği

ortaya konulmuştur. Bu çerçevede, incelemelerde iki serbestlik dereceli modelin tercih edilmesinin uygun olacağına kanaat getirilmiştir.

- Pervanelerde, boyutsuz göbek yarıçapı 0.4 ile 4 arasında değişirken, ortalama yarıçapı 0.08 ile 0.16 arasında değişmektedir; rüzgar türbinlerinde, göbek yarıçapı 0.015-0.020 arasında değişirken, ortalama dönme hızı 15-25 arasında değişmektedir; helikopter ana rotorunda göbek yarıçapı 0.07 iken ortalama dönme hızı 0.01-0.02 arasında değişkenlik göstermektedir. Buna göre, kaos olasılığı normal bazı sistemlerde çalışma koşullarına denk gelmektedir. Dolayısıyla hesaba katılması önemli bir hal almaktadır.

Bu tez kapsamında ele alınmayan fakat gelecekte incelenmesi uygun olacak bazı problemler şunlardır:

- Galerkin yöntemiyle dört ve daha fazla serbestlik dereceli ayrık modellerin elde edilip, iki ve üç serbestlik dereceli modellerin karşılaştırılmasıyla varılan, kaos incelemesinde iki serbestlik dereceli modelin yeterli yakınsama sağladığı kanaatinin kesinleştirilmesi.
- Hız dalgalanmasına maruz palaya ek olarak, harmonik dış kuvvet zorlamasına maruz palada kaotik davranış olasılığının araştırılması.
- Farklı sınır koşullarına sahip dönen kirişlerin incelenmesiyle sınır koşullarının kaotik davranışlar üzerindeki etkisinin araştırılması.
- Daha hızlı bilgisayarlar kullanılarak kaos kartlarının çözünürlüğünün arttırılması yoluyla bu kartların duyarlılığının yükseltilip mevcut çalışmada kaçırılmış olabilecek küçük bölgelerin yakalanması.
- Çalışmanın düzgün kesitli homojen kiriş yerine daha gerçekçi pala modelleri ile yinelenerek somut rotor−pala sistemleri hakkında uygulamaya yönelik sonuçlar çıkartabilir hale getirilmesi.

KAYNAKLAR

[1] **Fang, T., Dowell, E.H.**, (1987). Numerical simulations of periodic and chaotic responses in a stable duffing system. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 22(5): 401–25, doi: 10.1016/0020-7462(87)90033-3.

[2] **Argyris, J., Belubekian, V., Ovakimyan, N., Minasyan, M.**, (1996). Chaotic Vibrations of a Nonlinear Viscoelastic Beam. vol. 7.

[3] **Chang, T.P.**, (2017). Chaotic Motion in Forced Duffing System Subject to Linear and Nonlinear Damping. *Mathematical Problems in Engineering* (2017), doi: 10.1155/2017/3769870.

[4] **Tongue, B.H.**, (1986). Existence of Chaos in a One-Degree-of-Freedom System, *Journal of Sound and Vibration*. vol. 110.

[5] **Yagasaki, K.**, (1995). Bifurcations and Chaos in a Quasi-Periodically Forced Beam: Theory, *Simulation and Experiment*. vol. 183.

[6] **Abhyankar, N.S., Hall, E.K., Hanagud, S. V.**, (1993). Chaotic Vibrations of Beams: Numerical Solution of Partial Differential Equations. *Journal of Applied Mechanics 60(1):* 167–74, doi: 10.1115/1.2900741.

[7] **Moon, F.C., Shaw, S.W.**, (1983). Chaotic Vibrations of a Beam with Non-linear Boundary Conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*. vol. 18.

[8] **Awrejcewicz, J., Krysko, A. v., Kutepov, I.E., Zagniboroda, N.A., Dobriyan, V., Krysko, V.A.**, (2013). Chaotic dynamics of flexible Euler-Bernoulli beams. *Chaos 23(4)*, doi: 10.1063/1.4838955.

[9] **Awrejcewicz, J., Erofeev, N.P., Krysko, V.A.,** (2016). Non-symmetric and chaotic vibrations of Euler-Bernoulli beams under harmonic and noisy excitations. *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 721. Institute of Physics Publishing.

[10] **Awrejcewicz, J., Krysko, A. v., Erofeev, N.P., Dobriyan, V., Barulina, M.A., Krysko, V.A.**, (2018). Quantifying chaos by various computational methods. Part 2: Vibrations of the Bernoulli-Euler beam subjected to periodic and colored noise. *Entropy 20(3),* doi: 10.3390/e(2003)0170.

[11] **Zhang, M., Kong, P., Hou, A., Xu, Y.**, (2022). Fractal Analysis of Local Activity and Chaotic Motion in Nonlinear Nonplanar Vibrations for Cantilever Beams. *Fractal and Fractional 6(4),* doi: 10.3390/fractalfract6040181.

[12] **Maewal, A.**, (1986). Chaos in a Harmonically Excited Elastic Beam, *Journal of Applied Mechanics 53(3)*.

[13]. **Yao, M., Zhang, W., Yao, Z.**, (2015). Nonlinear vibrations and chaotic dynamics of the laminated composite piezoelectric beam. *Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME 137(1),* doi: 10.1115/1.4028710.

[14] **Zhang, W., Ma, L., Zhang, Y.F., Behdinan, K.**, (2022). Nonlinear and dual-parameter chaotic vibrations of lumped parameter model in blisk under combined aerodynamic force and varying rotating speed. Nonlinear Dynamics 108(2): 1217–46, doi: 10.1007/s11071-022-07287-9.

[15] **Bulut, G., Turhan, Ö.**, (2007). Rotor-Pala Sistemlerinin Lineer Olmayan Titreşimleri: Modelleme, Frekans Analizi ve Kaos, *3. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu*. Sivas.

[16] **Tél, T., Gruiz, M.**, (2006). Chaotic Dynamics: An Introduction Based on Classical Mechanics.

[17] **Lorenz, E.N.**, (1993). The essence of Chaos. UCL Press.

[18] **Biswas, H.R., Hasan, M.M., Kumar Bala, S.**, (2018). Chaos Theory and Its Applications in our Real Life, *Computer Science*. vol. 1.

[19] **Chua, L.O., Madan, R.N.**, (1988). Sights and sounds of chaos (autonomous and nonautonomous circuits). *IEEE Circuits and Devices Magazine 4(1)*: 3–13, doi: 10.1109/101.924.

[20] **Feigenbaum, M.J.**, (1983). Universal Behavior in Nonlinear Systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena,*. North-Holland Publishing Company.

[21] **Wolf, A., Swift, J., Swinney, H.L., Vastano, J.**, (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena 16(3)*

[22] **Greene, J.M., Kim, J. S.**, (1987). The calculation of Lyapunov spectra, *Physica D: Nonlinear Phenomena 24*.

[23] **Sandri, M.**, (1996). Numerical Calculation of Lyapunov Exponents.

[24] **Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.-M.**, (1980). Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory, *Meccanica 15*

[25] **Moon, F.C.**, (2004). Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers, doi: 10.1002/3527602844 Wiley-Interscience.

EKLER

EK A: Katsayıların Hesabı
EK B: Hız Dalgalanması Probleminin Üç Serbestlik Dereceli Modeline Ait Hareket Denklemleri
EK C: Konum-Zaman ve Hız-Zaman Grafiği, Faz Diyagramı ve Poincaré Tasvirleri İçin Kullanılan Kod
EK D: Çatallanma Diyagramları İçin Kullanılan Kodlar.
EK E: Lyapunov Üssü Hesabı İçin Kullanılan Kod.

