



**k -GAMMA FONKSİYONUNU İÇEREN YENİ BİR OPERATÖRÜN
YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ**

Seda DEMİR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

AĞUSTOS 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seda DEMİR

03.08.2022

k-GAMMA FONKSİYONUNU İÇEREN YENİ BİR OPERATÖRÜN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Seda DEMİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2022

ÖZET

Bu tezde 5 kısım bulunmaktadır. Birinci kısımda giriş bölümü verilmiştir. İkinci kısımda yaklaşım teorisinde yer alan bazı temel tanımlara ve teoremlere ayrılmıştır. Üçüncü kısımda *k*-Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni tip Gamma operatörü tanımı ve yaklaşım özellikleri sunulmuştur. Ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım hızı ve noktasal yaklaşım incelenmiştir. Dördüncü kısımda sayısal örnekler verilmiştir. Beşinci kısım sonuç bölümüne ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : *k*-Gamma fonksiyonu, Gamma fonksiyonu, Voronokaya
teoremi, Ağırlıklı yaklaşım
Sayfa Adedi : 53
Danışman : Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

THE APPROXIMATION PROPERTIES OF A NEW OPERATOR WHICH INVOLVES
 k -GAMMA FUNCTION

(M. Sc. Thesis)

Seda DEMİR

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2022

ABSTRACT

There are 5 parts in this thesis. The first part is the introduction part is given. In the second part, a few basic definitions and theorems in theory of approximations are divided. In the third part, the definition of the new type of Gamma operator defined is with the help of k -Gamma function and its approximation properties are presented. Weighted approximation, rate of convergence and pointwise estimation are examined. In the fourth part, numerical examples are given. The fifth part is devoted to the conclusion.

Science Code : 20406
Keywords : k - Gamma function, Gamma function, Voronovskaya theorem,
Weighted approximation
Number of pages : 53
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamın her aşamasında ve lisansüstü eğitimimin başından beri tüm bilgi birikimiyle bana yardımcı olan saygıdeğer danışmanım Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ 'e bana ayırdığı değerli zamanı için teşekkürü bir borç bilirim. Yardıma ve desteğine ihtiyaç duyduğumda desteğini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Bayram ÇEKİM 'e, eğitim hayatım boyunca karşılaştığım her türlü zor durumda maddi, manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili ailem ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın 2210-A genel yurt içi yüksek lisans burs programı ile maddi açıdan desteklenmesine olanak sağlayan TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR ve TEOREMLER	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar	3
2.2. Korovkin Teoremi	7
2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri.....	11
2.4. Önemli Formül, Eşitsizlikler ve Tanımlar	14
2.5. Gamma Fonksiyonu.....	16
2.6. Gamma Operatörü ve Genelleştirmeleri	17
3. k - GAMMA FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN GAMMA OPERATÖRÜ.....	21
3.1. Operatörün Kurulması	21
3.2. Voronovskaya Teoremi	33
3.3. Ağırlıklı Yaklaşım.....	35
3.4. Yaklaşım Hızı	37
3.5. Noktasal Yaklaşım	41
4. SAYISAL ÖRNEKLER.....	47
5. SONUÇ.....	49
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ	53

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 4.1.	Sırasıyla $k = \frac{1}{3}, 1, 3, 30$ için S_p^* operatörünün grafiği ve $p = 10$ olarak sabitlenmiştir. ($k = \frac{1}{3}$ için mavi, $k = 1$ için turuncu, $k = 3$ için yeşil, $k = 30$ için kırmızı, $\varphi(y)$ için mor gösterilmiştir).	47
Şekil 4.2.	Sırasıyla $p = 10, 20, 60$ için S_p^* operatörünün grafiği ve $k = 3$ olarak sabitlenmiştir. ($p = 10$ için mavi, $p = 20$ için turuncu, $p = 60$ için yeşil, $\varphi(y)$ için kırmızı gösterilmiştir).....	47



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$S_p(\varphi; \mathbf{y})$	Klasik Gamma operatörü
$S_p^*(\varphi; \mathbf{y})$	Modifiye edilmiş Gamma operatörü
$\Gamma_k(z)$	k -Gamma fonksiyonu
$\mathbf{a}_z(\mathbf{h}), \psi_{\mathbf{y}, z}$	Polinom fonksiyonları
$\mathbf{d}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{I}})$	\mathbf{y} ve $\hat{\mathbf{I}}$ arasındaki uzaklık
$\ \varphi\ $	φ 'nin normu
$\ \varphi\ _{C_B^2(0, \infty)}$	$C_B^2(0, \infty)$ için φ fonksiyonun normu
N_φ	φ ye bağlı sabit
$\vartheta(\mathbf{y})$	\mathbb{R} de sürekli ağırlık fonksiyonu
$C(0, \infty)$	$(0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_\vartheta[0, \infty)$	$C[0, \infty)$ uzayının sınırlı ağırlıklı alt uzayı
$C_\vartheta[0, \infty)$	$B_\vartheta[0, \infty)$ uzayının sürekli ağırlıklı alt uzayı
$C_\vartheta^k[0, \infty)$	$C_\vartheta[0, \infty)$ uzayının ağırlıklı alt uzayı
$\omega_{\mathbf{y}_0}(\varphi, \delta)$	φ fonksiyonunun standart süreklilik modülü
$C_B(0, \infty)$	$(0, \infty)$ aralığındaki tüm sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayı
$C_B^2(0, \infty)$	2 kez türevi sürekli olan fonksiyon uzayı
$\omega(\varphi, \delta)$	Süreklilik modülü
$\omega_2(\varphi, \delta)$	İkinci dereceden süreklilik modülü
$\mathbf{K}_2^*(\varphi, \delta)$	Peetre \mathcal{K} - fonksiyoneli
$\tilde{\omega}_s(\varphi, \mathbf{y})$	Lipschitz tipi maksimum fonksiyonu
$\text{Lip}_N^{\alpha, \beta}(\mathbf{s})$	İki parametrelili Lipschitz fonksiyonlar uzayı

Kısaltmalar

Açıklamalar

Eş.	Eşitlik/Eşitsizlik
-----	--------------------

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi matematiksel analizin önemli konulardan biridir. Bu konu ile ilgilenen çoğu matematikçi tarafından Gamma operatörleri hakkında çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde de bu önemli operatörün k -Gamma yardımıyla tanımlanan yeni tip operatörü üzerinde durulmuştur. Bu yeni tanımlanan Gamma operatörü, sürekli fonksiyonlara daha iyi yaklaşım özelliği olduğunu göstermiştir. Bu özellik nümerik örnekler ile test edilmiş ve doğrulanmıştır.

Bu tez, beş kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısım olan giriş bölümü tez içindeki ana başlıkları ifade etmek amacıyla hazırlanmıştır.

İkinci kısım, tezde sıklıkla karşılaşılabilecek olan tanımlara, teoremlere, yaklaşım özellikleri ve ispatlarına, Gamma operatörü ve bazı genelleştirmelerine ayrılmıştır.

Üçüncü kısımda, k -Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni tip Gamma operatörü ifade edilmiştir. İlk olarak $S_p^*(\varphi; y)$ ile gösterilen bu operatörün Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Yaklaşım özellikleri tanıtılmıştır. Daha sonra ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım hızı ve noktasal yaklaşım incelenmiştir. Bu incelemeler sırasında süreklilik modülü, Peetre \mathcal{K} - fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar tercih edilmiştir.

Dördüncü kısımda yaklaşım özelliklerini sağladığını göstermek için sayısal örnekler verilmiş ve son kısım sonuç bölümüne ayrılmıştır.

2. TANIMLAR ve TEOREMLER

Burada, ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir. Bu tanımlar ve teoremler genel halde geçerli olduğu için çoğunda kaynak verilmemiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Lineer Uzay)

χ , boş olmayan bir küme ve K , reel veya karmaşık sayılar kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa χ ye K üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir [18].

- (i) $\chi, +$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani
 - (a) $\forall k, l \in \chi$ için $k + l \in \chi$ dir.
 - (b) $\forall k, l, m \in \chi$ için $k + (l + m) = (k + l) + m \in \chi$ dir.
 - (c) $\forall k \in \chi$ için $k + \theta = \theta + k = k$ olacak şekilde $\theta \in \chi$ vardır.
 - (d) $\forall k \in \chi$ için $k + (-k) = (-k) + k = \theta$ olacak şekilde $-k \in \chi$ vardır.
 - (e) $\forall k, l \in \chi$ için $k + l = l + k \in \chi$ dir.
- (ii) $k, l \in \chi$ ve $\lambda, \gamma \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
 - (a) $\lambda k \in \chi$ dir.
 - (b) $\lambda(k + l) = \lambda k + \lambda l$ dir.
 - (c) $(\lambda + \gamma)k = \lambda k + \gamma k$ dir.
 - (d) $1.k = k.1 = k$ dir. Burada 1, K 'nin birim elemanıdır.

2.1.2. Tanım ($C(0, \infty)$ Uzayı)

$(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C(0, \infty)$ ile gösterilmektedir [4].

2.1.3. Tanım ($C_B(0, \infty)$ Uzayı)

$(0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı tüm sınırlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B(0, \infty)$ ile gösterilmektedir [5].

2.1.4. Tanım ($C_B^2(0, \infty)$ Uzayı)

$(0, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez türevi sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B^2(0, \infty)$ ile gösterilmektedir ve tanımı

$$C_B^2(0, \infty) = \left\{ \varphi \in C_B(0, \infty) : \varphi', \varphi'' \in C_B(0, \infty) \right\} \quad (2.1)$$

şeklindedir [5].

2.1.5. Tanım (Norm)

χ , bir lineer uzay olsun. $\| \cdot \| : \chi \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun k 'deki değerini $\|k\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna χ üzerinde norm denir.

$$i) \|k\| \geq 0$$

$$ii) \|k\| = 0 \iff k = 0$$

$$iii) \|bk\| = |b| \|k\|$$

$$iv) \|k+l\| \leq \|k\| + \|l\|$$

Eğer bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir [18].

2.1.6. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B(0, \infty)}$ Normu)

$C_B(0, \infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B(0, \infty)}$ ile gösterilmektedir [8]. Aşağıdaki

şekilde tanımlanır:

$$\|\varphi\|_{C_B(0,\infty)} = \sup_{y \in (0,\infty)} |\varphi(y)|. \quad (2.2)$$

2.1.7. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)}$ Normu)

$C_B^2(0,\infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)}$ ile gösterilmektedir [8]. Aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|\varphi\|_{C_B^2(0,\infty)} = \|\varphi\|_{C_B(0,\infty)} + \|\varphi'\|_{C_B(0,\infty)} + \|\varphi''\|_{C_B(0,\infty)}. \quad (2.3)$$

2.1.8. Tanım (Düzenli Yakınsaklık)

(h_n) , $Y \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $n_0 \leq n$ ve her bir $y \in Y$ için $|h_n(y) - h(y)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağladığı en az bir n_0 sayısı varsa, (h_n) fonksiyon dizisinin h fonksiyonuna Y üzerinde düzenli yakınsaktır denir [4].

