



İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

83233

YÜKSEK LİSANS TEZİ

83233

**METRİKLENEBİLME TEORİSİNDEN
SONUÇLAR**

Gülseren Kuzucuk ÇİÇEK

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof.Dr. Nurettin ERGÜN

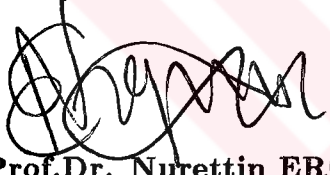
Haziran – 1999

İSTANBUL

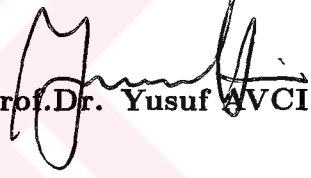
T.C. YÜKSEK
DOKÜMAN

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma 02.07.1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Matematik programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof.Dr. Nurettin ERGUN
(Danışman)



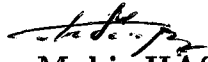
Prof.Dr. Yusuf AVCI



Prof.Dr. Mehmet ERDOĞAN



Prof.Dr. Hüseyin ÇAKALLI



Prof.Dr. Mahir HASENOV

Önsöz

Bu yüzyılın başında Maurice Fréchet tarafından tanımlanan metrik uzaylar ilk tanımlanan topolojik uzay türü olmuştur. Genel topolojinin pek çok özelliği onların, özellikle Öklid uzaylarının özelliklerinin soyutlaştırılması ya da genelleştirilmesi yoluyla tanımlanmıştır. Dolayısıyla genel topolojinin gelişimi 1920 ve 1930'larda metrik uzayların ve özellikle ayrılabilir metrik uzayların gelişimine çok şey borçludur. İlk kez 1920'lerin başında ortaya atılan bir başka temel soru ise metriklenebilme sorusudur. Bir (X, τ) topolojik uzayı ne gibi topolojik özelliklere sahip olursa, τ topolojisi X üzerinde tanımlı uygun bir d metriğin belirlediği τ_d topolojisine eşit olabilir? Bu koşulu gerçekleyen τ topolojisiyle donatılmış bir topolojik uzaya **metriklenebilir** denir. 1951 yılında kanıtlanan Nagata & Smirnov Teoremi, örneğin, ancak ve yalnız σ -yerel sonlu bir tabana sahip düzenli Hausdorff uzaylarının metriklenebildiğini söylerken 1950 yılında Bing tarafından kanıtlanan bir başka ünlü teorem ise ancak ve yalnız parakompakt Moore uzaylarının metriklenebildiğini söylemektedir. Parakompakt uzayların tanımlanışı gerçekten topolojide metriklenebilme konusunda yeni gelişim ve yöntemlerin ortaya çıkmasına yol açmıştır.

Bu tez çalışması klasik ve ünlü 12 metriklenebilme teoreminin, onların kavranabilir olması için gerekli hemen tüm kavram ve sonuçların ayrıntılı biçimde anlatıldığı ve bu teoremlerin yine ayrıntılı bir biçimde kanıtlandığı, kendi içinde yeterli bir bütünlüğe ve anlatıma sahip bir derleme niteliğindedir. Ayrıca metriklenebilme konusunda sorulan ve aslında bir matematik mantık sorusu olduğu ortaya atılışından 35 yıl sonra anlaşılan Jones öngörüsüne ilişkin yeterince aydınlatıcı ve kapsamlı bir bölüme de yer verilmektedir.

Bu tez çalışmasının gerek hazırlık aşamasında ve gerekse yazılması sırasında bana yardımcı olan sayın hocam Prof.Dr.Nurettin Ergun'a çok teşekkür ediyorum. Ayrıca bilgisayara yazılımı sırasında yardımcı olan arkadaşım Araş.Gör.Halidun Gürses'e ve desteğinden dolayı eşim Araş.Gör.Cemal Çiçek'e de teşekkür ederim.

Gülseren Kuzucuk Çiçek

İçindekiler

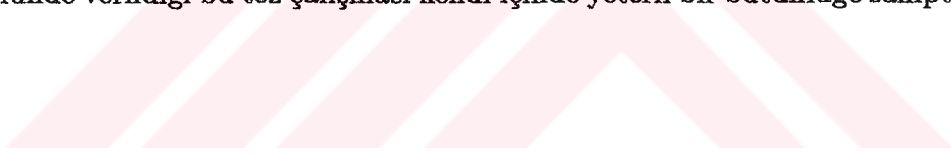
Önsöz	i
İçindekiler	ii
Özet	iii
Summary	iv
I.Giriş Temel Bilgiler	1
II.Bölüm 1 Bazı Örtülüş Özelliklerinin Önemi	6
III.Bölüm 2 Parakompakt Uzayların Önemi	12
IV.Bölüm 3 A.H.Stone'un Tarihsel Makalesi	23
V.Bölüm 4 Açınır Uzayların Önemi	27
VI.Bölüm 5 Özel Tabanların Önemi	34
VII.Bölüm 6 Derlemsel Normal Uzayların Önemi	38
VIII.Bölüm 7 Sneider Lemmasının Bazı Genelleştirmeleri	43
IX.Bölüm 8 Jones Tahmini	50
X.Bölüm 9 Çeşitli Karşı Örnek Uzayları	59
XI.Bulgular	73
XII.Tartışma ve Sonuç	75
XIII.Kaynaklar	77
XIV.Özgeçmiş	81
Dizin	82

Özet

Metriklenebilme Teorisinden Sonuçlar

Metrik uzaylar (ve normlu vektör uzayları), Maurice Fréchet'nin 1906 yılında yayınladığı ünlü ve tarihsel doktora tezinde tanımlandığından bu yana topolojinin ve doğal olarak analizin en temel uzayları arasında yer almıştır. Genel Topoloji, özellikle ayrılabilir metrik uzayların özellikleriyle uzun yıllar boyunca yoğun biçimde uğraşmıştır. Fakat ondan daha fazla ilgi çeken ve uğraşılan bir başka temel konu metriklenebilme sorusu olmuştur. Hangi topolojik uzaylar metriklenebilirdir? Kısacası hangi topolojik özelliklerle donatılmış bir X topolojik uzayının topolojisi, X üzerinde tanımlanmış bir metriğin belirlediği topolojiye eşit olabilir? 1920'lerin başında ortaya atılan bu soruyla o tarihten günümüze değin uğraşılmıştır. 1923 yılında kanıtlanan ünlü Urysohn Metriklenebilme teoremi örneğin, bu konuda çok kullanışlı bir yeter koşul sunmaktadır.

1944 yılında parakompaktlık'ın tanımlanması ve dört yıl sonra her sözdemetrik uzayın parakompakt olduğunun kanıtlanmasının ardından metriklenebilme konusunda ilginç pek çok karakterizasyon verilmiştir. Derleme niteliğindeki bu tez çalışmasında, aralarında Alexandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoremi, Bing Metriklenebilme Teoremi ve Nagata & Smirnov Teoremi'nin yer aldığı en ünlü oniki metriklenebilme teoremi ayrıntılı bir biçimde kanıtlanmaktadır. Ayrıca, bu konudaki en ünlü ve güç sorulardan birisi olan Jones öngörüsünün bir matematik mantık sorusu olduğunun kanıtlanışına da başlıbaşına bir bölüm ayrılmıştır. Gerekli tüm bilgilerin Giriş bölümünde verildiği bu tez çalışması kendi içinde yeterli bir bütünlüğe sahiptir.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM
DOKÜMANI

Summary

Results From The Metrization Theory

Metric spaces and normed vector spaces has taken their first rank and fundamental status in topology after their definition by Maurice Fréchet in 1906. General Topology had especially worked on separable metric spaces since then. But more importantly, metrization problem has been one of the most challenging and interesting question of topology. Which topological spaces are metrizable? In brief whenever the topology of a topological space X coincide with the topology defined by a metric on X , i.e. which topological conditions on X does guarantee such a coincidence. It has been worked intensively with this question since 1920's. The famous Urysohn Metrization Theorem, for instance, gives a very useful sufficient condition for solution.

After introducing of paracompactness in 1944 and proving the basic fact that every pseudometrizable space is paracompact, it has been given several interesting characterisations on metrization. It is given complete detailed proofs the most well known twelve metrization theorems in this thesis with a survey character where the Alexandroff & Urysohn Metrization Theorem, the Bing Metrization Theorem and the Nagata & Smirnov Theorem are some of them. Additionally a whole chapter is devoted to the proof of the fact that Jones Conjecture which is one of the most well known and difficult problem of this topic, is actually nothing but a question of mathematical logic. This thesis has a sufficient wholeness where all the necessary knowledge is given in the introductory chapter.

I. Giriş

TEMEL BİLGİLER

Bu kısa bölümde bu tez çalışması için gerekli bazı bilgiler kısaca gözden geçirilecektir.

X kümesi verildiğinde, her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, x) = 0, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

koşullarını gerçekleyen bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna, X kümesi üzerinde tanımlı bir **sözdemetrik** (pseudometric) denir. Daima $0 \leq d(x, y)$ gerçekleşir. Herbir $x \in X$ noktası için $\mathcal{B}_x = \{S_d(x, \epsilon) : 0 < \epsilon\}$ ailesinin esas civarlar olduğu topoloji kısaca τ_d ile gösterilir. Bu topolojide, boş olmayan bir A alt kümesi için

$$S_d(A, \epsilon) = \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\} \quad , \quad S_d[A, \epsilon] = \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}$$

kümeleri sırasıyla açık ve kapalıdır; burada $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ yazılmıştır. (X, τ_d) uzayı hem normal hem tümüyle düzenlidir; çünkü K_1 ve K_2 kapalı kümeleri ayrık ise sırasıyla onları kapsayan

$$G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(S_d(K_1, \frac{1}{n}) - S_d[K_2, \frac{1}{n}] \right)$$
$$G_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(S_d(K_2, \frac{1}{n}) - S_d[K_1, \frac{1}{n}] \right)$$

açık kümeleri ayrık olur çünkü n ve m doğal sayıları ne olursa olsun

$$S_d(K_1, \frac{1}{n}) - S_d[K_2, \frac{1}{n}] \quad \text{ve} \quad S_d(K_2, \frac{1}{m}) - S_d[K_1, \frac{1}{m}]$$

açık kümeleri ayrıktır. Dikkat edilirse, sabit ve boş olmayan bir A alt kümesi sayesinde tanımlanan

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad f(x) = d(x, A)$$

gerçek değerli f fonksiyonu sürekli (hatta $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ nedeniyle düzgün sürekli) olduğundan, bu uzayın normal oluşu daha kısa ve yalın biçimde

$$\{x \in X : d(x, K_1) < d(x, K_2)\} \quad \text{ve} \quad \{x \in X : d(x, K_2) < d(x, K_1)\}$$

ayrık kümelerinin açık oluşları ve sırasıyla K_1 ve K_2 kümelerini kapsamamasından da elde edilebilirdi. Bu uzayda $x_0 \notin \overline{A}$ ise

$$h(x) = \frac{d(x, x_0)}{d(x, x_0) + d(x, A)} \quad (x \in X)$$

biçiminde tanımlanan sürekli Urysohn fonksiyonu $h(x_0) = 0$ ve $h(A) = 1$ gerçektir. Eğer X üzerinde d sözdemetriğinden ayrı olarak bir τ topolojisi tanımlanmışsa, $X \times X$ çarpım uzayında tanımlı d 'nin sürekli olması için $\text{gyk } \tau_d \subseteq \tau$ gerçekleşmesi, başka bir deyimle τ_d nin kaba olmasıdır. Gerçekten d sürekli ise, bir $x_0 \in X$ verildiğinde $f_{x_0}(x) = d(x, x_0)$ biçiminde tanımlanan sürekli ve gerçel değerli f_{x_0} fonksiyonu cinsinden

$$S_d(x_0, \epsilon) = f_{x_0}^{-1}([-\epsilon, \epsilon]) \in \tau \quad (0 < \epsilon)$$

nedeniyle kolayca $\tau_d \subseteq \tau$ elde edilir. Yeterlilik kolayca gösterilir. Ancak ve yalnız $\tau = \tau_d$ gerçekleştiğinde τ topolojisine d sözdemetriği ile **sözdemetriklenir** denir. Eğer d bir metrikse, yani sözdemetrik koşullarından son iki koşulun yanısıra birincisi yerine daha güçlü olan

$$d(x, y) = 0 \quad \text{için } \text{gyk } x = y$$

koşulunu gerçekleştirmişse, bu kez τ topolojisine **metriklenir** ya da **metriklenir** denir.

Bir X topolojik uzayında tanımlı bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ alt kümeleri ailesine, her noktanın, bu ailenin en fazla sonlu tane üyesi ile kesişebilen bir esas civarı tanımlıysa, **yerel sonlu aile** (locally finite family) denir. Yerel sonlu bir aile, üstelik her farklı α ve β indisleri için $\overline{A_\alpha} \cap \overline{A_\beta} = \emptyset$ gerçekliyorsaa **kesikli(discrete)aile** adını alır. $\mathcal{A}$ ailesinin kesikli olabilmesi için gyk , uzayın her noktasının bu ailede en fazla bir üye ile kesişebilen bir esas civarının var olmasıdır. Eğer $\mathcal{A}$ ailesi yerel sonlu ise

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$$

koşulu gerçekleşir, yani $\mathcal{A}$ ailesi **kapanış korur**(closure preserving); gerçekten sol yandan alınan herhangi bir $x \in X$ için, uygun bir sonlu elemanlı $\Lambda_x \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi ve x noktasının uygun bir G_x esas civarı sayesinde $G_x \cap \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda - \Lambda_x\} = \emptyset$ gerçekleştiğinden

$$\begin{aligned} x &\in \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}} - \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda - \Lambda_x\}} \\ &\subseteq \overline{\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda_x\}} = \bigcup\{\overline{A_\alpha} : \alpha \in \Lambda_x\} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla sonuçta

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$$

bulunur, oysa ters kapsama daima geçerlidir. Her yerel sonlu ailenin **noktasal sonlu** olacağı (her noktanın, ailenin en fazla sonlu sayıda üyesine ait olabileceği) apaçıktır. Oysa dikkat edilirse $\mathbb{R}^1$ bir boyutlu Öklid uzayında, tüm

$$\left]n - \frac{1}{2^n}, n + 1 - \frac{1}{2^n}\right[\quad , \quad \left] -n - \frac{1}{2^n}, -n + 1 + \frac{1}{2^n}\right[\quad , \quad \left] \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n}\right[$$

açık aralıklarından ($n \in \mathbb{N}$) oluşan $\mathcal{G}$ ailesi bir noktasal sonlu açık örtülüdür, oysa yerel sonlu değildir.

Bir topolojik uzay, ancak ve yalnız, sayılabilir üyeli ve kesikli her kapalı kümeler ailesinin üyelerini ikiyeşerli ayrık açık kümelerle ayrılabilirse normal olabilir. Gerçekten X normal uzayında $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ kapalı kümeler ailesi kesikli ise, birinci adımda

$$K_1 \subseteq W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq X - \bigcup_{1 < n} K_n$$

gerçekleyen bir W_1 açık kümesi vardır ve tümevarımla $n+1$ -nci adımda

$$K_{n+1} \subseteq W_{n+1} \subseteq \overline{W_{n+1}} \subseteq X - \left(\overline{\bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k} \cup \bigcup_{n+1 < k} K_k \right)$$

gerçekleyen W_{n+1} açık kümesi vardır. $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi aranandır. Üstelik aranan açık kümeler ailesini kesikli bile alabiliriz, çünkü normallik gereği var olan ve

$$\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \bigcup \mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$$

gerçekleyen U açık kümesi yardımıyla tanımlanan $\{W_n \cap U : n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi hem K_n kümelerini ikiyeşerli ayırır ve hem de kesikli bir ailedir.

Bir X topolojik uzayında sürekli ve gerçel değerli bir $f : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ fonksiyonu için kısaca Z_f ya da $Z(f)$ ile gösterilen $f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ kümesine f fonksiyonunun **sıfır kümesi** denir. Herhangi bir sözdemetrik uzayında her kapalı küme bir sıfır kümesidir. Gerçekten boş olmayan K kümesi (X, τ_d) sözdemetrik uzayında kapalı ise, $f_K(x) = d(x, K)$ biçiminde tanımlanan sürekli ve gerçel değerli f_K fonksiyonu sayesinde $K = f_K^{-1}(0)$ geçerlidir. Eğer f ve g gerçel değerli fonksiyonları sürekli ise $\{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ kümesi de bir sıfır kümesidir çünkü bu küme $Z((g - f) \wedge 0)$ dır; bu küme kısaca $[f \leq g]$ işareti ile gösterilir. Sonlu hatta sayılabilir sıfır kümesinin kesişimi de bir sıfır kümesidir, gerçekten

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(|f| + |g|) \quad ,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z(f_n) = Z\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_n|}{1 + |f_n|}\right)$$

kolayca gözlenir. (Toplam fonksiyonun sürekliliği için aşağıya bakınız.) Eğer f ve g gerçel değerli fonksiyonları sürekli ise, benzer biçimde $[f < g]$ kümesinin $[g \leq f]$ sıfır kümesinin tümleyeni olduğu apaçıktır. Bu tür kümelere **tümleyen sıfır küme** denilir. Dikkat edilirse

$$X - Z(f) = X - Z(|f|) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} < |f| \right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \leq |f| \right]$$

gerçekleştirdiği kolayca gözlenir. Yetkin normal uzayların ilginç bir özelliği , bu uzaylarda her açık kümenin bir tümleyen sıfır kümesi olmasıdır. Gerçekten böyle bir uzayda K boş olmayan kapalı kümesi bir G_δ kümesi olduğundan, uygun bir $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ açık kümeler dizisinin kesişimidir ve sonuçta

$$f_n(K) = 0 \quad , \quad f_n(X - G_n) = 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

gerçekleyen f_n Urhsohn fonksiyonları sayesinde tanımlanan

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n} \quad \text{için} \quad K = Z(f)$$

gerçekleşir; burada kolayca görülebileceği gibi f fonksiyonu süreklidir, çünkü x ve y eleman çifti ve n doğal sayısı ne olursa olsun

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(x) - f_k(y)| + 2 \cdot \sum_{k>n} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^n |f_k(x) - f_k(y)| + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

geçerlidir.

Bir X topolojik uzayının $s(X)$ ile gösterilen **Souslin sayısı** (Souslin number) bu uzaydaki, üyeleri, boştan farklı ve ikişerli ayrık kümeler olan ailelerin kardinalitelerin supremumu; buna karşılık $e(X)$ ile gösterilen **uzanım sayısı** (extent) ise bu uzayın kapalı ve kesikli alt kümelerin kardinalitelerinin supremumudur. Metrik bir uzayda bu iki sayı eşittir; çünkü A alt kümesi böyle bir uzayda kapalı ve kesikli ise yani $A' = \emptyset$ ise her bir $x \in A$ için $0 < \delta_x = \frac{1}{2}d(x, A - \{x\})$ pozitif sayıları sayesinde tanımlanan $\mathcal{G} = \{S_d(x, \delta_x) : x \in A\}$ açık yuvarlar ailesinin yuvarları ikişerli ayrıktır ve sonuçta $e(X) \leq s(X)$ geçerlidir. Bu eşitsizlik, bu uzayların aynı zamanda Derlemlsel Hausdorff olması gereği $s(X) < e(X)$ gerçekleşemeyeceği nedeniyle kolayca gözlenecektir. Bu iki sayının metrik uzaylarda eşitliğinin kanıtlanması için Engelking'in dördüncü bölümündeki Teorem 4.1.15'e başvurulmalıdır. Ayrılabilir bir metrik uzayda $s(X) = e(X) \leq \aleph_0$ gerçekleşir.

Bir X topolojik uzayını , yoğun bir alt uzay kabul eden herhangi bir tıkHz uzaya X in bir tıkHzlaştırma uzayı ya da kısaca **tıkHzlaştırması** denir. Eğer X tümüyle düzenli(completely regular) bir Hausdorff uzayı ise , Eduard Čech'in 1938 yılında gözlediği gibi , X uzayından , tıkHz olan ve Tikhonov kübü olarak bilinen

$$X^* = \prod_{f \in C(X,I)} I_f$$

çarpım uzayına

$$h(x) = \{f(x)\}_{f \in C(X,I)}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona **değerlendirme fonksiyonu**(evaluation map) denir ve bu fonksiyon süreklidir çünkü her bir $f \in C(X, I)$ için $\pi_f \circ h = f$ gerçekleşir;

burada I ile alışlagelen $[0, 1]$ tıkHz uzayı anlaşılmaktadır ve $C(X, I)$ ise X uzayından bu aralığa tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstermektedir. X bir tümüyle düzenli T_1 uzayı olduğu için h fonksiyonunun bire-bir olduğu ve $h : X \rightarrow h(X)$ fonksiyonunun da kapalı bir fonksiyon olduğu kolayca gözlenir. $h(X) \subseteq X^*$ ın tıkHz X^* uzayındaki kapanışına X uzayının **Stone-Čech tıkHzlaştırması** denir ve bu uzay kısaca

$$\beta X = \text{kap}_{X^*} h(X)$$

işareti ile gösterilir. X ile $h(X)$ 'in eşyapılı oldukları ve X 'in topolojik kopyası olan $h(X)$ 'in βX tıkHz Hausdorff uzayında yoğun olduğu açıkça görülür. βX uzayının temel özelliklerinden bir tanesi X 'ten herhangi bir tıkHz uzaya tanımlanan her sürekli fonksiyonun βX uzayına en az bir sürekli genişlemesinin var olmasıdır. Bunu ve genelde bu tez çalışmasında açıkça gösterilmemiş tüm temel özellikleri üç temel başvuru kitabı olan Engelkind, Dugundji ve Willard'dan bulabilirsiniz. Her bölüm için gerekli tüm yeni kavramlar, o bölümün başında verilecektir.

Uyarı: Açıkça söylenmedikçe, bu tez çalışmasında, topolojik uzayların herhangi bir ayırma aksiyomunu gerçekleştirmedikleri varsayılmaktadır. Özellikle, açıkça vurgulanmadıkça düzenli, normal ve yetkin normal uzayların T_1 ya da T_2 ayırma aksiyomunu gerçeklemleri gerekmemektedir.

II.Bölüm 1

BAZI ÖRTÜLÜŞ ÖZELLİKLERİNİN ÖNEMİ

1920'lerin başında topolojik uzaylarda yığılma noktalarının varlığının ve özelliklerinin araştırılmasıyla birlikte örtülüş özellikleri de genel topolojinin gündemine girmiştir. Belirli tür açık örtülüşlerden belirli tür alt örtülüşler ya da incelmeler elde edebilme biçimindeki özelliklere topolojide kısaca **örtülüş özelliği**(covering property) denir. Topolojinin hiç kuşkusuz en ünlü örtülüş özelliği, bir topolojik uzayın her açık örtülüşünden sonlu üyeli bir alt örtülüş elde edebilmesi özelliği olan **tıkızlıktır**. Pavel Alexandroff 1924'de ancak ve yalnız, sonsuz noktalı her A alt kümesinin en az bir **tam yığılma noktası**'na sahip olabildiği (kısaca en az bir $x \in X$ noktasının her G_x açığının $|G_x \cap A| = |A|$ koşulunu gerçeklediği) bir X uzayının tıkız olduğunu kanıtladı. Jean Dieudonne'nin 1944 yılında tanımladığı daha zayıf bir örtülüş türü olan parakompaktlık'ın metriklenebilme teorisindeki inanılmaz önemi ise 1948'de anlaşılmıştır. Japon usta Kiiti Morita ise, aynı yıl, herhangi bir topolojik uzayın çok özel bazı açık örtülüşlerden "normal bir açık incelmeler dizisi" elde edebileceğini kanıtlayarak gerçekten şaşırtıcı bir sonuç elde etmiştir. Parakompaktlık bir sonraki bölümde incelenecektir.

Şimdi çeşitli incelme türlerini tanımlayalım. Bir X topolojik uzayında $\mathcal{G}$ bir açık örtülüş olsun. Bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşüne

$$\forall U \in \mathcal{U} \quad , \quad \exists G_U \in \mathcal{G} \quad ; \quad U \subseteq G_U$$

koşulunu gerçeklerse $\mathcal{G}$ örtülüşünün bir **incelmesi**(refinement) denir. Daha güçlü bir koşul olan

$$\forall x \in X \quad , \quad \exists G_x \in \mathcal{G} \quad ; \quad st(x, \mathcal{U}) \subseteq G_x$$

koşulu gerçekleştiğinde $\mathcal{U}$ 'ya $\mathcal{G}$ 'nin **barisantrik incelmesi** ve daha da güçlü olan

$$\forall U \in \mathcal{U} \quad , \quad \exists G_U \in \mathcal{G} \quad ; \quad st(U, \mathcal{U}) \subseteq G_U$$

koşulu gerçekleştiğinde ise **yıldız incelmesi** denir, bu son durum kısaca $\mathcal{U} \overset{*}{\prec} \mathcal{G}$ işareti ile gösterilir. Burada, herhangi bir $\mathcal{A}$ ailesi ve herhangi bir $E \subseteq X$ alt kümesi için

$$st(E, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \in \mathcal{A} : A \cap E \neq \emptyset\}$$

kümesine, E 'nin $\mathcal{A}$ ailesine göre **yıldızıl kümesi** (ya da yıldız kümesi) denir.

$$ord(E, \mathcal{A}) = card\{A \in \mathcal{A} : A \cap E \neq \emptyset\}$$

kardinal sayısına ise E 'nin $\mathcal{A}$ ailesine göre **derecesi** denir. Bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşüne, herbir $G \in \mathcal{G}$ için $ord(G, \mathcal{G}) < \aleph_0$ koşulu gerçekleşiyorsa **yıldızıl sonlu örtülüş** denir. Bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisine ise, ancak ve yalnız,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \mathcal{G}_{n+1} \overset{*}{\prec} \mathcal{G}_n$$

koşulunu gerçekliyorsa **normal bir açık örtülüşler dizisi** denir. Bu kavramın önemi Bölüm.4 'te kanıtlanacak olan Alexandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoreminde açıkça görülecektir. Bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün, aynı indis kümesini kullanan ve her $\alpha \in \Lambda$ için $U_\alpha \subseteq G_\alpha$ gerçekleyen $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık incelmeye **tam incelme**(precise refinement); eğer her $\alpha \in \Lambda$ için daha güçlü olan $\overline{U_\alpha} \subseteq G_\alpha$ koşulu gerçekleniyorsa bu kez $\mathcal{U}$ incelmeye $\mathcal{G}$ örtülüşünün bir **tam büzülmesi**(precise shrinking) denir. İyi bilindiği gibi bir topolojik uzayda ancak ve yalnız kapanış kümeleri kapalıdır. Özel olarak açık kümelerin kapanışlarına eşit olabilen (ya da eşdeğer olarak kendi içlerinin kapanışlarına eşit olabilen) özel kapalı kümeler **düzenli kapalı** (regularly closed) **küme** denir. Bu temel kavramların tanımlarından sonra, bölümün sonuçlarına geçebiliriz.

Teorem: *Herhangi bir topolojik uzayda tümleyensıfır kümelerin sayılabilir üyeli her örtülüşünün yerel sonlu bir açık incelmesi vardır.*

Kanıt: $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtülüşünün üyeleri X uzayında birer tümleyensıfır kümesi olsun. O halde

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad K_n = X - \bigcup_{1 \leq k \leq n} U_k$$

kapalı kümeleri birer sıfır kümesidir, azahlılar ve kesişimleri boştur. Oysa $X - K_n$ bir tümleyensıfır kümesi olduğundan

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad X - K_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{nm} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{nm} ,$$

$$G_{nm} \subseteq F_{nm} \subseteq G_{n,m+1} \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

koşulları gerçeklenecek biçimde G_{nm} açık ve F_{nm} kapalı kümeleri vardır. Şimdi, boş indis kümeleri üzerinden birleşimlerin boş küme olduğunu unutmadan

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad W_n = U_n - \bigcup_{1 \leq k < n} F_{kn}$$

açık kümelerinin oluşturduğu $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin aranan yerel sonlu açık incelme olduğunu göstereyim. Herbir $n \in \mathbb{N}$ ve $k < n$ için

$$F_{kn} \subseteq X - K_k = \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i \subseteq \bigcup_{1 \leq i < n} U_i$$

nedeniyle

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad U_n - \bigcup_{1 \leq i < n} U_i \subseteq W_n$$

gerçekleştigiinden herbir $x \in X$ için $n_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in U_n\}$ tanımlayarak kolayca $\mathcal{W}$ ailesinin bir açık örtülüş ve sonuçta $\mathcal{U}$ ailesinin bir incelmesi olduğu anlaşılır. Üstelik $n + m < N$ ise F kümelerinin ikinci alt indisler üzerinden arttığını kullanarak

$$G_{nm} \subseteq F_{nm} \subseteq F_{n,N} \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} F_{kN} \subseteq \bigcup_{1 \leq k < N} F_{kN} \subseteq X - W_N ,$$

$$n + m < N \quad \text{ise} \quad G_{nm} \cap W_N = \emptyset$$

bulunur. Bu ise

$$\bigcup_n \bigcup_m G_{nm} = X - \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X$$

gerçekleştiği kısacası $\{G_{nm} : n, m \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi bir örtülüş olduğu için $\mathcal{W}$ ailesinin yerel sonlu olduğu sonucunu verir. (q.e.d.)

Lefschetz Teoremi: *Bir uzayın normal olabilmesi için gyk her noktasal sonlu açık örtülüşünün bir tam düzenli kapalı büzülmeye sahip olmasıdır.*

Kanıtlama: Gereklik: X normal uzayında, indis kümesi iyi sıralanmış Λ indis kümesi olan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ noktasal sonlu açık örtülüşü verilsin. $\min \Lambda = \alpha_0$ ise normallik koşulunun gereği olarak

$$X - \bigcup_{\alpha_0 < \alpha} G_\alpha \subseteq W_{\alpha_0} \subseteq \overline{W_{\alpha_0}} \subseteq G_{\alpha_0}$$

gerçeklenecek biçimde bir W_{α_0} açık kümesinin var olduğunu biliyoruz. O halde

$$W_{\alpha_0} \cup \bigcup_{\alpha_0 < \alpha} G_\alpha = X$$

elde edilir. Şimdi $|\Lambda| = \kappa$ olmak üzere, herhangi bir $\alpha < \kappa$ verildiğinde

$$\forall \beta < \alpha \quad \text{için} \quad \bigcup_{\mu \leq \beta} W_\mu \cup \bigcup_{\beta < \gamma} G_\gamma \quad (*)$$

$$\forall \mu < \beta \quad \text{için} \quad \overline{W_\mu} \subseteq G_\mu$$

gerçekleyen açık W_μ kümelerinin tanımlanmış olduğunu varsayalım. Şimdi bu aşamada öncelikle $\mathcal{G}^*(\alpha) = \{W_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{G_\gamma : \alpha \leq \gamma\}$ açık kümeler ailesinin X uzayında bir örtülüş olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ alınsın. Varsayalım ki $x \notin \bigcup \{G_\gamma : \alpha \leq \gamma\}$ gerçekleşsin. $\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : x \in G_\alpha\}$ alt indis kümesinin varsayım gereği sonlu elemanlı olduğunu biliyoruz. Bu iyi sıralanmış kümenin elemanları

$$\alpha_1(x) < \alpha_2(x) < \dots < \alpha_n(x)$$

şeklinde sıralanmış olsun. Yukarıda x elemanı için yaptığımız varsayım gereği zorunlu olarak $\alpha_n(x) < \alpha$ gerçekleşir ve dolayısıyla $(*)$ nedeniyle, orada $\beta = \alpha_n(x)$ alarak,

$$x \notin \bigcup \{G_\gamma : \alpha_n(x) \leq \gamma\} \quad \text{ve} \quad x \in \bigcup \{W_\mu : \mu \leq \alpha_n(x)\}$$

bulunur. Demek ki $\mathcal{G}^*(\alpha)$ ailesi X uzayında bir açık örtülüşdür. O halde yine daha önce yapıldığı gibi

$$X = \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha < \gamma} G_\gamma \cup G_\alpha$$

nedeniyle bu kez

$$X - \left(\bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha < \gamma} G_\gamma \right) \subseteq W_\alpha \subseteq \overline{W_\alpha} \subseteq G_\alpha \quad ,$$

$$X = \bigcup_{\beta \leq \alpha} W_\beta \cup \bigcup_{\alpha < \gamma} G_\gamma \quad (**)$$

gerçekleyen W_α açık kümesinin tanımlı olduğu anlaşılır. Sonuçta sonluötesi tümevarımla, her $\alpha \in \Lambda$ için $\overline{W_\alpha} \subseteq G_\alpha$ gerçekleyen W_α açık kümeleri tanımlanmış olur. $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ailesinin bir örtülüş olduğu, herhangi bir $x \in X$ alındığında $\alpha_n(x)$ indisi için $(**)$ bağıntısının kullanılmasıyla anlaşılacaktır.

Yeterlik: Noktasal sonlu açık örtülüşlerden düzenli kapalı bir tam büzülme elde edebilen bir X uzayında G açık kümesi K kapalı kümesini kapsıyorsa $\{G, X - K\}$ sonlu üyeli (ve doğal olarak noktasal sonlu) açık örtülüşünün, $\overline{W_1} \subseteq G$ ve $\overline{W_2} \subseteq X - K$ gerçekleyen $\{W_1, W_2\}$ tam incelmesi sayesinde, kolaylıkla

$$K \subseteq X - \overline{W_2} \subseteq X - \overline{\overline{W_2}} \subseteq \overline{W_1} \subseteq G$$

elde edilir ve X uzayının normal olduğu anlaşılır.(q.e.d.)