EK A: Katsayıların Hesabı

$$A_{ij} = \int_0^1 [(1-u)\varphi_j'' - \varphi_j']\varphi_i du$$

$$B_{ij} = \int_0^1 [\tfrac{1}{2}(1-u^2)\varphi_j'' - u\varphi_j']\varphi_i du$$

$$G_{ijk} = \int_0^1 [\varphi_j'\varphi_k - \int_0^u \varphi_j'\varphi_k' d\sigma - \varphi_j'' \int_u^1 \varphi_k d\sigma]\varphi_i du$$

$$C_{ijkl} = \int_0^1 (\varphi_j' \int_0^u \varphi_k'\varphi_l' d\sigma + \varphi_j'\varphi_k'' \int_u^1 \varphi_l d\sigma - \varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k'\varphi_l' d\eta d\sigma - \tfrac{1}{2}\varphi_j'\varphi_k'\varphi_l')\varphi_i du$$

$$D_{ijkl} = \int_0^1 (\varphi_j' \int_0^u \varphi_k'\varphi_l' d\sigma - \varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k'\varphi_l' d\eta d\sigma)\,\varphi_i du$$

$$E_{ijkl} = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}\varphi^{iv}\varphi_k'\varphi_l' + 3\varphi_j'\varphi_k''\varphi_l''' + \varphi_j''\varphi_k''\varphi_l'')\,\varphi_i du \qquad \text{(C.1)}$$

$$F_{ijkl} = \int_0^1 (\tfrac{1}{2}\varphi_j' \int_0^u \varphi_k'\varphi_l' d\sigma + \varphi_j'\varphi_k'' \int_u^1 \varphi_l\, d\sigma - \tfrac{1}{2}\varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k'\varphi_l' d\eta d\sigma - \tfrac{1}{2}\varphi_j\varphi_k'\varphi_l')\,\varphi_i du$$

$$H_{ijk} = \int_0^1 \left[(1-u)\varphi_j'\varphi_k' - \tfrac{1}{2}\varphi_j'\varphi_k'\right]\varphi_i du$$

$$K_{ijk} = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}(1-u^2)\varphi_j'\varphi_k'' - \tfrac{1}{2}u\varphi_j'\varphi_k' + \varphi_j\varphi_k' - \varphi_j'' \int_u^1 \varphi_k\, d\sigma - \tfrac{1}{2}\int_0^u \varphi_j'\varphi_k' d\eta\right)\varphi_i du$$

$$c_i = \int_0^1 \varphi_i du$$

$$d_i = \int_0^1 u\varphi_i du$$

Örnek bir katsayı hesabı

```
clc;
clear;
syms u i lamda_i lamda_j lamda_k lamda_l lamda;
Ki = (cosh(lamda)+cos(lamda))/(sinh(lamda)+sin(lamda));
Fi = cosh(lamda*u)-cos(lamda*u)-Ki*(sinh(lamda*u)-sin(lamda*u));
for m=1:3
   %m sabit olan indis iken >i
   %n değişken olan indis oluyor.> j
   %o
   for n=1:3
      for o=1:3
```

```
i = 3; % i yerine incelenecek kipi yaz
%i 1 2 3 olacak i = 1 iken C11-C12-C13 hesaplayacak
j = m;
k = n;
l = o;

lamda_v = [1.8751; 4.6941; 7.8548; 10.9955; 14.1371];
%%

lamda_i = lamda_v(i);
lamda_j = lamda_v(j);
lamda_k = lamda_v(k);
lamda_l = lamda_v(l);
%%

Fi_i = subs(Fi,lamda,lamda_i);
Fi_j = subs(Fi,lamda,lamda_j);
Fi_k = subs(Fi,lamda,lamda_k);
Fi_l = subs(Fi,lamda,lamda_l);

dFi_i = diff(Fi_i,u);
ddFi_i = diff(dFi_i,u);
dddFi_i = diff(ddFi_i,u);
ddddFi_i = diff(dddFi_i,u);

dFi_j = diff(Fi_j,u);
ddFi_j = diff(dFi_j,u);
dddFi_j = diff(ddFi_j,u);
ddddFi_j = diff(dddFi_j,u);

dFi_k = diff(Fi_k,u);
ddFi_k = diff(dFi_k,u);
dddFi_k = diff(ddFi_k,u);
ddddFi_k = diff(dddFi_k,u);

dFi_l = diff(Fi_l,u);
ddFi_l = diff(dFi_l,u);
dddFi_l = diff(ddFi_l,u);
ddddFi_l = diff(dddFi_l,u);
%%
format long

F_1 = 0.5*dFi_j*int(dFi_k*dFi_l,u,0,u);
F_2 = dFi_j*ddFi_k*int(Fi_l,u,u,1);
F_3 = -0.5*ddFi_j*int(int(dFi_k*dFi_l,u,0,u),u,u,1);
F_4 = -0.5*Fi_j*dFi_k*dFi_l;
F_11 = quad(inline(Fi_i*F_1),0,1);
F_22 = quad(inline(Fi_i*F_2),0,1);
F_33 = quad(inline(Fi_i*F_3),0,1);
F_44 = quad(inline(Fi_i*F_4),0,1);
```

```
          F_n(m,n,o) = real(F_11+F_22+F_33+F_44)
       end

   end
end
```

EK B: Hız Dalgalanması Probleminin Üç Serbestlik Dereceli Modeline Ait Hareket Denklemleri

EK B1: Hız dalgalanması probleminin hareketini yöneten birinci denklem

$$
\begin{aligned}
&\ddot{g}_1 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_1^4 \dot{g}_1 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_1^4 g_1 - \beta^2\left((\alpha A_{11} + B_{11} + \delta_{11})g_1 + (\alpha A_{12} + B_{12} + \delta_{12})g_2 + (\alpha A_{13} + B_{13} + \delta_{13})g_3\right)\right] + \\
&C_{1111}g_1 g_1 \ddot{g}_1 + C_{1112}g_1 g_1 \ddot{g}_2 + C_{1113}g_1 g_1 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1121}g_1 g_2 \ddot{g}_1 + C_{1122}g_1 g_2 \ddot{g}_2 + C_{1123}g_1 g_2 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1131}g_1 g_3 \ddot{g}_1 + C_{1132}g_1 g_3 \ddot{g}_2 + C_{1133}g_1 g_3 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1211}g_2 g_1 \ddot{g}_1 + C_{1212}g_2 g_1 \ddot{g}_2 + C_{1213}g_2 g_1 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1221}g_2 g_2 \ddot{g}_1 + C_{1222}g_2 g_2 \ddot{g}_2 + C_{1223}g_2 g_2 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1231}g_2 g_3 \ddot{g}_1 + C_{1232}g_2 g_3 \ddot{g}_2 + C_{1233}g_2 g_3 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1311}g_3 g_1 \ddot{g}_1 + C_{1312}g_3 g_1 \ddot{g}_2 + C_{1313}g_3 g_1 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1321}g_3 g_2 \ddot{g}_1 + C_{1322}g_3 g_2 \ddot{g}_2 + C_{1323}g_3 g_2 \ddot{g}_3 + \\
&C_{1331}g_3 g_3 \ddot{g}_1 + C_{1332}g_3 g_3 \ddot{g}_2 + C_{1333}g_3 g_3 \ddot{g}_3 + \\
&D_{1111}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{1112}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{1113}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_3 + \\
&D_{1121}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{1122}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{1123}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_3 + \\
&D_{1131}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{1132}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{1133}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_3 + \\
&D_{1211}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{1212}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{1213}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_3 + \\
&D_{1221}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{1222}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{1223}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_3 + \\
&D_{1231}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{1232}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{1233}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_3 + \\
&D_{1311}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{1312}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{1313}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_3 + \\
&D_{1321}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{1322}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{1323}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_3 + \\
&D_{1331}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{1332}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{1333}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_3 + \\
&\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left([E_{1111} - \beta^2 F_{1111}]g_1 g_1 g_1 + [E_{1112} - \beta^2 F_{1112}]g_1 g_1 g_2 + \right. \\
&\left.[E_{1113} - \beta^2 F_{1113}]g_1 g_1 g_3 + \right.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

$$[E_{1121} - \beta^2 F_{1121}]g_1 g_2 g_1 + [E_{1122} - \beta^2 F_{1122}]g_1 g_2 g_2 + [E_{1123} - \beta^2 F_{1123}]g_1 g_2 g_3 +$$

$$[E_{1131} - \beta^2 F_{1131}]g_1 g_3 g_1 + [E_{1132} - \beta^2 F_{1132}]g_1 g_3 g_2 + [E_{1133} - \beta^2 F_{1133}]g_1 g_3 g_3 +$$