2.1.9. Tanım (Noktasal Süreklilik)

$B \subset \mathbb{R}$ ve $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $b \in B$ olsun. h fonksiyonu b noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|y - b| < \delta$ ise $|h(y) - h(b)| < \varepsilon$ dur [18].

2.1.10. Tanım (Düzenli Süreklilik)

$B \subset \mathbb{R}$ ve $h : B \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. h fonksiyonu B üzerinde düzenli sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|y - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall y, t \in B$ için $|h(y) - h(t)| < \varepsilon$ dur [18].

2.1.11. Tanım (Operatör)

X ve Y reel değerli fonksiyon uzayları olsun. $\chi : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir [27].

2.1.12. Tanım (Lineer Operatör)

X ve Y aynı M cismi üzerinde iki lineer uzay ve $\chi : X \rightarrow Y$ şeklinde tanımlı χ operatörü olsun. $\forall k, l \in X$ ve $\forall v, \gamma \in M$ için $\chi(vk + \gamma l) = v\chi(k) + \gamma\chi(l)$ eşitliğini sağlıyorsa, χ operatörüne X den Y 'ye bir lineer operatör denir [4].

2.1.13. Tanım (Pozitif Operatör)

X ve Y vektör uzayları ve $\chi : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. χ operatörünün y noktasındaki değeri $\chi_n(k; y)$ olarak gösterilir. X uzayından alınan $\forall k \geq 0$ fonksiyonu için $\chi_n(k; y) \geq 0$ ise χ operatörüne pozitif operatör denir [27].

2.1.14. Tanım (Lineer Pozitif Operatör)

Lineer operatörler kümesi içinde bir alt sınıf olan pozitif operatörler vardır. $X^+ = \{k \in X, k(y) \geq 0\}$ ve $Y^+ = \{l \in Y, l(y) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış χ lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir k fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise χ operatörüne lineer pozitif operatör denir [18].

2.1.1. Lemma

$\chi : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. $k, l \in X$ olmak üzere her t için $k(t) \leq l(t)$ iken $\chi(k(t); y) \leq \chi(l(t); y)$ dir ve buna χ lineer operatörünün monotonluk özelliği denir. Ayrıca χ 'nin monotonluk özelliğinden $|\chi(k; y)| \leq \chi(|k|; y)$ eşitsizliği sağlanır [18].

2.1.15. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Sınırlılık)

$(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ normlu uzaylar, $D(\chi) \subset X$ olmak üzere $\chi : D(\chi) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. $\forall y \in D(\chi)$ için $\|\chi y\|_2 \leq c \|y\|_1$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcutsa χ operatörüne sınırlı lineer operatör denir [4].

2.1.16. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Süreklilik)

X ve Y normlu uzaylar $D(\chi) \subset X$ olmak üzere $\chi : D(\chi) \rightarrow Y$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda χ sürekli olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır [4].

2.2. Korovkin Teoremi

$C[a, b]$ uzayı üzerinde tanımlanan bir $(\chi_n)_{n \geq 1}$ pozitif lineer operatör dizisinin bir yaklaşım süreci, “ yani; $[a, b]$ aralığı üzerinde her $h \in C[a, b]$ için $(\chi_n)(h) \Rightarrow h$ yakınsamasının $[a, b]$ üzerinde düzgün ”olup olmadığını gösteren yöntemdir.

2.2.1. Teorem

$h \in C[a, b]$ ve reel eksenin tamamında sınırlı $|h(y)| < N_h$ olsun. Eğer $\chi_n(h(k); y)$ pozitif ve lineer bir operatör dizisi $[a, b]$ aralığındaki her y için

$$(i) \quad \chi_n(1; y) \Rightarrow 1$$

$$(ii) \quad \chi_n(k; y) \Rightarrow y$$

$$(iii) \quad \chi_n(k^2; y) \Rightarrow y^2$$

koşullarını sağlıyorsa, $[a, b]$ de $\chi_n(h; y)$, h fonksiyonuna düzgün yakınsar [1].

İspat

$h \in C[a, b]$ olsun. Süreklilik tanımından dolayı

$$|k - y| < \delta \implies |h(k) - h(y)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. $|k - y| < \delta$ olduğundan ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|h(k) - h(y)| \leq |h(k)| + |h(y)| \leq 2N_h$$

gerçeklenir. Diğer taraftan

$$|k - y| \geq \delta \implies \frac{|k - y|}{\delta} \geq 1$$

olacağından $\frac{(k-y)^2}{\delta^2} \geq \frac{|k-y|}{\delta} \geq 1$ sağlanır.

$$|h(k) - h(y)| \leq 2N_h \leq 2N_h \frac{(k-y)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|k - y| < \delta \implies |h(k) - h(y)| < \varepsilon$$

ve

$$|k - y| \geq \delta \implies |h(k) - h(y)| \leq 2N_h \frac{(k-y)^2}{\delta^2}$$

dir. Bundan dolayı her $k, t, y \in [a, b]$ için

$$|h(k) - h(y)| \leq \varepsilon + 2N_h \frac{(k-y)^2}{\delta^2}$$

dir. $|k - y| > \delta$ ise $2N_h \frac{(k-y)^2}{\delta^2} > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik yine sağlanır. Eğer (i),

(ii) ve (iii) koşullarını sağlayan (χ_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_n(h(k); y) - h(y)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |\chi_n(h(k); y) - h(y)| &= |\chi_n(h(k); y) + \chi_n(h(y); y) - \chi_n(h(y); y) - h(y)| \\ &= |\chi_n((h(k) - h(y)); y) + h(y)(\chi_n(1; y) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$|\chi_n(h(k); y) - h(y)| \leq |\chi_n((h(k) - h(y)); y)| + |h(y)| |\chi_n(1; y) - 1|$$

olur. Diğer yandan lineer pozitif operatörlerin monoton artanlığından yani $h(k) - h(y) \leq |h(k) - h(y)|$ özelliğinden dolayı

$$|\chi_n((h(k) - h(y)); y)| \leq |\chi_n(|h(k) - h(y)|; y)|$$

elde edilir. Operatörün pozitif olmasından ve $|h(k) - h(y)| \geq 0$ eşitsizliğinden dolayı

$$|\chi_n(|h(k) - h(y)|; y)| = \chi_n(|h(k) - h(y)|; y)$$

dir. Bu durumda

$$|\chi_n(h(k); y) - h(y)| \leq \chi_n(|h(k) - h(y)|; y) + |h(y)| |\chi_n(1; y) - 1|$$

olduğu gösterilebilir ve

$$|\chi_n(h(k); y) - h(y)| \leq \chi_n(|h(k) - h(y)|; y) + N_h |\chi_n(1; y) - 1|$$

yazılabilir. (χ_n) operatörünün monoton artanlığından

$$|\chi_n(h(k); y) - h(y)| \leq \chi_n\left(\varepsilon + 2N_h \frac{(k-y)^2}{\delta^2}; y\right) + N_h |\chi_n(1; y) - 1|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \chi_n\left(\varepsilon + \frac{2N_h}{\delta^2}(k-y)^2; y\right) &= \chi_n(\varepsilon; y) + \chi_n\left(\frac{2N_h}{\delta^2}(k-y)^2; y\right) \\ &= \varepsilon \chi_n(1; y) + \frac{2N_h}{\delta^2} \chi_n(k^2 - 2yk + y^2; y) \\ &= \varepsilon(\chi_n(1; y) - 1) + \varepsilon + \frac{2N_h}{\delta^2} [(\chi_n(k^2; y) - y^2) + 2y^2 - 2y\chi_n(k; y) \\ &\quad + y^2\chi_n(1; y) - y^2] \\ &= \varepsilon(\chi_n(1; y) - 1) + \varepsilon + \frac{2N_h}{\delta^2} [(\chi_n(k^2; y) - y^2) - 2y(\chi_n(k; y) - y) \\ &\quad + y^2(\chi_n(1; y) - 1)] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} |\chi_n(h(k); y) - h(y)| &\leq \varepsilon(\chi_n(1; y)) + \varepsilon + N_h |\chi_n(1; y) - 1| \\ &\quad + \frac{2N_h}{\delta^2} [(\chi_n(k^2; y) - y^2) - 2y(\chi_n(k; y) - y) + y^2(\chi_n(1; y) - 1)] \end{aligned}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla $|\chi_n(h(k); y) - h(y)| \leq \varepsilon$ bulunur.

Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq y \leq b} |\chi_n(h(k); y) - h(y)| = 0$$

dır ve istenilen elde edilir. Verilen operatörün sadece 1, k ve k^2 ifadelerinin 1, y ve y^2 ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli olan bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememiz için yeterlidir.

Korovkin teoreminde $h_i(k) = k^i, i = 0, 1, 2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde, lineer pozitif operatörün sürekli bir fonksiyona yakınsaması kadar önemli olan bir diğer durumsa yakınsama hızıdır. Yakınsama hızını belirlemek için kullanılan önemli bir yöntemde süreklilik modülüdür.

2.3.17. Tanım (Süreklilik Modülü)

h , $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $k, l \in [a, b]$ olmak üzere $|k - l| \leq \delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta > 0$ için $|h(k) - h(l)|$ değerlerinin en küçük üst sınırına h fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$$\omega(h; \delta) = \sup_{|k-l| \leq \delta} |h(k) - h(l)|$$

şeklinde ifade edilir. $\omega(h; \delta)$, değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini ifade eder. ω , δ 'nın bir fonksiyonudur ve $\delta > 0$ için $\omega(h; \delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur. Süreklilik modülü fonksiyonu için aşağıdaki özellikler gerçekleşir [27].

2.3.2. Lemma

ω fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için $\omega(h; \delta_1) \leq \omega(h; \delta_2)$ dir [27].

İspat

$0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. Bu durumda $|k - l| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (k, l) sayı çiftlerinin kümesi $|k - l| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı düşünüldüğünde süreklilik modülünün tanımından dolayı $\omega(h; \delta_1) \leq \omega(h; \delta_2)$ yazılabilir.

2.3.3. Lemma

$t \in \mathbb{N}$ için $\omega(h; t\delta) \leq t\omega(h; \delta)$ dir [27].

İspat

$\omega(h; t\delta) = \sup_{\substack{|k-l| \leq t\delta \\ k, l \in [a, b]}} |h(k) - h(l)|$ eşitliğinde $k = l + tp$ alındığında, $t \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\omega(h; t\delta) = \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ k, l \in [a, b]}} |h(l + tp) - h(l)|$$

$$= \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ k, l \in [a, b]}} |h(l + tp) - h(l + (t-1)p) + h(l + (t-2)p) - \dots + h(l + p) - h(l)|$$

$$= \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ k, l \in [a, b]}} \left| \sum_{k=1}^t h(l + kp) - h(l + (k-1)p) \right|$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\omega(h; t\delta) \leq \sum_{k=1}^t \sup_{\substack{|h| \leq \delta \\ k, l \in [a, b]}} |h(l + kp) - h(l + (k-1)p)|$$

olur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı t tane olmasından

$$\omega(h; t\delta) \leq t\omega(h; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir.