Morita Teoremi: *Normal bir uzayın noktasal sonlu ve sayılabilir her açık örtülüşünün yıldızlı sonlu ve sayılabilir bir açık incelmesi vardır.*

Kanıtlama: X normal uzayında noktasal sonlu ve sayılabilir üyeli $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık örtülüğü verilsin. Lefschetz teoremi nedeniyle her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subseteq U_n$ gerçekleşecek biçimde bir $\mathcal{K} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ kapalı tam büzülmesi vardır. Uzayın normallığı nedeniyle, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$K_k \subseteq G(k, n) \subseteq \overline{G(k, n)} \subseteq G(k, n+1) \subseteq U_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

gerçeklenecek biçimde $G(k, n)$ açık kümeleri tümevarım yöntemiyle tanımlıdır. Şimdi

$$W_{1,1} = G(1, 2) \quad ,$$

$$W_{k,n} = G(k, n+1) - \overline{\bigcup_{1 \leq i < n} G(i, n-1)} \quad (2 \leq n, k \leq n)$$

olmak üzere $\mathcal{W} = \{W_{k,n} : 1 \leq k \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesinin aşağıdakileri gerçeklediğini gösterelim:

$$\overline{\bigcup_{1 \leq i \leq n} G(i, n)} \subseteq \bigcup \mathcal{W} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (0.1)$$

$$n+3 \leq m \quad \text{ise} \quad W_{k,n} \cap W_{i,m} = \emptyset \quad (0.2)$$

Tümevarımla gösterilecek olan (0.1) iddiası, $\overline{G(1, 1)} \subseteq G(1, 2) = W_1$ nedeniyle $n = 1$ için doğrudur ve bu iddia n için doğru olduğunda, herhangi bir $1 \leq k \leq n+1$ için kolayca

$$\begin{aligned} & \overline{G(k, n+1)} \subseteq G(k, n+2) \\ & = \left(G(k, n+2) - \overline{\bigcup_{1 \leq i \leq n} G(i, n)} \right) \cup \left(G(k, n+2) \cap \overline{\bigcup_{1 \leq i \leq n} G(i, n)} \right) \end{aligned}$$

$$\subseteq W_{k,n+1} \cup \overline{\bigcup_{1 \leq i \leq n} G(i, n)} \subseteq \bigcup \mathcal{W}$$

elde edileceğinden, $n + 1$ için de doğru olacaktır. (0.2) iddiası da kolayca gösterilir, çünkü $n + 3 \leq m$ ise

$$\begin{aligned} W_{k,n} &\subseteq G(k, n + 1) \subseteq \overline{G(k, n + 2)} \subseteq \overline{G(k, m - 1)} \\ &\subseteq \overline{\bigcup_{1 \leq i < m} G(i, m - 1)} \subseteq X - W_{i,m} \end{aligned}$$

geçerlidir. O halde $\mathcal{W}$ ailesindeki her bir üye aynı ailede en fazla sonlu sayıda üye ile kesişebilir. Üstelik $\mathcal{K}$ bir örtülüş olduğundan (0.1) bağıntısı nedeniyle $\mathcal{W}$ bir örtülüdür ve $\mathcal{U}$ nun bir incelmesidir.(q.e.d.)

Uyarı: Her yıldızlı sonlu açık örtülüş apaçıktır ki yerel sonludur. Yukarıdaki teoremden kolaylıkla elde edilebilecek olan ve yine Morita'ya ait olan aşağıdaki sonuç ise, dikkat edilirse yukarıdakinden farklı bir şey söylemektedir. C.H.Dowker bu sonucun ardından 1951 yılında yazdığı ünlü bir makalede her normal Hausdorff uzayının, her sayılabilir üyeli açık örtülüşünden (noktasal sonlu olsun olmasın), yerel sonlu bir açık incelme elde edebileceğini (kısacası her normal Hausdorff uzayının sayılabilir parakompakt olduğunu) öngördü. Çağdaş genel topolojinin büyük ustası Amerikalı Mary Ellen Rudin bu ilginç ve zorlu öngörünün yanlış olduğunu 1970 yılında kanıtlamıştır. Sayılabilir parakompakt olmayan normal Hausdorff uzaylarına günümüzde kısaca **Dowker uzayı** denilir. Bu nitelikteki uzayları inşa etmek olağanüstü güçtür. Son otuz yıllık dönemde Rudin'in örneği ile birlikte değişik nitelikleri olan yalnızca üç Dowker uzayı tanımlanabilmiştir. Birinci sayılabilir bir Dowker uzayının varlığı sorusu ise henüz çözüme kavuşturulamamıştır.

Teorem: *Normal bir uzayda her noktasal sonlu sayılabilir açık örtülüşün yerel sonlu bir tam açık incelmesi vardır.*

Kanıtlama 1: Yukarıda ele alınan $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ açık örtülüşü noktasal sonlu olduğundan, yukarıda varlığı kanıtlanan yıldızlı sonlu (ve dolayısıyla yerel sonlu) $\mathcal{W}$ açık incelmesinin her bir üyesinin yalnızca sonlu tane U_n üyesi tarafından kapsandığı apaçıktır. Dolayısıyla $\mathcal{W}$ 'nin, her bir $U_n \in \mathcal{U}$ tarafından kapsanan tüm üyelerinin birleşim kümesi W_n^* ile gösterilecek olursa, $\{W_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi hem yerel sonludur ve hem de her $n \in \mathbb{N}$ için $W_n^* \subseteq U_n$ gerçekleştiği için bir tam incelmedir.

Kanıtlama 2: $\mathcal{U}$ örtülüşünün Lefschetz teoremi gereği var olan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $G_n \subseteq \overline{G_n} \subseteq U_n$ koşulunu gerçekleyen bir $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ açık incelmesinden yararlanarak tanımlanan

$$\left\{ U_n - \overline{\bigcup_{1 \leq k < n} G_k} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

sayılabilir üyeli açık kümeler ailesinin istenen nitelikteki yerel sonlu tam incelme olduğu kolayca gözlenir.(q.e.d.)

Teorem : *Bir barisantrik incelmanin barisantrik incelmesi yıldız incelmedir.*

Kanıtlama: $\mathcal{B}$ örtülüğü $\mathcal{A}$ 'nın ve $\mathcal{C}$ örtülüğü de $\mathcal{B}$ 'nin birer barisantrik incelmesi ise

$$\{st(C, \mathcal{C}) : C \in \mathcal{C}\} \prec \{st(x, \mathcal{B}) : x \in X\} \prec \mathcal{A}$$

gerçeklenir, çünkü herhangi bir $C_0 \in \mathcal{C}$ ve herhangi bir $x_0 \in C_0$ seçilirse, aşağıdaki kapsama zincirinde kullanılan her bir x_C noktası $C \cap C_0$ kesişiminden alınmak üzere $st(C_0, \mathcal{C}) = \bigcup \{C \in \mathcal{C} : C \cap C_0 \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup \{st(x_C, \mathcal{C}) : C \cap C_0 \neq \emptyset\} \subseteq st(x_0, \mathcal{B})$ elde edilir.(q.e.d.)

Sonuç: Bir uzayda her açık örtülüğün yıldızlı bir açık incelmesinin var olabilmesi için gyk her açık örtülüğün barisantrik bir açık incelmesinin var olmasıdır.

Bölüm üzerine Notlar:

K.Morita'nın bu bölümde yer alan üç teoremi de 1948 yılında yayımlanan [Mor] makalesinde gösterilmiştir. Lefschetz'in sonucu ise, cebirsel topolojinin bu büyük ustasının 1942 yılında basılan Algebraic Topology kitabında yer alır. Son teorem J.Tukey tarafından, onun 1940 yılında yayımlanan ve bir sonraki bölümde sözü edilecek olan kitabında gösterilmiştir.

II.Bölüm 2

PARAKOMPAKT UZAYLARIN ÖNEMİ

Çağdaş topolojinin tartışmasız en ünlü örtülüş uzay türü olan parakompaktlık, en temel özellikleriyle bu bölümde incelenecektir. Her açık örtülüşünden yerel sonlu (sırasıyla noktasal sonlu) bir açık incelme elde edebilen topolojik uzaylara **parakompakt**(sırasıyla **metakompakt**) denilir. Parakompakt uzaylar 1944 yılında Fransız usta Dieudonne, metakompakt uzaylar ise 1950 yılında Amerikalı matematikçiler Arens ve Dugundji tarafından tanımlanmıştır. Oysa her ikisinden daha önce 1940 yılında Amerikalı John Tukey tarafından tanımlanan bir başka önemli örtülüş uzayı türü ise bütünüyle normalliktir. Bir topolojik uzaya, her açık örtülüşünden barisantrik bir açık incelme elde edebiliyorsa **bütünüyle normal**(fully normal) **uzay** denir. Kesikli herhangi bir kapalı kümeler ailesinin üyelerini ikişerli ayrık açık kümelerle ayırabilen topolojik uzaylara ise **derlemsel normal**(collectionwise normal) denir.

Normal uzayların, noktasal sonlu ve sayılabilir üyeli açık örtülüşlerinden açık ve barisantrik (hatta yıldız) incelmeler elde ettiklerini biliyoruz. Tukey, her sözdemetrik uzayın bütünüyle normal, Bing ise, her bütünüyle normal uzayın derlemsel normal olduğunu göstermiştir. Her tıkız(kompakt) uzay ve her bütünüyle normal uzay ise parakompakttır. Her parakompakt uzay ise kolayca görülebileceği gibi metakompakttır. Bu türler arasındaki ilişkiler bir sonraki bölümde incelenecektir. Bir topolojik uzayda bir kümeler ailesine, ancak ve yalnız, herbiri yerel sonlu olan sayılabilir sayıda ailenin birleşimi olarak yazılabiliyorsa **σ -yerel sonlu** aile denir. Her sözdemetriklenebilir uzayın bu nitelikte bir tabana sahip olduğu ileride kanıtlanacaktır. Apaçıktır ki ikinci sayılabilir uzaylar da σ -yerel sonlu bir tabana sahiptirler.

Tukey Teoremi: *Her sözdemetrik uzay bütünüyle normaldir.*

Kanıtlama: (X, d) sözdemetrik uzayında $\mathcal{G}$ herhangi bir açık örtülüş olsun. O halde her $x \in X$ için $S_d(x, \delta_x) \subseteq G_x \in \mathcal{G}$ gerçekleşecek biçimde bir $0 < \delta_x < 1$ vardır. $\mathcal{W} = \left\{ S_d\left(x, \frac{\delta_x}{4}\right) : x \in X \right\}$ açık örtülüşünün $\mathcal{G}$ 'nin barisantrik incelmeleri olduğunu görelim. Sabit bir $x_0 \in X$ için $st(x_0, \mathcal{W}) \subseteq G_0$ gerçekleyen uygun bir $G_0 \in \mathcal{G}$ 'nin varlığını göstermek için

$$E_0 = \left\{ x \in X : x_0 \in S_d\left(x, \frac{\delta_x}{4}\right) \right\}$$

kümesini ve

$$\frac{2}{3} \sup_{x \in E_0} \delta_x < \delta_y \leq \sup_{x \in E_0} \delta_x$$

gerçekleyen $y \in E_0$ elemanını tanımlarsak bu eleman yardımıyla herbir $x \in E_0$ için

$S_d(x, \frac{\delta_x}{4}) \subseteq S_d(y, \delta_y)$ gerçeklendiğini ve sonuçta

$$\bigcup_{x \in E_0} S_d\left(x, \frac{\delta_x}{4}\right) = st(x_0, \mathcal{W}) \subseteq S_d(y, \delta_y) \subseteq G_y \in \mathcal{G}$$

bulunacağını gözlemek güç değildir.(q.e.d.)

Stone Teoremi: *Her sözdemetrik uzay parakompakttır.*

Kanıtlama 1: (X, d) sözdemetrik uzayında $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüğü verilsin. Λ indis kümesinin iyi sıralandığını varsayıyoruz. Herbir $\alpha \in \Lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ için, bu kanıtlamada

$$K_{\alpha n} = X - S_d\left(X - G_\alpha, \frac{1}{2^n}\right)$$

kapalı kümelerini tanımlayalım. Kolayca

$$K_{\alpha 1} \subseteq K_{\alpha 2} \subseteq \cdots \subseteq K_{\alpha n} \subseteq K_{\alpha, n+1} \subseteq \cdots \subseteq G_\alpha,$$

$$G_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\alpha n} \quad \text{ve} \quad X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\alpha n}$$

gerçeklendiğini gözleyebiliriz, çünkü herhangi bir $x \in G_\alpha$ için

$$0 < \frac{1}{2^{n_0}} < d(x, X - G_\alpha) \quad \text{ve} \quad x \notin S_d\left(X - G_\alpha, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$$

olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının varlığı apaçıktır. Üstelik her $\alpha \in \Lambda$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{2^n} \leq d(K_{\alpha n}, X - G_\alpha),$$

$$\forall x \in X - K_{\alpha n} \quad \text{için} \quad d(x, X - G_\alpha) < \frac{1}{2^n}$$

kolayca gözlenir. Ayrıca herbir $x \in X - K_{\alpha, n+1}$ için

$$d(K_{\alpha n}, x) \geq d(K_{\alpha n}, X - G_\alpha) - d(x, X - G_\alpha) \geq \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

nedeniyle

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq d(K_{\alpha n}, X - K_{\alpha, n+1}), \quad S_d\left(K_{\alpha n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subseteq K_{\alpha, n+1}$$

bulunur. Şimdi, herbir $\alpha \in \Lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_{\alpha n} = K_{\alpha n} - \bigcup_{\beta < \alpha} K_{\beta, n+1}, \quad W_{\alpha n} = S_d\left(A_{\alpha n}, \frac{1}{2^{n+3}}\right)$$

kümelerini tanımlayalım. $W_{\alpha n}$ kümelerinin açık olduğu ve

$$W_{\alpha n} \subseteq S_d\left(A_{\alpha n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subseteq S_d\left(K_{\alpha n}, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subseteq K_{\alpha, n+1} \subseteq G_\alpha$$

gerçeklendiği apaçıktır. O halde

$$\mathcal{W}_n = \{W_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda\} \quad , \quad \mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n$$

tanımlarsak, $\mathcal{W}$ açık kümeler ailesinin $\mathcal{G}$ 'nin bir incelmesi olduğu apaçıktır, çünkü her bir $x \in X$ için

$$\Lambda_x = \{\alpha \in \Lambda : \exists n \in \mathbb{N} \text{ için } x \in K_{\alpha n}\}$$

alt indis kümesini ve $\alpha_x = \min \Lambda_x$ indisini tanımlayarak, kolayca uygun bir n doğal sayısı sayesinde $x \in A_{\alpha_x, n}$ ve sonuçta

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_n A_{\alpha n} \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_n W_{\alpha n} \subseteq X$$

gerçeklendiği görülür. Şimdi şunları gözleyelim:

$$\alpha \neq \beta \text{ ise } \frac{1}{2^{n+1}} \leq d(A_{\alpha n}, A_{\beta n})$$

olur, çünkü örneğin $\alpha < \beta$ ise

$$A_{\beta n} \subseteq X - \bigcup_{\gamma < \beta} K_{\gamma, n+1} \subseteq X - K_{\alpha, n+1} \quad ,$$

$$d(A_{\alpha n}, A_{\beta n}) \geq d(K_{\alpha n}, X - K_{\alpha, n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

bulunur, çünkü bilindiği gibi kümeler "büyüdükçe" uzaklık "küçülür". Sonuçta bu son eşitsizlikten yararlanarak herhangi bir (sabit tutulan) n doğal sayısı için,

$$d(W_{\alpha n}, W_{\beta n}) = d\left(S_d\left(A_{\alpha n}, \frac{1}{2^{n+3}}\right), S_d\left(A_{\beta n}, \frac{1}{2^{n+3}}\right)\right) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$$

gerçekleşeceği için, her bir $\mathcal{W}_n$ açık kümeler ailesinin kesikli olduğu anlaşılır, çünkü apaçıktır ki her bir $x \in X$ için $S_d\left(x, \frac{1}{2^{n+3}}\right)$ açık yuvarı bu ailede en fazla bir üye ile kesişebilir. O halde sözdemetrik bir uzayda her açık örtülüğün σ -yerel sonlu bir açık incelmesi var olduğu anlaşılır. Teorem, aşağıda gösterilen Micheal Teoreminden kolayca elde edilir.(q.e.d.)

Kanıtlama 2: Bu daha kısa ve dolaysız kanıtlamada sözdemetrik bir uzayda her açık örtülüğün yerel sonlu ve σ -kesikli bir açık incelmesinin varlığı gösterilecektir. Şimdi yine indis kümesi iyi sıralanmış olan herhangi bir $\mathcal{G} = \{G_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüğü ele alınsın. Herhangi bir $\alpha \in \Lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ için (n sayıları üzerinden tümevarımla),

- i) $x \in G_{\alpha} - \bigcup_{\beta < \alpha} G_{\beta}$
- ii) $S_d\left(x, \frac{3}{2^n}\right) \subseteq G_{\alpha}$
- iii) $x \notin \bigcup_{k < n} \left(\bigcup_{\gamma \in \Lambda} U_{\gamma k} \right)$

koşullarını gerçekleyen $x \in X$ elemanlarının kümesi olan $A_{\alpha n}$ (eğer boş değilse)

$$U_{\alpha n} = \bigcup \left\{ S_d \left(x, \frac{1}{2^n} \right) : x \in A_{\alpha n} \right\}$$

açık kümesi tanımlansın. ii) nedeniyle kolayca

$$A_{\alpha n} \subseteq U_{\alpha n} \subseteq G_\alpha$$

gerçeklenir. Şimdi, öncelikle

$$\beta \neq \gamma \quad \text{için} \quad d(U_{\beta n}, U_{\gamma n}) \geq \frac{1}{2^n} \quad (*)$$

gerçeklendiğini gözleyelim. Gerçekten $y_1 \in U_{\beta n}$ ve $y_2 \in U_{\gamma n}$ ne olursa olsun, sözgelimi $\beta < \gamma$ varsayarak,

$$y_1 \in S_d \left(y'_1, \frac{1}{2^n} \right) \subseteq S_d \left(y'_1, \frac{3}{2^n} \right) \subseteq G_\beta \quad ,$$

$$y_2 \in S_d \left(y'_2, \frac{1}{2^n} \right)$$

gerçekleyen $y'_1 \in A_{\beta n}$ ve $y'_2 \in A_{\gamma n} (\subseteq G_\gamma - \bigcup_{\mu < \gamma} G_\mu \subseteq X - G_\beta)$ sayesinde

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &\geq d(y'_1, y'_2) - (d(y_1, y'_1) + d(y'_2, y_2)) \\ &\geq \frac{3}{2^n} - \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

geçerlidir. Şimdi de

$$\mathcal{U}_n = \{U_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda\} \quad , \quad \mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$$

açık küme ailelerini tanımlayalım. Herbir $\mathcal{U}_n$ ailesinin kesikli olduğunu ve $\mathcal{U}$ ailesinin yerel sonlu bir örtülüş olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir $x \in X$ alındığında $x \in G_\alpha$ gerçekleyen en küçük $\alpha \in \Lambda$ belirlensin. Yeteri kadar büyük n doğal sayısı için ii) koşulu gerçekleşsin. Eğer iii) koşulu gerçeklenmezse, uygun bir $m < n$ yardımıyla

$$x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha m} \subseteq \bigcup_n \bigcup_{\alpha} U_{\alpha n} \quad ,$$

yok eğer gerçeklenirse bu kez de $x \in A_{\alpha n} \subseteq U_{\alpha n}$ bulunur. Demek ki, $\mathcal{U}$ açık ailesi bir örtülüdür ve apaçıktır ki $\mathcal{G}$ ailesini inceltir. $\mathcal{U}$ ailesinin x noktasını ihtiva eden üyeleri arasında en küçük birinci indisli α olsun ve sözgelimi $x \in U_{\alpha m}$ olsun. O halde $S_d(x, \frac{1}{2^k}) \subseteq U_{\alpha m}$ gerçekleşecek biçimde k doğal sayısı vardır. Şimdi son olarak $S_d(x, \frac{1}{2^{k+m}})$ açık yuvarının, numarası $k+m \leq n$ gerçekleyen $\mathcal{U}_n$ ailelerinin hiçbir üyesi ile kesişmediğini; numarası $n < k+m$ gerçekleyen $\mathcal{U}_n$ ailelerinden en fazla bir üye ile kesişebildiğini göstereceğiz. Gerçekten $n \geq k+m$ ise, $\beta \in \Lambda$ ne olursa olsun

$$S_d \left(x, \frac{1}{2^{k+m}} \right) \cap U_{\beta n} = \bigcup_{y \in A_{\beta n}} \left(S_d \left(x, \frac{1}{2^{k+m}} \right) \cap S_d \left(y, \frac{1}{2^n} \right) \right) = \emptyset$$

geçerlidir, çünkü herhangi bir $y \in A_{\beta n}$ için, $n > m$ kullanarak,

$$y \notin \bigcup_{i < n} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha i} \right) \supseteq U_{\alpha m} \supseteq S_d \left(x, \frac{1}{2^k} \right)$$

ve dolayısıyla $\frac{1}{2^k} \leq d(x, y)$ geçerli olduğundan, yukarıdaki birleşime katılan kesişimlerin tümünün boş olduğunu, üçgen eşitsizliği ve olmayana ergi yöntemi yardımıyla kolayca gözleyebiliriz. Eğer $n < m + k$ ise, yukarıda bulunan (*) eşitsizliği yardımıyla bu kez $\frac{1}{2^{m+k-1}} \leq \frac{1}{2^n}$ geçerli olduğundan

$$S_d \left(x, \frac{1}{2^{k+m}} \right) \cap U_{\beta n} \neq \emptyset \Rightarrow S_d \left(x, \frac{1}{2^{k+m}} \right) \cap U_{\gamma m} = \emptyset$$

elde edilir, kanıtlama biter.(q.e.d.)

Kanıtlama 3: İddia Tukey teoremi ile Bölüm 3'teki ilk teoremin doğal bir sonucudur.(q.e.d)

Kanıtlama 4: Son olarak K.Nagami'ye ait bir başka yalın kanıtlamayı görelim. İndis kümesi iyi sıralanmış olan $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. Şimdi

$$K_{\alpha n} = G_\alpha - \left(S_d \left(X - G_\alpha, \frac{1}{n} \right) \cup \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta \right) \quad (\alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N})$$

kümelerini tanımlayalım; bu küme aslında

$$G_\alpha - S_d \left(X - G_\alpha, \frac{1}{n} \right) \quad \text{ve} \quad X - \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$$

kapalı kümelerinin kesişimidir ve kolayca

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_{\alpha n} \quad ,$$

$$K_{\alpha n} \cap S_d \left(X - G_\alpha, \frac{1}{n} \right) = \emptyset \quad , \quad \frac{1}{n} \leq d(K_{\alpha n}, X - G_\alpha)$$

geçerlidir. Üstelik $\alpha \neq \beta$ ve örneğin $\beta < \alpha$ ise, $K_{\alpha n} \subseteq X - G_\beta$ nedeniyle

$$\frac{1}{n} \leq d(K_{\beta n}, X - G_\beta) \leq d(K_{\alpha n}, K_{\beta n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

bulunur. O halde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \{S_d(K_{\alpha n}, \frac{1}{3n}) : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi kesiklidir ve üstelik $S_d(K_{\alpha n}, \frac{1}{n})$ ile $X - G_\alpha$ ayrık olduğundan $S_d(K_{\alpha n}, \frac{1}{3n}) \subseteq G_\alpha$ geçerlidir. Şimdi verilen sözdemetrik uzayda

$$U_n = \bigcup \mathcal{U}_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} S_d(K_{\alpha n}, \frac{1}{3n})$$

açık (ve tümleyen sıfır) kümelerinin oluşturduğu sayılabilir üyeli açık örtülüşün, bir önceki bölümün ilk teoremi nedeniyle $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibi yerel sonlu bir tam açık incilmesi var olduğundan, sonuçta

$$\mathcal{W} = \{W_n \cap S_d(K_{\alpha n}, \frac{1}{3n}) : \alpha \in \Lambda, n \in \mathbb{N}\}$$

açık örtülüşü $\mathcal{G}$ 'nin aranan bir yerel sonlu açık incelmesidir.(q.e.d.)

Uyarı: İleride, ancak çok özel parakompakt uzayların metriklenebilir olduğu kanıtlanacaktır. Bu bölümü, sırasıyla Micheal ve Bing'in parakompaktlığa ilişkin çok önemli ve o denli ünlü iki teoremi ile sürdürüyoruz.

Micheal Teoremi: *Düzenli bir uzayın parakompakt olabilmesi için gyk her açık örtülüşünün σ -yerel sonlu bir açık incelmesinin var olmasıdır.*

Kanıtlama: Gereklik apaçıktır. Şimdi bir X düzenli uzayının yeterlik hipotezini gerçekleştirdiğini varsayalım. Bu uzayın herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşü ile onun σ -yerel sonlu $\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ açık incemesi göz önüne alınsın. X uzayı düzenli olduğundan, $\mathcal{W} \prec \overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{U}$ gerçekleyen $\mathcal{W}$ açık incemesinin

$$\mathcal{W}_n = \{W \in \mathcal{W} : \exists U \in \mathcal{U}_n, \overline{W} \subseteq U\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

alt ailelerini tanımlayalım. $\mathcal{W}_n$ ailelerinin herbiri yerel sonludur ve dikkat edilirse

$$\mathcal{U}^* = \{U - \overline{\bigcup_{1 \leq k < n} \mathcal{W}_k} : n \in \mathbb{N}, U \in \mathcal{U}_n\}$$

açık kümeler ailesi $\mathcal{G}$ 'nin istenen açık ve yerel sonlu incelmesidir, çünkü dikkat edilirse $\mathcal{U}$ 'nın tanımı gereği

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{U}_n \right)$$

olduğundan, herhangi bir $x \in X$ için, uygun bir $n = n_x \in \mathbb{N}$ sayesinde

$$x \in \bigcup \mathcal{U}_n - \bigcup_{1 \leq k < n} \left(\bigcup \mathcal{U}_k \right) \subseteq \bigcup \{U - \overline{\bigcup_{1 \leq k < n} \mathcal{W}_k} : U \in \mathcal{U}_n\}$$

gerçekleşir. Üstelik benzer biçimde

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup \mathcal{W}_n \right)$$

geçerli olduğundan ve her bir $\mathcal{U}_n$ ailesi yerel sonlu olduğundan $\mathcal{U}^*$ ailesi yerel sonludur.(q.e.d.)

Sonuç: Düzenli Lindelöf uzayları parakompakttır.

Teorem: *Bir uzayın parakompakt olması için her açık örtülüşünün yerel sonlu bir kapalı incelmesinin varolması yeterlidir.*

Kanıtlama: Yeterlik hipotezini gerçekleyen bir X uzayında, indis kümesi iyi sıralanmış olan bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşünün öncelikle, her bir $\alpha \in \Lambda$ için $K_\alpha \subseteq G_\alpha$ gerçekleştirilecek biçimde bir $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapalı ve yerel sonlu bir tam incemesi vardır; çünkü $\mathcal{G}$ 'nin varolan yerel sonlu bir $\mathcal{K}'$ incemesindeki her $K \in \mathcal{K}'$ için

$$\alpha(K) = \inf\{\alpha \in \Lambda : K \subseteq G_\alpha\}$$

tanımlayarak her bir $\alpha \in \Lambda$ için

$$K_\alpha = \bigcup \{K \in \mathcal{K}' : \alpha(K) = \alpha\}$$

kapalı kümesini tanımlamak yeterlidir; bu yeni $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesinin yerel sonlu olduğu kolayca gözlenecektir. Şimdi, her bir sonlu elemanlı $\Lambda' \subseteq \Lambda$ alt indis kümesi için

$$U(\Lambda') = X - \bigcup \{K_\alpha : \alpha \in \Lambda - \Lambda'\}$$

açık kümelerinin ailesi bir açık örtülüdür. O halde tıpkı yukarıdaki gibi, her $\Lambda' (\subseteq \Lambda)$ sonlu alt indis kümesine karşılık $F(\Lambda') \subseteq U(\Lambda')$ gerçekleştirilecek biçimde bir $\{F(\Lambda')\}$ kapalı tam incelme(örtülüş) vardır. Kolayca

$$\alpha \notin \Lambda' \text{ ise } F(\Lambda') \cap K_\alpha = \emptyset,$$

$$K_\alpha \subseteq W_\alpha = G_\alpha - \bigcup \{F(\Lambda') : F(\Lambda') \cap K_\alpha = \emptyset\} \quad (\alpha \in \Lambda)$$

gerçeklenir. Sonuçta $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüğü $\mathcal{G}$ 'nin açık bir incelmesi olur. Bu aile üstelik yerel sonludur; çünkü her bir $x \in X$ için öyle uygun bir $N(x)$ doğal sayısı ve $\Lambda_n (1 \leq n \leq N(x))$ sonlu indis kümeleri vardır ki

$$x \in \text{iş} \bigcup \{F(\Lambda_n) : 1 \leq n \leq N(x)\}$$

gerçekleşir ve sonuçta

$$\Lambda_x = \bigcup_{1 \leq n \leq N(x)} \Lambda_n$$

yazılırsa bu iç kümesi her bir $\alpha \in \Lambda - \Lambda_x$ indisi ile indislenen W_α ile ayrıktır, çünkü böyle bir α indisi için

$$\text{iş} \bigcup_{1 \leq n \leq N(x)} F(\Lambda_n) \subseteq \bigcup \{F(\Lambda') : F(\Lambda') \cap K_\alpha = \emptyset\}$$

gerçekleşmektedir. O halde $\mathcal{W}$ incelmesi $\mathcal{G}$ örtülüğünün aranan yerel sonlu açık incelmesidir.(q.e.d.)

Sonuç: Düzenli bir uzayın parakompakt olabilmesi için gerek her açık örtülüğünün kapalı ve yerel sonlu bir incelmesinin var olmasıdır.

Bing Teoremi: Her parakompakt Hausdorff uzayı ve her bütünüyle normal uzay derlemsel normaldir.

Kanıtlama: X , Hausdorff uzayı parakompakt olsun. Bu uzay herşeyden önce düzenlidir, çünkü K kapalı ve $x_0 \notin K$ ise her bir $x \in K$ noktasının $x_0 \notin \overline{W_x}$ olacak biçimde bir W_x açık civarı vardır. $\mathcal{G}$ açık örtülüğü, $\{W_x : x \in K\} \cup \{X - K\}$ açık örtülüğünün yerel sonlu bir incelmesi ise, kolayca

$$\overline{st(x_0, \mathcal{G})} \cap \bigcup \{W_x : x \in K\} = \emptyset$$

gerçekleşeceğinden $st(x_0, \mathcal{G})$ ve $X - \overline{st(x_0, \mathcal{G})}$ ayrık açık kümeleri sırasıyla x_0 noktası ve K kapalı kümesini ayırırlar. Şimdi X uzayında kesikli bir $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapalı kümeler ailesi alınsın.

$$\mathcal{U} = \{X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta : \alpha \in \Lambda\}$$

açık örtülüğünün $\mathcal{U}^*$ gibi açık ve yerel sonlu bir incelmesi ve onun da $\overline{\mathcal{W}} \prec \mathcal{U}^*$ gerçekleyen bir $\mathcal{W}$ yerel sonlu açık incelmesi vardır. Şimdi her bir $\alpha \in \Lambda$ için

$$\mathcal{W}_\alpha = \{W \in \mathcal{W} : \exists U^* \in \mathcal{U}^*, \overline{W} \subseteq U^* \subseteq X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta\}$$

alt ailesi tanımlanırsa ve kısaca $\mathcal{W}_\alpha = \bigcup \mathcal{W}_\alpha$ yazılırsa, bu alt aile yerel sonlu olduğundan

$$\overline{\mathcal{W}_\alpha} = \bigcup \{\overline{W} : W \in \mathcal{W}_\alpha\} \subseteq X - \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_\beta \quad (\alpha \in \Lambda)$$

ve üstelik $X = \bigcup \{W_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ geçerli olur. Dikkat edilirse

$$K_\alpha \subseteq W_\alpha \quad (\alpha \in \Lambda) \quad , \quad \overline{W_\alpha} \cap K_\beta = \emptyset \quad (\alpha \neq \beta)$$

nedeniyle

$$K_\alpha \subseteq X - \overline{\bigcup_{\beta \neq \alpha} W_\beta} = W_\alpha^* \quad (\alpha \in \Lambda),$$

$$W_\alpha^* \cap W_\beta^* = X - \left(\overline{\bigcup_{\mu \neq \alpha} W_\mu} \cup \overline{\bigcup_{\gamma \neq \beta} W_\gamma} \right) = \emptyset \quad (\alpha \neq \beta)$$

gerçekleştiğinden $\mathcal{W}^* = \{W_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\}$ açık ailesinin ikişerli ayrık üyeleri $\mathcal{K}$ kesikli ailesinin üyelerini ayırırlar. Daha da genel olarak herhangi bir bütünüyle normal X uzayında, kesikli bir $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kapalı kümeler ailesi verildiğinde, yukarıda tanımlanan $\mathcal{U}$ açık örtülüğünün bu kez, var olan $\mathcal{W}$ gibi açık ve barisantrik incelmesi sayesinde, $st(K_\alpha, \mathcal{W})$ açık kümelerinin ikişerli ayrık olarak K_α kümelerini ayırdığını gözlemek kolaydır. (q.e.d.)

