T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARZU AKDENİZ YILMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAYIF δ_{ss}-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN

SİNOP – 2022

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAYIF δ_{ss}-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

ARZU AKDENİZ YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN

SİNOP - 2022

TEZ KABUL

Arzu AKDENİZ YILMAZ tarafından hazırlanan "**ZAYIF δ_{ss}-TÜMLENMİŞ MODÜLLER** " başlıklı bu çalışma, 27.07.2022 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Prof. Dr. Şenol EREN Ondokuz Mayıs Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi
Üye (Danışman)	Dr. Öğretim Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN Sinop Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi
Üye	Dr. Öğretim Üyesi Mehmet ONAT Sinop Üniversitesi / Fen – Edebiyat Fakültesi

Enstitü Müdürü Prof.Dr. Fadime DİRİK ....

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Arzu AKDENİZ YILMAZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAYIF δ_{ss}-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

ARZU AKDENİZ YILMAZ

SİNOP ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DR.ÖĞR.ÜYESİ ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

Bu tezin amacı literatürde varlığı bilinen zayıf ss-tümlenmiş modüller ile zayıf δ-tümlenmiş modüller arasında yeni bir cebirsel yapının varlığını oluşturmaktır. Bu doğrultuda çalışmaya adını veren zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüller olarak tanımı kurgulanan bu yapının sağladığı temel cebirsel özellikler irdelenmiştir. Özetle, bir modülün zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olmasına eşdeğer olan kriterler belirlenmiştir. Özel olarak bu denk koşullardan birini gerçekleyen her modül δ_{ss}-yarı yerel modül olarak nitelendirilmiştir. Eğer bir R halkası sol R-modül olarak δ_{ss}-yarı yerel ise halkaya δ_{ss}-yarı yerel halka denir. Böylelikle, ss-yarı yerel ve δ-yerel halkaların bir alt sınıfı olan δ_{ss}-yarı yerel halkaların (ki bunların sol δ_{ss}-mükemmel halkalarla çakıştığı görülmüştür) varlığı belirlenmiş ve aralarındaki kapsama ilişkilerinin öz olduğunu gösteren örneklere yer verilerek kuramsal kavramlar somutlaştırılmıştır. Bunun yanı sıra üzerindeki her modülü zayıf δ_{ss}-tümlenmiş kılan halkaların varlığı araştırılmıştır. Zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül ile (bol) zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül kavramlarının çakıştığı gösterilmiştir. Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün aynı zamanda zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olmasını sağlayan şartlar belirlenmiştir. Zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin sınıfının direkt toplamlar ve homomorfik görüntüler altında kapalı olduğu ispatlanmıştır. Belli bir koşulu sağlayan zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modülün alt modülünün de zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül, δ_{ss}-yarı yerel halka, sol δ_{ss}-mükemmel halka.

Temmuz 2022, 45 Sayfa

ABSTRACT

MSC THESİS

WEAKLY δ_{ss}-SUPPLEMENTED MODULES

ARZU AKDENİZ YILMAZ

SINOP UNIVERSITY INSTITUTE OF GRADUATE PROGRAMS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASST. PROF. DR. ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

The aim of this thesis to construct an algebraic structure between weakly ss-supplemented modules and weakly δ-supplemented modules whose existences are known in the literature. With this scope, the basic algebraic properties of weakly δ_{ss}-supplemented modules, which are the modules representing the title of thesis, are investigated. Summary, the equivalent conditions are determined for a module to be weakly δ_{ss}-lifting. In particular, each module providing one of these equivalent conditions are identified as δ_{ss}-semilocal. A ring R is said to be δ_{ss}-semilocal if ${}_RR$ is δ_{ss}-semilocal. As a consequence, the existence of a subclass of δ-perfect rings is obtained. And some examples are given to show that the inclusion relation is proper between these classes of rings. Moreover, the rings are examined whose modules are all weakly δ_{ss}-supplemented. It is shown that the concepts of weakly δ_{ss}-supplemented and amply weakly δ_{ss}-supplemented modules coincide. The suitable conditions are found for a weakly δ-supplemented module to be weakly δ_{ss}-supplemented. The class of weakly δ_{ss}-supplemented modules is closed under direct sums and homomorphic images. And it is proven that a submodule of a weakly δ_{ss}-supplemented module is weakly δ_{ss}-supplemented under a suitable condition.

KEYWORDS: Weakly δ_{ss}-supplemented module, δ_{ss}-semi local ring, δ_{ss}-perfect ring.

July 2022, 45 Page

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN’ e, tez problemimizin oluşumuna katkı sağlayan Amasya Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN’ e, ilgi ve önerilerini eksik etmeyen başta Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Fadime DİRİK’ e, tezin biçimsel olarak en doğru hale gelmesinde önemli katkılar sağlayan Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ONAT’ a ve Sinop Üniversitesi Matematik Bölümü’ ndeki tüm hocalarıma sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Ayrıca, bu süre zarfında maddi, manevi desteklerini esirgemeyen, onur ve kıvanç kaynağım olan annem Nurten AKDENİZ, babam Ahmet AKDENİZ, kardeşim Aysun AKDENİZ’ e ve en büyük manevi desteğim sevgili eşim Hasan YILMAZ’ a çok teşekkür ederim.

Arzu AKDENİZ YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

R	: Birimli halka
1_R	: Birimli R halkasının birimi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamsayılar halkasının kesirler cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$<$	: Öz alt modül
$Ra = < a >$	: Bir A modülünde a elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$Gör(f)$	: f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	: f homomorfizmasının çekirdeği
$A \cong C$	: A ile C modülleri izomorftur.
i	: İçerme monomorfizması
π	: Doğal homomorfizma
I_A	: A modülünün birim homomorfizması
A/B	: A modülünün B alt modülüne göre bölüm modülü
$A^{(I)}$	: A modülünün I indis kümesine göre kopyalarının direkt toplamı

$Soc(A)$	: A modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamı
$Soc_s(A)$	: A modülünün tüm küçük ve basit alt modüllerinin toplamı
$\ll$	: Küçük alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
$\ll_\delta$	: δ-küçük alt modül
$Rad(A)$	: A modülünün radikali
$\delta(A)$	: A modülünün δ-radikali
${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$	: $\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$ modülü

1. GİRİŞ

Modül Teorisi 1930'lu yıllarda E. Noether tarafından geliştirilmiştir. Bass (1960), sol mükemmel halkalar ve sol yarı mükemmel halkaları sırasıyla üzerindeki her modülü ve üzerindeki her sonlu üretilmiş modülü projektif örtüye sahip olan halkalar olarak tanımlamıştır. Mares (1963) halkalar üzerinde bilinen bu tanımların modüller üzerine aktarımını sağlamıştır. Kasch ve Mares (1966) projektif bir modülün yarı mükemmelliği ile tümlenmişliğinin eşdeğerliğini ifade etmişlerdir. Zöschinger (1974a) tümlenmiş modülleri Dedekind bölgeleri üzerinde karakterize etmiş ve zayıf tümlenmiş modüller kavramını literatüre katmıştır.

A nın herhangi B, X öz alt modülleri için $A \neq B + X$ oluyorsa B ye A nın küçük alt modülüdür denir ve "$B \ll A$" ile gösterilir. T alt modülünün B nin A içinde tümleyeni olması, $A = B + T$ ve $B \cap T \ll T$ ile eşdeğerdir. Eğer $B \cap T \ll A$ ise T ye B nin zayıf tümleyeni denir. Her alt modülü (zayıf) tümleyene sahip modüller (zayıf) tümlenmiş modül olarak bilinmektedir. Bir A modülünün alt modüllerinin ailesinin her azalan zinciri belli bir noktada son buluyorsa A modülüne Artinian modül denir. R sol R-modül olarak Artinian ise, R halkasına sol Artinian halka denir. Açıkça her Artinian modül (zayıf) tümlenmiştir. A modülünün her B alt modülü için, $A = B + N$ koşulunu gerçekleyen A nın her N alt modülü B nin A da en az bir tümleyenini içeriyorsa, B ye A da bol tümleyene sahiptir denir. Eğer A nın her alt modülü A da bir bol tümleyene sahipse A ya bol tümlenmiş modül denir. Buraya kadar bahsi geçen tüm temel tanımlar için Wisbauer (1991) kaynağı referans alınabilir.

Zhou (2000) küçük alt modülleri singülerlik kavramına göre genelleştirerek δ-küçük alt modülleri tanımlamış ve akabinde Koşan (2007) tarafından tümlenmiş modüller singülerliğe göre genelleştirilerek δ-tümlenmiş modüller tanımlanmıştır. A nın bir B alt modülü ve A nın A/X singüler olacak şekildeki her X öz alt modülü için $B + X \neq A$ oluyorsa B ye A da δ-küçüktür denir ve "$B \ll_\delta A$" ile gösterilir. Ayrıca bu çalışmada δ-küçük alt modül kavramı kullanılarak δ-mükemmel ve δ-yarı mükemmel halkalar tanımlanmıştır.

Bundan hareketle 2007 yılında Koşan, δ- tümlenmiş ve δ-lifting modüller için Zhou' nun δ-mükemmel ve δ-yarı mükemmel halkalarını kullanarak önemli karakterizasyon teoremleri elde etmiştir. Eğer B ve T bir A modülünün $B + T = A$ ve $B \cap T \ll_\delta T$

koşullarını gerçekleyen alt modülleri iseler T ye B nin A da δ-tümleyeni denir. (Zayıf) Tümlenmiş modül kavramına paralel olarak (zayıf) δ-tümlenmiş modüllerin de tanımları kurgulanabilir (Talebi ve Hamzekolaee, 2009a).

Kaynar vd. (2020) tümlenmiş modüllerin bir özel hali olan ss-tümlenmiş modülleri literatüre kazandırmıştır. Bir A modülünün her X alt modülü için $A = X + Y$, $X \cap Y \ \leq Soc_s(Y)$ olacak şekilde bir Y alt modülü mevcut ise A ya ss-tümlenmiş modül denir (Kaynar, 2020). 2020 yılında Olgun ve Türkmen, tanımda geçen $Soc_s(Y)$ yerine $Soc_s(A)$ alarak ss-tümlenmiş modülleri zayıf ss-tümlenmiş modüllere genelleştirmişlerdir ve bu modüller için "ss-yarı yerellik" adı altında yeni bir karakterizasyon tanımlamışlardır. 2020 yılında Nişancı Türkmen ve Türkmen, ss-tümlenmiş modülleri singülerlik açısından değerlendirerek δ_{ss}-tümlenmiş modülleri ve halkaları literatüre kazandırmışlardır.

2022 yılında Öztürk Sözen, bu tanımlar ışığında zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modülleri tanımlamış ve bunları δ_{ss}-yarı yerel modüller olarak karakterize etmiştir. Bu çalışmanın bir derlemesi olan bu tez çalışmasında, zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin temel özellikleri ve halka karakterizasyonlarına yer verilmiştir. Tezde bahsi geçen halkaların sınıfı arasındaki kapsamaların öz olduğunu gösteren örnekler elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, üzerinde çalıştığımız konuyla ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1: Aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde $(R, +, .)$ üçlüsüne halka adı verilir.

(i) $(R, +)$ abel gruptur.
(ii) Her $x, y, z \in R$ için $(x. y). z = x. (y. z)$ dir.
(iii) Her $x, y, z \in R$ için $x. (y + z) = x. y + x. z$ ve $(x + y). z = x. z + y. z$ dir (Hungerford, 1973).
Bu tez çalışmasında R ile $(R, +, .)$ halkası kastedilecektir.

Tanım 2.1.2: R bir halka olsun. Her $x, y \in R$ elemanı $x. y = y. x$ şartını gerçekliyorsa halkaya değişmeli halka; her $x \in R$ elemanı için $1_R. x = x. 1_R = x$ koşulunu gerçekleyen $1_R \in R$ mevcut ise halkaya birimli halka adı verilir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada birimli halka üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.1.3: R halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, $(R, +)$ abel grubunun bir alt grubu ve her $x, y \in I$ için $x. y \in I$ ise, I ya R halkasının alt halkası; her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $r. x \in I$ $(x. r \in I)$ ise I ya R halkasının sol (sağ) ideali denir. I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise, I ya R halkasının ideali denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.4: R halkasının $\{0\}$ ve R den başka ideali yoksa, R halkasına basit halka denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.5: R değişmeli halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $x. y \in P$ iken $x \in P$ veya $y \in P$ oluyorsa, P ye R halkasının asal ideali denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.6: R halka ve I, R nin öz sol ideali olsun. R de I yı kapsayan R den başka bir sol ideal yoksa, I ya R nin maksimal sol ideali denir (Hungerford, 1973).

