

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI UYUMLU KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS

Özkan AVİT

**TEMMUZ-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI UYUMLU KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME CONFORMABLE FRACTIONAL
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Özkan AVİT

**TEMMUZ-2022
GÜMÜŞHANE**



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BAZI UYUMLU KESİRLİ KİSMİ DİFERANSİYELDENKLEMLERİN
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME CONFORMABLE FRACTIONAL
PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

YÜKSEK LİSANS

Özkan AVİT

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ

TEMMUZ-2022
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Bazı Uyumlu Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi'nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

28/07/2022

.....
Özkan AVİT

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans tez çalışmam süresince bana yakın ilgi ve desteğini esirgemeyen, kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca verdikleri emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün değerli hocalarına teşekkürlerimi borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca hep yanımda olan, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli eşim Kübra ŞENYURT AVİT' e ve yaşam kaynağım olan oğlum Kuzey Ahlas AVİT' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Özkan AVİT
GÜMÜŞHANE-2022

ÖZET

Bu tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türevin ve uyumlu kesirli türevin oluşumu ve gelişimi hakkında bilgi verilmektedir. İkinci bölümde gerekli tanım ve teoremler yazılmıştır. Üçüncü bölümde kullanılan yöntemlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde ise uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky (UKMKS) denklemleri, uyumlu kesirli mertebeden Whitham-Broer-Kaup (UKMWBK) denklemleri, uyumlu zaman-kesirli mertebeden Jaulent Miodek (UZKMJM) sistemi, uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Allen (UKMCA) denklemi için uyumlu q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi (U q -HADY), uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi (UKEAY), uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi (UHPEDM) olarak adlandırılan üç farklı yöntem kullanılarak yeni sayısal çözümler araştırılmıştır. Bu yöntemlerin etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için sayısal simülasyonlar yapılmıştır. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırmalar yapılmıştır. Son bölümde ise yeni önerilen her üç yeni tekniğin de doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmek için basit, güçlü ve etkili olduğu vurgulanmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi, Uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi, Uyumlu q -homotopi analiz dönüşüm yöntemi

SUMMARY

This thesis consists of five main parts. In the first part, information is given about the formation and development of the fractional derivative and the conformable fractional derivative. In the second part, the necessary definitions and theorems are written. In the third part, the methods used are mentioned. In the fourth part, the conformable fractional order Kuramoto-Sivashinsky (CFOKS) equations, conformable fractional order Whitham-Broer-Kaup (CFOWBK) equations, conformable time-fractional Jaulent-Miodek (CTFJM) system, conformable fractional order Cahn-Allen (CFOCA) equation for conformable q -homotopy analysis transform method (Cq-HATM) new numerical solutions were investigated by using three different methods called conformable fractional Elzaki decomposition method (CFEDM), conformable homotopy perturbation Elzaki transform method (CHPETM). Numerical simulations were performed to verify that these methods are effective and reliable. Comparisons were made between the obtained solutions and the exact solutions. In the last section, it is emphasized that the proposed new three techniques are simple, powerful and effective for solving nonlinear conformable fractional problems.

Keywords: Conformable homotopy perturbation Elzaki transform method, Conformable fractional Elzaki decomposition method, Conformable q -homotopy analysis transform method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XIII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
3. KULLANILAN METOTLAR.....	10
3.1. Uyumlu q -Homotopi Analizi Dönüşüm Yöntemi (Uq-HADY)	10
3.2. Uyumlu Kesirli Elzaki Ayrıştırma Yöntemi (UKEAY).....	12
3.3 Uyumlu Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşüm Metodu (UHPEDM)	14
4. YAPILAN ÇALIŞMALAR	17
4.1. UKMKS denklemi için Uq-HADY çözümü.....	17
4.2. UKMKS denklemi için UHPEDM çözümü.....	19
4.3. (110) ifadesiyle verilen UKMKS denklemi için Uq-HADY çözümü.....	28
4.4. (110) ifadesiyle verilen UKMKS denklemi için UHPEDM çözümü.....	30
4.5. UKMWBK denklemi için Uq-HADY çözümü.....	38
4.6. UKMWBK denklemi için UKEAY çözümü.....	41
4.7. UZKMJM sisteminin Uq-HADY ile çözümü.....	50
4.8. UZKMJM sisteminin UKEAY çözümü.....	52
4.9. UKMCA denkleminin Uq-HADY ile çözümü	66
4.10. UKMCA denkleminin UHPEDM çözümü	67
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	73
KAYNAKÇA.....	74
ÖZGEÇMİŞ	80

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1 de $k = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile UKMKS denklemi için sayısal çözümler.....	25
Tablo 2. Örnek 4.1 de $k = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle UHPEDM ile UKMKS denklemi için sayısal çözümler.....	26
Tablo 3. Örnek 4.1' de $\alpha = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere, (83) denkleminin analitik çözümünün, Uq-HADY ve UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması.....	27
Tablo 4. Örnek 4.2 de $k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$, çeşitli α ve farklı x ve t değerleriyle UKMKS denkleminin Uq-HADY ile sayısal çözümü.....	36
Tablo 5. Örnek 4.2 de $k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$, çeşitli α ve farklı x ve t değerleriyle UKMKS denkleminin UHPEDM ile sayısal çözümü.....	37
Tablo 6. Örnek 4.2'de $\alpha = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere örnek 4.2 denkleminin analitik çözümünün, Uq-HADY ve UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması.....	37
Tablo 7. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1, n = 1$ için, farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKWBK denklemi için $u(x, t)$ 'nin Uq-HADY ile sayısal çözümü.....	47
Tablo 8. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY ile sayısal çözümü.....	48
Tablo 9. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $u(x, t)$ 'nin UKEAY ile sayısal çözümü.....	48
Tablo 10. Örn. 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $w(x, t)$ 'nin UKEAY ile sayısal çözümü.....	49

Tablo 11. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5, h = -1$ ve $n = 1$ için, farklı α ve farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile $u(x, t)$ 'nin sayısal çözüm	63
Tablo 12. Örnek 4.4 te $\lambda = 0.5, h = -1$ ve $n = 1$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile $w(x, t)$ 'nin sayısal çözümü	64
Tablo 13. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKEAY ile (x, t) 'nin sayısal çözümü	64
Tablo 14. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKEAY ile $w(x, t)$ 'nin sayısal çözümü	65
Tablo 15. UKMCA denkleminde $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle UKMCA denklemi için Uq-HADY ile $w(x, t)$ 'nin analitik çözümleri.....	70
Tablo 16. UKMCA denkleminde $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKMCA denklemi için UHPEDM ile $w(x, t)$ 'nin analitik çözümleri.....	71
Tablo 17. $\alpha = 1$ olduğunda UKMCA denklemi için YİDM (Ali vd., 2022) ile karşılaştırmalı olarak Uq-HADY ve UHPEDM ile elde edilen mutlak hatalar	71

ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 1. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, \alpha = 1$ için; (a) Uq-HADY çözümü, (b) UHPEDM çözümü, (c) Analitik çözümü, d) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$, (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{UHPEDM}|$ 'dir.....23
- Şekil 2. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, x = 0.5$ ve farklı α için; (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü 'dir.....24
- Şekil 3. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, t = 0.5$ farklı α için; (a) Uq-HADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması (b) UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması 'dir..25
- Şekil 4. Örnek 4.2 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}, \alpha = 1$ için; (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü (c) Analitik çözüm (d) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$ (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{UHPEDM}|$ 'dir.....35
- Şekil 5. Örnek 4.2 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}, x = 0.5$ ve farklı α için; (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü 'dir.....36
- Şekil 6. Örnek 4.3 de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $u(x, t)$ için analitik çözümü (c) $w(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (d) $w(x, t)$ için analitik çözümü (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$ (f) Mutlak hata $= |w_{analitik} - w_{Uq-HADY}|$ 'dir.46
- Şekil 7. Örnek 4.3 de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, x = 0.5$ iken farklı α için; (a) $u(x, t)$ için UKEAY çözümü (b) $w(x, t)$ için UKEAY çözümü 'dir.....47
- Şekil 8. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5, h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $u(x, t)$ için analitik çözümü (c) $w(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (d) $w(x, t)$ için analitik çözümü (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$ (f) Mutlak hata $= |w_{analitik} - w_{Uq-HADY}|$ 'dir.58
- Şekil 9. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5, h = -1, n = 1, x = 0.5$ ve farklı α için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY çözümü 'dir.59
- Şekil 10. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5, \alpha = 1$ için; (a) $u(x, t)$ için UKEAY çözümü (b) $u(x, t)$ için analitik çözümü (c) $w(x, t)$ için UKEAY çözümü (d) $w(x, t)$ için analitik çözüm (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{UKEAY}|$ (f) Mutlak hata $= |w_{analitik} - w_{UKEAY}|$ 'dir.....62

Şekil 11. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5$, $x = 0.5$ ve belli α değerleri için; (a) $u(x, t)$ için UKEAY çözümü (b) $w(x, t)$ için UKEAY çözümü 'dir.	63
Şekil 12. UKMCA denkleminin UHPEDM çözümü b) UKMCA denkleminin Uq-HADY çözümü' dir.	70



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

UKMKS	: Uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky
UKMWBK	: Uyumlu kesirli mertebeden Whitham-Broer-Kaup
UZKMJM	: Uyumlu zaman-kesirli mertebeden Jaulent -Miodek
UKMCA	: Uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Allen
Uq-HADY	: Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi
UKEAY	: Uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi
UHPEDM	: Uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi
YİDM	: Yeni iterasyon dönüşüm metodu
$T_\alpha(f)$: f 'nin α mertebeden uyumlu kesirli türevi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
$D_\alpha^a(f)$: f 'nin α mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi
${}^bD_\alpha(f)$: f 'nin α mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi
E_α	: Mittag-Leffler fonksiyonu
E_α^c	: Caputo anlamda uyumlu kesirli Elzaki dönüşümü
$(E_\alpha^c)^{-1}$: Caputo anlamda ters uyumlu kesirli Elzaki dönüşümü
\mathcal{L}_α	: Uyumlu Laplace dönüşümü
\mathcal{L}_α^{-1}	: Ters uyumlu Laplace dönüşümü
H_m	: Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda eldeki problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferansiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeli diferansiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenebilmesi için kesirli mertebeli diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Son yıllarda kesirli hesap konusu oldukça önem arz etmektedir. Korozyon elektrokimyası, kimyasal fizik, optik ve sinyal işleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kesirli hesaba ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak kesirli hesap güncel bir konu olmasına rağmen temelleri oldukça eski olup, 1695 yılına dayanmaktadır. Leibniz' in, Eylül 1695' te, L' Hospital' e sorduğu bir soruyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1730'da Euler, 1772'de Lagrange, 1812'de Laplace, 1819'da Lacroix, 1822'de Fourier, 1832'de Liouville, 1847'de Riemann, 1865'de Holmgren, 1867'de Grünwald, 1868'de Letnikov, 1869'da Sonin, 1884'te Laurent, 1888'de Nekrassov, 1890'da Krug ve 1917'de Weyl gibi birçok matematikçi kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapmıştır. (Kilbas vd., 2006)

Son yüzyıl içerisinde de kesirsel hesabın teorisi ve uygulamasında önemli gelişmeler yaşanmıştır. Riesz, çok değişkenli fonksiyonlar için 1949'da kesirli integrasyon teorisini geliştirmiştir. Erdelyi, kesirli hesabı matematiksel denklemlere 1964 yılında uygulamıştır. Higgins, diferansiyel denklemleri çözmek için 1967'de kesirli integral operatörleri kullanmıştır. Yine aynı dönemde Caputo kesirli türeve yeni bir boyut katmış olup daha avantajlı olan bir kesirli türev tanımlamıştır. Bu gelişmelerin ışığında reoloji için 1947'de Scott Blair, 1949'da Caffyn ve 1961'de Graham, elektrokimya için 1964'de Blavin, 1969'da Oldham, 1970'de Spainer ve 1972'de Grenness, kimyasal fizik için 1970'de Somorjai ve Bishop, genel taşıma problemleri için ise 1972'de Oldham ve Spainer önemli katkılar sağlamışlardır. (Oldham ve Spanier, 1974)

Kesirli hesap için ilk uluslararası konferans, Bertram Ross tarafından New Haven Üniversitesi'nde 1974'te düzenlenmiştir. Bu konferansa birçok seçkin matematikçi katılmıştır. Konferansta kesirli hesap her yönüyle ele alınmış ve özellikle de genelleştirilmiş fonksiyonlar, kesirli hesapların kullanılmasıyla elde edilen eşitsizlikler ve kesirli hesapların olasılık teorisine uygulamaları gibi konular üzerinde durulmuştur.

Bu konferanstan sonra kesirli hesap üzerine ikinci uluslararası konferans ise 1984 yılında İskoçya'daki Strathclyde Üniversitesi'nde yapılmıştır. Bu konferansa birçok ünlü matematikçi de katılmıştır. Konferansta şu önemli soruya dikkat çekilmiştir; “Tam sayı olmayan mertebeli bir kesirli türev için geometrik bir yorum bulmak mümkün müdür?” (Miller ve Ross, 1993)

Japonya'da S. Owa, M. Saigo ve K. Nishimoto 1980'lerde hazırladıkları yayınlarla kesirli hesabın gelişiminde büyük katkı sağlamışlardır. K. Nishimoto, kesirli hesabın adı ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanmasıyla alakalı büyük bir çalışma yayınlamıştır. Kesirli hesap ve uygulamalarını içeren ansiklopedik kitap S. Samko, O. Marichev ve A. Kilbas tarafından yazılmıştır. (Samko vd., 1993)

1989 yılında üçüncü uluslararası konferans Nihon Üniversitesi'nde yapılmıştır. 1999 yılında Podlubny yayınladığı bir kitap ile kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve bunların çözüm yöntemlerini ifade etmiştir. Kesirli diferansiyel denklemler özellikle uygulamalı matematik, fizik, kimya ve mühendislik alanlarında oldukça sık başvurulmaktadır. Bunun nedeni ise kesirli türevlerin sistemleri ve süreçleri tamsayı mertebeli türevlerden daha tam ve gerçeğe yakın olarak modelleyebilmeleridir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde birçok analitik ve nümerik yöntem kullanılmıştır. Bu yöntemlerin bazıları Laplace dönüşüm yöntemi (Kexue ve Jigen, 2011; Podlubny, 1997), Mellin dönüşüm yöntemi (Butera ve Paula, 2014), diferansiyel dönüşüm metodu (Ayaz, 2004; Merdan vd., 2019), Adomian ayrışım yöntemi (Duan vd., 2013), varyasyonel iterasyon yöntemi (He, 1999; Wu ve Lee, 2010), üstel fonksiyon yöntemi (Guner ve Atik, 2016), (G'/G) -açılım yöntemi (Bekir ve Güner, 2013), Sumudu dönüşüm metodu (Anaç vd., 2020), homotopi pertürbasyon yöntemi (He, 2003; Zhang vd., 2014), homotopi analiz yöntemi (Dehghan vd., 2010; Odibat, 2019; Veerasha vd., 2019), tanh-sech yöntemi (Ray ve Sahoo, 2016), Padé yaklaşım yöntemi (Ding, 2016), artık kuvvet serisi yöntemi (Jaber ve Ahmad, 2018), sadeleştirilmiş $\tan(\phi(\xi)/2)$ -açılım yöntemi (Yaslan ve Girgin, 2018), (G'/G^2) -açılım yöntemi (Yaslan ve Girgin, 2018) ve tanh yöntemidir (Yaslan, 2017). Bu yöntemler arasında literatürde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için en çok varyasyonel iterasyon, (G'/G) -açılım ve üstel fonksiyon yöntemleri kullanılmaktadır.

Kesirli hesap şu anda birçok gerçek problemin modellenmesinde kullanılmaktadır. Dünya problemlerinin kesirli matematiksel modellenmesi önemli ölçüde artmıştır. Bu nedenle, birçok araştırmacı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmıştır. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler farklı bilim alanlarında birçok olguyu tanımlamak için kullanılmaktadır (Baleanu vd., 2009).

Kesirli türevin klasik türevden önemli bir farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmayışıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması fırsatını verir. Kesirli türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımlardır. Bu tanımların en popüler olanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir. (Kilbas vd, 2006; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999; Gambo vd., 2014) Literatürde olan bu tanımlar birbirleri arasında geçişler sağlamasına rağmen fiziksel yorumları açısından farklılıklar gösterirler.

Son zamanlarda Khalil ve arkadaşları kesirli türev ve kesirli integralin yeni bir tanımını sundular. Bu yeni tanımın klasik analizde verilen klasik türevin özelliklerini sağladığını ve klasik türev tanımındaki gibi bir limit formundan yararlandığını göstermişlerdir. Çalışmalarında, bu yeni kesirli türev tanımı için çarpım kuralını, bölüm kuralını, zincir kuralını, kesirsel Rolle teoremini ve kesirsel ortalama değer teoremlerini sundular (Khalil vd., 2014).

Bu yeni alana katkıda bulunan başka bir çalışma Abdeljawad tarafından yapıldı. Abdeljawad bu yeni teoriyi geliştirdi. Sol ve sağ uyumlu kesirli türev tanımlarını, $\alpha > 1$ için yüksek mertebeden kesirli integral tanımını, kesirsel Gronwall eşitsizliğini, uyumlu kesirli türevler için zincir kuralını ve kısmi integrasyon formüllerini, kesirsel kuvvet seri açılımını ve Laplace dönüşümünü verdi (Abdeljawad, 2014).

Bu tezde dört farklı diferansiyel denklemden bahsedilmiştir. İlk olarak çeşitli fiziksel bağlamlarda ortaya çıkan ve ince filmler üzerinde oluşan uzun dalgalar, iki viskoz arasındaki arayüzde uzun dalgalar, plazmalardaki kararsız sürüklenme dalgaları, reaksiyon difüzyon sistemleri, kararsız alev cepheleri ve ince hidrodinamik filmler gibi kapsamlı alanlarda kullanılan Kuramoto-Sivashinsky denklemleridir (Kudryashov, 1990; Shah vd., 2020; Ala vd., 2014). İkinci olarak; akışkanlar dinamiği, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği, nükleer fizik, matematiksel biyoloji ve kimyasal reaksiyon, fizik, matematik ve mühendislik alanlarında kullanılan doğrusal olmayan evrim denklemi, sıg su dalgaları denklemi olarak bilinen Whitham-Broer-Kaup denklemleridir (El-Sayed vd., 2005; Mohyud-Din vd., 2010; Saha Ray, 2015; Wang ve Chen, 2015; Xie vd., 2001). Üçüncü olarak; sıg su dalgalarının yayılması ve Brusselator gibi birçok bilimsel modelde kimyasal reaksiyon-difüzyon modelinde kullanılan Jaulent Miodek sistemidir (Sahoo vd., 2020; Shen vd., 2021; Zafar vd., 2020). Son olarak; düzen-düzensizlik geçişleri de dahil olmak üzere çok bileşenli alaşım sistemlerinde faz ayrımı sürecini tanımlayan, matematiksel fiziğin bir reaksiyon-difüzyon denklemi olan

Cahn-Allen denklemidir (Güner vd., 2015; Hosseini vd., 2017; Khater vd., 2017). Bu denklemler uyumlu kesirli hale getirilerek uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky denklemleri (UKMKS), uyumlu kesirli mertebeden Whitham-Broer-Kaup (UKMWBK) denklemleri, uyumlu zaman-kesirli mertebeden Jaulent Miodek (UZKMJM) sistemi, uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Allen (UKMCA) denklemi için uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY), uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi (UKEAY), uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi (UHPEDM) olarak adlandırılan üç farklı yöntem kullanılarak yeni sayısal çözümler araştırılmıştır. Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi, q-homotopi analizi dönüşüm yöntemi ile uyumlu türevin birleşimi olan yeni bir yöntem olarak sunulmuştur. Aynı şekilde uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi, uyumlu kesirli Elzaki dönüşümü ile homotopi pertürbasyon metodunun birleştirilmesiyle oluşturulmuştur. Önerilen yöntemlerin etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için sayısal simülasyonlar yapılmıştır. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırma, her iki yeni tekniğin de doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmek için basit, güçlü ve etkili olduğunu göstermektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 2.1. (Ali vd., 2020; Al-Smadi, 2020; Khalil vd., 2014): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\forall x > 0$ için, f' nin α mertebeden uyumlu kesirli türevi:

$$T_{\alpha}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\varepsilon x^{1-\alpha})-f(x)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (0, 1] \quad (\text{Eşitlik 1})$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1. (Atangana vd., 2015; Khalil vd., 2014; N. Y. Gözütok ve U. Gözütok, 2017): $\alpha \in (0, 1]$ ve f, g bir $x > 0$ noktasında α -türevlenebilir olsun. Öyleyse,

a) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için, $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g),$) (Eşitlik 2)

b) $\forall p \in \mathbb{R}$ için, $T_{\alpha}(x^p) = px^{p-1},$ (Eşitlik 3)

c) $f(t) = \lambda$ için $T_{\alpha}(\lambda) = 0,$ (Eşitlik 4)

d) $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f),$ (Eşitlik 5)

e) $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f)-fT_{\alpha}(g)}{g^2},$ (Eşitlik 6)

f) f , diferansiyellenebilir ise $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t)$ (Eşitlik 7)

özellikleri mevcuttur.

Tanım 2.2. (Khalil vd., 2014): f, x 'te n -defa türevlenebilir olsun. $\forall x > 0$ için, $f^{(n)}$ nin α mertebeli uyumlu kesirli türevi şu şekilde tanımlanır;

$$T_{\alpha}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x+\varepsilon x^{([\alpha]-\alpha)})-f^{([\alpha]-1)}(x)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (n, n+1]. \quad \text{Eşitlik (8)}$$

Burada, $[\alpha]$ gösterimi α 'ya eşit veya daha büyük en küçük tamsayıdır.

Teorem 2.2. (Khalil vd., 2014): f, x 'te n -kez türevlenebilir olsun. O halde, $\forall x > 0, \alpha \in (n, n+1]$ için

$$T_{\alpha}(f(x)) = x^{[\alpha]-\alpha} f^{([\alpha]}(x) \quad \text{Eşitlik (9)}$$

' tir.

Tanım 2.3. (Abdeljawad, 2015) $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α . mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$D_{\alpha}^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \quad (\text{Eşitlik 10})$$

olarak tanımlanır.

Eğer (a, b) aralığında $D_{\alpha}^a(f)(t)$ türevi varsa

$$D_{\alpha}^a(f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} D_{\alpha}^a f(t) \quad (\text{Eşitlik 11})$$

şeklindedir.

Benzer şekilde f fonksiyonunun $\alpha -$ mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi

$${}^b D_{\alpha}(f)(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \quad (\text{Eşitlik 12})$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında ${}^b D_{\alpha}(f)(t)$ türevi varsa,

$${}^b D_{\alpha}(f)(t) = - \lim_{t \rightarrow b^-} {}^b D_{\alpha}(f)(t) \quad (\text{Eşitlik 13})$$

olacaktır.

Uyumlu kesirli sağdan ve soldan türevin adi türev ile ilişkisi şu şekildedir;

Sonuç 2.1. (Abdeljawad, 2015): f fonksiyonu türevlenebilir ise, f' nin soldan Caputo türevi,

$$D_{\alpha}^a(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon}$$

(Eşitlik 14)

yazılabilir.

$h = \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ olarak seçilirse $\varepsilon = h(t-a)^{\alpha-1}$ olmak üzere

$$D_{\alpha}^a(f)(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h(t-a)^{\alpha-1}} = (t-a)^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

(Eşitlik 15)

$$= (t - a)^{1-\alpha} f'(t)$$

elde edilir.

Sonuç 2.2. (Abdeljawad, 2015): f fonksiyonu türevlenebilir ise, f' nin sağdan Caputo türevi,

$${}^b D_\alpha(f)(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \quad (\text{Eşitlik 16})$$

yazılabilir.

$h = \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}$ olarak seçilirse $\varepsilon = h(b-t)^{\alpha-1}$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} {}^b D_\alpha(f)(t) &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h(b-t)^{\alpha-1}} = -(b-t)^{\alpha-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= -(b-t)^{\alpha-1} f'(t) \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 17})$$

elde edilir.

Tanım 2.4. (Abdeljawad, 2015): $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: (a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu α -mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi

$$D_\alpha^\alpha(f)(t) = D_\beta^\alpha(f^{(n)})(t) \quad (\text{Eşitlik 18})$$

olarak tanımlanır.