Uyarı: Yukarıdaki kanıtlama sırasında aşağıdaki teoremin de kanıtlandığı özellikle gözlenmelidir:

Teorem: *Düzenli bir parakompakt uzay derlemsel normaldir.*

Uyarı: Normal olmayan metakompakt Hausdorff uzaylarının var olduğu ileride görülecektir. Böylelikle parakompaktlığın metakompaktlıktan daha güçlü bir örtülüğün uzayı türü olduğu anlaşılır. Şimdi bu bölümde son olarak, metakompaktlığın tıknazlık karakterizasyonlarında ne denli önemli olduğunu vurgulayan iki ünlü sonucu görelim.

Arens & Dugundji Teoremi: *Ancak ve yalnız sayılabilir kompakt, metakompakt uzaylar kompaktır.*

Kanıtlama: Yeterlik apaçıktır. Tersine metakompakt ve sayılabilir kompakt bir X topolojik uzayında her noktasal sonlu $\mathcal{G}$ açık örtülüğünün $\mathcal{G}_0$ gibi minimal (hiçbir üyesi atılamayan) bir alt örtülüğü vardır. Gerçekten noktasal sonluluk hipotezi gereği, $\mathcal{G}$ 'nin atılabilir üyelerinden oluşan alt ailelerinin (bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesinin atılabilen üyelerden oluşması demek $\mathcal{G} - \mathcal{A}$ ailesinin hala örtülüğün olması demektir) oluşturduğu $\mathbf{T}$ topluluğundaki herhangi bir artan $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ zincirinin supremumu vardır ve $\mathbf{T}$ topluluğuna aittir; gerçekten $\sup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{T}$ olur. Çünkü

herhangi bir $x \in X$ elemanını içeren sonlu sayıda üyeler $G_k(x)$ ($1 \leq k \leq n(x)$) ise, en az bir k indisi için

$$G_k(x) \in \mathcal{G} - \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{A}_\alpha$$

gerçeklenmeseydi, her bir k indisi için uygun $\alpha_k \in \Lambda$ indisleri yardımıyla $G_k(x) \in \mathcal{A}_{\alpha_k}$ olur ve zincir koşulu nedeniyle örneğin

$$\mathcal{A}_{\alpha_1} \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_2} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_{\alpha_{n(x)}}$$

geçerli olacağından sonuçta

$$x \notin \bigcup (\mathcal{G} - \mathcal{A}_{\alpha_{n(x)}}) \quad \text{ve} \quad \mathcal{A}_{\alpha_{n(x)}} \notin \mathcal{T}$$

çelişkisi doğardı. Demek ki Zorn Lemması gereği $\mathcal{G}$ 'nin $\mathcal{G}_0$ gibi minimal bir alt örtülüğü vardır. X sayılabilir kompakt olduğu için $\mathcal{G}_0$ sonlu üyeli; çünkü $\mathcal{G}_0$ 'ın en az sayılabilir sonsuz sayıda üyesi varolsaydı, bu üyelerin herbirisinden öteki üyelere ait olmayan bir seçkin nokta seçerek tanımlanan dizinin, X uzayında hiçbir ω_0 -limit noktası var olmazdı, çünkü kolayca görülebileceği gibi her bir $G \in \mathcal{G}_0$ için $x(G) \notin \bigcup (\mathcal{G}_0 - \{G\})$ gerçekleyen en az bir iyi tanımlanmış $x(G) \in G$ seçkin noktası vardır. (q.e.d.)

Wicke & Worrell Teoremi: *Ancak ve yalnız sayılabilir kompakt, zayıf altmeta-Lindelöf uzaylar kompakttır.*

Kanıtlama: Hipotezde söylenen şudur: Sayılabilir tıkkız X uzayının herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüğünün

$$\forall x \in X \quad \exists n_x \in \mathbb{N} \quad , \quad 0 < \text{ord}(x, \mathcal{G}_{n_x}) \leq \aleph_0$$

koşulu gerçekleşecek biçimde, sayılabilir tane açık $\mathcal{G}_n$ ailesinin birleşimi olarak yazılabilen bir $\mathcal{G}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ alt örtülüğü varolsun. Bu alt örtülüğün uygun sonlu sayıda üyesinin uzayı örttüğünü göstermek istiyoruz; bunun için $\mathcal{G}^*$ 'ın sayılabilir sayıda üyesinin uzayı örttüğünü göstermek yeterlidir.

$$A_n = \{x \in X : 0 < \text{ord}(x, \mathcal{G}_n) \leq \aleph_0\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

alt kümelerinin birleşiminin X olduğu apaçıktır. Şimdi, $S(\mathcal{G}^*)$ ailesi, uzayın, sayılabilir sayıda $\mathcal{G}^*$ üyesi ile örtülebilen tüm alt kümelerinin oluşturduğu aileyi göstermek üzere $X \notin S(\mathcal{G}^*)$ varsayılması durumunda bir çelişkiye varmak istiyoruz. Bu varsayım altında varolan ve $A_n \notin S(\mathcal{G}^*)$ gerçekleyen en küçük indisli A_n kümesinin indisi n_1 olsun. Şimdi, tümevarımla, öyle bir monoton artmayan ve üyeleri boştan farklı bir kapalı kümeler dizisi $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ 'nin varlığını göstereceğiz ki, kesin artan n_k doğal sayıları sayesinde

$$\bigcup_{n < n_k} (K_k \cap A_n) = \emptyset \quad , \quad K_k \cap A_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*) \quad (*)$$

gerçekleşecektir. Tüm A_n ($n < n_1$) kümelerinin $S(\mathcal{G}^*)$ üyesi olmaları nedeniyle, uygun bir sayılabilir üyeli $\mathcal{G}^*(1) (\subseteq \mathcal{G}^*)$ alt ailesi yardımıyla

$$\bigcup_{n < n_1} A_n \subseteq \mathcal{G}^*(1)$$

gerçekleşir. $X \notin S(\mathcal{G}^*)$ varsayımı nedeniyle $K_1 = X - \bigcup \mathcal{G}^*(1)$ kapalı kümesi boş değildir, üstelik

$$\bigcup_{n < n_1} (K_1 \cap A_n) = \emptyset \quad , \quad K_1 \cap A_{n_1} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleştiği görülür. (*) koşullarını gerçekleyen K_k kapalı kümesi ve n_k doğal sayısı tanımlı olsun. Eğer $K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*)$ gerçekleşmeseydi, uygun bir sayılabilir üyeli $\mathcal{G}_0 \subseteq \mathcal{G}^*$ alt ailesi için $K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \subseteq \bigcup \mathcal{G}_0$ geçerli olurdu. Oysa

$$(K_k \cap A_{n_k}) - \bigcup \mathcal{G}_0$$

alt kümesi $\mathcal{G}_{n_k}$ açık kümeler ailesi tarafından kapsandığından ünlü Zorn Lemması yardımı ile

$$M \subseteq (K_k \cap A_{n_k}) - \bigcup \mathcal{G}_0 \subseteq st(M, \mathcal{G}_{n_k})$$

$$\text{ve } \forall x \in M \quad \text{için} \quad st(x, \mathcal{G}_{n_k}) \cap (M - \{x\}) = \emptyset$$

koşulları gerçekleşecek biçimde bir maksimal M kümesi vardır. Fakat uzay sayılabilir tıkHz ve $M \subseteq K_k - \bigcup \mathcal{G}_0 \subseteq \bigcup \mathcal{G}_{n_k}$ olduğu için, hiç bir ω_0 -limit noktası varolamayan M kümesi zorunlu olarak sonlu noktalıdır; üstelik $M \subseteq A_{n_k}$ olduğundan

$$K_k \cap A_{n_k} \subseteq \bigcup \mathcal{G}_0 \cup st(M, \mathcal{G}_{n_k})$$

kullanılarak, sonuçta $K_k \cap A_{n_k} \in S(\mathcal{G}^*)$ çelişkisi doğardı. Demek ki zorunlu olarak

$$K_k - \bigcup \mathcal{G}_{n_k} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleşir. Bu son kümenin en az bir A_n ile kesişimi de $S(\mathcal{G}^*)$ üyesi olamaz; bu nitelikteki en küçük indisli A_n kümesinin indisini n_{k+1} ile gösterirsek, (*) nedeniyle, öncelikle $n_k < n_{k+1}$ gerçekleşir ve üstelik

$$\bigcup_{n < n_{k+1}} (K_k \cap A_n) \subseteq \bigcup \mathcal{G}^*(k+1)$$

olacak biçimde sayılabilir üyeli bir $\mathcal{G}^*(k+1) (\subseteq \mathcal{G}^*)$ alt ailesi vardır. Şimdi

$$K_{k+1} = K_k - (\bigcup \mathcal{G}_{n_k} \cup \bigcup \mathcal{G}^*(k+1)) (\subseteq K_k)$$

boştan farklı kapalı kümesini tanımlayacak olursak, kolayca

$$\bigcup_{n < n_{k+1}} (K_{k+1} \cap A_n) = \emptyset \quad , \quad K_{k+1} \cap A_{n_{k+1}} \notin S(\mathcal{G}^*)$$

gerçekleştiği gözlenebilecektir. O halde tümevarımla istenen nitelikte, üyeleri boştan farklı olan ve monoton artmayan $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ kapalı kümeler dizisinin tanımı bitirilmiş olur. X sayılabilir tıkHz olduğundan bu dizinin kesişim kümesi boştan farklı olmalıdır oysa

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \cap A_n \right) \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n < n_m} (K_k \cap A_n) \right) = \emptyset$$

nedeniyle bu kesişim boştur; bu çelişki kanıtlamayı bitirir.(q.e.d.)

Scott & Watson Teoremi: *Bir Tikhonov uzayının kompakt olabilmesi için gyk sözdekompakt ve metakompakt olmasıdır.*

Kanıtlama: Bkz. Engelking, sf.350

Bölüm üzerine Notlar:

Parakompaktlık 1944 yılında Jean Dieudonne tarafından [Die] makalesinde tanımlandı. Bu Fransız usta bu makalesinde her parakompakt Hausdorff uzayının normal, her sayılabilir kompakt ve parakompakt Hausdorff uzayının kompakt, her ikinci sayılabilir metrik uzayın ve her yerel tıkız metrik uzayın ise parakompakt olduğunu kanıtlamıştır. Her metrik uzayın parakompakt olup olmadığı sorusunu ilk soran kişi de odur. Bu soru A.H.Stone'un 1947 deki tarihsel doktora çalışmasının, bkz.[Sto], bir bakıma başlangıç noktası olmuştur. Bütünüyle normallik kavramı ise John Tukey'in 1940 yılında basılan Convergence and Uniformity in Topology başlıklı kitabında ayrıntılı olarak incelenmiştir, bkz.[Tuk]. Micheal Teoremi ise E.Micheal'in 1953 yılında yayımlanan [Mic 1] makalesinde yer alır. Bing'in ünlü makalesinden ise ileride yeteri sıklıkta söz edilecektir. Metakompaktlık kavramı ve Arens & Dugundji Teoremi bu ikilinin 1950 yılında basılan [ArDu] makalesinde yer alır. Bu teoremi büyük ölçüde genelleştiren Wicke & Worrell teoremi ise bu ikilinin 1976 yılında yayımlanan [WiWo] makalesindeki ilk teoremdir. Scott & Watson Teoremi ise bu genç matematikçiler tarafından bağımsız olarak sırasıyla 1979 ve 1980 yıllarında yayımlanan [Sco] ve [Wat] makalelerinde kanıtlanmıştır. Kanıtlama için Engelking'in kitabına ya da sözü edilen makalelere başvurulmalıdır.

IV.Bölüm 3

A.H.STONE'UN TARİHSEL MAKALESİ

Arthur Stone 1947 yılında tamamladığı ve 1948 yılında yayımlanan doktora çalışmasında, 1940 ların başında sırasıyla John Tukey ve Jean Dieudonne tarafından tanımlanan, **bütünüyle normallik** ve **parakompaktlık** kavramlarının Hausdorff uzaylarında çakıştığını ve genelde her bütünüyle normal uzayın parakompakt olduğunu kanıtladı. Böylelikle bu İngiliz usta her sözdemetrik uzayın parakompakt olduğunu ilk gözleyen matematikçi oldu. Topolojide ve Manifold Teorisinde bu sonucun ardından tam anlamıyla yeni bir dönem açılmıştır. Ama Stone daha da önemlisi bütünüyle normal bir uzayda, her açık örtülüşün σ -kesikli ve yerel sonlu bir açık incelmesinin varlığını kanıtlayan yöntemiyle metriklenebilme teorisinde yepyeni bir yöntemin ve yaklaşımın yaratıcısı olmuştur. Heiki Junnila'ya göre bu makale çağdaş genel topolojinin başlangıcıdır. Stone bu önemli çalışmasında ayrıca, metrik uzayların çarpım uzayının, ancak ve yalnız, çarpıma katılanlar arasında tıkHz olmayanların en fazla sayılabilir tane olması durumunda normal olabileceğini kanıtlamıştır. Tarihsel önemi olan bu olağanüstü makale [Sto], R.H.Bing'in 1951 makalesiyle birlikte metriklenebilme teorisinin iki temel taşı niteliğindeki makalesinden birisidir. Bu bölümde bu makalenin yukarıda sözü edilen iki önemli sonucu ele alınacaktır.

Teorem: *Bütünüyle normal bir uzayda her açık örtülüşün σ -kesikli ve yerel sonlu bir açık incelmeleri vardır.*

Kanıtlama: Bütünüyle normal X uzayında $\mathcal{U}_0 = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. $\mathcal{U}_0$ örtülüşünün bir $\mathcal{U}_1$ barisantrik açık incelmeleri vardır. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n$ açık örtülüşünün $\mathcal{U}_{n+1}$ gibi bir barisantrik açık incelmeleri tanımlıdır. Şimdi kısalık için herhangi bir A alt kümesi için

$$(A, n) = st(A, \mathcal{U}_n) \quad , \quad (A, -n) = X - st(X - A, \mathcal{U}_n)$$

yazılsın. O halde sırasıyla ve kolayca

$$(A, -n) = X - (X - A, n) = \{x \in X : st(x, \mathcal{U}_n) \subseteq A\}$$

$$((A, -n), n) = \bigcup \{st(x, \mathcal{U}_n) : x \in (A, -n)\} \subseteq A,$$

$$((A, n+1), n+1) = \bigcup \{U \in \mathcal{U}_{n+1} : U \cap st(A, \mathcal{U}_{n+1}) \neq \emptyset\},$$

$$((A, n+1), n+1) \subseteq (A, n)$$

eşitlik ve kapsamaları elde edilir. $(A, -n)$ kümesinin daima kapalı, (A, n) kümesinin ise açık olduğu görülmektedir. Λ indis kümesinin iyi sıralandığını ve en küçük elemanının, Stone'un özgün kanıtlamasında olduğu gibi 1 ile gösterildiğini varsayabiliriz. Şimdi

$$\forall \alpha \in \Lambda \quad \text{ için } \quad V_\alpha^1 = (U_\alpha, -1) \quad , \quad V_\alpha^{n+1} = (V_\alpha^n, n)$$

tanımlarsak tümevarımla

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad V_\alpha^n \subseteq (V_\alpha^n, n) = V_\alpha^{n+1} \subseteq U_\alpha$$

görebiliriz. O halde $V_\alpha = \bigcup \{V_\alpha^n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq U_\alpha$ ve ayrıca kolayca

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_\alpha^n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha \quad ,$$

$$x \in V_\alpha \quad \text{ için } \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad (x, n) \subseteq V_\alpha$$

gerçeklendiğini gözleyebiliriz. Bundan sonraki aşamada

$$K_{n1} = (V_1, -n)$$

$$K_{n\alpha} = (V_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} K_{n\beta}, -n) \quad (\alpha \in \Lambda)$$

kapalı kümelerini ve

$$\mathcal{K}_n = \{K_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ailesini tanımlayalım. Bu aile kesiklidir çünkü bir $U \in \mathcal{U}_n$ için eğer $U \cap K_{n\alpha} \neq \emptyset$ ise

$$U \subseteq (K_{n\alpha}, n) \subseteq V_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} K_{n\beta} \subseteq X - \bigcup_{\beta < \alpha} K_{n\beta}$$

gerçekleştiğinden, kolayca gözlenebileceği gibi bu U kümesi $\mathcal{K}_n$ ailesinde $K_{n\alpha}$ 'dan başka tüm öteki üyelerle ayrık olacaktır. Üstelik

$$\mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n = \{K_{n\alpha} : n \in \mathbb{N}, \alpha \in \Lambda\}$$

ailesi bir örtülüştür çünkü herhangi bir $x \in X$ elemanı alındığında $x \in V_\alpha$ gerçekleyen en küçük α indisi belirlenirse uygun bir $n \in \mathbb{N}$ yardımıyla $(x, n) \subseteq V_\alpha$ olacaktır. Dikkat edilirse bu n için

$$(x, n) \cap \bigcup_{\beta < \alpha} K_{n\beta} = \emptyset$$

olmasaydı, uygun bir $\beta < \alpha$ yardımıyla $(x, n) \cap K_{n\beta} \neq \emptyset$ olur ve sonuçta

$$x \in (K_{n\beta}, n) \subseteq V_\beta - \bigcup_{\gamma < \beta} K_{n\gamma} \subseteq V_\beta$$

çelişkisi doğardı, demek ki

$$(x, n) \subseteq V_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} K_{n\beta} \quad \text{ ve } \quad x \in K_{n\alpha}$$

elde edilir. Şimdi de

$$F_n = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{st(K_{n\alpha}, \mathcal{U}_{n+3})} \quad , \quad G_{n\alpha} = st(K_{n\alpha}, \mathcal{U}_{n+2})$$

kümelerini tanımlayalım. Tıpkı yukarıda gösterildiği gibi $\mathcal{U}_{n+3}$ örtülüşünün herhangi bir üyesi $\{st(K_{n\alpha}, \mathcal{U}_{n+3}) : \alpha \in \Lambda\}$ ailesinde en fazla bir üye ile kesişebildiğinden bu aile kesiklidir ve sonuçta F_n kümeleri kapalıdır. Şimdi son aşamada

$$W_{1\alpha} = G_{1\alpha} \quad , \quad W_{n\alpha} = G_{n\alpha} - \bigcup_{1 \leq k < n} F_k \quad (n > 1)$$

açık kümeleri ve

$$\mathcal{W}_n = \{W_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda\} \quad , \quad \mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n = \{W_{n\alpha} : (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda\}$$

aileleri tanımlansın. $\mathcal{W}$ ailesi bir örtülüştür, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} ((K_{n\alpha}, n+3), n+3) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (K_{n\alpha}, n+2) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_{n\alpha}$$

geçerlidir ve üstelik

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} G_{n\alpha} \right)$$

nedeniyle herhangi bir $x \in X$ için $x \in \bigcup \{G_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda\}$ gerçekleyen n doğal sayılarının en küçüğü n ise, uygun bir $\alpha \in \Lambda$ yardımıyla $x \in W_{n\alpha}$ elde edilecektir. Ayrıca

$$W_{n\alpha} \subseteq G_{n\alpha} \subseteq ((K_{n\alpha}, n+2), n+2) \subseteq (K_{n\alpha}, n) \subseteq V_{\alpha} \subseteq U_{\alpha}$$

nedeniyle $\mathcal{W}$ ailesi verilen $\mathcal{U}_0$ açık örtülüşünün incelmesidir. Üstelik herhangi bir $x \in X$ verildiğinde uygun bir $\alpha \in \Lambda$ ve belirli bir $n_x \in \mathbb{N}$ sayesinde $x \in K_{n\alpha}$ olduğundan, her $m \geq n_x$ ve her $\beta \in \Lambda$ için

$$(x, n+3) \subseteq (K_{n\alpha}, n+3) \subseteq \text{ic}F_n \subseteq X - W_{m\beta}$$

gerçekleşir; kısacası $(x, n+3)$ açık kümesi herbir $m > n$ için $\mathcal{W}_m$ ailesindeki hiçbir üye ile kesişmez. Buna karşılık herhangi bir $k \leq n = n_x$ için $(x, n+3)$ kümesi eğer $W_{k\beta}$ ile kesişirse $\mathcal{W}_k$ ailesinin tüm öteki üyeleri ile kesişemez çünkü

$$x \in (W_{k\beta}, n+3) \subseteq (W_{k\beta}, k+3) \subseteq (G_{k\beta}, k+3) \subseteq (K_{k\beta}, k+2)$$

olur ve ayrıca $\{(K_{k\alpha}, k+2) : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi kesikli ve dolayısıyla üyeleri ikişerli ayrıktır. Demek ki $\mathcal{W}$ ailesi hem σ -kesiklidir ve hem de yerel sonludur. (q.e.d.)

Sonuç: Sözdemetriklenebilir bir uzayın herhangi bir açık örtülüşünün hem σ -kesikli hem de yerel sonlu olan bir açık incelmesi vardır.

Teorem: Hausdorff uzaylarında parakompaktlık ve bütünüyle normallik kavramları eşdeğerdir.

Kanıt: X Hausdorff uzayı parakompakt olsun. $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ bu uzayda açık bir örtülüş olsun. Genelliği bozmaksızın bu örtülüşün yerel sonlu olduğunu varsayabiliriz. Bu örtülüş noktasal sonlu ve X uzayı normal (hatta derlemesel normal) olduğu için Lefschetz teoremi nedeniyle, her $\alpha \in \Lambda$ için $\overline{W_{\alpha}} \subseteq U_{\alpha}$

gerçekleyen bir $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ incelmesi vardır; bu incelme doğal olarak yerel sonludur. Herbir $x \in X$ için öyle uygun bir $\Lambda_x (\subseteq \Lambda)$ sonlu indis kümesi vardır ki $x \in X - \overline{\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda - \Lambda_x\}}$ gerçekleşir. Sırasıyla şimdi $\Lambda_x(1) = \{\alpha \in \Lambda_x : x \in U_\alpha\}$ ve $\Lambda_x(2) = \Lambda_x - \Lambda_x(1)$ alt indis kümelerini ve

$$G_x = \bigcap_{\alpha \in \Lambda_x(1)} U_\alpha - \overline{\bigcup_{\alpha \notin \Lambda_x} U_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda_x(2)} W_\alpha}$$

açık kümesini tanımlayalım. $\mathcal{G} = \{G_x : x \in X\}$ ailesinin bir açık örtülüş olduğu ve $\mathcal{U}$ ailesinin incelmesi olduğu apaçıktır. Herhangi bir $x_0 \in X$ verildiğinde $x_0 \in \overline{W_{\alpha_0}}$ gerçekleyen herhangi bir $W_{\alpha_0} \in \mathcal{W}$ sayesinde $st(x_0, \mathcal{G}) \subseteq U_{\alpha_0}$ gerçekleşecektir, çünkü $x_0 \in G_x$ ise $\emptyset \neq G_x \cap \overline{W_{\alpha_0}} \subseteq G_x \cap \overline{U_{\alpha_0}}$ nedeniyle $\alpha_0 \in \Lambda_x$ ve $\alpha_0 \in \Lambda_x(1)$ olur ve sonuçta $G_x \subseteq U_{\alpha_0}$ elde edilir. Demek ki parakompakt bir Hausdorff uzayında her açık örtülüşün barisantrik bir açık incelmesi vardır. (q.e.d.)

Uyarı: Aslında (Bing'in gözlemlediği gibi) her bütünüyle normal uzay derlemsel normaldir ve iyi anımsanacağı gibi bu gerçek Bölüm 2'de kanıtlanmıştır.

Bölüm üzerine Notlar:

Diferansiyel Topolojinin büyük ustası Amerikalı R.H.Bing'in metriklenebilme teorisine ilişkin herbiri ayrı tarihsel öneme sahip olan üç makalesi vardır. Onun bu bölümde, başlarda ve son uyarıda sözü edilen çalışması bu konudaki ikinci çalışması olan ve 1951 yılında yayımlanan ünlü [Bin1] makalesidir. Bu olağanüstü makale, tıpkı A.H.Stone'un 1948 makalesi gibi yüzlerce atıf almıştır. Bing'in ileride Bölüm 6 ve Bölüm 8'de gösterilecek olan tüm sonuçları bu makalede yer alırlar. 1960 yılındaki çalışması [Bin2] ise bir bakıma Franklin Tall'un ünlü doktora çalışması için esin kaynağı oluşturan çalışmaların başında gelir, bkz.[Tal].

V.Bölüm 4

AÇINIR UZAYLARIN ÖNEMİ

Bir X topolojik uzayında bir d sözdemetriği tanımlıysa, kolaylıkla, $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, 2^{-n}) : x \in X\}$ açık örtülüşleri yardımıyla, herbir $x \in X$ için

$$\begin{aligned} st(x, \mathcal{G}_n) &= \bigcup \{S_d(y, 2^{-n}) : y \in S_d(x, 2^{-n})\} = S_d(S_d(x, 2^{-n}), 2^{-n}) \\ &\subseteq S_d \left[x, \frac{2}{2^n} \right] \end{aligned}$$

gerçeklendiği ve dolayısıyla, bir $0 < \epsilon$ verildiğinde, $\log_2 \frac{2}{\epsilon} < n$ gerçekleyen n doğal sayısı yardımıyla $st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq S_d(x, \epsilon)$ olacağı gözlenir. Demek ki (X, τ_d) uzayında yukarıdaki açık örtülüşler yardımıyla her bir $x \in X$ noktası için $\{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi bir yerel tabandır. Bing 1951 yılında bu özelliği genelleştiren topolojik uzaylara özel bir isim verdi. Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız, aşağıdaki koşul gerçekleşecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisine sahipse **açınır uzay** (developable space), bu açık örtülüşler dizisine ise bu uzayın **açınımı** (development) denir; bu koşul şudur: Her $x \in X$ noktası için $\mathcal{B}_x = \{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi bu uzayda bir yerel tabandır. Bu tür uzayların özel bir sınıfının metriklenebilme teorisindeki önemi ilk kez Alexandroff & Urysohn metriklenebilme teoreminde gözlenmiştir. Bu teorem, ancak ve yalnız çok özel açınır uzayların sözdemetriklenebildiğini söylemektedir. Bu özel açınım tanımlarına geçmeden önce şunu gözleyelim. Herhangi bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımı için, genelliği bozmaksızın

$$\mathcal{G}_{n+1} \prec \mathcal{G}_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

koşulunu geçerli varsayabiliriz. Gerçekten

$$\mathcal{G}_1^* = \mathcal{G}_1 \quad , \quad \mathcal{G}_{n+1}^* = \mathcal{G}_n^* \wedge \mathcal{G}_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlanan $\{\mathcal{G}_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi apaçıktır ki, yukarıda yazılı incelme koşulunu gerçekler ve üstelik bir açınımdır; burada $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}^*$ herhangi iki açık örtülüşü için, onların ortak incelmeleri olan $\{G \cap G^* : G \in \mathcal{G}, G^* \in \mathcal{G}^*\}$ açık örtülüşü kısaca $\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^*$ işareti ile gösterilmektedir.

Bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}^{\infty}$ açınımına, ancak ve yalnız

- i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_{n+1} \prec^* \mathcal{G}_n$ koşulunu gerçeklerse **normal açınım**;
- ii) $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{n+1}$ üyeleri kesişiyorsa $G_1 \cup G_2 \subseteq G$ gerçekleşecek biçimde bir $G \in \mathcal{G}_n$ vardır ($n \in \mathbb{N}$) koşulunu gerçeklerse **düzenli açınım**;
- iii) Bir $x \in X$ noktasının bir W_x açığı için $st(U_x, \mathcal{G}_n) \subseteq W_x$ gerçekleşecek biçimde x noktasının bir U_x açığı ve $n \in \mathbb{N}$ vardır koşulunu gerçeklerse **güçlü açınım**

denir. Bu üç koşulun aslında eşdeğer oldukları bu bölümde kanıtlanacaktır.

Teorem: Bir açınır uzayda i) her kapalı küme bir G_δ kümesidir, ii) tek elemanlı iki kümenin kapanışları ya eşit ya ayrıktır, iii) İkinci sayılabilirlik ve Lindelöflük eşdeğerdir.

Kanıtlanma: i) $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^\infty$ açınımına sahip bir topolojik uzayda herhangi bir A alt kümesi için

$$\overline{A} = \bigcap_{n=1}^\infty st(A, \mathcal{G}_n)$$

gerçeklendiğini kolayca gözleyebiliriz, çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için daima $\overline{A} \subseteq st(A, \mathcal{G}_n)$ geçerlidir ve üstelik $A \cap st(x, \mathcal{G}_n) \neq \emptyset$ ile $x \in st(A, \mathcal{G}_n)$ iddiaları eşdeğerdir. ii) Açınır bir uzayda x ve y elemanları ne olursa olsun

$$\text{ya } y \in \bigcap_{n=1}^\infty st(x, \mathcal{G}_n) \quad \text{ya da } y \notin \bigcap_{n=1}^\infty st(x, \mathcal{G}_n)$$

gerçeklendiği apaçıktır. Birinci durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için hem $y \in st(x, \mathcal{G}_n)$ ve hem $x \in st(y, \mathcal{G}_n)$ ve dolayısıyla kolayca $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ bulunur. İkinci durumda bu nedenle hiç bir $z \in X$ elemanının

$$\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \bigcap_{n=1}^\infty (st(x, \mathcal{G}_n) \cap st(y, \mathcal{G}_n))$$

kesişimine ait olamayacağı apaçıktır. iii) Yukarıdaki açınır uzay bir Lindelöf uzayı ise açınım dizisindeki her bir $\mathcal{G}_n$ açık örtülüşünün $\mathcal{G}_n^*$ gibi sayılabilir üyeli bir alt örtülüşü vardır ve kolayca gözleneceği gibi sayılabilir üyeli $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{G}_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler ailesi bu açınır uzay için bir tabandır.

Bing Teoremi: Bir açınır uzayda her açık örtülüşün bir σ -kesikli kapalı incelmeye vardır.

Kanıtlanma: $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^\infty$ açınımına sahip bir topolojik uzayda $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüşü verilsin. Λ indis kümesi üzerinde $<$ iyi sıralanması tanımlı olsun. $\mathcal{G}$ açık örtülüşü ve A alt kümesi için (bir önceki bölümde tanımlandığı gibi) $K(A, \mathcal{G})$ kapalı kümesi,

$$X - st(X - A, \mathcal{G}) = \{x \in X : st(x, \mathcal{G}) \subseteq A\} \quad (\subseteq A)$$

kümesinin kısa yazılışı olsun. Şimdi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \Lambda \quad \text{ için } K_{n\alpha} = K(U_\alpha, \mathcal{G}_n) - \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta$$

kapalı kümeleri ve

$$\mathcal{K}_n = \{K_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda\} \quad , \quad \mathcal{K} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{K}_n$$

aileleri tanımlansın. $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesinin istenilen incelmeye olduğunu gösterebiliriz.

$$K_{n\alpha} \subseteq K(U_\alpha, \mathcal{G}_n) \subseteq U_\alpha$$

gerçeklendiğinden ve herhangi bir $x \in X$ alındığında uygun bir $\alpha \in \Lambda$ ve $n \in \mathbb{N}$ sayesinde

$$x \in U_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} U_\beta \quad \text{ve} \quad st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq U_\alpha \quad \text{ve} \quad x \in K_{n\alpha}$$

geçerli olduğundan $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesi $\mathcal{U}$ 'nun bir incelmesidir. Şimdi sabit herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{K}_n$ ailesinin kesikli bir aile olduğunu gösterelim. Öncelikle şunu gözleyelim: bir $m \geq n$ için

$$st(x, \mathcal{G}_m) \cap K_{n\alpha} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x \in U_\alpha$$

gerektirmesi geçerlidir, çünkü bu kesişime ait bir $y \in X$ sayesinde $x \in st(y, \mathcal{G}_m) \subseteq st(y, \mathcal{G}_n) \subseteq U_\alpha$ geçerlidir. Bu nedenle herhangi bir $x \in X$ alındığında

$$x \in U_{\alpha_0} - \bigcup_{\beta < \alpha_0} U_\beta$$

olacak biçimde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ indisi belirlenirse, uygun ve var olan bir $m \geq n$ sayesinde $st(x, \mathcal{G}_m) \subseteq U_{\alpha_0}$ gerçekleşeceğinden, yukarıdaki gözlem nedeniyle

$$\gamma < \alpha_0 \quad \text{için} \quad st(x, \mathcal{G}_m) \cap K_{n\gamma} = \emptyset$$

bulunur. Üstelik

$$\alpha_0 < \gamma \quad \text{için} \quad st(x, \mathcal{G}_m) \cap K_{n\gamma} = \emptyset$$

geçerlidir, çünkü bu son kesişime ait bir $y \in X$ elemanı var olsaydı, zorunlu olarak

$$y \in st(x, \mathcal{G}_m) \subseteq U_{\alpha_0} \quad , \quad y \in K_{n\gamma} \subseteq X - \bigcup_{\beta < \alpha_0} U_\beta \subseteq X - U_{\alpha_0}$$

çelişkisi doğardı. Demek ki her bir $\mathcal{K}_n$ ailesi kesiklidir. (q.e.d.)