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1: R halka ve $(A,+)$ bir Abel grup olsun. Her $r \in R$ ve her $a \in A$ için $\bullet\,(r,a) = ra$ ile gösterilen $\bullet: R \times A \to A$ dış işlemi;

(i) Her $r \in R$ ve her $a, b \in A$ için $r \bullet (a+b) = r \bullet a + r \bullet b$,
(ii) Her $r, s \in R$ ve her $a \in A$ için $(r+s) \bullet a = r \bullet a + s \bullet a$,
(iii) Her $r, s \in R$ ve her $a \in A$ için $(r.s) \bullet a = r \bullet (s \bullet a)$,

koşullarını gerçekliyorsa A abel grubuna " $\bullet$ " dış işlemine göre bir sol R- modül veya kısaca R-modül denir ve ${}_RA$ ile gösterilir. R birimli halka olmak üzere her $a \epsilon A$ için $1_R a = a$ eşitliği gerçekleniyorsa A modülüne üniter sol R-modül denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada üniter sol modüller üzerinde çalışılacaktır.

Tanım 2.2.2: A bir R-modül ve $\emptyset \neq B \subseteq A$ olsun. B, $(A,+)$ modülünün bir alt grubu ve her $a \in B$, her $r \in R$ için $ra \in B$ oluyorsa B alt kümesine A modülünün alt modülü denir ve $B \leq A$ yazılışı ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.3: Aşikar alt modüllerinden başka alt modülü bulunmayan sıfırdan farklı bir A modülüne basit modül denir (Kasch, 1982).

${}_RR$ basit modül ise, R ye sol basit halka denir.

Teorem 2.2.4: Bir A modülünün herhangi sayıda alt modüllerinin arakesiti A nın bir alt modülüdür (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.5: A bir modül ve $X \subseteq A$ olsun. A modülünün X kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin kesişimine A modülünün X tarafından üretilen alt modülü denir ve $< X >$ ile gösterilir (Hungerford, 1973)..

Tanım 2.2.6: X kümesi sonlu elemanlı bir küme ise, $< X >$ alt modülüne sonlu üretilmiş alt modül; $X = \{a\}$ şeklinde ise $< X > = < a >$ alt modülüne devirli alt modül denir. $A = < X >$ olacak şekilde A nın bir X sonlu alt kümesi varsa A ya sonlu üretilmiş modül; $A = < a >$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa, A modülüne a elemanı tarafından üretilen devirli modül denir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.2.7: R halka ve A bir R-modül olmak üzere $\emptyset \neq X \subseteq A$ olsun. Bu takdirde,

(i) $< X >= \{\sum_{i=1}^{u} r_i x_i + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j | r_i \epsilon R, b_j \epsilon \mathbb{Z}, x_i, x_j \in X, u, k \in \mathbb{Z}^+\}$ şeklindedir.
(ii) $\{B_i | i \in I\}, A$ modülünün alt modüllerinin bir ailesi ise, $< \cup_{i\in I} B_i >= \left\{\sum_{j=1}^{v} b_{i_j} \middle| j = 1,2, \ldots, v \text{ } için \text{ } b_{i_j} \in B_{i_j}, v \in \mathbb{Z}^+\right\}$ şeklindedir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.2.8: A modül C, B, Y ise A modülünün alt modülleri ve $C \leq B$ olsun. Bu takdirde, $(C + Y) \cap B = C + (Y \cap B)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.9: A bir R-modül ve $B \leq A$ olsun. A / B bölüm grubu, her $r \in R$ ve her $a + B \in A / B$ elemanı için, $r(a + B) = ra + B$ ile tanımlı $\bullet: R \times A / B \to A / B$ dış işlemine göre bir R-modüldür. Bu modüle A nın B alt modülüne göre bölüm modülü denir (Hungerford, 1973).

2.3. Homomorfizmalar

Tanım 2.3.1: A ve B birer modül ve $f: A \to B$ fonksiyon olsun. Her a_1, $a_2 \epsilon A$, her $r \in R$ için $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$ ve $f(ra_1) = rf(a_1)$ koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna R-modül homomorfizması veya kısaca homomorfizma denir (Hungerford, 1973).

Bir homomorfizma bire bir ise monomorfizma; örten ise epimorfizma; hem bire bir hem örten ise izomorfizma adını alır.

Teorem 2.3.2: A bir modül ve $B \leq A$ olsun. Her $a \in A$ için $\Pi(a) = a + B$ ile tanımlı $\Pi: A \to A / B$ dönüşümü epimorfizmadır. Bu Π epimorfizmasına doğal homomofizma adı verilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.3.3: A ve B birer modül olmak üzere, $f: A \to B$ homomorfizması verilsin. Bu takdirde,
(i) $C \leq A$ ise, $f(C) \leq B$ dir.
(ii) $U \leq B$ ise, $f^{-1}(U) \leq A$ dır. Özel olarak $U = \{0\} \leq B$ alınırsa, $f^{-1}(\{0\}) = \{a \in A | f(a) = 0\}$ alt modüldür. Bu $f^{-1}(\{0\}) \leq A$ alt modülüne f nin çekirdeği denir. $Çek(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ ile gösterilir. $\Pi: A \to A / B$ doğal homomorfizması için $Çek(\Pi) = B$ olduğu açıktır.

(iii) $C \leq A$ ise, $f^{-1}(f(C)) = C + Çek(f)$ dir.

(iv) $C \leq A$ ve $U \leq B$ ise, $f^{-1}(f(C) + U) = C + f^{-1}(U)$ ve $f(f^{-1}(U) \cap C) = U \cap f(C)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.4: A ve B birer modül ve $f: A \to B$ homomorfizma olsun. $\Pi: A \to A \ / \ Çekf$ doğal homomorfizma olmak üzere; $f = g\Pi$ olacak şekilde bir tek $g: A \ / \ Çekf \to B$ monomorfizması vardır ve $A \ / \ Çekf \cong f(A)$ dır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.5: A modül ve $B, U \leq A$ olsun. Bu takdirde, $(B + U) \ / \ U \cong B \ / \ (B \cap U)$ dur (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.6: A modül ve $B \leq U \leq A$ olsun. Bu takdirde, $A/U \cong (A/B) \ / \ (U/B)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.7: A modül ve $B < A$ olsun. A nın B alt modülünü kapsayan B den başka öz alt modülü yoksa, B ye A nın maksimal alt modülü denir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

Önerme 2.3.8: A bir R-modül ve $B < A$ öz alt modül olsun. B nin A modülünün maksimal alt modülü olması için gerekli ve yeterli koşul her $a \in A - B$ için $B + Ra = A$ olmasıdır (Kasch, 1982).

Sonuç 2.3.9:

(i) A modül ve $B \leq A$ olsun. Bu takdirde, $A \ / \ B$ bölüm modülünün her alt modülü; C, A nın B alt modülünü kapsayan bir alt modülü olmak üzere $C \ / \ B$ biçimindedir.

(ii) A modül ve $B \leq A$ olsun. Bu takdirde, $B \leq C$ olacak şekilde bir C alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart $C \ / \ B$ bölüm modülünün $A \ / \ B$ nin maksimal alt modülü olmasıdır (Hungerford, 1973).

2.4. Direkt Çarpımlar ve Direkt Toplamlar

Tanım 2.4.1: A bir modül ve $\{A_i\}_{i \in I}$, A nın alt modüllerinin bir ailesi olsun. $A = \sum_{i \in I} A_i$ ve her $v \in I$ için $A_v \cap (\sum_{i \neq v} A_i) = 0$ ise, A ya bu alt modüller ailesinin iç direkt toplamı denir; her bir A_i alt modülüne de A nın direkt toplam terimi denir ve $\oplus_{i \in I} A_i$ ile gösterilir. Özel olarak $I = \{1,2\}$ ise, $A = A_1 \oplus A_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul $A = A_1 + A_2$ ve $A_1 \cap A_2 = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

Eğer A modülünün $\{0\}$ ve kendisinden başka direkt toplam terimi bulunmuyorsa A modülüne parçalanamaz modül denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.4.2: R bir halka ve $I \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere, $\{A_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha \mid \alpha: I \to \cup_{i\in I} A_i, \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \epsilon A_i\}$ dönüşümlerin kümesine $\{A_i\}_{i\in I}$ ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i\in I} A_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ ile gösterilirse α_i ye α dönüşümünün i. bileşeni denir. Eğer I sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots)$ şeklindedir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i\epsilon I} A_i$ olmak üzere

(i) $\alpha = \beta \Leftrightarrow her\ i \in I\ için\ \alpha_i = \beta_i$,
(ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i\in I}$,
(iii) $-\alpha = (-\alpha_i)_{i\in I}$,
(iv) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i\in I}$ ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i\in I} A_i$ bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{A_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin dış direkt çarpımı denir.

$\bigoplus_{i\in I}^{t} A_i = \{(\alpha_i)_{i\in I} \mid \text{sonlu sayıda } i \in I \text{ için } \alpha_i \neq 0\}$ kümesi $\prod_{i\epsilon I} A_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i\in I}^{t} A_i$ alt modülüne $\{A_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i\epsilon I} A_i = \bigoplus_{i\in I}^{t} A_i$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.3: A modül olsun. $I \neq \emptyset$ indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i = A$ alınırsa, $\bigoplus_{i\in I}^{t} A_i$ dış direkt toplamına A nın kopyalarının toplamı denir ve $A^{(I)}$ ile ifade edilir (Kasch, 1982).

Tanım 2.4.4: A ve C modüller ve $I \neq \emptyset$ indis kümesi olsun. Eğer $f: A^{(I)} \to C$ epimorfizması mevcut ise, C ye A-üretilmiş modül denir. Eğer I indis kümesi sonlu elemanlı ise, C ye sonlu A-üretilmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

2.5. Küçük Alt Modüller

Tanım 2.5.1: A bir modül ve $C < A$ öz alt modül olsun. $C + U = A$ koşulunu sağlayan A nın bir U öz alt modülü yoksa C ye A nın bir küçük alt modülü denir ve $C \ll A$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.2: Bir A modülü için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $C \leq B \leq A$ olsun. $B \ll A$ ise, $C \ll A$ dır.
(ii) $C \leq B \leq A$ olsun. $C \ll B$ ise, $C \ll A$ dır.
(iii) $C_1, C_2, \dots, C_n, U_1, U_2, \dots, U_n, A$ nın alt modülleri ve her $i = 1,2,\dots,n$ için $C_i \ll U_i$ olsun. Bu takdirde, $C_1 + C_2 + \cdots + C_n \ll U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ dir.

(iv) A ve B birer modül, C, A nın bir alt modülü ve $f: A \to B$ homomorfizma olsun. $C \ll A$ ise, $f(C) \ll B$ dir.
(v) $C \leq B \leq A$ ve B, A nın direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $C \ll B$ olması için gerekli ve yeterli koşul $C \ll A$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

2.6. Yarı Basit Modüller ve Destek

Önerme 2.6.1: A bir basit modül olsun. $\{0\}$ alt modülü A nın maksimal alt modülüdür. Her $0 \neq a \in A$ elemanı için $Ra = A$ olup A devirlidir (Kasch, 1982).

Teorem 2.6.2: A bir modül olsun. A nın B alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $A \,/\, B$ nin basit olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.6.3: A bir modül olsun. A nın her alt modülü direkt toplam terimi ise, A modülüne yarı basit modül denir (Kasch, 1982).

Teorem 2.6.4: Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) A nın her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.
(ii) A basit alt modüllerin toplamıdır.
(iii) A basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
(iv) A yarı basittir (Kasch, 1982).

Tanım 2.6.5: A bir modül olsun. A nın basit alt modüllerinin toplamına A nın desteği denir. $Soc(A)$ ile gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Destek tanımı gereği Teorem 2.6.4 ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 2.6.6: Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) A nın her B alt modülü için $B = Soc(B)$ dır.
(ii) $A = Soc(A)$ dır.
(iii) A basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
(iv) A yarı basittir (Kasch, 1982).

Sonuç 2.6.7: (i) Yarı basit modüllerin her alt modülü de yarı basittir.

(ii) Yarı basit bir modülün her homomorfik görüntüsü de yarı basit modüldür.
(iii) Yarı basit modüllerin herhangi sayıdaki toplamı da yarı basittir (Kasch, 1982).