2.3.4. Lemma

h fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(h; \delta) = 0$$

dır [27].

İspat

h fonksiyonu sürekli olduğundan süreklilik tanımı nedeniyle her $\varepsilon > 0$ için bir $\mu > 0$ vardır öyle ki $|k - l| < \mu$ olduğunda $|h(k) - h(l)| < \varepsilon$ dir. Süreklilik modülünde $\delta < \mu$ alındığında $\omega(h; \delta) < \varepsilon$ dir. Yani

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(h; \delta) = 0$$

olur.

2.3.5. Lemma

$\vartheta > 0$ reel sayısı için

$$\omega(h; \vartheta \delta) \leq (1 + \vartheta) \omega(h; \delta)$$

dır [27].

İspat

t , ϑ nın tam kısmı olsun. O takdirde $t \leq \vartheta < t + 1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliği ve Lemma 2.3.3 den

$$\omega(h; \vartheta \delta) \leq \omega(h; (t + 1) \delta)$$

$$\omega(h; (t + 1) \delta) \leq (t + 1) \omega(h; \delta) \leq (\vartheta + 1) \omega(h; \delta)$$

olur. Dolayısıyla

$$\omega(h; \vartheta \delta) < (\vartheta + 1) \omega(h; \delta)$$

dır. Böylelikle ispat tamamlanır.

2.3.6. Lemma

h fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı ise, her $k, l \in [a, b]$ için

$$|h(k) - h(l)| \leq \left(1 + \frac{|k-l|}{\delta}\right) \omega(h; \delta)$$

dır [27].

İspat

Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma 2.3.5 den

$$\begin{aligned} |h(k) - h(y)| &\leq \omega\left(h; \frac{|k-l|}{\delta} \delta\right) \\ &\leq \left(1 + \frac{|k-l|}{\delta}\right) \omega(h; \delta) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

2.4. Önemli Formül, Eşitsizlikler ve Tanımlar

2.4.2. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$p, q > 0$ reel sayıları ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $k = (c_i) = (c_1, c_2, \dots)$, $l = (d_j) = (d_1, d_2, \dots)$ şeklinde diziler olsun. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir [18].

2.4.3. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$k = (k_n)$ ve $l = (l_n)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |k_n l_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |k_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |l_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [4].

2.4.4. Teorem (Taylor Formülü)

h fonksiyonu a noktasını kapsayan bir aralıkta $n + 1$. mertebeden sürekli türevlere sahip olsun. Bu aralıkta her k için Taylor formülü,

$$h(k) = \sum_{w=0}^n \frac{h^{(w)}(a)}{w!} (k-a)^w$$

olur ve $K_n(k)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denirse

$$K_n(k) = \frac{1}{n!} \int_a^k (k-t)^n h^{(n+1)}(t) dt$$

olmak üzere

$$h(k) = \sum_{w=0}^n \frac{h^{(w)}(a)}{w!} (k-a)^w + K_n(k)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor Formülü adı verilir [18].

2.4.18. Tanım (Peetre \mathcal{H} - Fonksiyoneli)

[9] de tanımlanan Peetre \mathcal{H} -fonksiyoneli

$$K_2^*(\varphi, \delta) = \inf_{\varkappa \in C_B^2(0, \infty)} \left\{ \|\varphi - \varkappa\|_{C_B(0, \infty)} + \delta \|\varkappa\|_{C_B^2(0, \infty)} \right\}, \quad (2.4)$$

şeklindedir.

2.4.19. Tanım (İkinci Dereceden Süreklilik Modülü)

[9] de tanımlanan İkinci dereceden süreklilik modülü

$$\omega_2(\varphi, \delta) = \sup_{0 < \varkappa < \delta} \sup_{y \in (0, \infty)} |\varphi(y + 2\varkappa) - 2\varphi(y + \varkappa) + \varphi(\varkappa)| \quad (2.5)$$

şeklindedir ve [8] de ω_2 ve K_2^* arasındaki ilişki

$$K_2^*(\varphi, \delta) \leq N \left\{ \omega_2(\varphi; \delta) + \min(1, \delta) \|\varphi\|_{C_B(0, \infty)} \right\} \quad (2.6)$$

gösterilmiştir.

2.5. Gamma Fonksiyonu

2.5.20. Tanım (Gamma Fonksiyonu)

$k > 0$ olmak üzere $\Gamma(k)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Elemanter matematikte n faktöriyel

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$$

çarpımı ile verildiği biliniyor. Bu özellik $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $k = n + 1$ bir tamsayı ise,

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n \Gamma(n)$$

yazılabilir. Gerçekten de Γ fonksiyonu,

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$$

eşitliğini tüm $k > 0$ değerleri için gerçekler. Bunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\Gamma(k+1) &= \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b t^k e^{-t} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-t^k e^{-t} \right) \Big|_0^b + k \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-t} dt \\
&= k\Gamma(k)
\end{aligned}$$

bulunur [18].

2.6. Gamma Operatörü ve Genelleştirmeleri

Alman Matematikçi Weierstrass, sonlu aralıkta tanımlanmış her fonksiyon sürekli ise, bu sonlu aralıktaki fonksiyona polinomsal olarak düzgün yakınsayan bir polinom fonksiyonunu 1895 te ispatlamıştır [28]. P. P. Korovkin 1950 de bu konu hakkında teoremler hazırlamıştır [17]. Korovkin yaklaşım teoremi matematikte iyi bilinen teoremlerden biridir. Bu teorem pozitif lineer operatörlerin özel koşullar altında özdeş operatöre dönüşebildiğini göstermiştir [17]. Bu gelişmeler sonucunda lineer ve pozitif lineer operatörler üzerine bazı çalışmalar literatüre eklenmiştir. Örneğin, 2003 te King [15] $1, h, h^2$ test fonksiyonları ve bu fonksiyonların lineer kombinasyonlarına karşılık gelen yeni operatör dizisi inşa etmiştir. Bu operatör dizilerinden biri Lupaş ve Müller'in [20] hazırladığı Gamma operatörüdür. Klasik Gamma operatörü $\forall y \in (0, \infty), p \in \mathbb{N}$ ve $\varphi \in C(0, \infty) = \{\varphi \in (0, \infty) : (0, \infty) \text{ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli fonksiyon uzayı}\}$ için

$$S_p(\varphi; y) = \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p \varphi\left(\frac{p}{v}\right) dv \quad (2.7)$$

şeklinde verilmiştir. (2.7) ile tanımlanan operatörün pozitif ve lineer olduğu aşıkardır. Tanımlanan lineer pozitif operatör düzgün yakınsaktır. Bunu göstermek için yukarıda ifade edilen Korovkin teoreminden faydalanılacaktır. Bu teoremin şartlarını sağlatmamız durumunda iddiamız doğrulanacaktır. Bu teoremin şartlarının sağlandığını Korovkin test fonksiyonları yardımıyla inceleyelim. Korovkin test fonksiyonları, $a_z(h) = h^z$ olup $z = 0, 1, 2$ olmak üzere, klasik Gamma operatörünün Korovkin test fonksiyonlarını koruduğunu hesaplamalarla ifade edelim. $z = 0$ için $a_0(h) = h^0 = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_p(a_0(h); y) &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p a_0\left(\frac{p}{v}\right) dv \\ &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p dv \end{aligned}$$

yazılır. Burada $yv = t$ denirse $v = \frac{t}{y}$ ise $dv = \frac{dt}{y}$ olur. Bu eşitlikler operatörde yazılırsa

$$\begin{aligned} S_p(a_0(h); y) &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \frac{1}{y} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^p}{y^p} \frac{dt}{y} \\ &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \frac{1}{y^{p+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^p dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \Gamma(p+1) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $S_p(a_0(h); y) = 1$ olur.

$z = 1$ için $a_1(h) = h^1 = h$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} S_p(a_1(h); y) &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p a_1\left(\frac{p}{v}\right) dv \\ &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p \frac{p}{v} dv \end{aligned}$$

yazılır. Burada $yv = t$ denirse $v = \frac{t}{y}$ ise $dv = \frac{dt}{y}$ olur. Bu eşitlikler operatörde yazılırsa

$$S_p(a_1(h); y) = \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} p \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^p}{y^p} \frac{1}{y} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} p y \frac{1}{y^{p+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \\
&= \frac{p y}{\Gamma(p+1)} \Gamma(p) \\
&= y
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $S_p(a_1(h); y) = y$ olur.

$z = 2$ için $a_2(h) = h^2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
S_p(a_2(h); y) &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-y v} v^p a_2\left(\frac{v}{y}\right) dv \\
&= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-y v} v^p \frac{v^2}{y^2} dv
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $yv = t$ denirse $v = \frac{t}{y}$ ise $dv = \frac{dt}{y}$ olur. Bu eşitlikler operatörde yazılırsa

$$\begin{aligned}
S_p(a_2(h); y) &= \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} p^2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^p}{y^p} \frac{y^2}{t^2} \frac{1}{y} dt \\
&= p^2 \frac{y^2}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-2} dt \\
&= \frac{p^2 y^2}{\Gamma(p+1)} \Gamma(p-1) \\
&= \frac{p^2}{p(p-1)} y^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $S_p(a_2(h); y) = \frac{p^2}{p(p-1)} y^2$ olur.

Bu hesaplamalar tekrar ifade edilecek olunursa aşağıdaki eşitlikler elde edilmiş olur;

$$S_p(a_0(h); y) = 1,$$

$$S_p(a_1(h); y) = y,$$

$$S_p(a_2(h); y) = \frac{p^2}{p(p-1)} y^2.$$

Böylelikle S_p operatörünün 1 ve y fonksiyonlarını direkt koruduğu, y^2 test fonksiyonunu ise limit durumundan koruduğu görülmektedir. Buradan söylenebilir ki operatörün 1, h , h^2 deki görüntüleri sırasıyla 1, y , y^2 dir. Korovkin teoremine göre S_p operatörünün Korovkin test fonksiyonlarını koruması bu operatörün herhangi bir kompakt $A \subset (0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli φ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır demektir. Bu da bir yaklaşım sürecine sahip olduğunu gösterir.

(2.7) ile tanımlanan klasik Gamma operatörünün çeşitli genellemeleri yapılmıştır. Bu genelleştirilmiş Gamma operatörlerin detaylarına [3, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 25, 26] ulaşılabilir.



3. k - GAMMA FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANAN GAMMA OPERATÖRÜ

Bu bölüm tezin orjinal kısmıdır. [12] numaralı referanstaki teorem ve sonuçları içermektedir.