Teorem: *Açınır bir uzayda sürekli ve sınırlı bir sözdemetrik tanımlıdır.*

Kanıtlama: X uzayında $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^\infty$ açık örtülüşler dizisi bir açınım olsun. Herhangi $x, y \in X$ elemanları için

$$\begin{aligned} y \notin st(x, \mathcal{G}_1) & \text{ ise} & \delta(x, y) &= 1 \\ y \in st(x, \mathcal{G}_n) - st(x, \mathcal{G}_{n+1}) & \text{ ise} & \delta(x, y) &= \frac{1}{2^n} \\ y \in \bigcap_{n=1}^\infty st(x, \mathcal{G}_n) & \text{ ise} & \delta(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde negatif olmayan $\delta(x, y)$ özel diadik sayıları tanımlansın. Kolaylıkla $\delta(x, x) = 0$ ve $y \in st(x, \mathcal{G}_n)$ için $gyk \ x \in st(y, \mathcal{G}_n)$ oluşu nedeniyle $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ gerçekleştiği gözlenecektir. Ayrıca uzay açınır olduğundan $\delta(x, y) = 0$ gerçekleşebilmesi için x ve y elemanlarının her bir $\mathcal{G}_n$ açık örtülüşünde aynı bir üyenin içine düşmelerinin gerek ve yeter olduğu kolayca görülecektir. Ayrıca

$$\delta(x, y) < \frac{1}{2^n} \quad \text{için} \quad gyk \quad y \in st(x, \mathcal{G}_{n+1})$$

geçerlidir. Şimdi herhangi bir $x_0 \in X$ ve $0 < \epsilon$ için

$$U_{x_0}(\epsilon) = \{x \in X : \delta(x, x_0) < \epsilon\}$$

kümesinin X uzayında açık olduğunu gözleyelim. Gerçekten $1 < \epsilon$ ise $U_{x_0}(\epsilon) = X$ olduğu ayrıca $U_{x_0}(2^{-n}) = st(x_0, \mathcal{G}_{n+1})$ gerçekleştiği ve 2^{-n} biçiminde olmayan ve $0 < \epsilon \leq 1$ gerçekleyen bir pozitif ϵ sayısı için, $\ln_2(\frac{1}{\epsilon})$ pozitif gerçel sayısının tam kısmı n_ϵ olmak üzere $U_{x_0}(\epsilon) = st(x_0, \mathcal{G}_{n_\epsilon+1})$ gerçekleştiğini gözlemek kolaydır. Şimdi artık son aşamada X üzerinde

$$d(x, y) = \inf\{\delta(x, x_1) + \delta(x_1, x_2) + \cdots + \delta(x_n, y)\}$$

biçimindeki d sözdemetriğini tanımlayalım. Burada infimum sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümeleri üzerinden alınmaktadır.

$$0 \leq d(x, y) = d(y, x) \leq \delta(x, y) \leq 1$$

apaçıktır. Üstelik $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ alt kümeleri ne olursa olsun

$$d(x, y) \leq (\delta(x, x_1) + \delta(x_1, x_2) + \cdots + \delta(x_n, z)) + (\delta(z, y_1) + \delta(y_1, y_2) + \cdots + \delta(y_m, y))$$

geçerli olduğundan kolayca, ard arda infimum alarak

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

elde edilir. Üstelik

$$S_d(x_0, \epsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \epsilon\}$$

kümesi X uzayında açıktır; çünkü $y_0 \in S_d(x_0, \epsilon)$ ise $d(x_0, y_0) + \epsilon_0 < \epsilon - \epsilon_0$ gerçekleyen bir $0 < \epsilon_0 < 1$ var olacağından, kolayca $y \in U_{y_0}(\epsilon_0)$ için $d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0) + \delta(y_0, y) < \epsilon$ ve sonuçta $U_{y_0}(\epsilon_0) \subseteq S_d(x_0, \epsilon)$ bulunur, yani τ_d topolojisi X üzerindeki topolojiden kabadır ve dolayısıyla d sözdemetriği süreklidir. (q.e.d.)

Aleksandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoremi: Aşağıdaki önermeler bir X uzayın için eşdeğerdir:

- i) X sözdemetriklenebilirdir.
- ii) X uzayında normal bir açınım vardır.
- iii) X uzayında düzenli bir açınım vardır.

Kanıtlanma: i) iddiası geçerliyse $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\}$ açık örtülüşler dizisi normal bir açınımdır çünkü $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$st\left(S_d\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right), \mathcal{G}_{n+1}\right) \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$$

ve dolayısıyla $\mathcal{G}_{n+1} \overset{*}{\prec} \mathcal{G}_n$ gerçekleşir, çünkü

$$S_d\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap S_d\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq \emptyset \Rightarrow S_d\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$$

gerçekleştiği, bu kesişime ait bir noktanın varlığı nedeniyle üçgen eşitsizliği kullanılarak kolayca gözlenir. Her normal açınım düzenli bir açınım olduğundan ii) $\Rightarrow$ iii) gerektirmesi apaçıktır çünkü

$$G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{n+1} \text{ için } G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \text{ ise } G_1 \cup G_2 \subseteq st(G_1, \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq G_3$$

gerçekleyen bir $G_3 \in \mathcal{G}_n$ vardır. Son olarak iii) doğru olduğunda, bir önceki teoremden tanımlanan ve $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ düzenli açınımlı tarafından belirlenen δ fonksiyonunun üstelik

$$\delta(x, z) \leq 2(\delta(x, y) \vee \delta(y, z))$$

gerçeklediğini gözleyebiliriz. $\delta(x, z) = 0$ ise bu eşitsizlik apaçıktır. O halde $0 < \delta(x, z)$ durumu irdelenmelidir. Bu durumda ise $\delta(x, y)$ ve $\delta(y, z)$ diadik sayılarının (her ikisinin birden sıfır olmaları kesinlikle olanaksız olduğundan) pozitif ve birden küçük oldukları durumu incelemek yeterlidir. Sözelimi $\delta(x, y) = 2^{-n}$, $\delta(y, z) = 2^{-m}$ ve $n \leq m$ olsun. O halde $x, y \in G_n \in \mathcal{G}_n$ ve $y, z \in G_m \in \mathcal{G}_m$ olur. $\mathcal{G}_m \prec \mathcal{G}_n$ nedeniyle $G_m \subseteq G_n^*$ gerçekleyen bir $G_n^* \in \mathcal{G}_n$ var ve $y \in G_n^* \cap G_m$ nedeniyle ve açınımların düzenli oluşu gereği $\{x, y, z\} \subseteq G_n \cup G_n^* \subseteq G_{n-1} \in \mathcal{G}_{n-1}$ olur ve dolayısıyla önce istenen

$$\delta(x, z) \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} = 2(\delta(x, y) \vee \delta(y, z))$$

eşitsizliği ve bunun yardımıyla sırasıyla

$$\delta(x, z) \leq 2\delta(x, y) + 2\delta(y, z) \quad ,$$

$$\delta(x, y) \leq 2\delta(x, x_1) + 4\delta(x_1, x_2) + \cdots + 4\delta(x_{n-1}, x_n) + 2\delta(x_n, y) \quad ,$$

$$\frac{1}{4}\delta(x, y) \leq d(x, y) \leq \delta(x, y)$$

eşitsizlikleri ve bunların sonucu olarak da, her $x \in X$, her $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan

$$st(x, \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n-1})$$

kapsama zinciri elde edilir. Herhangi bir $x \in X$ noktasının X uzayındaki yerel tabanı $\{st(x, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ile (X, τ_d) sözdemetrik uzayındaki yerel tabanı $\{S_d(x, \frac{1}{2^n})\}_{n=1}^{\infty}$ nın üyelerinin iç içe geçtiğini söyleyen bu sonuç nedeni ile X uzayının topolojisi ile τ_d topolojisi çakışır. (q.e.d.)

Moore Metriklenebilme Teoremi: Aşağıdaki önermeler bir X uzayı için eşdeğerdir:

- i) X uzayı sözdemetriklenebilirdir.
- ii) X uzayında her $x \in X$ elemanı için $\mathcal{B}_x = \{st^2(x, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesinin yerel taban olduğu bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımlı vardır.
- iii) X uzayında güçlü bir açınım vardır.

Kanıt: i) iddiası doğru ise $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\}$ açık örtülüşler dizisi $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

$$st^2(x, \mathcal{G}_{n+1}) = st(st(x, \mathcal{G}_{n+1}), \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

geçerli olduğu kolayca gözlenecektir, çünkü $x \in S_d\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ ve $S_d\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap S_d\left(z, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq \emptyset$ ise $d(y, z) < \frac{1}{2^n}$ ve $d(z, x) < \frac{2}{2^n}$ nedeniyle

$$S_d\left(z, \frac{1}{2^n}\right) \subseteq S_d\left(x, \frac{3}{2^{n+1}}\right) \subseteq S_d\left(x, \frac{2}{2^n}\right) \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

elde edilir; dolayısıyla ii) geçerli olur. Eğer ii) doğru ise, ii) koşulunda sözü geçen açınının güçlü bir açınım olduğu ve dolayısıyla iii) koşulunun geçerli olduğu kolayca gözlenir. Şimdi son olarak iii) doğru olsun. X uzayının topolojisini τ ile, güçlü açınımını ise $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterelim. X uzayında herhangi bir açık $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüğü verilsin.

$$\mathcal{W} = \{W \in \tau : \exists (n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \Lambda; W \subseteq G \in \mathcal{G}_n, st(W, \mathcal{G}_n) \subseteq U_\alpha\}$$

biçiminde tanımlanan açık küme ailesinin $\mathcal{U}$ 'nun bir barisantrik incelmeleri olduğunu gösterelim. Herhangi bir $W \in \mathcal{W}$ için tanımda sözü geçen (n, α) ikililerinin birinci bileşenlerinin en küçüğü $n(W)$ doğal sayısı ile gösterilsin. O halde

$$\forall x \in X \text{ için } n(x) = \min\{n(W) : x \in W \in \mathcal{W}\}$$

tanımlanırsa, $x \in W \in \mathcal{W}$ ise $n(x) \leq n(W)$ ve $W \subseteq G \in \mathcal{G}_{n(W)}$ ve $\mathcal{G}_{n(W)} \prec \mathcal{G}_{n(x)}$ nedeniyle

$$st(x, \mathcal{W}) \subseteq \bigcup \{st(x, \mathcal{G}_n) : n \geq n(x)\} \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n(x)})$$

bulunur. Sonuçta bu x elemanı için, $n(x) = n(W_0)$ ve $x \in W_0 \in \mathcal{W}$ gerçekleyen W_0 yardımıyla

$$st(x, \mathcal{W}) \subseteq st(x, \mathcal{G}_{n(x)}) \subseteq st(W_0, \mathcal{G}_{n(W_0)}) \subseteq U_{\alpha_0}$$

gerçeklenecek biçimde bir $\alpha_0 \in \Lambda$ indisinin varlığı apaçıktır. Demek ki iii) iddiasını gerçekleyen bir X uzayında her açık örtülüğün bir barisantrik incelmeleri ve dolayısıyla bir yıldız incelmeleri vardır. $\mathcal{G}_n$ açık örtülüğünün yıldız incelmeleri $\mathcal{G}_n^*$ ile gösterilmek üzere tümevarımla

$$\mathcal{G}_1^{**} = \mathcal{G}_1^* \quad , \quad \mathcal{G}_{n+1}^{**} \prec \mathcal{G}_{n+1}^* \wedge \mathcal{G}_n^{**} \quad (n \in \mathbb{N})$$

tanımlanırsa X uzayı için $\{\mathcal{G}_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüğün dizisinin bir normal açınım olduğu kolayca gözlenecektir. O halde AUM Teoremi nedeniyle X sözdemetriklenebilir olur. (q.e.d.)

Jones Metriklenebilme Teoremi: *Bir X uzayının sözdemetriklenebilir olabilmesi için g_{yk} aşağıdaki koşulu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımına sahip olmasıdır:*

"Her tıkkız K alt kümesi için $\mathcal{B}_K = \{st(K, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi bu kümenin bir yerel tabanıdır."

Kanıtlama: Gereklik: (X, d) sözdemetriklendir uzayında, $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\}$ açık örtülüğünün belirlediği açınımın, kolayca istenen nitelikte olduğu görülür çünkü bir K tıkkız kümesi G açık kümesi tarafından kapsanırsa

$$d(K, X - G) = d(x_0, X - G) = \delta_0 > 0$$

gerçekleyen bir $x_0 \in K$ elemanının varlığı iyi bilindiğinden, $2^{-n} < \delta_0$ gerçekleyen n doğal sayısı sayesinde

$$st(K, \mathcal{G}_{n+1}) \subseteq S_d(K, \delta_0) \subseteq G$$

elde edilir.

Yeterlik: Yeterlilik hipotezini gerçekleyen açınım için $\mathcal{B}_x = \{st^2(x, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesinin

$x \in X$ noktasında bir yerel taban olduğunu gösterelim. x noktasının herhangi bir U_x civarı alındığında

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad st^2(x, \mathcal{G}_n) \not\subseteq U_x$$

olsaydı, sonuçta

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \emptyset \neq st(x, \mathcal{G}_n) \cap G_n \quad \text{ve} \quad G_n \not\subseteq U_x$$

gerçekleyen bir $G_n \in \mathcal{G}_n$ varolurdu. O halde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in G_n^*$ ve $G_n^* \cap G_n \neq \emptyset$ gerçekleyen $G_n^* \in \mathcal{G}_n$ sayesinde $x_n \in G_n^* \cap G_n$ noktaları tanımlansın. Dikkat edilirse $K = U_x \cap \{x, x_1, x_2, \dots\}$ kümesi tıktır çünkü $\{x_k : k \geq n\} \subseteq st(x, \mathcal{G}_n)$ ve uygun bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayesinde $st(x, \mathcal{G}_{n_0}) \subseteq U_x$ geçerli olduğundan $\{x, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\} \subseteq K$ gerçekleşmektedir. Oysa her $n \geq n_0$ için $G_n \subseteq st(K, \mathcal{G}_n)$ ve her n doğal sayısı için $st(K, \mathcal{G}_n) \subseteq U_x$ nedeniyle yeterlilik hipotezine aykırı düşülmüş olurdu. (q.e.d.)

Bölüm Üzerine Notlar:

Açınır uzayların kısa tarihçesi için Engelking'in kitabına başvurulabilir. Açıkça adlandırılmadan açınım kavramı 1919 yılından beri kullanılmaktadır. Bu kavrama bu adı 1951 yılındaki ünlü [Bin1] makalesinde Bing vermiştir. Açınır uzaylarda sürekli ve sınırlı bir sözdometriği tanımlayıp ünlü Alexandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoremini 1923 yılında fransızca yazdıkları ünlü [AlUr] makalesinde kanıtlayan Alexandroff ve Urysohn ikilisi ise, P.S.Urysohn'un 1926 yılında genç yaşta beklenmedik ve trajik ölümüne değin, gerek birlikte ve gerekse ayrı olarak onlarca makale yazarak (Polonya Topoloji Okulu ile birlikte) Genel Topolojinin gelişimini büyük ölçüde gerçekleştirdiler. Pavel Sergeyeviç Alexandroff ise 1960'ların sonuna değin Rus Topoloji Okulunun temel direği olmayı sürdürüp, aralarında A.Arhangelskii, B.Sapirovskii, V.Ponomarev ve B.Efimov'un bulunduğu çok sayıda üstün yetenekli genç matematikçiyi yetiştirmiştir. AU Metriklenebilme Teoremi metriklenebilme teorisinin bilinen ilk önemli karakterizasyonudur. Moore Metriklenebilme Teoremi ise büyük Amerikalı usta Robert Lee Moore tarafından 1935 yılında (değişik bir biçimde)[Moo] makalesinde verildi. Jones Metriklenebilme Teoremi ise 1958 yılında [Jon2] makalesinde gösterildi.

VI.Bölüm 5

ÖZEL TABANLARIN ÖNEMİ

Bu kısa bölüm , öncelikli olarak 1951 yılında Japon J.Nagata ve Rus M.Smirnov tarafından bağımsız olarak kanıtlanan ve büyük usta Urysohn'un ünlü metriklenebilme teoremini genelleştiren ve ancak çok özel tabanlara sahip düzenli uzayların sözdemetriklenebildiğini söyleyen Nagata & Smirnov teoremine ayrılmıştır. Ayrıca A.Arhangelskii'nin benzer nitelikli bir sonucu da elde edilecektir. Bölüm 1'de tanımlandığı gibi, bir X uzayında noktasal sonlu bir $\mathcal{A}$ ailesi ve $x \in X$ için kısaca $\text{ord}(x, \mathcal{A}) = \text{card}\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ yazılacaktır, bu elbette bir doğal sayıdır. Ayrıca üyeleri ikişerli ayrık olan bir aileye bu bölümde kısaca **ayrık aile** denilecektir.

Nagata & Smirnov Teoremi: *Bir X uzayının sözdemetriklenebilmesi için σ -yerel sonlu bir tabanı olan düzenli bir uzay olmasıdır.*

Kanıtlama: Gereklik: (X, d) sözdemetrik uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\}$ açık örtülüşünün Micheal Teoremi nedeniyle

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_{nm} \prec \mathcal{G}_n$$

biçiminde σ -yerel sonlu bir açık incilmesi var olduğundan, kolaylıkla

$$\mathcal{B} = \bigcup_n \bigcup_m \mathcal{B}_{nm}$$

ailesinin bu uzayda σ -yerel sonlu bir taban olduğu gözlenir.

Yeterlik: X düzenli uzayının $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gibi σ -yerel sonlu bir tabanı olsun. Uzay

yetkin normal olduğu için, herhangi $n \in \mathbb{N}$ alındığında, yerel sonlu, $\mathcal{B}_n = \{B_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda_n\}$ ailesine ait herbir $B_{n\alpha}$ üyesine karşılık

$$B_{n\alpha} = f_{\alpha}^{-1}((0, 1]) \quad (\alpha \in \Lambda_n)$$

gerçeklenecek biçimde bir f_{α} Urysohn fonksiyonu vardır. Bunlar yardımıyla tanımlanan

$$d_n(x, y) = \sum_{\alpha \in \Lambda_n} |f_{\alpha}(x) - f_{\alpha}(y)| \quad ((x, y) \in X \times X)$$

fonksiyonunun X üzerinde bir sözdemetrik olduğu ve üstelik sürekli olduğunu gözleyebiliriz, çünkü $W_{n\alpha} = (B_{n\alpha} \times X) \cup (X \times B_{n\alpha})$ olmak üzere, herhangi bir $(x_0, y_0) \in X \times X$ noktasının $\mathcal{W}_n = \{W_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda_n\}$ yerel sonlu açık kümeler ailesinde uygun sonlu üye dışında tüm üyelerle ayrık olan bir esas civarı vardır ve ayrıca

$$(x, y) \notin W_{n\alpha} \quad \text{ise} \quad f_{\alpha}(x) = f_{\alpha}(y) = 0 \quad (\alpha \in \Lambda_n)$$

gerçekleşir, dolayısıyla bu uygun esas civara ait herhangi (x, y) ikilisi için

$$|d_n(x, y) - d_n(x_0, y_0)| \leq \sum_{\alpha \in I_n} (|f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)| + |f_\alpha(y) - f_\alpha(y_0)|)$$

gerçeklenir ve burada $I_n = I_n(x_0, y_0) (\subseteq \Lambda_n)$ alt kümesinde yalnızca sonlu indis bulunmaktadır. Şimdi bu sayılabilir tane sürekli d_n sözdometriği yardımıyla bu kez

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_n(x, y)}{2^n} \quad ((x, y) \in X \times X)$$

sözdometriğini tanımlayalım. Dikkat edilirse $d_n^*(x, y) = 1 \wedge d_n(x, y)$ yazarak herhangi N doğal sayısı için

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq \sum_{n \leq N} |d_n^*(x, y) - d_n^*(x_0, y_0)| + \sum_{N < n} \frac{1}{2^n}$$

gerçekleştiğinden d sözdometriği süreklidir ve dolayısıyla X uzayının topolojisini τ ile gösterecek olursak $\tau_d \subseteq \tau$ gerçekleşir. Şimdi de son olarak $\tau \subseteq \tau_d$ gerçekleştiğini gösterelim. Bu amaçla herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesi için $\{x \in X : d(x, A) = 0\} \subseteq \overline{A}$ yani

$$X - \overline{A} \subseteq \{x \in X : 0 < d(x, A)\}$$

kapsamasının geçerli olduğunu göstermek gerekli ve yeterli olacaktır. Herhangi bir $x \in X - \overline{A}$ alındığında, uygun bir n_0 doğal sayısı ve $x \in B_{n_0\alpha_0}$ gerçekleyen $B_{n_0\alpha_0} \in \mathcal{B}_{n_0}$ sayesinde

$$\emptyset = B_{n_0\alpha_0} \cap A = f_{\alpha_0}^{-1}((0, 1]) \cap A$$

ve dolayısıyla her $a \in A$ için $f_{\alpha_0}(a) = 0$ bulunur. Bu nedenle

$$\forall a \in A \quad \text{için} \quad d_{n_0}(x, a) = \sum_{\alpha \in \Lambda_{n_0}} f_\alpha(x) \geq f_{\alpha_0}(x)$$

ve sonuçta

$$d(x, a) \geq \frac{1 \wedge d_{n_0}(x, a)}{2^{n_0}} \geq \frac{f_{\alpha_0}(x)}{2^{n_0}} \quad , \quad d(x, A) \geq \frac{f_{\alpha_0}(x)}{2^{n_0}} > 0$$

bulunur. Demek ki yukarıda tanımlanan d metriği gerçekten uzayın topolojisini metriklemektedir. (q.e.d.)

Sonuç: Bir uzayın metriklenebilmesi için gyk σ -yerel sonlu bir tabanı olan düzenli bir Hausdorff uzayı olmasıdır.

Urysohn Metriklenebilme Teoremi: İkinci sayılabilir her düzenli Hausdorff uzayı metriklenebilirdir.

Kanıtlama: Sayılabilir üyeli bir taban aşıkardır ki σ -yerel sonludur. (q.e.d.)

Uyarı: Bir sonraki bölümde ancak ve yalnız σ -kesikli bir tabana sahip Hausdorff uzaylarının metriklenebildiği kanıtlanacaktır. Başka bir deyişle Hausdorff uzaylarında σ -yerel sonlu bir tabana sahip olmak koşuluyla σ -kesikli bir tabana sahip

olmak koşulu eşdeğerdir. Bu bölümü bu kez, σ -noktasal sonlu tabanların metriklenebilme teorisindeki önemini vurgulayan ünlü bir teorem ile bitirelim.

Arhangelskii Metriklenebilme Teoremi: *Bir uzayın metriklenebilmesi için gyk σ -noktasal sonlu bir tabana sahip yetkin normal ve derlemsel normal bir Hausdorff uzayı olmasıdır.*

Kanıtlama: Gereklik aşıkardır. Bir yetkin normal ve derlemsel normal uzay kalıtımsal olarak derlemsel normal olduğundan, yeterlik, Nagata & Smirnov Teoremi ile aşağıda yer alan **Aull Lemmalarından** elde edilir. Bu lemmalar yazılış sırasında okunmalıdır:

Lemma: *Bir X uzayında $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesi noktasal sonlu ise öyle bir $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ailesi vardır ki*

- i) her bir $\mathcal{A}_n$ ailesi uygun bir G_n açık kümesinde kesiklidir,*
- ii) $x \in U \in \mathcal{U}$ ise uygun bir $A \in \mathcal{A}$ için $x \in A \subseteq U$ gerçekleşir,*
- iii) her bir $A \in \mathcal{A}$ üyesini $\mathcal{U}$ ailesinde en fazla sayıda üye kapsar.*

Gerçekten her bir $x \in \bigcup \mathcal{U}$ için $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ yazılsın, burada $\mathcal{U}$ ailesinin örtülüş olması gerekmediğine dikkat edilmelidir. Şimdi de

$$x \sim y \quad \text{için gyk} \quad \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$$

biçiminde bir eşdeğerlik bağıntısı ve $A_x = \{y \in X : x \sim y\}$ eşdeğerlik sınıfları tanımlansın. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$X_n = \{x \in \bigcup \mathcal{U} : \text{ord}(x, \mathcal{U}) = n\} \quad , \quad \mathcal{A}_n = \{A_x : x \in X_n\}$$

yazılsın. Eğer

$$G_x = \bigcap \{U \in \mathcal{U} : A_x \subseteq U\} \quad , \quad G_n = \bigcup \{G_x : x \in X_n\}$$

tanımlanacak olursa $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ailesi ve G_n kümeleri, kolayca gözleneceği gibi istenen tüm koşulları gerçekler.

Lemma: *Kalıtımsal bir derlemsel normal uzayın σ -ayrık bir tabanının varlığı için gyk σ -noktasal sonlu bir tabanının var olmasıdır.*

Gereklik apaçık olduğundan yeterliği gösterelim. X uzayı kalıtımsal olarak derlemsel normal olsun ve üstelik $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gibi σ -noktasal sonlu bir tabana sahip olsun. Bir önceki lemmadaki $\mathcal{U}$ olarak $\mathcal{B}_n$ ailesini alıp $\mathcal{A}_n$ ailelerini tanımlayalım. Bu lemma nedeniyle, her bir $A \in \mathcal{A}_n$ için $A \subseteq W_A$ gerçekleşecek biçimde, ikişerli ayrık üyelerden oluşan $\mathcal{W}_n = \{W_A : A \in \mathcal{A}_n\}$ açık kümeler ailesi vardır. Şimdi de her bir $A \in \mathcal{A}_n$ için

$$W_n^*(A) = \bigcap \{W_A \cap B : A \subseteq B \in \mathcal{B}_n\}$$

tanımlayalım, kesişime katılan $B \in \mathcal{B}_n$ üyeleri, yine yukarıdaki lemma nedeniyle sonlu sayıda olduğundan, bu kesişim kümesi açıktır.

$$\mathcal{W}_n^* = \{W_n^*(A) : A \in \mathcal{A}_n\} \quad \text{ve} \quad \mathcal{W}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{W}_n^*$$

yazılırsa, $\mathcal{W}^*$ ailesinin X uzayı için bir σ -ayrık taban olduğunu, yine yukarıdaki lemmanın koşulları yardımıyla gözlemek güç değildir.

Lemma: σ -ayrık bir tabanı olan yetkin normal bir uzayın σ -kesikli bir tabanı vardır.

Gerçekten yetkin normal bir X uzayının $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gibi σ -ayrık bir tabanı var ise, yetkin normallik gereği, herbir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\bigcup \mathcal{B}_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_{nm} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{G_{nm}}$$

gerçeklenecek biçimde G_{nm} açık kümeleri vardır ve sonuçta

$$\mathcal{B}_{nm}^* = \{B \cap G_{nm} : B \in \mathcal{B}_n\}$$

ailesinin X uzayında kesikli bir aile ve üstelik

$$\mathcal{B}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{B}_{nm}^*$$

ailesinin X uzayı için bir taban olduğunu gözlemek kolaydır. Bu lemmaların ardından Arhangelskii teoreminin kanıtlaması biter. (q.e.d.)

Bölüm Üzerine Notlar:

Nagata & Smirnov teoremi bağımsız olarak Nagata [Nag2] ve Smirnov [Smi] tarafından sırasıyla 1950 ve 1951 yıllarında kanıtlanmıştır. Bu bölümde verilen kanıtlama ana hatlarıyla Nagata'ya aittir. Topolojinin en ünlü metriklenebilme teoremlerinden birisi olan Urysohn Metriklenebilme Teoremi ise, bu büyük usta tarafından 1925 yılında ünlü [Ury] makalesinde kanıtlanmıştır. Urysohn, her ikinci sayılabilir düzenli Hausdorff uzayının klasik Hilbert küpü olan $[0, 1]^{\omega_0}$ içine gömülebildiğini kanıtlamıştır. Smirnov'un 26 yıl sonraki kanıtlaması, bu yöntemi, $l_2(\aleph_\alpha)$ içine yapılan bir gömme fonksiyonuna genişletmektedir. 1963 yılında kanıtlanan Arhangelskii [Arh] teoreminin daha sonra, daha kısa kanıtlamaları verilmiştir. Amerikalı C.Aull, burada verilen üç lemmayı [Aul] makalesinde 1971 yılında kanıtlamıştır.

VII.Bölüm 6

DERLEMSEL NORMAL UZAYLARIN ÖNEMİ

Bu bölüm derlemsel normal uzayların metriklenebilme teorisindeki önemlerini vurgulayan tarihsel sonuçlara ayrılmıştır. Bu tür uzaylarda parakompaktlık ve metakompaktlık kavramları çakışır. Bu iki örtülüş türü ayrıca düzenli ve ayrılabilir uzaylarda da eşdeğerdirler. Bu bölüm ayrıca, Moore uzaylarının metriklenebilme teorisindeki önemini de açığa çıkaracaktır. Bilindiği gibi düzenli açınır Hausdorff uzaylarına, bu tür uzayları ilk kez ele alıp inceleyen Amerikalı usta Robert Lee Moore'un anısına **Moore uzayı** denilir. Aşağıdaki teoremin iv) koşulunun ise Nagata & Smirnov teoreminin daha zayıfı olduğu gözlenmelidir.

Bing Metriklenebilme Teoremi: *Bir X Hausdorff uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir:*

- i) X metriklenebilirdir.
- ii) X parakompakt bir Moore uzayıdır.
- iii) X derlemsel normal bir Moore uzayıdır.
- iv) X düzenli bir uzayıdır ve σ -kesikli bir tabanı vardır.