O halde $\alpha - n$ mertebeden soldan uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez differansiyellenebilir olması gerekmektedir.

Benzer şekilde $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha - n$ mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi,

$${}^b D_\alpha(f)(t) = (-1)^{n+1} {}^b D_\alpha(f^{(n)})(t) \quad (\text{Eşitlik 19})$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3. (Zincir Kuralı): $f, g: (\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ soldan differansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$ ise

$$h(t) = f(g(t)) \quad (\text{Eşitlik 20})$$

' dir. $h(t)$ soldan α diferansiyellenebilir olsun. $t \neq 0$ ve $g(t) \neq 0$ olduğundan

$$(D_{\alpha}^{\alpha}h)(t) = (D_{\alpha}^{\alpha}f)(g(t))(D_{\alpha}^{\alpha}g)(t)g(t)^{\alpha-1} \quad (\text{Eşitlik 21})$$

' dir. Eğer $t \neq 0$ ise,

$$(D_{\alpha}^{\alpha}h)(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D_{\alpha}^{\alpha}f)(g(t)) (D_{\alpha}^{\alpha}g)(t)g(t)^{\alpha-1} \quad (\text{Eşitlik 22})$$

yazılabilir. (Abdeljawad, 2015)

Teorem 2.4. (Abdeljawad, 2015): $f: [\alpha, \infty) \rightarrow \infty$ iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olacak şekilde ve $1 < \alpha + \beta \leq 2, 0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. O halde

$$D_{\alpha}^{\alpha}D_{\beta}^{\beta}(f)(t) = D_{\alpha+\beta}^{\alpha+\beta}(f)(t) + (1 - \beta)(t - a)^{-\beta}D_{\alpha}^{\alpha}f(t) \quad (\text{Eşitlik 23})$$

olarak yazılabilir.

Lemma 2.1. (Khalil, 2014): Bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri aşağıda verilmiştir:

$$\text{a) } \forall p \in \mathbb{R} \text{ için } T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}, \quad (\text{Eşitlik 24})$$

$$\text{b) } T_{\alpha}(1) = 0, \quad (\text{Eşitlik 25})$$

$$\text{c) } c \in \mathbb{R} \text{ için } T_{\alpha}(e^{cx}) = cx^{1-\alpha} e^{cx}, \quad (\text{Eşitlik 26})$$

$$\text{d) } b \in \mathbb{R} \text{ için } T_{\alpha}(\sin bx) = bx^{1-\alpha} \cos bx, \quad (\text{Eşitlik 27})$$

$$\text{e) } b \in \mathbb{R} \text{ için } T_{\alpha}(\cos bx) = -bx^{1-\alpha} \sin bx, \quad (\text{Eşitlik 28})$$

$$\text{f) } T_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = 1, \quad (\text{Eşitlik 29})$$

$$\text{g) } T_{\alpha}\left(\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = \cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}, \quad (\text{Eşitlik 30})$$

$$\text{h) } T_{\alpha}\left(\cos \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^{\alpha}, \quad (\text{Eşitlik 31})$$

$$\text{i) } T_{\alpha}\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}\right) = e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}, \quad (\text{Eşitlik 32})$$

Teorem 2.5. : f , bir t_0 komşuluğunda bazı $0 < \alpha \leq 1$ ' ler için, sonsuz $\alpha -$ türevlenebilir bir fonksiyon olduğunu varsayalım. f fonksiyonunun kesirli kuvvet serisi açılımı,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_{\alpha}^{t_0} f)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{k\alpha}}{\alpha^k k!}, t_0 < t < t_0 + R^{\frac{1}{\alpha}}, R > 0. \quad (\text{Eşitlik 33})$$

şeklinde olur. Burada $(T_\alpha^{t_0} f)^{(k)}(t_0)$ ifadesi kesirli türevin k kez uygulanması anlamına gelir (Ünal ve Gökdoğan, 2016).

Tanım 2.5. (Pillai, 1990; Baleanu vd., 2018): Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(na+1)}. \quad (\text{Eşitlik 34})$$

ile verilir. Mittag-Leffler fonksiyonu E_a ile gösterilir.

Tanım 2.6. (Abdeljawad, 2015): $\forall t \geq 0$ için, uyumlu kesirli üstel fonksiyonu

$$\mathbb{E}_a(c, t) = e^{\left(\frac{ct^\alpha}{\alpha}\right)} \quad (\text{Eşitlik 35})$$

ile tanımlıdır. Burada $c \in \mathbb{R}$ ve $0 < \alpha \leq 1$ 'dir.

Tanım 2.7. (Shrinath, 2019). $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. f' nin α derecesindeki uyumlu kesirli Elzaki dönüşümü şu şekilde tanımlanır;

$$E_\alpha^c[f(t)](v) = \int_0^\infty v E_\alpha^c\left[-\frac{1}{v}, t\right] f(t) d_\alpha t, \quad v > 0. \quad (\text{Eşitlik 36})$$

' dir.

Uyumlu kesirli mertebeden türev için Elzaki dönüşümü şu şekilde tanımlanır:

$$E_\alpha^c[T_\alpha f(t)](v) = \frac{1}{v} E_\alpha^c[f(t)](v) - vf(0). \quad (\text{Eşitlik 37})$$

Teorem 2.6. $v > 0$ için, $E_\alpha^c[f(t)](v) = T_\alpha[v]$ olsun. Öyleyse,

1. w bir sabit ise,

$$E_\alpha^c[w] = wv^2, \quad (\text{Eşitlik 38})$$

' dir.

2. w bir sabit ise, o zaman;

$$E_\alpha^c[t^w] = \alpha^{\frac{w}{\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{w}{\alpha}\right) v^{2+\frac{w}{\alpha}} \quad (\text{Eşitlik 39})$$

3. KULLANILAN METOTLAR

Bu kısımda, çalışmada kullanılan yöntemler verilmiştir.

3.1. Uyumlu q-Homotopi Analizi Dönüşüm Yöntemi

Uq-HADY' nin temel mantığını vermek için,

$${}_tT_\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n \quad (\text{Eşitlik 40})$$

uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım. Burada R doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, t)$ kaynak terimi sembolize eder ve ${}_tT_\alpha$, α mertebeden uyumlu bir kesirli türev operatörüdür.

Şimdi, (40) denkleminin uyumlu Laplace dönüşümü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$s\mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \sum_{m=0}^{k-1} u(x, 0) + \mathcal{L}_\alpha[Ru(x, t)] + \mathcal{L}_\alpha[Nu(x, t)] = \mathcal{L}_\alpha[f(x, t)] \quad (\text{Eşitlik 41})$$

eşitliği elde edilmektedir.

(41) denkleminin sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \frac{1}{s}u(x, 0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha[Ru(x, t)] + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha[Nu(x, t)] \\ - \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha[f(x, t)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 42})$$

elde edilir. Reel $\varphi(x, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] = \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{s}\varphi(x, t; q)(0^+) + \frac{1}{s}(\mathcal{L}_\alpha[R\varphi(x, t; q)] + \\ \mathcal{L}_\alpha[N\varphi(x, t; q)] - \mathcal{L}_\alpha[f(x, t)]). \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 43})$$

Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir.

Aşağıdaki gibi bir homotopi kurarız;

$$(1 - nq)\mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q) - u_0(x, t)] = hqH(x, t)N[\varphi(x, t; q)]. \quad (\text{Eşitlik 44})$$

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve \mathcal{L}_α , uyumlu Laplace dönüşümünü temsil eder. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (40) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\varphi(x, t; 0) = u_0(x, t), \quad \varphi\left(x, t; \frac{1}{n}\right) = u(x, t). \quad (\text{Eşitlik 45})$$

Bu nedenle, q , 0'dan $\frac{1}{n}$ 'e yakınsadıkça, $\varphi(x, t; q)$ çözümü $u_0(x, t)$ 'den $u(x, t)$ çözümüne yakınsar. $\varphi(x, t; q)$ 'yi q civarında Taylor teoremine göre açılarak, şu ifade elde edilir:

$$\varphi(x, t; q) = u_0(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} u_m(x, t)q^m. \quad (\text{Eşitlik 46})$$

Burada,

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (\text{Eşitlik 47})$$

' dir. (46) denklemini, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $u_0(x, t)$ 'ye yakınsar. Ardından, orijinal doğrusal olmayan denkleminin çözümlerinden birini aşağıdaki formda elde edilir:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m. \quad (\text{Eşitlik 48})$$

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m -kez türevi alınır ve $m!$ ye bölersek, sonra $q = 0$ için

$$\mathcal{L}_\alpha[u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)] = hH(x, t)\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) \quad (\text{Eşitlik 49})$$

elde edilir.

Burada vektörler

$$\vec{u}_m = \{u_0(x, t), u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)\}. \quad (\text{Eşitlik 50})$$

ile tanımlıdır. (49) denkleminin ters uyumlu Laplace dönüşümü uyguladığımızda;

$$u_m(x, t) = k_m u_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} [H(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 51})$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) = \mathcal{L}_\alpha [u_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} u_0(x, t) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha (R u_{m-1}(x, t) + H_{m-1}(x, t) - f(x, t)) \quad (\text{Eşitlik 52})$$

ve

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 53})$$

'dir. Burada, H_m homotopi polinomudur ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$H_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \varphi(x, t; q)}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad \text{ve} \quad \varphi(x, t; q) = \varphi_0 + q \varphi_1 + q^2 \varphi_2 + \dots \quad (\text{Eşitlik 54})$$

(51) ve (52) denklemlerini kullanarak,

$$u_m(x, t) = (k_m + h) u_{m-1}(x, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} u_0(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha (R u_{m-1}(x, t) + H_{m-1}(x, t) - f(x, t)) \right) \right] \quad (\text{Eşitlik 55})$$

olarak elde edilir. Uq-HADY kullanılarak seri çözüm şu şekildedir:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_m(x, t). \quad (\text{Eşitlik 56})$$

3.2. Uyumlu Kesirli Elzaki Ayrıştırma Yöntemi (UKEAY)

Şimdi, UKEAY' nin temel fikrini sunmak için,

$${}_t T_\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n, \quad (\text{Eşitlik 57})$$

uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele

alınmaktadır. Burada R doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, t)$ kaynak terimi sembolize eder ve ${}_t T_\alpha$, α dereceli uyumlu bir kesirli türevidir. Şimdi, (57) denkleminin uyumlu Elzaki dönüşümü uygulanırsa ve başlangıç koşulunu kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{1}{v} E_\alpha^c[u(x, t)] - vu(x, 0) + E_\alpha^c[Ru(x, t) + Nu(x, t)] = E_\alpha^c[f(x, t)]. \quad (\text{Eşitlik 58})$$

(58) denklemini sadeleştirirsek,

$$E_\alpha^c[u(x, t)] = v^2 u(x, 0) + v E_\alpha^c[f(x, t)] - v E_\alpha^c[Ru(x, t) + Nu(x, t)] \quad (\text{Eşitlik 59})$$

denklemini elde edilir. (59) denkleminin ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygulandığında, şu elde edilir:

$$u(x, t) = H(x, t) - (E_\alpha^c)^{-1}\{v E_\alpha^c[Ru(x, t) + Nu(x, t)]\}. \quad (\text{Eşitlik 60})$$

Burada $H(x, t)$, başlangıç koşulundan ve homojen olmayan terimden elde edilir. Şimdi, sonsuz seri çözümünün şu şekilde olduğunu varsayalım:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t). \quad (\text{Eşitlik 61})$$

(60) ve (61) denklemlerini kullanarak,

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) = H(x, t) - (E_\alpha^c)^{-1}(v E_\alpha^c[R \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m]) \quad (\text{Eşitlik 62})$$

elde edilir. Burada A_m , Adomian polinomudur ve doğrusal olmayan $Nu(x, t)$ terimini gösterir. (62) denkleminin her iki tarafını karşılaştırırsak,

$$u_0(x, t) = H(x, t), \quad (\text{Eşitlik 63})$$

$$u_1(x, t) = -(E_\alpha^c)^{-1}(v E_\alpha^c[Ru_0(x, t) + A_0]), \quad (\text{Eşitlik 64})$$

$$u_2(x, t) = -(E_\alpha^c)^{-1}(v E_\alpha^c[Ru_1(x, t) + A_1]), \quad (\text{Eşitlik 65})$$

⋮

bulunur. Benzer şekilde, genelleme şu şekilde elde edilir:

$$u_{m+1}(x, t) = -(E_\alpha^c)^{-1}(vE_\alpha^c[Ru_m(x, t) + A_m]), m \geq 1. \quad (\text{Eşitlik 66})$$

Son olarak, yaklaşık çözüm $u(x, t)$ şu şekilde verilir:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t). \quad (\text{Eşitlik 67})$$

3.3. Uyumlu Homotopi Pertürbasyon Elzaki Dönüşüm Metodu (UHPEDM)

UHPEDM' nin temel fikrini sunmak için, uyumlu kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini ele alalım:

$${}_tT_\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n, \quad (\text{Eşitlik 68})$$

başlangıç koşullarıyla birlikte,

$$u(x, 0) = g(x), \quad (\text{Eşitlik 69})$$

burada R doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, t)$ kaynak terimi sembolize eder ve ${}_tT_\alpha$, α mertebeli uyumlu bir kesirli türevidir.

Şimdi, (68) denkleminin uyumlu Elzaki dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$\frac{1}{s} E_\alpha^c[u(x, t)] - s \sum_{m=0}^{k-1} u(x, 0) + E_\alpha^c[Ru(x, t)] + E_\alpha^c[Nu(x, t)] = E_\alpha^c[f(x, t)] \quad (\text{Eşitlik 70})$$

ifadesi elde edilir. (70) denklemini sadeleştirirsek,

$$E_\alpha^c[u(x, t)] - s^2 g(x) + sE_\alpha^c[Ru(x, t)] + sE_\alpha^c[Nu(x, t)] - sE_\alpha^c[f(x, t)] = 0 \quad (\text{Eşitlik 71})$$

olarak bulunur. (71) denklemini yeniden düzenlersek,

$$E_\alpha^c[u(x, t)] = s^2 u(x, 0) + sE_\alpha^c[f(x, t)] - sE_\alpha^c[Ru(x, t) + Nu(x, t)] \quad (\text{Eşitlik 72})$$

ifadesi elde edilir.

(72) denkleminin her iki tarafına ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygulanırsak,

$$u(x, t) = G(x, t) - (E_{\alpha}^c)^{-1}\{sE_{\alpha}^c[Ru(x, t) + Nu(x, t)]\}, \quad (\text{Eşitlik 73})$$

ifadesi bulunur. Burada $G(x, t)$, homojen olmayan terim ve başlangıç koşullarından ortaya çıkan terimdir.

O halde homotopi pertürbasyon metodunu uygularsak,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t). \quad (\text{Eşitlik 74})$$

olarak elde edilir. Ayrıca, doğrusal olmayan terim;

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u), \quad (\text{Eşitlik 75})$$

'dur. Burada $H_n(u)$

$$H_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial p^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i)]_{p=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Eşitlik 76})$$

şeklindedir. (74)-(75) eşitlikleri (73) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = G(x, t) - p \left\{ (E_{\alpha}^c)^{-1} \left\{ sE_{\alpha}^c \left[R \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(u) \right] \right\} \right\} \quad (\text{Eşitlik 77})$$

ifadesi elde edilir. Bu, uyumlu Elzaki dönüşümü ve homotopi pertürbasyon metodunun birleştirilmesidir. p 'nin aynı kuvvetli terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında, elde edilen iterasyonlar;

$$p^0: u_0(x, t) = G(x, t), \quad (\text{Eşitlik 78})$$

$$p^1: u_1(x, t) = -(E_{\alpha}^c)^{-1}\{sE_{\alpha}^c[Ru_0(x, t) + H_0(u)]\}, \quad (\text{Eşitlik 79})$$

$$p^2: u_2(x, t) = -(E_{\alpha}^c)^{-1}\{sE_{\alpha}^c[Ru_1(x, t) + H_1(u)]\}, \quad (\text{Eşitlik 80})$$

$$p^3: u_3(x, t) = -(E_{\alpha}^c)^{-1}\{sE_{\alpha}^c[Ru_2(x, t) + H_2(u)]\}, \quad (\text{Eşitlik 81})$$

şeklindedir. Böylece, (68) denkleminin seri çözümü;

$$u(x, t) = \lim_{p \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

(Eşitlik 82)

olarak elde edilir.



4.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Örnek 4.1. (Anaç ve Avit, 2022; Rezazadeh ve Ziabarya, 2016): Aşağıdaki uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, t > 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (\text{Eşitlik 83})$$

Bu denklemin başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = \gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}}, \quad (\text{Eşitlik 84})$$

ve sınır koşulları

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad (\text{Eşitlik 85})$$

’dır. Burada γ, k ve λ gerçekte sabitlerdir.

4.1. UKMKS Denklemi için Uq-HADY çözümü

Şimdi, (83) denklemine uyumlu Laplace dönüşümü uygulayarak ve (84) başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \frac{1}{s}u(x, 0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] = 0, \quad (\text{Eşitlik 86})$$

elde edilir. (86) denklemini kullanarak doğrusal olmayan operatörü,

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] \\ &- \frac{1}{s} \left(\gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \right) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\varphi(x, t; q) \frac{\partial \varphi(x, t; q)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, t; q)}{\partial x^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 87})$$

olarak tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{L}_\alpha[u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)] = h\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}). \quad (\text{Eşitlik 88})$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) &= \mathcal{L}_\alpha[\vec{u}_{m-1}(x, t)] \\ &- \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} \left(\gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \right) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_{m-1}}{\partial x^4} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 89})$$

' tür. (88) denklemine ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$u_m(x, t) = k_m u_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 90})$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$u_0(x, t) = \gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \quad (\text{Eşitlik 91})$$

olarak bulunur.

$u_1(x, t)$ değerini bulmak için, (90) eşitliğinde $m = 1$ koyarak ,

$$u_1(x, t) = k_1 u_0(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_1(\vec{u}_0)] \quad (\text{Eşitlik 92})$$

elde edilir.

(89) denklemi kullanılarak $m = 1$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\vec{u}_0) &= \mathcal{L}_\alpha[\vec{u}_0(x, t)] \\ &- \left(1 - \frac{0}{n}\right) \frac{1}{s} \left(\gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \right) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 93})$$

olarak elde edilir.

O halde (93) denklemi, (92) denkleminde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -\frac{45hkt^\alpha}{361(\alpha \cosh^7[k(-x+\lambda)])} (\cosh^3[k(-x+\lambda)]c\sqrt{19} \\ &+ 64 \sinh[k(x-\lambda)] \left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16} \right] \sqrt{19} \right) \cosh^2[k(-x+\lambda)] \\ &+ \sinh[k(-x+\lambda)] \left(-120\sqrt{19}k^3 + \frac{15}{19} \right)). \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 94})$$

Benzer şekilde, $u_2(x, t)$, değerini bulmak için, (89)-(90) denklemlerine $m = 2$ koyarak

$$u_2(x, t) = -\frac{45(n+h)hkt^\alpha}{361(\alpha \cosh^7[k(-x+\lambda)])} (\cosh^3[k(-x+\lambda)]c\sqrt{19}$$

$$\begin{aligned}
& +64\sinh[k(x-\lambda)]\left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16}\right]\sqrt{19}\right)\cosh^2[k(-x+\lambda)] \\
& + \sinh[k(-x+\lambda)]\left(-120\sqrt{19}k^3 + \frac{15}{19}\right) - \frac{-90ht^{2\alpha}k^2}{361\alpha^2(\cosh^{11}[k(-x+\lambda)])} \\
& \times (h^2(128c\left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16}\right]\sqrt{19}\right)\cosh^7[k(-x+\lambda)] + \sinh[k(-x+\lambda)]) \\
& \times \left(\left(4096k^6 - 512k^4 + c^2 + 16k^2 + \frac{900}{6859}\right)\sqrt{19} + \frac{3840}{19}k^3 - \frac{240}{19}k\right) \\
& \times \cosh^6[k(-x+\lambda)] - 520c\left(\frac{3}{988} + k^3 - \frac{k}{52}\right)\sqrt{19}\cosh^5[k(-x+\lambda)] \\
& - 63840\sinh[k(x-\lambda)]\left(\frac{3}{266} + \left[k^3 - \frac{k}{16}\right]\sqrt{19}\right)\left(k^2 - \frac{1}{76}\right)k\cosh^4[k(-x+\lambda)] \\
& + \left(420\sqrt{19}ck^3 - \frac{105}{38}c\right)\cosh^3[k(-x+\lambda)] + 194880\sinh[k(x-\lambda)] \\
& \times \left(\left(k^6 - \frac{k^4}{58} - \frac{45}{44558064}\right)\sqrt{19} - \frac{k^3}{551} + \frac{11k}{123424}\right)\cosh^2[k(-x+\lambda)] \\
& - 151200\sinh[k(x-\lambda)]. \tag{Eşitlik 95}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (83) denkleminin Uq-HADY çözümü

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{Eşitlik 96}$$

ile tanımlanır.

Eğer (96) denkleminde $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $M \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^M u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{Eşitlik 97}$$

serisi, UKMKS denkleminin analitik çözümü olan

$$u(x, t) = \gamma + \frac{15\tanh^3[k(x-\gamma t-\lambda)] - 45\tanh[k(x-\gamma t-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \tag{Eşitlik 98}$$

'a yakınsar.