$$[E_{1211} - \beta^2 F_{1211}]g_2 g_1 g_1 + [E_{1212} - \beta^2 F_{1212}]g_2 g_1 g_2 + [E_{1213} - \beta^2 F_{1213}]g_2 g_1 g_3 +$$

$$[E_{1221} - \beta^2 F_{1221}]g_2 g_2 g_1 + [E_{1222} - \beta^2 F_{1222}]g_2 g_2 g_2 + [E_{1223} - \beta^2 F_{1223}]g_2 g_2 g_3 +$$

$$[E_{1231} - \beta^2 F_{1231}]g_2 g_3 g_1 + [E_{1232} - \beta^2 F_{1232}]g_2 g_3 g_2 + [E_{1233} - \beta^2 F_{1233}]g_2 g_3 g_3 +$$

$$[E_{1311} - \beta^2 F_{1311}]g_3 g_1 g_1 + [E_{1312} - \beta^2 F_{1312}]g_3 g_1 g_2 + [E_{1313} - \beta^2 F_{1313}]g_3 g_1 g_3 +$$

$$[E_{1321} - \beta^2 F_{1321}]g_3 g_2 g_1 + [E_{1322} - \beta^2 F_{1322}]g_3 g_2 g_2 + [E_{1323} - \beta^2 F_{1323}]g_3 g_2 g_3 +$$

$$[E_{1331} - \beta^2 F_{1331}]g_3 g_3 g_1 + [E_{1332} - \beta^2 F_{1332}]g_3 g_3 g_2 + [E_{1333} - \beta^2 F_{1333}]g_3 g_3 g_3) +$$

$$\frac{2\beta}{\bar{\omega}}([G_{111} g_1 \dot{g_1} + G_{112} g_1 \dot{g_2} + G_{113} g_1 \dot{g_3}] +$$

$$[G_{121} g_2 \dot{g_1} + G_{122} g_2 \dot{g_2} + G_{123} g_2 \dot{g_3}] +$$

$$[G_{131} g_3 \dot{g_1} + G_{132} g_3 \dot{g_2} + G_{133} g_3 \dot{g_3}]) +$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}([\alpha H_{111} + K_{111}]g_1 g_1 + [\alpha H_{112} + K_{112}]g_1 g_2 + [\alpha H_{113} + K_{113}]g_1 g_3 +$$

$$[\alpha H_{121} + K_{121}]g_2 g_1 + [\alpha H_{122} + K_{122}]g_2 g_2 + [\alpha H_{123} + K_{123}]g_2 g_3 +$$

$$[\alpha H_{131} + K_{131}]g_3 g_1 + [\alpha H_{132} + K_{132}]g_3 g_2 + [\alpha H_{133} + K_{133}]g_3 g_3)$$

$$= -\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c_1 + d_1)$$

EK B2: Hız dalgalanması probleminin hareketini yöneten ikinci denklem

$$\ddot{g}_2 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_2^4 g_2 + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_2^4 g_2 - \beta^2\left((\alpha A_{21} + B_{21} + \delta_{21})g_1 + (\alpha A_{22} + B_{22} + \delta_{22})g_2 + (\alpha A_{23} + B_{23} + \delta_{23})g_3\right)\right] +$$

$$C_{2111}g_1 g_1 \ddot{g}_1 + C_{2112}g_1 g_1 \ddot{g}_2 + C_{2113}g_1 g_1 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2121}g_1 g_2 \ddot{g}_1 + C_{2122}g_1 g_2 \ddot{g}_2 + C_{2123}g_1 g_2 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2131}g_1 g_3 \ddot{g}_1 + C_{2132}g_1 g_3 \ddot{g}_2 + C_{2133}g_1 g_3 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2211}g_2 g_1 \ddot{g}_1 + C_{2212}g_2 g_1 \ddot{g}_2 + C_{2213}g_2 g_1 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2221}g_2 g_2 \ddot{g}_1 + C_{2222}g_2 g_2 \ddot{g}_2 + C_{2223}g_2 g_2 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2231}g_2 g_3 \ddot{g}_1 + C_{2232}g_2 g_3 \ddot{g}_2 + C_{2233}g_2 g_3 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2311}g_3 g_1 \ddot{g}_1 + C_{2312}g_3 g_1 \ddot{g}_2 + C_{2313}g_3 g_1 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2321}g_3 g_2 \ddot{g}_1 + C_{2322}g_3 g_2 \ddot{g}_2 + C_{2323}g_3 g_2 \ddot{g}_3 +$$

$$C_{2331}g_3 g_3 \ddot{g}_1 + C_{2332}g_3 g_3 \ddot{g}_2 + C_{2333}g_3 g_3 \ddot{g}_3 +$$

$$D_{2111}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{2112}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{2113}g_1 \dot{g}_1 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2121}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{2122}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{2123}g_1 \dot{g}_2 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2131}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{2132}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{2133}g_1 \dot{g}_3 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2211}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{2212}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{2213}g_2 \dot{g}_1 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2221}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{2222}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{2223}g_2 \dot{g}_2 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2231}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{2232}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{2233}g_2 \dot{g}_3 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2311}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_1 + D_{2312}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_2 + D_{2313}g_3 \dot{g}_1 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2321}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_1 + D_{2322}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_2 + D_{2323}g_3 \dot{g}_2 \dot{g}_3 +$$

$$D_{2331}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_1 + D_{2332}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_2 + D_{2333}g_3 \dot{g}_3 \dot{g}_3 +$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2}\left([E_{2111} - \beta^2 F_{2111}]g_1 g_1 g_1 + [E_{2112} - \beta^2 F_{2112}]g_1 g_1 g_2 + [E_{2113} - \beta^2 F_{2113}]g_1 g_1 g_3 +\right.$$

$$\left.[E_{2121} - \beta^2 F_{2121}]g_1 g_2 g_1 + [E_{2122} - \beta^2 F_{2122}]g_1 g_2 g_2 + [E_{2123} - \beta^2 F_{2123}]g_1 g_2 g_3 +\right. \quad \text{(B.2)}$$

$$[E_{2131} - \beta^2 F_{2131}]g_1 g_3 g_1 + [E_{2132} - \beta^2 F_{2132}]g_1 g_3 g_2 + [E_{2133} - \beta^2 F_{2133}]g_1 g_3 g_3 +$$

$$[E_{2211} - \beta^2 F_{2211}]g_2 g_1 g_1 + [E_{2212} - \beta^2 F_{2212}]g_2 g_1 g_2 + [E_{2213} - \beta^2 F_{2213}]g_2 g_1 g_3 +$$

$$[E_{2221} - \beta^2 F_{2221}]g_2 g_2 g_1 + [E_{2222} - \beta^2 F_{2222}]g_2 g_2 g_2 + [E_{2223} - \beta^2 F_{2223}]g_2 g_2 g_3 +$$

$$[E_{2231} - \beta^2 F_{2231}]g_2 g_3 g_1 + [E_{2232} - \beta^2 F_{2232}]g_2 g_3 g_2 + [E_{2233} - \beta^2 F_{2233}]g_2 g_3 g_3 +$$

$$[E_{2311} - \beta^2 F_{2311}]g_3 g_1 g_1 + [E_{2312} - \beta^2 F_{2312}]g_3 g_1 g_2 + [E_{2313} - \beta^2 F_{2313}]g_3 g_1 g_3 +$$

$$[E_{2321} - \beta^2 F_{2321}]g_3 g_2 g_1 + [E_{2322} - \beta^2 F_{2322}]g_3 g_2 g_2 + [E_{2323} - \beta^2 F_{2323}]g_3 g_2 g_3 +$$

$$[E_{2331} - \beta^2 F_{2331}]g_3 g_3 g_1 + [E_{2332} - \beta^2 F_{2332}]g_3 g_3 g_2 + [E_{2333} - \beta^2 F_{2333}]g_3 g_3 g_3) +$$

$$\frac{2\beta}{\bar{\omega}}(G_{211} g_1 \dot{g_1} + G_{212} g_1 \dot{g_2} + G_{213} g_1 \dot{g_3} +$$

$$G_{221} g_2 \dot{g_1} + G_{222} g_2 \dot{g_2} + G_{223} g_2 \dot{g_3} +$$

$$G_{231} g_3 \dot{g_1} + G_{232} g_3 \dot{g_2} + G_{233} g_3 \dot{g_3}) +$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}([\alpha H_{211} + K_{211}]g_1 g_1 + [\alpha H_{212} + K_{212}]g_1 g_2 + [\alpha H_{213} + K_{213}]g_1 g_3 +$$

$$[\alpha H_{221} + K_{221}]g_2 g_1 + [\alpha H_{222} + K_{222}]g_2 g_2 + [\alpha H_{223} + K_{223}]g_2 g_3 +$$

$$[\alpha H_{231} + K_{231}]g_3 g_1 + [\alpha H_{232} + K_{232}]g_3 g_2 + [\alpha H_{233} + K_{233}]g_3 g_3) +$$

$$= -\frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}}(\alpha c_2 + d_2)$$