3.1. Operatörün Kurulması

Lupaş ve Müller [19] hazırladığı klasik Gamma operatörü $\forall y \in (0, \infty)$, $p \in \mathbb{N}$ için

$$S_p(\varphi; y) = \frac{y^{p+1}}{\Gamma(p+1)} \int_0^{\infty} e^{-yv} v^p \varphi\left(\frac{p}{v}\right) dv,$$

şeklinde tanımlandığı ve $\varphi \in C(0, \infty)$ için $S_p(\varphi; y) \rightrightarrows \varphi(y)$ olduğu gösterilmiştir. Burada ” \rightrightarrows ” işareti düzgün yakınsaklığı gösterir. Klasik Gamma operatörü ile ilgili detaylara yukarıda yer verilmiştir. Diaz ve Pariguan [10], Feynman integralleri ile ilgilenirken, k -Gamma fonksiyonunu araştırmıştır. k -Gamma fonksiyonu matematik ve uygulamaları üzerinde çeşitli etkiler göstermiştir. Bu etkilerden biri kuantum kimyasındaki harmonyum ve benzeri modeller için önemli işlemler açısından Schrodinger denklemi üzerine çalışılmıştır [14]. Bir diğeri ise istatistik içinde kombinasyonel analiz için k -Gamma fonksiyonu kullanılmıştır. Bu çalışmalarda, Diaz ve Pariguan tarafından tanımlanan k -Gamma fonksiyonu $k \in (0, \infty)$, $Re(z) > 0$ için

$$\Gamma_k(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt \quad (3.1)$$

şeklinindedir. Bu tanıma bakıldığında Γ_k , klasik Gamma fonksiyonunun tek parametrelili bir deformasyonudur. (3.1) de $k = 1$ alındığında klasik Gamma fonksiyonu, $k = 2$ alındığında Gauss integrali elde edilir [25]. (3.1) denkleminde $u = \frac{t^k}{k}$ alındığında $\Gamma_k(z) = k^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right)$ ifadesi elde edilir ve klasik Gamma fonksiyonunun bütün özellikleri k -Gamma fonksiyonu içinde genellenebilir. Bu eşitliğin doğruluğu aşağıda gösterilecektir.

(3.1) eşitliğinde $u = \frac{t^k}{k}$ alındığında $t = (uk)^{\frac{1}{k}}$ ve $dt = (uk)^{\frac{1}{k}-1} du$ olur. Bu ifadeler (3.1) de yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\Gamma_k(z) &= \int_0^{\infty} (uk)^{\frac{z-1}{k}} e^{-u} (uk)^{\frac{1}{k}-1} du \\
&= k^{\frac{z-1}{k} + \frac{1}{k} - 1} \int_0^{\infty} u^{\frac{z-1}{k} + \frac{1}{k} - 1} e^{-u} du \\
&= k^{\frac{z}{k} - 1} \int_0^{\infty} u^{\frac{z}{k} - 1} e^{-u} du \\
&= k^{\frac{z}{k} - 1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right).
\end{aligned}$$

Bu eşitlik k -Gamma fonksiyonu için yeni sonuçların çıkmasına yol açmıştır. Bu sonuçlardan bazıları

$$\Gamma_k(k) = 1,$$

$$\Gamma_k(z+k) = z\Gamma_k(z),$$

$$(z)_{n,k} = \frac{\Gamma_k(z+nk)}{\Gamma_k(z)}$$

şeklinde [10]. Bu özellikler sırasıyla gösterilecektir. Birinci özellik için

$$\Gamma_k(k) = \int_0^{\infty} t^{k-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt$$

dir. Burada $\frac{t^k}{k} = u$ alındığında $t^{k-1} dt = du$ olur.

$$\Gamma_k(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} du$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-u} du$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-u}) \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1)$$

$$= 1$$

olup ispat tamamlanır. İkinci özelliğe $\frac{t^k}{k} = u$ alındığında $t = (uk)^{\frac{1}{k}}$ ve $dt = (uk)^{\frac{1}{k}-1} du$ olur.

Bu ifadeler denklemde yazıldığında

$$\Gamma_k(z+k) = \int_0^{\infty} (uk)^{\frac{z+k}{k}-1} e^{-u} (uk)^{\frac{1}{k}-1} du$$

$$= k^{\frac{z+k}{k}-1+\frac{1}{k}-1} \int_0^{\infty} u^{\frac{z+k}{k}-1+\frac{1}{k}-1} e^{-u} du$$

$$= k^{\frac{z}{k}} \int_0^{\infty} u^{\frac{z}{k}} e^{-u} du$$

$$= k^{\frac{z}{k}} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u^{\frac{z}{k}} e^{-u} du$$

olur. Bu ifadede $u^{\frac{z}{k}} = h$ ve $e^{-u} du = dv$ alınıp kısmi integrasyon uygulandığında

$$\Gamma_k(z+k) = k^{\frac{z}{k}} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-u^{\frac{z}{k}} e^{-u} \Big|_0^b + \int_0^b \frac{z}{k} u^{\frac{z}{k}-1} e^{-u} du \right]$$

$$= zk^{\frac{z}{k}-1} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b u^{\frac{z}{k}-1} e^{-u} du$$

$$= zk^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right)$$

olur. Yukarıda ispatlanan $\Gamma_k(z) = k^{\frac{z}{k}-1} \Gamma\left(\frac{z}{k}\right)$ eşitliği kullanıldığında

$$\Gamma_k(z+k) = z\Gamma_k(z)$$

eşitliği bulunup ispat tamamlanır. Son özelliği göstermek için $\Gamma_k(z+k) = z\Gamma_k(z)$ eşitlik kullanılacaktır.

$$\frac{\Gamma_k(z+nk)}{\Gamma_k(z)} = \frac{\Gamma_k(z+nk-k+k)}{\Gamma_k(z)}$$

$$= \frac{(z+nk-k)\Gamma_k(z+nk-k)}{\Gamma_k(z)}$$

$$= \frac{(z+nk-k)\Gamma_k(z+nk-k-k+k)}{\Gamma_k(z)}$$

$$= \frac{(z+nk-k)(z+nk-2k)\Gamma_k(z+nk-2k)}{\Gamma_k(z)}$$

olup işlemler bu şekilde devam ettirildiğinde

$$\frac{\Gamma_k(z+nk)}{\Gamma_k(z)} = \frac{\Gamma_k(z)}{\Gamma_k(z)} (z+nk-k)(z+nk-2k)\dots z$$

$$= (z)_{n,k}$$

olup, ispat tamamlanır. Bu özelliklere detaylı olarak [10, 16, 25] den bakılabilir. Şimdi, (3.1) de tanımlanan k -Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni tip Gamma operatörü sunulacaktır. Burada polinom fonksiyonları olarak $a_z(h) = h^z$ ve $\psi_{y,z}(h) = (h-y)^z$, $y \in (0, \infty)$ ifadeleri kullanılacaktır. Klasik Gamma fonksiyonunun k -Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış ifadesi her $y \in (0, \infty)$, $k > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $v > 0$ için

$$S_p^*(\varphi; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} (vk)^{p+\frac{1}{k}} \varphi\left(\frac{p}{v}\right) dv \quad (3.2)$$

şeklinde oluşturulmuştur ve $p > \gamma$ için $\varphi \in C_\gamma(0, \infty) = \{\varphi \in C(0, \infty) : \varphi(u) = O(u^\gamma), u \rightarrow \infty\}$ dir. Buradaki $C(0, \infty)$, $(0, \infty)$ üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayıdır. (3.2) ifadesinde açık şekilde görüldüğü gibi pozitif ve lineerdir. Üstelik k -Gamma fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yeni tip Gamma operatörü sabitleri doğrudan, diğer test fonksiyonlarını limit durumunda korur.

Şimdi, tezin geri kalanındaki temel teoremlerde kullanılmak üzere aşağıdaki lemma verilip ispatlanacaktır.

3.1.1. Lemma

$y \in (0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$S_p^*(a_0(h); y) = a_0(y),$$

$$S_p^*(a_1(h); y) = \frac{pk}{pk+1} a_1(y),$$

$$S_p^*(a_2(h); y) = \frac{(pk)^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y),$$

$$S_p^*(a_3(h); y) = \frac{(pk)^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y),$$

$$S_p^*(a_4(h); y) = \frac{(pk)^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} a_4(y).$$

İspat

$S_p^*(a_0(h); y) = a_0(y)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} S_p^*(a_0(h); y) &= S_p^*(1; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} dv \\ &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} dv \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $yv = \frac{t^k}{k}$ dönüşümü yapılırsa

$$S_p^*(a_0(h); y) = k^{p+\frac{1}{k}} \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} \frac{t^{pk+1}}{k^{p+\frac{1}{k}} y^{p+1+\frac{1}{k}}} t^{k-1} dt$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_p^*(a_0(h); y) &= \frac{1}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk+k} dt \\ &= a_0(y) \end{aligned}$$

dir. Bir sonraki $S_p^*(a_1(h); y) = \frac{pk}{pk+1} a_1(y)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} S_p^*(a_1(h); y) &= S_p^*(h; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p}{v} dv \\ &= \frac{py^{p+1+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} \frac{1}{v} dv \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $yv = \frac{t^k}{k}$ dönüşümü yapıldığında

$$S_p^*(a_1(h); y) = pk^{p+\frac{1}{k}} \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} ky \frac{1}{k^{p+\frac{1}{k}} y^{p+\frac{1}{k}}} \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk+1+k-1-k} dt$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_p^*(a_1(h); y) &= \frac{pky}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk} dt \\ &= pk \frac{\Gamma_k(pk+1)}{(pk+1)\Gamma_k(pk+1)} y \\ &= \frac{pk}{pk+1} a_1(y) \end{aligned}$$

dir. Bir sonraki $S_p^*(a_2(h); y) = \frac{(pk)^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} S_p^*(a_2(h); y) &= S_p^*(h; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^2}{v^2} dv \\ &= \frac{p^2 y^{p+1+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} \frac{1}{v^2} dv \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $yv = \frac{t^k}{k}$ dönüşümü yapıldığında

$$S_p^*(a_2(h); y) = p^2 k^{p+\frac{1}{k}} \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} k^2 y^2 \frac{1}{k^{p+\frac{1}{k}} y^{p+\frac{1}{k}}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk+1+k-1-2k} dt$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_p^*(a_2(h); y) &= \frac{p^2 k^2 y^2}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk-k} dt \\ &= p^2 k^2 \frac{\Gamma_k(pk-k+1)}{(pk+1)(pk-k+1)\Gamma_k(pk-k+1)} y^2 \\ &= \frac{(pk)^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y) \end{aligned}$$

dir. Bir sonraki $S_p^*(a_3(h); y) = \frac{(pk)^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y)$ eşitliğini gösterelim.