4.2. UKMKS Denklemi için UHPEDM çözümü

Şimdi, (83) denkleminin her iki tarafına uyumlu Elzaki dönüşümü uygulanırsa,

$$E_{\alpha}^c[u(x, t)] = v^2u(x, 0) - vE_{\alpha}^c\left[u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right] \tag{Eşitlik 99}$$

olarak bulunur. (99) denkleminde ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = u(x, 0) - (E_\alpha^c)^{-1} \left\{ \nu E_\alpha^c \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \right\} \quad (\text{Eşitlik 100})$$

olarak bulunur. Homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak,

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) \quad (\text{Eşitlik 101})$$

olarak elde edilir. (101) denklemini yardımıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) = & \left(\gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \right) \\ & - p \left[(E_\alpha^c)^{-1} \left\{ \nu E_\alpha^c \left[\sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(u) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) \right) \right] \right\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 102})$$

$H_n(u)$ ' nun ilk birkaç bileşeni,

$$H_0(u) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{Eşitlik 103})$$

$$H_1(u) = u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{Eşitlik 104})$$

$$H_2(u) = u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \vdots \quad (\text{Eşitlik 105})$$

olarak bulunur.

p ' nin aynı kuvvetlerinin katsayılarını karşılaştırdığımızda;

$$p^0: u_0(x, t) = \gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}}, \quad (\text{Eşitlik 106})$$

$$\begin{aligned} p^1: u_1(x, t) = & - \frac{45kt^\alpha}{\alpha 361 \cosh^7[k(-x + \lambda)]} \left(\gamma \cosh^3[k(-x + \lambda)] \sqrt{19} \right. \\ & + 64 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\frac{15}{608} + \left(k^3 - \frac{k}{16} \right) \sqrt{19} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ & \left. + k \sinh[k(-x + \lambda)] \left(-120\sqrt{19}k^3 + \frac{15}{19} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 107})$$

$$\begin{aligned} p^2: u_2(x, t) = & \frac{90k^2 t^{2\alpha}}{\alpha^2 361 \cosh^{11}[k(-x + \lambda)]} \left(128\gamma \left(\frac{15}{608} + \left(k^3 - \frac{k}{16} \right) \right) \right. \\ & \times \sqrt{19} \cosh^7[k(-x + \lambda)] + \left(\left(\frac{90}{6859} + 4096k^6 - 512k^4 + \gamma^2 + 16k^2 \right) \sqrt{19} \right. \\ & \left. + \frac{3840}{19} k^3 - \frac{240}{19} k \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^6[k(-x + \lambda)] \\ & \left. - 520\gamma \left(\frac{3}{988} + \left(k^3 - \frac{k}{52} \right) \sqrt{19} \right) \cosh^5[k(-x + \lambda)] - 63840k \right. \end{aligned}$$

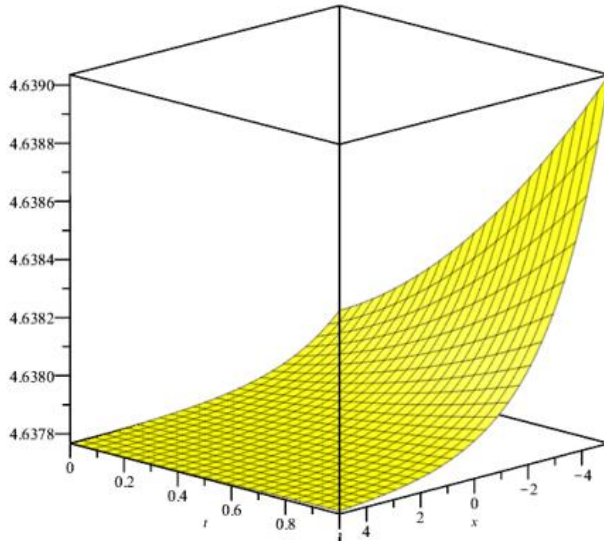
$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{3}{266} + \left(k^3 - \frac{k}{28} \right) \sqrt{19} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \left(k^2 - \frac{1}{76} \right) \cosh^4[k(-x + \lambda)] \\
& + \left(-\frac{105}{38} \gamma + 420\sqrt{19}\gamma k^3 \right) \cosh^3[k(-x + \lambda)] + 194880 \sinh[k(-x + \lambda)] \\
& \left(\left(k^6 - \frac{k^4}{58} - \frac{45}{44556064} \right) \sqrt{19} - \frac{k^3}{551} + \frac{11k}{123424} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\
& - 151200 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(k^6 \sqrt{19} - \frac{13k^3}{1596} + \frac{5\sqrt{19}}{9218496} \right) \quad (\text{Eşitlik 108})
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

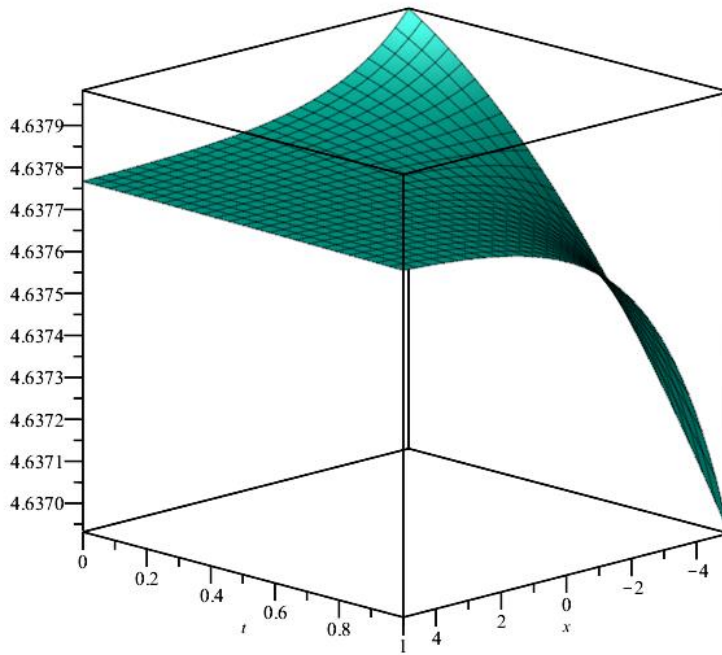
Böylece (83) denkleminin UHPEDM çözümü şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\lambda)]}{19\sqrt{19}} - \frac{45kt^\alpha}{\alpha 361 \cosh^7[k(-x+\lambda)]} \\
& \times \left(\gamma \cosh^3[k(-x + \lambda)] \sqrt{19} + 64 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\frac{15}{608} + \left(k^3 - \frac{k}{16} \right) \sqrt{19} \right) \right. \\
& \times \cosh^2[k(-x + \lambda)] + k \sinh[k(-x + \lambda)] \left. \left(-120\sqrt{19}k^3 + \frac{15}{19} \right) \right) \\
& + \frac{90k^2t^{2\alpha}}{\alpha^2 361 \cosh^{11}[k(-x+\lambda)]} \left(128\gamma \left(\frac{15}{608} + \left(k^3 - \frac{k}{16} \right) \sqrt{19} \right) \cosh^7[k(-x + \lambda)] \right. \\
& + \left. \left(\left(\frac{90}{6859} + 4096k^6 - 512k^4 + \gamma^2 + 16k^2 \right) \sqrt{19} + \frac{3840}{19}k^3 - \frac{240}{19}k \right) \right. \\
& \times \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^6[k(-x + \lambda)] - 520\gamma \left(\frac{3}{988} + \left(k^3 - \frac{k}{52} \right) \sqrt{19} \right) \\
& \times \cosh^5[k(-x + \lambda)] - 63840k \left(\frac{3}{266} + \left(k^3 - \frac{k}{28} \right) \sqrt{19} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \\
& \times \left(k^2 - \frac{1}{76} \right) \cosh^4[k(-x + \lambda)] + \left(-\frac{105}{38} \gamma + 420\sqrt{19}\gamma k^3 \right) \cosh^3[k(-x + \lambda)] \\
& + 194880 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\left(k^6 - \frac{k^4}{58} - \frac{45}{44556064} \right) \sqrt{19} - \frac{k^3}{551} + \frac{11k}{123424} \right) \\
& \left. \times \cosh^2[k(-x + \lambda)] - 151200 \sinh[k(-x + \lambda)] + \frac{5\sqrt{19}}{9218496} \right), \quad (\text{Eşitlik 109})
\end{aligned}$$

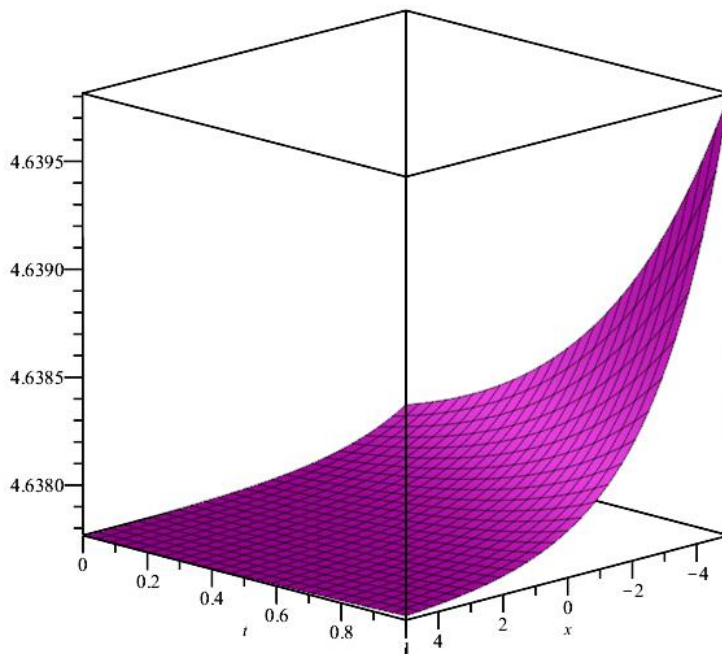
(a)



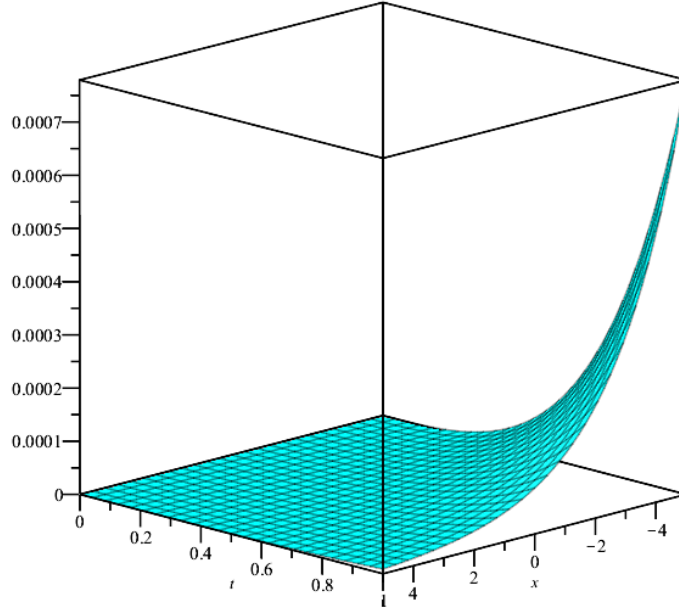
(b)



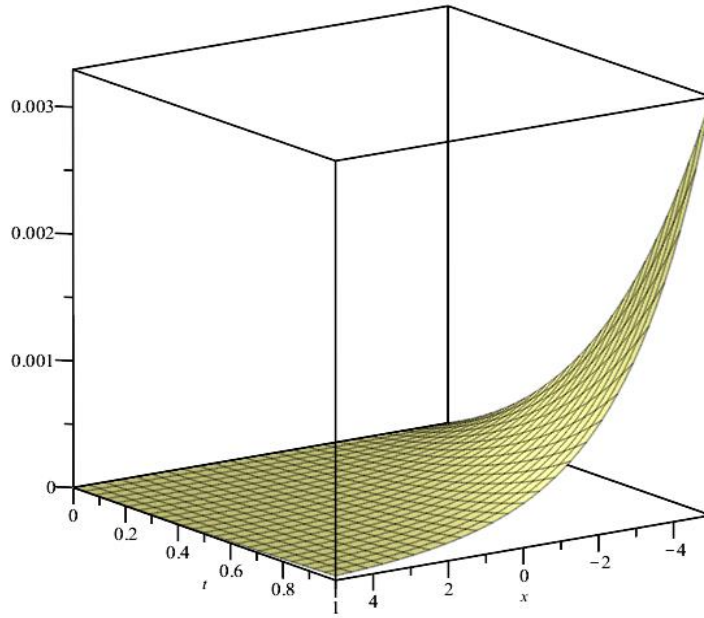
(c)



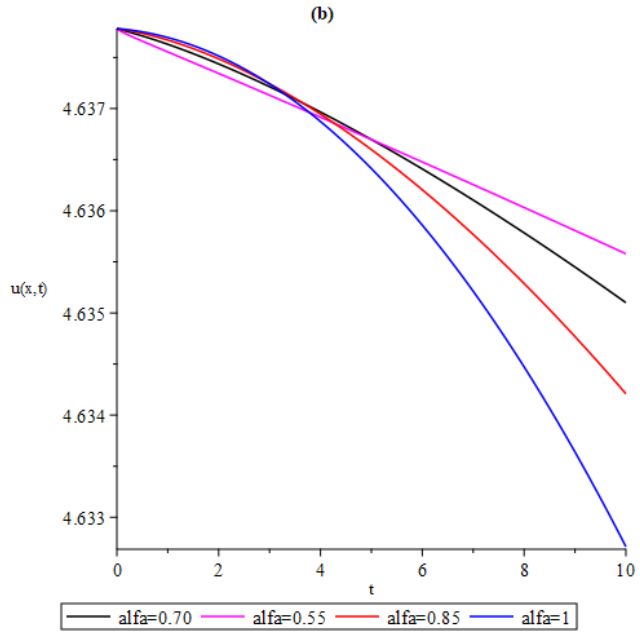
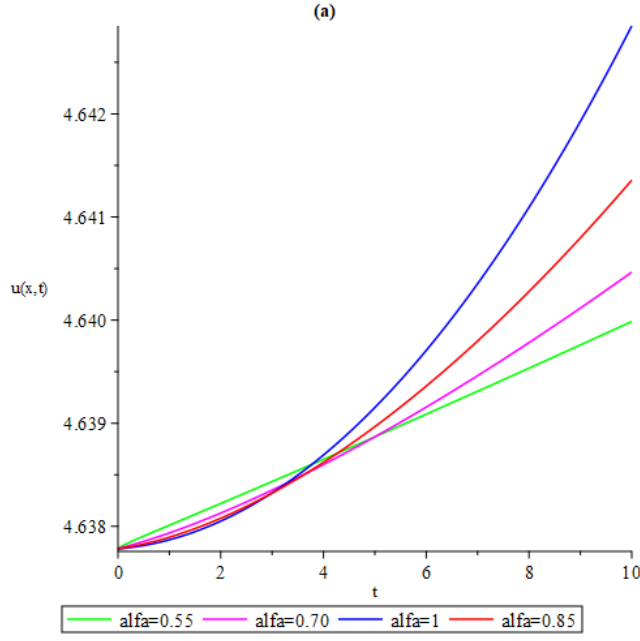
(d)



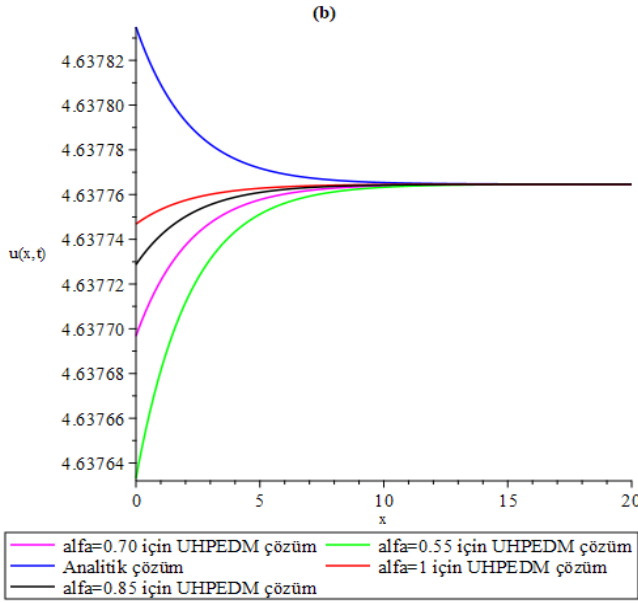
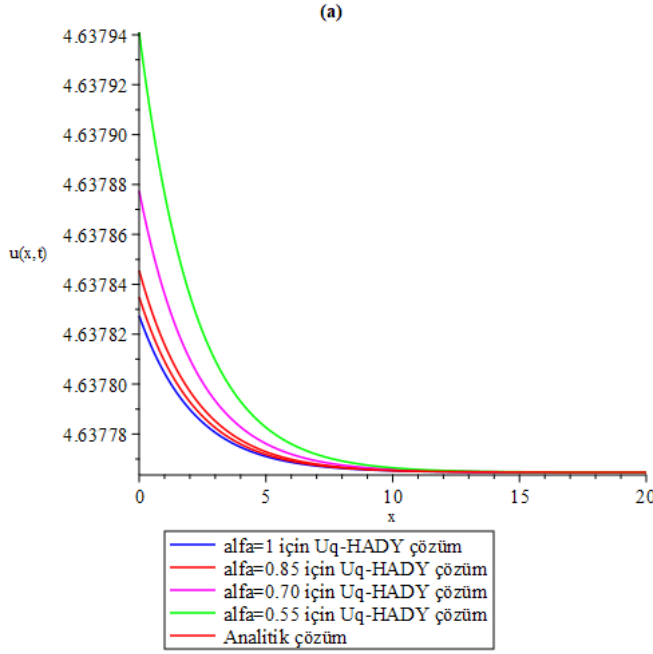
(e)



Şekil 1. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, \alpha = 1$ için;(a) Uq-HADY çözümü, (b) UHPEDM çözümü, (c) Analitik çözümü, d) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$, (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{UHPEDM}|$ dir.



Şekil 2. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, x = 0.5$ ve farklı α için;
 (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü'dir.



Şekil 3. Örnek 4.1 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, t = 0.5$ farklı α için; (a) Uq-HADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması (b) UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması'dir.

Tablo 1. Örnek 4.1 de $k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, \gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile UKMKS denklemi için sayısal çözümler

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	4.637813477	4.637875404	4.637843940	4.637795713
	0.2	4.637823412	4.637804196	4.637795713	4.637791548
	0.3	4.637846506	4.637818954	4.637805312	4.637798001
	0.4	4.637865894	4.637833084	4.637815429	4.637805347
	0.5	4.637882745	4.637846706	4.637825954	4.637813477

Tablo 1. (Devamı)

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.2	0.1	4.637897554	4.637855564	4.637836755	4.637822277
	0.2	4.637820793	4.637802431	4.637794325	4.637790346
	0.3	4.637842856	4.637816532	4.637803497	4.637796511
	0.4	4.637861383	4.637830033	4.637813163	4.637803532
	0.5	4.637877483	4.637843049	4.637823219	4.637811300
0.3	0.1	4.637891634	4.637855564	4.637833542	4.637819707
	0.2	4.637818288	4.637800744	4.637793000	4.637789199
	0.3	4.637839372	4.637814218	4.637801764	4.637795088
	0.4	4.637857073	4.637839554	4.637810999	4.637801796
	0.5	4.637872456	4.637839554	4.637820608	4.637809218
0.4	0.1	4.637885977	4.637851512	4.637830469	4.637817253
	0.2	4.637815896	4.637799133	4.637791733	4.637788101
	0.3	4.637836040	4.637812006	4.637800107	4.637793728
	0.4	4.637852953	4.637824333	4.637808932	4.637800138
	0.5	4.637867651	4.637836214	4.637818112	4.637807229
0.5	0.1	4.637880571	4.637847640	4.637827534	4.637814905
	0.2	4.637813610	4.637797592	4.637790523	4.637787053
	0.3	4.637832856	4.637809894	4.637798524	4.637792431
	0.4	4.637849017	4.637821671	4.637806955	4.637798553
	0.5	4.637863061	4.637833023	4.637815726	4.637805328

Tablo 2. Örnek 4.1 de $k = \frac{1}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5$, $h = -1$, $n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle UHPEDM ile UKMKS denklemi için sayısal çözümler

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	4.637740585	4.637766597	4.637776212	4.637776212
	0.2	4.637699943	4.637747195	4.637765255	4.637773716
	0.3	4.637656027	4.637724933	4.637752166	4.637765210
	0.4	4.637608630	4.637699540	4.637736652	4.637754824
	0.5	4.637557841	4.637670924	4.637718491	4.637742304
0.2	0.1	4.637741651	4.637766506	4.637775694	4.637779882
	0.2	4.637702814	4.637747968	4.637765223	4.637773309
	0.3	4.637660847	4.637726693	4.637752718	4.637765182
	0.4	4.637615552	4.637702428	4.637737892	4.637755257
	0.5	4.637567018	4.637675083	4.637720539	4.637743293
0.3	0.1	4.637742670	4.637766420	4.637775198	4.637779200
	0.2	4.637705559	4.637748706	4.637765193	4.637772920
	0.3	4.637665454	4.637728377	4.637753245	4.637765154
	0.4	4.637622170	4.637705190	4.637739078	4.637755672
	0.5	4.637575788	4.637679058	4.637722495	4.637744239
0.4	0.1	4.637743644	4.637766338	4.637774725	4.637778549
	0.2	4.637708182	4.637749412	4.637765166	4.637772548
	0.3	4.637669858	4.637729986	4.637753748	4.637765129
	0.4	4.637628495	4.637707829	4.637740212	4.637756067
	0.5	4.637584171	4.637682858	4.637724366	4.637745144
0.5	0.1	4.637744575	4.637766260	4.637774274	4.637777927
	0.2	4.637710688	4.637750086	4.637765140	4.637772193
	0.3	4.637674068	4.637731524	4.637754230	4.637765104
	0.4	4.637634541	4.637710352	4.637741296	4.637756446
	0.5	4.637592185	4.637686491	4.637726154	4.637746006

Tablo 3. Örnek 4.1' de $\alpha = 1, k = \frac{1}{2\sqrt{19}}, \gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere, (83) denkleminin analitik çözümünün, Uq-HADY ve UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$ u_{analitik} - u_{Uq-HADY} $	$ u_{analitik} - u_{UHPEDM} $
0.01	0.01	1.532534×10^{-10}	1.033881×10^{-6}
	0.02	8.98411×10^{-10}	2.091697×10^{-6}
	0.03	2.242169×10^{-9}	3.173798×10^{-6}
	0.04	4.401091×10^{-9}	4.280754×10^{-6}
	0.05	7.811066×10^{-9}	5.413265×10^{-6}
0.02	0.01	1.388450×10^{-10}	1.029203×10^{-6}
	0.02	6.22104×10^{-10}	2.081990×10^{-6}
	0.03	1.849505×10^{-9}	3.159190×10^{-6}
	0.04	3.761302×10^{-9}	4.261112×10^{-6}
	0.05	7.967740×10^{-9}	5.388541×10^{-6}
0.03	0.01	9.13870×10^{-11}	1.024578×10^{-6}
	0.02	6.73431×10^{-10}	2.072696×10^{-6}
	0.03	1.686756×10^{-9}	3.144920×10^{-6}
	0.04	4.515243×10^{-9}	4.241948×10^{-6}
	0.05	8.333249×10^{-9}	5.364087×10^{-6}
0.04	0.01	9.80123×10^{-11}	1.019964×10^{-6}
	0.02	5.29414×10^{-10}	1.541550×10^{-6}
	0.03	1.448935×10^{-9}	3.130594×10^{-6}
	0.04	3.922085×10^{-9}	4.222478×10^{-6}
	0.05	7.646288×10^{-9}	5.339685×10^{-6}
0.05	0.01	2.022579×10^{-10}	3.076806×10^{-6}
	0.02	4.081000×10^{-10}	2.053866×10^{-6}
	0.03	2.223376×10^{-9}	3.116386×10^{-6}
	0.04	3.679459×10^{-9}	4.203485×10^{-6}
	0.05	8.037882×10^{-9}	5.315467×10^{-6}

Örnek 4.2. (Anaç ve Avit, 2022; Veeresha ve Prakasha, 2021): Aşağıdaki uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky denklemini göz önünde bulunduralım:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, t > 0, 0 < \alpha \leq 1. \quad (\text{Eşitlik 110})$$

Başlangıç koşulları;

$$u(x, 0) = \gamma + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9 \tanh[k(x - \lambda)] + 11 \tanh^3[k(x - \lambda)]) \quad (\text{Eşitlik 111})$$

ve sınır koşulları;

$$u(a, t) = u(b, t) = 0. \quad (\text{Eşitlik 112})$$

'dir. Burada γ, k ve λ reel sabitlerdir.

4.3. (110) UKMKS Denklemi için Uq-HADY çözümü

Şimdi, (110) denkleme uyumlu Laplace dönüşümü uygulayarak

$$\mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \frac{1}{s}u(x, 0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right] = 0, \quad (\text{Eşitlik 113})$$

elde edilir.(113) denklemini kullanarak doğrusal olmayan operatör;

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] \\ &- \frac{1}{s}\left(\gamma + \frac{15}{19}\sqrt{\frac{11}{19}}(-9\tanh[k(x - \lambda)] + 11\tanh^3[k(x - \lambda)])\right) \\ &+ \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\varphi(x, t; q)\frac{\partial\varphi(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial^4\varphi(x, t; q)}{\partial x^4}\right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 114})$$

şeklinde tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{L}_\alpha[u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)] = h\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}). \quad (\text{Eşitlik 115})$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) &= \mathcal{L}_\alpha[\vec{u}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\frac{1}{s} \\ &\left(\gamma + \frac{15}{19}\sqrt{\frac{11}{19}}(-9\tanh[k(x - \lambda)] + 11\tanh^3[k(x - \lambda)])\right) \\ &+ \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_{m-1}}{\partial x^4}\right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 116})$$

'dir. (115) denkleme ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$u_m(x, t) = k_m u_{m-1}(x, t) + h\mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 117})$$

bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$u_0(x, t) = \gamma + \frac{15}{19}\sqrt{\frac{11}{19}}(-9\tanh[k(x - \lambda)] + 11\tanh^3[k(x - \lambda)]). \quad (\text{Eşitlik 118})$$

(117) denkleminde $m = 1$ yazarak $u_1(x, t)$ in değeri;

$$u_1(x, t) = k_1 u_0(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_1(\bar{u}_0)]. \quad (\text{Eşitlik 119})$$

bulunur. (116) denklemini kullanılarak $m=1$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\bar{u}_0) &= \mathcal{L}_\alpha[\bar{u}_0(x, t)] - \frac{1}{s} \left(\gamma + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \right. \\ &\quad \left. (-9 \tanh[k(x - \lambda)] + 11 \tanh^3[k(x - \lambda)]) \right) \\ &\quad + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 120})$$

ifadesi bulunur. Daha sonra (120) denkleminde, (119) denklemini yerine yazarak,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= - \frac{45hkt^\alpha}{361(\alpha \cosh^7[k(-x + \lambda)])} (\cosh^3[k(-x + \lambda)] c \sqrt{19} \\ &\quad + 64 \sinh[k(x - \lambda)] \left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16} \right] \sqrt{19} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ &\quad + \sinh[k(-x + \lambda)] (-120 \sqrt{19} k^3 + \frac{15}{19})) \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 121})$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, $u_2(x, t)$ değerini bulmak için (116)-(117) denklemlerinde $m = 2$ yerine koyularak ,

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= - \frac{45(n + h)hkt^\alpha}{361(\alpha \cosh^7[k(-x + \lambda)])} (\cosh^3[k(-x + \lambda)] c \sqrt{19} \\ &\quad + 64 \sinh[k(x - \lambda)] \left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16} \right] \sqrt{19} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ &\quad + \sinh[k(-x + \lambda)] (-120 \sqrt{19} k^3 + \frac{15}{19})) - \frac{-90ht^{2\alpha}k^2}{361\alpha^2(\cosh^{11}[k(-x + \lambda)])} \\ &\quad \times (h^2(128c \left(\frac{15}{608} + \left[k^3 - \frac{k}{16} \right] \sqrt{19} \right) \cosh^7[k(-x + \lambda)] + \sinh[k(-x + \lambda)] \\ &\quad \times \left((4096k^6 - 512k^4 + c^2 + 16k^2 + \frac{900}{6859}) \sqrt{19} + \frac{3840}{19} k^3 - \frac{240}{19} k \right) \\ &\quad \times \cosh^6[k(-x + \lambda)] - 520c \left(\frac{3}{988} + k^3 - \frac{k}{52} \right) \sqrt{19}) \cosh^5[k(-x + \lambda)] \\ &\quad - 63840 \sinh[k(x - \lambda)] \left(\frac{3}{266} + \left[k^3 - \frac{k}{16} \right] \sqrt{19} \right) \left(k^2 - \frac{1}{76} \right) k \cosh^4[k(-x + \lambda)] \\ &\quad + \left(420 \sqrt{19} c k^3 - \frac{105}{38} c \right) \cosh^3[k(-x + \lambda)] + 194880 \sinh[k(x - \lambda)] \\ &\quad \times \left(\left(k^6 - \frac{k^4}{58} - \frac{45}{44558064} \right) \sqrt{19} - \frac{k^3}{551} + \frac{11k}{123424} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ &\quad - 151200 \sinh[k(x - \lambda)]) \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 122})$$

değeri bulunur. Bu şekilde, diğer terimler de elde edilebilir. Böylece, (110) denkleminin Uq-HADY çözümü;

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (\text{Eşitlik 123})$$

şeklinde tanımlanır. Eğer (123) denkleminde $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ yerine koyulursa, elde edilen sonuç,

$$\sum_{m=1}^M u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 124})$$

$M \rightarrow \infty$ iken, UKMKS denkleminin analitik çözümü:

$$u(x, t) = \gamma + \frac{15 \tanh^3[k(x-\gamma t-\lambda)] - 45 \tanh[k(x-\gamma t-\lambda)]}{19\sqrt{19}} \quad (\text{Eşitlik 125})$$

'ye yakınsar.