Tanım 2.6.8: A bir modül ve C, A nın bir alt modülü olsun. C modülünün A nın sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise, C ye A nın büyük alt modülü denir ve $C \trianglelefteq A$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.6.9: A modül ve $C \leq A$ olsun. A nın C' alt modülü, $C \cap C' = 0$ koşulunu sağlayan maksimal ise, C' ye C nin kesişime göre tümleyeni (komplementi) denir (Alizade ve Pancar, 1999). Açıkça her modülün bir komplementinin varlığı söylenebilir. Ayrıca, C', C nin bir komplementi ise $C \oplus C' \trianglelefteq A$ dır.

Teorem 2.6.10: Bir A modülü için $\bigcap_{(B \trianglelefteq A)} B = Soc(A)$ dır (Kasch, 1982).

Önerme 2.6.11: R halka olsun. R nin sol R-modül olarak yarı basit olması için gerekli ve yeterli koşul R nin sağ R-modül olarak yarı basit olmasıdır (Kasch, 1982).

Sonuç 2.6.12: R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R yarı basit halkadır.
(ii) Her sol R-modül yarı basittir.
(iii) Her sağ R-modül yarı basittir (Kasch, 1982).

Önerme 2.6.13: $\{A_i\}_{i \in I}$ modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $Soc(\bigoplus_{i \in I} A_i) = \bigoplus_{i \in I} Soc(A_i)$ dir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.6.14: A modülünün bir B alt modülü için $Soc(B) = B \cap Soc(A)$ dır (Wisbauer, 1991).

2.7. Bir Modülün Radikali

Tanım 2.7.1: Bir A modülünün tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine A nın radikali denir ve $Rad(A)$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Lemma 2.7.2: A bir modül olsun. $x \in A$ olmak üzere Rx devirli alt modülünün küçük alt modül olmaması için gerekli ve yeterli şart $x \notin K$ olacak şekilde bir $K < A$ maksimal alt modülünün mevcut olmasıdır (Kasch, 1982).

Sonuç 2.7.3: $a \in A$ olmak üzere $Ra \ll A$ olması için gerekli ve yeterli koşul $a \in Rad(A)$ olmasıdır (Kasch, 1982).

Teorem 2.7.4: Herhangi bir A modülü için $\sum_{K \ll A} K = Rad(A)$ dır (Kasch, 1982).

Lemma 2.7.5: A modül olsun. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için B_i modülleri A nın $B \leq A$ yı kapsayan alt modülleri olsun. Bu takdirde; $\bigcap_{i\in I}(B_i/B) = (\bigcap_{i\in I} B_i) / B$ dir (Kasch, 1982).

Teorem 2.7.6: (i) A ve B birer modül ve $f: A \longrightarrow B$ bir modül homomorfizması olsun. Bu takdirde,

(i) $f(Rad(A)) \leq Rad(B)$ dir. Eğer $Çekf \leq Rad(A)$ ise, $f\big(Rad(A)\big) = Rad(f(A))$ dır.
(ii) $Rad(A \, / \, Rad(A)) = \{0\}$ dır.
(iii) $L \leq N \leq A$ ise, $Rad(L) \leq Rad(N)$ dir.
(iv) $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ise, $Rad(A) = \bigoplus_{i\in I} Rad(A_i)$ dir.
(v) $B \leq A$ ise, $(B + Rad(A)) \, / \, B \leq Rad(A/B)$ ve $B \leq Rad(A)$ ise, $Rad\,(A/B) = Rad(A) \, / \, B$ dir.
(vi) A nın radikal bir modül olması için gerekli ve yeterli koşul A nın her sonlu üretilmiş alt modülünün A da küçük olmasıdır.
(vii) $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ise, $A \, / \, Rad(A) \cong \bigoplus_{i\in I} (A_i/Rad(A_i))$ dir (Kasch, 1982; Wisbauer, 1991).

Tanım 2.7.7: A bir modül olsun. $\frac{A}{Rad(A)}$ yarı basit ise A ya yarı yerel modül denir. Eğer R halkası sol R-modül olarak yarı yerel ise R ye yarı yerel halka denir (Lomp, 1999).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Singüler Modüller

Tanım 3.1.1: A bir R-modül olmak üzere $Z(A) = \{x \in A \mid \text{en az bir } I \trianglelefteq {}_RR \text{ için } Ix = 0\}$ kümesi A nın bir alt modülü olup bu alt modüle A nın singüler alt modülü denir (Goodearl, 1976).

Tanım 3.1.2: A bir modül olsun.

$Z(A) = A$ ise A ya singüler modül;
$Z(A) = 0$ ise A ya non-singüler modül denir (Goodearl, 1976).

Önerme 3.1.3: $B \trianglelefteq A$ ise $A\ /\ B$ bölüm modülü singülerdir (Goodearl, 1976).

Önerme 3.1.4: R bir halka olsun. Bu takdirde

i. Bir A R-modülünün singüler olması için gerek ve yeter koşul her non-singüler B R-modülü için $Hom_R(A, B) = 0$ olmasıdır.
ii. Non-singüler sol R-modüllerin sınıfı alt modüller, direkt toplamlar, büyük genişlemeler ve genişlemeler altında kapalıdır.
iii. Singüler sol R-modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri ve direkt toplamları ve genişlemeler altında kapalıdır (Goodearl, 1976).

3.2. δ-Küçük Alt Modüller

Tanım 3.2.1: A bir modül ve $B \leq A$ olsun. Eğer A nın A/X singüler olacak şekildeki her X alt modülü için $B + X = A$ olması $X = A$ olmasını gerektiriyorsa B ye A da δ-küçüktür denir ve bu durum $B \ll_\delta A$ ile gösterilir (Zhou, 2000).

Lemma 3.2.2: $B \leq A$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i. $B \ll_\delta A$.
ii. Bir $X \leq A$ için $X + B = A$ ise bu takdirde projektif yarı basit bir $Z \leq A$ alt modülü için $A = X \oplus Z$ dir (Zhou, 2000).

Lemma 3.2.3: A bir R-modül olsun.

i. $C \leq B$ olmak üzere A nın B, C ve U alt modülleri için
    a. $B \ll_\delta A \Leftrightarrow C \ll_\delta A$ ve $B/C \ll_\delta A/C$.
    b. $B + U \ll_\delta A \Leftrightarrow B \ll_\delta A$ ve $U \ll_\delta A$
ii. $C \ll_\delta A$ ve $f: A \to B$ bir homomorfizma ise $f(C) \ll_\delta B$ dir. Özel olarak, $C \ll_\delta A \subseteq B$ ise $C \ll_\delta B$.
iii. $C_1 \leq A_1 \leq A, C_2 \leq A_2 \leq A$ ve $A = A_1 \oplus A_2$ olsun. $C_1 \oplus C_2 \ll_\delta A \Leftrightarrow C_1 \ll_\delta A_1$ ve $C_2 \ll_\delta A_2$.
iv. $C \leq B \leq A$ ve B, A nın bir direkt toplam terimi olsun. $C \ll_\delta A$ ise $C \ll_\delta B$ (Zhou, 2000; Al-Takhman, 2007).

İspat

i. a) $(\Rightarrow)$ $B \ll_\delta A$ olsun. A/X singüler olacak şekildeki bir $X \leq A$ alt modülü için $C + X = A$ olsun. Bu durumda $C \leq B$ olduğundan $B + X = A$ yazılabilir. A/X singüler ve $B \ll_\delta A$ olduğundan $X = A$ dır. Dolayısıyla $C \ll_\delta A$ elde edilir. Diğer taraftan, $(A/C)/(X/C) \cong A/X$ singüler olacak şekildeki bir $X/C \leq A/C$ için $(B/C) + (X/C) = A/X$ olsun. Bu durumda $B + X = A$ olup A/X singüler ve $B \ll_\delta A$ olduğundan $X = A$ olur. Bu durumda $X/C = A/C$ olup $B/C \ll_\delta A/C$ dir.

$(\Leftarrow)$ $C \ll_\delta A$ ve $B/C \ll_\delta A/\mathrm{C}$ olsun. A/X singüler olacak şekildeki bir $X \leq A$ alt modülü için $B + X = A$ ise $(B + X)/C = A/C$ olup buradan $B/C + (X + C)/C = A/C$ yazılabilir. A/C singüler olduğundan $(A/X)/(X + C)/X \cong A/(X + C)$ bölüm modülü de singüler olup $B/C \ll_\delta A/\mathrm{C}$ olduğundan $(X + C)/C = A/C$ yani $X + C = A$ dır. Ayrıca $C \ll_\delta A$ ve A/X singüler olduğundan $X = A$ dır. Dolayısıyla $C \ll_\delta A$ dır.

b) $(\Rightarrow)$ $B + U \ll_\delta A$ olsun. A/X singüler olacak şekildeki bir $X \leq A$ alt modülü için $B + X = A$ ise $B + U + X = A$ olup $B + U \ll_\delta A$ olduğundan $X = A$ dır. Dolayısıyla $C \ll_\delta A$ dır. Benzer şekilde $U \ll_\delta A$ olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $B \ll_\delta A$ ve $U \ll_\delta A$ olsun. A/X singüler olacak şekildeki bir $X \leq A$ alt modülü için $(B + U) + X = A$ ise $B + (U + X) = A$ yazılabilir. A/X singüler olduğundan $(A/X)/(X + U)/X \cong A/X + U$ bölüm modülü de singüler olup $C \ll_\delta A$ olduğundan $U + X = A$ elde edilir. Ayrıca $U \ll_\delta A$ olduğundan $X = A$ dır. Dolayısıyla $B + U \ll_\delta A$ dır.

ii. $C \ll_\delta A$ ve $f\colon A \to B$ bir homomorfizma olsun. B/X singüler olacak şekildeki bir $X \leq B$ singüler olacak şekildeki bir $X \leq B$ alt modülü için $f(C) + X = B$ ise her $a \in A$ için $f(a) \in B$ olduğundan $\exists v \in C$ ve $\exists x \in X$ için $f(a) = f(v) + x$ olup $a - v \in f^{-1}(X)$ olduğundan $\mathrm{C}' \leq \mathrm{C}$ olacak şekilde projektif yarı basit C' alt modülü için $A = C' \oplus f^{-1}(X)$ dir. Bu durumda $C' \cong A/f^{-1}(X)$ non-singülerdir. B/X singüler ve $A/f^{-1}(X)$ non singüler olduğundan $Hom(B/X, A/f^{-1}(X)) = 0$) dır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & B/X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & f^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & A/f^{-1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dolayısıyla yukarıdaki diyagram da göz önüne alınırsa $A = f^{-1}(X)$ olmalıdır. Böylece $f(C) \leq f(A) \leq X \cap Gör(f) \leq X$ olup $X = B$ elde edilir. Ayrıca, $f\colon A \to B$ içerme dönüşümü olsun. $C \ll_\delta A$ ise $f(C) = C \ll_\delta B$ dir.

iii. $(\Rightarrow)$ $C_1 \leq A_1 \leq A, C_2 \leq A_2 \leq A$ ve $A = A_1 \oplus A_2$ ve $C_1 \oplus C_2 \ll_\delta A$ olsun. $\pi_1\colon A = A_1 \oplus A_2 \to A_1$ kanonik projeksiyon olmak üzere $C_1 \oplus C_2 \ll_\delta A$ ve homomorfizma altında δ-küçüklük korunuyor olduğundan $\pi_1(C_1 \oplus C_2) = C_1 \ll_\delta A_1$ elde edilir. Benzer şekilde, $\pi_2\colon A = A_1 \oplus A_2 \to A_2$ kanonik projeksiyonu göz önüne alınırsa $C_2 \ll_\delta A_2$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $C_1 \ll_\delta A_1$ ve $C_2 \ll_\delta A_2$ olsun. Bu durumda $C_1 \ll_\delta A$ ve $C_2 \ll_\delta A$ dır. Sonuç olarak i. koşulu (b) şıkkından, $A_1 \oplus A_2 = A_1 + A_2 \ll_\delta A$ elde edilir.

iv. $A = B \oplus T$, $B = C + U$ ve B/U singüler olsun. Bu durumda $A = (C + U) \oplus T$ dir. Diğer taraftan $A/(U \oplus T) = (B \oplus T)/(U \oplus T) \cong B/U$ singüler ve $C \ll_\delta A$ olduğundan $A = U \oplus T$ dir. Buradan $B = U$ olup $C \ll_\delta A$ elde edilir.

Tanım 3.2.4: φ tüm singüler basit modüllerin bir ailesi olmak üzere bir A modülü için $\delta(A) = \cap \{B \leq A | A/B \in \varphi\}$ şeklinde tanımlanır (Zhou, 2000).