Kanıtlama: iii) koşulunu gerçekleyen X Moore uzayının açınımı $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise Bölüm 4'teki Bing Teoremi nedeniyle, herbir $\mathcal{G}_n$ örtülüşünün $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_{nm}$ biçiminde kapalı ve σ -kesikli bir incelmeleri vardır. X derlemsel normal olduğundan herbir $\mathcal{K}_{nm}$ kesikli, kapalı kümeler ailesi için $\mathcal{K}_{nm} \prec \mathcal{W}_{nm} \prec \mathcal{G}_n$ gerçekleştirilecek biçimde kesikli bir açık $\mathcal{W}_{nm}$ ailesi vardır.

$$\mathcal{B} = \bigcup_n \bigcup_m \mathcal{W}_{nm}$$

ailesinin X uzayı için σ -kesikli bir taban oluşturduğunu X uzayının açınırlığını kullanarak gözlemek artık kolaydır. Şimdi de iv) koşulunun i) koşulunu gerektirdiğini uzun ve teknik bir kanıtlamayla göstereyim. X uzayında $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ gibi σ -kesikli bir taban var olsun. Uzay düzenli olduğundan

$$\mathcal{B}_m(n) = \{B \in \mathcal{B}_m : \exists B^* \in \mathcal{B}_n, \overline{B} \subseteq B^*\}$$

ailesi iyi tanımlıdır. Bu aile boş değilse

$$\mathcal{K}_{nm} = \bigcup \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}_m(n)\} \quad (\subseteq \bigcup \mathcal{B}_n)$$

kapalı kümesi iyi tanımlı ve boştan farklıdır. Boş olmayan $\mathcal{B}_m(n)$ ailelerini yeniden doğal sayı çiftleri ile indisleyebileceğimizden, bu aileleri daha baştan boştan farklı varsayabiliriz. Şimdi

$$f_{nm}(X) \subseteq [0, 1] \quad , \quad f_{nm}(\mathcal{K}_{nm}) = 1 \quad \text{ve} \quad f_{nm}(X - \bigcup \mathcal{B}_n) = 0$$

gerçekleyen f_{nm} Urysohn (sürekli) fonksiyonlarından yararlanarak

$$d(x, y) = \sum_n \sum_m \frac{|f_{nm}(x) + \epsilon_{nm}(x, y) \cdot f_{nm}(y)|}{2^{n+m}}$$

tanımlayalım. Herhangi bir $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\text{ord}(x, B_n)$ sayısının ya 0 ya da 1 olduğuna dikkat edilmelidir. Yukarıdaki toplamda kullanılan epsilon sayıları ise

$$\epsilon_{nm}(x, y) = \begin{cases} -1 & ; y \in st(x, B_n) \\ 1 & ; y \notin st(x, B_n) \end{cases} = \epsilon_{nm}(y, x)$$

olup, kısalık ve kolaylık amacıyla

$$r_{nm}(x, y) = |f_{nm}(x) + \epsilon_{nm}(x, y) \cdot f_{nm}(y)|$$

yazılacaktır. Dikkat edilirse $0 \leq r_{nm} \leq 2$ gerçekleşir. Çeşitli irdelemeler yaparak $r_{nm}(x, y) \leq r_{nm}(x, z) + r_{nm}(z, y)$ olduğunu ve dolayısıyla d 'nin üçgen eşitsizliğini gerçekleştirdiğini gözlemek kolaydır. Şimdi bir $x_0 \in X$ alındığında, eğer $st(x_0, B_{n_0}) \neq \emptyset$ ise uygun bir $m_0 \in \mathbb{N}$ sayesinde $\emptyset \neq \overline{st(x_0, B_{m_0})} \subseteq st(x_0, B_{n_0})$ olur. O halde $x_0 \in K_{n_0 m_0}$ ve $f_{n_0 m_0}(x_0) = 1$ olur ve herhangi bir $x \in S_d(x_0, 2^{-n_0-m_0})$ için

$$\frac{|f_{n_0 m_0}(x_0) + \epsilon_{n_0 m_0}(x, x_0) \cdot f_{n_0 m_0}(x)|}{2^{n_0+m_0}} \leq d(x_0, x) < \frac{1}{2^{n_0+m_0}}$$

nedeniyle zorunlu olarak $\epsilon_{n_0 m_0}(x, x_0) = -1$ ve dolayısıyla

$$S_d\left(x_0, \frac{1}{2^{n_0+m_0}}\right) \subseteq st(x_0, B_{n_0})$$

bulunur. Bu sonuç ise τ_d topolojisinin X uzayı üzerinde tanımlı olan topolojiden ince olduğunu söyler. Şimdi tam tersini göstermeye çalışalım. Herbir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, y)}{2^m} \leq 2$$

gerçeklendiği açıktır. O halde şimdi, önce $0 < \epsilon$ verildiğinde,

$$\sum_{N_\epsilon < n} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} \right) < \frac{\epsilon}{3}$$

gerçeklenecek biçimde bir $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ve sonra da

$$\sum_{M_\epsilon < m} \frac{1}{2^m} < \frac{\epsilon}{6N_\epsilon}$$

gerçekleyen $M_\epsilon \in \mathbb{N}$ (sabit) doğal sayılarını ve sonra da

$$0 < \delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{6M_\epsilon N_\epsilon}$$

koşulunu gerçekleyen δ_ϵ sayısını belirleyelim. O halde kolayca herhangi bir $x \in X$ için

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &= \sum_{N_\epsilon < n} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} \right) + \sum_{n \leq N_\epsilon} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} \right) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \sum_{n \leq N_\epsilon} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} \right) \end{aligned}$$

olur. Herbir $n \leq N_\epsilon$ için

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} &= \sum_{M_\epsilon < m} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} + \sum_{m \leq M_\epsilon} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} \\ &< \frac{\epsilon}{3N_\epsilon} + \sum_{m \leq M_\epsilon} r_{nm}(x, x_0) \end{aligned}$$

geçerlidir. x_0 noktasının birazdan tanımlanacak olan W_{x_0} esas civarına ait her x elemanı, herbir $n \leq N_\epsilon$ ve $m \leq M_\epsilon$ doğal sayıları için

$$r_{nm}(x, x_0) < 2\delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{3M_\epsilon N_\epsilon}$$

ve sonuçta

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{nm}(x, x_0)}{2^m} < \frac{2\epsilon}{3N_\epsilon} \quad (\forall n \leq N_\epsilon)$$

geçerli olacağına dikkat edilmelidir; burada herbir $n \leq N_\epsilon$ doğal sayısı için x_0 elemanının bu n sayısına karşılık gelen $W_{x_0}(n)$ esas civarını

$$= \begin{cases} X - \overline{\bigcup B_n} & ; x_0 \notin \overline{\bigcup B_n} \\ \bigcap_{1 \leq m \leq M_\epsilon} f_{nm}^{-1}([0, \delta_\epsilon)) & ; x_0 \in \partial(\bigcup B_n) \\ st(x_0, B_n) \cap \bigcap_{1 \leq m \leq M_\epsilon} f_{nm}^{-1}((f_{nm}(x_0) - \delta_\epsilon, f_{nm}(x_0) + \delta_\epsilon)) & ; x_0 \in \bigcup B_n \end{cases}$$

biçiminde tanımlarsak, kolaylıkla

$$n \leq N_\epsilon \quad , \quad m \leq M_\epsilon \quad , \quad x \in W_{x_0}(n) \quad \text{için} \quad r_{nm}(x, x_0) < 2\delta_\epsilon$$

gerçekleşir, çünkü $W_{x_0}(n)$ eğer ilk seçenekteki gibi tanımlanmışsa $f_{nm}(x_0) = 0 = f_{nm}(x)$ ve sonuçta $r_{nm}(x, x_0) = 0$ olur; tanımda ikinci seçenek gerçekleşmişse $r_{nm}(x, x_0) < 2\delta_\epsilon$; üçüncü seçenek gerçekleşmişse $r_{nm}(x, x_0) < \delta_\epsilon$ olur. Sonuçta x_0 noktasının bu esas civarları yardımıyla tanımlanan ve

$$W_{x_0} \subseteq \bigcap_{1 \leq n \leq N_\epsilon} W_{x_0}(n)$$

gerçekleyen W_{x_0} civarına ait herbir x elemanı için, gerçekten yukarıda yazılan eşitsizlikler geçerli olur ve $d(x, x_0) < \epsilon$ sonucu elde edilir. Kısaca yazılırsa bu

$$W_{x_0} \subseteq S_d(x_0, \epsilon)$$

demektir. O halde gerçekten X uzayı d metriği ile metriklenmektedir.(q.e.d.)

Micheal & Nagami Teoremi: *Derlemsel normal bir uzayda parakompaktlık ve metakompaktlık kavramları çakışır.*

Kanıtlama: X derlemsel normal uzayında herhangi bir $\mathcal{G}$ noktasal sonlu açık örtülüşünün yerel sonlu bir açık incelmesinin var olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi, tümevarımla aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\mathcal{W}_n$ açık küme ailelerini tanımlayalım:

- i) $\forall n < \omega$ için $\mathcal{W}_n$ üyeleri uygun bir $\mathcal{G}$ üyesince kapsanır,
- ii) $\mathcal{W}_n$ aileleri yerel sonludur,
- iii) $\text{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n$ ise $x \in \bigcup_{0 \leq k \leq n} W_k$,
- iv) $x \in W_n$ ($n < \omega$) ise $n \leq \text{ord}(x, \mathcal{G})$.

Yukarıda ve tüm kanıtlama boyunca kısaca $W_n = \bigcup \mathcal{W}_n$ yazılacaktır. $\mathcal{W}_0 = \{\emptyset\}$ tanımlansın. Yukarıdaki koşullar bu aile için geçerli olur. Eğer tüm bu koşullar gerçekleşecek biçimde $\mathcal{W}_0, \dots, \mathcal{W}_n$ aileleri tanımlanmışsa, herbir $\mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1}$ için

$$K(\mathcal{R}) = X - \left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} W_k \cup \bigcup \{G : G \in \mathcal{G} - \mathcal{R}\} \right)$$

kapalı kümeleri tanımlansın. Dikkat edilirse

$$\forall G \in \mathcal{R} \quad \text{için} \quad K(\mathcal{R}) \subseteq G$$

gerçekleştiğini kolayca gözleyebiliriz, çünkü uygun bir $G_0 \in \mathcal{R}_0 \in [\mathcal{G}]^{n+1}$ için $x_0 \in K(\mathcal{R}_0) - G_0$ elemanı varolsaydı, zorunlu olarak $\text{ord}(x_0, \mathcal{G}) \leq n$ olur ve dolayısıyla iii) koşulu yardımıyla

$$x_0 \in \bigcup_{0 \leq k \leq n} W_k \cap K(\mathcal{R}_0) = \emptyset$$

çelişkisi elde edilirdi. Demek ki sonuç olarak

$$\forall \mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1} \quad \text{için} \quad K(\mathcal{R}) \subseteq \bigcap \mathcal{R}$$

gerçekleşmektedir. Şimdi öncelikle $\{K(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1}\}$ ailesinin kesikli bir aile olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in X$ alındığında, eğer $n + 1 < \text{ord}(x, \mathcal{G})$ ise x elemanını içeren tüm $G \in \mathcal{G}$ üyelerinin kesişim kümesi aşıkardır ki açıktır ve hiçbir $K(\mathcal{R})$ ile kesişmez; eğer $\text{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n$ ise, bu kez iii) koşulu nedeniyle x elemanını içeren $\bigcup \{W_k : 0 \leq k \leq n\}$ açık kümesi yine hiçbir $K(\mathcal{R})$ ile kesişmez; eğer $\text{ord}(x, \mathcal{G}) = n + 1$ ise ve x elemanını içeren $n + 1$ üyenin oluşturduğu aile $\mathcal{R}_x$ ise, bu kez her $\mathcal{R} \neq \mathcal{R}_x$ için $\bigcap \mathcal{R}_x \cap K(\mathcal{R}) = \emptyset$ gerçekleştiğini gözlemek güç değildir. O halde şimdi, X uzayının derlemsel normal oluşu nedeniyle herbir $\mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1}$ için $K(\mathcal{R}) \subseteq W(\mathcal{R})$ ve dolayısıyla

$$\forall \mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1} \quad \text{için} \quad K(\mathcal{R}) \subseteq W(\mathcal{R}) \cap \bigcap \mathcal{R}$$

gerçeklenecek biçimde kesikli $\{W(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1}\}$ açık kümeler ailesi vardır.

$$\mathcal{W}_{n+1} = \{W(\mathcal{R}) \cap \bigcap \mathcal{R} : \mathcal{R} \in [\mathcal{G}]^{n+1}\}$$

tanımlayacak olursak bu ailenin yukarıdaki koşulları gerçeklediğini gözleyebiliriz. Gerçekten, yalnızca iii) gösterilmelidir. Eğer $\text{ord}(x, \mathcal{G}) \leq n + 1$ ve $x \notin \bigcup \{W_k : 0 \leq$

$k \leq n$ ise zorunlu olarak $\text{ord}(x, \mathcal{G}) = n + 1$ olur ve tüm üyeleri x elemanını içeren uygun bir $\mathcal{R}_x \in [\mathcal{G}]^{n+1}$ sayesinde

$$x \in X - \left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} W_k \cup \bigcup_{G \in \mathcal{G} - \mathcal{R}_x} G \right) = K(\mathcal{R}_x) \subseteq \bigcup \mathcal{W}_{n+1} = W_{n+1}$$

bulunur. Sonuçta istenen koşulları gerçekleyen $\mathcal{W}_n$ açık küme ailelerinin tanımı tümevarımla tamamlanmış olur. Oysa $\mathcal{W}^* = \{W_n : n < \omega\}$ sayılabilir üyeli açık örtülüşü iv) koşulu nedeniyle noktasal sonlu olduğundan Bölüm 1'deki Morita teoreminin sonucu gereği, her $n < \omega$ için $U_n \subseteq W_n$ gerçekleştirilecek biçimde yerel sonlu $\{U_n : n < \omega\}$ yerel sonlu açık incelmeleri vardır. Artık, $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün aranan yerel sonlu açık incelmelerinin

$$\{U_n \cap W : W \in \mathcal{W}_n, n < \omega\}$$

olduğunu gözlemek kolaydır. (q.e.d.)

Lemma: Her ayrılabilir metakompakt uzay bir Lindelöf uzaydır.

Lemma: Ayrılabilir bir düzenli uzayda parakompaktlık ve metakompaktlık kavramları çakışır.

Kanıt: Ayrılabilir bir uzayda noktasal sonlu her açık örtülüş, sayılabilir noktalı yoğun kümenin noktalarını içeren örtülüş üyelerinin oluşturduğu sayılabilir bir alt örtülüşe sahiptir. İkinci lemma birincisinden ve Micheal teoreminin sonucundan kolayca elde edilir.

Traylor Metriklenebilme Teoremi: Ayrılabilir bir uzayın metriklenebilir olması için gyk metakompakt, normal bir Moore uzay olmasıdır.

Uyarı: Yukarıdaki ikinci lemma ve Bing teoreminden kolayca elde edilebilen bu teoremin aşağıdaki değişik söyleniş biçimi Bölüm 8 için önem taşımaktadır.

Teorem: Ayrılabilir bir normal Moore uzayının metriklenebilmesi için gyk metakompakt olmasıdır.

Bölüm üzerine Notlar:

Bing Metriklenebilme Teoreminde bir araya getirilen eşdeğer koşulların tümü bu büyük ustanın 1951 yılında yayımlanan ve daha önce sözü edilen ünlü [Bin 1] makalesinde kanıtlanmıştır. Micheal & Nagami Teoremi Amerikalı E.Micheal ve Japon K.Nagami tarafından 1955 yılında bağımsız olarak sırasıyla [Mic 2] ve [Nag 1] makalelerinde gösterilmiştir. Traylor Teoremi ise ilk kez R.D.Traylor tarafından 1967 yılında Arizona Eyalet Üniversitesinde gerçekleştirilen bir Topoloji Konferansında sunulmuştur, bkz [Tra].

VIII.Bölüm 7

SNEIDER LEMMASININ BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Rus matematikçi V.E.Sneider 1945 yılında G_δ köşegenli tıkHz bir Hausdorff uzayının metriklenemediğini kanıtlayarak pek çok kişiyi şaşırttı. Açıkçası o güne değin bir Hausdorff uzayının köşegeninin metriklenebilme konusundaki önemi hiç kimsenin aklına gelmemişti. **Sneider Lemması** denilen bu şaşırtıcı sonucun ardından, sonraları, köşegenlerin metriklenebilme teorisindeki önemini vurgulayan ve Sneider'in sonucunu genelleştiren önemli sonuçlar bulunmuştur. Bu bölüm bunlardan en ünlü bazılarına ayrılmıştır. Bilindiği gibi bir X kümesi verildiğinde, $X \times X$ çarpımının

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$$

özel alt kümesine, $X \times X$ 'in köşegeni değil de nedense **X kümesinin köşegeni** denilir. Öte yandan bir (X, τ) topolojik uzayına ancak ve yalnız bir d tam metriği ile metriklenbiliyorsa **tam metriklenebilir uzay** denir. Čech anlamında tam uzay ise bölüm içinde tanımlanacaktır. Carlos Borges 1968 yılında hem açınır uzaylar sınıfını ve hem de sayılabilir tıkHz uzaylar sınıfını kapsayan yeni bir sınıfı şöyle tanımlamıştır: Bir X topolojik uzayına, ancak ve yalnız,

"Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in st(x_0, \mathcal{G}_n)$ noktalarının belirlediği $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ dizisinin (en az) bir yığılma noktası vardır" koşulunu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^\infty$ açık örtülüşler dizisine sahip ise **$z\Delta$ uzayı** denir. Her açınır uzayın ve her sayılabilir tıkHz uzayın bir $z\Delta$ uzayı olduğunu kolayca gözeleyebiliriz.

Sneider Metriklenebilme Lemması: *Bir tıkHz uzayın metriklenebilmesi için G_δ köşegenli olmasıdır.*

Kanıtlama: Bir Hausdorff uzayında köşegen kapalı bir küme ve bir metrik uzayda (hatta bir açınır uzayda) her kapalı küme bir G_δ kümesi olduğundan gereklik aşıkardır. Şimdi tersine X tıkHz ve G_δ köşegenli bir Hausdorff uzayı olsun. O halde $\Delta_X = \bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ gerçekleştirilecek biçimde U_n açık kümeleri vardır. $\Delta_X \subseteq X \times X$ tıkHz bir kapalı küme olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için, uygun N_n doğal sayıları ve

$$\Delta_X \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq N_n} (W_k \times W_k) \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq N_n} \overline{W_k \times W_k} \subseteq U_n$$

gerçeklenecek biçimde sonlu sayıda $W_k (\subseteq X)$ açık kümeleri vardır.

$$\mathcal{B} = \{W_k : 1 \leq k \leq N_n, n \in \mathbb{N}\}$$

açık kümeler ailesi sayılabilir üyelidir ve üstelik X uzayı için bir tabandır. Çünkü herhangi bir $x \in X$ noktasını kapsayan herhangi bir G açık kümesi verildiğinde

$$\mathcal{B}_x = \{W_{k(x)} \in \mathcal{B} : x \in W_{k(x)}\}$$

ailesinin en az bir $W_{k(x)}$ üyesi için $\overline{W_{k(x)}} \subseteq G$ gerçekleşmeseydi

$$\mathcal{K} = \{\overline{W_{k(x)} \times W_{k(x)}} - G^2 : W_{k(x)} \in \mathcal{B}_x\}$$

sonlu kesişim özelliğine sahip kapalı kümeler ailesinin, tıkHz X uzayında kesişim kümesi boştan farklı olurdu. Oysa kolayca gözlenebileceği gibi bu ailenin kesişim kümesi boştur, çünkü herhangi $x \neq y$ için

$$(y, y) \in \bigcap \{\overline{W_{k(x)} \times W_{k(x)}} : W_{k(x)} \in \mathcal{B}_x\}$$

olsaydı sonuçta

$$(x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{1 \leq k \leq N_n} \overline{W_k \times W_k} \right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \Delta_X$$

gelişkisi doğardı. Demek ki düzenli X Hausdorff uzayı ikinci sayılabilir ve Urysohn metriklenebilme teoremi gereği metriklenebilirdir. (q.e.d.)

Chaber Teoremi: G_δ köşegenli sayılabilir tıkHz uzaylar tıkHz ve metriklenebilirdir.

Kanıt: Bkz. Engelking, sayfa 242.

Borges & Okuyama Metriklenebilme Teoremi: Ancak ve yalnız G_δ köşegenli parakompakt, $z\Delta$ uzayları metriklenebilirdir.

Kanıt: Metriklenebilir her uzayın, teoremin ifadesinde sözü edilen üç özelliğe de sahip olduğu açıktır. Şimdi tersine X parakompakt Hausdorff uzayı G_δ köşegenli bir $z\Delta$ uzayı olsun. X 'in $z\Delta$ uzayı olmasını güvence altına alan açık örtülüş dizisi $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\overline{\mathcal{W}_n} \prec \mathcal{U}_n$ gerçekleyen yerel sonlu açık $\mathcal{W}_n$ incelmeleri tanımlansın.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n &= \mathcal{W}_1 \wedge \mathcal{W}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{W}_n \\ &= \{G : G = \bigcap_{1 \leq k \leq n} W_k, \quad W_k \in \mathcal{W}_k \quad (1 \leq k \leq n)\} \end{aligned}$$

açık örtülüşlerinin X uzayı için bir açınım olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in X$ noktası, gelişigüzel seçilen $x_n \in st(x, \mathcal{G}_n)$ noktalarının belirlediği $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir yığılma noktasıdır. $x_n \in st(x, \mathcal{W}_n) \subseteq st(x, \mathcal{U}_n)$ olduğundan bu dizinin öncelikle $y \in X$ gibi bir yığılma noktası vardır. Eğer $y \neq x$ olsaydı, uygun bir n_0 doğal sayısı sayesinde $y \notin st(x, \mathcal{U}_{n_0})$ ve sonuçta $y \notin \overline{st(x, \mathcal{W}_{n_0})}$ olurdu. Oysa y noktası $\{x_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası olduğundan sonuçta sonsuz sayıda $n > n_0$ için hem $x_n \in X - \overline{st(x, \mathcal{W}_{n_0})}$ ve hem de tanım gereği $x_n \in st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq st(x, \mathcal{W}_{n_0})$ olurdu. O halde kolayca gözleneceği gibi $\mathcal{B}_x = \{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi X uzayında x noktası için bir yerel tabandır, yani X parakompakt bir Moore uzayı olur. (q.e.d.)

Uyarı: TıkHz bir Hausdorff uzayında bir G_δ kümesi olabilme özelliğine, bu çok önemli topolojik özelliğe, başlı başına ayrı bir isim verilir. Bu nitelikteki uzaylara **Čech anlamında tam uzay** ya da kısaca **tam topolojik uzay** denir. Bu tür uzayların herşeyden önce bir Tikhonov uzayı oldukları apaçıktır. Bu uzaylar yoluyla

tam metriklenabilir uzayları karakterize edebileceğiz. Şimdi bu konuya ilişkin her biri başlı başına önemli bazı sonuçları görelim. Amacımız yukarıdaki teoremin tam metriklenibilme için benzerini elde etmektir. Bunu Jack Ceder başarmıştır.

Aleksandroff Teoremi: *Bir tam metrik uzayın G_δ alt kümeleri tam metriklenebilir.*

Kanıtlama: Öncelikle (X, d) tam metrik uzayında boş olmayan bir G açık kümesinin tam metriklenebilir olduğunu gösterelim. Genelliği bozmaksızın $0 \leq d \leq 1$ varsayabiliriz. Şimdi öncelikle

$$\forall x, y \in G \quad \text{için} \quad d^*(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, X - G)} - \frac{1}{d(y, X - G)} \right|$$

biçiminde tanımlanan d^* 'ın G üzerinde bir metrik olduğu kolayca gözlemlenebilir. (G, d^*) metrik uzayında bir $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ Cauchy dizisi alındığında, $0 \leq d \leq d^*$ nedeniyle bu dizi (X, d) tam metrik uzayında bir Cauchy dizisi olur ve bir $x_0 \in X$ elemanına yakınsar, fakat

$$1 \leq r_n = \frac{1}{d(x_n, X - G)}$$

gerçel sayılarının oluşturduğu $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi $(\mathbb{R}^1, d_1)$ bir boyutlu Öklid uzayında bir Cauchy dizisi olduğundan, uygun bir r_0 gerçel sayısına yakınsar. O halde $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, X - G) = \frac{1}{r_0} \leq 1$ olur ve uygun bir n_0 doğal sayısı sayesinde

$$\forall n \geq n_0 \quad \text{için} \quad x_n \in X - S_d\left(X - G, \frac{1}{2r_0}\right) = K_0 \subseteq G$$

gerçekleştiğinden ve K_0 kapalı olduğundan $x_0 \in K_0$ ve sonuçta $x_0 \in G$ bulunur. Demek ki (G, d^*) metrik uzayı bir tam metrik uzaydır. Şimdi (X, d) tam metrik uzayında herhangi bir A boş olmayan G_δ kümesi alınsın ve uygun G_n açık kümeleri sayesinde $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ yazılsın. (G_n, d_n^*) tam metrik uzaylarının çarpımı olan $\prod_{n=1}^\infty G_n$ uzayı çarpım metriği ile tam metriklendiğinden ve

$$\Delta = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^\infty G_n : x_1 = x_2 = \dots\}$$

kümesi bu uzayın kapalı bir alt kümesi ve dolayısıyla tam metriklenebilir bir alt uzay olduğundan ve son olarak $h(x) = (x, x, \dots)$ şeklindeki $h : A \rightarrow \Delta$ fonksiyonu kolayca gözlenebileceği gibi sürekli, bire-bir üzerine, kapalı ve sonuç olarak bir topolojik eşyapı fonksiyonu olduğundan, $A = h^{-1}(\Delta)$ tam metriklenebilir olur. (q.e.d.)

Frolik Teoremi: *Bir X uzayının, tam topolojik uzay olabilmesi için gyk aşağıdaki koşulu gerçekleyen bir $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ açık örtülüş dizisine sahip olmasıdır: X uzayında sonlu kesişim özelliğine sahip bir $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesinde, her $n \in \mathbb{N}$ için, $K \subseteq G_K$ gerçekleyen $K \in \mathcal{K}$ ve $G_K \in \mathcal{G}_n$ varsa $\cap \mathcal{K}$ boş değildir.*

Kanıtlama: Gereklik: X Tikhonov uzayı bir tam topolojik uzay olsun. X 'in X^*

tıkızlaştırma uzayında bir G_δ kümesi olması nedeniyle $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^*$ yazılışı geçerli olup burada her bir G_n^* kümesi X^* tıkızlaştırma uzayında açıktır. O halde her bir $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x \in W_x^*(n) \subseteq \text{kap}_{X^*}(W_x^*(n)) \subseteq G_n^*$$

gerçeklenecek biçimde X^* uzayının $W_x^*(n)$ açık kümeleri vardır. $\mathcal{G}_n = \{X \cap W_x^*(n) : x \in X\}$ ailesinin X uzayında açık bir örtülüş olduğu ve $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin teoremden sözü geçen nitelikte olduğu kolayca gözlenir. Çünkü teoremin ifadesinde sözü edilen bir $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesi için, tıkız X^* uzayında var olan

$$x_0 \in \bigcap \{\text{kap}_{X^*} K : K \in \mathcal{K}\} \subseteq X^*$$

noktası X uzayına aittir, çünkü hipotez gereği

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists K_n \in \mathcal{K} \quad , \quad \exists x_n \in X \quad ; \quad K_n \subseteq X \cap W_{x_n}^*(n)$$

gerçekleştiğinden sonuçta, öncelikle

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{kap}_{X^*} K_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{kap}_{X^*} W_{x_n}^*(n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^* = X$$

bulunur ve dolayısıyla

$$x_0 \in \bigcap \{\text{kap}_{X^*} K \cap X : K \in \mathcal{K}\} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} \overline{K} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \neq \emptyset$$

elde edilir.

Yeterlik: Şimdi X Tikhonov uzayında teoremden sözü edilen koşulu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi var olsun. Her bir $\mathcal{G}_n = \{G_{n\alpha} : \alpha \in \Lambda_n\}$ ailesinin üyeleri için X^* tıkızlaştırma uzayında $G_{n\alpha} = X \cap U_{n\alpha}^*$ gerçeklenecek biçimde $U_{n\alpha}^*$ açık kümeleri vardır.

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} U_{n\alpha}^* \right)$$

gerçeklendiğini gözleyelim. Gerçekten sağ yandaki kesişime ait bir $x \in X^*$ noktasının tıkız X^* Hausdorff uzayındaki yerel tabanı $\mathcal{B}_x^*$ olmak üzere $\mathcal{K}_x = \{X \cap \text{kap}_{X^*} U^* : U^* \in \mathcal{B}_x^*\}$ ailesi X uzayında sonlu kesişim özelliğini gerçekler, üyeleri X uzayında kapalıdır ve üstelik her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in U_{n\alpha}^*$ gerçekleyen $U_{n\alpha}^*$ ve uygun bir $U^* \in \mathcal{B}_x^*$ sayesinde $\text{kap}_{X^*} U^* \subseteq U_{n\alpha}^*$ gerçekleşeceğinden, hipotez gereği

$$\emptyset \neq \bigcap \mathcal{K}_x = X \cap \bigcap \{\text{kap}_{X^*} U^* : U^* \in \mathcal{B}_x^*\} = X \cap \{x\}$$

nedeniyle $x \in X$ başka bir deyimle

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} U_{n\alpha}^* \right) \subseteq X$$

bulunur. Oysa aşıkardır ki

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} G_{n\alpha} \right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda_n} U_{n\alpha}^* \right)$$

geçerlidir. Dolayısıyla X Tikhonov uzayı tıkızlaştırmasında bir G_δ kümesi olur. (q.e.d.)

Čech Teoremi: *Bir topolojik uzayın tam metriklenebilmesi için gyk metriklenebilir bir tam topolojik uzay olmasıdır.*

Kanıtlama: Gereklik: X topolojik uzayı bir d tam metriği ile metriklenebilirse $\mathcal{G}_n = \{S_d(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ açık örtülüşleri dizisi Frolik teoremindeki koşulu gerçekler ve dolayısıyla X bir tam topolojik uzay olur. Gerçekten bir $\mathcal{K}$ kapalı kümeler ailesi orada sözü edilen

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{ için } \quad \exists x_n \in X \quad , \quad \exists K_n \in \mathcal{K} \quad , \quad K_n \subseteq S_d\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

koşulunu gerçekleştiriyor ve üstelik sonlu kesişim özelliğine sahipse

$$K_n^* = \bigcap_{1 \leq k \leq n} K_k$$

azalan kapalı kümeleri üstelik $0 \leq \text{çap} K_n^* \leq \text{çap} K_n \leq \frac{2}{n}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{çap} K_n^* = 0$ gerçeklediğinden ve d tam metriği Cantor azalan kapalı kümeler koşulunu sağladığından

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^* = \{x_0\} \quad \text{ ve } \quad x_0 \in \bigcap \mathcal{K}$$

elde edilir, çünkü herhangi bir $K \in \mathcal{K}$ alındığında, yukarıdakiler $K_n^{**} = K \cap K_n^*$ kapalı kümelerinin oluşturduğu diziye uygulanırsa

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^{**} = \{x_0\} \cap K$$

bulunacaktır.

Yeterlik: Tersine X metriklenebilir uzayı bir tam topolojik uzay ise onun $\hat{X}$ tamlamasının Stone & Čech tıkızlaştırması $\beta \hat{X}$ kuşkusuz X 'in bir tıkızlaştırması olur ve dolayısıyla X tam metrik uzayında bir G_δ kümesi olur. O halde Alexandroff teoremi nedeniyle X tam metriklenebilir olur. (q.e.d.)

Ceder & Nagata Teoremi: *Bir parakompakt tam topolojik X Hausdorff uzayın için aşağıdaki iddialar eşdeğerdir.*

i) Her $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap \{\overline{st(x, \mathcal{G}_n)} : n \in \mathbb{N}\}$ gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi vardır.

ii) Her $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap \{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi vardır.

iii) X tam metriklenebilirdir.

Kanıtlama: i) iddiası geçerli ise, daima, herhangi bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi için

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{st(x, \mathcal{G}_n)}$$

geçerli olduğundan ii) geçerli olur. Tersine ii) geçerli ise, X uzayı parakompakt olduğundan her bir $\mathcal{G}_n$ açık örtülüşünün yerel sonlu ve $\overline{\mathcal{U}_n} \prec \mathcal{G}_n$ gerçekleyen $\mathcal{U}_n$ açık incelemeleri sayesinde

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} st(x, \mathcal{U}_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{st(x, \mathcal{U}_n)} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{st(x, \mathcal{G}_n)}$$

geçerli olur ve $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi yardımıyla i) geçerli olur. Eğer son iddia geçerliyse i) koşulunu gerçekleyen $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi olarak X metriklenebilir uzayındaki açınım alınır. Şimdi son olarak ii) $\equiv$ i) iddiası geçerli olsun. i) iddiasında sözü geçen $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüş dizisi ile tam topolojik uzay olma koşulunu karakterize eden (Frolik teoremindeki) ve bu kez $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilecek olan açık örtülüş dizisi ele alınsın. X uzayı bütünüyle normal olduğu için $\mathcal{U}_n$ 'nin $\mathcal{U}_n^*$ gibi açık barisantrik bir incelmelerinin var olduğunu biliyoruz. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{W}_n = \mathcal{G}_n \wedge \mathcal{U}_n^*$ ortak incelemeleri tanımlansın.

$$\forall x \in X \quad \text{ için } \quad st(x, \mathcal{W}_{n_1} \wedge \mathcal{W}_{n_2} \wedge \cdots \wedge \mathcal{W}_{n_m}) = \bigcap_{1 \leq k \leq m} st(x, \mathcal{W}_{n_k})$$

yıldız kümelerinin X uzayında bir yerel taban olduğunu gözleyelim. x noktasının gelişigüzel bir G_x açığı verildiğinde bu yıldız kümelerin hiçbirisi G_x tarafından kapsanmasa, sonlu kesişim özelliğine sahip olan

$$\mathcal{K} = \{\overline{st(x, \mathcal{W}_n)} - G_x : n \in \mathbb{N}\}$$

kapalı kümeler ailesi için, üstelik her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{st(x, \mathcal{W}_n)} - G_x \subseteq \overline{st(x, \mathcal{U}_n^*)} \subseteq U_n \in \mathcal{U}_n$$

gerçeklendiğinden, Frolik teoremi ve i) iddiası nedeniyle

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{st(x, \mathcal{G}_n)} - G_x = \{x\} - G_x = \emptyset$$

çelişkisi doğardı. O halde sonuçta

$$\mathcal{W}_{n_1} \wedge \mathcal{W}_{n_2} \wedge \cdots \wedge \mathcal{W}_{n_m}$$

açık örtülüşlerinden oluşan dizinin X için bir açınım olduğu anlaşılır. Dolayısıyla X tam topolojik uzayı parakompakt bir Moore uzayı olur, yani iii) iddiası geçerli olur. (q.e.d.)

Ceder Lemması: Bir X uzayının G_δ köşegenli olması için gerek her $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap \{st(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ gerçeklenecek biçimde bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisinin varlığıdır.

Kanıtlama: Eğer $\Delta_X = \bigcap \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ gerçekleşecek biçimde $X \times X$ uzayında G_n açık kümeleri varsa

$$\mathcal{G}_n = \{G \in \tau : G \times G \subseteq G_n\}$$

açık örtülüşlerinden oluşan dizinin teoremdaki koşulu gerçeklediği apaçıktır. Tersine bu koşulu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açık örtülüşler dizisi varsa bu kez

$$G_n = \bigcup \{G \times G : G \in \mathcal{G}_n\}$$

açık kümelerinin kesişiminin Δ_X olduğu kolayca gözlenir.

Ceder Metriklenebilme Teoremi: *Ancak ve yalnız parakompakt G_δ köşegenli tam topolojik Hausdorff uzayları tam metriklenebilirdir.*

Kanıtlama: Son teoremin ve lemmanın kolay bir sonucudur.

Bölüm üzerine Notlar:

Sneider Lemması [Sne] makalesinde, Borges & Okuyama Teoremi ise C.Borges ve A.Okuyama tarafından bağımsız olarak sırasıyla 1966 yılında yayımlanan [Bor] ve 1964 yılında yayımlanan [Oku] makalelerinde kanıtlanmıştır. Chaber teoremi 1976 yılında yayımlanan ve sayılabilir tıkHz uzayların tıkHzlığı için yeter koşulların araştırıldığı [Cha] makalesinde yer alır. Čech teoremi, bu tanınmış Çek ustanın Stone & Čech tıkHzlaştırmasını tanımladığı uzun ve tarihsel [Čec] makalesinde gösterilmiştir. Alexandroff Teoremi ise bu Rus ustanın 1924'te yayımladığı [Ale] makalesinden alınmıştır. Frolik Teoremi 1960 yılında yazılan [Fro] makalesinde, Jack Ceder'in sonuçları ise onun 1960 yılında yaptığı doktora çalışması sonuçlarından derlediği ve 1961 yılında yayımladığı [Ced] makalesinde yer alırlar.