4.4. (110) UKMKS Denklemi için UHPEDM çözümü

Şimdi, (110) denkleminin her iki tarafına uyumlu Elzaki dönüşümü uygulayarak ve başlangıç koşulları olan (111) denklemini kullanarak,

$$E_\alpha^c[u(x, t)] = v^2 u(x, 0) - v E_\alpha^c \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \quad (\text{Eşitlik 126})$$

ifadesi elde edilir. (126) denklemine ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygulandığında,

$$u(x, t) = u(x, 0) - (E_\alpha^c)^{-1} \left\{ v E_\alpha^c \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \right\} \quad (\text{Eşitlik 127})$$

olarak bulunur. Homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) &= \left(\gamma + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9 \tanh[k(x-\lambda)] + 11 \tanh^3[k(x-\lambda)]) \right) \\ p \left[(E_\alpha^c)^{-1} \left\{ v E_\alpha^c \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) \right) \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t) \right) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 128})$$

bulunur. Böylece

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} p^m u_m(x, t). \quad (\text{Eşitlik 129})$$

ifadesine ulaşılır. (128) denklemini yardımıyla, $H_n(u)$ 'un birkaç bileşenini kullanarak,

$$H_0(u) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{Eşitlik 130})$$

$$H_1(u) = u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{Eşitlik 131})$$

$$H_2(u) = u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad (\text{Eşitlik 132})$$

değerleri elde edilir. p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırıldığında,

$$p^0: u_0(x, t) = \gamma + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9 \tanh[k(x - \lambda)] + 11 \tanh^3[k(x - \lambda)]), \quad (\text{Eşitlik 133})$$

$$p^1: u_1(x, t) = \frac{-360kt^\alpha}{\alpha 361 \cosh^7[k(-x + \lambda)]} (\gamma \cosh^5[k(-x + \lambda)] \sqrt{209} \\ \left(\frac{-165}{76} + (k^3 + \frac{k}{4}) \sqrt{209} \right) \cosh^4[k(-x + \lambda)] - \frac{11\sqrt{209}\gamma \cosh^3[k(-x + \lambda)]}{8} \\ - 112 \left(\frac{-9075}{8512} + (k^3 + \frac{11k}{224}) \sqrt{209} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ + 165 \left(\sqrt{209}k^3 - \frac{121}{152} \right) \sinh[k(-x + \lambda)]), \quad (\text{Eşitlik 134})$$

$$p^2: u_2(x, t) = \frac{180k^2t^{2\alpha}}{\alpha^2 361 \cosh^{11}[k(-x + \lambda)]} \left(16\gamma \left(-\frac{165}{76} + (k^3 + \frac{k}{4}) \sqrt{209} \right) \right. \\ \times \cosh^9[k(-x + \lambda)] + \left(\left(\frac{9900}{6859} + \gamma^2 + 4k^2 + 64k^6 + 32k^4 \right) \sqrt{209} \right. \\ \left. \left. - \frac{1320k}{19} - \frac{5280k^3}{19} - \frac{5280k^3}{19} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^8[k(-x + \lambda)] - 472\gamma \right. \\ \times \left(\frac{-10065}{8968} + \left(k^3 + \frac{7k}{118} \right) \sqrt{209} \right) \cosh^7[k(-x + \lambda)] - \\ \frac{11}{4} \left(\frac{96300}{6859} + \frac{61184k^6}{11} + \frac{7552k^4}{11} + \frac{224k^2}{11} + \gamma^2 \right) \sqrt{209} - \frac{159360k^3}{19} - \\ \left. \frac{11760k}{19} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \\ \times \cosh^6[k(-x + \lambda)] + 1550 \left(\frac{-10527}{11780} + (k^3 + \frac{11k}{620}) \sqrt{209} \right) \gamma \cosh^5[k(-x + \lambda)] \\ + 195720 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\left(k^6 + \frac{155k^4}{3262} + \frac{11k^2}{26096} + \frac{16335}{12785176} \right) \sqrt{209} \right) \\ - \frac{8349k}{247912} - \frac{72897k^3}{61978} - \frac{8349k}{247912} \times \cosh^4[k(-x + \lambda)] \\ - 11556 \cosh^3[k(-x + \lambda)] \left(k^3 \sqrt{209} - \frac{121}{152} \right) - 556080 \sinh[k(-x + \lambda)] \left((k^6 \right. \\ \left. + \frac{11k^4}{662} + \frac{459195}{508553696} \right) \sqrt{209} - \frac{46343k^3}{44023} - \frac{14641k}{1408736} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] \\ \left. + 415800 \left(k^6 \sqrt{209} - \frac{1573k^3}{1596} + \frac{6655\sqrt{209}}{9218496} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \right), \quad (\text{Eşitlik 135})$$

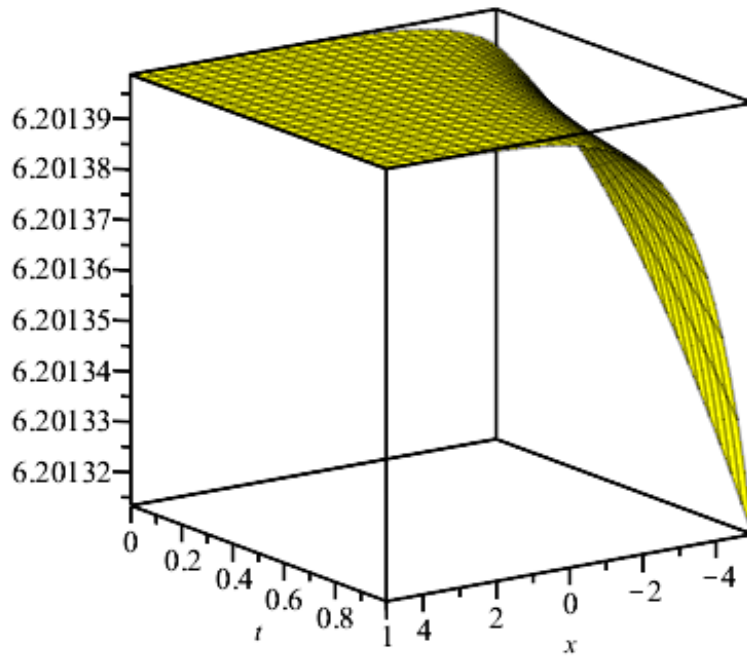
bulunur. Böylece, (110) denkleminin UHPEDM çözümü;

$$u(x, t) = \gamma + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} (-9 \tanh[k(x - \lambda)] + 11 \tanh^3[k(x - \lambda)]) \\ - \frac{360kt^\alpha}{\alpha 361 \cosh^7[k(-x + \lambda)]} (\gamma \cosh^5[k(-x + \lambda)] \sqrt{209} + 8 \sinh[k(-x + \lambda)])$$

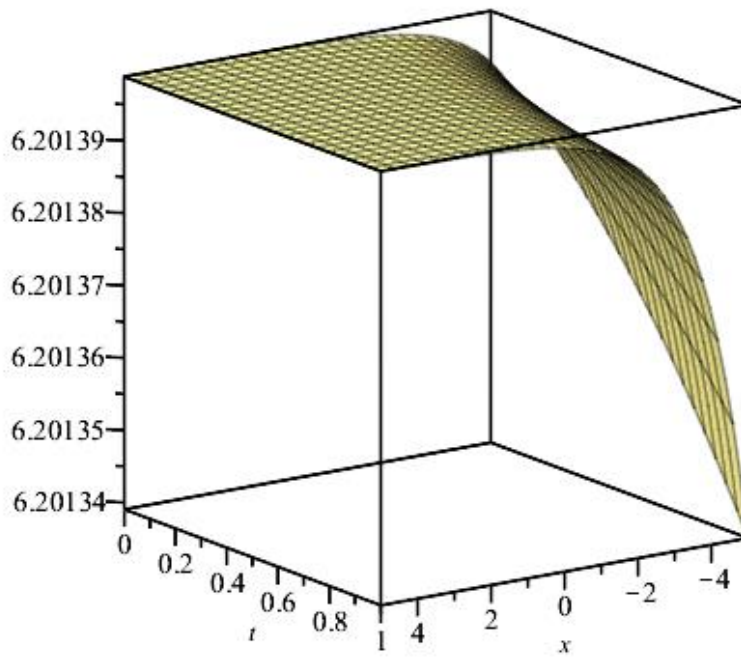
$$\begin{aligned}
& \left(\frac{-165}{76} + \left(k^3 + \frac{k}{4} \right) \sqrt{209} \right) \cosh^4[k(-x + \lambda)] - \frac{11\sqrt{209}\gamma \cosh^3[k(-x + \lambda)]}{8} \\
& - 112 \left(\frac{-9075}{8512} + \left(k^3 + \frac{11k}{224} \right) \sqrt{209} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \\
& \times \cosh^2[k(-x + \lambda)] + 165 \left(\sqrt{209}k^3 - \frac{121}{152} \right) \sinh[k(-x + \lambda)] \\
& + \frac{180k^2 t^{2\alpha}}{\alpha^2 361 \cosh^{11}[k(-x + \lambda)]} \left(16\gamma \left(-\frac{165}{76} + \left(k^3 + \frac{k}{4} \right) \sqrt{209} \right) \cosh^9[k(-x + \lambda)] \right. \\
& \left. + \left(\frac{9900}{6859} + \gamma^2 + 4k^2 + 64k^6 + 32k^4 \right) \sqrt{209} - \frac{1320k}{19} - \frac{5280k^3}{19} \right) \\
& \times \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^8[k(-x + \lambda)] - 472\gamma \left(\frac{-10065}{8968} + \left(k^3 + \frac{7k}{118} \right) \sqrt{209} \right) \\
& \times \cosh^7[k(-x + \lambda)] - \frac{11 \left(\frac{96300}{6859} + \frac{61184k^6}{11} + \frac{7552k^4}{11} + \frac{224k^2}{11} + \gamma^2 \right) \sqrt{209}}{4} \\
& + \frac{11 \left(-\frac{159360k^3}{19} - \frac{11760k}{19} \right)}{4} \cdot \sinh[k(-x + \lambda)] \cosh^6[k(-x + \lambda)] \\
& + 1550 \left(\frac{-10527}{11780} + \left(k^3 + \frac{11k}{620} \right) \sqrt{209} \right) \gamma \cosh^5[k(-x + \lambda)] \\
& + 195720 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\left(k^6 + \frac{155k^4}{3262} + \frac{11k^2}{26096} + \frac{16335}{12785176} \right) \sqrt{209} \right. \\
& \left. - \frac{72897k^3}{61978} - \frac{8349k}{247912} \right) \cosh^4[k(-x + \lambda)] - 11556 \cosh^3[k(-x + \lambda)] \\
& \left(k^3 \sqrt{209} - \frac{121}{152} \right) - 556080 \sinh[k(-x + \lambda)] \left(\left(k^6 + \frac{11k^4}{662} + \frac{459195}{508553696} \right) \right. \\
& \left. \sqrt{209} - \frac{46343k^3}{44023} - \frac{14641k}{1408736} \right) \cosh^2[k(-x + \lambda)] + 415800 (k^6 \sqrt{209} \\
& \left. - \frac{1573k^3}{1596} + \frac{6655\sqrt{209}}{9218496} \right) \sinh[k(-x + \lambda)]. \tag{Eşitlik 136}
\end{aligned}$$

ile verilir.

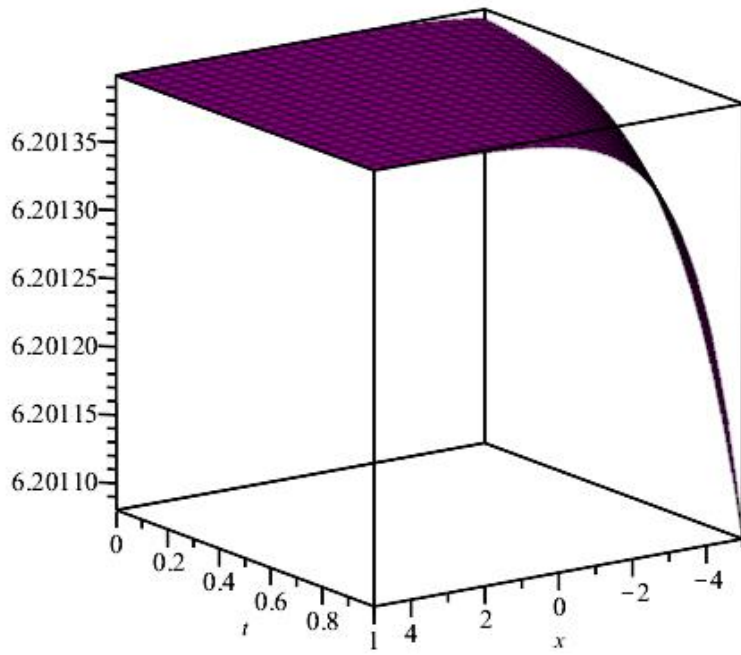
(a)



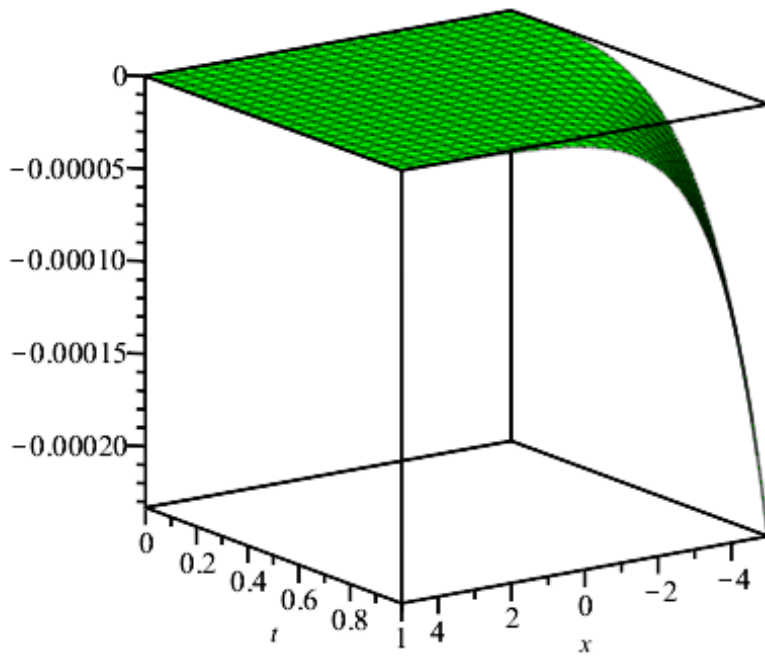
(b)



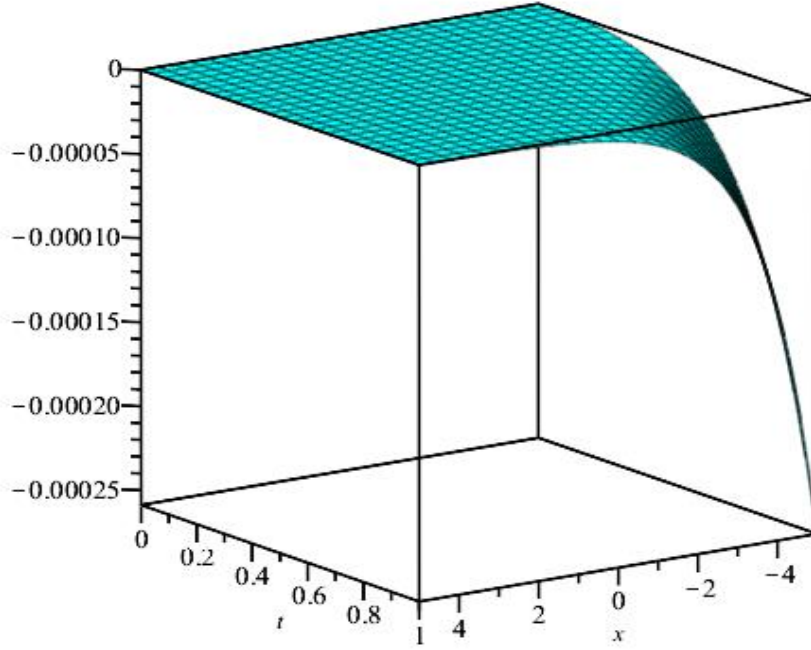
(c)



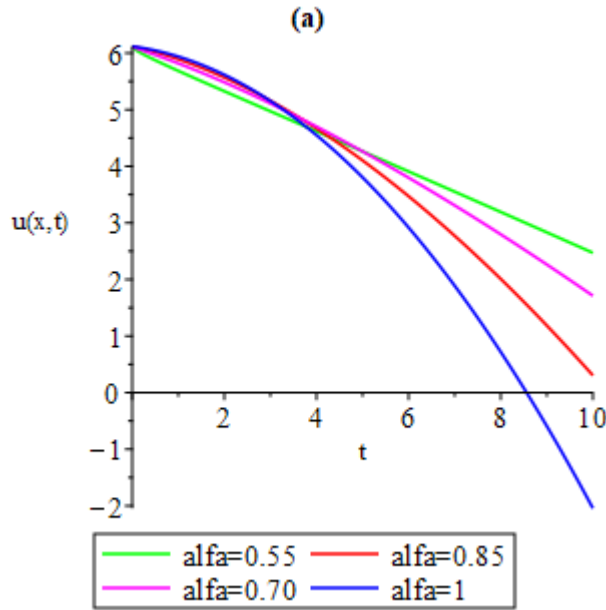
(d)

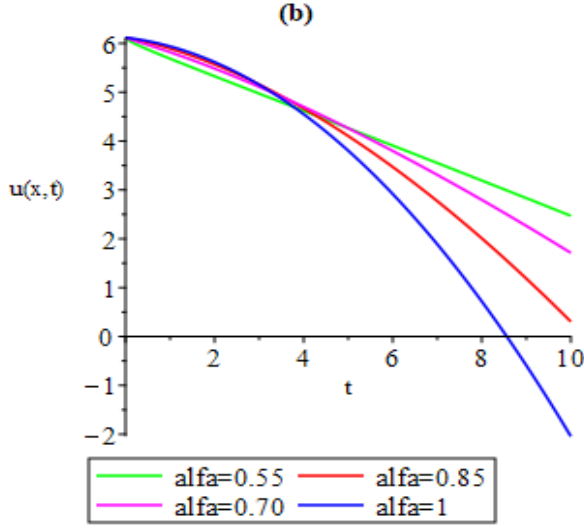


(e)



Şekil 4. Örnek 4.2 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}, \alpha = 1$ için; (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü (c) Analitik çözüm (d) Mutlak hata $= |u_{\text{analitik}} - u_{\text{Uq-HADY}}|$ (e) Mutlak hata $= |u_{\text{analitik}} - u_{\text{UHPEDM}}|$ dir.





Şekil 5. Örnek 4.2 de $\gamma = 5, \lambda = -25, h = -1, n = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}, x = 0.5$ ve farklı α için; (a) Uq-HADY çözümü (b) UHPEDM çözümü'dir.