Lemma 3.2.5: A ve B modülleri verilsin.

i. $\delta(A) = \sum\{C \leq A | C \ll_\delta A\}$.
ii. A bir modül ve $B \leq A$ olsun. Her $f: A \to A$ homomorfizması için $f(B) \leq B$ ise B ye tam değişmez alt modül denir (Wisbauer, 1991).
iii. $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ise bu takdirde $\delta(A) = \bigoplus_{i \in I} \delta(A_i)$ dir.
iv. Eğer A nın her öz alt modülü A nın bir maksimal alt modülünde içeriliyorsa bu takdirde $\delta(A)$, A nın en büyük δ-küçük alt modülüdür (Zhou, 2000).

Not 3.2.6: A sonlu üretilmiş bir modül ise $\delta(A) \ll_\delta A$ dır.

Önerme 3.2.7: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. A, R-modülünün her B alt modül için $B \ll_\delta A \Leftrightarrow B \ll A$.
ii. R nin her I ideali için $I \ll_\delta {}_R R \Leftrightarrow I \ll {}_R R$.
iii. Her basit R-modül singülerdir.
iv. R nin her maksimal ideali büyüktür (Tribak, 2015).

Sonuç 3.2.8: R her basit modülü singüler olan bir halka olsun. A bir R-modül, $B \leq A$ ve C, A da B nin bir δ-tümleyeni ise C, A da B nin bir tümleyenidir (Tribak, 2015).

Sonuç 3.2.9: R her maksimal ideali R de büyük olan bir halka olsun. Bu takdirde her δ-tümlenmiş modül tümlenmiştir (Tribak, 2015).

Tanım 3.2.10: A bir modül olsun. $\delta(A) \ll_\delta A$ ve $\delta(A)$, A nın maksimal alt modül ise A ya δ-yerel modül denir (Tribak, 2012; Tribak, 2013).

3.3. Projektif δ-Örtüler

Tanım 3.3.1: A bir modül, P bir projektif modül ve $f: P \to A$ homomorfizması $Çek(f) \ll_\delta P$ koşulunu gerçekleyen bir epimorfizma ise (P, f) ikilisine A modülünün projektif δ-örtüsü denir (Zhou, 2000).

Bir A modülünün her projektif örtüsü aynı zamanda projektif δ-örtüdür.

Lemma 3.3.2: $A = A_1 \oplus A_2 \oplus ... \oplus A_n$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i: P_i \to A_i$ birer projektif δ-örtü olsun. $P = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_n$ olmak üzere $p = \oplus p_i: P \to A$ bir projektif δ-örtüdür (Zhou, 2000).

Lemma 3.3.3: $p: P \rightarrow A$ projektif δ-örtü, Q bir projektif modül, $q : Q \rightarrow A$ epimorfizma olsun. Bu durumda P ve Q nun aşağıdaki koşulları gerçekleyen $P = M \oplus K$ ve $Q = X \oplus Z$ ayrışımları vardır.

i. $M \cong X$,
ii. $p|_M: M \rightarrow A$ projektif δ-örtüdür,
iii. $q|_X: X \rightarrow A$ projektif δ-örtüdür,
iv. K projektif yarı basit modül olmak üzere $K \subseteq Çek(p)$ ve $Z \subseteq Çek(q)$ (Zhou, 2000).

Lemma 3.3.4: P bir projektif modül ve $B \leq P$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. P/B projektif δ-örtüye sahiptir.
ii. $P_1 \leq B, P_2 \cap B \ll_\delta P$ ve $P = P_1 \oplus P_2$ olacak şekildeki $P_1, P_2 \leq P$ alt modülleri vardır (Zhou, 2000).

Tanım 3.3.5: R bir halka olsun. Her R-modül projektif δ-örtüye sahipse R ye δ-mükemmel halka denir. Eğer her basit R-modül projektif δ-örtüye sahipse R ye δ-yarı mükemmel halka denir (Zhou, 2000).

Teorem 3.3.6: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R δ-yarı mükemmel halkadır.
ii. Her sonlu üretilmiş R-modül projektif δ-örtüye sahiptir.
iii. R nin her I sağ ideali $e = e^2 \in R$ ve $T \subseteq \delta(R)$ olmak üzere $I = eR \oplus T$ şeklinde yazılır.
iv. $R/\delta(R)$ yarı basit halkadır ve idempotentler $\delta(R)$ moduna yükseltgenir.
v. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ idempotentlerinin tam ortogonel bir sistemi mevcuttur öyle ki; her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için e_iR basit R-modüldür ya da e_iR bir tek büyük maksimal alt modüle sahiptir.
vi. I, R nin sayılabilir çoklukta üretilmiş sağ ideali olmak üzere R/I bölüm modülü projektif δ-örtüye sahiptir (Zhou, 2000).

Teorem 3.3.7: Bir R halkası aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R δ-mükemmel halkadır.
ii. Her yarı basit R-modül bir projektif δ-örtüye sahiptir.
iii. R δ-yarı mükemmel halkadır ve her A R-modülü için $\delta(A) \ll_\delta A$.
iv. $R/Soc(R)$ sağ mükemmel halkadır ve idempotentler $\delta(R)$ moduna yükseltgenir (Zhou, 2000).

Lemma 3.3.8: R bir halka, $J = Jac(R)$ ve $T = Soc(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R yarı mükemmeldir.
ii. R δ-yarı mükemmeldir ve yarı yereldir.

iii. R δ-yarı mükemmeldir ve $T/(T \cap J)$ sonlu üretilmiştir (Büyükaşık ve Lomp, 2010).

3.4. δ-Tümlenmiş ve δ-Lifting Modüller

Lemma 3.4.1: A bir modül, B ve U, A nın birer alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $A = B + U$ ve $B \cap U \ll_\delta U$ dur.
2. $A = B + U$ olsun. Bu durumda U nun U/C singüler olacak şekildeki herhangi bir C öz alt modülü için $A \neq B + C$ dir (Koşan, 2007).

Tanım 3.4.2: Eğer B ve U bir A modülünün Lemma 3.4.1 deki denk koşulları gerçekleyen alt modülleri iseler U ya B nin A da δ-tümleyeni denir. Eğer A nın her alt modülü A da bir δ-tümleyene sahipse A ya δ-tümlenmiştir denir (Koşan, 2007).

Tanım 3.4.3: A bir modül, $B \leq A$ herhangi bir alt modülü olsun. $M \leq B$ ve $B \cap K \ll_\delta A$ olmak üzere A nın $A = M \oplus K$ şeklinde bir ayrışımı bulunabiliyorsa A ya δ-lifting modül denir (Koşan, 2007).

Önerme 3.4.4: A bir modül ve L, $N \leq A$ olmak üzere N, L nin A da bir δ-tümleyeni olsun. Bu takdirde

i. $W \leq L$ için $W + N = A$ ise N, W nın A da bir δ-tümleyenidir.
ii. $C \ll_\delta A$ ise $N, L + C$ nin A da bir δ-tümleyenidir.
iii. $C \ll_\delta A$ ise $C \cap N \ll_\delta N$ ve $\delta(N) = N \cap \delta(A)$ dır.
iv. $U \leq L$ için $(N + U)/U, L/U$ nun A/U da bir δ-tümleyenidir.
v. $\delta(A) \ll_\delta A$ ve $p: A \to A/\delta(A)$ kanonik epimorfizma olmak üzere $A/\delta(A) = p(L) + p(N)$ dir (Nematollahi, 2009).

Lemma 3.4.5: A bir modül, C, U ve Y, A nın birer alt modülü olsun. C, U nun A da bir δ-tümleyeni ve U, Y nin A da bir δ-tümleyeni ise U, C nin A da bir δ-tümleyenidir (Koşan, 2007).

Lemma 3.4.6: A δ-tümlenmiş bir modül olsun. Bu durumda $A/\delta(A)$ yarı basittir (Koşan, 2007).

İspat: $\delta(A) \leq B \leq A$ olacak şekildeki A nın bir B alt modülü için A δ-tümlenmiş olduğundan $A = B + X$ ve $B \cap X \ll_\delta X$ olacak şekilde bir $X \leq A$ δ-tümleyeni mevcuttur. Buradan $A/\delta(A) = B/\delta(A) + (X + \delta(A))/\delta(A)$ ve $(B/\delta(A)) \cap (X + \delta(A))/\delta(A) = ((B \cap X) + \delta(A))/\delta(A) = \{\delta(A)\}$ bulunur ki bu $A/\delta(A)$ nın her alt modülünün bir direkt toplam terimi olması demektir. Dolayısıyla, $A/\delta(A)$ yarı basittir.

Teorem 3.4.7: A δ-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde A nın $A = A_1 \oplus A_2$ koşulunu gerçekleyen A_1 yarı basit alt modülü ve $\delta(A_2) \trianglelefteq A_2$ olan bir A_2 alt modülü mevcuttur (Koşan, 2007).

Lemma 3.4.8: A π-projektif bir modül olsun. B ve C, A da birbirinin δ-tümleyenleri iseler $B \cap C$ projektif ve yarı basittir. Ayrıca A projektif ise B ve C de projektiftir (Koşan, 2007).

Lemma 3.4.9: $A = M + K$ olsun. A/M bir projektif δ-örtüye sahipse K, M nin bir δ-tümleyenini içerir (Koşan, 2007).

İspat: $f: P \longrightarrow A/M$ projektif δ-örtü ve $p: K \longrightarrow A/M$ doğal homomorfizma olsun. P projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & A/M \\
& K \arrow[u, "p"']
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani $p \circ g = f$ olacak şekilde bir $g: P \longrightarrow K$ homomorfizması vardır.

$(p \circ g)(P) = f(P)$ olduğundan $M + g(P) = A$ ve $M \cap g(P) = g(\text{Ç}ek(f))$ eşitlikleri elde edilebilir. f projektif δ-örtü olduğundan $\text{Ç}ek(f) \ll_{\delta} P$ olup buradan g homomorfizması için $g\big(\text{Ç}ek(f)\big) \ll_{\delta} g(P)$ olacağından $M \cap g(P) \ll_{\delta} g(P)$ bulunur. O halde $g(P)$, M nin K içinde bir δ-tümleyenidir.

Önerme 3.4.10: P bir projektif modül olsun. P nin δ-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul P nin δ-lifting modül olmasıdır (Koşan, 2007).

Teorem 3.4.11: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i. R δ-yarı mükemmel bir halkadır.
ii. Her sonlu üretilmiş modül δ-tümlenmiştir.
iii. Her sonlu üretilmiş projektif modül δ-tümlenmiştir.
iv. Her sonlu üretilmiş projektif modül δ-liftingdir.
v. R nin her ideali R de bir δ-tümleyene sahiptir (Koşan, 2007).

Teorem 3.4.12: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i. R δ-mükemmel bir halkadır.
ii. Her R-modül δ-tümlenmiştir.
iii. Her projektif modül δ-tümlenmiştir.
iv. Her projektif modül δ-liftingdir (Koşan, 2007).

Tanım 3.4.13: A bir modül olsun. A nın dual sonlu her alt modülü A da bir δ-tümleyene sahipse A ya dual sonlu δ-tümlenmiş modül denir (Al-Takhman, 2007).

3.5. Zayıf δ-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.5.1: A bir modül ve $L, N \leq A$ olsun. $A = L + N$ ve $L \cap N \ll_\delta A$ ise N ye L nin A da bir zayıf δ-tümleyeni denir.

Eğer A nın her alt modülü A da bir zayıf δ-tümleyene sahipse A ya zayıf δ-tümlenmiş modül denir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

Tanım 3.5.2: A bir modül, $L \leq A$ olsun. $A = L + N$ şartını sağlayan her N alt modülü için $N' \leq N$ olacak şekilde A da bir N' zayıf δ-tümleyeni varsa L ye A da bol zayıf δ-tümleyene sahiptir denir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

Eğer A nın her alt modülü A da bol zayıf δ-tümleyene sahipse A ya bol zayıf δ-tümleyenmiş modül denir.

Lemma 3.5.3: $f: A \to B$ bir homomorfizma ve A nın $Çek(f)$ yi kapsayan bir U alt modülü A da zayıf δ-tümleyen ise $f(U)$ da $f(A)$ da bir zayıf δ-tümleyendir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: U, A da C nin zayıf δ-tümleyeni olsun. Bu durumda $A = U + C$ ve $U \cap N \ll_\delta A$ dır. f homomorfizma olduğundan $f(A) = f(U + C) = f(U) + f(C)$ ve Lemma 3.2.3 (ii) özelliği gereği $f(L \cap N) \ll_\delta f(A)$ dır. $Çek(f) \leq U$ olduğundan $f(U \cap N) = f(U) \cap f(C) \ll_\delta f(A)$ olup $f(L)$, $f(A)$ da $f(C)$ nin zayıf δ-tümleyenidir.