IX.Bölüm 8

JONES TAHMİNİ

Genel topolojinin uzun yıllar boyu çözüm aradığı çeşitli güç sorulardan belirli bazılarının aşlında bir tür Matematik Mantık sorusu oldukları ilk kez 1960'ların sonunda anlaşıldı. Bu tür sorularda, tıpkı pek çok matematik mantık sorusunda olduğu gibi, çözüm, üzerinde çalışılan **aksiyomatik kümeler teorisi modeline** bağlıdır. Bu tür onlarca sorudan en ünlü üçü kanımızca şunlardır:

- 1) Her normal Moore uzayı metriklenebilir midir?
- 2) Sayılabilir tıkız ve yetkin her düzenli Hausdorff uzayı tıkız mıdır?
- 3) Sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen ve $2^{\aleph_0}$ dan daha az sayıda seyrek alt kümesinin birleşimi olarak yazılabilen tıkız bir Hausdorff uzayı var mıdır?

Burada son soruyla ilgili olarak şunları anımsatalım. Bir topolojik uzaya, bu uzayda üyeleri ikiye ayrı ve boştan farklı olan açık küme aileleri sayılabilir üyeli ise, matematik mantıktan gelen bir deyimle, **sayılabilir zincir koşulunu** gerçekler denir. Her ayrılabilir uzay bu niteliktedir ve metriklenebilir bir uzay için bu koşul ayrılabilirlikle çakışır; oysa $2^c \leq \kappa$ olmak üzere $\{0, 1\}^\kappa$ çarpım uzayı tıkız bir Hausdorff uzayıdır, sayılabilir zincir koşulunu gerçekler fakat ayrılabilir değildir.

Yukarıdaki üç soruyla uzun yıllar boyu uğraşılmıştır. Son ikisinin Seçme Aksiyomlu Zermelo-Fraenkel aksiyomatik küme teorisi (kısaca ZFS) modelinden bağımsız oldukları bilinmektedir. Her üç sorunun da yanıtlarının "Evet" olduğu aksiyomatik kümeler teorisi modelleri vardır! Buna karşın son iki sorunun yanıtlarının "Hayır" olduğu modeller de bilinmektedir. Birinci soruyu ise 1933 yılında yazdığı ünlü makalesinde Amerikalı Frederick Burton Jones sormuştur. Jones'un kişisel öngörüsü (tahmini) her normal Moore uzayının metriklenebildiği yolundaydı. Fakat Jones'un kendisi ve ardından gelenler (35 yıl boyunca) bu soru yerine, onun aşağıda yazılı olan daha zayıf biçimiyle uğraştılar:

- 4) Her ayrılabilir normal Moore uzayı metriklenebilir midir?

İşte bu zayıf sorunun da ZFS aksiyomatik kümeler teorisi modelinden bağımsız olduğu, başka bir deyimle ZFS modeli içinde kalarak yanıtının evet ya da hayır olduğunun kararlaştırılmasının kesin olanaksız olduğu, 1968 yılında Jack Silver tarafından kanıtlanmıştır (bkz Silver & Rothberger teoremi). Bu, topolojide gözlenen ilk bağımsız önerme kanıtlaması olmuştur. Dolayısıyla Jones öngörüsünün ZFS içinde doğruluğunun kanıtlanamayacağı böylelikle anlaşılmıştır. Jones öngörüsünün doğruluğunun kanıtlanabildiği bir aksiyomatik model gerçi 1980 yılında bulunmuştur ama bu aksiyomatik modelin tutarlılık kanıtlamaları hala yapılamamıştır. Dolayısıyla metriklenemeyen bir normal Moore uzayının varlığı sorusu ZFS içinde hala açıktır.

Biz bu bölümde ağırlıklı olarak yukarıdaki dördüncü soruya ilişkin en önemli tarihsel sonuçlarla ilgileneceğiz. Bu bölüm aynı zamanda Genel Topolojinin mantık ve aksiyomatik kümeler teorisi ile nasıl iç içe geçtiğini açığa vuracaktır.

Bu bölümdeki yeni ve temel kavram hiç kuşkusuz **Q-kümesidir**. $\mathbb{R}^1$ bir boyutlu Öklid uzayının sayılamaz sonsuz noktalı ve her alt kümesi bir G_δ kümesi olan (ya da eşdeğer olarak F_σ kümesi olan) bir alt uzayına, bir küme olarak, **Q-kümesi** denir. Bu nitelikte alt uzayların varlığı sorusu gerçekte bir matematik mantık sorusudur. Öte yandan bir topolojik uzaya, ancak ve yalnız, kapalı ve kesikli herhangi bir kümesinin noktaları ikiye ayrılmış ayrılmış kümeler tarafından ayrılabiliriyorsa, **derlemsel Hausdorff**(collectionwise Hausdorff) **uzay** denir. Her derlemsel normal T_1 uzayı, apaçıktır ki bir derlemsel Hausdorff uzayıdır.

Teorem: *Bir ayrılabilir Moore uzayının metriklenebilir olması için gyk Lindelöf uzay olmasıdır.*

Kanıt: Yalnızca yeterlik gösterilmelidir. X ayrılabilir Moore uzayı üstelik bir Lindelöf uzayı ise Micheal teoreminin sonucu gereği parakompakt bir Moore uzayı olur.(q.e.d.)

Sonuç: *Ayrılabilir bir Moore uzayının metriklenebilir olmaması için gyk sayılamaz sonsuz noktalı kapalı ve kesikli bir alt kümesinin varlığıdır.*

Kanıt: X ayrılabilir Moore uzayı metriklenebilir değilse bir önceki teorem nedeniyle Lindelöf olamaz ve uygun bir $\mathcal{U}$ açık örtülüşünün, varlığı daha önce kanıtlanan $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ gibi σ -kesikli kapalı incelmesindeki ailelerden en az birisi, söz gelimi $\mathcal{K}_{n_0}$, apaçıktır ki sayılamaz sonsuz üyeli olur. $\mathcal{K}_{n_0}$ ailesinin ikiye ayrılmış üyelerinin herbirinden seçme aksiyomu yardımıyla seçilen birer noktanın oluşturduğu küme aranan niteliktedir. Tersine, sayılamaz sonsuz noktalı kapalı ve kesikli bir alt kümeye sahip bir uzayın bir Lindelöf uzayı olamayacağı, her noktanın bu kümeden en fazla bir nokta içeren açıklarıyla yapılan örtülüş kullanarak kolayca anlaşılır.

Uyarı: Bing 1965 yılında şu yalın ama önemli gerçeği gözlemiştir.

Teorem: *Bir X ayrılabilir Moore uzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir:*

- i) X metriklenebilirdir.
- ii) X derlemsel normaldir.
- iii) X derlemsel Hausdorffdur.

Çünkü dikkat edilirse derlemsel Hausdorff olan bir ayrılabilir uzayda kapalı ve kesikli alt kümeler zorunlu olarak sayılabilir noktalıdır. Traylor teoreminin ikinci söylenişinde gözlemlediğimiz gibi, bu üç eşdeğer koşula bir dördüncüsü olan

- iv) X normal ve metakompakttır.

eşdeğer koşulu da eklenebilir. Dolayısıyla aşağıdaki sorular yukarıda yazılan dördüncü soruya eşdeğerdirler:

- 4') Her ayrılabilir normal Moore uzayı derlemsel Hausdorff mudur?
- 4'') Her ayrılabilir normal Moore uzayı metakompakt mıdır?

Artık bu soruların, üzerinde çalışılan aksiyomatik modele nasıl bağlı olduklarını gözlemeye başlayabiliriz. Aşağıda yer alan sonuçlar tarihsel olarak kanıtlama sırasında verilmişlerdir:

Jones Lemması: Bir X uzayında $|\mathcal{P}(D)| < |\mathcal{P}(K)|$ gerçekleşecek biçimde yoğun bir D kümesi ve kapalı- kesikli K alt kümesi varsa X uzayı normal olamaz.

Kanıtlama: Verilen hipotezleri gerçekleyen X uzayı normal olsaydı K alt kümesinin boş olmayan her bir A alt kümesi X uzayında kapalı olacağından $A \subseteq G_A$ ve $\overline{G_A} \cap (K - A) = \emptyset$ gerçekleşecek biçimde bir G_A açık kümesi var olurdu. Dikkat edilirse D yoğun olduğundan

$$\varphi : \mathcal{P}(K) \rightarrow \mathcal{P}(D) \quad , \quad \varphi(A) = G_A \cap D \quad \text{ve} \quad \varphi(\emptyset) = \emptyset$$

fonksiyonu iyi tanımlı ve bire-bir olurdu, çünkü K nın farklı A ve B alt kümeleri için söz gelimi $B - A$ boştan farklı olursa

$$\emptyset \neq B - A = B \cap (K - A) \subseteq G_B - \overline{G_A} = G_B - \overline{G_A \cap D}$$

ve sonuçta $(G_B - \overline{G_A \cap D}) \cap D = \varphi(B) - \overline{\varphi(A)}$ boştan farklı olur ve dolayısıyla kolaylıkla $\varphi(A) \neq \varphi(B)$ elde edileceği için, zorunlu olarak $|\mathcal{P}(K)| \leq |\mathcal{P}(D)|$ bulunurdu.(q.e.d.)

Jones Teoremi: *Zayıf kontinuum varsayımı*($= 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$)'nin doğru olduğu bir kümeler teorisi modelinde her ayrılabilir normal Moore uzayı metriklenebilir.

Kanıtlama: Bu olağanüstü teorem bir önceki Lemma ve yukarıda kanıtlanan Sonuç'tan kolayca elde edilir, çünkü bu modelde sayılamaz sonsuz noktalı kapalı-kesikli bir K kümesine sahip ayrılabilir bir normal Moore uzayı var olsaydı, bu uzayın sayılabilir noktalı yoğun D alt kümesi yardımıyla

$$|\mathcal{P}(D)| = 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1} \leq 2^{|K|} = |\mathcal{P}(K)|$$

bulunur ve sonuçta uzayın normallliği ile çelişirdi.(q.e.d.)

Bing Teoremi: Gerçel sayıların bir Q -kümesi varsa, metriklenemeyen ayrılabilir bir normal Moore uzayı vardır.

Kanıtlama: $\mathbb{R}^1$ gerçel sayılar uzayının E gibi bir Q -kümesi sayesinde Niemytzki-Moore(NM) düzleminin aşağıdaki

$$X = (\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cup (E \times \{0\})$$

alt uzayını tanımlayalım. Bu uzayın aranan nitelikte olduğunu göstereceğiz. Tıpkı NM düzleminde olduğu gibi X alt uzayının da ayrılabilir bir Moore uzayı olduğu kolayca gözlenebilir. $E \times \{0\}$ gibi sayılamaz sonsuz noktalı kapalı ve kesikli bir kümeye sahip olan X metriklenebilir. Şimdi bu uzayın normal olduğunu kanıtlayalım. X uzayının kapalı herhangi bir alt kümesinin $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ üst yarı düzlemi ile olan kesişiminin, $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ metriklenebilir uzayının $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ alt uzayında kapalı olacağı

apaçıktır. Dolayısıyla X 'in normal olduğunu göstermek için $E \times \{0\}$ ın ayrık iki alt kümesinin X uzayında ayrık açık kümelerce ayrıldığını göstermek yeterlidir. Şimdi $A \subseteq E \times \{0\}$ ve $B = (E \times \{0\}) - A$ alt kümeleri verildiğinde E kümesinin niteliği nedeniyle

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(A) \quad , \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(B)$$

gerçeklenecek biçimde $\mathbb{R}^1$ uzayının $G_n(A)$ ve $G_n(B)$ açık kümeleri vardır. Kolayca

$$A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n(A) \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \right) \cap (E \times \{0\})$$

$$B = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n(B) \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \right) \cap (E \times \{0\})$$

gerçeklenir. Şimdi de sabit bir n doğal sayısı için

$$B_n = B - (G_n(A) \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})) \quad \text{ve} \quad A$$

kümelerinin ayrık açıklarla ayrılacağını kanıtlayalım. Herhangi $a = (a_1, 0)$ noktası için $(a_1 - \epsilon_a, a_1 + \epsilon_a) \times \{0\} \subseteq G_n(A) \times (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ gerçeklenecek biçimde bir $\epsilon_a > 0$ vardır. Üstelik her $b = (b_1, 0) \in B_n$ için $b_1 \notin (a_1 - \epsilon_a, a_1 + \epsilon_a)$ nedeniyle NM düzleminin esas civarları yardımıyla, $G_{\frac{1}{k_a}}((a_1, 0))$ için kısaca $U(a, k_a)$ ve $G_1((b_1, 0))$ için $U(b, 1)$ yazılırsa, $U(a, k_a) \cap U(b, 1) = \emptyset$ olacak biçimde yeterince büyük bir k_a doğal sayısı vardır ve sonuçta bu $b = (b_1, 0) \in B_n$ noktası için

$$U(b, 1) \cap \bigcup_{a \in A} U(a, k_a) = \emptyset$$

gerçekleştiğinden $V_n = \bigcup \{U(b, 1) : b \in B_n\}$ açık kümesi için kolayca $A \cap \overline{V_n} = \emptyset$ elde edilir. Yukarıdaki kanıtlamada her $a \in A$ için $U(a, k_a) \cap U(b, 1) = \emptyset$ gerçeklenecek biçimde bir k_a doğal sayısının varlığı geometrik olarak da gözlenebilir. Tamamen benzer biçimde $W_n = \bigcup \{U(a, 1) : a \in A_n\}$ açık kümesi tanımlanırsa bu kez $A_n \subseteq W_n$ ve $\overline{W_n} \cap B = \emptyset$ elde edilir. Artık

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(V_n - \bigcup_{1 \leq k \leq n} W_k \right) \quad \text{ve} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(W_n - \bigcup_{1 \leq k \leq n} V_k \right)$$

açık kümelerinin ayrık olduklarını ve sırasıyla B ve A kümelerini kapsadıklarını gözlemek güç değildir. (q.e.d.)

Heath Teoremi: *Metriklenemeyen ayrılabilir bir normal Moore uzayı varsa, gerçel sayıların bir Q -kümesi vardır.*

Kanıtlama: X ayrılabilir normal Moore uzayı metriklenebilir olmasın. O halde bu uzayın Z gibi sayılamaz sonsuz noktalı kapalı-kesikli bir alt kümesi vardır. $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir elemanlı yoğun alt kümeyi, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise X uzayının açınımları gösterebilir. O halde her $x \in Z$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $st(x, G_n) \cap A$ kesişim kümesi sonsuz elemanlı olduğundan öyle

$$a_{n(x)} \in st(x, \mathcal{G}_n) \cap A$$

noktaları seçilebilir ki, indisler kesin artandır, yani

$$1(x) < 2(x) < \dots < n(x) < \dots$$

gerçekleşir. Şimdi

$$\forall x \in Z \quad \text{için} \quad s(x) = \{n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\aleph_0}$$

dizisi tanımlansın. X bir Hausdorff uzayı olduğundan, apaçıktır ki $x_1 \neq x_2$ için $s(x_1)$ ve $s(x_2)$ doğal sayı dizileri farklıdır. O halde $\mathbb{N}^{\aleph_0}$ çarpım uzayında

$$Y = \{s(x) : x \in Z\} \subseteq \mathbb{N}^{\aleph_0}$$

alt uzayı sayılamaz sonsuz noktalıdır. Şimdi bu alt uzayda her alt kümenin bir G_δ kümesi olduğunu kanıtlayalım. Bu amaçla boş olmayan her bir $E \subseteq Y$ alt kümesi için $E' = \{x \in Z : s(x) \in E\}$ tanımlansın. X ve Z alt uzayı normal olduklarından $E' \subseteq V$ ve $Z - E' \subseteq W$ gerçekleyen ayrık ve açık V ile W açık kümeleri vardır. Kolayca, Bölüm 4'te tanımlanan $K(A, \mathcal{G})$ işaretini kullanarak

$$K'_n = K(W, \mathcal{G}_n) \cap Z = \{x \in Z : st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq W\}$$

kapalı kümelerini tanımlarsak

$$Z - E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K'_n, \quad Y - E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad (1)$$

gerçekleşir, burada $K_n = \{s(x) : x \in K'_n\} \subseteq Y$ yazılmıştır. Dikkat edilirse her bir $x \in E'$ için öyle bir uygun n_x doğal sayısı vardır ki $st(x, \mathcal{G}_{n_x}) \subseteq V$ gerçekleşir; bu n_x doğal sayısı $n(x)$ ile karıştırılmamalıdır. Şimdi

$$\forall x \in E', \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad N(m, x) = \max\{m, n_x\}$$

doğal sayısını ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n(s(x)) = Y \cap (\{1(x)\} \times \{2(x)\} \times \dots \times \{n(x)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots)$$

açık kümesini tanımlayalım; Y ile kesiştirilen kartezyen çarpım kümesinin $\mathbb{N}^{\aleph_0}$ çarpım uzayında bir taban kümesi olduğu apaçıktır. Kolayca

$$\forall x \in E', \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad E \subseteq U_n(s(x))$$

gözlenir. Şimdi Y uzayında, yukarıda tanımlanan $N(m, x)$ doğal sayıları sayesinde

$$E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in E'} U_{N(m, x)}(s(x)) \right) \quad (2)$$

gerçeklendiğini kanıtlayalım. E kümesinin bu kesişim tarafından kapsandığı bir önceki kapsamadan gözlenir. Dikkat edilirse Y uzayında

$$\bigcup_{x \in E'} U_{N(m,x)}(s(x)) \cap K_m = \emptyset \quad (m \in \mathbb{N}) \quad (3)$$

gerçeklendiğini aşağıda yapıldığı gibi kanıtlayabiliriz. Eğer bir $s(x) \in Y$ için uygun bir $x_0 \in E'$ sayesinde

$$s(x) \in K_m \cap U_{N(m,x_0)}(s(x_0))$$

olsaydı, bir yandan

$$\forall n \geq m \quad \text{ için } \quad a_{n(x)} \in st(x, \mathcal{G}_n) \subseteq st(x, \mathcal{G}_m) \subseteq W$$

öte yandan ise

$$\{n(x)\}_{n=1}^{\infty} = s(x) \in \{1(x)\} \times \{2(x)\} \times \cdots \times \{N(m, x_0)\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$$

gerçekleşirdi. Kısıklık amacıyla $N(m, x_0) = N_0$ yazılırsa $N_0(x) = N_0$ ve dolayısıyla

$$a_{N(m,x_0)} = a_{N_0(x)} \in st(x_0, \mathcal{G}_{N_0}) \subseteq st(x_0, \mathcal{G}_{n_{x_0}}) \subseteq V$$

bulunur ve sonuçta $a_{N_0(x)} \in W \cap V = \emptyset$ çelişkisi doğardı. (1) ve (3) bağıntıları nedeniyle

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{x \in E'} U_{N(m,x)}(s(x)) \right) \cap (Y - E) = \emptyset$$

gerçekleşeceğinden istenen (2) bağıntısı elde edilir. O halde $Y (\subseteq \mathbb{N}^{\aleph_0})$ alt uzayında, her alt küme bir G_δ kümesi olur; oysa $\mathbb{N}^{\aleph_0}$ çarpım uzayı ile irrasyoneller üzerindeki $\mathbb{R}^1$ kısıtlama uzayı ünlü Baire teoremi nedeniyle eşyapılı olduğu için, Y 'nin bu eşyapı altındaki görüntüsü bir Q -kümesi olur. (q.e.d.)

Sonuç: Metriklenemeyen ayrılabilir bir normal Moore uzayının varlığı için gyk gerçel sayılarda bir Q -kümesinin varlığıdır.

Teorem: Eğer gerçel sayıların bir Q -kümesi varsa *Kontinuum Varsayımı* yanlıştır.

Kanıtlama: $X \subseteq \mathbb{R}^1$ alt kümesi bir Q -kümesi ise $\mathcal{P}(X) = \mathcal{G}_\delta(X)$ kümesinden τ^{ω_0} kümesine $\Psi(A) = \{G_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun bire-bir olacağı apaçıktır; burada, herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesi için $G_n(A) (\subseteq \mathbb{R}^1)$ açık kümeleri sayesinde $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G_n(A) \cap X)$ geçerlidir ve $\mathcal{G}_\delta(X)$ ailesi X alt uzayındaki tüm G_δ kümelerinin oluşturduğu aileyi, τ ise $\mathbb{R}^1$ uzayının tüm açık kümeler ailesini göstermektedir. Oysa τ ailesi $c = 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli olduğu için, sonuçta X kümesinin kardinalitesi için, $\aleph_0 < \aleph_1 \leq |X| < |\mathcal{P}(X)| \leq |\tau^{\omega_0}| = c^{\aleph_0} = c = 2^{\aleph_0}$ eşitsizlikleri geçerli olur. (q.e.d.)

Uyarı: Bir Q -kümesinin var olduğu aksiyomatik modellerde son teorem nedeniyle zorunlu olarak, *kontinuum varsayımının* değillemesinin (yani $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ önermesinin)

geçerli olması gerektiği anlaşılır. Şimdi bu bölümün sonunda, olağanüstü tarihsel öneme sahip olan ünlü Silver & Rothberger teoremini kanıtlayacağız. Ondan önce kanıtlarını vermeden dört önemli teoremi ard arda sıralıyoruz. Sierpinski teoremi, bir topoloji sorusu gibi görünmesine karşın, Q -kümelerinin varlığının bir kümeler teorisi sorusu olduğunu açığa çıkartmaktadır. Aşağıda Heath teoreminde sözü geçen ve Rus usta Pavel Alexandroff tarafından tanımlanan **düzgün taban** kavramını kısaca görelim. Bir X topolojik uzayında bir $\mathcal{B}$ tabanına, ancak ve yalnız, herhangi bir $x \in X$ elemanını $\mathcal{B}$ ailesinde içeren herhangi sonsuz sayıda üye, eğer, x noktası için bir yerel taban oluyorsa, **düzgün taban** denir. Bir T_1 uzayında $\mathcal{B}$ bir düzgün taban ise, bu uzayın farklı herhangi x ve y eleman çiftini birlikte içeren $\mathcal{B}$ üyesi sayısı, kolayca gözlenebileceği gibi, en fazla sonlu tanedir. Aşağıda yer alan ve tıpkı Jones öngörüsü gibi 1933 yılında (Felix Hausdorff tarafından) ortaya atılan öngörü, Q -kümelerini araştıran sürecin başlangıcı olmuştur.

Hausdorff Öngörüsü: $\aleph_1$ kardinaliteli herhangi bir X kümesinde öyle bir sabit $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ alt küme dizisi vardır ki, X 'in tüm alt kümeleri bu dizinin uygun birer alt dizisinin üst limit kümesidir.

Sierpinski Teoremi: Hausdorff öngörüsünün doğru olabilmesi için *gyk* bir Q -kümesinin var olmasıdır.

Bukovsky & Jech Teoremi: Zayıf kontinuum varsayımı $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ve Luzin varsayımı $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, ZFS aksiyomatik modelinde kanıtlanamazlar.

Solovay Lemması: Solovay kümeler teorisi modelinde, üyeleri ikiye bölünür hemen hemen ayrık olan ve $\aleph_0 < |\mathcal{B}| < 2^{\aleph_0}$ gerçekleyen herhangi bir $\mathcal{B} (\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ailesi ve onun boş olmayan herhangi bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesine karşılık

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ için } |A \cap \mathbb{N}^*| = \aleph_0, \quad \forall B \in \mathcal{B} - \mathcal{A} \text{ için } |B \cap \mathbb{N}^*| < \aleph_0$$

gerçeklenecek biçimde bir $\mathbb{N}^* \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi vardır.

Heath Teoremi: Her açınır metakompakt Hausdorff uzayının (ve dolayısıyla her metriklenebilir uzayın) bir düzgün tabanı vardır.

Silver & Rothberger Teoremi: Solovay kümeler teorisi modelinde, gerçel sayıların, $\aleph_0 < |E| < 2^{\aleph_0}$ gerçekleyen her E alt kümesi bir Q -kümesidir.

Kanıtlama: $\mathbb{R}^1$ topolojisinin $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ gibi sayılabilir üyeli bir düzgün tabanı vardır. Dolayısıyla farklı herhangi x ve y gerçel sayıların birlikte ihtiva eden yalnızca sonlu tane B_n üyesi vardır. Herbir $x \in E$ için $\mathbb{N}_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in B_n\}$ yazılsın. O halde

$$x \neq y \text{ için } |\mathbb{N}_x \cap \mathbb{N}_y| < \aleph_0$$

gerçekleşir. Herhangi bir boş olmayan $\mathcal{A} \subseteq E$ alt kümesi verildiğinde, Solovay Lemması gereği

$$\forall x \in \mathcal{A} \text{ için } |\mathbb{N}_x \cap \mathbb{N}^*| = \aleph_0, \quad \forall x \in E - \mathcal{A} \text{ için } |\mathbb{N}_x \cap \mathbb{N}^*| < \aleph_0$$

gerçeklenecek biçimde bir $\mathbb{N}^*(\subseteq \mathbb{N})$ alt kümesi vardır. Apaçiktır ki $\mathbb{N}^*$ kümesi sonsuz elemanlıdır. $\mathbb{N}^* = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ yazılsın; elbette $k \neq m$ için $n_k \neq n_m$ dir. Şimdi artık

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \geq m} B_{n_k} \right) \cap E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} (B_{n_k} \cap E) \right)$$

gerçeklendiğini gözlemek güç değildir. O halde sayılamaz sonsuz noktalı E 'nin her alt kümesi alt uzay topolojisinde bir G_δ kümesidir. (q.e.d.)

Sonuçlar: Zayıf Kontinuum varsayımının, hatta ondan daha güçlü olan Kontinuum Varsayımının (yani $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ önermesinin) kanıtlanabildiği tutarlı bir aksiyomatik kümeler teorisi modelini 1930'larda büyük usta Kurt Gödel tanımlamıştır. O halde bu modelde Jones Teoremi nedeniyle her ayrılabilir normal Moore uzayı metriklenelirdir. Oysa buna karşılık Silver & Rothberger Teoremi ve yukarıda bulunan son sonuç nedeniyle Solovay modelinde (ki bu modelde Kontinuum Varsayımının Değillemesi bir aksiyomdur) metriklenemeyen bir ayrılabilir normal Moore uzayının varlığı tıpkı bir Q -kümesinin varlığı gibi güvence altına alınmıştır. Demek ki ZFS modelinin iki ayrı genişletilmiş modellerinde birbirleriyle çelişen sonuçlar geçerli (kanıtlanabilir) olmaktadır. Bu nedenle ZFS modeli içinde kalarak 4)'üncü sorunun doğruluğu ya da yanlışlığını kanıtlamak olanaksızdır.

Uyarı: Belirli normal Moore uzaylarının (ZFS içinde) metriklenebilir olduğunu kanıtlayan sonuçların en ünlüsü hiç kuşkusuz aşağıdakidir. Bu teoremin güzel bir kanıtlaması için Kunen ve Vaughan ikilisinin editörlüğünü yaptığı [KuVa] kitabının, Dennis Burke tarafından yazılan dokuzuncu bölümündeki Teorem 8.9'a bakılmalıdır.

Reed & Zenor Teoremi: *Yerel tıkHz ve yerel bağlantılı bir normal Moore uzayı metriklenebilirdir.*

Bu bölümü aşağıdaki önemli bilgiyle kapatalım: Üzerinde yaklaşık 45 yıl boyunca uğraşılan, Alexandroff tarafından 1935 yılında sorulmuş olan aşağıdaki çok ünlü sorunun

5) Her yetkin normal, bağlantılı yerel Öklidyen uzay metriklenebilir midir?

ZFS modelinde doğrulunun ve yanlışlığının kanıtlanmasının olanaksız olduğunu, 1979 yılında M.E.Rudin göstermiştir. Topolojide, bağlantılı yerel Öklidyen uzaylara **topolojik manifold** da denilmektedir.

Bölüm Üzerine Notlar:

Çağdaş topolojinin en derin ve zorlu problemlerinden birisi olan Jones tahmini ile Jones'un bu bölümde gösterilen tüm sonuçları, Amerikalı Frederic Burton Jones tarafından 1933 yılında yazılan tarihsel [Jon1] makalesinde yer alırlar. Bu çalışmasını aynı yıl Amerikan Matematik Derneği Bülten dergisine gönderen Jones, Kontinuum Varsayımı ve Zayıf Kontinuum Varsayımını kanıtlamak için dört yıl boyunca yoğun bir uğraş vermiş, bu umarsız çabaları sonuçlanmayınca (her iki varsayımın ZFS modelinden bağımsız oldukları 1960'lı yıllarda anlaşılacaktır) bu ünlü makalesini

1937 yılında yayımlamıştır. Bing'in bu bölümdeki Teoremi, onun yine ünlü 1951 makalesinden alınmadır. Roberth Heath'in bu bölümdeki teoremleri ise 1964 yılında yayımlanan [Hea] makalesinde kanıtlanmıştır. Jack Silver 1968 yılında uluslararası bir topoloji konferansında Solovay modelinde Q -kümelerinin varlığını kanıtladığında, bu şaşırtıcı sonucun kendisinden yirmi yıl önce 1948'de F.Rothberger tarafından değişik bir kümeler teorisi modelinde elde edildiğini bilmiyordu. Bu sonuca bugün Silver & Rothberger teoremi denilmektedir. Jones tahmininin tarihçesi üzerine geniş, ayrıntılı ve yararlı bir derleme, Kanadalı Franklin Tall'un 1968 yılındaki doktora çalışmasında elde ettiği sonuçlarla birlikte onun 1977 yılında yayımladığı uzun [Tal] makalesinde bulunabilir. Daha kısa ve yalın bir derleme olarak Dennis Burke'in makalesi de salık verilir, bkz.[Bur].



X.Bölüm 9

ÇEŞİTLİ KARŞI ÖRNEK UZAYLARI

Bu bölümde, kimileri, daha önceki bölümlerde doğal olarak ortaya çıkan bazı varlık ya da tanımlanabilirlik sorularını (söz gelimi her parakompakt Hausdorff uzayı normaldir, peki her metakompakt Hausdorff uzayı da normal midir acaba? ya da her metriklenebilir uzay bir Moore uzayıdır, oysa tersine Bing Metriklenebilme Teoremi nedeniyle her Moore uzayının metriklenebilir olması gerekmediğine göre, metriklenemeyen bir Moore uzayı hatta ayrılabilir bir Moore uzayı tanımlayabilir miyiz acaba? biçimindeki soruları) çözen bazı örnek uzaylarını inceleyeceğiz. Bu tür örnek uzaylara, tanımlanabiliyorsa, bizleri hipotezleri zayıflastırma ya da genelleştirme konusundaki uyarıcı niteliklerinden ötürü, kabaca, **karşı örnek uzayı**(counter-example space) denildiği de olur. İşte, normal olmayan bir metakompakt Hausdorff uzayı örneği; derlemsel Hausdorff olmayan metakompakt bir normal Hausdorff uzayı örneği; parakompakt olmayan normal ve ayrılabilir bir Hausdorff uzayı örneği; normal olmayan bir alt uzaya sahip bütünüyle normal bir Hausdorff uzayı örneği vb. gibi ünlü bazı karşı örnek uzayları bu bölümde incelenecektir. Bu uzun bölümde yer alan on karşı örnek uzayı türlerinde en ünlüler arasında yer alırlar.

1) Ordinal Sayı Topolojileri

$X = [0, \omega_1)$ ya da kısaca $\omega_1 = \{\alpha \in \text{Ord} : \alpha < \omega_1\}$ kümesi tüm sayılabilir ordinal sayıların belirlediği aralıktır ve bu küme üzerinde herhangi bir $\alpha \in [0, \omega_1)$ elemanının esas civarlarının, uygun bir $\beta_\alpha < \alpha$ sayesinde belirlenen

$$(\beta_\alpha, \alpha + 1) = (\beta_\alpha, \alpha] = \{\mu \in \text{Ord} : \beta_\alpha < \mu \leq \alpha\}$$

biçimindeki aralıklar olduğu topoloji, bütün lineer sıralama topolojilei gibi kalıtımsal olarak derlemsel normal bir Hausdorff uzayı belirler. Bu esas civar tanımlamaları, tümüyle benzer bir biçimde herhangi bir κ kardinal sayısının belirlediği $[0, \kappa) = \{\alpha \in \text{Ord} : \alpha < \kappa\}$ aralığı üzerinde de yapılabilirdi. Dikkat edilirse $[0, \omega_1 + 1) = [0, \omega_1]$ uzayı tıktır çünkü herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüğü için, tümevarım yardımıyla

$$\exists G_1 \in \mathcal{G} \quad , \quad \exists \alpha_1 < \omega_1 \quad , \quad (\alpha_1, \omega_1] \subseteq G_1 \quad ,$$

$$\exists G_{n+1} \in \mathcal{G} \quad , \quad \exists \alpha_{n+1} < \alpha_n \quad , \quad (\alpha_{n+1}, \alpha_n] \subseteq G_{n+1}$$

gerçeklenecek biçimde tanımlanan ve kesinlikle azalan α_n ordinal sayılarının tanımlanması işlemi sonlu bir adımdan sonra $\alpha_{n_0} = 0$ gerçekleşerek bitmek zorundadır, çünkü aksi halde, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\omega_0 \leq \alpha_n$ olur ve $(\alpha_{n+1}, \alpha_n] \subseteq G_{n+1}$ gerçekleyen $\alpha_{n+1} < \omega_1$ ordinal sayısının varlığı kaçınılmaz olur ve sonuçta küme olmadığını bildiğimiz Ord sınıfı iyi sıralandığı için

$$\min\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha_{m_0} \in \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$$

minimal elemanı tanımlı olduğundan $\alpha_{m_0} \leq \alpha_{m_0+1} < \alpha_{m_0}$ çelişkisi doğardı. Tümüyle benzer biçimde κ kardinal sayısı ne olursa olsun $[0, \kappa] = \kappa + 1$ aralığı üzerindeki sıralama topolojisinin de tıkHz olduğu görülür. Oysa buna karşılık

$$X = [0, \omega_1) = [0, \omega_1] - \{\omega_1\}$$

uzayı parakompakt bile değildir, çünkü bu uzayda esas civarlarla yapılan açık örtülüşün hiç bir yerel sonlu açık incilmesi tanımlanamaz. Gerçekten kesinlikle artan herhangi bir

$$\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \beta_{n+1} < \dots < \omega_1$$

dizisinin supremumu $\gamma = \sup_n \beta_n$ bu dizinin limiti olup hala X kümesine aittir ve herhangi bir $\mu < \gamma$ verildiğinde,

$$\forall n \geq N_\mu \quad \text{için} \quad (\beta_n, \beta_{n+1}] \subseteq (\mu, \gamma]$$

gerçeklenecek biçimde bir N_μ doğal sayısı vardır. Demek ki kalıtımsal olarak derlemesel normal olan her Hausdorff uzayının parakompakt olması gerektiği gibi tıkHz bir Hausdorff uzayının bir noktasını çıkartmakla parakompaktlık özelliği bile kaybolabilmektedir. Üstelik bu uzayda ayrık iki kapalı kümeden en az birisi sayılabilir elemanlı olmak zorundadır. Gerçekten ikisi de sayılamaz elemanlı olsalar, bunlardan sırasıyla kesinlikle artan öyle birer $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri tanımlanırdı ki, her $n < \omega_0$ için $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ gerçekleşir ve sonuçta $\gamma = \sup_n \alpha_n = \sup_n \beta_n \in X$ elemanı bu kapalı kümelerin her ikisine de ait olurdu!