Tablo 4. Örnek 4.2 de $k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}, \gamma = 5, h = -1, n = 1$, çeşitli α ve farklı x ve t değerleriyle UKMKS denkleminin Uq-HADY ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	6.201398093	6.201398411	6.201398534	6.201398590
	0.2	6.201397642	6.201398171	6.201398394	6.201398503
	0.3	6.201397202	6.201397912	6.201398231	6.201398394
	0.4	6.201396766	6.201397637	6.201398046	6.201398264
	0.5	6.201396330	6.201397347	6.201397841	6.201398112
0.2	0.1	6.201398147	6.201398443	6.201398557	6.201398608
	0.2	6.201397730	6.201398220	6.201398427	6.201398528
	0.3	6.201397323	6.201397980	6.201398276	6.201398427
	0.4	6.201396918	6.201397726	6.201398105	6.201398306
	0.5	6.201396515	6.201397457	6.201397914	6.201398167
0.3	0.1	6.201398194	6.201398468	6.201398573	6.201398621
	0.2	6.201397806	6.201398261	6.201398453	6.201398546
	0.3	6.201397429	6.201398040	6.201398313	6.201398452
	0.4	6.201397054	6.201397803	6.201398155	6.201398341
	0.5	6.201396680	6.201397553	6.201397978	6.201398211
0.4	0.1	6.201398238	6.201398493	6.201398590	6.201398635
	0.2	6.201397879	6.201398301	6.201398478	6.201398564
	0.3	6.201397529	6.201398095	6.201398349	6.201398478
	0.4	6.201397182	6.201397876	6.201398202	6.201398375
	0.5	6.201396836	6.201397645	6.201398039	6.201398254
0.5	0.1	6.201398279	6.201398515	6.201398606	6.201398647
	0.2	6.201397948	6.201398338	6.201398503	6.201398583
	0.3	6.201397623	6.201398147	6.201398382	6.201398503
	0.4	6.201397302	6.201397944	6.201398246	6.201398407
	0.5	6.201396980	6.201397730	6.201398095	6.201398295

Tablo 5. Örnek 4.2 de $k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$, çeşitli α ve farklı x ve t değerleriyle UKMKS denkleminin UHPEDM ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	6.201398232	6.201398454	6.201398549	6.201398595
	0.2	6.201397940	6.201398285	6.201398442	6.201398524
	0.3	6.201397668	6.201398113	6.201398325	6.201398442
	0.4	6.201396766	6.201397937	6.201398046	6.201398349
	0.5	6.201396330	6.201397757	6.201397841	6.201398245
0.2	0.1	6.201398147	6.201398483	6.201398557	6.201398613
	0.2	6.201397730	6.201398326	6.201398427	6.201398547
	0.3	6.201397323	6.201398166	6.201398276	6.201398471
	0.4	6.201396918	6.201398004	6.201398105	6.201398385
	0.5	6.201396515	6.201397836	6.201397914	6.201398289
0.3	0.1	6.201398194	6.201398505	6.201398573	6.201398626
	0.2	6.201397806	6.201398359	6.201398453	6.201398564
	0.3	6.201397429	6.201398212	6.201398313	6.201398493
	0.4	6.201397054	6.201398060	6.201398155	6.201398414
	0.5	6.201396680	6.201397905	6.201397978	6.201398325
0.4	0.1	6.201398238	6.201398527	6.201398590	6.201398638
	0.2	6.201397879	6.201398392	6.201398478	6.201398581
	0.3	6.201397529	6.201398254	6.201398349	6.201398516
	0.4	6.201397182	6.201398114	6.201398202	6.201398443
	0.5	6.201396836	6.201397971	6.201398039	6.201398360
0.5	0.1	6.201398279	6.201398547	6.201398606	6.201398651
	0.2	6.201397948	6.201398422	6.201398503	6.201398598
	0.3	6.201397623	6.201398295	6.201398382	6.201398538
	0.4	6.201397302	6.201398166	6.201398246	6.201398469
	0.5	6.201397583	6.201398032	6.201398095	6.201398393

Tablo 6. Örnek 4.2'de $\alpha = 1, k = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{19}}$, $\gamma = 5, h = -1, n = 1$ ve $\lambda = -25$ olmak üzere örnek 4.2 denkleminin analitik çözümünün, Uq-HADY ve UHPEDM çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$ u_{analitik} - u_{Uq-HADY} $	$ u_{analitik} - u_{UHPEDM} $
0.01	0.01	3.39854×10^{-8}	3.21268×10^{-8}
	0.02	5.09260×10^{-8}	4.60291×10^{-8}
	0.03	7.33816×10^{-8}	6.48480×10^{-8}
	0.04	8.86465×10^{-8}	7.59196×10^{-8}
	0.05	1.04195×10^{-7}	8.67572×10^{-8}
0.02	0.01	3.37003×10^{-8}	3.18713×10^{-8}
	0.02	5.65066×10^{-8}	5.16874×10^{-8}
	0.03	7.26971×10^{-8}	6.41560×10^{-8}
	0.04	8.77741×10^{-8}	7.51075×10^{-8}
	0.05	1.09064×10^{-7}	9.17618×10^{-8}
0.03	0.01	2.74902×10^{-8}	2.56903×10^{-8}
	0.02	5.06701×10^{-8}	4.59279×10^{-8}
	0.03	6.60906×10^{-8}	5.76854×10^{-8}
	0.04	8.69082×10^{-8}	7.43005×10^{-8}
	0.05	1.02086×10^{-7}	8.49176×10^{-8}
0.04	0.01	3.31368×10^{-8}	3.13659×10^{-8}
	0.02	5.07646×10^{-8}	4.60989×10^{-8}

Tablo 6. (Devamı)

x	t	$u_{analitik} - u_{Uq-HADY}$	$u_{analitik} - u_{UHPEDM}$
	0.03	7.13438×10^{-8}	6.29290×10^{-8}
	0.04	8.66272×10^{-8}	7.40768×10^{-8}
	0.05	1.01044×10^{-7}	8.40067×10^{-8}
0.05	0.01	3.28582×10^{-8}	3.11161×10^{-8}
	0.02	4.95616×10^{-8}	4.48273×10^{-8}
	0.03	7.00965×10^{-8}	6.18157×10^{-8}
	0.04	8.51961×10^{-8}	7.28460×10^{-8}
	0.05	1.05358×10^{-7}	8.84505×10^{-8}

Örnek 4.3. (Anaç, 2022; Ali vd., 2018; Shah vd., 2019; Sherriffe vd. 2021; Wang vd., 2017): Uyumlu birleşmiş Whitham-Broer-Kaup denklem sistemini düşünelim,

$$\begin{cases} {}_t T_\alpha u(x, t) + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, \\ {}_t T_\alpha w(x, t) + w(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0, \\ 0 < \alpha \leq 1, 0 < t \leq 1, -100 \leq x \leq 100, \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 137})$$

başlangıç koşulları ile

$$\begin{cases} u(x, 0) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)], \\ w(x, 0) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)] \end{cases} \quad (\text{Eşitlik 138})$$

şeklindedir.

4.5. (137) UKWBK denklemi için Uq-HADY çözümü

Şimdi, (137) denkleminin uyumlu Laplace dönüşümü uyguladıktan sonra başlangıç koşulları olan (138) denklemini kullanarak,

$$\mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \frac{1}{s} u(x, 0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0, \quad (\text{Eşitlik 139})$$

$$\mathcal{L}_\alpha[w(x, t)] - \frac{1}{s} w(x, 0) + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[w \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (\text{Eşitlik 140})$$

ifadelerini buluruz. Doğrusal olmayan operatörleri (139)-(140) denklemleri kullanarak;

$$N^1[\varphi(x, t; q), \psi(x, t; q)] = \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{s} (\xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)])$$

$$+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\varphi(x, t; q) \frac{\partial \varphi(x, t; q)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial x} \right], \quad (\text{Eşitlik 141})$$

$$\begin{aligned} N^2[\varphi(x, t; q), \psi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{1}{s} (-\kappa^2 \text{cosech}^2[\kappa(x + \theta)]) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\varphi(x, t; q) \frac{\partial \psi(x, t; q)}{\partial x} + \psi(x, t; q) \frac{\partial \varphi(x, t; q)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t; q)}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 142})$$

bulunur. Önerilen algoritma uygulanarak, m . dereceden deformasyon denklemleri şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{L}_\alpha[u_m(x, t) - k_m u_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}], \quad (\text{Eşitlik 143})$$

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}]. \quad (\text{Eşitlik 144})$$

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] &= \mathcal{L}_\alpha[\vec{u}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} (\xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)]) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial w_{m-1}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 145})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] &= \mathcal{L}_\alpha[\vec{w}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{1}{s} (-\kappa^2 \text{cosech}^2[\kappa(x + \theta)]) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} + \sum_{r=0}^{m-1} w_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 146})$$

'dir. (143)-(144) denklemlere ters uyumlu Laplace dönüşümü uygulanıldığında,

$$u_m(x, t) = k_m u_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{ \mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \}, \quad (\text{Eşitlik 147})$$

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{ \mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \} \quad (\text{Eşitlik 148})$$

ifadeleri elde edilir. Başlangıç koşullarının kullanılmasıyla,

$$u_0(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)], \quad (\text{Eşitlik 149})$$

$$w_0(x, t) = -\kappa^2 \text{cosech}^2[\kappa(x + \theta)], \quad (\text{Eşitlik 150})$$

bulunur. Sırasıyla $u_1(x, t)$ ve $w_1(x, t)$ değerlerini bulmak için (147)-(148) denklemlerine $m = 1$ koyarak ;

$$u_1(x, t) = k_1 u_0(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{ \mathcal{R}_{1,1} [\vec{u}_0, \vec{w}_0] \}, \quad (\text{Eşitlik 151})$$

$$w_1(x, t) = k_1 w_0(x, t) + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \{ \mathcal{R}_{2,1} [\vec{u}_0, \vec{w}_0] \}. \quad (\text{Eşitlik 152})$$

$m = 1$ için (145)-(146) denklemlerini kullanarak ;

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,1} [\vec{u}_0, \vec{w}_0] &= \mathcal{L}_\alpha [\vec{u}_0(x, t)] - \left(1 - \frac{k_1}{n} \right) \frac{1}{s} (\xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)]) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 153})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{2,1} [\vec{u}_0, \vec{w}_0] &= \mathcal{L}_\alpha [\vec{w}_0(x, t)] - \left(1 - \frac{k_1}{n} \right) \frac{1}{s} (-\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)]) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 154})$$

olarak bulunur. (147)-(148) denklemlerinde, (153)-(154) denklemleri ve (138) denklemini kullanarak,

$$u_1(x, t) = \frac{h \xi \kappa^2 t^\alpha}{\alpha \sinh^2[\kappa(x + \theta)]}, \quad (\text{Eşitlik 155})$$

$$w_1(x, t) = \frac{2h \xi \kappa^3 \cosh[\kappa(x + \theta)] t^\alpha}{\alpha \sinh^3[\kappa(x + \theta)]} \quad (\text{Eşitlik 156})$$

ifadeleri elde edilir. Benzer şekilde, $u_2(x, t)$ değerini bulmak için $m = 2$ 'yi (147)-(148) denklemlere koyarak;

$$u_2(x, t) = \frac{(n+h)h \xi \kappa^2 t^\alpha}{\alpha \sinh^2[\kappa(x + \theta)]} - \frac{h^2 \xi^2 \kappa^3 \cosh[\kappa(x + \theta)] t^{2\alpha}}{\alpha^2 \sinh^3[\kappa(x + \theta)]}, \quad (\text{Eşitlik 157})$$

$$\begin{aligned} w_2(x, t) &= \frac{2(n+h)h \xi \kappa^3 \cosh[\kappa(x + \theta)] t^\alpha}{\alpha \sinh^3[\kappa(x + \theta)]} \\ &- \frac{2h^2 \xi^2 \kappa^4 \left(\cosh^2[\kappa(x + \theta)] + \frac{1}{2} \right) t^{2\alpha}}{\alpha^2 \sinh^4[\kappa(x + \theta)]} \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 158})$$

değerleri bulunur. Bu şekilde, diğer terimler de elde edilebilir. Böylece, (137) denkleminin Uq-HADY çözümü;

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m, \quad (\text{Eşitlik 159})$$

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m. \quad (\text{Eşitlik 160})$$

Eğer (159)-(160) denklemlerinde $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ değerlerini yerine koyarsak elde edilen sonuçlar;

$$\sum_{m=1}^M u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 161})$$

$$\sum_{m=1}^M w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 162})$$

$M \rightarrow \infty$ iken UKWBK denkleminin analitik çözümleri olan

$$u(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta - \xi t)], \quad (\text{Eşitlik 163})$$

$$w(x, t) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta - \xi t)], \quad (\text{Eşitlik 164})$$

ifadelerine yakınsar.

4.6. UKWBK Denklemi için UKEAY çözümü

Şimdi, (137) denklemi üzerinde uyumlu Elzaki dönüşümünü uygulırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} E_\alpha \{u(x, t)\} - v u(x, 0) \\ & + E_\alpha \left[u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 165})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} E_\alpha \{w(x, t)\} - v w(x, 0) \\ & = -E_\alpha \left[w(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 166})$$

ifadesi bulunur. (165)-(166) denklemlerini sadeleştirirsek,

$$\begin{aligned} & E_\alpha \{u(x, t)\} = v^2 u(x, 0) \\ & - v E_\alpha \left[u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 167})$$

$$\begin{aligned} & E_\alpha \{w(x, t)\} = v^2 w(x, 0) \\ & - v E_\alpha \left[w(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 168})$$

elde edilir. (167)-(168) denklemlerine ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} & u(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)] \\ & - E_\alpha^{-1} \left\{ v E_\alpha \left[u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 169})$$

$$w(x, t) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)]$$

$$-E_\alpha^{-1} \left\{ v E_\alpha \left[w(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] \right\} \quad (\text{Eşitlik 170})$$

ifadeleri elde edilir. $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonlarının sonsuz seri çözümünün

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) \quad (\text{Eşitlik 171})$$

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) \quad (\text{Eşitlik 172})$$

olduğunu varsayalım.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \quad (\text{Eşitlik 173})$$

$$w \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \quad (\text{Eşitlik 174})$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \quad (\text{Eşitlik 175})$$

doğrusal olmayan terimleri gösteren Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (171)-(172) denklemlerini yeniden yazarsak;

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)] - (E_\alpha^c)^{-1} \left\{ v E_\alpha^c \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial w_{m-1}(x, t)}{\partial x} \right] \right\}, \quad (\text{Eşitlik 176})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)] - (E_\alpha^c)^{-1} \left\{ v E_\alpha^c \left[\sum_{m=0}^{\infty} B_m + \sum_{m=0}^{\infty} C_m - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} \right] \right\}. \quad (\text{Eşitlik 177})$$

ifadeleri bulunur. (176)-(177) denklemlerinin her iki tarafını ele alarak, başlangıç koşulu olan (138) denklemini ve (176)-(177) denklemlerinden de yararlanarak basitçe

$$u_0(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)], \quad (\text{Eşitlik 178})$$

$$w_0(x, t) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)], \quad (\text{Eşitlik 179})$$

$$u_1(x, t) = -\frac{\xi \kappa^2 t^\alpha}{\alpha \sinh^2[\kappa(x + \theta)]}, \quad (\text{Eşitlik 180})$$

$$w_1(x, t) = -\frac{2\xi \kappa^3 \cosh[\kappa(x + \theta)] t^\alpha}{\alpha \sinh^3[\kappa(x + \theta)]}. \quad (\text{Eşitlik 181})$$

$$u_2(x, t) = -\frac{\xi^2 \kappa^3 \cosh[\kappa(x + \theta)] t^{2\alpha}}{\alpha^2 \sinh^3[\kappa(x + \theta)]}, \quad (\text{Eşitlik 182})$$

$$w_2(x, t) = -\frac{2\xi^2\kappa^4\left(\cosh^2[\kappa(x+\theta)]+\frac{1}{2}\right)t^{2\alpha}}{\alpha^2\sinh^4[\kappa(x+\theta)]}, \quad (\text{Eşitlik 183})$$

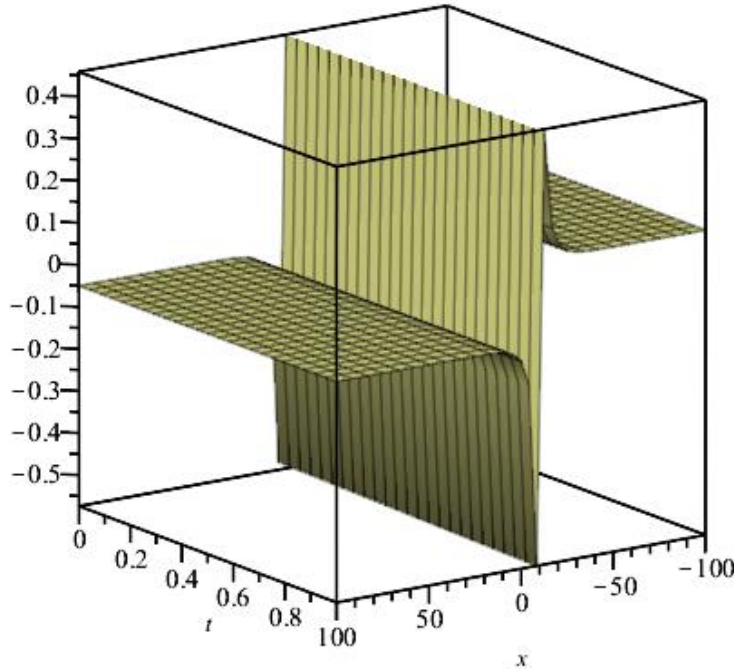
iterasyonları elde edilir. Benzer şekilde devam edersek;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\ &= \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta)] - \frac{\xi\kappa^2 t^\alpha}{\alpha \sinh^2[\kappa(x+\theta)]} - \frac{\xi^2\kappa^3 \cosh[\kappa(x+\theta)]t^{2\alpha}}{\alpha^2 \sinh^3[\kappa(x+\theta)]}, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 184})$$

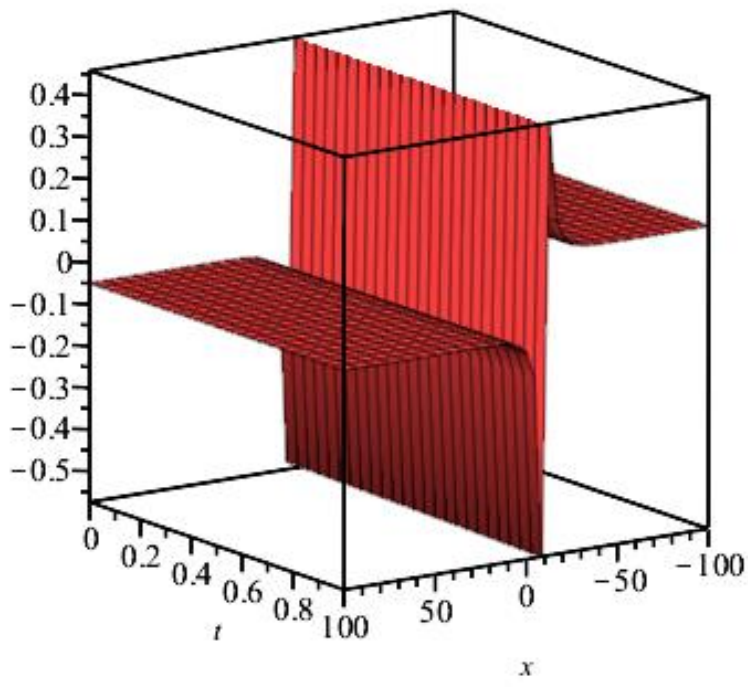
$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \\ &= -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta)] \\ &\quad - \frac{2\xi\kappa^3 \cosh[\kappa(x+\theta)]t^\alpha}{\alpha \sinh^3[\kappa(x+\theta)]} - \frac{2\xi^2\kappa^4\left(\cosh^2[\kappa(x+\theta)]+\frac{1}{2}\right)t^{2\alpha}}{\alpha^2 \sinh^4[\kappa(x+\theta)]}. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 185})$$

çözümleri elde edilir. $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY çözümlerinin, problemlerin analitik çözümü ile mükemmel bir uyum içinde olduğu bulunmuştur. Örnekteki $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ değişkenlerinin her ikisinin de sonuçlarını daha iyi anlamak için şekiller çizilmiştir. Şekillerde bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.

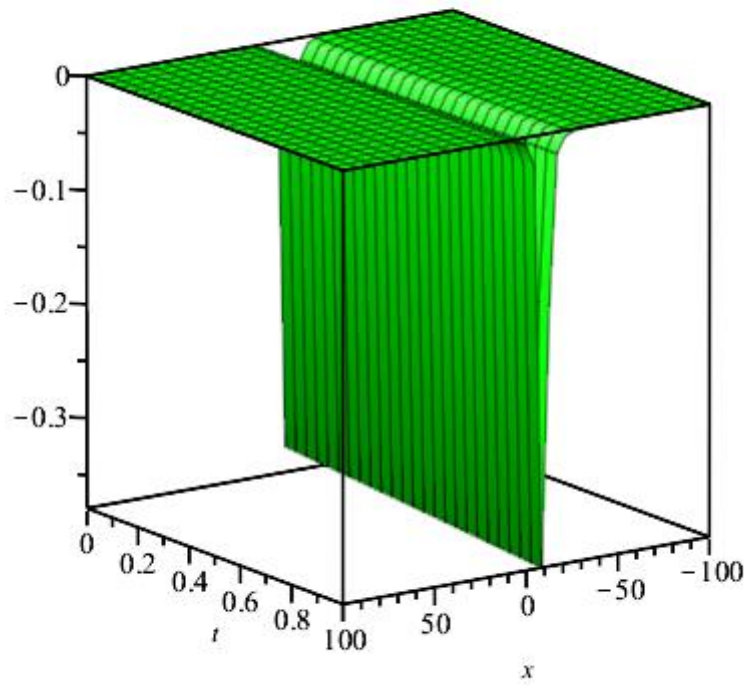
(a)



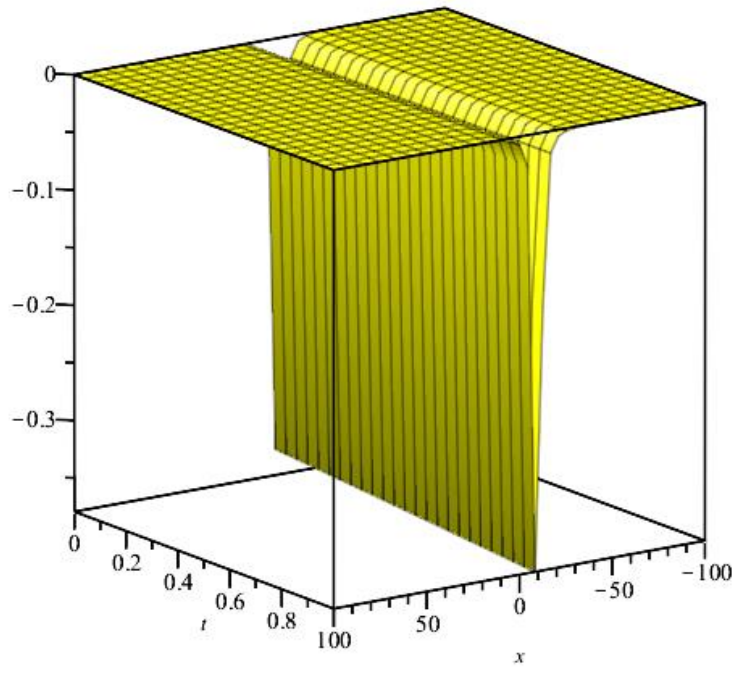
(b)



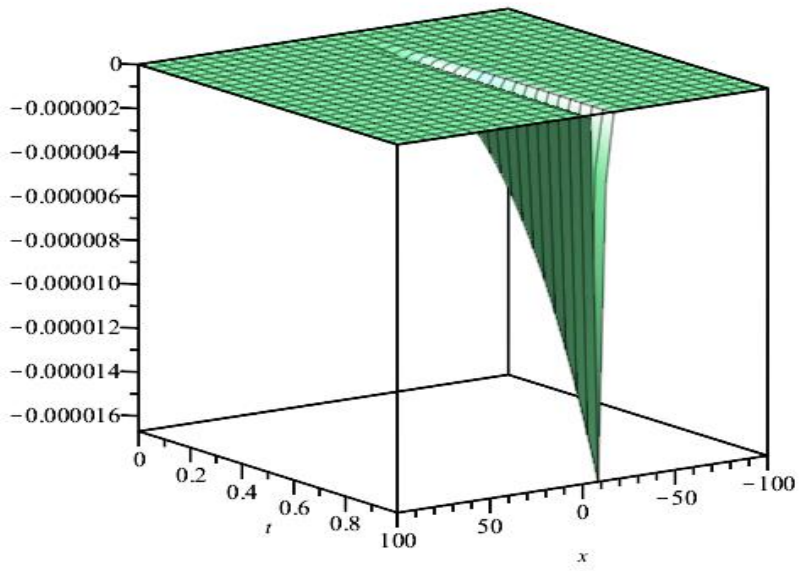
(c)



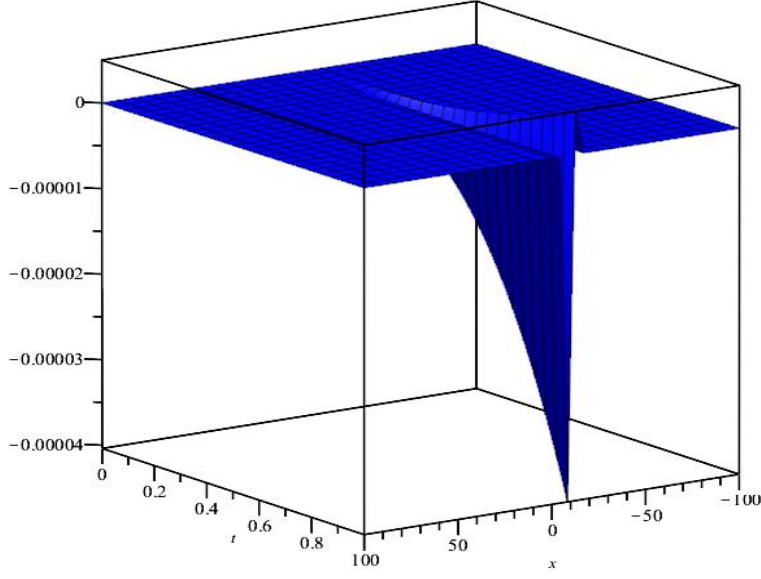
(d)



(e)

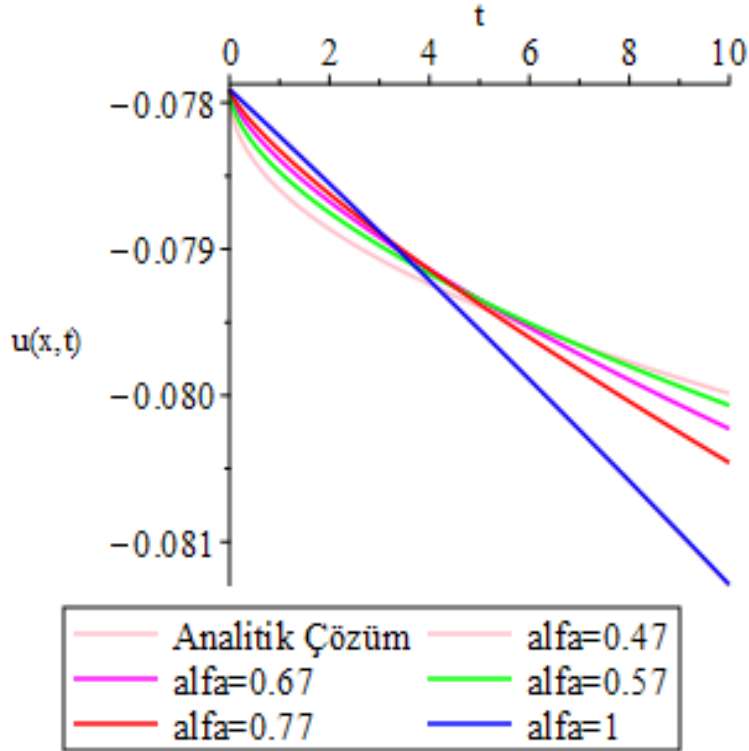


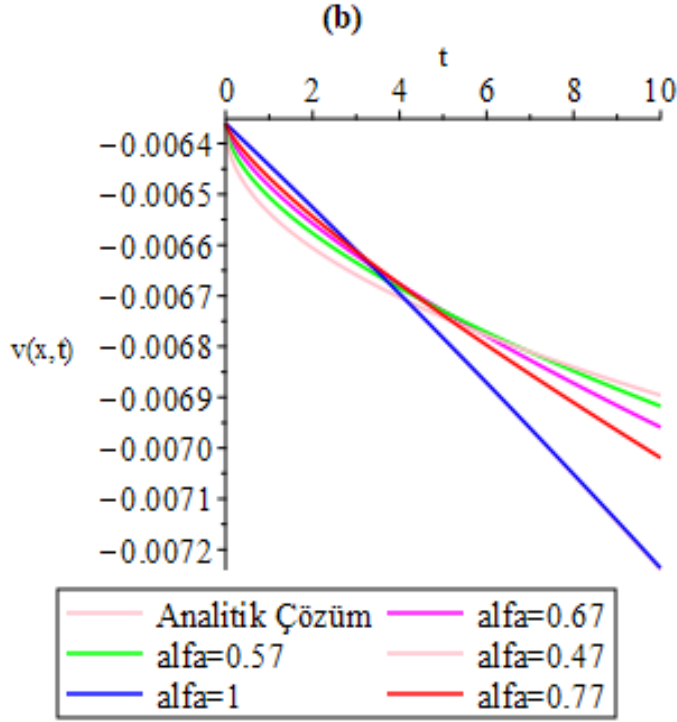
(f)



Şekil 6. Örnek 4.3 de $\xi = 0.005$, $\kappa = 0.1$, $\theta = 10$, $h = -1$, $n = 1$, $\alpha = 1$ için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $u(x, t)$ için analitik çözümü (c) $w(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (d) $w(x, t)$ için analitik çözümü (e) Mutlak hata = $|u_{\text{analitik}} - u_{\text{Uq-HADY}}|$ (f) Mutlak hata = $|w_{\text{analitik}} - w_{\text{Uq-HADY}}|$ 'dir.