Önerme 3.5.4: Zayıf δ-tümleyenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $f: A \to B$ bir homomorfizma ve A zayıf δ-tümlenmiş modül olsun. $X, f(A)$ nın bir alt modülü olmak üzere A zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $f^{-1}(X), A$ da bir δ-tümleyene sahiptir. Lemma 3.5.3 den $f(f^{-1}(X)) = X \cap f(A) = X$, $f(A)$ da bir zayıf δ-tümleyene sahiptir.

Sonuç 3.5.5: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün bölüm modülü de zayıf δ-tümlenmiştir.

Tanım 3.5.6: A ve B birer R-modül ve $f: A \to B$ bir epimorfizma olsun. Eğer $Çek(f) \ll_\delta A$ ise f ye bir δ-küçük örtü denir (Zhou, 2000).

Lemma 3.5.7: $f: A \to B$ δ-küçük örtü ve $U \ll_\delta B$ ise $f^{-1}(U) \ll_\delta A$ dır (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: A/S singüler olacak şekilde bir $S \leq A$ için $f^{-1}(U) + S = A$ olsun. Bu durumda $f(f^{-1}(U) + S) = f(f^{-1}(U)) + f(S) = U \cap Gör(f) + f(S) = U \cap B + f(S) = U + f(S) = B$ dir. $B/f(S)$ singüler ve $U \ll_\delta B$ olduğundan $f(S) = B$ olup buradan $f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(B)$ yani $S + Çek(f) = A$ elde edilir. $f: A \to B$ δ-küçük örtü olduğundan $Çek(f) \ll_\delta A$ olup A/S nin singülerliği gereği $S = A$ bulunur.

Lemma 3.5.8: $f: A \to B$ δ-küçük örtü ve $f(U), B$ de zayıf δ-tümleyene sahip olacak şekilde A nın bir alt modülü olsun. Bu takdirde $U,\ A$ da zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat : $f(U), B$ de zayıf δ-tümleyene sahip olduğundan bir $S \leq B$ alt modülü için $f(U) + S = B$ ve $f(U) \cap S \ll_\delta B$ dir. Buradan $f^{-1}(f(U) + S) = f^{-1}(f(U)) + f^{-1}(S) = U + f^{-1}(S) = A$ ve Lemma 3.5.7 gereği $U \cap f^{-1}(S) \leq f^{-1}(f(U) \cap S) \ll_\delta f^{-1}(B) = A$ olup $f^{-1}(S), U$ da A nın zayıf bir δ-tümleyenidir.

Sonuç 3.5.9: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün her δ-küçük örtüsü de zayıf δ-tümlenmiştir.

Lemma 3.5.10: $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ modül homomorfizmaları birer δ-küçük örtü ise $gf: A \to C$ bir δ-küçük örtüdür (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: A nın A/S singüler olacak şekilde bir S alt modülü için $Çek(gf) + S = A$ olsun. $f(Çek(gf) + S) = f(A) = B$ olup $f(Çek(gf) \leq Çek(g)$ olduğundan $Çek(g) + f(S) = B$ yazılır. $B/f(S)$ singüler ve $Çek(g) \ll_\delta B$ olduğundan $f(S) = B = f(A)$ dır. Buradan $S + Çek(f) = A + Çek(f) = A$ olmak üzere $Çek(f) \ll_\delta A$ ve A/S singüler olduğundan $S = A$ elde edilir.

Önerme 3.5.11: A bir modül, C, A nın bir alt modülü olsun. C, A da bir B alt modülünün zayıf δ-tümleyeni ve $S \ll_\delta A$ ise C, A da $B + S$ nin de bir zayıf δ-tümleyenidir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

Lemma 3.5.12: A bir modül ve $C, A_1 \leq A$ olsun. A_1 zayıf δ-tümlenmiş ve $A_1 + C, A$ da zayıf δ-tümleyene sahip ise $C,\ A$ da bir zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $A_1 + C,\ A$ da bir $B \leq A$ zayıf δ-tümleyene sahip ise $A_1 + C + B = A$ ve $(A_1 + C) \cap B \ll_\delta A$ dır. A_1 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $(C + B) \cap A_1$ alt modülü de A_1 de bir U zayıf δ-tümleyenine sahiptir. Buradan $A = A_1 + C + B = A_1 \cap U + (C + B) + C + B = C + U + B$ dir. Ayrıca $(C + B) \cap U = [(C + B) \cap A_1] \cap U \ll_\delta A_1$ olup $C \cap (U + B) \leq [(C + U) \cap B] \leq [(C + A_1) \cap B] + [(C + B) \cap U] \ll_\delta A$ elde edilir. Sonuç olarak $B + U, C$ nin A da bir zayıf δ-tümleyenidir.

Önerme 3.5.13: A_1 ve A_2 zayıf δ-tümlenmiş modül ve $A = A_1 + A_2$ ise A da zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: A nın her B alt modülü için $A_1 + (A_2 + B),\ A$ da 0 aşikar zayıf δ-tümleyenine sahiptir. A_1 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan Lemma 3.5.12 gereği $A_2 + B, A$ da zayıf δ-tümleyene sahiptir. A_2 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan yine Lemma 3.5.12 gereği B, A da bir zayıf δ-tümleyene sahiptir.

Sonuç 3.5.14: Zayıf δ-tümlenmiş modüllerin her sonlu toplamı da zayıf δ-tümlenmiştir.

Önerme 3.5.15: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün her tümleyen alt modülü ve her direkt toplam terimi de zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: A zayıf δ-tümlenmiş bir modül ve $B \leq A$ tümleyen alt modülü olsun. O halde $C \leq A$ alt modülü için $B + C = A$ ve $B \cap C \ll_{\delta} B$ dir. A zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $A/C \cong B + C/C \cong B/B \cap C$ izomorfizmi gereği bölüm modülü de zayıf δ-tümlenmiştir. $B \cap C \ll_{\delta} B$ olduğundan $\pi: B \to B/B \cap C$ doğal epimorfizması bir δ-küçük epimorfizma olup B küçük örtüsü de zayıf δ-tümlenmiştir. Ayrıca her direkt toplam terimi δ-tümleyen olduğundan zayıf δ-tümlenmiştir.

Teorem 3.5.16: A bir modül, C singüler ve A nın bir B maksimal alt modülünün zayıf δ-tümleyeni olacak şekilde bir alt modülü olsun. Eğer $C + L, A$ da bir zayıf δ-tümleyene sahip ise L de A da bir zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $X, C + L$ nin A da bir zayıf δ-tümleyeni olsun. O halde $A = (C + L) + X = (C + X) + L$ ve $X \cap (C \cap L) \ll_{\delta} A$ dır. Eğer $C \cap (X + L) \subseteq C \cap B \ll_{\delta} A$ ise bu takdirde $L \cap (C + X) \leq X \cap (C + L) + C \cap (X + L) \ll_{\delta} A$ olup sonuçta $C + X, L$ nin A da bir zayıf δ-tümleyenidir. Kabul edelim ki $C \cap (X + L) \nsubseteq C \cap B$ olsun. $C/C \cap B \cong C + B/B = A/B$ olduğundan $C \cap B$, C nin maksimal alt modülüdür. Dolayısıyla $C \cap B + C \cap (X + U) = C$ olup $C \cap B \ll_{\delta} A$ ve $A/(X + L) \cong C/[C \cap (X + L)]$ singüler olduğundan $A = X + L + C = X + L + (C \cap B) + C \cap (X + L) = X + L + C \cap B$ ifadesinden $A = X + L$ elde edilir. $X \cap L \leq X \cap (C + L) \ll_{\delta} A$ olduğundan X, L nin A da zayıf δ-tümleyenidir.

Tanım 3.5.17: A bir modül ve $L \leq A$ olsun. $L + N = A$ ve $L \cap N \leq \delta(A)$ olacak şekilde bir $N \leq A$ mevcut ise N ye L nin A da genelleştirilmiş zayıf δ-tümleyeni denir (Talabi ve Talaee, 2009).

$\delta(A) \ll_{\delta} A$ ve $\frac{A}{\delta(A)}$ singüler olma koşullarını gerçekleyen bir A modülünde $\frac{A}{\delta(A)}$ nın yarı basit olması için gerekli ve yeterli koşul A nın genelleştirilmiş zayıf δ-tümlenmiş olması ile verilir (Talebi ve Talaee, 2009, Teorem 3.7).

Lemma 3.5.18: Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A δ-lifting ise $\frac{A}{\delta(A)}$ yarı basittir.
2. A zayıf δ-tümlenmiş ise $\frac{A}{\delta(A)}$ yarı basittir.

Tanım 3.5.19: Bir A modülünün her B alt modülü için

$B + T = A$ ve $B \cap T \leq Soc_{\delta}(T)$; $Soc_{\delta}(T) = Soc(T) \cap \delta(T)$ olacak şekilde bir $T \leq A$ mevcut ise A ya δ_{ss}-tümlenmiş modül denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Tanım 3.5.20: A bir modül olsun. $g: N \to K$ epimorfizması ve $f: A \to K$ homomorfizması verildiğinde sonlu üretilmiş her $A_0 \leq A$ için $gh|_{A_0} = f|_{A_0}$ olacak şekilde bir $h: A \to N$ homomorfizması mevcut ise A ya yerel projektif modül denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020). Açıkça her projektif modül yerel projektiftir.

Tanım 3.5.21: A yerel projektif bir modül ve $B \leq Soc(A)$ ise $B \ll_{\delta} A$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Lemma 3.5.22: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

1. ${}_{R}R$ tümlenmiştir.
2. R δ-yarı mükemmel bir halkadır ve $\delta(R) = Soc({}_{R}R)$.
3. $\frac{R}{Soc({}_{R}R)}$ yarı basittir ve idempotentler $Soc({}_{R}R)$ ye yükseltgenir.
4. Her projektif sol R-modül δ_{ss}-tümlenmiştir.
5. Her sol R-modül (bol) δ_{ss}-tümlenmiştir.
6. Her sol R-modülün her bir maksimal alt modülü bir δ_{ss}-tümleyene sahiptir.
7. R nin her idealinin R de bir δ_{ss}-tümleyeni vardır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Tanım 3.5.23: Yukarıdaki teoremin şartlarından birini gerçekleyen R halkasına sol δ_{ss}-mükemmel halka denir (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

Lemma 3.5.24: A bir modül ve B de A nın $B \leq \delta(A)$ olacak şekilde bir alt modülü olsun. Bu takdirde, $B \ll_{\delta} A$ dır (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. ZAYIF δ_{ss}-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Bilinmektedir ki bir A modülünün her L alt modülü için $L + N = A$ ve $L \cap N \ll_{\delta} A$ olacak şekilde A da bir N zayıf δ-tümleyeni mevcut ise A ya zayıf δ-tümlenmiş modül denir. Bu bölümde aşağıda verilen lemma kullanılarak zayıf δ-tümlenmiş modüllerden daha güçlü olan zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüller tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.1: A bir modül ve $L \leq A$ olsun. $L + N = A$ ve $L \cap N \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(A)$ olacak şekilde bir $N \leq A$ alt modülü mevcut ise N ye L nin A da zayıf δ_{ss}-tümleyeni denir ve burada $\mathrm{Soc}_{\delta}(A) = \mathrm{Soc}(A) \cap \delta(A)$ dır.

Lemma 4.1.2: $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{K}$ bir modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $f(Soc_{\delta}(A)) \leq Soc_{\delta}(K)$. Özel olarak $A \leq K$ ise $Soc_{\delta}(A) \leq Soc_{\delta}(K)$ dır.

İspat: f bir modül homomorfizması olduğundan verilen alt modüllerin tam değişmezliği gereği $f(Soc(A)) \leq Soc(K)$ ve $f(\delta(A)) \leq \delta(K)$ dır. Buradan, $f(Soc_{\delta}(A)) = f(Soc(A) \cap \delta(A)) \leq f(Soc(A)) \cap f(\delta(A)) \leq Soc(K) \cap \delta(K) = Soc_{\delta}(K)$ elde edilir. Özel olarak, f yerine A dan K ya içerme dönüşümü göz önüne alınırsa $Soc_{\delta}(A) \leq Soc_{\delta}(K)$ ifadesi kolaylıkla elde edilebilir.