2) Tikhonov Kalası

$X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0]$ çarpım uzayının tıkHz bir Hausdorff uzayı ve dolayısıyla bütünüyle normal olduğu açıktır. Bu ünlü çarpım uzayına **Tikhonov Kalası** denir. Bu isimlendirmeyi, bu çarpım uzayının bir "kenarı" ötekine kıyasla çok uzun olduğu için Tikhonov'un kendisi yapmıştır.

$$X^* = X - \{(\omega_1, \omega_0)\} = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0)) \cup ([0, \omega_1) \times [0, \omega_0])$$

alt uzayına ise topolojide **delikli**(ya da çentikli) **Tikhonov Kalası** denir. Bu alt uzay normal değildir. Demek ki bütünüyle normal bir uzayın her alt uzayının normal olması gerekmez! Gerçekten

$$K_1 = \{\omega_1\} \times [0, \omega_0) = (\{\omega_1\} \times [0, \omega_0]) \cap X^* = \{(\omega_1, n) : n < \omega_0\}$$

alt kümesi (=sağ dik kenar çizgisi) kapalıdır ve bu kapalı kümenin X^* alt uzayındaki esas civarları, uygun bir $\beta < \omega_1$ sayesinde tanımlanan

$$(\beta, \omega_1] \times [0, \omega_0) = ((\beta, \omega_1] \times [0, \omega_0]) \cap X^*$$

"geniş enli" ve sağ üst köşe noktaları çentiklenmiş açık dikdörtgenlerdir. Gerçekten X^* alt uzayında $K_1 \subseteq U$ gerçekleyen herhangi bir U açık kümesi verildiğinde

$$\forall n \in \omega_0 \quad , \quad \exists \alpha_n < \omega_1 \quad , \quad (\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} \subseteq U$$

gerçekleştiğinden, $\sup_n \alpha_n + 1 = \beta < \omega_1$ sayesinde

$$K_1 \subseteq (\beta, \omega_1] \times [0, \omega_0) = \bigcup_{n < \omega_0} ((\beta, \omega_1] \times \{n\}) \subseteq U$$

bulunur. O halde X^* alt uzayında K_1 ile ayrık olan

$$K_2 = [0, \omega_1) \times \{\omega_0\} = ([0, \omega_1] \times \{\omega_0\}) \cap X^*$$

"üst kenar çizgisi" kapalı olup, K_1 ve K_2 'nin X^* alt uzayında ayrık açıkları tanımlanamaz, çünkü yukarıdaki $\beta < \omega_1$ yardımıyla tanımlanan $(\beta + 1, \omega_0) \in K_2$ elemanının herhangi bir esas civarı olan $\{\beta + 1\} \times (n_0, \omega_0]$ ile K_1 kapalı kümesini kapsayan U açık kümesi kesişir, çünkü

$$\begin{aligned} (\{\beta + 1\} \times (n_0, \omega_0]) \cap U &\supseteq (\{\beta + 1\} \times (n_0, \omega_0]) \cap ((\beta, \omega_1] \times [0, \omega_0)) \\ &= \{\beta + 1\} \times (n_0, \omega_0) \neq \emptyset \end{aligned}$$

gerçeklenmektedir. X^* aslında sayılabilir tıkHz da değildir, çünkü kolayca görüleceği gibi

$$\mathcal{G} = \{X^* - (\{\omega_1\} \times [0, \omega_0))\} \cup \{(\omega_0, \omega_1] \times \{n\} : n < \omega_0\}$$

sayılabilir üyeli açık örtülüşünün tek bir üyesi bile atılamaz. Normal olmayan bu düzenli uzay Lindelöf uzayı da olamaz.

3) Dieudonne Kalası

Bu çok ilginç uzay ise, $X = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0]) - \{(\omega_1, \omega_0)\}$ çentikli kümesi üzerinde, Tikhonov kalasından farklı bir topoloji tanımlanarak elde edilir. Bu yeni uzayda $[0, \omega_1] \times [0, \omega_0)$ kümesinin tüm noktaları yahtılmıştır. Buna karşılık (ω_1, n) ve $\alpha < \omega_1$ olmak üzere (α, ω_0) biçimindeki noktaların esas civarları ise Tikhonov kalasındaki gibidir. Bu esas civarların belirlediği uzaya **Dieudonne Kalası** denir. Dolayısıyla tıpkı Tikhonov kalasındaki gerekçeler nedeniyle bu uzay da normal değildir. Ama daha ilginç bu uzay sayılabilir parakompakt olmayan bir metakompakt Hausdorff uzayıdır. Her noktanın esas civarlarıyla yapılan bir açık örtülüşte üst kenar çizgisi ve sağ kenar çizgisindeki herbir noktayı en fazla bir örtülüş üyesi kapsayabilir. Tüm iç noktalar ise en fazla üç örtülüş üyesine ait olabilir. O halde apaçıktır ki bu uzay metakompakttır. Normal olmadığı için parakompakt olamayan bu Hausdorff uzayı aslında sayılabilir parakompakt bile değildir. Gerçekten $K_1 = \{\omega_1\} \times [0, \omega_0)$ kapalı kümesi yardımıyla tanımlanan sayılabilir üyeli

$$\mathcal{G} = \{X - K_1\} \cup \{(\alpha_n, \omega_1] \times \{n\} : n \in \omega_0\}$$

açık örtülüşünün hiçbir yerel sonlu açık incelmesinin tanımlanamayacağı tıpkı çentikli Tikhonov kalasında yapıldığı gibi, $(\beta + 1, \omega_0)$ noktasının her bir esas civarının $\mathcal{G}$ örtülüşünde sonsuz sayıda üye ile kesişmesi nedeniyle kolayca görülür. Her metakompakt Hausdorff uzayının normal olması gerekmediğini, metakompaktlığın parakompaktlıktan daha zayıf bir tür olduğunu gözlemiş bulunuyoruz.

4) Niemytzki & Moore düzlemi

$X = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ kümesi üzerinde, $(x, 0)$ biçimindeki noktaların esas civarlarının

$$G_\epsilon((x, 0)) = \{(x, 0)\} \cup S_d((x, \epsilon), \epsilon)$$

buna karşılık, $0 < y$ olmak üzere (x, y) biçimindeki noktaların esas civarların ise

$$G_\epsilon((x, y)) = S_d((x, y), \epsilon) \quad (0 < \epsilon < y)$$

olarak tanımlandığı topolojinin belirlediği uzaya **Niemytzki & Moore düzlemi** denilir. Tüm esas civarlarının, gerçel eksen ve üst yarı düzlem tarafından kapsandığı apaçıktır; burada d iki boyutlu Öklid metriğini göstermektedir. $G_\epsilon((x, 0))$ kümesi, gerçel sayı eksenine $(x, 0)$ noktasında teğet olan iki boyutlu Öklid uzayının açık yuvarına gerçel eksenden yalnızca $(x, 0)$ noktasını "ekleyerek" elde edilmiştir. O halde

$$G_\epsilon((x, 0)) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(x, 0)\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gerçeklendiğinden, bu uzayda $\mathbb{R} \times \{0\}$ kapalı alt kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi kesikli topolojidir. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ yoğun alt kümesine sahip bu uzay, $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| < |\mathcal{P}(\mathbb{R} \times \{0\})|$ gerçeklendiğinden Jones Lemması nedeniyle normal değildir. Oysa bu ayrılabilir uzay bir Moore uzayıdır. Gerçekten $\epsilon_n = 2^{-n}$ olmak üzere

$$\mathcal{G}_n = \{G_{\epsilon_n}((x, y)) : x \in \mathbb{R}, 0 \leq y\}$$

açık örtülüşleri dizisi, NM düzlemi için bir açınımdır. Gerçekten

$$st((x, 0), \mathcal{G}_n) = G_{\epsilon_n}((x, 0))$$

olur ve $0 < y$ iken $2\epsilon_n < y$ yani $1 + \log_2 \frac{1}{y} < n$ olması durumunda

$$(x, y) \notin \bigcup \{G_{\epsilon_n}((z, 0)) : z \in \mathbb{R}\}$$

gerçeklendiğini ve dolayısıyla bu durumda (x, y) elemanını kapsayan $\mathcal{G}_n$ üyelerinin, ancak ve yalnız $d((x', y'), (x, y)) < \epsilon_n$ olmak üzere $S_d((x', y'), \epsilon_n)$ açık yuvarları olduğunu ve sonuçta

$$st((x, y), \mathcal{G}_n) = S_d(S_d((x, y), \epsilon_n), \epsilon_n) \subseteq S_d((x, y), \frac{1}{n})$$

nedeniyle, $0 < \epsilon < y$ verildiğinde, uygun bir n doğal sayısı seçerek

$$st((x, y), \mathcal{G}_n) \subseteq G_\epsilon((x, y))$$

gerçeklendiğini gözlemek güç değildir. Demek ki her ayrılabilir Moore uzayının normal (ve metriklenebilir) olması gerekmediği gibi ayrılabilir olmayan bir alt uzaya sahip olan ayrılabilir bir uzayın var olduğunu gözlemiş bulunuyoruz. Bu uzay R.L.Moore ve V.Niemytzki tarafından bağımsız olarak tanımlanmıştır.

5) $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_a^2)$ uzayı

Gerçel sayılar üzerinde bir x gerçel sayısının esas civarlarının $[x, x + \epsilon[$ biçiminde aralıklar olduğu Hausdorff uzayı sıfır boyutlu, bütünüyle normal, ayrılabilir, birinci sayılabilir bir Lindelöf uzayıdır ama ikinci sayılabilir (ve dolayısıyla) metriklenemez değildir. Bu uzayın topolojisi kısaca **alt limit topolojisi** olarak bilinir ve bu uzay kısaca $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ ile gösterilir. Şimdi bu uzayın öncelikle bir Lindelöf uzayı olduğunu gösterelim. $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ bu uzayda herhangi bir açık örtülüş olsun. G_α üyelerinin $\mathbb{R}^1$ uzayındaki içlerinin birleşim kümesi, uygun sayılabilir tanesi ile örtülür ve sonuçta

$$(G =) \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \text{ic}_{\mathbb{R}^1} G_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{ic}_{\mathbb{R}^1} G_{\alpha_n} \quad (\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha_n})$$

gerçekleşir çünkü $\mathbb{R}^1$ uzayı ikinci sayılabilir ve dolayısıyla kalıtımsal bir Lindelöf uzayıdır. Oysa her $x \in \mathbb{R}$ için uygun bir $0 < \epsilon_x$ ve $\alpha_x \in \Lambda$ sayesinde $[x, x + \epsilon_x[\subseteq G_{\alpha_x}$ gerçekleştiğinden $[x, x + \epsilon_x[\subseteq \text{ic}_{\mathbb{R}^1} G_{\alpha_x} \subseteq G$ geçerlidir. Üstelik $\mathbb{R} - G$ kümesi sayılabilir elemanlıdır, çünkü $x, y \in \mathbb{R} - G$ farklı gerçel sayıları ne olursa olsun $[x, x + \epsilon_x[\cap]y, y + \epsilon_y[= \emptyset$ gerçekleşir çünkü sözgelimi $x < y$ ise $x + \epsilon_x \leq y$ olmak zorundadır; bu son eşitsizlik gerçekleşmezse $y \in]x, x + \epsilon_x[\cap (\mathbb{R} - G) = \emptyset$ bulunurdu. O halde $\mathcal{G}$ örtülüşünün sayılabilir üyeli bir alt örtülüşü tanımlıdır. Tüm esas civarların hem açık hem kapalı olduğu bu sıfır boyutlu Hausdorff uzayı bir Lindelöf uzayı olduğu için sonuçta parakompakt ve dolayısıyla bütünüyle normaldir. Oysa bu ayrılabilir Lindelöf uzayı ikinci sayılabilir değildir çünkü bu uzayda $a < b$ olmak üzere $[a, b[$ biçimindeki tüm aralıkların ailesi bir tabandır ama bu tabanın sayılabilir üyeli herhangi bir alt ailesi $\mathcal{B} = \{[a_n, b_n[: n \in \mathbb{N}\}$ bu uzaya bir taban olamaz, çünkü $a \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b[$ açık kümesi, kolayca gözlenebileceği gibi $\mathcal{B}$ ailesinin uygun herhangi sayıda üyesinin birleşimi olarak yazılamaz. Sonuçta bu ayrılabilir, sıfır boyutlu parakompakt Hausdorff uzayı metriklenemez değildir. Şimdi de kısaca $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_a^2)$ işareti ile yazılan $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ çarpım uzayı ile ilgilenelim. İki bütünüyle normal Hausdorff uzayının çarpımı olan bu sıfır boyutlu uzay normal ve Lindelöf değildir. Gerçekten $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ yoğun alt kümesine sahip bu uzayda

$$([x, x + \epsilon[\times]-x, -x + \epsilon[) \cap K = \{(x, -x)\} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gerçekleyen $K = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ kapalı ve kesikli kümesi $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir ve dolayısıyla $|\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})| < |\mathcal{P}(K)|$ gerçekleştiğinden, Jones Lemması nedeniyle bu çarpım uzayı normal (ve dolayısıyla parakompakt ve dolayısıyla Lindelöf) olamaz. Demek ki gerek parakompaktlık, gerek Lindelöflük ve gerekse normallik özellikleri çarpımlarla korunmaz.

6) Rudin Örneği

Her ikinci sayılabilir normal Hausdorff uzayı ünlü Urysohn Metriklenebilme Teoremi nedeniyle metriklenebilirdir ve dolayısıyla parakompakttır. Buna karşın her ayrılabilir normal Hausdorff uzayının parakompakt (ve dolayısıyla Lindelöf) olması gerekmez! M.E.Rudin'in tanımladığı aşağıdaki karşı örnek uzayı bunu kanıtlamaktadır. $X = \mathbb{N}^2 \cup [0, \omega_1)$ kümesi üzerinde istenilen nitelikte bir topolojiyi herbir $\alpha < \omega_1$ için, sonlu ötesi tümevarım yardımıyla tanımlanan ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonlarından yararlanarak tanımlayacağız:

$$\alpha < \beta < \omega_1 \text{ ise } \exists m(\alpha, \beta) = m(\beta, \alpha) \in \mathbb{N}, \quad \forall n > m(\alpha, \beta) \text{ için } f_\alpha(n) < f_\beta(n).$$

Bu tanımlamalar tümevarım yardımıyla kolayca, örneğin

$$f_{\alpha+1}(n) = f_\alpha(n) + 1,$$

$$\alpha = \sup_n \alpha_n \text{ ise } f_\alpha(n) = f_{\alpha_1}(n) + f_{\alpha_2}(n) + \cdots + f_{\alpha_n}(n) + n$$

biçiminde yapılabilir. Şimdi X üzerinde tüm doğal sayı ikililerinin yalıtılmış nokta olduğu ve herhangi bir $\alpha < \omega_1$ elemanının esas civarlarının, eğer α limit ordinal sayı değilse

$$B_n(\alpha) = \{\alpha\} \cup \{(n, f_\alpha(n)), (n+1, f_\alpha(n+1)), \dots\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde, eğer α bir limit ordinal sayı ise bu kez

$$B(\alpha) = (\beta, \alpha] \cup \{(k, f_\gamma(k)) : k > n(\gamma), \gamma \in (\beta, \alpha]\}$$

biçiminde tanımlansın, burada herbir $\gamma \in (\beta, \alpha]$ için $n(\gamma)$ doğal sayısının seçimi keyfidir. O halde bu tür α elemanlarının karakter sayısı $\mathcal{X}(\alpha, X) = 2^{\aleph_0}$ dir. $\mathbb{N}^2$ kümesi apaçıktır ki bu uzayda açık-yoğun bir kümedir. $[0, \omega_1)$ kapalı alt kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi aynı aralık üzerinde alışlagelen iyi sıralama topolojisi ile çakıştığı için X ayrılabilir uzayı parakompakt olamaz. Kolayca gözleneceği gibi X bir Hausdorff uzayıdır. Gerçekten, örneğin α_1 ve α_2 iki limit ordinal sayı ve $\alpha_1 < \alpha_2$ ise $\alpha_1 < \mu_0 < \alpha_2$ gerçekleyen sabit bir μ_0 yardımıyla $\mu_0 < \beta_2 < \alpha_2$ ve $\beta_1 < \alpha_1$ seçelim. Üstelik herbir $\mu \in (\beta_1, \alpha_1]$ için $n(\mu) > m(\mu, \mu_0)$ ve herbir $\gamma \in (\beta_2, \alpha_2]$ için $n(\gamma) > m(\gamma, \mu_0)$ gerçekleyen belirli $n(\mu)$ ve $n(\gamma)$ doğal sayıları seçilsin. Kolayca gözleneceği gibi

$$B(\alpha_1) = (\beta_1, \alpha_1] \cup \{(k, f_\mu(k)) : \forall \mu \in (\beta_1, \alpha_1], n(\mu) > m(\mu, \mu_0)\}$$

$$B(\alpha_2) = (\beta_2, \alpha_2] \cup \{(i, f_\gamma(i)) : \forall \gamma \in (\beta_2, \alpha_2], n(\gamma) > m(\gamma, \mu_0)\}$$

esas civarları ayrıktır, çünkü bu $n(\mu)$ ve $n(\gamma)$ doğal sayıları için

$$\forall k > n(\mu) \text{ için } f_\mu(k) < f_{\mu_0}(k)$$

$$\forall i > n(\gamma) \text{ için } f_{\mu_0}(i) < f_\gamma(i)$$

gerçeklenmektedir; gerçekten daha da genel olarak

$$\forall n \geq n_0 \text{ için } a_n < b_n \text{ ve } \forall n \geq m_0 \text{ için } b_n < c_n$$

gerçekleniyorsa, ister $n_0 \leq m_0$ ister $m_0 < n_0$ olsun

$$\{(n, a_n) : n \geq n_0\} \cap \{(n, c_n) : n \geq m_0\} = \emptyset$$

olur. Hausdorff ayırma aksiyomunun tüm öteki farklı eleman çiftleri için gerçekleştiğini gözlemek de kolaydır. Şimdi son olarak X uzayının normal olduğunu gösterelim. K_1 ve K_2 gibi iki ayrık kapalı küme alınsın. $K_1 \cap [0, \omega_1)$ ve $K_2 \cap [0, \omega_1)$ ayrık kapalı kümelerinden en az birisi sözgelimi birincisi sayılabilir elemanlı olmak zorunda ve sonuçta

$$K_1 = (K_1 \cap \mathbb{N}^2) \cup (K_1 \cap [0, \omega_1))$$

kapalı kümesi sayılabilir elemanlıdır. Şimdi önce $K_1 \cap [0, \omega_1) \subseteq [0, \alpha_0)$ gerçekleşecek biçimde sabit bir $\alpha_0 < \omega_1$ belirlensin. $[0, \alpha_0)$ sayılabilir elemanlı aralığı doğal sayılarla numaralandırılarak $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ olarak yazılırsa

$$\forall \alpha > \alpha_0 \text{ için } N(\alpha) > m(\alpha, \alpha_0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } N(\alpha_0) > \max\{m(\alpha_n, \alpha_k) : 0 \leq k < n\}$$

gerçeklenecek biçimde özel ve sabit N doğal sayıları belirlensin. Herhangi bir $\alpha \in K_1$ için $\sup([0, \alpha) \cap K_2) = \beta_\alpha < \alpha$ gerçekleyen $\beta_\alpha \in K_2$ seçilsin, eğer $[0, \alpha) \cap K_2$ boş ise $\beta_\alpha = 0$ seçilebilir. Eğer α bir limit ordinal sayı ise

$$\alpha \in U_\alpha \subseteq (\beta_\alpha, \alpha] \cup \{(k, f_\mu(k)) : \forall \mu \in (\beta_\alpha, \alpha] \text{ için } k > N(\mu)\}$$

gerçekleyen U_α açık kümesini üstelik $K_2 \cap \mathbb{N}^2$ ile ayrık olarak seçebiliriz. Eğer α bir limit sayı değilse U_α açığı bu kez

$$U_\alpha \subseteq B_{N(\alpha)}(\alpha) - (K_2 \cap \mathbb{N}^2)$$

olarak seçilsin. Benzer nitelikteki W_α açıkları her bir $\alpha \in K_2$ için tanımlanırsa

$$U = \bigcup_{\alpha \in K_1} U_\alpha \cup (K_1 \cap \mathbb{N}^2)$$

$$W = \bigcup_{\alpha \in K_2} W_\alpha \cup (K_2 \cap \mathbb{N}^2)$$

ayrık açık kümelerinin, K_1 ve K_2 kapalı kümelerini ayırdığı kolayca gözlenir. Yukarıda herhangi bir $\alpha_1 \in K_1$ ve $\alpha_2 \in K_2$ için $U_{\alpha_1} \cap W_{\alpha_2} = \emptyset$ gerçekleştiği yukarıdaki gibi gösterilir.

7) Bing Uzayı

Tarihsel öneme sahip bu çok ünlü uzay 1951 yılında Bing tarafından tanımlanmıştır. Sayılamaz sonsuz noktalı herhangi bir X kümesinin kuvvet kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi olan

$$F = \{0, 1\}^{\mathcal{P}(X)}$$

üzerinde çok ilginç bir topoloji tanımlayacağız. Şimdi önce herbir $A \in \mathcal{P}(X)$ için

$$f_x(A) = 1 \quad (x \in A \text{ ise}) \quad , \quad f_x(A) = 0 \quad (x \notin A \text{ ise})$$

gerçekleyen tüm özel $f_x \in F$ 'lerin kümesini F_0 ile gösterelim. Açık ki $x \neq y$ ise $f_x \neq f_y$ olur. Ayrıca herhangi bir $f \in F - F_0$ için, herbir $x \in X$ için uygun bir $A_x \in \mathcal{P}(X)$ vardır ki $f(A_x) = 1 - f_x(A_x)$ gerçekleşir. Üstelik

$$\aleph_1 \leq |X| = \kappa < |\mathcal{P}(X)| = 2^\kappa < 2^{2^\kappa} = |F|$$

geçerli olduğu kolayca gözlenir. Şimdi, $F - F_0$ kümesinin tüm elemanlarının yaıtılmış olduğu ve herhangi bir $f_x \in F_0$ için ise

$$B(f_x, \mathcal{R}) = \{f \in F : \forall A \in \mathcal{R} \text{ için } f(A) = f_x(A)\}$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}(f_x) = \{B(f_x, \mathcal{R}) : \mathcal{R} \in [\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}\}$$

ailesinin yerel taban olduğu uzayı göz önüne alalım. O halde herbir $f_x \in F$ için

$$\mathcal{X}(f_x, F) = |\mathcal{B}(f_x)| = 2^\kappa \geq 2^{\aleph_1}$$

olur. Apaçıktır ki $F - F_0$ 'ın tüm alt kümeleri bu uzayda açıktır. Üstelik sonlu tane boştan farklı $A_k \in \mathcal{P}(X)$ ve $\epsilon_k = 0$ ya da 1 ($1 \leq k \leq n$) olmak üzere

$$E = \{f \in F : \forall (1 \leq k \leq n) \text{ için } f(A_k) = \epsilon_k\}$$

alt kümesi F uzayında açıktır, çünkü $f_x \in E$ ise $\mathcal{R} = \{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ olmak üzere $B(f_x, \mathcal{R}) \subseteq E$ olur. Bu uzayda tüm tek elemanlı kümeler kapalıdır. Bu uzay üstelik normaldir. Çünkü F uzayının ayrık ve kapalı H_1 ve H_2 alt kümeleri verildiğinde, $H_1^* = H_1 \cap F_0$ ve $H_2^* = H_2 \cap F_0$ ayrık kapalı kümelerinden birisi, örneğin H_1^* boş ise H_1 ve $F - H_1$ ayrık açık kümeleri H_1 ve H_2 kapalı kümelerini ayırır. Eğer hem H_1^* ve hem de H_2^* boş değilse, bu kez

$$A_1 = \{x \in X : f_x \in H_1^*\} \quad , \quad A_2 = \{x \in X : f_x \in H_2^*\}$$

olmak üzere

$$E_1 = \{f \in F : f(A_1) = 1, f(A_2) = 0\} \quad , \quad E_2 = \{f \in F : f(A_1) = 0, f(A_2) = 1\}$$

ayrık açık kümeleri yardımıyla tanımlanan

$$(E_1 - H_2) \cup (H_1 - H_1^*) \quad \text{ve} \quad (E_2 - H_1) \cup (H_2 - H_2^*)$$

ayrık açık kümeleri H_1 ve H_2 kümelerini ayırır. Şimdi de bu uzayın derlemsel Hausdorff (ve dolayısıyla derlemsel normal) olmadığını kanıtlayalım. Aslında daha fazlasını göstereceğiz: Gelişigüzel seçilmiş sayılamaz sonsuz tane taban üyesinin oluşturduğu

$$\{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0\}$$

ailesinin noktasal-sayılabılır olamayacağını kanıtlayacağız. Genelliği bozmaksızın tüm bu taban üyeleri için $|\mathcal{R}_x| = n$ gerçekleşecek biçimde sabit bir n doğal sayısının var olduğunu varsayabiliriz. Şimdi herbiri n üyeli bu $\mathcal{R}_x$ kümelerinin, varlığı Zorn Lemması ile güvence altına alınan ve üyeleri ikiye ayrılmış olan maksimal alt topluluğu göz önüne alınsın. O halde öyle bir $X_0^* \subseteq X_0$ alt kümesi vardır ki $\{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\}$ ailesi üyeleri ikiye ayrılmış olan maksimal alt topluluk olur. O halde bunların ikiye ayrılığından yararlanarak kolayca

$$f \in \bigcap \{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0^*\}$$

gerçekleyen $f \in F$ elemanları kolayca tanımlanır. Yukarıda alınan taban üyelerinin noktasal-sayılabılırlik koşulu geçerli olduğundan bu son kesişime en fazla sayılabılır taban üyesi katılabilir ve dolayısıyla X_0^* sayılabılır elemanlı olur. Şimdi

$$\forall A \in \mathcal{R}^* = \bigcup \{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\} \quad \text{ için } \quad E_A = \{x \in X_0 : A \in \mathcal{R}_x\}$$

yazılırsa, kolayca, $\{\mathcal{R}_x : x \in X_0^*\}$ ailesinin maksimalliği nedeniyle

$$X_0 = \bigcup \{E_A : A \in \mathcal{R}^*\}$$

bulunur. $\mathcal{R}^*$ sayılabılır ve X_0 sayılamaz elemanlı olduğundan, uygun bir $A_1 \in \mathcal{R}^*$ için $\aleph_1 \leq |E_{A_1}|$ bulunur. Demek ki uygun bir sayılamaz sonsuz elemanlı $X_1 \subseteq X_0^*$ için, herbir $x \in X_1$ için $A_1 \in \mathcal{R}_x$ gerçekleşir. Yine genelliği bozmaksızın tüm $x \in X_1$ elemanları için $f_x(A_1) = \epsilon_1 \in \{0, 1\}$ gerçekleyen sabit bir ϵ_1 vardır. Bu sonuç kullanılırsa, ikinci aşamada öyle bir sayılamaz noktalı $X_2 (\subseteq X_1)$ ve $A_2 \in \bigcap \{\mathcal{R}_x : x \in X_2\}$ alt kümeleriyle $\epsilon_2 \in \{0, 1\}$ sabiti vardır ki $A_2 \neq A_1$ ve her $x \in X_2$ için $f_x(A_2) = \epsilon_2$ gerçekleşir. n -inci adım sonunda, öyle bir özel n üyeli

$$\mathcal{R}_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

ailesi ve sayılamaz sonsuz noktalı $X_n (\subseteq X_{n-1})$ alt kümesinin varlığı gözlenebilir ki

$$\forall x \in X_n, \forall A_k \in \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}^* \quad \text{ için } \quad f_x(A_k) = \epsilon_k$$

gerçekleşir. O halde,

$$f \in \bigcap \{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_n\}$$

gerçekleyen $f \in F$ fonksiyonları kolayca tanımlanabileceğinden, ilk başta ele alınan $\{B(f_x, \mathcal{R}_x) : x \in X_0\}$ noktasal-sayılabılır ailesinin sayılamaz sonsuz üyeli olamayacağı gerçeği, bu ulaşılan çelişkiden anlaşılacaktır. Demek ki F_0 kapalı-kesikli kümesine ait f_x elemanlarının ikiye ayrılmış taban üyeleri ile ayrılması hiç söz konusu olamaz. Oysa dikkat edilirse F uzayında, her noktasal sayılabılır açık örtülüşünün

yerel sonlu bir açık incelmeye vardır. Gerçekten F uzayının noktasal-sayılabılır bir $\mathcal{G}$ açık örtölüşü verildiğinde $\mathcal{G}_0 = \{G \in \mathcal{G} : G \cap F_0 \neq \emptyset\}$ ailesi F_0 normal alt uzayı için noktasal sayılabilir bir açık örtölüşüdür ve yukarıdaki sonuçlar nedeniyle zorunlu olarak sayılabilir üyedir. Morita teoremi nedeniyle, F_0 uzayında $\mathcal{G}_0$ açık örtölüşünün yerel sonlu bir $\mathcal{U}$ açık incelmeye vardır ve sonuçta

$$\mathcal{U} \cup \{\{f\} : f \in F - \bigcup \mathcal{U}\}$$

ailesi $\mathcal{G}$ 'nin istenen yerel sonlu açık incelmeye olur çünkü $\bigcup \mathcal{U}$ kümesi hem açık hem kapalıdır. Apaçıktır ki, F uzayının yerel sonlu bir açık incelmeye varolmayan en az bir açık örtölüşü vardır çünkü bu uzay derlemsel normal olmadığı için parakompakt değildir.