EK B3: Hız dalgalanması probleminin hareketini yöneten üçüncü denklem

$$\ddot{g}_3 + \frac{\zeta}{\bar{\omega}}\lambda_3^4 \dot{g_3} + \frac{1}{\bar{\omega}^2}\left[\lambda_3^4 g_3 - \beta^2\left((\alpha A_{31} + B_{31} + \delta_{31})g_1 + (\alpha A_{32} + B_{32} + \delta_{32})g_2 + (\alpha A_{33} + B_{33} + \delta_{33})g_3\right)\right] + \tag{B.3}$$

$$C_{3111}g_1g_1\ddot{g}_1 + C_{3112}g_1g_1\ddot{g}_2 + C_{3113}g_1g_1\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3121}g_1g_2\ddot{g}_1 + C_{3122}g_1g_2\ddot{g}_2 + C_{3123}g_1g_2\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3131}g_1g_3\ddot{g}_1 + C_{3132}g_1g_3\ddot{g}_2 + C_{3133}g_1g_3\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3211}g_2g_1\ddot{g}_1 + C_{3212}g_2g_1\ddot{g}_2 + C_{3213}g_2g_1\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3221}g_2g_2\ddot{g}_1 + C_{3222}g_2g_2\ddot{g}_2 + C_{3223}g_2g_2\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3231}g_2g_3\ddot{g}_1 + C_{3232}g_2g_3\ddot{g}_2 + C_{3233}g_2g_3\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3311}g_3g_1\ddot{g}_1 + C_{3312}g_3g_1\ddot{g}_2 + C_{3313}g_3g_1\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3321}g_3g_2\ddot{g}_1 + C_{3322}g_3g_2\ddot{g}_2 + C_{3323}g_3g_2\ddot{g}_3 +$$

$$C_{3331}g_3g_3\ddot{g}_1 + C_{3332}g_3g_3\ddot{g}_2 + C_{3333}g_3g_3\ddot{g}_3 +$$

$$D_{3111}g_1\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{3112}g_1\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{3113}g_1\dot{g}_1\dot{g}_3 +$$

$$D_{3121}g_1\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{3122}g_1\dot{g}_2\dot{g}_2 + D_{3123}g_1\dot{g}_2\dot{g}_3 +$$

$$D_{3131}g_1\dot{g}_3\dot{g}_1 + D_{3132}g_1\dot{g}_3\dot{g}_2 + D_{3133}g_1\dot{g}_3\dot{g}_3 +$$

$$D_{3211}g_2\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{3212}g_2\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{3213}g_2\dot{g}_1\dot{g}_3 +$$

$$D_{3221}g_2\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{3222}g_2\dot{g}_2\dot{g}_2 + D_{3223}g_2\dot{g}_2\dot{g}_3 +$$

$$D_{3231}g_2\dot{g}_3\dot{g}_1 + D_{3232}g_2\dot{g}_3\dot{g}_2 + D_{3233}g_2\dot{g}_3\dot{g}_3 +$$

$$D_{3311}g_3\dot{g}_1\dot{g}_1 + D_{3312}g_3\dot{g}_1\dot{g}_2 + D_{3313}g_3\dot{g}_1\dot{g}_3 +$$

$$D_{3321}g_3\dot{g}_2\dot{g}_1 + D_{3322}g_3\dot{g}_2\dot{g}_2 + D_{3323}g_3\dot{g}_2\dot{g}_3 +$$

$$D_{3331}g_3\dot{g}_3\dot{g}_1 + D_{3332}g_3\dot{g}_3\dot{g}_2 + D_{3333}g_3\dot{g}_3\dot{g}_3 +$$

$$\frac{1}{\bar{\omega}^2}([E_{3111} - \beta^2F_{3111}]g_1g_1g_1 + [E_{3112} - \beta^2F_{3112}]g_1g_1g_2 +$$

$$[E_{3113} - \beta^2F_{3113}]g_1g_1g_3 +$$

$$[E_{3121} - \beta^2F_{3121}]g_1g_2g_1 + [E_{3122} - \beta^2F_{3122}]g_1g_2g_2 + [E_{3123} - \beta^2F_{3123}]g_1g_2g_3 +$$

$$[E_{3131} - \beta^2F_{3131}]g_1g_3g_1 + [E_{3132} - \beta^2F_{3132}]g_1g_3g_2 + [E_{3133} - \beta^2F_{3133}]g_1g_3g_3 +$$

$$[E_{3211} - \beta^2F_{3211}]g_2g_1g_1 + [E_{3212} - \beta^2F_{3212}]g_2g_1g_2 + [E_{3213} - \beta^2F_{3213}]g_2g_1g_3 +$$

$$[E_{3221} - \beta^2 F_{3221}]g_2 g_2 g_1 + [E_{3222} - \beta^2 F_{3222}]g_2 g_2 g_2 + [E_{3223} - \beta^2 F_{3223}]g_2 g_2 g_3 +$$

$$[E_{3231} - \beta^2 F_{3231}]g_2 g_3 g_1 + [E_{3232} - \beta^2 F_{3232}]g_2 g_3 g_2 + [E_{3233} - \beta^2 F_{3233}]g_2 g_3 g_3 +$$

$$[E_{3311} - \beta^2 F_{3311}]g_3 g_1 g_1 + [E_{3312} - \beta^2 F_{3312}]g_3 g_1 g_2 + [E_{3313} - \beta^2 F_{3313}]g_3 g_1 g_3 +$$

$$[E_{3321} - \beta^2 F_{3321}]g_3 g_2 g_1 + [E_{3322} - \beta^2 F_{3322}]g_3 g_2 g_2 + [E_{3323} - \beta^2 F_{3323}]g_3 g_2 g_3 +$$

$$[E_{3331} - \beta^2 F_{3331}]g_3 g_3 g_1 + [E_{3332} - \beta^2 F_{3332}]g_3 g_3 g_2 + [E_{3333} - \beta^2 F_{3333}]g_3 g_3 g_3])+$$

$$\frac{2\beta}{\omega}(G_{311}g_1\dot{g_1} + G_{312}g_1\dot{g_2} + G_{313}g_1\dot{g_3} +$$

$$G_{321}g_2\dot{g_1} + G_{322}g_2\dot{g_2} + G_{323}g_2\dot{g_3} +$$

$$G_{331}g_3\dot{g_1} + G_{332}g_3\dot{g_2} + G_{333}g_3\dot{g_3}) +$$

$$\frac{\dot{\beta}}{\omega}([\alpha H_{311} + K_{311}]g_1 g_1 + [\alpha H_{312} + K_{312}]g_1 g_2 + [\alpha H_{313} + K_{313}]g_1 g_3 +$$

$$[\alpha H_{321} + K_{321}]g_2 g_1 + [\alpha H_{322} + K_{322}]g_2 g_2 + [\alpha H_{323} + K_{323}]g_2 g_3 +$$

$$[\alpha H_{331} + K_{331}]g_3 g_1 + [\alpha H_{332} + K_{332}]g_3 g_2 + [\alpha H_{333} + K_{333}]g_3 g_3)$$