Tanım 4.1.3: A nın her L alt modülü zayıf δ_{ss}-tümleyene sahip ise A ya zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül denir.

Açıktır ki her zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül zayıf δ-tümlenmiştir. Ancak tersini söylemek her zaman mümkün değildir. Bunun bir örnekle doğrulanması adına aşağıdaki lemma verilmektedir.

Lemma 4.1.4: A bir zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül ve $Soc(A) = 0$ olsun. Bu takdirde $A = 0$ dır.

İspat: L, A nın herhangi bir alt modülü olsun. A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül olduğundan $A = L + N$ ve $L \cap N \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(A)$ olacak şekilde bir $N \leq A$ alt modülü mevcuttur. Ayrıca $\mathrm{Soc}_{\delta}(A) = \mathrm{Soc}(A) \cap \delta(A) = 0 \cap \delta(A) = 0$ olduğundan $0 \leq L \cap N \leq Soc_{\delta}(A) = 0$ olup $L \cap N = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $A = L \oplus N$ olur. Böylece A modülü yarı basit olup Sonuç 2.6.6 gereği $Soc(A) = A = 0$ dır.

Örnek 4.1.5: $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ nun (Clark vd., 2006, 17.15) gereği zayıf tümlenmiş (dolayısıyla zayıf δ-tümlenmiş) olduğu bilinmektedir. Buna karşılık $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ hiçbir maksimal alt modüle sahip olmadığından $\delta(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ olur. Ayrıca $Soc({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}) = 0$ dır. Böylece Lemma 4.1.4 gereği ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olmayan bir modül örneğidir.

Şimdi bir modülün zayıf δ_{ss}-tümleyenlerinin karakterizasyonu niteliğinde olacak bir lemmaya yer verilecektir.

Lemma 4.1.6: A bir modül ve $L, N \leq A$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $A = L + N$ ve $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ dır.

(2) N, A da L nin zayıf tümleyeni ve $L \cap N$ yarı basittir.

(3) $A = L + N, L \cap N \leq \delta(\mathrm{A})$ ve $L \cap N$ yarı basittir.

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) $A = L + N$ ve $L \cap N \leq \mathrm{Soc}_\delta(A)$ olsun. Kesişim özelliğinden $\mathrm{Soc}_\delta(\mathrm{A}) \leq \delta(\mathrm{A})$ ve $\mathrm{Soc}_\delta(\mathrm{A}) \leq \mathrm{Soc}(\mathrm{A})$ olduğu açıktır. Buradan geçişme gereği $L \cap N \leq \delta(\mathrm{A})$ ve $L \cap N \leq Soc(A)$ olduğu açıktır. $L \cap N$ yarı basit ve $L \cap N \leq \delta(A)$ olduğundan Lemma 3.5.24 gereği $L \cap N \ll_\delta A$ elde edilir. Sonuç olarak, N, L nin A da zayıf δ-tümleyenidir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) N, L nin A da zayıf tümleyeni ise $A = L + N$ ve $L \cap N \ll_\delta A$ dır. Buradan $L \cap N \leq \delta(A)$ olduğu açıktır. Son olarak, hipotez gereği $L \cap N$ nin yarı basitliği direkt sağlanmaktadır.

(3) $\Longrightarrow$ (1) $A = L + N$, $L \cap N \leq \delta(\mathrm{A})$ ve $L \cap N$ yarı basit olsun. $Soc_\delta(A) = \delta(A) \cap Soc(A)$ olduğundan açıkça $Soc_\delta(A) \leq Soc(A)$ ve $Soc_\delta(A) \leq \delta(A)$ dır. Ayrıca $L \cap N$ yarı basit olduğundan $L \cap N \leq Soc(A)$ dır. Buna göre $L \cap N \leq Soc(A) \cap \delta(A)$ olup $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ elde edilir.

Tanım 4.1.7: A bir modül olsun. $\frac{A}{\delta(A)}$ yarı basit ise A ya δ-yarı yerel modül denir. Özel olarak, $_R R$ δ-yarı yerel modül ise R ye δ-yarı yerel halka denir.

Aşağıdaki teoremde daha önce Talebi ve Talaee tarafından genelleştirilmiş zayıf δ-tümlenmiş modüller için verildiğini ifade ettiğimiz önemli bir karakterizasyon teoremi bizim modüllerimize uyarlanmıştır.

Teorem 4.1.8: Bir A modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $\frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir.

(2) Bir A modülünün her L alt modülü için $L + N = A$, $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ olacak şekilde bir $N \leq A$ alt modülü vardır.

(3) A nın $A = A_1 \oplus A_2$ olacak şekilde bir parçalanışı vardır öyle ki burada A_1 yarı basit, $Soc_\delta(A) \trianglelefteq A_2$ ve $\frac{A_2}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir.

İspat: (3) $\Longrightarrow$ (1) Hipotez gereği $A = A_1 \oplus A_2$ için $\frac{A}{Soc_\delta(A)} = \frac{A_1 + Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} + \frac{A_2}{Soc_\delta(A)}$ olup $\frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir.

(1) $\Longrightarrow$ (2) $\forall L \leq A$ için $\frac{L + Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ direkt toplam terimi olduğundan $\frac{A}{Soc_\delta(A)} = \frac{L + Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \oplus \frac{N}{Soc_\delta(A)}$ olacak şekilde $\frac{N}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ vardır. Böylece,

$A = (L + Soc_\delta(A)) + N = L + N$ elde edilir. Diğer taraftan, $\frac{L+Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \cap \frac{N}{Soc_\delta(A)} = \frac{(L+Soc_\delta(A))\cap N}{Soc_\delta(A)} = 0 = \frac{Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)}$ olduğundan $(Soc_\delta(A) + L) \cap N = Soc_\delta(A)$ olup $Soc_\delta(A) \leq N$ olduğundan Modüler kural gereği $Soc_\delta(A) + (L \cap N) = Soc_\delta(A)$ elde edilir. Bu durumda $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ kapsaması sağlanır.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Her modülün bir komplementinin mevcut olduğu bilinmektedir. Özel olarak, $Soc_\delta(A) \leq A$ için $Soc_\delta(A) \cap A_1 = 0$ koşulunu gerçekleyen bir $A_1 \leq A$ komplement alt modülü mevcuttur. $A_1 \cong \frac{A_1 \oplus Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ olup hipotez gereği $\frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basit olduğundan $\frac{A_1 \oplus Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)}$ alt modülü ve dolayısıyla izomorfu olan A_1 yarı basittir. Diğer taraftan, $\frac{A_1 \oplus Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ direkt toplam terimi olduğundan $\frac{A_1 \oplus Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} \oplus \frac{A_2}{Soc_\delta(A)} = \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ olacak şekilde $\frac{A_2}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basit alt modülü vardır. Ayrıca $Soc_\delta(A) = (A_1 \oplus Soc_\delta(A)) \cap A_2 = (Soc_\delta(A) \oplus A_1) \cap A_2 = Soc_\delta(A) \oplus (A_1 \cap A_2)$ eşitliği Modüler kural gereği kolayca elde edilir. Buradan açıkça $A_1 \cap A_2 = 0$ olup $A = A_1 \oplus A_2$ elde edilir. Son olarak, $Soc_\delta(A) \trianglelefteq A_2$ olduğu gösterilmelidir. A_1, $Soc_\delta(A)$ nın komplementi olduğundan Tanım 2.6.9. gereği $A_1 \oplus Soc_\delta(A) \trianglelefteq A = A_1 \oplus A_2$ dir. $i_2 : A_2 \to A_1 \oplus A_2$ 2.-injeksiyon dönüşümü göz önüne alınırsa $A_1 \oplus A_2 \leq A_1 \oplus Soc_\delta(A)$ için $i_2^{-1}(A_1 \oplus Soc_\delta(A)) = Soc_\delta(A) \trianglelefteq A_2$ komplement vardır (Tanım 2.6.9).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Her $\frac{L}{Soc_\delta(A)} \leq \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ için hipotez gereği $L + N = A$, $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ olacak şekilde bir $N \leq A$ zayıf δ_{ss}-tümleyeni vardır. Bu durumda, $\frac{L}{Soc_\delta(A)} \oplus \frac{N+Soc_\delta(A)}{Soc_\delta(A)} = \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ olacağından $\frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir.

Önerme 4.1.9: A bir zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül ve $L, N \leq A$ için $A = L + N$ olsun. Bu takdirde, N, L nin bir N' zayıf δ_{ss}-tümleyenini içerir.

İspat: $L \cap N \leq A$ için kabul gereği $L \cap N + K = A$ ve $(L \cap N) \cap K \leq Soc_\delta(A)$ olacak şekilde $K \leq A$ zayıf δ_{ss}-tümleyeni vardır. $N = N \cap A = N \cap ((L \cap N) + K) = (L \cap N + K) \cap N = (L \cap N) + (K \cap N)$ ifadesi kullanılarak $A = L + N = L + [(L \cap N) + (K \cap N)] = L + (K \cap N)$ olup buradan $A = L + (K \cap N)$ elde edilir. Ayrıca, $L \cap (K \cap N) = (L \cap K) \cap N \leq Soc_\delta(A)$ dır. Sonuç olarak $K \cap N \leq N, A$ da L nin bir zayıf δ_{ss}-tümleyeni olur.

Önerme 4.1.10: A bir δ-yarı yerel modül ve $\delta(A) \leq Soc(A)$ olsun. O halde A zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

İspat: Hipotez gereği $\delta(A) \leq Soc(A)$ olduğundan $Soc_\delta(A) = \delta(A) \cap Soc(A) = \delta(A)$ olduğu açıktır. A, δ-yarı yerel olduğundan $\frac{A}{\delta(A)} = \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir. Sonuç olarak, Teorem 4.1.8 gereği A zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

Aşağıda verilen önermenin sonuçları sayesinde ileride zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin halka karakterizasyonları kurgulanabilecektir.

Önerme 4.1.11: A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül ve $L \ll_{\delta} A$ olsun. O halde $L \leq Soc_{\delta}(A)$ dır.

İspat: A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül olup hipotez gereği $L \ll_{\delta} A$ için $L + N = A$, $L \cap N \leq Soc_{\delta}(A)$ olacak şekilde $\exists N \leq A$ vardır. $L + N = A$ ve $L \ll_{\delta} A$ olduğundan δ-küçüklük tanımı gereği projektif yarı basit bir $Z \leq L$ için $Z \oplus N = A$ olup $Z \leq L$ için Modüler kural gereği $L = A \cap L = [Z \oplus N] \cap L = Z \oplus [N \cap L]$ olup Sonuç 2.6.7 den L yarı basittir. Böylece $L \leq Soc(A)$ ve $L \leq \delta(A)$ olduğundan $L \leq Soc(A) \cap \delta(A) = Soc_{\delta}(A)$ elde edilir.

Sonuç 4.1.12: A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül ve $\delta(A) \ll_{\delta} A$ olsun. Bu takdirde $\delta(A) \leq Soc(A)$ dır.

İspat: Önerme 4.1.11 gereği, $\delta(A) \leq Soc_{\delta}(A)$ olup $\delta(A) \leq Soc_{\delta}(A) = Soc(A) \cap \delta(A) \leq \delta(A)$ ifadesi $\delta(A) = Soc_{\delta}(A)$ olmasını gerektirir. Bu ise $\delta(A) \leq Soc(A)$ olması ile mümkündür.

Sonlu üretilmiş modüller δ-küçük δ-radikallere sahip oldukları için aşağıdaki sonuç doğrudur.

Sonuç 4.1.13: A sonlu üretilmiş bir modül olsun. A nın zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olması için gerekli ve yeterli koşul A nın δ-yarı yerel ve $\delta(A)$ nın yarı basit olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş ise Teorem 4.1.8 ve Sonuç 2.6.7 gereği $\dfrac{\frac{A}{Soc_{\delta}(A)}}{\frac{\delta(A)}{Soc_{\delta}(A)}} \cong \dfrac{A}{\delta(A)}$ yarı basit olup A δ-yarı yereldir. Diğer taraftan, A sonlu üretilmiş olduğundan $\delta(A) \ll_{\delta} A$ dır. Bu durumda Sonuç 4.1.12 gereği $\delta(A) \leq Soc(A)$ olup $\delta(A)$ yarı basittir.

($\Longleftarrow$) A, δ-yarı yerel modül ve $\delta(A) \leq Soc(A)$ olsun. Bu şartlar altında Önerme 4.1.10 dan A, zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüldür.