$$S_p^*(a_3(h); y) = S_p^*(h; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^3}{v^3} dv$$

$$= \frac{p^3 y^{p+1+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} \frac{1}{v^3} dv$$

dir. Son eşitlikte $yv = \frac{t^k}{k}$ dönüşümü yapıldığında

$$S_p^*(a_3(h); y) = p^3 k^{p+\frac{1}{k}} \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p+k+1)} k^3 y^3 \frac{1}{k^{p+\frac{1}{k}} y^{p+\frac{1}{k}} y} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk+1+k-1-3k} dt$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_p^*(a_3(h); y) &= \frac{p^3 k^3 y^3}{\Gamma_k(p+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk-2k} dt \\ &= p^3 k^3 \frac{\Gamma_k(pk-2k+1)}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)\Gamma_k(pk-2k+1)} y^3 \\ &= \frac{(pk)^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y) \end{aligned}$$

dir. Son olarak $S_p^*(a_4(h); y) = \frac{(pk)^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} a_4(y)$ eşitliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} S_p^*(a_4(h); y) &= S_p^*(h; y) = \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^4}{v^4} dv \\ &= \frac{p^4 y^{p+1+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} \frac{1}{v^4} dv \end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $yv = \frac{t^k}{k}$ dönüşümü yapıldığında

$$S_p^*(a_4(h); y) = p^4 k^{p+\frac{1}{k}} \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p+k+1)} k^4 y^4 \frac{1}{k^{p+\frac{1}{k}} y^{p+\frac{1}{k}} y} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk+1+k-1-4k} dt$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S_p^*(a_4(h); y) &= \frac{p^4 k^4 y^4}{\Gamma_k(p+k+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{t^k}{k}} t^{pk-3k} dt \\ &= p^4 k^4 \frac{\Gamma_k(pk-3k+1)}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)\Gamma_k(pk-3k+1)} y^4 \\ &= \frac{(pk)^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} a_4(y) \end{aligned}$$

dir ve istenilen sonuç elde edilir. Fonksiyon değerleri genelleştirildiğinde aşağıdaki lemma elde edilir.

3.1.2. Lemma

$y \in (0, \infty)$ ve $z \in \mathbb{N}$ olsun. $S_p^*(a_0(h); y) = a_0(y)$ eşitliği göz önünde bulundurularak aşağıdaki genel formül elde edilir.

$$S_p^*(a_z(h); y) = \frac{(pk)^z}{\prod_{i=0}^{z-1} (pk - ki + 1)} a_z(y), \quad z = 1, 2, \dots$$

3.1.3. Lemma

$y \in (0, \infty)$ olsun. Lemma 3.1.1 kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$S_p^*(\Psi_{y,0}(h); y) = 1,$$

$$S_p^*(\Psi_{y,1}(h); y) = \frac{-1}{pk+1} a_1(y),$$

$$S_p^*(\Psi_{y,2}(h); y) = \frac{pk^2 - k + 1}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y),$$

$$S_p^*(\Psi_{y,3}(h); y) = \left(\frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} - \frac{3p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} + \frac{3pk}{pk+1} - 1 \right) a_3(y),$$

$$S_p^*(\Psi_{y,4}(h); y) = \left(\frac{p^4 k^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} - 4 \frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} \right. \\ \left. + 6 \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} - 4 \frac{pk}{pk+1} + 1 \right) a_4(y).$$

İspat

$S_p^*(\Psi_{y,0}(h); y) = S_p^*(1; y) = 1$ dir (Lemma 3.1.1 den). $z = 1$ için gösterelim. $\Psi_{y,1}(h) = h - y$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
S_p^*(h-y; y) &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\frac{p}{v} - y\right) dv \\
&= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p}{v} dv - y \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} dv
\end{aligned}$$

elde edilir. İlk ifade Lemma 3.1.1 den $\frac{pk}{pk+1} a_1(y)$ ye, ikinci ifade $a_1(y)$ ye eşittir. Buradan

$$\begin{aligned}
S_p^*(h-y; y) &= \frac{pk}{pk+1} a_1(y) - a_1(y) \\
&= \left(\frac{pk}{pk+1} - 1\right) a_1(y) \\
&= \frac{-1}{pk+1} a_1(y)
\end{aligned}$$

dir. İstenilen elde edilir. Bir sonraki $S_p^*(\psi_{y,2}(h); y) = \frac{pk^2-k+1}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)$ eşitliğini gösterelim. $\psi_{y,2}(h) = (h-y)^2$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
S_p^*((h-y)^2; y) &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\frac{p}{v} - y\right)^2 dv \\
&= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\left(\frac{p}{v}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{v}\right)y + y^2\right) dv \\
&= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^2}{v^2} dv - 2y \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p}{v} dv \\
&\quad + y^2 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} dv
\end{aligned}$$

elde edilir. İlk ifade Lemma 3.1.1 den $\frac{p^2k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)$ ye, ikinci ifade $\frac{pk}{pk+1} a_1(y)$ ye, üçüncü ifade 1 e eşittir. Buradan

$$\begin{aligned}
S_p^*((h-y)^2; y) &= \frac{p^2k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y) - 2\frac{pk}{pk+1} a_1(y) + a_2(y) \\
&= \left(\frac{p^2k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} - 2\frac{pk}{pk+1} + 1\right) a_2(y) \\
&= \frac{pk^2-k+1}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)
\end{aligned}$$

dir. İstenilen elde edilir. Bir sonraki $S_p^*(\Psi_{y,3}(h);y) = \left(\frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} - \frac{3p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} + \frac{3pk}{pk+1} - 1 \right) a_3(y)$ eşitliğini gösterelim. $\Psi_{y,3}(h) = (h-y)^3$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} S_p^*((h-y)^3; y) &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\frac{p}{v} - y \right)^3 dv \\ &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\left(\frac{p}{v} \right)^3 - 3 \left(\frac{p}{v} \right)^2 y + 3 \left(\frac{p}{v} \right) y^2 - y^3 \right) dv \\ &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^3}{v^3} dv - 3y \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^2}{v^2} dv \\ &\quad + 3y^2 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p}{v} dv - y^3 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} dv \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ifade Lemma 3.1.1 den $\frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y)$ ye, ikinci ifade $\frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)$ ye, üçüncü ifade $\frac{pk}{pk+1} a_1(y)$ ye, dördüncü ifade 1 e eşittir. Buradan

$$\begin{aligned} S_p^*((h-y)^3; y) &= \frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y) - 3y \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y) + 3y^2 \frac{pk}{pk+1} a_1(y) \\ &\quad - y^3 \\ &= \left(\frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} - 3 \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} + 3 \frac{pk}{pk+1} - 1 \right) a_3(y) \end{aligned}$$

dir. İstenilen elde edilir. Son olarak $S_p^*(\Psi_{y,4}(h);y) = \left(\frac{p^4 k^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} - 4 \frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} + 6 \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} - 4 \frac{pk}{pk+1} + 1 \right) a_4(y)$ eşitliğini gösterelim. $\Psi_{y,4}(h) = (h-y)^4$ olduğu göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} S_p^*((h-y)^4; y) &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\frac{p}{v} - y \right)^4 dv \\ &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \left(\left(\frac{p}{v} \right)^4 - 4 \left(\frac{p}{v} \right)^3 y + 6 \left(\frac{p}{v} \right)^2 y^2 - 4 \left(\frac{p}{v} \right) y^3 + y^4 \right) dv \\ &= \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^4}{v^4} dv - 4y \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^3}{v^3} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6y^2 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p_k+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p^2}{v^2} - 4y^3 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p_k+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} \frac{p}{v} dv \\
& + y^4 \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(p_k+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} v^{p+\frac{1}{k}} k^{p+\frac{1}{k}} dv
\end{aligned}$$

elde edilir. İlk ifade Lemma 3.1.1 den $\frac{p^4 k^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} a_4(y)$, ikinci ifade $\frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y)$ ye, üçüncü ifade $\frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y)$ ye, dördüncü ifade $\frac{pk}{(pk+1)} a_1(y)$ ye, beşinci ifade 1 e eşittir. Buradan

$$\begin{aligned}
S_p^*((h-y)^4; y) &= \frac{p^4 k^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} a_4(y) - 4y \frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} a_3(y) \\
& + 6y^2 \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} a_2(y) - 4y^3 \frac{pk}{(pk+1)} a_1(y) + y^4 \\
& = \left(\frac{p^4 k^4}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)} - 4 \frac{p^3 k^3}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)} \right. \\
& \quad \left. + 6 \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} - 4 \frac{pk}{pk+1} + 1 \right) a_4(y)
\end{aligned}$$

dir ve ispat tamamlanır.

Ayrıca $k \in (0, \infty)$ olduğu dikkate alındığında verilen operatörlerin Gamma operatörünün Schurer tipi genellemesinde bir genellemesi olduğu dikkat edilmelidir. Özel olarak (3.2) de $k = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}$ alındığında, (2.7) eşitliğindeki Gamma operatörünün Schurer varyantına dönüşür.

Bu tez boyunca $\varphi \in C(0, \infty)$ için norm olarak $\|\varphi\| = \sup\{\varphi(y) : y \in (0, \infty)\}$ kullanılacaktır.

3.1.4. Lemma

$\varphi \in C(0, \infty)$ olsun. Böylece

$$\|S_p^*(\varphi; y)\| \leq \|\varphi\|$$

elde edilir.

İspat

Lemma 3.1.1 kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\|S_p^*(\varphi; y)\| \leq \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} (vk)^{p+\frac{1}{k}} \left| \varphi\left(\frac{p}{v}\right) \right| dv.$$

Burada gerekli düzenleme yapıldığında

$$\begin{aligned} \|S_p^*(\varphi; y)\| &\leq \|\varphi\| \frac{y^{p+1+\frac{1}{k}}}{\Gamma_k(pk+k+1)} \int_0^\infty e^{-yv} (vk)^{p+\frac{1}{k}} dv \\ &= \|\varphi\| S_p^*(a_0(h); y) \\ &= \|\varphi\| \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. Çünkü Korovkin test fonksiyonlarında limit durumunda normlar korunduğundan [2] Korovkin teoreminden S_p^* , $T \subset (0, \infty)$ kompakt alt aralığında yaklaşım sürecidir.

3.1.1. Teorem

$E = \left\{ \varphi : \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\varphi}{1+y^2} = k \text{ sabit} \right\}$ olmak üzere $\varphi \in C(0, \infty) \cap E$ olsun. $(0, \infty)$ un her kompakt alt kümesinde

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p^*(\varphi; y) = \varphi(y)$$

sağlanır.

İspat

Lemma 3.1.1 den ve $z = 0, 1, 2$ olduğunda $(0, \infty)$ un düzgün her kompakt alt kümesinde

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p^*(a_z(h); y) = a_z(y)$$

olduğu göze alınarak [2] Korovkin teoremi şartları gereği istenilen elde edilir.

3.2. Voronovskaya Teoremi

Bu bölümde aşağıdaki Voronovskaya teoremini kurarak $(S_p^*)_{p \geq 1}$ operatörünün davranışı gösterilecektir.