(a)





Şekil 7. Örnek 4.3 de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, x = 0.5$ iken farklı α için; (a) $u(x, t)$ için UKEAY çözümü (b) $w(x, t)$ için UKEAY çözümü'dir.

Tablo 7. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1, n = 1$ için, farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKWBK denklemi için $u(x, t)$ 'nin Uq-HADY ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.47$	$\alpha = 0.57$	$\alpha = 0.67$	$\alpha = 0.77$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	2.8×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.7×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.2×10^{-17}
	0.002	3.9×10^{-5}	1.7×10^{-5}	7.4×10^{-6}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-17}
	0.003	4.7×10^{-5}	2.1×10^{-5}	9.6×10^{-6}	4.1×10^{-6}	3.2×10^{-16}
	0.004	5.4×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.1×10^{-5}	5.1×10^{-6}	7.7×10^{-16}
	0.005	6.0×10^{-5}	2.8×10^{-5}	1.3×10^{-5}	5.9×10^{-6}	1.5×10^{-15}
0.2	0.001	2.8×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.6×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.1×10^{-17}
	0.002	3.8×10^{-5}	1.6×10^{-5}	7.2×10^{-6}	3.0×10^{-6}	9.3×10^{-17}
	0.003	4.6×10^{-5}	2.0×10^{-5}	9.4×10^{-6}	4.0×10^{-6}	3.1×10^{-16}
	0.004	5.3×10^{-5}	2.4×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.9×10^{-6}	7.4×10^{-16}
	0.005	5.8×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.3×10^{-5}	5.8×10^{-6}	1.4×10^{-15}
0.3	0.001	2.7×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.5×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.1×10^{-17}
	0.002	3.7×10^{-5}	1.6×10^{-5}	7.1×10^{-6}	2.9×10^{-6}	8.9×10^{-17}
	0.003	4.5×10^{-5}	2.0×10^{-5}	9.1×10^{-6}	3.9×10^{-6}	3.0×10^{-16}
	0.004	5.1×10^{-5}	2.3×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.8×10^{-6}	7.1×10^{-16}
	0.005	5.7×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.6×10^{-6}	1.3×10^{-15}
0.4	0.001	2.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.4×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-17}
	0.002	3.6×10^{-5}	1.5×10^{-5}	6.9×10^{-6}	2.8×10^{-6}	8.6×10^{-17}
	0.003	4.4×10^{-5}	1.9×10^{-5}	8.9×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.9×10^{-16}
	0.004	5.0×10^{-5}	2.3×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.7×10^{-6}	6.8×10^{-16}
	0.005	5.5×10^{-5}	2.6×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.5×10^{-6}	1.3×10^{-15}
0.5	0.001	2.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.3×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-17}
	0.002	3.5×10^{-5}	1.5×10^{-5}	6.7×10^{-6}	2.8×10^{-6}	8.2×10^{-17}
	0.003	4.3×10^{-5}	1.9×10^{-5}	8.7×10^{-6}	3.7×10^{-6}	2.7×10^{-16}
	0.004	4.9×10^{-5}	2.2×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.6×10^{-6}	6.6×10^{-16}
	0.005	5.4×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.3×10^{-6}	1.2×10^{-15}

Tablo 8. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.47$	$\alpha = 0.57$	$\alpha = 0.67$	$\alpha = 0.77$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	7.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.2×10^{-6}	4.9×10^{-7}	4.7×10^{-18}
	0.002	1.0×10^{-5}	4.4×10^{-6}	1.9×10^{-6}	8.1×10^{-7}	3.8×10^{-17}
	0.003	1.2×10^{-5}	5.6×10^{-6}	2.5×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.2×10^{-16}
	0.004	1.4×10^{-5}	6.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	3.0×10^{-16}
	0.005	1.5×10^{-5}	7.4×10^{-6}	3.4×10^{-6}	1.5×10^{-6}	5.9×10^{-16}
0.2	0.001	7.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	1.2×10^{-6}	4.7×10^{-7}	4.5×10^{-18}
	0.002	1.0×10^{-5}	4.3×10^{-6}	1.8×10^{-6}	7.8×10^{-7}	3.6×10^{-17}
	0.003	1.2×10^{-5}	5.4×10^{-6}	2.4×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.2×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	6.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.9×10^{-16}
	0.005	1.5×10^{-5}	7.2×10^{-6}	3.3×10^{-6}	1.5×10^{-6}	5.6×10^{-16}
0.3	0.001	7.0×10^{-6}	2.8×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.6×10^{-7}	4.3×10^{-18}
	0.002	9.7×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.8×10^{-6}	7.6×10^{-7}	3.4×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	5.2×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.1×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	6.1×10^{-6}	2.8×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.7×10^{-16}
	0.005	1.4×10^{-5}	6.9×10^{-6}	3.2×10^{-6}	1.4×10^{-6}	5.4×10^{-16}
0.4	0.001	6.8×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.4×10^{-7}	4.1×10^{-18}
	0.002	9.4×10^{-6}	4.0×10^{-6}	1.7×10^{-6}	7.4×10^{-7}	3.3×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	5.1×10^{-6}	2.3×10^{-6}	9.9×10^{-7}	1.1×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	5.9×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.6×10^{-16}
	0.005	1.4×10^{-5}	6.7×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.4×10^{-6}	5.1×10^{-16}
0.5	0.001	6.6×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.3×10^{-7}	3.9×10^{-18}
	0.002	9.1×10^{-6}	3.9×10^{-6}	1.7×10^{-6}	7.1×10^{-7}	3.1×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	4.9×10^{-6}	2.2×10^{-6}	9.6×10^{-7}	1.0×10^{-16}
	0.004	1.2×10^{-5}	5.8×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.1×10^{-6}	2.5×10^{-16}
	0.005	1.3×10^{-5}	6.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	4.9×10^{-16}

Tablo 9. Örnek 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $u(x, t)$ 'nin UKEAY ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.47$	$\alpha = 0.57$	$\alpha = 0.67$	$\alpha = 0.77$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	2.8×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.7×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.2×10^{-17}
	0.002	3.9×10^{-5}	1.7×10^{-5}	7.4×10^{-6}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-17}
	0.003	4.7×10^{-5}	2.1×10^{-5}	9.6×10^{-6}	4.1×10^{-6}	3.2×10^{-16}
	0.004	5.4×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.1×10^{-5}	5.1×10^{-6}	7.7×10^{-16}
	0.005	6.0×10^{-5}	2.8×10^{-5}	1.3×10^{-5}	5.9×10^{-6}	1.5×10^{-15}
0.2	0.001	2.8×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.6×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.1×10^{-17}
	0.002	3.8×10^{-5}	1.6×10^{-5}	7.2×10^{-6}	3.0×10^{-6}	9.3×10^{-17}
	0.003	4.6×10^{-5}	2.0×10^{-5}	9.4×10^{-6}	4.0×10^{-6}	3.1×10^{-16}
	0.004	5.3×10^{-5}	2.4×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.9×10^{-6}	7.4×10^{-16}
	0.005	5.8×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.3×10^{-5}	5.8×10^{-6}	1.4×10^{-15}
0.3	0.001	2.7×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.5×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.1×10^{-17}
	0.002	3.7×10^{-5}	1.6×10^{-5}	7.1×10^{-6}	2.9×10^{-6}	8.9×10^{-17}
	0.003	4.5×10^{-5}	2.0×10^{-5}	9.1×10^{-6}	3.9×10^{-6}	3.0×10^{-16}
	0.004	5.1×10^{-5}	2.3×10^{-5}	1.1×10^{-5}	4.8×10^{-6}	7.1×10^{-16}

Tablo 9. (Devamı)

x	t	$\alpha = 0.47$	$\alpha = 0.57$	$\alpha = 0.67$	$\alpha = 0.77$	$\alpha = 1$
	0.005	5.7×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.6×10^{-6}	1.3×10^{-15}
0.4	0.001	2.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.4×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-17}
	0.002	3.6×10^{-5}	1.5×10^{-5}	6.9×10^{-6}	2.8×10^{-6}	8.6×10^{-17}
	0.003	4.4×10^{-5}	1.9×10^{-5}	8.9×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.9×10^{-16}
	0.004	5.0×10^{-5}	2.3×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.7×10^{-6}	6.8×10^{-16}
	0.005	5.5×10^{-5}	2.6×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.5×10^{-6}	1.3×10^{-15}
0.5	0.001	2.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.3×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-17}
	0.002	3.5×10^{-5}	1.5×10^{-5}	6.7×10^{-6}	2.8×10^{-6}	8.2×10^{-17}
	0.003	4.3×10^{-5}	1.9×10^{-5}	8.7×10^{-6}	3.7×10^{-6}	2.7×10^{-16}
	0.004	4.9×10^{-5}	2.2×10^{-5}	1.0×10^{-5}	4.6×10^{-6}	6.6×10^{-16}
	0.005	5.4×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.3×10^{-6}	1.2×10^{-15}

Tablo 10. Örn. 4.3'de $\xi = 0.005, \kappa = 0.1, \theta = 10, h = -1$ ve $n = 1$ 'de, farklı α için x ve t 'nin farklı değerleri ile UKWBK denklemi için $w(x, t)$ 'nin UKEAY ile sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.47$	$\alpha = 0.57$	$\alpha = 0.67$	$\alpha = 0.77$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	7.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.2×10^{-6}	4.9×10^{-7}	4.7×10^{-18}
	0.002	1.0×10^{-5}	4.4×10^{-6}	1.9×10^{-6}	8.1×10^{-7}	3.8×10^{-17}
	0.003	1.2×10^{-5}	5.6×10^{-6}	2.5×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.2×10^{-16}
	0.004	1.4×10^{-5}	6.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	3.0×10^{-16}
	0.005	1.5×10^{-5}	7.4×10^{-6}	3.4×10^{-6}	1.5×10^{-6}	5.9×10^{-16}
0.2	0.001	7.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	1.2×10^{-6}	4.7×10^{-7}	4.5×10^{-18}
	0.002	1.0×10^{-5}	4.3×10^{-6}	1.8×10^{-6}	7.8×10^{-7}	3.6×10^{-17}
	0.003	1.2×10^{-5}	5.4×10^{-6}	2.4×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.2×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	6.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.9×10^{-16}
	0.005	1.5×10^{-5}	7.2×10^{-6}	3.3×10^{-6}	1.5×10^{-6}	5.6×10^{-16}
0.3	0.001	7.0×10^{-6}	2.8×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.6×10^{-7}	4.3×10^{-18}
	0.002	9.7×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.8×10^{-6}	7.6×10^{-7}	3.4×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	5.2×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.0×10^{-6}	1.1×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	6.1×10^{-6}	2.8×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.7×10^{-16}
	0.005	1.4×10^{-5}	6.9×10^{-6}	3.2×10^{-6}	1.4×10^{-6}	5.4×10^{-16}
0.4	0.001	6.8×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.4×10^{-7}	4.1×10^{-18}
	0.002	9.4×10^{-6}	4.0×10^{-6}	1.7×10^{-6}	7.4×10^{-7}	3.3×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	5.1×10^{-6}	2.3×10^{-6}	9.9×10^{-7}	1.1×10^{-16}
	0.004	1.3×10^{-5}	5.9×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.2×10^{-6}	2.6×10^{-16}
	0.005	1.4×10^{-5}	6.7×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.4×10^{-6}	5.1×10^{-16}
0.5	0.001	6.6×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.1×10^{-6}	4.3×10^{-7}	3.9×10^{-18}
	0.002	9.1×10^{-6}	3.9×10^{-6}	1.7×10^{-6}	7.1×10^{-7}	3.1×10^{-17}
	0.003	1.1×10^{-5}	4.9×10^{-6}	2.2×10^{-6}	9.6×10^{-7}	1.0×10^{-16}
	0.004	1.2×10^{-5}	5.8×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.1×10^{-6}	2.5×10^{-16}
	0.005	1.3×10^{-5}	6.5×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	4.9×10^{-16}

Örnek 4.4. (Anaç, 2022; Shen vd., 2021): Uyumlu birleşik zaman-kesirli mertebeden Jaulent-Miodek sistemi aşağıdaki başlangıç koşullarıyla ele alalım:

$$u_t^\alpha + u_{xxx} + \frac{3}{2}ww_{xxx} + \frac{9}{2}w_x w_{xx} - 6uu_x - 6uww_x - \frac{3}{2}u_x w^2 = 0, \quad (\text{Eşitlik 186})$$

$$w_t^\alpha + w_{xxx} - 6wu_x - 6uw_x - \frac{15}{2}w_x w^2 = 0, \quad (\text{Eşitlik 187})$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{8}\lambda^2 \left(1 - 4\text{sech}^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\right), \quad (\text{Eşitlik 188})$$

$$w(x, 0) = \lambda \text{sech}\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \quad (\text{Eşitlik 189})$$

4.7. UZKMJM denkleminin Uq-HADY ile çözümü

(189) denkleminde başlangıç koşullarını da kullanarak uyumlu Laplace dönüşümünü uygularsak;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha[u(x, t)] - \frac{u(x, 0)}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha(u_{xxx} + \frac{3}{2}ww_{xxx} + \frac{9}{2}w_x \cdot w_{xx} \\ - 6uu_x - 6uww_x - \frac{3}{2}u_x w^2) = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 190})$$

$$\mathcal{L}_\alpha[w] - \frac{1}{s}w(x, 0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[w_{xxx} - 6wu_x - 6uw_x - \frac{15}{2}w_x w^2\right] = 0 \quad (\text{Eşitlik 191})$$

ifadeleri bulunur. Doğrusal olmayan operatörleri;

$$\begin{aligned} N^1[\varphi(x, t; q), \psi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{s}\left(\frac{1}{8}\lambda^2 \left(1 - 4\text{sech}^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\right)\right) \\ &+ \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \frac{3}{2}\psi \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{9}{2}\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 6\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 6\varphi \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{3}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi^2\right] \\ N^2[\varphi(x, t; q), \psi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\psi(x, t; q)] - \frac{1}{s}\left(\lambda \text{sech}\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\right) + \\ &\frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha\left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - 6\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 6\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{15}{2}\psi^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 192})$$

şeklinde ifade edilir. Önerilen algoritmayı kullanarak m . mertebeden deformasyon denklemini tanımlarsak;

$$\mathcal{L}_\alpha[u_m - k_m u_{m-1}] = h\mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \quad (\text{Eşitlik 193})$$

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m - k_m w_{m-1}] = h\mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \quad (\text{Eşitlik 194})$$

bulunur. Buradan;

$$\mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] = \mathcal{L}_\alpha[u_{m-1}] - \frac{1}{s}\left(1 - \frac{k_m}{n}\right)\left(\frac{1}{8}\lambda^2 \left(1 - 4\text{sech}^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^3 u_{m-1}}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \sum_{r=0}^{m-1} w_r \frac{\partial^3 w_{m-1-r}}{\partial x^3} + \frac{9}{2} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial w_r}{\partial x} \frac{\partial^2 w_{m-1-r}}{\partial x^2} \right. \\
& - 6 \sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} - 6 \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r u_j w_{r-j} \right) \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} \\
& \left. - \frac{3}{2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_j w_{r-j} \right) \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} \right], \tag{Eşitlik 195}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] &= \mathcal{L}_\alpha[w_{m-1}] - \frac{1}{s} \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \left(\lambda \operatorname{sech} \left(\frac{\lambda x}{2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[\frac{\partial^3 u_{m-1}}{\partial x^3} - 6 \sum_{r=0}^{m-1} w_r \frac{\partial u_{m-1-r}}{\partial x} - 6 \sum_{r=0}^{m-1} u_r \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} \right. \\
& \left. - \frac{15}{2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_j w_{r-j} \right) \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} \right], \tag{Eşitlik 196}
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Buradan denklemlere uyumlu ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u_m = k_m u_{m-1} + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[\mathcal{R}_{1,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \right], \tag{Eşitlik 197}$$

$$w_m = k_m w_{m-1} + h \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left[\mathcal{R}_{2,m}[\vec{u}_{m-1}, \vec{w}_{m-1}] \right] \tag{Eşitlik 198}$$

elde edilir. $m = 1$ için

$$u_1(x, t) = -h \frac{\sinh\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \lambda^5 t^\alpha}{4 \cosh^3\left(\frac{\lambda x}{2}\right) \alpha}, \tag{Eşitlik 199}$$

$$w_1(x, t) = h \frac{t^\alpha \lambda^4 \sinh\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{4\alpha \cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}, \tag{Eşitlik 200}$$

değerleri bulunur. Benzer şekilde (197)-(198) denklemlerinde $m = 2$ konulursa, $u_2(x, t)$ ve $w_2(x, t)$ değerleri;

$$u_2(x, t) = -(n + h) h \frac{t^\alpha \lambda^5 \sinh\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{4\alpha \cosh^3\left(\frac{\lambda x}{2}\right)} - h^2 \left(\frac{t^{2\alpha} \lambda^8 \left(\cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) - \frac{3}{2} \right)}{16\alpha^2 \cosh^4\left(\frac{\lambda x}{2}\right)} \right), \tag{Eşitlik 201}$$

$$w_2(x, t) = (n + h) h \frac{t^\alpha \lambda^4 \sinh\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{4\alpha \cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)} + h^2 \left(\frac{t^{2\alpha} \lambda^7 \left(\cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) - 2 \right)}{32\alpha^2 \cosh^3\left(\frac{\lambda x}{2}\right)} \right), \tag{Eşitlik 202}$$

bulunur. Bu şekilde diğer terimler bulunabilir. Böylece örnek 4.4 dekleminin Uq-HADY çözümü, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (\text{Eşitlik 203})$$

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m. \quad (\text{Eşitlik 204})$$

Eğer (203)-(204) denklemlerinde $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ değerlerini yerine koyarsak elde edilen sonuçlar,

$$\sum_{m=1}^M u_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 205})$$

$$\sum_{m=1}^M w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \quad (\text{Eşitlik 206})$$

$M \rightarrow \infty$ iken doğrusal olmayan zaman-kesirli uyumlu kesirli mertebeden Jaulent–Miodek sisteminin analitik çözümleri olan

$$u(x, t) = \xi - \kappa \coth[\kappa(x + \theta - \xi t)], \quad (\text{Eşitlik 207})$$

$$w(x, t) = -\kappa^2 \operatorname{cosech}^2[\kappa(x + \theta - \xi t)] \quad (\text{Eşitlik 208})$$

ifadelerine yakınsar.