8) Micheal'in Örneği

Bing'in ünlü F karşı örnek uzayındaki F_0 alt kümesine,

$$F_1 = \{f \in F : \exists \mathcal{R}_f \in [\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}, \forall A \in \mathcal{P}(X) - \mathcal{R}_f \text{ için } f(A) = 0\}$$

alt kümesini ekleyerek $F^* = F_0 \cup F_1$ kümesinin üzerindeki alt uzayı tanımlayalım. Öncelikle

$$|F^*| = |F_1| = |[\mathcal{P}(X)]^{<\omega_0}| = 2^\kappa$$

olduğuna dikkat edilmelidir. F^* 'in derlemsel Hausdorff olmayan metakompakt bir normal Hausdorff uzayı olduğunu göstermek istiyoruz. $F_0 = \{f_x : x \in X\}$ kümesinin bu uzayın kapalı ve kesikli bir alt kümesi olduğunu biliyoruz. Bu kümenin elemanlarının ikişerli ayrık esas civarları tanımlanamaz. $x \neq y (x, y \in X)$ için $B(f_x, \mathcal{R}_x) \cap B(f_y, \mathcal{R}_y) = \emptyset$ gerçekleyen $B(f_x, \mathcal{R}_x)$ esas civarları var olsaydı, öncelikle zorunlu olarak, uygun bir sayılamaz $X_1 \subseteq X$ alt kümesi ve sabit bir n doğal sayısı vardır ki, $x, y \in X_1$ için $|\mathcal{R}_x| = |\mathcal{R}_y| = n$ olur. Üstelik $\mathcal{R}_x$ ve $\mathcal{R}_y$ kesişmelidir, aksi halde F^* kümesinin $f \in B(f_x, \mathcal{R}_x) \cap B(f_y, \mathcal{R}_y) \cap F_1$ gerçekleyen en az 2^κ tane elemanı kolaylıkla tanımlanırdı. Sonuçta öyle uygun sayılamaz sonsuz elemanlı $X_2 (\subseteq X_1)$, sabit bir $A_1 \subseteq X$ alt kümesi ve sabit bir $\epsilon_1 \in \{0, 1\}$ vardır ki

$$\forall x \in X_2 \text{ için } A_1 \in \mathcal{R}_x, \quad f_x(A_1) = \epsilon_1$$

gerçekleşir. Şimdi yukarıdaki sonucu, herbiri $n - 1$ üyeli olan $\mathcal{R}_x(1) = \mathcal{R}_x - \{A_1\}$ aileleri ve ikişerli ayrık $B(f_x, \mathcal{R}_x(1)) (x \in X_2)$ esas civarlar için ikinci kez yinelersek bu kez uygun bir sayılamaz sonsuz elemanlı $X_3 \subseteq X_2$, sabit bir $A_2 \subseteq X$ alt kümeleri ve sabit bir $\epsilon_2 \in \{0, 1\}$ buluruz ki

$$\forall x \in X_3 \text{ için } A_2 \in \mathcal{R}_x(1), \quad f_x(A_2) = \epsilon_2$$

gerçekleşir. Bu işlem üst üste n kez yinelenirse, sonuçta

$$\forall x, y \in X_{n+1} \text{ için } B(f_x, \mathcal{R}_x) = B(f_y, \mathcal{R}_y)$$

gerçeklenecek biçimde sayılamaz sonsuz elemanlı bir $X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_0$ alt kümesinin varlığı sonucunu elde ederek bir çelişkiye varırdık. Demek ki F^* alt uzayı derlemsel Hausdorff olamaz. F^* alt uzayı F 'nin kapalı bir kümesi olduğundan normal ve Hausdorffdur. Bu alt uzay üstelik metakompakttır, çünkü herhangi bir $\mathcal{U}$ açık örtülüğü verildiğinde, herbir $x \in X$ için

$$W_x = \{f \in F^* : f(\{x\}) = 1\} \quad \text{ve} \quad f_x \in \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}$$

gerçekleyen açık kümeler yardımıyla tanımlanan

$$\mathcal{W} = \{W_x \cap U_x : x \in X\} \cup \{\{f\} : f \in F_1\}$$

açık incelmesinin noktasal sonlu olduğu kolayca görülecektir. Demek ki bu normal uzayda yerel sonlu bir açık incelmesi tanımlanamayan en az bir noktasal-sonlu açık örtülüş vardır.

9) Heath'in örneği

Robert Heath, eğer bir Q -kümesi varsa, metriklenemeyen bir metakompakt normal Moore uzayı tanımlanabildiğini aşağıdaki örnekle kanıtladı. Varsayalım ki gerçel sayıların E gibi bir Q -kümesi varolsun. $X = (\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cup (E \times \{0\})$ kümesi üzerinde, $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ kümesinin tüm noktalarının yalıtılmış nokta olduğu ve herhangi bir $x \in E$ için

$$G_n((x, 0)) = \{(y_1, y_2) \in X : y_2 = |y_1 - x| \leq \frac{1}{n}\}$$

kümelerinin $(x, 0)$ noktası için esas civar olduğu sıfır boyutlu birinci sayılabilir Hausdorff uzayını tanımlayalım. Son tanımlanan esas civar, $(x, 0)$ noktasından geçen ve eğimleri $\mp \frac{\pi}{4}$ olan doğruların üst yarı düzlemde kalan ve uzunlukları $\sqrt{2}/n$ olan parçalarıdır. Ayrılabilir olmayan bu uzayda $E \times \{0\}$ ve $\mathbb{R} \times [\epsilon_0, \infty)$ kapalı-kesikli kümeleri sayılamaz sonsuz noktalıdır.

$$\mathcal{G}_n = \{\mathbb{R} \times (0, \infty)\} \cup \{G_n((x, 0)) : x \in E\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

açık örtülüşleri dizisi yardımıyla bu uzayın bir Moore uzayı olduğu kolayca gözlenir. Ayrıca esas civarlarla yapılan herhangi bir örtülüşte herbir nokta en fazla üç esas civara ait olabilir. O halde bu Moore uzayı metakompakttır. Bu uzayda $E \times \{0\}$ 'ın iki ayrık kümesinin iki ayrık açık küme tarafından kapsandığı, tıpkı NM düzlemindeki kanıtlamaya benzer biçimde yapılır. Birisi $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ötekisi ise $E \times \{0\}$ tarafından kapsanan iki ayrık kapalı kümenin birincisi kendisi, ikincisi ise, her noktasının birinci ile ayrık olan esas civarlarının birleşim kümelerince ayrılır. O halde bu sıfır boyutlu Moore uzayı normaldir. Bu uzay metriklenemez çünkü derlemsel Hausdorff değildir. Gerçekten $x \neq y (x, y \in E)$ için

$$G_{n_x}((x, 0)) \cap G_{n_y}((y, 0)) = \emptyset$$

gerçeklenecek biçimde $G_{n_x}((x, 0))$ esas civarları tanımlı olsaydı, öncelikle, E sayılamaz sonsuz noktalı olduğu için, uygun bir sayılamaz sonsuz elemanlı $E_0 \subseteq E$ alt kümesi ve sabit bir n_0 doğal sayısı yardımıyla, her bir $x \in E_0$ için $n_x = n_0$ gerçekleşirdi. O halde $x, y \in E_0$ ve $x \neq y$ ise özellikle $y \notin]x - \frac{1}{n_0}, x + \frac{1}{n_0}[$ ve dolayısıyla

$$\frac{1}{n_0} \leq |x - y|$$

gerçekleşirdi. O halde özellikle uygun bir k_0 tam sayısı yardımıyla sayılamaz sonsuz elemanlı $E_0 \cap [k_0, k_0 + 1[$ kesişim kümesindeki eleman çiftleri için bu son koşul gerçekleşirdi. Bu ise ünlü Bolzano & Weierstrass teoremi nedeniyle kesinkes olanaklıdır. Bu nedenle $E \times \{0\}$ kapalı-kesikli kümesinin elemanlarını ikiye ayrılmaz esas civarlarla ayıramayız. ZFS içinde verilmiş bu nitelikte bir örnek yoktur.

10) Tümüyle düzenli olmayan düzenli uzaylar: Tikhonov Burgacı ve

Jones Örneği

Bu nitelikteki ilk uzayı, Tikhonov kalaslarının erkin toplamının bir bölüm uzayı olarak, dahiyane bir yöntemle, 1930 yılında Tikhonov tanımlamıştır. Bu uzaya günümüzde **Tikhonov Burgacı** denir. Bu, pek çok örneği sonra tanımlanacak olan Burgaç'ların ilk örneğidir. Tikhonov Burgacı için Dugundji, Bölüm VII, 7, örnek 3'e bakılmalıdır, Tikhonov'unkine benzeyen bir yöntemle fakat daha kolay bir biçimde benzer nitelikte bir başka uzayı 1972 yılında F.Burton Jones tanımlamıştır. Şimdi, bir **burgaç**(corcscrew) örneği olan bu yalın örneği görelim. X normal olmayan düzenli bir Hausdorff uzayı (sözelimi $\mathbb{R}_a^1 \times \mathbb{R}_a^1$ uzayı) olsun. O halde bu uzayda ayrık açıkla ayrılmayan ve dolayısıyla ikisi de boştan farklı olan H ve K gibi iki ayrık kapalı küme vardır. Şimdi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X \times \{n\}) = X \times \mathbb{N}$$

erkin toplamı üzerinde, herbir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\forall x \in K \quad \text{için} \quad (x, 2n - 1) \sim (x, 2n)$$

$$\forall x \in H \quad \text{için} \quad (x, 2n) \sim (x, 2n + 1)$$

$$\forall x \in X - (K \cup H) \quad \text{için} \quad (x, n) \sim (x, n)$$

biçiminde bir eşdeğerlik bağıntısının belirlediği bölüm uzayını göz önüne alalım. Bu bölüm uzayının noktalarını alışlageldiği gibi (x, n) işaretiyle değil (x, n) ile göstereyim. $H_n = H \times \{n\}$ ve $K_n = K \times \{n\}$ yazılırsa bu bölüm uzayında $K_{2n-1} = K_{2n}$ ve $H_{2n} = H_{2n+1}$ gerçekleşir ve herbir $X_n = X \times \{n\}$ alt kümesi ise bu bölüm uzayında kapalı olur. Şimdi ω elemanını bu bölüm uzayına ekleyelim ve esas civarlarını

$$B_n(\omega) = \sum_{k \geq n} (X \times \{k\}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlayalım. Bu tanım sonrası

$$Y = (X \times \mathbb{N}) \cup \{\omega\}$$

uzayının düzenli ve Hausdorff olduğu kolayca görülür. Buna karşılık bu uzay tümüyle düzenli değildir, çünkü

$$f(\omega) = 0, f(X_1) = 1$$

gerçekleyen bir f Urysohn fonksiyonu bu uzayda tanımlanamaz. Bunu gösterebilmek için aşağıdaki kavramı tanımlayıp ardından gelen önemli gözlemi yapmalıyız: Herhangi bir X topolojik uzayında boştan farklı bir K kapalı kümesiyle ayrık olan boştan farklı bir H kapalı kümesine, ancak ve yalnız, H kümesini kapsayan her bir G açık kümesi için $\overline{G} \cap K \neq \emptyset$ koşulu gerçekleşiyorsa K 'nın **güçlü bir yakını** (a strong relative) denir. Normal olamayan bir topolojik uzayda birbirlerinin güçlü yakını olan ayrık ve kapalı bir küme çiftinin var olacağı apaçıktır. Dolayısıyla Y uzayının tanımında kullanılan X uzayının H ve K ayrık kapalı küme çiftinin ve dolayısıyla her bir $n \in \mathbb{N}$ için H_n ve K_n kümelerinin birbirlerinin güçlü yakınları oldukları anlaşılır. Şimdi Bergman ve Jones ikilisine ait olan gözlemimiz şudur: Eğer H 'nın bir H_0 kapalı alt kümesi K 'nın güçlü bir yakını ise, H_0 kümesini kapsayan herhangi bir G açık kümesi için $\overline{G} \cap K$ kapalı kümesi de H 'nın güçlü bir yakınıdır, çünkü aksi halde $H_0 \subseteq G_0$ gerçekleyen uygun bir G_0 açık kümesi ve $\overline{G_0} \cap K \subseteq W_0$ gerçekleyen uygun bir W_0 açık kümesi için $H \cap \overline{W_0} = \emptyset$ olur ve sonuçta

$$\emptyset \neq \overline{G_0 - \overline{W_0}} \cap K \subseteq (\overline{G_0} \cap K) - \text{iç} \overline{W_0} = \emptyset$$

çelişkisi elde edilirdi. Şimdi artık yukarıdaki koşulu gerçekleyen bir f Urysohn fonksiyonunun varlığı varsayımının nasıl bir çelişkiye yol açacağını gözleyebiliriz. Önce $[0, 1]$ uzayında

$$r_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \quad , \quad G_n = [0, r_n[$$

artan rasyonel sayılarını ve açık kümelerini tanımlayalım. Apaçıktır ki her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{-1}(\overline{G_n}) \subseteq f^{-1}(G_{n+1})$ gerçekleşir. $\omega \in f^{-1}(G_1)$ olduğundan $B_m(\omega) \subseteq f^{-1}(G_1)$ gerçekleşecek biçimde bir m doğal sayısı ve dolayısıyla $H_{2n} \subseteq f^{-1}(G_1)$ gerçekleşecek biçimde bir n doğal sayısı vardır. O halde yukarıdaki gözlem nedeniyle öncelikle $K_{2n} \cap \overline{f^{-1}(G_1)}$ kapalı kümesi ve dolayısıyla onu kapsayan $K_{2n} \cap f^{-1}(\overline{G_1})$ kümesi H_{2n} 'nin güçlü bir yakınıdır ve dolayısıyla kolayca gözleneceği gibi $K_{2n-1} \cap f^{-1}(\overline{G_1})$ kümesi H_{2n-1} kümesinin güçlü bir yakınıdır. Oysa $K_{2n-1} \cap f^{-1}(\overline{G_1}) \subseteq f^{-1}(G_2)$ nedeniyle, bu kez $H_{2n-1} \cap f^{-1}(\overline{G_2})$ kapalı kümesi K_{2n-1} kümesinin güçlü bir yakınıdır. O halde $K_{2n-1} \cap f^{-1}(\overline{G_3})$ kümesi H_{2n-2} 'nin güçlü bir yakınıdır, vb.. Böylelikle, zorunlu olarak birbiri ardışına süren bu sonuçların ardından bir çelişkiye ulaşılır, çünkü varsayım gereği f Urysohn fonksiyonu

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad X_1 \cap f^{-1}(\overline{G_n}) = \emptyset$$

gerçeklemektedir. Demek ki Y uzayında ω noktası ile X_1 kapalı kümesini ayıran bir Urysohn fonksiyonu tanımlanamaz.

Bölüm üzerine Notlar:

Ordinal sayı topolojileri, Tikhonov ve Dieudonne kalasları, NM düzlemi gibi klasik örnekler ve R.Sorgenfrey tarafından tanımlanan $\mathbb{R}_a^1$ ve $\mathbb{R}_a^2$ topolojileri için Steen & Seebach ikilisinin ünlü ve yararlı kitabına başvurulabilir. Karşı örnek uzayı tanımlama konusundaki olağanüstü yeteneği ile tanınan çağdaş topolojinin yaşayan en büyük bir iki dehasından birisi sayılan Marry Ellen Rudin, 1970 yılında topolojinin bilinen ilk **Dowker uzayı** örneğini Nice'deki Uluslararası Matematik Kongresinde sunmuştur. Bu olağanüstü uzayın tanımı ve özellikleri için [Rud 2] makalesine, onun bu bölümde incelenen karşı örnek uzayı için ise [Rud 1] makalesine başvurulmalıdır. Bing'in ünlü karşı örnek uzayı, onun ünlü 1951 makalesinde yer alır ve alfabetik sıralamayla verilen örnekler arasında, Örnek G başlığını taşıdığı için topoloji literatüründe **G uzayı** olarak da bilinir. Micheal ve Heath'in örnekleri ise sırasıyla, onların daha önce sözü edilen [Mic] ve [Hea] makalelerinde tanımlanmıştır. Son örneği F.B.Jones 1973 de yapılan bir topoloji konferansında sunmuştur, bkz.[Jon 3]. Bu konferansta sunulan makalelerin oluşturduğu kitapta, ayrıca R.Hodel'in metriklenebilme teorisinin belirli bir dönemi üstüne yararlı ve uzun derlemesi [Hod] yer almaktadır.

XI.Bulgular

Bu bölümde, bu çalışmada kanıtlanan belli başlı metriklenebilme teoremleri toplu olarak yer almaktadır. Ayrıca, genel topolojinin matematik mantıkla iç içe geçişini ilk açığa vuran tarihsel Silver & Rothberger teoremi de önemli bir bulgu olarak bu bölümde yer almaktadır.

Aleksandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoremi:

Aşağıdaki önermeler bir X uzayın için eşdeğerdir:

- i) X sözdemetriklenebilirdir.
- ii) X uzayında normal bir açınım vardır.
- iii) X uzayında düzenli bir açınım vardır.

Moore Metriklenebilme Teoremi:

Aşağıdaki önermeler bir X uzayın için eşdeğerdir:

- i) X uzayın sözdemetriklenebilirdir.
- ii) X uzayında her $x \in X$ elemanı için $B_x = \{st^2(x, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesinin yerel taban olduğu bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımı vardır.
- iii) X uzayında güçlü bir açınım vardır.

Jones Metriklenebilme Teoremi:

Bir X uzayının sözdemetriklenebilir olabilmesi için gyk aşağıdaki koşulu gerçekleyen bir $\{\mathcal{G}_n\}_{n=1}^{\infty}$ açınımına sahip olmasıdır:

"Her tıkHz K alt kümesi için $B_K = \{st(K, \mathcal{G}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ailesi bu kümenin bir yerel tabanıdır."

Nagata & Smirnov Teoremi:

Bir X uzayının sözdemetriklenebilmesi için gyk σ -yerel sonlu bir tabana olan düzenli bir uzay olmasıdır.

Urysohn Metriklenebilme Teoremi:

İkinci sayılabilir her düzenli Hausdorff uzayın metriklenebilirdir.

Arhangelskii Metriklenebilme Teoremi:

Bir uzayın metriklenebilmesi için gyk σ -noktasal sonlu bir tabana sahip yetkin normal ve derlemsel normal bir Hausdorff uzayın olmasıdır.

Bing Metriklenebilme Teoremi:

Bir X Hausdorff uzayın için aşağıdakiler eşdeğerdir:

- i) X , metriklenebilirdir.
- ii) X , parakompakt bir Moore uzayıdır.
- iii) X , derlemsel normal bir Moore uzayıdır.
- iv) X , σ -kesikli bir tabana olan düzenli bir uzaydır.

Traylor Metriklenebilme Teoremi:

Ayrılabilir bir uzayın metriklenebilir olması için gyk metakompakt, normal bir Moore uzay olmasıdır.

Sneider Metriklenebilme Lemması:

Bir tıkHz uzayın metriklenebilmesi için gyk G_δ köşegenli olmasıdır.

Borges & Okuyama Metriklenebilme Teoremi:

Ancak ve yalnız G_δ köşegenli parakompakt, $z\Delta$ uzayları metriklenebilirdir.

Čech Teoremi:

Bir topolojik uzayın tam metriklenebilmesi için gyk metriklenebilir bir tam topolojik uzay olmasıdır.

Ceder Metriklenebilme Teoremi:

Ancak ve yalnız parakompakt G_δ köşegenli tam topolojik Hausdorff uzayları tam metriklenebilirdir.

Silver & Rothberger Teoremi:

Solovay kümeler teorisi modelinde, gerçel sayıların, $\aleph_0 < |E| < 2^{\aleph_0}$ gerçekleyen her E alt kümesi bir Q -kümesidir.

XII. Tartışma ve Sonuç

1923 yılında kanıtlanan ilk metriklenebilme teoremi olan Alexandroff & Urysohn Metriklenebilme Teoreminden bu yana, metriklenebilme konusunda pek çok karakterizasyon verilmiştir. Bunların herbiri metriklenebilmeyi değişik topolojik özellikler yoluyla karakterize ederler. Biz bu çalışmada bunlar arasından 12 tanesini ayrıntılı bir biçimde ele alıp kanıtladık. Yakın dönemde, Collins ve Roscoe ikilisi tarafından bulunan ilginç bir karakterizasyon için, bu ikilinin Proc.Amer.Math.Soc.**90**(1984), 631-640'de yayımlanan makalesine bakılmalıdır. Bu yetenekli iki genç İngiliz matematikçi, A.H.Stone'dan 35 yıl sonra metriklenebilme konusunda yeni ve ilginç bir yaklaşımın başlatıcısı oldular. Aslında metriklenebilme konusundaki her önemli karakterizasyon, günümüzde adına **Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar**(Generalized Metric Spaces) denilen uzayların tanımlanmasına ve bu karakterizasyonlardaki belirgin topolojik özelliklerin genelleştirilip ya da soyutlaştırılıp bağımsız bir biçimde incelenmesine yol açmıştır. Örneğin her sözdemetriklenebilen uzayın σ -yerel sonlu ve dolayısıyla σ -kapanış koruyan bir tabanı vardır. Günümüzde σ -kapanış koruyan bir tabana sahip olabilen topolojik uzaylara M_1 -uzayı denilmektedir. Buna karşın her kapalı K kümesine karşılık

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n(K)}$$

koşulu gerçekleşecek biçimde bir $\{G_n(K)\}_{n=1}^{\infty}$ açık kümeler dizisinin var olduğu ve üstelik

$$K_1 \subseteq K_2 \quad \text{ise} \quad G_n(K_1) \subseteq G_n(K_2) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

koşulunun gerçekleştiği bir topolojik uzaya ise M_3 -uzayı ya da **katmanlanabilir uzay** (stratifiable space) denir. Bu uzayları 1961 yılında Jack Ceder tanımlamıştır. Katmanlanabilir uzayların parakompakt olduğu, ancak ve yalnız katmanlanabilir $z\Delta$ uzaylarının metriklenebilir olduğu ve ayrıca metrik uzayların yalnız kendilerinin değil kapalı ve sürekli fonksiyon altındaki görüntülerinin de M_1 -uzayı olduğu bilinmektedir. Buna karşın, örneğin, katmanlanabilir uzayların M_1 -uzayı oldukları konusundaki öngörünün kırk yıldır doğruluğu ya da yanlışlığı henüz kanıtlanabilmiş değildir. Bir başka önemli genelleştirilmiş metrik uzay türü **bakışılabilir** ya da **simetriklenebilir** uzaylardır. X kümesi üzerinde yalnızca

$$d(x, y) = 0 \quad \text{ise} \quad x = y, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

koşullarını gerçekleyen bir d fonksiyonuna **simetrik** denir. Üçgen eşitsizliğinin yokluğu nedeniyle $S_d(x, \epsilon)$ kümelerinin açık oluşu güvence altında değildir. Bir X topolojik uzayına ancak ve yalnız, X üzerinde tanımlı uygun bir d simetrik'i sayesinde, her $x \in G$ için $S_d(x, \epsilon) \subseteq G$ kapsaması gerçekleşecek biçimde bir pozitif ϵ sayısının var olması koşulunu gerçekleyen tüm G alt kümelerinin ailesi X üzerindeki topolojiyle çakışıyorsa **simetriklenebilir** uzay denir. ZFS aksiyomatik kümeler teorisi modelinde, simetriklenebilir ve kalıtımsal Lindelöf olup, kalıtımsal ayrılabilir

olmayan düzenli bir Hausdorff uzayının varlığı sorusu olağanüstü zorlu ve uğraştırıcı bir başka soru olmuştur. Bu soruyu tutarlılık kanıtlamaları verilmiş bir aksiyomatik kümeler teorisi modelinde, 1987 yılında Rus matematikçi Dmitri Shakmatov olumlu olarak çözmüştür.

Genelleştirilmiş metrik uzaylara ilişkin pek çok sonuç ve problem konusunda, Gary Gruenhage tarafından yazılan ve K.Kunen & J.Vaughan ikilisinin editörlüğünü yaptığı **Handbook of Set-Theoretic Topology** kitabının 80 sayfalık kapsamlı onuncu bölümüne başvurulmalıdır. Yazar aynı konunun en yeni gelişmelerini ise M.Hušek & J. van Mill ikilisinin editörlüğünü yaptığı **Recent Progress in General Topology** kitabının yedinci bölümünde anlatmayı sürdürmektedir. Kısacası metriklenebilme teorisi etkinlik ve canlılığını günümüzde de sürdürmektedir.



XI.Kaynaklar

Kitaplar

- [1] DUGUNDJI J., **Topology**, Allyn & Bacon, 1966.
- [2] ENGELKING R., **General Topology**, Holdermann Verlag, 1989.
- [3] HUŠEK M. & van MILL J.(Editörler), **Recent Progress in General Topology**, North Holland, 1992.
- [4] KUNEN K. & VAUGHAN J. (Editörler), **Handbook of Set-Theoretic Topology**, North Holland, 1984.
- [5] LEFSCHETZ S., **Algebraic Topology**, American Mathematical Society Collogium Publications 27, 1942.
- [6] STEEN L.A. & SEEBACH J.A., **Counterexamples in Topology**, Springer Verlag, 1970; (Dover Publications, 1995).
- [7] TUKEY J., **Convergence and Uniformity in Topology**, Princeton University Press, 1940.
- [8] WILLARD S., **General Topology**, Addison-Wesley, 1970.

Makaleler

- [9][Ale] ALEXANDROFF, P.S.
Sur les ensembles de la première classe et les ensembles abstraits, Comptes Rendus Acad. Paris **178**(1924), 185-187.
- [10][AIUr] ALEXANDROFF, P.S., URYSOHN P.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe(L) soit une classe(D), Comptes Rendus Acad. Paris **177**(1923), 1274-1276.
- [11][ArDu] ARENS R., DUGUNDJI J.
Remark on the concept of compactness, Portugal Math. **9**(1950), 141-143.
- [12][Arh] ARHANGELSKII A.
Some metrization theorems, Uspehi Mat. Nauk **18**(1963), 139-145.(Rusça)

- [13][Aul] AULL Ch.E.
Topological spaces with a σ -point finite base, Proc.Amer.Math.Soc. **29**(1971), 411-416.
- [14][Bin 1] BING R.H.
Metrization of topological spaces, Canadian J.Math. **3**(1951), 175-186.
- [15][Bin 2] BING R.H.
A translation of the normal Moore space conjecture, Proc.Amer.Math.Soc. **16**(1965), 612-619.
- [16][Bor] BORGES C.
On stratifiable spaces, Pacific J.Math. **17**(1966), 1-16.
- [17][Bur] BURKE D.
The normal Moore space problem, Texas Tech.University, Mathematics Series, Visiting Scholars Lectures, **15**(1988), 1-14.
- [18][Čec] ČECH E.
On bicomact spaces, Annals of Math. **38**(1937), 823-844.
- [19][Ced] CEDER J.G.
Some generalization of metric spaces, Pacific J.Math. **11**(1961), 105-125.
- [20][Cha] CHABER J.
Conditions which imply compactness in countably compact spaces, Bull.Acad. Pol.Sci.Sèr.Math. **24**(1976), 993-998.
- [21][Die] DIEUDONNE J.A.
Une généralisation des espaces compacts, J.Math.Pures Appl. **23**(1944), 65-76.
- [22][Fro] FROLIK Z.
Generalization of the G_δ -property of complete metric spaces, Czech Math.J. **10**(1960), 255-257.
- [23][Hea] HEATH R.W.
Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces, Canadian J.Math. **16**(1964), 763-770.
- [24][Hod] HODEL R.E.
Some results in metrization theory, 1950-1972, Lecture Notes in Mathematics, vol.**375**, Springer Verlag, 120-136.
- [25][Jon 1] JONES F.B.
Concerning normal and completely normal spaces, Bull.Amer.Math.Soc. **43**(1937), 671-677.

- [26][Jon 2] JONES F.B.
R.L.Moore's axiom 1 and metrization, Proc.Amer.Math.Soc. 9(1958), 487.
- [27][Jon 3] JONES F.B.
Hereditarily separable, non-completely regular spaces, Lecture Notes in Mathematics, vol.375, Springer Verlag, 149-152.
- [28][Mic 1] MICHEAL E.
A note on paracompact spaces, Proc.Amer.Math.Soc. 4(1953), 831-838.
- [29][Mic 2] MICHEAL E.
Point-finite and locally finite coverings, Canadian J.Math. 7(1955), 275-279.
- [30][Mor] MORITA K.
Point-finite coverings and the star-finite property, Math.Japonicae, 1(1948), 60-68.
- [31][Moo] MOOR R.L.
A set of axioms for plane analysis situs, Fund.Math. 25(1935), 13-28.
- [32][Nag 1] NAGAMI K.
Paracompactness and screenability, Nagoya Math.J. 8(1955), 83-88.
- [33][Nag 2] NAGATA Jun-iti
On necessary and sufficient condition of metrizability, J.Inst.Polytech.Osaka City Univ. Ser A, 1(1950), 93-100.
- [34][Oku] OKUYAMA A.
On metrizability of M-spaces, Proc.Japan Acad. 40(1964), 176-179.
- [35][Rud 1] RUDIN M.E.
A separable normal nonparacompact space, Proc.Amer.Math.Soc. 7(1956), 940-941.
- [36][Rud 2] RUDIN M.E.
A normal space X for which $X \times I$ is not normal, Fund.Math. 73(1971), 179-186.
- [37][Sco] SCOTT B.M.
Pseudocompact, metacompact spaces are compact, Topology Proc. 4(1979), 577-587.
- [38][Smi] SMIRNOV Ju.M.
On metrization of topological spaces, Uspehi Mat.Nauk 6(1951), 100-111.

- [39][Sne] ŠNEIDER V.E.
Continuous images of Suslin and Borel sets, Metrization theorems, Dokl.Acad.Nauk SSSR, **50**(1945), 77-79.(Rusça)
- [40][Sto] STONE A.H.
Paracompactness and product spaces, Bull.Amer.Math.Soc. **54**(1948), 977-982.
- [41][Tal] TALL F.D.
Set-theoretic consistency results and topological theorems concerning the normal Moore space conjecture and related problems, Dissertationes Math.CXLVIII, 1977.
- [42][Tra] TRAYLOR R.D.
On normality, pointwise paracompactness and the metrization question, Topology Conference, Arizona State Univ.Tempe, Arizona, (1968)286-289.
- [43][Wat] WATSON S.W.
Pseudocompact metacompact spaces are compact, Proc.Amer.Math.Soc. **81**(1981), 151-152.
- [44][WiWo] WICKE H.H., WORRELL JR. J.M.
Point-countability and compactness, Proc.Amer.Math.Soc. **55**(1976), 427-431.

Özgeçmiş

03.02.1973 tarihinde Bulgaristan'ın Silistre kentinde doğdum. İlk ve Orta okul tahsilimi Bulgaristan'ın Varna Matematik Lisesi'nde tamamladım. Lise 1'i aynı okulda okuduktan sonra 1989 yılında ailemle birlikte İstanbul'a yerleştim. Liseyi İstanbul Çemberlitaş Kız Lisesinde bitirdim ve 1991 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 1995 yılında Bölüm Birincisi olarak mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimime başladım. Aralık 1995 tarihinde İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak atandım ve halen aynı bölümde görevimi sürdürmekteyim.



Dizin

A

açınım,27
 düzenli,27
 güçlü,27
 normal,27
açınır uzay,27
Aleksandroff & Urysohn Metr.Teo.,30
Aleksandroff Teo.,45
Arens & Dugundji Teo.,19
Arhangelskii Metr.Teo.,31
Aull Lemmaları,36
ayrık aile,34

B

barisantrik incelme,6
Bing,
 Metr.Teo.,38
 teoremi,18,28,52
 uzayı,66
Borges & Okuyama Metr.Teo.,44
Bukovsky & Jech Teo.,56
bütünüyle normal uzay,23

C

Čech,
 anlamında tam uzay,44
 Stone & Čech tıkkızlaştırması,5
 teoremi,47
Ceder,
 Lemması,52
 Metr.Teo.,49
 & Nagata Teo.,47
Chaber Teo.,44

D

değerlendirme fonksiyonu,5
delikli Tikhonov Kalası,60
derece,6
derlemsel,
 Hausdorff uzayı,51

normal uzay,12

Dieudonne Kalası,61
Dowker uzayı,10
Dugundji,
 Arens & Dugundji Teo.,19
düzenli açınım,bk.açınım
düzenli kapalı küme,7
düzgün taban,56

F

Frolik Teo.,45

G

güçlü açınım,27

H

Hausdorff Öngörüsü,56
Heath,
 'in Örneği,69
 teoremi,53,56

İ

incelme,
 barisantrik,6
 tam,6
 yıldız,6

J

Jech,
 Bukovski & Jech Teo.,56
Jones,
 Lemması,52
 Metr.Teo.,32
 Örneği,70

K

kapanış korur,2
karşı örnek uzayı,59
kesikli aile,2
köşegen,43

L

Lefschetz Teo.,8

M

metakompakt uzay,12

metriklenebilme,2

Micheal,

& Nagami Teo.,41

'in Örneği,68

teoremi,17

Moore,

düzlemi,bk. Niemytzki & Moore

düzlemi,62

Metr.Teo.,31

uzayı,38

Morita Teo.,9

N

Nagami,

Micheal & Nagami Teo.,41

Nagata,

& Smirnov Teo.,34

Ceder & Nagata Teo.,47

Niemytzki & Moore düzlemi,62

noktasal sonlu aile,2

normal açık örtülüşler dizisi,7

normal açınım,27

O, Ö

Okuyama,

Borges & Okuyama Metr.Teo.,44

Ordinal Sayı Topolojileri,59

örtülüş özelliği,6

P

parakompakt uzay,23

R

Reed & Zenor Teo.,57

Rothberger,

Silver & Rothberger Teo.,56

Rudin örneği,64

S

σ -yerel sonlu aile,12

sayılabilir zincir koşulu,50

Scott & Watson Teo.,22

sıfır kümesi,3

Sierpinski Teo.,56

Silver & Rothberger Teo.,56

Sneider Metr. Teo.,43

Solovay Lemması,56

Sorgenfrey topolojileri,63

souslin sayısı,4

sözdemetrik,1

sözdemetriklenme,2

Stone,

-Čech tıkızlaştırması,5

teoremi,13

T

tam büzülme,7

tam incelme,7

tam metriklenebilir uzay,43

tam topolojik uzay,44

tam yığılma noktası,6

tıkızlaştırma uzayı(tıkızlaştırma),4

tıkızlık,6

Tikhonov,

Kalası,60

Burgacı,70

topolojik manifold,57

Traylor Metr.Teo.,42

Tukey Teo.,13

tümleyen sıfır kümesi,3

U

Urysohn Metr.Teo.,35

uzanım sayısı,4

W

Watson,

Scott & Watson Teo.,22

Wicke & Worrell Teo.,20

Y

yerel sonlu aile,2

yıldızıl küme,6

yıldızıl sonlu örtülüş,6

Z

$z\Delta$ -uzayı,43

Zayıf Kontinuum Varsayımı,57

Zenor,

Reed & Zenor Teo.,57