$$= -\frac{\dot{\beta}}{\omega}(\alpha c_3 + d_3)$$

EK C: Konum-Zaman ve Hız-Zaman Grafiği, Faz Diyagramı ve Poincaré Tasvirleri İçin Kullanılan Kod

```
%Başlangıç Koşulları

        g1      = 1;
        dg1     = 0;
        g2      = 0;
        dg2     = 0;
        %Parametreler
        alfa    = 2;
        beta_0    = 3;
        w_bar    = 5;
        delta    = 2;
        zeta    = 0.1;
        %Çözüm adımları
        N      = 300;
        T = 2*pi;
        tf = T*N;
        ti      = 0;
        h1      = 0.001
        h       = T*h1;

        yuzde = 20;
        yuzde_2 = 100;


        t = ti:h:tf;
        %alfa = 1;
        %beta = 1;
        y0 = [g1, dg1, g2, dg2];
        %
        %
        f1 = @(t,y1,y2,y3,y4) y2;
        f2 = @(t,y1,y2,y3,y4) (((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 -
(15099272210554661*y1*y3)/562949953421312 +
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*(((8541401921062861*y3)/1759
2186044416 + beta_0^2*((delta*sin(t))/2 + 1)^2*(y3*((10809*alfa)/1250 +
3083994015442091/562949953421312) - y1*((4223*alfa)/10000 +
6859/10000)))/w_bar^2 - (y3*((118898521169435*y1*y3)/137438953472 +
(7103242202638961*y1^2)/8796093022208 -
(1844279148567117*y3^2)/549755813888) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((16897437926277693*y1*y3)/4503599627370496 +
(1217716297348835*y1^2)/4503599627370496 -
(3633561710517223*y3^2)/70368744177664))/w_bar^2 -
y2*((8097455692977047*y1*y2)/2251799813685248 -
(215237848641315*y1*y4)/35184372088832 -
(442869243731795*y2*y3)/17592186044416 +
(3123187436001425*y3*y4)/140737488355328) -
(y1*((2379337096431245*y1^2)/35184372088832 -
```

```
(16648038645633255*y1*y3)/8796093022208 +
(5400240511849405*y3^2)/4398046511104) - beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((4892643479827881*y1*y3)/562949953421312 -
(1135421410973649*y1^2)/1125899906842624 +
(1041741779133213*y3^2)/2251799813685248))/w_bar^2 +
y4*((6887611156522043*y1*y2)/1125899906842624 -
(3123187453062981*y1*y4)/140737488355328 -
(6246374872002863*y2*y3)/281474976710656 +
(5092157611417933*y3*y4)/35184372088832) +
(8541401921062861*y4*zeta)/(17592186044416*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 + 1)*((722737509647653*y1*y2)/562949953421312 -
(456829190947431*y1*y4)/18889465931478580854784 -
(5443629605651463*y2*y3)/562949953421312 +
(1495812076858463*y3*y4)/151115727451828646838272))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((6510558929393309*y1^2)/288230376151711744 -
(622940969555119*y1*y3)/281474976710656 +
(2499890170272083*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar) +
(beta_0*delta*cos(t)*((7817011262617307*alfa)/18014398509481984 +
817517226383979/9007199254740992))/(2*w_bar) +
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((6215245118277793*y1^2)/4503599627370496 -
(154998927942390393*y1*y3)/9007199254740992 +
(2389268422015035*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1)) +
(((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*(y2*((1293860442021595*y1*y2)/281474976710656 -
(1012182060192025*y1*y4)/281474976710656 -
(8097455655102555*y2*y3)/2251799813685248 +
(860951392029505*y3*y4)/140737488355328) -
(y3*((6350384391236171*y1*y3)/4398046511104 +
(3707701516710709*y1^2)/17592186044416 +
(1485559856908115*y3^2)/17592186044416) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((671438718032692945*y1*y3)/36028797018963968 -
(4903674659204711*y1^2)/562949953421312 +
(3819651026616759*y3^2)/562949953421312))/w_bar^2 -
y4*((1012182060192025*y1*y2)/281474976710656 -
(1771476973568101*y1*y4)/70368744177664 -
(860951392029505*y2*y3)/140737488355328 +
(97599607800679*y3*y4)/4398046511104) +
```

```
(y1*((6194302592184281*y1*y3)/35184372088832 +
(5691226761084395*y1^2)/562949953421312 +
(7042136708999313*y3^2)/4398046511104) + beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((36361548653295431*y1*y3)/4503599627370496 +
(5586869172618323*y1^2)/36028797018963968 -
(5673197660138305*y3^2)/281474976710656))/w_bar^2 +
((434958217435561*y1)/35184372088832 - beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000) - y1*((15709*alfa)/10000 +
217668965730189/1125899906842624)))/w_bar^2 +
(434958217435561*y2*zeta)/(35184372088832*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((5860914685895409*y1*y2)/302231454903657293676544 -
(5781899790596207*y1*y4)/4503599627370496 +
(7485988738164527*y2*y3)/302231454903657293676544 +
(680453699663217*y3*y4)/70368744177664))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((3526269511112683*alfa)/4503599627370496 +
5123510120620273/9007199254740992))/(2*w_bar) -
(beta_0*delta*cos(t)*((5233790982038561*y1^2)/18014398509481984 -
(1470906787122181*y1*y3)/562949953421312 +
(1516642643473599*y3^2)/140737488355328))/(2*w_bar) -
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((3910195227567773*y1^2)/2251799813685248 -
(388452843802567*y1*y3)/140737488355328 +
(2421858244132679*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312 +
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1))
        f3 = @(t,y1,y2,y3,y4) y4;
        f4 = @(t,y1,y2,y3,y4) (((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 -
(1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496)*(y2*((1293860442021595*y1*y2)/281474976710656 - (1012182060192025*y1*y4)/281474976710656 -
(8097455655102555*y2*y3)/2251799813685248 +
(860951392029505*y3*y4)/140737488355328) -
(y3*((6350384391236171*y1*y3)/4398046511104 +
(3707701516710709*y1^2)/17592186044416 +
(1485559856908115*y3^2)/17592186044416) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((671438718032692945*y1*y3)/36028797018963968 -
(4903674659204711*y1^2)/562949953421312 +
(3819651026616759*y3^2)/562949953421312))/w_bar^2 -
y4*((1012182060192025*y1*y2)/281474976710656 -
(1771476973568101*y1*y4)/70368744177664 -
(860951392029505*y2*y3)/140737488355328 +
```