Tanım 4.1.14: A bir modül olsun. $\delta(A) \leq L \leq A$ olacak şekilde her L alt modülü A da zayıf tümleyene sahip ise A ya zayıf δ-radikal tümlenmiş modül denir.

Teorem 4.1.15: A bir modül ve $\delta(A) \ll_{\delta} A$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüldür.

(2) A δ-yarı yerel ve $\delta(A), A$ da zayıf δ_{ss}-tümleyene sahiptir.

(3) A δ-yarı yerel ve $\delta(A) \leq Soc(A)$ dır.

(4) A zayıf δ-tümlenmiş ve $\delta(A) \leq Soc(A)$ dır.

(5) A zayıf δ-radikal tümlenmiş ve $\delta(A) \leq Soc(A)$ dır.

İspat:

(1) $\Longrightarrow$ (2) A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül olsun. Açıkça A nın her alt modülü bir zayıf δ_{ss}-tümleyene sahiptir. Özel olarak δ-radikalide bir δ_{ss}-tümleyene sahiptir. Diğer yandan, $\mathrm{Soc}_{\delta}(\mathrm{A}) \leq \delta(A) \leq A$ ilişkisi ve buna dayanarak $\frac{\frac{A}{\mathrm{Soc}_{\delta}(A)}}{\frac{\delta(A)}{\mathrm{Soc}_{\delta}(A)}} \cong \frac{A}{\delta(A)}$ izomorfizmi göz önüne alındığında A nın zayıf δ_{ss}-tümlenmişliği gereği Teorem 4.1.8 ve Sonuç 2.6.7 den $\frac{A}{\delta(A)}$ yarı basit olup A δ-yarı yereldir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) A, δ-yarı yerel ve $\delta(A), A$ da N zayıf δ_{ss}-tümleyenine sahip olsun. Böylece $\delta(A) + N = A$ ve $\delta(A) \cap N \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(\mathrm{A}) \leq Soc(A)$ olur. Yarı basit bir modülün her alt modülü de yarı basit olduğundan $\delta(A) \cap N$ yarı basittir. $\delta(A) \ll_{\delta} A$ ve $A = \delta(A) + N$ olduğundan Lemma 3.2.2 gereği projektif yarı basit bir $Y \leq \delta(A)$ için $A = Y \oplus N$ dir. Modüler kural gereği $\delta(A) = Y \oplus (N \cap \delta(A))$ eşitliği elde edilir. Buradan Sonuç 2.6.7 gereği yarı basit iki modülün direkt toplamı olan $\delta(A)$ yarı basittir.

(3) $\Longrightarrow$ (4) A δ-yarı yerel bir modül olsun. Bu durumda $\frac{A}{\delta(A)}$ yarı basittir. Dolayısıyla, $\forall L \leq A$ için $\frac{L+\delta(A)}{\delta(A)} \leq_{\oplus} \frac{A}{\delta(A)}$ dır. Buna göre, $\exists \frac{N}{\delta(A)} \leq \frac{A}{\delta(A)}$ için $\frac{L+\delta(A)}{\delta(A)} \oplus \frac{N}{\delta(A)} = \frac{A}{\delta(A)}$ dır. Buradan, $\delta(\mathrm{A}) \leq N$ olduğundan $\left(L + \delta(A)\right) + N = L + N = A$ elde edilir. Ayrıca, $\frac{L+\delta(A)}{\delta(A)} \cap \frac{N}{\delta(A)} = \frac{(L+\delta(A)) \cap N}{\delta(A)} = \frac{(\delta(A)+L) \cap N}{\delta(A)} = \frac{\delta(A)}{\delta(A)} = 0_{\frac{A}{\delta(A)}}$ olduğundan, Modüler kuralından $\delta(A) + (L \cap N) = \delta(A)$ elde edilir. Buna göre, $L \cap N \leq \delta(A)$ olup hipotezden $\delta(A) \ll_{\delta} A$ olduğundan $L \cap N \ll_{\delta} A$ dır. Buna göre, A zayıf δ-tümlenmiştir.

(4) $\Longrightarrow$ (5) A zayıf δ-tümlenmiş modül ve A nın her alt modülü bir zayıf δ-tümleyene sahiptir. Her alt modül zayıf δ-tümleyene sahip olduğuna göre $\delta(A)$ yı kapsayan alt modülleride zayıf δ-tümleyene sahiptir.

(5) $\Longrightarrow$ (1) $\forall L \leq A$ için $\delta(A) \leq L + \delta(A) \leq A$ olup hipotez gereği $L + \delta(A) \leq \delta(A)$ için $\left(L + \delta(A)\right) + N = A$, $\left(L + \delta(A)\right) \cap N \ll_{\delta} A$ olacak şekilde $\exists N \leq A$ vardır. $\delta(A) \ll_{\delta} A$ olduğundan $\delta(A) + L + N = A$ için $P \oplus (L + N) = A$ olacak şekilde projektif yarı basit bir $P \leq \delta(A)$ alt modülü Lemma 3.2.2. gereği vardır. Buradan, $L + (P + N) = A$ ve $L \cap (P + N) \leq [P \cap (L + N)] + [N \cap (L + P)]$ için, $P \cap (L + N) \leq P \ll_{\delta} P \leq A$ ve P projektif yarı basit olduğundan $P \cap (L + N) \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(A)$ dır. Diğer taraftan, $N \cap (L + P) \leq N \cap \left(L + \delta(A)\right) \ll_{\delta} A$ olduğundan hipotez gereği $N \cap (L + P) \leq \delta(A) \leq Soc(A)$ olup $N \cap (L + P) \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(A)$ elde edilir. Sonuç olarak, $L \cap (P + N) \leq [P \cap (L + N)] + [N \cap (L + P)] \leq \mathrm{Soc}_{\delta}(A)$ olur. Buna göre, A zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

Teorem 4.1.15 kullanılarak her zayıf δ-tümlenmiş modülün zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül olmadığı örneklenebilir.

Örnek 4.1.16: $R = \mathbb{Z}$ ve $A = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_8$ olsun.

$\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_8$ yerel olduğundan tümlenmiş dolayısıyla δ-tümlenmiştir. Bu durumda, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_8$ in zayıf δ-tümlenmiş olduğu açıktır. Bununla birlikte $\delta(\mathbb{Z}_8) = Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \ll_\delta \mathbb{Z}_8$ ve $Soc(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\} = 4\mathbb{Z}_8$ olup $\delta(\mathbb{Z}_8) \nleq Rad(\mathbb{Z}_8)$ dir. Buna göre Teorem 4.1.15 gereği $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_8$, zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül olamaz.

Yarı yerel halkaların sınıfının tümlenmiş halkaların sınıfını (yani yarı mükemmel halkaları) kapsadığı iyi bilinmektedir. Şimdi Sonuç 4.1.13 kullanılarak bir R halkası için, $_RR$ modülü zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olduğunda $_RR$ nin δ_{ss}-tümlenmiş modül olduğu gösterilecektir.

Sonuç 4.1.17: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $_RR$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

(2) R δ-yarı yerel ve $\delta(R) \leq Soc(_RR)$.

(3) $_RR$ δ_{ss}-tümlenmiştir.

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) Her R halkası sonlu üretilmiş R-modül gözüyle görülebileceğinden Sonuç 4.1.13 gereği $_RR$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş ise $_RR$ δ-yarı yerel ve $\delta(R)$ yarı basittir. Yani $\delta(R) \leq Soc(_RR)$ dir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Hipotezde $\delta(R) \leq Soc(R)$ kapsaması verildiğinden $Soc(R) \leq \delta(R)$ olduğunu gösterilmelidir. Birimli R halkası yerel projektif ve $Soc(R) \leq Soc(R)$ olduğundan Lemma 2.5.21 gereği $Soc(R) \ll_\delta R$ olur. Bu durumda $Soc(R) \leq \delta(R)$ elde edilir. Sonuç olarak, $\delta(R) = Soc(R)$ dir. Diğer taraftan, R δ-yarı yerel halka olduğundan $\frac{R}{\delta(R)} = \frac{R}{Soc(R)}$ yarı basit Artinian ve $Soc(R)$ yarı basit Artinian olduğundan R halkası da Artinian olup $_RR$ δ-tümlenmiştir. Bu durumda R, δ-yarı mükemmel halka olup Teorem 3.5.22 gereği $_RR$ δ_{ss}-tümlenmiştir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Açıktır.

Önerme 4.1.18: $\{A_i\}_{i\in I}, R$ modüllerinin toplamı olsun. $Soc_\delta(\bigoplus_{i\in I} A_i) = \bigoplus_{i\in I} Soc_\delta(A_i)$ dir.

İspat: Lemma 4.1.2 ve (Clark vd., 2006, 6.2.(3)) den kolayca görülür.

Teorem 4.1.19: Zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin sınıfı direkt toplamlar ve homomorfik görüntüler altında kapalıdır.

İspat: A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül ve $f: A \to B$ bir epimorfizma olsun. Her $a + Soc_\delta(A) \in \frac{A}{Soc_\delta(A)}$ için $\bar{f}\big(a + Soc_\delta(A)\big) = f(a) + Soc_\delta(B)$ ile tanımlı $\bar{f}: \frac{A}{Soc_\delta(A)} \to \frac{B}{Soc_\delta(B)}$ epimorfizmasını göz önüne alalım. Zayıf δ_{ss}-tümlenmiş A modülü için Teorem 4.1.8 gereği $\frac{A}{Soc_\delta(A)}$ yarı basittir. Yarı basit modüllerin sınıfı bölüm modülleri altında kapalı olduğundan $\frac{B}{Soc_\delta(B)}$ de yarı basittir ve yine Teorem 4.1.8 gereği B modülü zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir. Böylelikle zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin sınıfının homomorfizmalar (bölüm modülleri) altında kapalılığı doğrulanmış olur.

Şimdi direkt toplamlar için ifade edilen iddiayı doğrulayalım. Bunun için $\{A_i\}_{i\in I}$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin ailesi olmak üzere $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ olsun. Böylece Teorem 4.1.8 gereği her $i \in I$ için $\frac{A_i}{Soc_\delta(A_i)}$ bölüm modülleri yarı basittir. Buradan Önerme 4.1.18 ve Sonuç 2.6.7 gereği $\frac{A}{Soc_\delta(A)} = \frac{\bigoplus_{i\in I} A_i}{Soc_\delta(\bigoplus_{i\in I} A_i)} \cong \bigoplus \frac{A_i}{Soc_\delta(A_i)}$ yarı basittir. Bu da Teorem 4.1.8 gereği A nın zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin sınıfının direkt toplamlar altında kapalılığı doğrulanmış olur.

Sonuç 4.1.20: A bir modül ve $\{A_i\}_{i\in I}$ her biri zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüllerin ailesi olsun. Bu takdirde $\sum_{i\in I} A_i$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

Aşağıdaki önermede zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modülün belli bir koşulu gerçekleyen alt modüllerinin de zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olduğu gösterilmiştir. İlgili koşul δ-tümleyen alt modüllerce de sağlandığı bilindiğinden zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modülün her δ-tümleyen alt modülününde zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olduğu sonucuna ulaşılır.

Önerme 4.1.21: A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş bir modül ve B de A nın $\delta(B) = B \cap \delta(A)$ koşulunu gerçekleyen alt modülü olsun. Bu takdirde B zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

İspat: $L \leq B$ olsun. $L \leq A$ olduğundan hipotez gereği bir $N \leq A$ için $A = L + N$ ve $L \cap N \leq Soc_\delta(A)$ koşulları sağlanır. $A = L + N$ ifadesinde her iki tarafın B ile arakesiti alınıp $L \leq B$ olmak üzere Modüler kuralı uygulanırsa $B = (L + N) \cap B = L + (N \cap B)$ elde edilir. Açıkça $L \cap (B \cap N) = L \cap N \leq B$ yarı basittir. $L \cap (B \cap N) = L \cap N \leq Soc(B)$ dir. Diğer taraftan $L \cap N \leq Soc_\delta(A) = Soc(A) \cap \delta(A) \leq \delta(A)$ olduğundan $L \cap N \leq \delta(A)$ ifadesinde B ile arakesit alınırsa hipotezden $L \cap (B \cap N) \leq B \cap \delta(A) = \delta(B)$ elde edilir. Buna göre, $L \cap (B \cap N) \leq Soc(B) \cap \delta(B) = Soc_\delta(B)$ bulunur. Sonuç olarak, $B \cap N, B$ de L nin zayıf δ_{ss}-tümleyeni olup B zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüldür.