4.8. UZKMJM sisteminin UKEAY çözümü

Şimdi, (188) denklemine uyumlu Elzaki dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} E_{\alpha}^c \{u(x, t)\} - vu(x, 0) + E_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{2} w \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{9}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - 6uw \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} w^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 209})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} E_{\alpha}^c \{w(x, t)\} - vw(x, 0) + E_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial u}{\partial x} - 6u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{15}{2} \frac{\partial w}{\partial x} w^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 210})$$

ifadeleri elde edilir. (209)-(210) denklemlerini sadeleştirirsek;

$$E_{\alpha}^c\{u(x, t)\} = v^2 u(x, 0) - vE_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{2} w \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{9}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - 6uw \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} w^2 \right], \quad (\text{Eşitlik 211})$$

$$E_{\alpha}^c\{w(x, t)\} = v^2 w(x, 0) - vE_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial u}{\partial x} - 6u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{15}{2} \frac{\partial w}{\partial x} w^2 \right] \quad (\text{Eşitlik 212})$$

ifadelerine ulaşılır. (211)-(212) denklemlerine ters uyumlu Elzaki dönüşüm uygulanırsa,

$$u(x, t) = \frac{1}{8} \lambda^2 \left(1 - 4 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda x}{2} \right] \right) - (E_{\alpha}^c)^{-1} \left\{ vE_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{3}{2} w \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{9}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - 6uw \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} w^2 \right] \right\}, \quad (\text{Eşitlik 213})$$

$$w(x, t) = \lambda \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda x}{2} \right] - (E_{\alpha}^c)^{-1} \left\{ vE_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 6w \frac{\partial u}{\partial x} - 6u \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{15}{2} \frac{\partial w}{\partial x} w^2 \right] \right\}. \quad (\text{Eşitlik 214})$$

$u(x, t)$ ve $w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonlarının sonsuz seri çözümleri;

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t), \quad (\text{Eşitlik 215})$$

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) \quad (\text{Eşitlik 216})$$

şeklindedir.

$$w \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m, \quad (\text{Eşitlik 217})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m, \quad (\text{Eşitlik 218})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m, \quad (\text{Eşitlik 219})$$

$$uw \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m, \quad (\text{Eşitlik 220})$$

$$w^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m, \quad (\text{Eşitlik 221})$$

$$w \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m, \quad (\text{Eşitlik 222})$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m, \quad (\text{Eşitlik 223})$$

$$w^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{m=0}^{\infty} K_m, \quad (\text{Eşitlik 224})$$

ifadeleri doğrusal olmayan Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (215)-(216) denklemlerini tekrar yazarsak;

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x, t) &= \frac{1}{8} \lambda^2 \left(1 - 4 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda x}{2} \right] \right) - (E_{\alpha}^c)^{-1} \left\{ \nu E_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} \right] \right. \\ &+ \left. \frac{3}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m + \frac{9}{2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m - 6 \sum_{m=0}^{\infty} C_m - 6 \sum_{m=0}^{\infty} E_m - \frac{3}{2} \sum_{m=0}^{\infty} F_m \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 225})$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) &= \lambda \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda x}{2} \right] - (E_{\alpha}^c)^{-1} \left\{ \nu E_{\alpha}^c \left[\frac{\partial^3 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^3} \right] - 6 \sum_{m=0}^{\infty} G_m \right. \\ &- \left. 6 \sum_{m=0}^{\infty} H_m - \frac{15}{2} \sum_{m=0}^{\infty} K_m \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 226})$$

elde edilir. (225)-(226) denklemlerinin her iki tarafını karşılaştırarak basitçe özyinelemeli bir formül üretebiliriz. Başlangıç koşullarıyla ve (225)-(226) denklemleriyle;

$$u_0(x, t) = \frac{1}{8} \lambda^2 \left(1 - 4 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda x}{2} \right] \right), \quad (\text{Eşitlik 227})$$

$$w_0(x, t) = \lambda \operatorname{sech} \left[\frac{\lambda x}{2} \right], \quad (\text{Eşitlik 228})$$

$$u_1(x, t) = \frac{t^{\alpha} \lambda^5 \sinh \left(\frac{\lambda x}{2} \right)}{4\alpha \cosh^3 \left(\frac{\lambda x}{2} \right)}, \quad (\text{Eşitlik 229})$$

$$w_1(x, t) = -\frac{t^{\alpha} \lambda^4 \sinh \left(\frac{\lambda x}{2} \right)}{4\alpha \cosh^2 \left(\frac{\lambda x}{2} \right)}, \quad (\text{Eşitlik 230})$$

$$u_2(x, t) = -\left(\frac{t^{2\alpha} \lambda^8 \left(2 \cosh^2 \left(\frac{\lambda x}{2} \right) - 3 \right)}{32\alpha^2 \cosh^4 \left(\frac{\lambda x}{2} \right)} \right), \quad (\text{Eşitlik 231})$$

$$w_2(x, t) = \left(\frac{t^{2\alpha} \lambda^7 \left(\cosh^2 \left(\frac{\lambda x}{2} \right) - 2 \right)}{32\alpha^2 \cosh^3 \left(\frac{\lambda x}{2} \right)} \right), \quad (\text{Eşitlik 232})$$

⋮

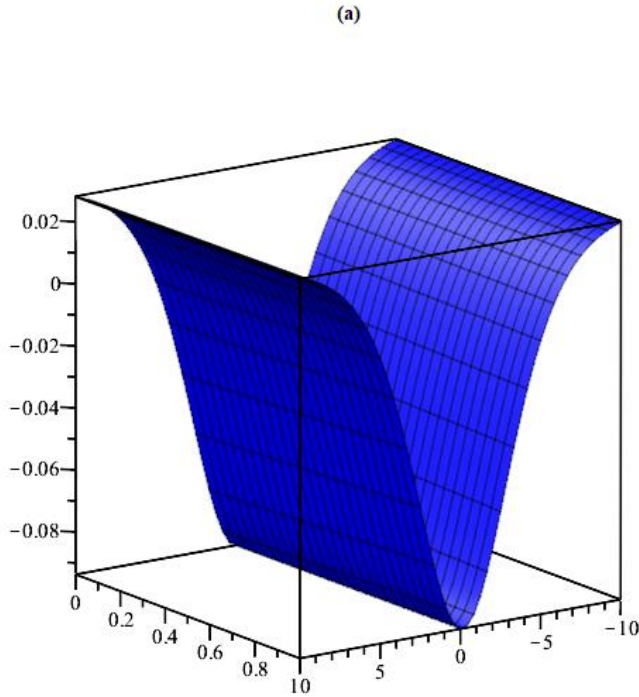
ifadeleri bulunur. Benzer şekilde devam edersek,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\ &= \frac{1}{8} \lambda^2 \left(1 - 4 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda x}{2} \right] \right) + \frac{t^{\alpha} \lambda^5 \sinh \left(\frac{\lambda x}{2} \right)}{4\alpha \cosh^3 \left(\frac{\lambda x}{2} \right)} \end{aligned}$$

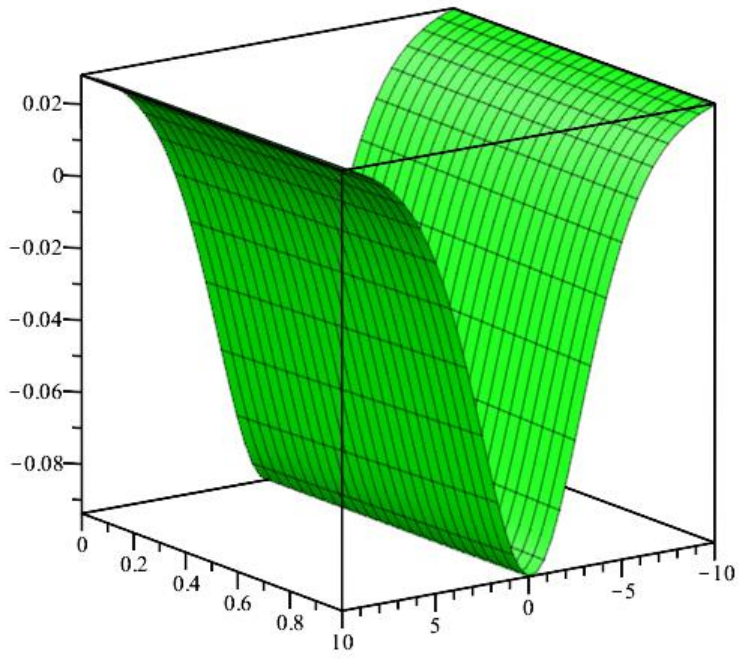
$$-\left(\frac{t^{2\alpha}\lambda^8\left(2\cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)-3\right)}{32\alpha^2\cosh^4\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}\right) \quad (\text{Eşitlik 233})$$

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \\ &= \lambda \operatorname{sech}\left[\frac{\lambda x}{2}\right] - \frac{t^\alpha \lambda^4 \sinh\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}{4\alpha \cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right)} + \left(\frac{t^{2\alpha} \lambda^7 \left(\cosh^2\left(\frac{\lambda x}{2}\right) - 2\right)}{32\alpha^2 \cosh^3\left(\frac{\lambda x}{2}\right)}\right). \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 234})$$

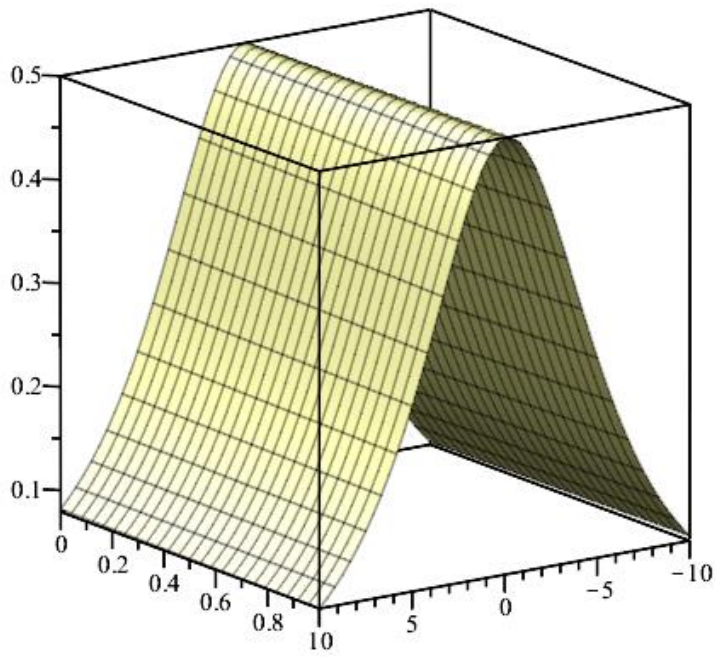
çözümleri elde edilir. $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY çözümlerinin, problemlerin analitik çözümleri ile mükemmel bir uyum içinde olduğu bulunmuştur. Örnekteki $u(x, t)$ ve $w(x, t)$ değişkenlerinin her ikisinin de sonuçlarını daha iyi anlamak için şekiller çizilmiştir. Şekillerde bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.



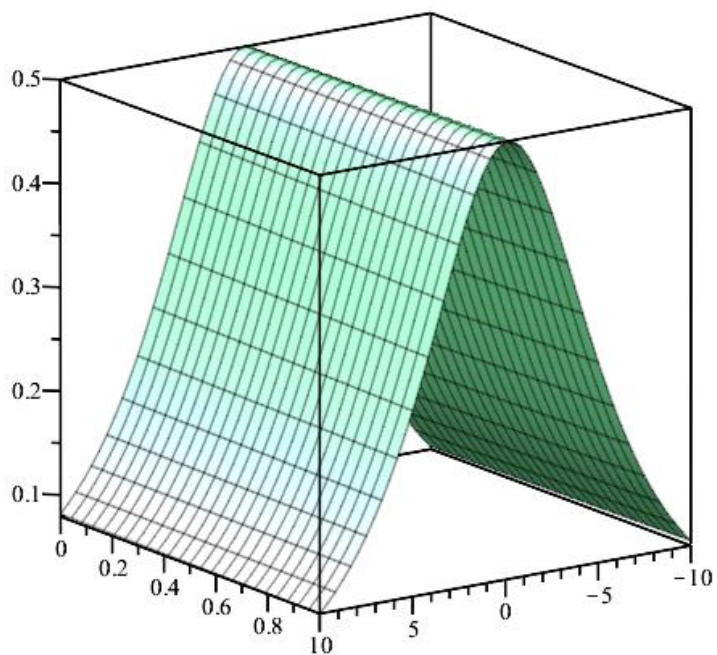
(b)



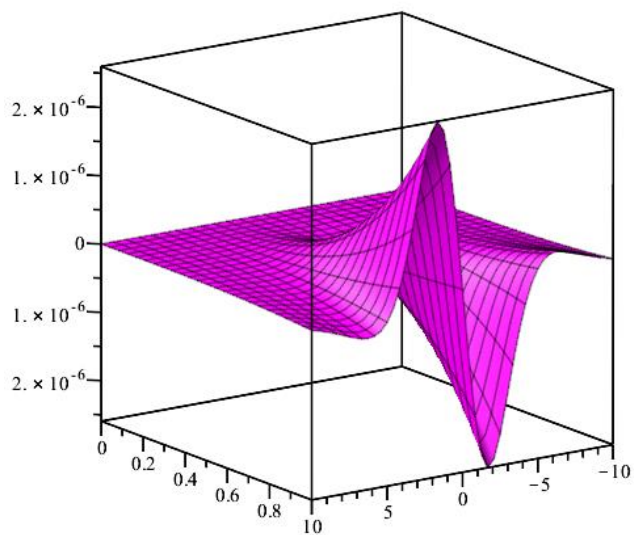
(c)



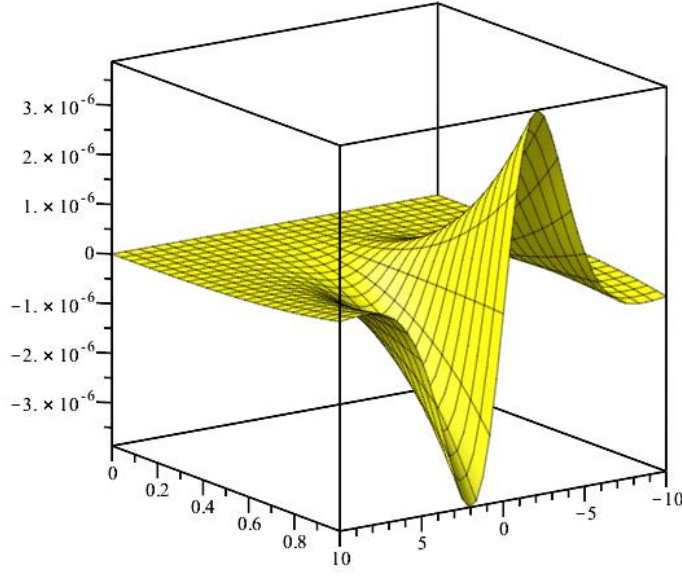
(d)



(e)

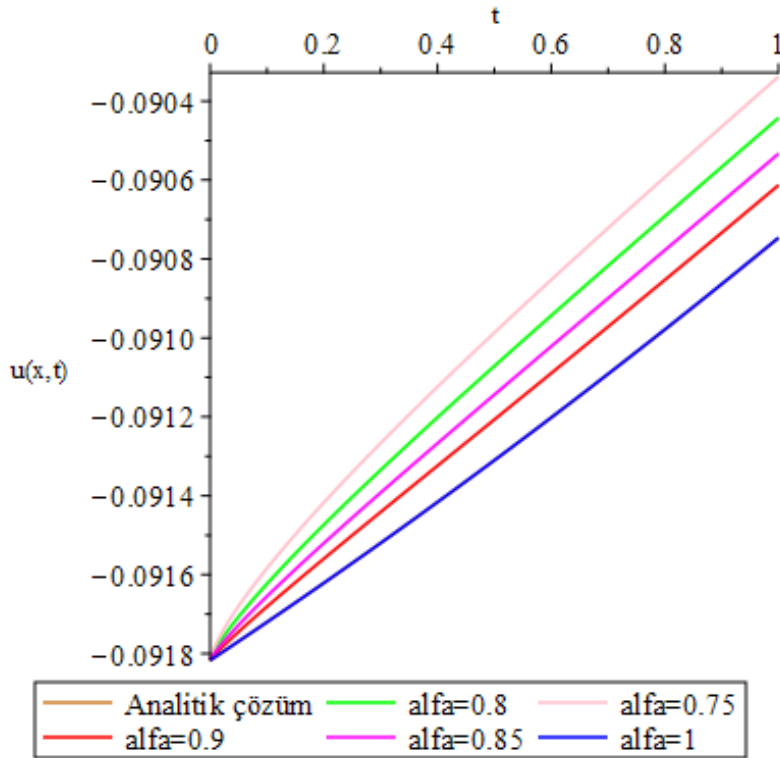


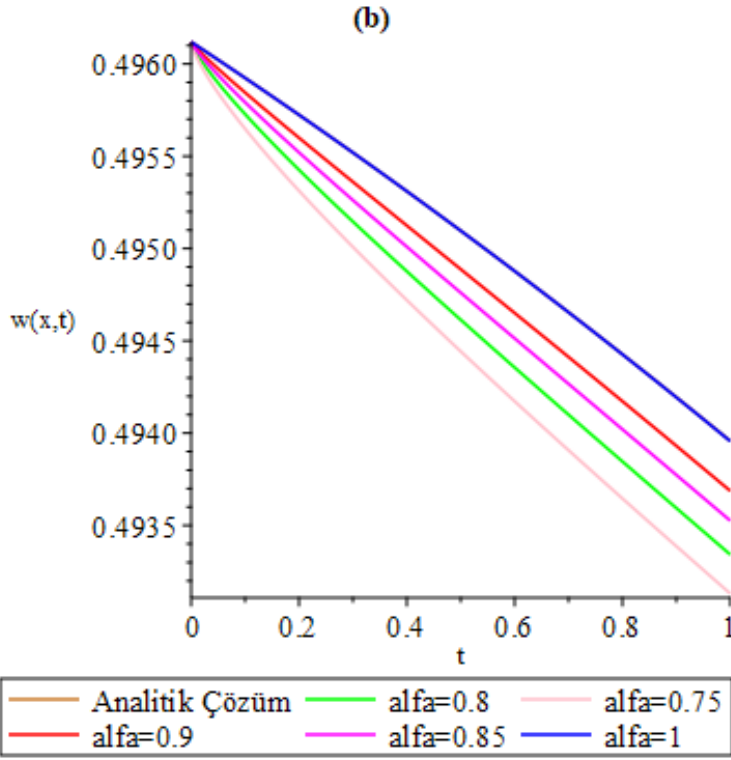
(f)



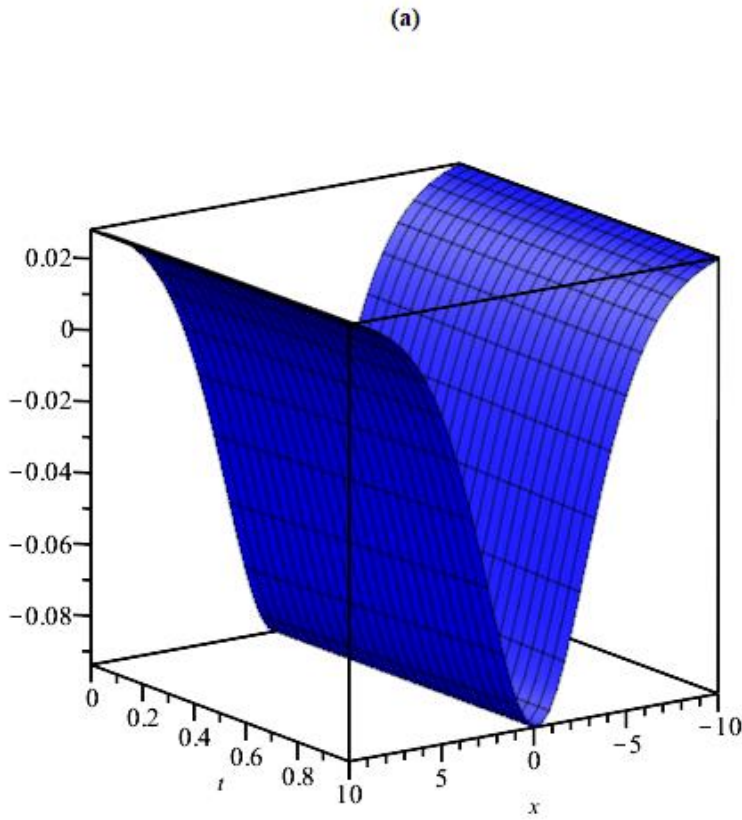
Şekil 8. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5, h = -1, n = 1, \alpha = 1$ için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $u(x, t)$ için analitik çözümü (c) $w(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (d) $w(x, t)$ için analitik çözümü (e) Mutlak hata $= |u_{analitik} - u_{Uq-HADY}|$ (f) Mutlak hata $= |w_{analitik} - w_{Uq-HADY}|$ dir.

(a)

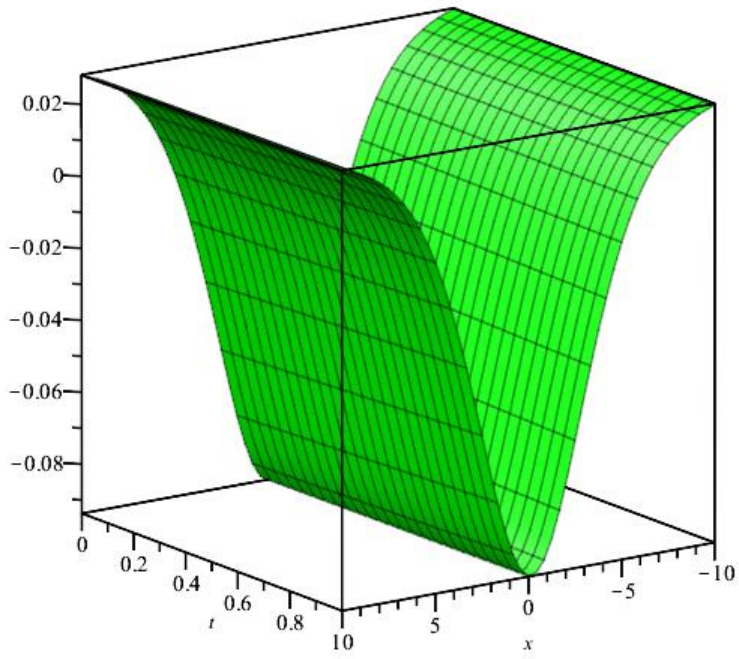




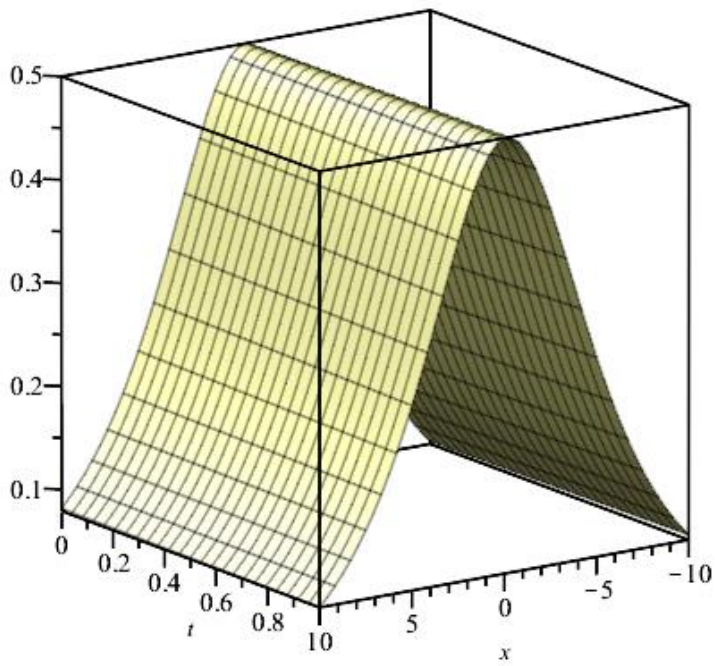
Şekil 9. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5, h = -1, n = 1, x = 0.5$ ve farklı α için; (a) $u(x, t)$ için Uq-HADY çözümü (b) $w(x, t)$ 'nin Uq-HADY çözümü 'dir.