(97599607800679*y3*y4)/4398046511104) +
(y1*((6194302592184281*y1*y3)/35184372088832 +
(5691226761084395*y1^2)/562949953421312 +
(7042136708999313*y3^2)/4398046511104) + beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((36361548653295431*y1*y3)/4503599627370496 +
(5586869172618323*y1^2)/36028797018963968 -
(5673197660138305*y3^2)/281474976710656))/w_bar^2 +
((434958217435561*y1)/35184372088832 - beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000) - y1*((15709*alfa)/10000 +
217668965730189/1125899906842624)))/w_bar^2 +
(434958217435561*y2*zeta)/(35184372088832*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((5860914685895409*y1*y2)/302231454903657293676544 -
(5781899790596207*y1*y4)/4503599627370496 +
(7485988738164527*y2*y3)/302231454903657293676544 +
(680453699663217*y3*y4)/70368744177664))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((3526269511112683*alfa)/4503599627370496 +
5123510120620273/9007199254740992))/(2*w_bar) -
(beta_0*delta*cos(t)*((5233790982038561*y1^2)/18014398509481984 -
(1470906787122181*y1*y3)/562949953421312 +
(1516642643473599*y3^2)/140737488355328))/(2*w_bar) -
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((3910195227567773*y1^2)/2251799813685248 -
(388452843802567*y1*y3)/140737488355328 +
(2421858244132679*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (150992722105546 61*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1)) -
(((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 -
1)*(((8541401921062861*y3)/17592186044416 + beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((10809*alfa)/1250 + 3083994015442091/562949953421312) -
y1*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000)))/w_bar^2 -
(y3*((118898521169435*y1*y3)/137438953472 +
(7103242202638961*y1^2)/8796093022208 -
(1844279148567117*y3^2)/549755813888) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((16897437926277693*y1*y3)/4503599627370496 +
(1217716297348835*y1^2)/4503599627370496 -
(3633561710517223*y3^2)/70368744177664))/w_bar^2 -
y2*((8097455692977047*y1*y2)/2251799813685248 -
(215237848641315*y1*y4)/35184372088832 -
(442869243731795*y2*y3)/17592186044416 +

```
(3123187436001425*y3*y4)/140737488355328) -
(y1*((2379337096431245*y1^2)/35184372088832 -
(16648038645633255*y1*y3)/8796093022208 +
(5400240511849405*y3^2)/4398046511104) - beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((4892643479827881*y1*y3)/562949953421312 -
(1135421410973649*y1^2)/1125899906842624 +
(1041741779133213*y3^2)/2251799813685248))/w_bar^2 +
y4*((6887611156522043*y1*y2)/1125899906842624 -
(3123187453062981*y1*y4)/140737488355328 -
(6246374872002863*y2*y3)/281474976710656 +
(5092157611417933*y3*y4)/35184372088832) +
(8541401921062861*y4*zeta)/(17592186044416*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 + 1)*((722737509647653*y1*y2)/562949953421312 -
(456829190947431*y1*y4)/18889465931478580854784 -
(5443629605651463*y2*y3)/562949953421312 +
(1495812076858463*y3*y4)/15111572745182864683827 2))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((6510558929393309*y1^2)/288230376151711744 -
(622940969555119*y1*y3)/281474976710656 +
(2499890170272083*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar) +
(beta_0*delta*cos(t)*((7817011262617307*alfa)/18014398509481984 +
817517226383979/9007199254740992))/(2*w_bar) +
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((6215245118277793*y1^2)/4503599627370496 -
(154998927942390393*y1*y3)/9007199254740992 +
(2389268422015035*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((71565475479632
19*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/900
7199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1))%


        y(1,:) = y0;
        for i=1:length(t)-1
           k1_1 = f1(t(i),y(i,1),y(i,2),y(i,3),y(i,4));
           k1_2 = f2(t(i),y(i,1),y(i,2),y(i,3),y(i,4));
           k1_3 = f3(t(i),y(i,1),y(i,2),y(i,3),y(i,4));
           k1_4 = f4(t(i),y(i,1),y(i,2),y(i,3),y(i,4));

           k2_1 =
f1(t(i)+h/2,y(i,1)+k1_1*h/2,y(i,2)+k1_2*h/2,y(i,3)+k1_3*h/2,y(i,4)+k1_4*h/2);
           k2_2 =
f2(t(i)+h/2,y(i,1)+k1_1*h/2,y(i,2)+k1_2*h/2,y(i,3)+k1_3*h/2,y(i,4)+k1_4*h/2);
           k2_3 =
f3(t(i)+h/2,y(i,1)+k1_1*h/2,y(i,2)+k1_2*h/2,y(i,3)+k1_3*h/2,y(i,4)+k1_4*h/2);
```

```
            k2_4 =
f4(t(i)+h/2,y(i,1)+k1_1*h/2,y(i,2)+k1_2*h/2,y(i,3)+k1_3*h/2,y(i,4)+k1_4*h/2);

            k3_1 =
f1(t(i)+h/2,y(i,1)+k2_1*h/2,y(i,2)+k2_2*h/2,y(i,3)+k2_3*h/2,y(i,4)+k2_4*h/2);
            k3_2 =
f2(t(i)+h/2,y(i,1)+k2_1*h/2,y(i,2)+k2_2*h/2,y(i,3)+k2_3*h/2,y(i,4)+k2_4*h/2);
            k3_3 =
f3(t(i)+h/2,y(i,1)+k2_1*h/2,y(i,2)+k2_2*h/2,y(i,3)+k2_3*h/2,y(i,4)+k2_4*h/2);
            k3_4 =
f4(t(i)+h/2,y(i,1)+k2_1*h/2,y(i,2)+k2_2*h/2,y(i,3)+k2_3*h/2,y(i,4)+k2_4*h/2);

            k4_1 =
f1(t(i)+h,y(i,1)+k3_1*h,y(i,2)+k3_2*h,y(i,3)+k3_3*h,y(i,4)+k3_4*h);
            k4_2 =
f2(t(i)+h,y(i,1)+k3_1*h,y(i,2)+k3_2*h,y(i,3)+k3_3*h,y(i,4)+k3_4*h);
            k4_3 =
f3(t(i)+h,y(i,1)+k3_1*h,y(i,2)+k3_2*h,y(i,3)+k3_3*h,y(i,4)+k3_4*h);
            k4_4 =
f4(t(i)+h,y(i,1)+k3_1*h,y(i,2)+k3_2*h,y(i,3)+k3_3*h,y(i,4)+k3_4*h);


            y(i+1,1) = y(i,1)+1/6*(k1_1+2*k2_1+2*k3_1+k4_1)*h;
            y(i+1,2) = y(i,2)+1/6*(k1_2+2*k2_2+2*k3_2+k4_2)*h;
            y(i+1,3) = y(i,3)+1/6*(k1_3+2*k2_3+2*k3_3+k4_3)*h;
            y(i+1,4) = y(i,4)+1/6*(k1_4+2*k2_4+2*k3_4+k4_4)*h;
            tn(i+1) = t(i);



        end


        n = N;
        k = round(N*(yuzde/100)+1) %başlangıç
        l = round(N*(yuzde_2/100)); %bitiş



        i = 1;
        for m=k:l;
            yp(i) = y(m/h1+1,1);
            dyp(i) = y(m/h1+1,2);
            yp_2(i) = y(m/h1+1,3);
            dyp_2(i) = y(m/h1+1,4);
            tp(i) = t(m/h1+1);
            i = i+1;
        end
```

```
%konum zaman
plot(t,y(:,1),'g','LineWidth',1);
xlabel('\tau');
ylabel('g_1(\tau)');
%  axis('tight');
grid('on');
%hız zaman

plot(t,y(:,2),'b','LineWidth',1);
xlabel('\tau');
ylabel('v_1(\tau)');
% axis('tight');
grid('on');

%konum hız
plot(y(:,1),y(:,2),'r','LineWidth',1);
title('Faz Diyagramı');
xlabel('g_1(\tau)');
ylabel('v_1(\tau)');
axis('tight');
grid('on');

%pc1
plot(yp,dyp,'.b','LineWidth',1);
title('Poincaré Haritası');
xlabel('g_1(\tau)');
ylabel('v_1(\tau)');
%axis('tight');
grid('on');



plot(t,y(:,3),'g','LineWidth',1);
xlabel('\tau');
ylabel('g_2(\tau)');
% axis('tight');
grid('on');

plot(t,y(:,4),'b','LineWidth',1);
xlabel('\tau');
ylabel('v_2(\tau)');
%axis('tight');
grid('on');


plot(y(:,3),y(:,4),'r','LineWidth',1);
title('Faz Diyagramı');
xlabel('g_2(\tau)');
ylabel('v_2(\tau)');
%axis('tight');
```

```
grid('on')  ;


plot(yp_2,dyp_2,'.b','LineWidth',1);
title('Poincaré Haritası');
xlabel('g_2(\tau)');
ylabel('v_2(\tau)');
%axis('tight');
grid('on');
```

EK D: Çatallanma Diyagramları İçin Kullanılan Kodlar.

```
clc
clear
D1=[];
D2=[];
D3=[];
D4=[];
tic
o = 1;
for delta=0.:0.001:0.7
   beta_0 =3;
   w_bar =9;
   zeta = 0.1;
         alfa = 2;
   T = 2*pi;
   % Initial values of the variables
   uo=[1 0 0 0];
   % Duration of simulation
   N = 300;
   tfinal=N*T;

   h1 = 0.001;
   h = h1*T;
   tspan=0:h:tfinal;
   % Calculation
   [time,A] = ode45(@(t,x)F(t,x,alfa,beta_0,zeta,delta,w_bar),tspan,uo);
   y1=A(:,1);
   y3=A(:,3);
   yuzde = 60;
   yuzde_2 = 99;
   n = N;
   k = round(N*(yuzde/100)+1); %başlangıç
   l = round(N*(yuzde_2/100)); %bitiş




   i = 1;
   for m=k:l;
      yp(i) = y1(m/h1+1);
      yp_2(i) = y3(m/h1+1);
      i = i+1;
   end
   o = o+1;
   D1=[D1;delta yp];
   D3=[D3;delta yp_2];
end
toc
```

```
for i=1:length(D1(1,:))-1;
   subplot(2,1,1)
   plot(D1(:,1),D1(:,i+1),'.','MarkerEdgeColor','b','MarkerSize',2)
   hold on
end


xlabel('$\delta$','Interpreter','latex','Color','k','FontSize', 15);
ylabel('g_1','Rotation',0,'Color','k','FontSize', 15);


for i=1:length(D3(1,:))-1;
   subplot(2,1,2)
   plot(D3(:,1),D3(:,i+1),'.','MarkerEdgeColor','b','MarkerSize',2)
   hold on
end

xlabel('$\delta$','Interpreter','latex','Color','k','FontSize', 15);
ylabel('g_2','Rotation',0,'Color','k','FontSize', 15);
```