Bir R-halkasının yarı yerel olması için gerekli ve yeterli koşul her R-modülün yarı yerel olmasıdır (Lomp, Teorem 3.1.). İlaveten (Olgun ve Türkmen, 2020) de bir R halkasının ss-yarı yerel olması için gerekli ve yeterli koşul her R modülün ss-yarı yerel olması ile verilir. Biz de bundan sonra üzerindeki her R-modülü zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olan halkaları δ_{ss}-yarı yerel halkalar olarak adlandıracağız. Bu bilgiler ışığında eşdeğer karakterizasyon δ_{ss}-yarı yerel halkalar için verilebilir. Öncelikle Teorem 4.1.23 in ispatına açıklık getirecek aşağıdaki Lemma verilecektir.

Lemma 4.1.22: A bir modül olsun. A nın zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olması için gerekli ve yeterli koşul her A-üretilmiş B modülünün zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olmasıdır.

İspat: ($\Leftarrow$) Her A üretilmiş modül zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olsun. Bu durumda açıkça, A-üretilmiş olan A modülünün kendisi zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

(⟹) A zayıf δ_{ss}-tümlenmiş ve B, A-üretilmiş modül herhangi bir modül olsun. Bu durumda bir I indis kümesi için bir $f: A^{(I)} \to B$ epimorfizması vardır. Bu durumda, $B = f(A^{(I)})$ dir ve B Teorem 4.1.19 gereği zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

Birimli bir R halkası için açıkça her sol R-modül R-üretilmiştir. Dolayısıyla her R-modül bir serbest modülün bölüm modülüdür. Bu bilgiyi kullanarak birimli bir R halkasının R-modül olarak zayıf δ_{ss}-tümlenmişliğini ifade eden aşağıdaki önemli karakterizasyon teoremi verilebilir.

Teorem 4.1.23: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) ${}_RR$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

(2) Her R modül zayıf δ_{ss}-tümlenmiştir.

(3) R δ-yarı yerel ve $\delta(R) \subseteq Soc({}_RR)$ dir.

İspat: (1)⟹(2) ${}_RR$ modülü zayıf δ_{ss}-tümlenmiş ve A da herhangi bir R-modül olsun. Her modül R-üretilmiş olduğundan $f: R^{(I)} \to A$ epimorfizması vardır. Örtenlikten $f(R^{(I)}) = A$ dır. Teorem 4.1.19 gereği $R^{(I)}$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olup $R^{(I)}$ nın homomorfik görüntüleri de zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olduğundan $f(R^{(I)}) = A$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olur.

(2)⟹(3) Her R-modül zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olsun. Özel olarak, ${}_RR$ zayıf δ_{ss}-tümlenmiş dolayısıyla zayıf δ-tümlenmiştir. Bu durumda Lemma 3.5.18 gereği $\frac{R}{\delta(R)}$ yarı basit olduğundan R δ-yarı yerel halkadır. Ayrıca Sonuç 4.1.13 ten $\delta(R) \subseteq Soc({}_RR)$ elde edilir.

(3)⟹(1) Sonuç 4.1.13 ten açıktır.

Sonuç 4.1.13 ve Teorem 4.1.23 ile Nişancı Türkmen ve Türkmen (2020) tarafından verilen Teorem 5.3 göz önüne alındığında δ_{ss}-yarı yerel halkalar ile sol δ_{ss}-mükemmel halkaların sınıfının çakıştığı görülür. Buna göre bu tezde bahsi geçen halkalar δ-mükemmel halkaların bir alt sınıfını temsil etmektedir. Yani bir R halkası için aşağıdaki diyagramın varlığı söylenebilir.

ss-yarıyerel halka ⟹ δ_{ss}-yarı yerel (δ_{ss}-mükemmel) halka ⟹ δ-mükemmel halka

Örnek 4.1.24: F bir cisim, $I = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$ ve $R = \{(q_1, q_2, \dots, q_n, q, q, \dots) | n \in \mathbb{N},\ q_i \in A_2(F),\ q \in I]\}$ olsun. Burada $A_2(F)$ girişleri F cisminden gelen 2x2 tipindeki matrislerin kümesidir.

R nin elemanları karşılıklı bileşenlerinin toplamı ve çarpımı işlemine göre bir halkadır. Diğer taraftan,

$$Soc(R) = \{(q_1, q_2, \dots, q_n, q, q, \dots) | n \in \mathbb{N},\ q_i \in A_2(F)\}$$

$$\delta(R) = \{(q_1, q_2, \dots, q_n, q, q, \dots) | n \in \mathbb{N},\ q_i \in A_2(F),\ q \in J = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}\}$$

olduğu göz önüne alınarak (Zhou, 2000) gereği R halkasını δ-mükemmel halka olduğu bilinmektedir. Buna göre verilen R halkası aynı zamanda δ-yarı mükemmel olup $\delta(R) \neq Soc(R)$ olduğundan (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020) gereği R δ_{ss}-mükemmel (δ_{ss}-yarı yerel) olmayan bir halka örneğidir.

Örnek 4.1.25: $F_i = \mathbb{Z}_2$ ve $\mathbb{Q} = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ olsun. Burada $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$-bileşenli dizilerin kümesi olup, elemanlarının bileşen-bileşene toplama ve çarpımı işlemlerine göre değişmeli ve birimi $1_{\mathbb{Q}} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \dots)$ olan birimli bir halkadır. Kabul edelim ki R, $\mathbb{Q}$ nun birimi ve sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı elemanlarının $(\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i)$ ürettiği alt halkası olsun. Burada $Soc(R) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ dir ve $\frac{R}{Soc(R)} \cong \mathbb{Z}_2$ tek singüler basit R-modül olduğundan $Soc(R) = \delta(R)$ dir. Ayrıca $\frac{R}{Soc(R)} = \frac{R}{\delta(R)} \cong F_i$ basit olduğundan $\delta(R) \leq R$ maksimaldir. Açıkça $\delta(R) \ll_{\delta} R$ olduğundan R halkası δ-yerel olup (Büyükaşık ve Lomp, 2010) gereği δ-yarı mükemmel bir halkadır. Bu durumda (Nişancı Türkmen ve Türkmen, 2020) gereği R halkası δ_{ss}-mükemmel olur. Ancak R halkası regüler olduğundan (Büyükaşık ve Lomp, 2010) $Rad(R) = 0$ olup $\frac{R}{Rad(R)} \cong R$ yarı basit olmadığından R yarı yerel değildir. Açıkça ss-yarı yerel her halka yarı yerel olduğundan önermenin karşıt tersi gereği R ss-yarı yerel halka değildir.

5. Sonuç ve Öneriler

Bu tezde literatürde ss-yarı yerel modüller olarak karakterizasyonu bilinen zayıf ss-tümlenmiş modüllerin bir genelleştirilmesi olan zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modüller tanımlanmıştır. Temel özellikleri irdelenerek, özellikle halka karakterizasyonunun bulunması ile zayıf δ_{ss}-tümlenmiş olup ss-tümlenmiş olmayan modüllerin varlığı örneklenmiştir. Bu çalışmadan hareketle dual sonlu zayıf δ_{ss}-tümlenmiş modül, dual sonlu zayıf δ_{ss}-lifting (yükseltilebilir) gibi daha genel forma sahip cebirsel yapılar tanımlanarak, temel özellikleri, halka karakterizasyonları, kapsama ilişkilerinin yönünü doğrulayan örnekler ve aynı ilişkinin terslenebilirliğini sağlayan koşullar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Alizade, R., & Pancar, A. (1999). *Homoloji cebire giriş*. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, 176.

Al-Takhman K. (2007). Cofinitely δ -supplemented and cofinitely δ-semiperfect modules, *Int. J. Algebra*, *1*(12), 601-613.

Bass, H. (1960). Finitistic dimension and a generalization of semi-primary rings. *Trans. Amer. Math. Soc. 95.* https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1960-0157984-8

Büyükaşık, E., & Lomp, C. (2010). When δ-semiperfect rings are semiperfect, *Turkish Journal* of Mathematics*: 34.* https://doi.org/10.3906/mat-0810-15

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., & Wisbauer, R. (2006). Lifting modules. *Frontiers in Mathematics Birkhauser, 394.*

Dung, N. V., Huynh D. V., Smith P. F., & Wisbauer R. (1994). Extending modules. *Pitman Research Notes in Mathematics Series, 313*. https://doi.org/10.1201/9780203756331

Eckmann, B., & Schopf, A. (1953). Uber injektive moduln. *Archiv der Mathematik, 4*(2), 75-78. https://doi.org/10.1007/BF01899665

Goodearl, K.R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular rings and modules* (vol. 33). Marcel Dekker, Inc.

Hungerford, T. W. (1973). *Algebra* (Vol. 73). Springer Science & Business Media.

Kasch, F. (1982). *Modules and Rings* (Vol. 17). Published for the London Mathematical Society by Academic Press.

Kasch, F. & Mares, E. (1966). Eine kennzeichnung semi-perfecter moduln. *Nagoya Mathematical Journal, 27,* 525-529.

Kaynar, E., Türkmen, E., & Çalışıcı, H. (2020). Ss-supplemented modules. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69*(1), 473-485. https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.585727

Koşan, M. T. (2007). δ-lifting and δ-supplemented modules. *In Algebra colloquium 14*(1), 53-60. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, and Suzhou University. https://doi.org/10.1142/S1005386707000065

Lomp, C. (1999). On semilocal modules and rings, *Communications In Algebra*, *27*(4), 1921-1935. https://doi.org/10.1080/00927879908826539

Mares, E. A. (1963). Math. Zeitschr. *Semi-perfect modules,*, *82*, 347-360.

Matlis, E. (1958). Injective modules over Noetherian rings. *Pacific Journal of Mathematics, 8,* 511-528.

Noether, E. (1933). Nichtkommutative Algebra. *Math Z 37*, 514–541. https://doi.org/10.1007/BF01474591

Nematollahi, M. J. (2009). On δ-supplemented modules. *In Toallem University, 20 th seminar on Algebra 22-23*, 155-158.

Olgun A., & Türkmen E. (2020). On a class of perfect rings. *Honam Mathematical Journal, 42*(3), 591-600. https://doi.org/10.5831/HMJ.2020.42.3.591

Sharpe, D. W., & Vamos, P. (1972). Injective modules. *Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, 190*.

Sözen, E. Ö. (2022). A study on Ss-Semilocal modules in view of singularity. *Malaya Journal of Matematik, 10*(1), 90-97. http://doi.org/10.26637/mjm1001/008

Talebi Y., & Hamzekolaei A. (2009a). Closed weak δ-supplemented modules. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, *13*(2), 193-208.

Talebi Y., & Talaee B. (2009b). On δ-coclosed submodules. *Far East Journal of Mathematichal Sciences, 35*(1), 19-31.

Talebi, Y., & Talaee B. (2009c). On generalized δ-supplemented modules, *Vietnam Journal of Mathematics, 37*(4), 515-525.

Tribak, R. (2012). Finitely generated δ-supplemented modules are amply δ-supplemented. *Bulletin of Australian Mathematical Society, 86*, 430-439.

Tribak, R. (2013). On δ-local modules and amply δ-supplemented modules. *Journal of Algebra and Its Applications, 12*(2), 1250144. https://doi.org/10.1142/S0219498812501447

Tribak R. (2015). When finitely generated δ -supplemented modules are supplemented. *In Algebra Colloquium*, *22*(1), 119-130. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, and Suzhou University. https://doi.org/10.1142/S1005386715000115

Türkmen N. B., & Türkmen E. (2020). δ_{ss}-supplemented modules and rings. *Analele Ştiinţifice Ale Universităţii "Ovidius" Constanţa. Seria Matematică*, *28*(3), 193-216. https://doi.org/10.2478/auom-2020-0041

Wisbauer, R. (1991). Foundations of Module and Ring Theory. *Gordon and Breach, 600*. https://doi.org/10.1201/9780203755532

Zhou Y. (2000). Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings. *Algebra Colloq.*, *7*(3), 305-318. https://doi.org/10.1007/s10011-000-0305-9

Zöschinger, H. (1974a). Komplementierte Moduln über Dedekindringen. *Journal of Algebra, 29,* 42-56. https://www.jstor.org/stable/24490705

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Arzu AKDENİZ YILMAZ

Yabancı Dili : İNGİLİZCE

Eğitim Durumu

Lise : ORDU BAŞÖĞRETMEN ANADOLU LİSESİ, 2009

Lisans : SAMSUN ONDOKUZMAYIS ÜNİVERSİTESİ, 2015

Mesleki Deneyim

Yayın Listesi :