3.2.2. Teorem

$\varphi', \varphi'' \in C(0, \infty)$ olmak üzere $\varphi \in C(0, \infty)$ olsun. Aşağıdaki limit durumu korunur:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p[S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)] = -\frac{1}{k}y\varphi'(y) + \frac{1}{2}y^2\varphi''(y).$$

İspat

$\Omega(h, y) = \frac{\varphi''(\delta) - \varphi''(y)}{2}$ olmak üzere Taylor formülü kullanılarak

$$\varphi(h) = \varphi(y) + \varphi'(y)(h-y) + \frac{1}{2}\varphi''(y)(h-y)^2 + \Omega(h, y)(h-y)^2 \quad (3.3)$$

dir. Buradaki δ ifadesi y ve h arasında uzanır ve $\lim_{h \rightarrow y} \Omega(h, y) = 0$ dır. (3.3) eşitliğine $(S_p^*)_{p \geq 1}$ operatörü uygulandığında

$$S_p^*(\varphi; y) = \varphi(y) + \varphi'(y)S_p^*((h-y); y) + \frac{1}{2}\varphi''(y)S_p^*((h-y)^2; y) + S_p^*(\Omega(h, y)(h-y)^2; y)$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra eşitliğin her iki tarafı p ile çarpıldığında

$$p[S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)] = \varphi'(y)pS_p^*((h-y); y) + \frac{1}{2}\varphi''(y)pS_p^*((h-y)^2; y) + pS_p^*(\Omega(h, y)(h-y)^2; y),$$

elde edilir. Limit durumunda bu denklem

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} p[S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)] &= \varphi'(y) \lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*((h-y); y) + \frac{1}{2} \varphi''(y) \lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*((h-y)^2; y) \\ &\quad + \lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*(\Omega(h, y)(h-y)^2; y) \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1.3 den

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*((h-y); y) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \left[\frac{-1}{pk+1} \right] y = \frac{-1}{k} y$$

ve

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*((h-y)^2; y) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \left[\frac{pk^2 - k + 1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right] y^2 = y^2$$

değerleri bilinir. Bu ifadeler kullanıldığında

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p[S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)] = \frac{-1}{k} y \varphi'(y) + \frac{1}{2} \varphi''(y) y^2 + \lim_{p \rightarrow \infty} pS_p^*(\Omega(h, y) \psi_{y,2}(h); y) \quad (3.4)$$

dir. (3.4) denkleminin sağ tarafının limit durumunda sıfıra eşit olduğunu gösterelim. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$pS_p^*(\Omega(h, y) \psi_{y,2}(h); y) \leq \sqrt{S_p^*(\Omega^2(h, y); y)} \sqrt{p^2 S_p^*(\psi_{y,4}(h); y)} \quad (3.5)$$

dir. Bu ifadeye $\Omega^2(y, y) = 0$ ve $\Omega(\cdot, y)$, $h \in (0, \infty)$ da sürekli, $h \rightarrow \infty$ da sınırlı ve

$$S_p^*(\psi_{y,4}(h); y) = \frac{3p^2k^4 + p(18k^4 - 22k^3 + 6k^2 - 6k^3 + 11k^2 - 6k + 1)}{(pk+1)(pk-k+1)(pk-2k+1)(pk-3k+1)}$$
 olmak üzere

$$S_p^*(\psi_{y,4}(h); y) = O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

olduğu göz önüne alınıp Korovkin teoremi kullanıldığında

$$\lim_{p \rightarrow \infty} S_p^*(\Omega^2(h; y), y) = \Omega^2(y, y) = 0, \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) ifadeleri (3.4) denkleminde yazıldığında ispat tamamlanır.

3.3. Ağırlıklı Yaklaşım

(3.2) operatörünün ağırlıklı yaklaşımı için Korovkin teoremi bu bölümde verilecektir. Bunu göstermek için [11] Gadjev tarafından verilen teorem kullanılacaktır. Her $y \in [0, \infty)$ için $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \vartheta(y) = \infty$, $\vartheta(y) \geq 1$ olmak üzere $\vartheta(y) = 1 + y^2$ fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde sürekli ağırlık fonksiyonu olarak kabul edelim. \mathbb{R} üzerinde $|\varphi(y)| \leq N_\varphi \vartheta(y)$ özelliği φ reel değerli fonksiyonu için ağırlıklı uzayı temsil eder. Bu alt uzay

$$B_\vartheta[0, \infty) = \{ \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) : |\varphi(y)| \leq N_\varphi \vartheta(y), y \in [0, \infty) \}$$

olup N_φ , φ fonksiyonuna bağlı bir sabittir. $B_\vartheta[0, \infty)$ ağırlıklı alt uzayında

$$C_\vartheta[0, \infty) = \{ \varphi \in B_\vartheta[0, \infty) : \varphi, \mathbb{R} \text{ de sürekli} \} = C[0, \infty) \cap B_\vartheta[0, \infty)$$

dir. Son olarak $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(y)}{\vartheta(y)}$ in mevcut ve sonlu olduğu tüm $\varphi \in C_\vartheta[0, \infty)$ için diğer bir alt uzay

$$C_\vartheta^\kappa[0, \infty) = \left\{ \varphi \in C_\vartheta[0, \infty) : \lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{\varphi(y)}{\vartheta(y)} = \kappa_\varphi \text{ var ve sınırlı} \right\}$$

dir. κ_φ , φ fonksiyonuna bağlı sabittir. Yukarıdaki üç fonksiyon uzayının tümü

$$\|\varphi\|_\vartheta = \sup_{y \in [0, \infty)} \frac{|\varphi(y)|}{\vartheta(y)}$$

ile donatılmış normlu uzaylardır.

3.3.5. Lemma

$\varphi \in C_\vartheta(0, \infty)$ olsun. $S_p^*(\varphi)$ operatörü için

$$\|S_p^*(\varphi)\|_\vartheta \leq C \|\varphi\|_\vartheta$$

olup bu lemma değiştirilmiş $S_p^*(\varphi)$ operatör dizisinin $C_\vartheta(0, \infty)$ den $B_\vartheta(0, \infty)$ a bir yaklaşım süreci olduğunu gösterir.

İspat

Bu lemmanın istenilen sonucu Lemma 3.1.1 ve modifiye edilmiş Gamma operatörünün özelliklerinden kolayca elde edilir.

3.3.3. Teorem

$\varphi \in C_{\vartheta}(0, \infty)$ olsun. Modifiye edilmiş Gamma operatörü için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)\|_{\vartheta} = 0.$$

İspat

[10] daki teorem kullanılarak $\lim_{p \rightarrow \infty} \|S_p^*(a_z; y) - a_z\|_{\vartheta} = 0$, $z = 0, 1, 2$ için denkleğin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. $z = 0$ için $\|S_p^*(a_0; y) - a_0\|_{\vartheta} = 0$ dır. Şimdi $z = 1, 2$ durumlarını inceleyelim. Bu durumlar için gerekli sonuçlar kullanıldığında

$$\begin{aligned} \|S_p^*(a_1; y) - a_1\|_{\vartheta} &= \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{|S_p^*(a_1; y) - a_1|}{1 + y^2} = \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{\left| \frac{pk}{pk+1}y - y \right|}{1 + y^2} \\ &\leq \left| \frac{pk}{pk+1} - 1 \right| \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{y}{1 + y^2} \\ &\leq \left| \frac{1}{pk+1} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu ifadenin $p \rightarrow \infty$ limiti alınırsa

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{pk+1} = 0$$

dir.

$$\|S_p^*(a_2; y) - a_2\|_{\vartheta} = \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{|S_p^*(a_2; y) - a_2|}{1 + y^2} = \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{\left| \frac{p^2k^2}{(pk+1)(pk-k+1)}y^2 - y^2 \right|}{1 + y^2}$$

$$\leq \left| \frac{p^2 k^2}{(pk+1)(pk-k+1)} - 1 \right| \sup_{y \in (0, \infty)} \frac{y^2}{1+y^2}$$

$$\leq \left| \frac{pk^2 - 2pk + k - 1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right|$$

dir. Eğer bu ifadenin $p \rightarrow \infty$ limiti alınırsa

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pk^2 - 2pk + k - 1}{(pk+1)(pk-k+1)} = 0$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen denklemler sonucunda ispat tamamlanır.

3.4. Yaklaşım Hızı

Modifiye edilmiş Gamma operatörünün yaklaşım hızınının hesabı süreklilik modülü, Petree \mathcal{H} -fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ile yapılacaktır. Şimdi $S_p^*(\varphi; y)$ operatörünün klasik Gamma operatöründen daha iyi hata tahminine sahip olduğu gösterilecektir. Bu hedef ışığında aşağıdaki tanımlar verilecektir. $y_0 \geq 0$ olmak üzere $\varphi \in C(0, y_0]$ olsun. $\omega_{y_0}(\varphi; \delta)$ ile gösterilen φ fonksiyonuna ait süreklilik modülü ve δ keyfi pozitif sayı olmak üzere

$$\omega_{y_0}(\varphi, \delta) = \sup_{\substack{|h-y| \leq \delta \\ y, h \in [0, y_0]}} |\varphi(h) - \varphi(y)|$$

şeklindedir. $\omega_{y_0}(\varphi, \delta) \rightarrow 0$ süreklilik modülü $\varphi \in C_B(0, \infty)$ fonksiyonu için $\delta \rightarrow 0$ olduğu kolayca anlaşılır. Buradaki $C_B(0, \infty)$, $(0, \infty)$ aralığındaki tüm sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayıdır. φ nin $C(0, y_0]$ sürekli fonksiyon uzayında olması için gerek ve yeter şart $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\varphi; \delta) = 0$ olmasıdır ve keyfi $\delta > 0$ ile her $h \in (0, y_0]$ için

$$|\varphi(h) - \varphi(y)| \leq \omega_{y_0}(\varphi; \delta) \left(1 + \frac{|h-y|}{\delta}\right)$$

sağlanmaktadır. Şimdi $(S_p^*)_{p \geq 1}$ için yaklaşım oranı teoremine bakılacaktır.

3.4.4. Teorem

$y_0 > 0$ ve $\varphi \in C_B(0, \infty)$ için $\omega_{y_0+1}(\varphi; \delta)$, $(0, y_0 + 1] \subset (0, \infty)$ aralığında süreklilik modülü olsun. Aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq 3N_\varphi \left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} \right) y_0^2 (1 + y_0)^2 + 2\omega_{y_0+1} \left(\varphi, \sqrt{\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} y_0^2} \right) \quad (3.7)$$

Buradaki N_φ , φ ye bağlı sabittir.