f.m

```
function f = F(t,x,alfa,beta_0,zeta,delta,w_bar)
% global alfa beta_0 zeta delta w_bar
y1 = x(1);
y2 = x(2);
y3 = x(3);
y4 = x(4);
f = [y2;
(((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*(y2*((1293860442021595*y1*y2)/281474976710656 -
(1012182060192025*y1*y4)/281474976710656 -
(8097455655102555*y2*y3)/2251799813685248 +
(860951392029505*y3*y4)/140737488355328) -
(y3*((6350384391236171*y1*y3)/4398046511104 +
(3707701516710709*y1^2)/17592186044416 +
(1485559856908115*y3^2)/17592186044416) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((671438718032692945*y1*y3)/36028797018963968 -
(4903674659204711*y1^2)/562949953421312 +
(3819651026616759*y3^2)/562949953421312))/w_bar^2 -
y4*((1012182060192025*y1*y2)/281474976710656 -
(1771476973568101*y1*y4)/70368744177664 -
(860951392029505*y2*y3)/140737488355328 +
(97599607800679*y3*y4)/4398046511104) +
(y1*((6194302592184281*y1*y3)/35184372088832 +
(5691226761084395*y1^2)/562949953421312 +
(7042136708999313*y3^2)/4398046511104) + beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((36361548653295431*y1*y3)/4503599627370496 +
(5586869172618323*y1^2)/36028797018963968 -
```

```
(5673197660138305*y3^2)/281474976710656))/w_bar^2 +
((434958217435561*y1)/35184372088832 - beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000) - y1*((15709*alfa)/10000 +
217668965730189/1125899906842624)))/w_bar^2 +
(434958217435561*y2*zeta)/(35184372088832*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((7485988738164527*y2*y3)/302231454903657293676544 -
(5781899790596207*y1*y4)/4503599627370496 +
(680453699663217*y3*y4)/70368744177664))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((3526269511112683*alfa)/4503599627370496 +
5123510120620273/9007199254740992))/(2*w_bar) -
(beta_0*delta*cos(t)*((5233790982038561*y1^2)/18014398509481984 -
(1470906787122181*y1*y3)/562949953421312 +
(1516642643473599*y3^2)/140737488355328))/(2*w_bar) -
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((3910195227567773*y1^2)/2251799813685248 -
(388452843802567*y1*y3)/140737488355328 +
(2421858244132679*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219
19*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/900
7199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1)) +
(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 -
(15099272210554661*y1*y3)/562949953421312 +
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*(((8541401921062861*y3)/1759
2186044416 + beta_0^2*((delta*sin(t))/2 + 1)^2*(y3*((10809*alfa)/1250 +
3083994015442091/562949953421312) - y1*((4223*alfa)/10000 +
6859/10000)))/w_bar^2 - (y3*((118898521169435*y1*y3)/137438953472 +
(7103242202638961*y1^2)/8796093022208 -
(1844279148567117*y3^2)/549755813888) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((16897437926277693*y1*y3)/4503599627370496 +
(1217716297348835*y1^2)/4503599627370496 -
(3633561710517223*y3^2)/70368744177664))/w_bar^2 -
y2*((8097455692977047*y1*y2)/2251799813685248 -
(215237848641315*y1*y4)/35184372088832 -
(442869243731795*y2*y3)/17592186044416 +
(3123187436001425*y3*y4)/140737488355328) -
(y1*((2379337096431245*y1^2)/35184372088832 -
(16648038645633255*y1*y3)/8796093022208 +
(5400240511849405*y3^2)/4398046511104) - beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((4892643479827881*y1*y3)/562949953421312 -
(1135421410973649*y1^2)/1125899906842624 +
(1041741779133213*y3^2)/2251799813685248))/w_bar^2 +
y4*((6887611156522043*y1*y2)/1125899906842624 -
```

```
(3123187453062981*y1*y4)/140737488355328 -
(6246374872002863*y2*y3)/281474976710656 +
(5092157611417933*y3*y4)/35184372088832) +
(8541401921062861*y4*zeta)/(17592186044416*w_bar) +
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((456829190947431*y1*y4)/18889465931478580854784 -
(722737509647653*y1*y2)/562949953421312 +
(5443629605651463*y2*y3)/562949953421312))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((6510558929393309*y1^2)/288230376151711744 -
(622940969555119*y1*y3)/281474976710656 +
(2499890170272083*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar) +
(beta_0*delta*cos(t)*((7817011262617307*alfa)/18014398509481984 +
817517226383979/9007199254740992))/(2*w_bar) +
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((6215245118277793*y1^2)/4503599627370496 -
(15499892794239039 3*y1*y3)/9007199254740992 +
(2389268422015035*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1));
y4;
(((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 -
(1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496)*(y2*((1293860442021595*y1*y2)/281474976710656 - (1012182060192025*y1*y4)/281474976710656 -
(8097455655102555*y2*y3)/2251799813685248 +
(860951392029505*y3*y4)/140737488355328) -
(y3*((6350384391236171*y1*y3)/4398046511104 +
(3707701516710709*y1^2)/17592186044416 +
(1485559856908115*y3^2)/17592186044416) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((671438718032692945*y1*y3)/36028797018963968 -
(4903674659204711*y1^2)/562949953421312 +
(3819651026616759*y3^2)/562949953421312))/w_bar^2 -
y4*((1012182060192025*y1*y2)/281474976710656 -
(1771476973568101*y1*y4)/70368744177664 -
(860951392029505*y2*y3)/140737488355328 +
(97599607800679*y3*y4)/4398046511104) +
(y1*((6194302592184281*y1*y3)/35184372088832 +
(5691226761084395*y1^2)/562949953421312 +
(7042136708999313*y3^2)/4398046511104) + beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((36361548653295431*y1*y3)/4503599627370496 +
(5586869172618323*y1^2)/36028797018963968 -
(5673197660138305*y3^2)/281474976710656))/w_bar^2 +
```

```
((434958217435561*y1)/35184372088832 - beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000) - y1*((15709*alfa)/10000 +
217668965730189/1125899906842624)))/w_bar^2 +
(434958217435561*y2*zeta)/(35184372088832*w_bar) -
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((7485988738164527*y2*y3)/302231454903657293676544 -
(5781899790596207*y1*y4)/4503599627370496 +
(680453699663217*y3*y4)/70368744177664))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((3526269511112683*alfa)/4503599627370496 +
5123510120620273/9007199254740992))/(2*w_bar) -
(beta_0*delta*cos(t)*((5233790982038561*y1^2)/18014398509481984 -
(1470906787122181*y1*y3)/562949953421312 +
(1516642643473599*y3^2)/140737488355328))/(2*w_bar) -
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((3910195227567773*y1^2)/2251799813685248 -
(388452843802567*y1*y3)/140737488355328 +
(2421858244132679*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (15099272210554661*y1*y3)/562949953421312
+
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1)) -
(((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 -
1)*(((8541401921062861*y3)/17592186044416 + beta_0^2*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*(y3*((10809*alfa)/1250 + 3083994015442091/562949953421312) -
y1*((4223*alfa)/10000 + 6859/10000)))/w_bar^2 -
(y3*((118898521169435*y1*y3)/137438953472 +
(7103242202638961*y1^2)/8796093022208 -
(1844279148567117*y3^2)/549755813888) - beta_0^2*y3*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((16897437926277693*y1*y3)/4503599627370496 +
(1217716297348835*y1^2)/4503599627370496 -
(3633561710517223*y3^2)/70368744177664))/w_bar^2 -
y2*((8097455692977047*y1*y2)/2251799813685248 -
(215237848641315*y1*y4)/35184372088832 -
(442869243731795*y2*y3)/17592186044416 +
(3123187436001425*y3*y4)/140737488355328) -
(y1*((2379337096431245*y1^2)/35184372088832 -
(16648038645633255*y1*y3)/8796093022208 +
(5400240511849405*y3^2)/4398046511104) - beta_0^2*y1*((delta*sin(t))/2 +
1)^2*((4892643479827881*y1*y3)/562949953421312 -
(1135421410973649*y1^2)/1125899906842624 +
(1041741779133213*y3^2)/2251799813685248))/w_bar^2 +
y4*((6887611156522043*y1*y2)/1125899906842624 -
```

```
(3123187453062981*y1*y4)/140737488355328 -
(6246374872002863*y2*y3)/281474976710656 +
(5092157611417933*y3*y4)/35184372088832) +
(8541401921062861*y4*zeta)/(17592186044416*w_bar) +
(2*beta_0*((delta*sin(t))/2 +
1)*((456829190947431*y1*y4)/18889465931478580854784 -
(722737509647653*y1*y2)/562949953421312 +
(5443629605651463*y2*y3)/562949953421312))/w_bar +
(beta_0*delta*cos(t)*((6510558929393309*y1^2)/288230376151711744 -
(622940969555119*y1*y3)/281474976710656 +
(2499890170272083*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar) +
(beta_0*delta*cos(t)*((7817011262617307*alfa)/18014398509481984 +
817517226383979/9007199254740992))/(2*w_bar) +
(alfa*beta_0*delta*cos(t)*((6215245118277793*y1^2)/4503599627370496 -
(154998927942390393*y1*y3)/9007199254740992 +
(2389268422015035*y3^2)/281474976710656))/(2*w_bar)))/(((7156547547963219*y1^2)/2251799813685248 - (150992722105546 61*y1*y3)/562949953421312 +
(2516506500612137*y3^2)/140737488355328)*((7111539524235425*y1^2)/9007199254740992 - (1649612233246533*y1*y3)/281474976710656 +
(7837504204028589*y3^2)/4503599627370496) +
((8742524942486289*y1^2)/2251799813685248 -
(2516506481289613*y1*y3)/70368744177664 +
(2181429831140443*y3^2)/17592186044416 +
1)*((888942558503681*y1*y3)/562949953421312 -
(4826262420733911*y1^2)/2251799813685248 +
(7428785747027719*y3^2)/1125899906842624 - 1));];

End
```