İspat

$\varphi \in C_B(0, \infty)$, $0 < y \leq y_0$ ve $h > y_0 + 1$ olsun. Buradan elde edilebilir ki $h - y > 1$ için

$$\begin{aligned} |\varphi(h) - \varphi(y)| &\leq |\varphi(h)| + |\varphi(y)| \\ &\leq 3N_\varphi (h - y)^2 (1 + y_0)^2 \end{aligned}$$

dir. $0 < y \leq y_0$ ve $\varphi \in C_B(0, \infty)$ olsun. Buradan $h \leq y_0 + 1$ aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$|\varphi(h) - \varphi(y)| \leq \omega_{y_0+1}(\varphi, |h - y|) \leq \omega_{y_0+1}(\varphi, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} |h - y| \right).$$

Bunun sonucunda yukarıdaki eşitsizlik $0 < y \leq y_0$ ve $0 \leq h < \infty$ için

$$|\varphi(h) - \varphi(y)| \leq 3N_\varphi (h - y)^2 (1 + y_0)^2 + \omega_{y_0+1}(\varphi, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} |h - y| \right). \quad (3.8)$$

(3.8) de S_p^* tanımı ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğine başvurulduğunda

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq 3N_\varphi S_p^*((h - y)^2; y) (1 + y_0)^2 + \omega_{y_0+1}(\varphi, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{S_p^*((h - y)^2; y)} \right)$$

$$\leq 3N_{\varphi} \left(\frac{pk^2-k+1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right) (1+y_0)^2 + 2\omega_{y_0+1} \left(\varphi, \sqrt{\left(\frac{pk^2-k+1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right) y_0^2} \right)$$

elde edilir. $\delta = \sqrt{\left(\frac{pk^2-k+1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right) y_0^2}$ seçildiğinde ispat tamamlanır.

3.4.5. Teorem

(3.2) de tanımlanan S_p^* operatörü herhangi bir $\varphi \in C_B(0, \infty)$ fonksiyonu için

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (2 + \sqrt{\tau}) \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)},$$

dur. Burada ki τ , Lemma 3.1.3 deki $S_p^*(\psi_{y,2}; y)$ dir.

İspat

$\varphi \in C_B(0, \infty)$ olsun. Genişletilmiş ortalama değer teoremi daha sonra Taylor serisi açılımı uygulanarak

$$\varphi(h) = \varphi(y) + \varphi'(y)(h-y) + \frac{1}{2} \varphi''(\xi)(h-y)^2,$$

elde edilir ve buradaki ξ , y ile h arasındadır. Buradan

$$|\varphi(h) - \varphi(y)| \leq N_1|h-y| + \frac{1}{2}N_2(h-y)^2$$

gelir. Burada (2.2) den dolayı

$$N_1 = \sup_{y \in (0, \infty)} |\varphi'(y)| = \|\varphi'\|_{C_B(0, \infty)} \leq \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)},$$

$$N_2 = \sup_{y \in (0, \infty)} |\varphi''(y)| = \|\varphi''\|_{C_B(0, \infty)} \leq \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)},$$

dir. Bunun sonucunda

$$|\varphi(h) - \varphi(y)| \leq \left(|h-y| + \frac{1}{2}(h-y)^2 \right) \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)}$$

dir. Sonra

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| = |S_p^*(\varphi(h) - \varphi(y); y)| \leq S_p^*(|\varphi(h) - \varphi(y)|; y),$$

ve $S_p^*(|h - y|; y) \leq S_p^*((h - y)^2; y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tau}$ olup

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq \left(S_p^*(|h - y|; y) + \frac{1}{2} S_p^*((h - y)^2; y) \right) \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (2 + \sqrt{\tau}) \|\varphi\|_{C_B^2(0, \infty)}. \end{aligned}$$

istenilen elde edilir.

3.4.6. Teorem

(3.2) de tanımlanan $S_p^*(.; .)$ operatörü ele alınsın. Herhangi $\varphi \in C_B(0, \infty)$ için

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq 2N \left\{ \omega_2 \left(\varphi; \sqrt{\Delta_{p,y}} \right) + \min(1, \Delta_{p,y}) \|\varphi\|_{C_B(0, \infty)} \right\}$$

geçerlidir. N , pozitif bir sabit, $\Delta_{p,y} = \sqrt{\tau}(2 + \sqrt{\tau})/2$ ve $\tau = S_p^*(\psi_{y,2}; y)$ dir.

İspat

Teorem 3.4.5 kullanarak ispatlanacaktır. $\varkappa \in C_B^2(0, \infty)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq |S_p^*(\varphi - \varkappa; y)| + |S_p^*(\varkappa; y) - \varkappa(y)| + |\varphi(y) - \varkappa(y)| \\ &\leq 2 \|\varphi - \varkappa\|_{C_B(0, \infty)} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (2 + \sqrt{\tau}) \|\varkappa\|_{C_B^2(0, \infty)} \\ &\leq 2 \left(\|\varphi - \varkappa\|_{C_B(0, \infty)} + \frac{1}{4} \sqrt{\tau} (2 + \sqrt{\tau}) \|\varkappa\|_{C_B^2(0, \infty)} \right) \end{aligned}$$

dir. Son eşitsizliğin sağ tarafındaki tüm $\varkappa \in C_B^2(0, \infty)$ üzerinde infimum alarak ve (2.4) ü kullanarak

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq 2K_2^* \left(\varphi; \frac{\sqrt{\tau}(2 + \sqrt{\tau})}{4} \right)$$

elde edilir. (2.6) denklemi kullanılarak ispat tamamlanır.

3.5. Noktasal Yaklaşım

$S_p^*(\varphi; y)$ nin yakınsama hızının bazı noktasal yaklaşımlarına bakalım. İlk başta, yerel yaklaşım ile fonksiyonun yerel düzgünlüğü arasındaki ilişki verilecektir. Bu doğrultuda aşağıdaki tanımlar ifade edilmiştir. $s \in (0, 1]$ ve $\hat{I} \subset (0, \infty)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki

$$|\varphi(v) - \varphi(y)| \leq N_{\varphi, s} |v - y|^s, v \in [0, \infty) \text{ ve } y \in \hat{I}$$

koşul sağlanırsa bir $\varphi \in C_B(0, \infty)$ fonksiyonu \hat{I} üzerinde $Lip_{N_\varphi}(s)$ olarak adlandırılacaktır. Buradaki $N_{\varphi, s}$, φ ve s ye bağlı bir sabittir.

3.5.7. Teorem

$s \in (0, 1]$ ve $\hat{I} \subset (0, \infty)$ olmak üzere $\varphi \in C_B(0, \infty) \cap Lip_{N_\varphi}(s)$ olsun. Bu durumda

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq N_{\varphi, s} \left[\left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} a_2(y) \right)^{s/2} + 2(d(y, \hat{I}))^s \right]$$

dır. $N_{\varphi, s}$ yukarıda verilmiş olup $d(y, \hat{I})$, y ve \hat{I} arasındaki uzaklık

$$d(y, \hat{I}) = \inf\{|v - y|, v \in \hat{I}\}$$

olarak tanımlanır.

İspat

\hat{I} kümesinin kapanışı \tilde{I} olarak tanımlansın. O halde

$$d(y, \hat{I}) = |y - v_0|$$

sağlandığı en az bir v_0 noktası vardır. $(S_p^*)_{p \geq 1}$ in monotonluk özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \phi(y)| &\leq S_p^*(|\varphi(v) - \varphi(v_0)|; y) + S_p^*(|\varphi(y) - \varphi(v_0)|; y) \\ &\leq N_{\varphi, s} [S_p^*(|v - v_0|^s; y) + |y - v_0|^s] \\ &\leq N_{\varphi, s} [S_p^*(|v - y|^s; y) + 2|y - v_0|^s] \end{aligned}$$

dir. Hölder eşitsizliği tanımından

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \phi(y)| &\leq N_{\varphi, s} [S_p^*(|v - y|^2; y)^{s/2} + 2(d(y, \hat{I}))^s] \\ &= N_{\varphi, s} \left[\left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} a_2(y) \right)^{s/2} + 2(d(y, \hat{I}))^s \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

Şimdi modifiye edilmiş Gamma operatörünün yerel doğrudan yaklaşımını belirlemeye çalışılacaktır. [21] den s . dereceden Lipschitz tipi maksimum fonksiyonu

$$\tilde{\omega}_s(\varphi, y) = \sup_{0 \leq v < \infty, v \neq y} \frac{|\varphi(v) - \varphi(y)|}{|v - y|^s}$$

şeklindedir. Burada $s \in (0, 1]$ ve $y \in (0, \infty)$ dur.

3.5.8. Teorem

$\varphi \in C_B(0, \infty)$ ve $\tilde{\omega}_s \in (0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik $y \in (0, \infty)$ sağlanır.

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq \tilde{\omega}_s(\varphi, y) S_p^* \left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} a_2(y) \right)^{s/2}$$

İspat

$\tilde{\omega}_s(\varphi, y)$ tanımı ve Hölder eşitsizliği sayesinde

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq S_p^*(|\varphi(v) - \varphi(y)|; y),$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{\omega}_s(\varphi, y) S_p^*(|v - y|^s; y), \\
&\leq \tilde{\omega}_s(\varphi, y) S_p^*(|v - y|^2; y)^{s/2}, \\
&\leq \tilde{\omega}_s(\varphi, y) S_p^* \left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} a_2(y) \right)^{s/2}
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak ispat tamamlanır.

Şimdi son olarak [21] de $\alpha, \beta > 0$ olan iki parametrelili Lipschitz uzayı hatırlatılacaktır. Bu uzay

$$Lip_N^{\alpha, \beta}(s) = \left(\varphi \in C(0, \infty) : |\varphi(v) - \varphi(y)| \leq N \frac{|v - y|^s}{(\alpha y^2 + \beta y + v)^{s/2}}, y, v \in (0, \infty) \right)$$

şeklindedir. Burada $s \in (0, 1]$ ve N pozitif sabittir.

3.5.9. Teorem

$\varphi \in Lip_N^{\alpha, \beta}(s)$ ve $y \in (0, \infty)$ için $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq N \left[\frac{\left[\frac{pk^2 - k + 1}{(pk + 1)(pk - k + 1)} \right] a_2(y)}{\alpha y^2 + \beta y} \right]$$

dir.

İspat

Bu ispat iki kısma ayrılarak yapılacaktır. $\varphi \in Lip_N^{\alpha, \beta}(s)$ ve $y \in (0, \infty)$ olmak üzere ilk olarak $s = 1$ için gösterilecektir. Buradan

$$\begin{aligned}
|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq S_p^*(|\varphi(v) - \varphi(y)|; y) \\
&\leq N S_p^* \left(\frac{|v - y|}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y + 1}}; y \right) \\
&\leq \frac{N}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y}} S_p^*(|v - y|; y)
\end{aligned}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq \frac{N}{\sqrt{\alpha y^2 + \beta y}} [S_p^*(|v - y|^2; y)]^{1/2} \\ &\leq N \left[\frac{\left[\frac{pk^2 - k + 1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right] a_2(y)}{\alpha y^2 + \beta y} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir ve $s = 1$ için sağladığı gösterilmiş olur. Şimdi de $s \in (0, 1)$ için gösterilecektir.

$\varphi \in Lip_N^{\alpha, \beta}(s)$ ve $y \in (0, \infty)$ için

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq \frac{N}{(\alpha y^2 + \beta y)^{s/2}} S_p^*(|v - y|^s; y)$$

elde edilir. Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq \frac{N}{(\alpha y^2 + \beta y)^{s/2}} S_p^*(|v - y|^s; y) \\ &\leq \frac{N}{(\alpha y^2 + \beta y)^{s/2}} (S_p^*(|v - y|^2; y))^s \end{aligned}$$

olur. Son olarak Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} |S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| &\leq \frac{N}{(\alpha y^2 + \beta y)^{s/2}} (S_p^*(|v - y|^2; y))^{s/2} \\ &\leq N \left[\frac{\left[\frac{pk^2 - k + 1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right] a_2(y)}{\alpha y^2 + \beta y} \right]^{s/2} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ durumu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.5.1. Sonuç

Özel sabit parametreler $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ için parametrik Lipschitz uzayındaki noktasal yaklaşım $\varphi \in Lip_N^{1,0}$ ve $y \in (0, \infty)$ için

$$|S_p^*(\varphi; y) - \varphi(y)| \leq N \left(\frac{pk^2 - k + 1}{(pk+1)(pk-k+1)} \right)$$

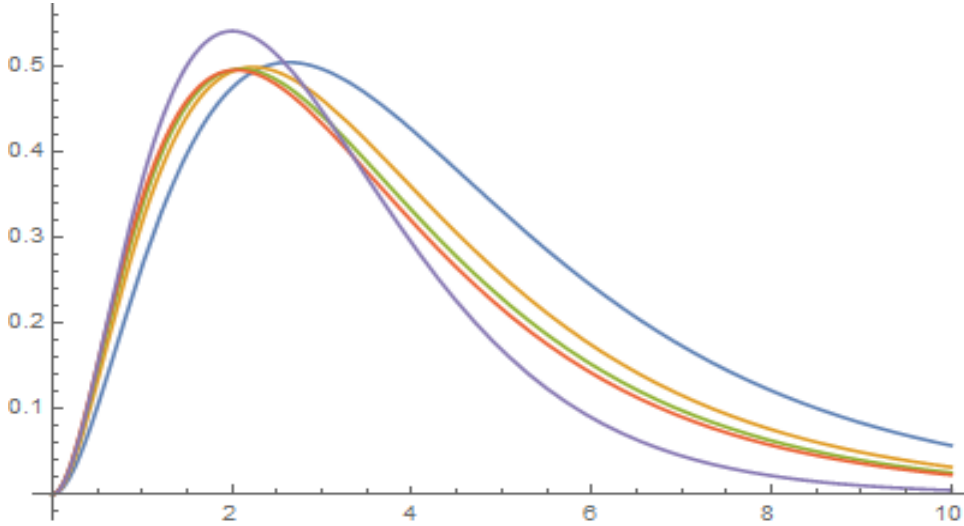
elde edilir.



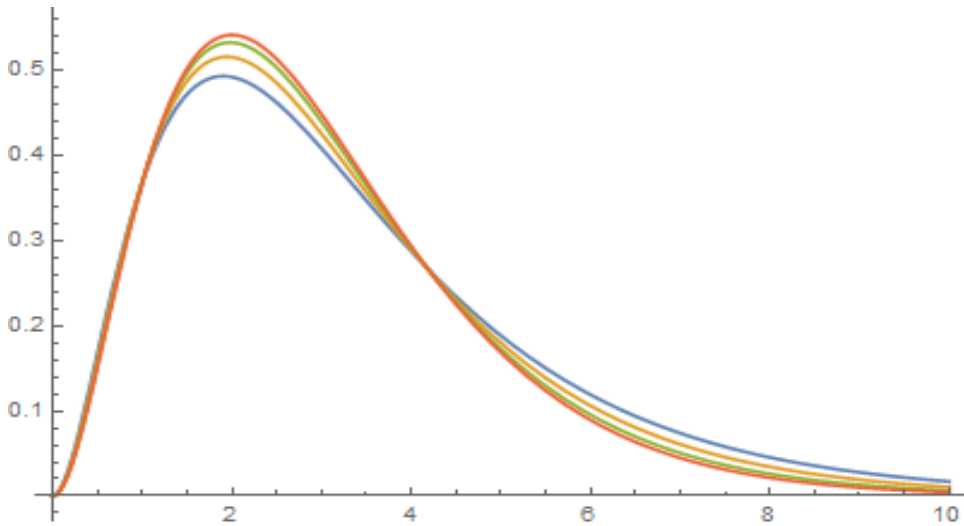


4. SAYISAL ÖRNEKLER

Tezin bu bölümünde $S_p^*(\varphi; y)$ in iki boyutta yakınsama oranını doğrulamak için bazı sayısal örnekler sunulacaktır. (Şekil 1 de $p = 10$, Şekil 2 de $k = 3$ sabit alınmıştır). Örnekte $S_p^*(\varphi; y)$ ile klasik Gamma operatörü kıyaslanmıştır. $\varphi : [0, 10] \rightarrow [0, \infty)$ için $S_p^*(\varphi; y)$ ve $\varphi(y) = y^2 e^{-y}$ fonksiyonlarına bakılacaktır.



Şekil 4.1. Sıra ile $k = \frac{1}{3}, 1, 3, 30$ için S_p^* operatörünün grafiği ve $p = 10$ olarak sabitlenmiştir. ($k = \frac{1}{3}$ için mavi, $k = 1$ için turuncu, $k = 3$ için yeşil, $k = 30$ için kırmızı, $\varphi(y)$ için mor gösterilmiştir).



Şekil 4.2. Sıra ile $p = 10, 20, 60$ için S_p^* operatörünün grafiği ve $k = 3$ olarak sabitlenmiştir. ($p = 10$ için mavi, $p = 20$ için turuncu, $p = 60$ için yeşil, $\varphi(y)$ için kırmızı gösterilmiştir).

Şekil 1 de operatörün k değeri büyüdükçe ($p = 10$ sabittir) fonksiyona yaklaştığı görülmektedir. Şekil 2 de operatörün p değeri büyüdükçe ($k = 3$ sabittir) fonksiyona yaklaştığı görülmektedir.



5. SONUÇ

k -Gamma fonksiyonu yardımıyla yeni tip Gamma operatörü tanımlanmıştır. Operatörün Korovkin teoremi koşulları sağlanmıştır. Sonra Voronovskaya tip teorem, ağırlıklı yaklaşım, yaklaşım oranı ve noktasal yaklaşım yapılmıştır. Son olarak yaklaşımını doğrulamak için sayısal örnekler verilmiştir. Bu örnekler sonucunda k -Gamma yardımıyla tanımlanan yeni tip Gamma operatörünün daha iyi bir yaklaşım davranışına sahip olduğu gösterilmiştir.





KAYNAKLAR

1. Akçay, M. (2016). *Pozitif Lineer Operatörler İle Korovkin-Tipli Yaklaşım*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
2. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type approximation theory and its applications*. de Gruyter Studies in Mathematics. Berlin: Walter de Gruyter&Co, 17.
3. Askey, R. (2007). The q -Gamma and q -Beta functions. *Applicable Analysis*, 125-141.
4. Betüş, Ö. (2021). *Gamma Operatörlerinin Yeni Modifikasyonlarının İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Düzce Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce.
5. Betüş, Ö. and Usta, F. (2020). Approximation of functions by a new type of Gamma operators. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 1-12.
6. Cai, Q. B and Çekim, B. and İçöz, G. (2021). Gamma Generalization Operators Involving Analytic Functions. *Mathematics*, 9, 1-8.
7. Cheng, W. and Cai, Q. B. (2020). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilities. *Journal of Function Spaces*, 1-10.
8. Ciupa, A. (1995). A class of integral Favard-Szász type operators. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 40(1), 39-47.
9. DeVore, R. A. and Lorentz, G. G. (1993). *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, 303.
10. Díaz, R. and Pariguan, E. (2007). On hypergeometric functions and k - Pochhammer symbol. *Math Divulged*, 15, 179-192.
11. Gadjiev, A. (1976). Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. *Matematicheskie Zametki*, 20(5), 781-786.
12. İçöz, G. and Demir, S. (2022). Approximation Properties of a New Type of Gamma Operator Defined with the Help of k -Gamma Function, *Journal of Function Spaces*, 9.
13. Karsli, H. (2007). Rate of convergence of new Gamma type operators for functions with derivatives of bounded variation. *Mathematical and Computer Modelling*. 45, 617-624.
14. Karwowski, J. and Witek, A. H. (2014). Biconfluent Heun equation in quantum chemistry: Harmonium and related systems. *Theoretical Chemistry Accounts*, 133, 1-11.
15. King, J. (2003). Positive linear operators which preserve x^2 . *Acta Mathematica Hungarica*, 99, 203-208.

16. Kokologiannaki, C. G. and Krasniqi, V. (2013). Some properties of the k -Gamma function. *Le Matematiche*, 68, 13-22.
17. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear operators in the space of continuous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR(N.S.)*, 961-964.
18. Kurtoğlu, H. (2016). *Modifiye Gamma Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri*, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale.
19. Lenze, B. (1988). On Lipschitz type maximal function and their smoothness spaces. *Indagationes Mathematicae*, 91, 53-66.
20. Lupaş, A. and Müller, M. (1967). Approximationseigenschaften der Gamma Operatoren, *Mathematische Zeitschrift*, 98, 208-226.
21. Özarıslan, M. A. and Aktuğlu, H. (2013). Local approximation for certain King type operator. *Filomat*, 27, 173–181.
22. Özçelik, R., Kara, E. E., Usta, F. and Ansari J. K. (2021). Approximation properties of a new family of Gamma operators and their applications. *Advances in Difference Equations* 1, 1–13.
23. Singh, K. J., Agrawal, N. P. and Kajla, A. (2021). Approximation by modified q -Gamma type operators via A-statistical convergence and power series method. *Linear and Multilinear Algebra*, 1-21.
24. Srivastava, M.H. , İçöz, G. and Çekim, B. (2019). Approximation properties of an extended family of the Szász-Mirakjan beta-type operators. *Axioms*, 8, 1-13.
25. Tassaddiq, A. (2019). A. New Representation of the k -Gamma Functions. *Mathematics*, 7(2), 1-3.
26. Usta, F. and Betüş, Ö. (2020). A. new modification of Gamma operators with a better error estimation. *Linear and Multilinear Algebra*, 1-12.
27. Yurtsever, G. (2019). *Doğurucu Fonksiyonların Bir Sınıfını İçeren Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
28. Weierstrass, G. K. (1885). Über Die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reellen Veränderlichen Sitzungsberichter der *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, 633-639.



GAZİ GELECEKTİR..