EK E: Lyapunov Üssü Hesabı İçin Kullanılan Kod.

```
function f=lorenz_ext(t,X)
%
%  Lorenz equation
%
%               dx/dt = SIGMA*(y - x)
%               dy/dt = R*x - y -x*z
%               dz/dt= x*y - BETA*z
%
%        In demo run SIGMA = 10, R = 28, BETA = 8/3
%        Initial conditions: x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 0;
%        Reference values for t=10 000 :
%              L_1 = 0.9022, L_2 = 0.0003, LE3 = -14.5691
%
%        See:
%    K. Ramasubramanian, M.S. Sriram, "A comparative study of
computation
%    of Lyapunov spectra with different algorithms", Physica D 139
(2000) 72-86.
%
% ------------------------------------------------------------------
-
% Copyright (C) 2004, Govorukhin V.N.
% Values of parameters
SIGMA = 10;
R = 28;
BETA = 8/3;
x=X(1); y=X(2); z=X(3);
Y= [X(4), X(7), X(10);
    X(5), X(8), X(11);
    X(6), X(9), X(12)];
f=zeros(9,1);
%Lorenz equation
f(1)=SIGMA*(y-x);
f(2)=-x*z+R*x-y;
f(3)=x*y-BETA*z;
%Linearized system
 Jac=[-SIGMA, SIGMA,     0;
         R-z,    -1,    -x;
           y,     x, -BETA];

%Variational equation
f(4:12)=Jac*Y;
%Output data must be a column vector
```

lyapunov2.m

```
function
[Texp,Lexp]=lyapunov2(n,rhs_ext_fcn,fcn_integrator,tstart,stept,tend,ystart,ioutp);
n1=n; n2=n1*(n1+1);

%  Number of steps

nit = round((tend-tstart)/stept);
```

```
% Memory allocation

y=zeros(n2,1); cum=zeros(n1,1); y0=y;
gsc=cum; znorm=cum;

% Initial values

y(1:n)=ystart(:);

for i=1:n1
   y((n1+1)*i)=1.0;
end;

t=tstart;

% Main loop

for ITERLYAP=1:nit

% Solutuion of extended ODE system

 [T,Y] = feval(fcn_integrator,rhs_ext_fcn,[t t+stept],y);

 t=t+stept;
 y=Y(size(Y,1),:);

 for i=1:n1
    for j=1:n1 y0(n1*i+j)=y(n1*j+i); end;
 end;

%
%      construct new orthonormal basis by gram-schmidt
%

 znorm(1)=0.0;
 for j=1:n1 znorm(1)=znorm(1)+y0(n1*j+1)^2; end;

 znorm(1)=sqrt(znorm(1));

 for j=1:n1 y0(n1*j+1)=y0(n1*j+1)/znorm(1); end;

 for j=2:n1
    for k=1:(j-1)
       gsc(k)=0.0;
       for l=1:n1
          gsc(k)=gsc(k)+y0(n1*l+j)*y0(n1*l+k);
       end;
    end;
```

```
    for k=1:n1
       for l=1:(j-1)
          y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)-gsc(l)*y0(n1*k+l);
       end;
    end;

    znorm(j)=0.0;
    for k=1:n1
       znorm(j)=znorm(j)+y0(n1*k+j)^2;
    end;
    znorm(j)=sqrt(znorm(j));

    for k=1:n1
       y0(n1*k+j)=y0(n1*k+j)/znorm(j);
    end;
 end;

%
%      update running vector magnitudes
%

 for k=1:n1
    cum(k)=cum(k)+log(znorm(k));
 end;

%
%      normalize exponent
%

 for k=1:n1
    lp(k)=cum(k)/(t-tstart);
 end;

% Output modification

 if ITERLYAP==1
   Lexp=lp;
   Texp=t;
 else
   Lexp=[Lexp; lp];
   Texp=[Texp; t];
 end;

 for i=1:n1
    for j=1:n1
       y(n1*j+i)=y0(n1*i+j);
    end;
 end;

end;
```

calculateLyapSpec.m

```
clc
clear all
p = parpool(40, 'IdleTimeout', 50000)
	T = 2*pi;
	h = 0.0025*T
	N = 200;
	ts = N*T;

	[T,Res]=lyapunov(3,@lorenz_ext,@ode45,0,h,ts,[0 1 0],10);
	Lyap1 = Res(:,1);
	Lyap2 = Res(:,2);
	Lyap3 = Res(:,3);
	L = length(Lyap1)*0.5;
	L1 = mean(Lyap1(L:end,1));
	L2 = mean(Lyap2(L:end,1));
	L3 = mean(Lyap3(L:end,1));
	M = [L1,L2,L3];
	dlmwrite('w_beta.txt',M,'delimiter','\t','precision',7,'newline','pc','-append');
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad **:** Uğur TATLIER

ÖĞRENİM DURUMU

- **Lisans** **:** 2020, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği
- **Yüksek lisans** **:** hâlen, İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği ABD, Makine Dinamiği, Titreşim & Akustik Programı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2020 – hâlen: İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Makine Dinamiği, Titreşim & Akustik Kürsüsünde Araştırma Görevlisi

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Tatlıer, U., Turhan Ö.** 2022. Chaotic Vibrations of Rotating Elastic Beams. *The International Graduate Research Symposium (IGRS'22)*, Haziran 1-3, 2022 İstanbul, Türkiye (çevrimiçi).
- **Tatlıer, U., Öztürk S., Öner N., Yetim A.** 2022. Experimental and Numerical Modal Analysis of the Turkish Traditional Instrument 'Bendir'. *Internoise,* Ağustos 20-24, 2022 Glasgow, İskoçya (çevrimiçi).