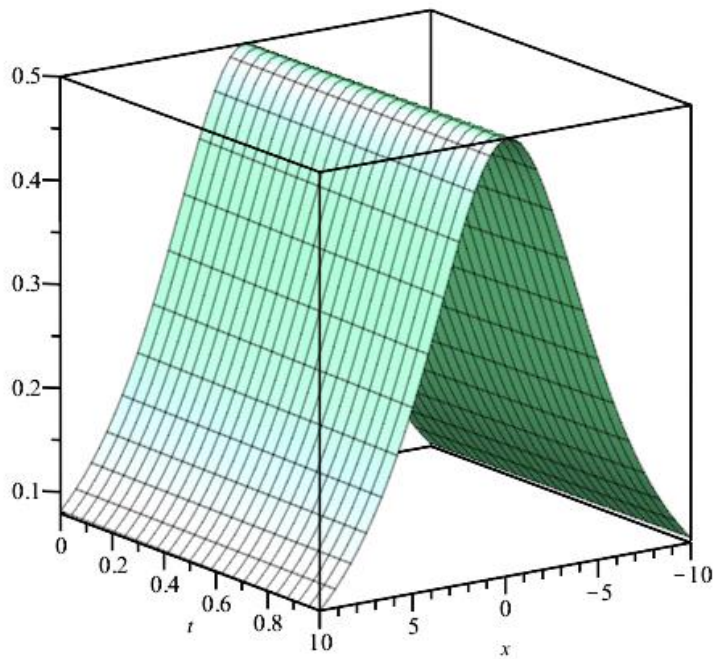
(b)



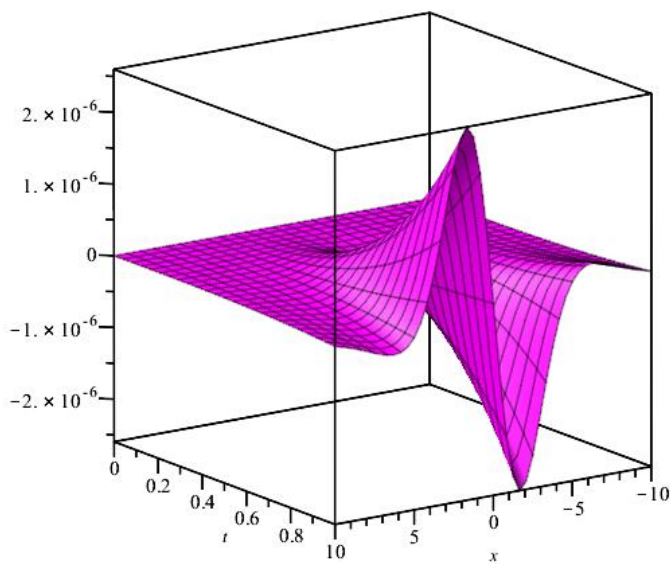
(c)



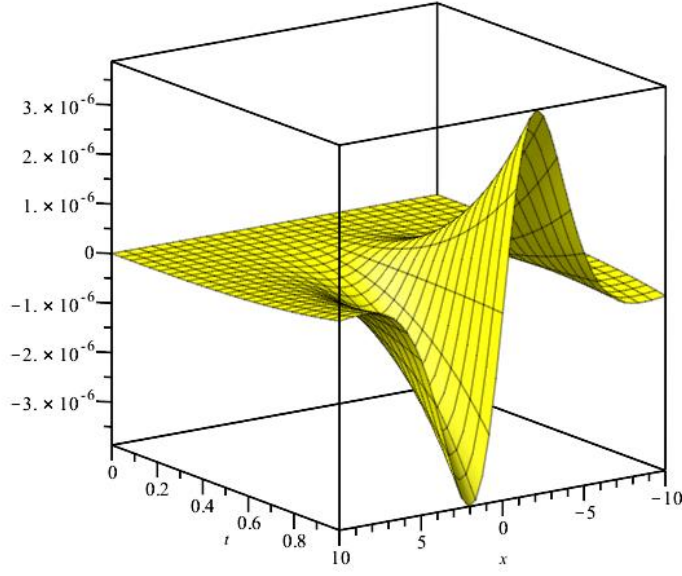
(d)



(e)

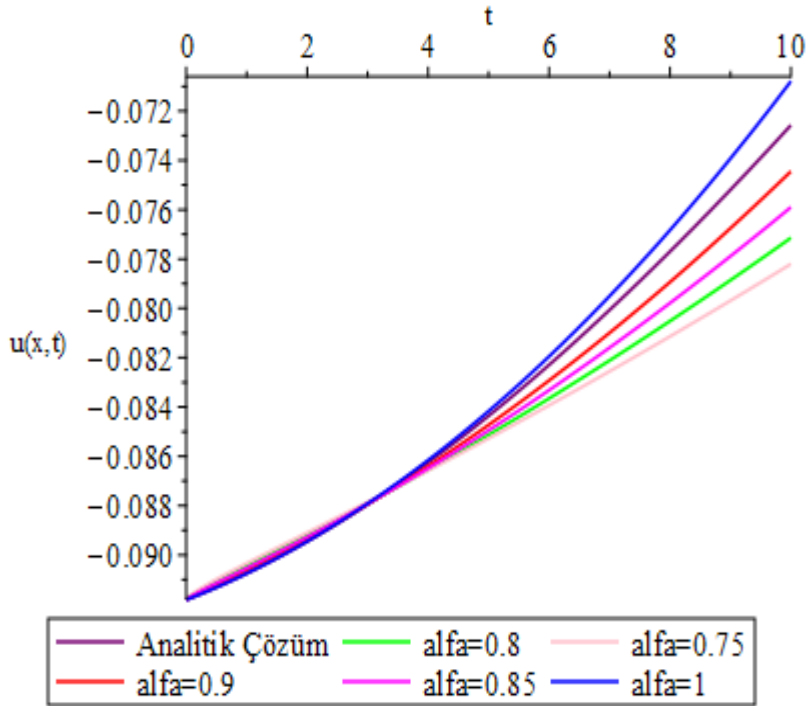


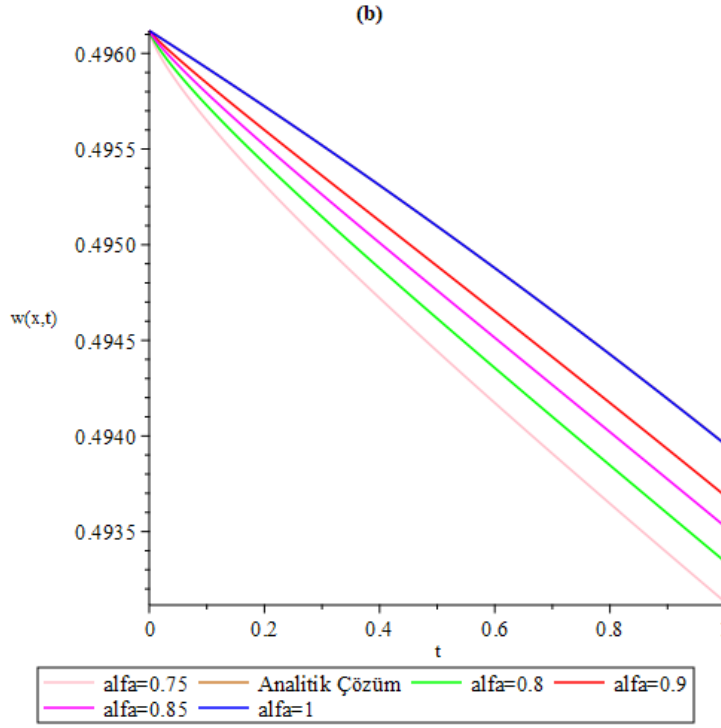
(f)



Şekil 10. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5$, $\alpha = 1$ için; (a) $u(x,t)$ için UKEAY çözümü (b) $u(x,t)$ için analitik çözümü (c) $w(x,t)$ için UKEAY çözümü (d) $w(x,t)$ için analitik çözüm (e) Mutlak hata= $|u_{analitik} - u_{UKEAY}|$ (f) Mutlak hata= $|w_{analitik} - w_{UKEAY}|$ 'dir.

(a)





Şekil 11. Örnek 4.4 de $\lambda = 0.5$, $x = 0.5$ ve belli α değerleri için; (a) $u(x, t)$ için UKEAY çözümü (b) $w(x, t)$ için UKEAY çözümü 'dir.

Tablo 11. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5$, $h = -1$ ve $n = 1$ için, farklı α ve farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile $u(x, t)$ 'nin sayısal çözüm

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	1.2×10^{-6}	7.7×10^{-7}	4.5×10^{-7}	2.3×10^{-7}	2.5×10^{-16}
	0.002	2.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.7×10^{-7}	4.1×10^{-7}	2.0×10^{-15}
	0.003	2.7×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-6}	5.8×10^{-7}	6.8×10^{-15}
	0.004	3.4×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.3×10^{-7}	1.6×10^{-14}
	0.005	3.9×10^{-6}	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.7×10^{-7}	3.1×10^{-14}
0.2	0.001	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	9.0×10^{-7}	4.7×10^{-7}	5.0×10^{-16}
	0.002	4.1×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.3×10^{-7}	4.0×10^{-15}
	0.003	5.5×10^{-6}	3.5×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.1×10^{-6}	1.3×10^{-14}
	0.004	6.7×10^{-6}	4.3×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.4×10^{-6}	3.2×10^{-14}
	0.005	7.8×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	6.3×10^{-14}
0.3	0.001	3.7×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.0×10^{-7}	7.5×10^{-16}
	0.002	6.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.2×10^{-6}	6.0×10^{-15}
	0.003	8.2×10^{-6}	5.2×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	2.0×10^{-14}
	0.004	1.0×10^{-5}	6.4×10^{-6}	3.9×10^{-6}	2.1×10^{-6}	4.8×10^{-14}
	0.005	1.1×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.5×10^{-6}	9.3×10^{-14}
0.4	0.001	5.0×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.7×10^{-6}	9.3×10^{-7}	9.8×10^{-16}
	0.002	8.1×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.6×10^{-6}	7.9×10^{-15}
	0.003	1.0×10^{-5}	6.9×10^{-6}	4.1×10^{-6}	2.2×10^{-6}	2.6×10^{-14}
	0.004	1.3×10^{-5}	8.5×10^{-6}	5.2×10^{-6}	2.8×10^{-6}	6.3×10^{-14}
	0.005	1.5×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.2×10^{-6}	3.4×10^{-6}	1.2×10^{-13}
0.5	0.001	6.2×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.2×10^{-6}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-15}
	0.002	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.0×10^{-6}	9.7×10^{-15}
	0.003	1.3×10^{-5}	8.6×10^{-6}	5.2×10^{-6}	2.8×10^{-6}	3.2×10^{-14}
	0.004	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.4×10^{-6}	3.5×10^{-6}	7.7×10^{-14}
	0.005	1.9×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.5×10^{-13}

Tablo 12. Örnek 4.4 te $\lambda = 0.5, h = -1$ ve $n = 1$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle Uq-HADY ile $w(x, t)$ 'nin sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	9.0×10^{-7}	4.7×10^{-7}	3.1×10^{-16}
	0.002	4.1×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.3×10^{-7}	2.5×10^{-15}
	0.003	5.5×10^{-6}	3.5×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.1×10^{-6}	8.5×10^{-15}
	0.004	6.8×10^{-6}	4.3×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.4×10^{-6}	2.0×10^{-14}
	0.005	7.9×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	3.9×10^{-14}
0.2	0.001	5.0×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.8×10^{-6}	9.4×10^{-7}	6.3×10^{-16}
	0.002	8.3×10^{-6}	5.2×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}	5.0×10^{-15}
	0.003	1.1×10^{-5}	7.0×10^{-6}	4.2×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.7×10^{-14}
	0.004	1.3×10^{-5}	8.6×10^{-6}	5.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	4.0×10^{-14}
	0.005	1.5×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.2×10^{-6}	3.4×10^{-6}	7.9×10^{-14}
0.3	0.001	7.5×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.4×10^{-6}	9.4×10^{-16}
	0.002	1.2×10^{-5}	7.7×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.4×10^{-6}	7.5×10^{-15}
	0.003	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	3.4×10^{-6}	2.5×10^{-14}
	0.004	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.9×10^{-6}	4.3×10^{-6}	6.0×10^{-14}
	0.005	2.3×10^{-5}	1.5×10^{-5}	9.3×10^{-6}	5.1×10^{-6}	1.1×10^{-13}
0.4	0.001	1.0×10^{-5}	6.1×10^{-6}	3.5×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.2×10^{-15}
	0.002	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.1×10^{-6}	3.3×10^{-6}	9.9×10^{-15}
	0.003	2.1×10^{-5}	1.3×10^{-5}	8.4×10^{-6}	4.5×10^{-6}	3.3×10^{-14}
	0.004	2.6×10^{-5}	1.7×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.7×10^{-6}	7.9×10^{-14}
	0.005	3.1×10^{-5}	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	6.8×10^{-6}	1.5×10^{-13}
0.5	0.001	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.4×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.5×10^{-15}
	0.002	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.1×10^{-6}	1.2×10^{-14}
	0.003	2.7×10^{-5}	1.7×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.7×10^{-6}	4.1×10^{-14}
	0.004	3.3×10^{-5}	2.1×10^{-5}	1.3×10^{-5}	7.1×10^{-6}	9.8×10^{-14}
	0.005	3.8×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.5×10^{-5}	8.5×10^{-6}	1.9×10^{-13}

Tablo 13. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKEAY ile $u(x, t)$ 'nin sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	1.2×10^{-6}	7.7×10^{-7}	4.5×10^{-7}	2.3×10^{-7}	2.5×10^{-16}
	0.002	2.0×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.7×10^{-7}	4.1×10^{-7}	2.0×10^{-15}
	0.003	2.7×10^{-6}	1.7×10^{-6}	1.0×10^{-6}	5.8×10^{-7}	6.8×10^{-15}
	0.004	3.4×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.3×10^{-7}	1.6×10^{-14}
	0.005	3.9×10^{-6}	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.7×10^{-7}	3.1×10^{-14}
0.2	0.001	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	9.0×10^{-7}	4.7×10^{-7}	5.0×10^{-16}
	0.002	4.1×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.3×10^{-7}	4.0×10^{-15}
	0.003	5.5×10^{-6}	3.5×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.1×10^{-6}	1.3×10^{-14}
	0.004	6.7×10^{-6}	4.3×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.4×10^{-6}	3.2×10^{-14}
	0.005	7.8×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	6.3×10^{-14}
0.3	0.001	3.7×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.3×10^{-6}	7.0×10^{-7}	7.5×10^{-16}
	0.002	6.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.2×10^{-6}	6.0×10^{-15}
	0.003	8.2×10^{-6}	5.2×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	2.0×10^{-14}
	0.004	1.0×10^{-5}	6.4×10^{-6}	3.9×10^{-6}	2.1×10^{-6}	4.8×10^{-14}
	0.005	1.1×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.5×10^{-6}	9.3×10^{-14}
0.4	0.001	5.0×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.7×10^{-6}	9.3×10^{-7}	9.8×10^{-16}
	0.002	8.1×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.0×10^{-6}	1.6×10^{-6}	7.9×10^{-15}
	0.003	1.0×10^{-5}	6.9×10^{-6}	4.1×10^{-6}	2.2×10^{-6}	2.6×10^{-14}
	0.004	1.3×10^{-5}	8.5×10^{-6}	5.2×10^{-6}	2.8×10^{-6}	6.3×10^{-14}
	0.005	1.5×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.2×10^{-6}	3.4×10^{-6}	1.2×10^{-13}

Tablo 13. (Devamı)

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 1$
0.5	0.001	6.2×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.2×10^{-6}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-15}
	0.002	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	3.8×10^{-6}	2.0×10^{-6}	9.7×10^{-15}
	0.003	1.3×10^{-5}	8.6×10^{-6}	5.2×10^{-6}	2.8×10^{-6}	3.2×10^{-14}
	0.004	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.4×10^{-6}	3.5×10^{-6}	7.7×10^{-14}
	0.005	1.9×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.2×10^{-6}	1.5×10^{-13}

Tablo 14. Örnek 4.4 'de $\lambda = 0.5$ için farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKEAY ile $w(x, t)$ 'nin sayısal çözümü

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.80$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.90$	$\alpha = 1$
0.1	0.001	2.5×10^{-6}	1.5×10^{-6}	9.0×10^{-7}	4.7×10^{-7}	3.1×10^{-16}
	0.002	4.1×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.5×10^{-6}	8.3×10^{-7}	2.5×10^{-15}
	0.003	5.5×10^{-6}	3.5×10^{-6}	2.1×10^{-6}	1.1×10^{-6}	8.5×10^{-15}
	0.004	6.8×10^{-6}	4.3×10^{-6}	2.6×10^{-6}	1.4×10^{-6}	2.0×10^{-14}
	0.005	7.9×10^{-6}	5.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.7×10^{-6}	3.9×10^{-14}
0.2	0.001	5.0×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.8×10^{-6}	9.4×10^{-7}	6.3×10^{-16}
	0.002	8.3×10^{-6}	5.2×10^{-6}	3.1×10^{-6}	1.6×10^{-6}	5.0×10^{-15}
	0.003	1.1×10^{-5}	7.0×10^{-6}	4.2×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.7×10^{-14}
	0.004	1.3×10^{-5}	8.6×10^{-6}	5.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}	4.0×10^{-14}
	0.005	1.5×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.2×10^{-6}	3.4×10^{-6}	7.9×10^{-14}
0.3	0.001	7.5×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.7×10^{-6}	1.4×10^{-6}	9.4×10^{-16}
	0.002	1.2×10^{-5}	7.7×10^{-6}	4.6×10^{-6}	2.4×10^{-6}	7.5×10^{-15}
	0.003	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	3.4×10^{-6}	2.5×10^{-14}
	0.004	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.9×10^{-6}	4.3×10^{-6}	6.0×10^{-14}
	0.005	2.3×10^{-5}	1.5×10^{-5}	9.3×10^{-6}	5.1×10^{-6}	1.1×10^{-13}
0.4	0.001	1.0×10^{-5}	6.1×10^{-6}	3.5×10^{-6}	1.8×10^{-6}	1.2×10^{-15}
	0.002	1.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.1×10^{-6}	3.3×10^{-6}	9.9×10^{-15}
	0.003	2.1×10^{-5}	1.3×10^{-5}	8.4×10^{-6}	4.5×10^{-6}	3.3×10^{-14}
	0.004	2.6×10^{-5}	1.7×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.7×10^{-6}	7.9×10^{-14}
	0.005	3.1×10^{-5}	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	6.8×10^{-6}	1.5×10^{-13}
0.5	0.001	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.4×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.5×10^{-15}
	0.002	2.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	7.6×10^{-6}	4.1×10^{-6}	1.2×10^{-14}
	0.003	2.7×10^{-5}	1.7×10^{-5}	1.0×10^{-5}	5.7×10^{-6}	4.1×10^{-14}
	0.004	3.3×10^{-5}	2.1×10^{-5}	1.3×10^{-5}	7.1×10^{-6}	9.8×10^{-14}
	0.005	3.8×10^{-5}	2.5×10^{-5}	1.5×10^{-5}	8.5×10^{-6}	1.9×10^{-13}

Örnek 4.5. (Ali vd., 2022; Javeed vd., 2018; Tariq ve Akram, 2017):

$$D_t^\alpha w(x, t) - w_{xx}(x, t) + w^3(x, t) - w(x, t) = 0 \quad (\text{Eşitlik 235})$$

$t > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$w(x, 0) = \frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \quad (\text{Eşitlik 236})$$

başlangıç koşullarıyla verilen uyumlu kesirli Cahn-Allen (UKMCA) denklemini ele alalım.

4.9. UKMCA Denkleminin Uq-HADY ile çözümü

UKMCA denklemine başlangıç koşullarını da kullanarak uyumlu Laplace dönüşümünü uygularsak;

$$\mathcal{L}_\alpha[w(x, t)] - \frac{1}{s}w(x, 0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}_\alpha[-w_{xx} + w^3 - w] = 0 \quad (\text{Eşitlik 237})$$

ifadesi elde edilir. Doğrusal olmayan operatörü;

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] &= \mathcal{L}_\alpha[\varphi(x, t; q)] - \frac{1}{s} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \right) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[-\frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + \varphi^3(x, t; q) - \varphi(x, t; q) \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 238})$$

bulunur.

Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi ,

$$\mathcal{L}_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_m(w_{m-1}) \quad (\text{Eşitlik 239})$$

şeklinde tanımlanır.

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(w_{m-1}) &= \mathcal{L}_\alpha[w_{m-1}] - \frac{1}{s} \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \right) \\ &+ \frac{1}{s} \mathcal{L}_\alpha \left[-\frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial x^2} + \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r w_j \cdot w_{r-j} \right) w_{m-1-r} - w_{m-1} \right] \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik 240})$$

denklemin ters uyumlu Laplace dönüşümünü alırsak;

$$w_m = k_m w_{m-1} + h \mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_m(w_{m-1})] \quad (\text{Eşitlik 241})$$

olarak bulunur.

Daha sonra $m = 0$ için,

$$w_0(x, t) = \frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \quad (\text{Eşitlik 242})$$

bulunur. $m = 1$ için,

$$\begin{aligned}
w_1(x, t) &= h\mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_1(w_0)] \\
&= h \left(\frac{-3e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}}{2 \left(1 + e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\right)^2} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha}
\end{aligned} \tag{Eşitlik 243}$$

bulunur. $m = 2$ için,

$$w_2(x, t) = nw_1 + h\mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_2(w_1)] \tag{Eşitlik 244}$$

$$\begin{aligned}
&= (n + h)w_1 + h \frac{t^{2\alpha}}{8\alpha^2} \frac{9 \left(e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} - 1 \right) h e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}}{2 \left(1 + e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} \right)^3}
\end{aligned} \tag{Eşitlik 245}$$

bulunur. $m = 3$ için,

$$\begin{aligned}
w_3 &= nw_2 + h\mathcal{L}_\alpha^{-1}[\mathcal{R}_3(w_2)] \\
&= (n + h)w_2 - 27h^2 \frac{e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}}{16\alpha^2 \left(1 + e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}}\right)^4} \left[\frac{-4(n+h) \cdot (e^{-x\sqrt{2}} - 1) \cdot t^{2\alpha}}{6} \right. \\
&\quad \left. + \left(e^{-x\sqrt{2}} - 4e^{-\frac{x\sqrt{2}}{2}} + 1 \right) h \cdot \frac{t^{3\alpha}}{3\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{Eşitlik 246}$$

'dır.

Öyleyse, Uq-HADY çözümü;

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 \tag{Eşitlik 247}$$

şeklindedir.

4.10. UKMCA denkleminin UHPEDM çözümü

Şimdi, Örnek 4.5 denkleminin her iki tarafına uyumlu Elzaki dönüşümü uygularsak,

$$\frac{1}{s} E_\alpha^c[w(x, t)] - sw(x, 0) + E_\alpha^c[-w_{xx} + w^3 - w] = 0 \tag{Eşitlik 248}$$

$$E_\alpha^c[w(x, t)] = s^2 w(x, 0) - s E_\alpha^c[-w_{xx} + w^3 - w] \tag{Eşitlik 249}$$

$$E_\alpha^c[w(x, t)] = s^2 \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}} - s E_\alpha^c[-w_{xx} + w^3 - w] \tag{Eşitlik 250}$$

ifadesi elde edilir.

(250) denklemine ters uyumlu Elzaki dönüşümü uygularsak,

$$w(x, t) = \frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} - (E_\alpha^c)^{-1} [sE_\alpha^c [-w_{xx} + w^3 - w]] \quad (\text{Eşitlik 251})$$

olarak bulunur.

Homotopi pertürbasyon yöntemini kullanarak,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m(x, t) &= \left(\frac{1}{1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}}} \right) \\ &- p \{ (E_\alpha^c)^{-1} [sE_\alpha^c (-\sum_{m=0}^{\infty} p^m (w_m)_{xx} + \sum_{m=0}^{\infty} p^m H_m(w) - \sum_{m=0}^{\infty} p^m w_m)] \}, \end{aligned} \quad (\text{Eşitlik (252)})$$

$$H_0(w) = w_0^3, \quad (\text{Eşitlik 253})$$

$$H_1(w) = 3w_0^3 w_1, \quad (\text{Eşitlik 254})$$

$$H_2(w) = 3w_0^3 w_2 + 3w_1^2 w_0 \quad (\text{Eşitlik 255})$$

olarak bulunur.

$$p^0: w_0(x, t) = 1 + e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}} \quad ; \quad H_0(w) = (1 + e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}})^3 \quad (\text{Eşitlik 256})$$

$$p^1: w_1(x, t) = -(E_\alpha^c)^{-1} [sE_\alpha^c (-(w_0)_{xx} + w_0^3 - w_0)] \quad (\text{Eşitlik 257})$$

$$w_1(x, t) = \frac{3e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}} t^\alpha}{2\alpha \left(1 + e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}}\right)^2}, \quad (\text{Eşitlik 258})$$

$$H_1(w) = \frac{3(1+e^{\frac{-x}{\sqrt{2}}})^2 3e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}} t^\alpha}{2(1+e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}})^2 \alpha}, \quad (\text{Eşitlik 259})$$

$$w_2(x, t) = \frac{9(e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}} - 1)t^\alpha e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}}}{8\alpha^2 (1+e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}})^3}, \quad (\text{Eşitlik 260})$$

$$H_2(w) = \frac{27e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}} (3e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}} - 1)t^\alpha}{8\alpha^2 (1+e^{\frac{-x\sqrt{2}}{2}})^5}, \quad (\text{Eşitlik 261})$$

$$w_3(x, t) = -(E_\alpha^c)^{-1} [s E_\alpha^c (-(w_2)_{xx} + 3w_0^2 w_2 + 3w_1^2 w_0 - w_2)] \quad (\text{Eşitlik 262})$$

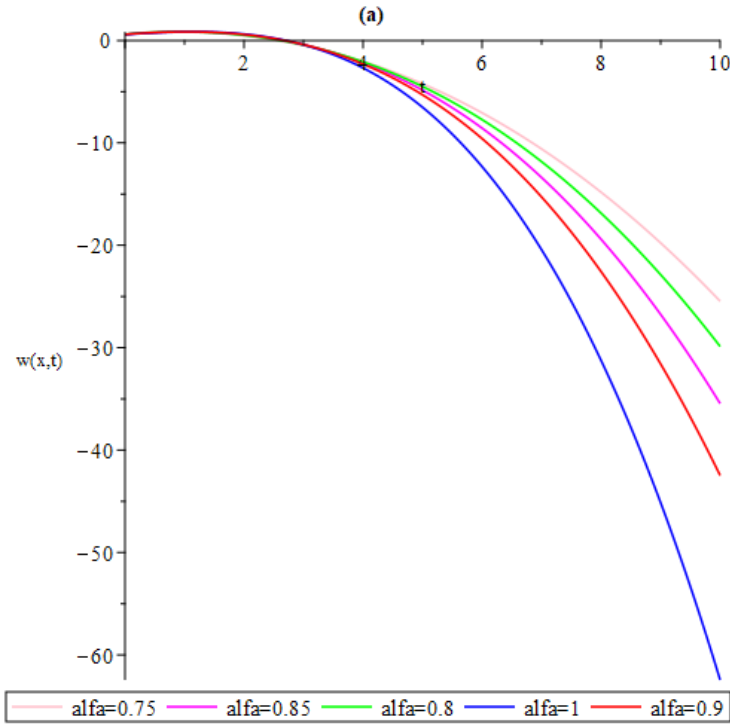
ifadelerini elde ederiz.

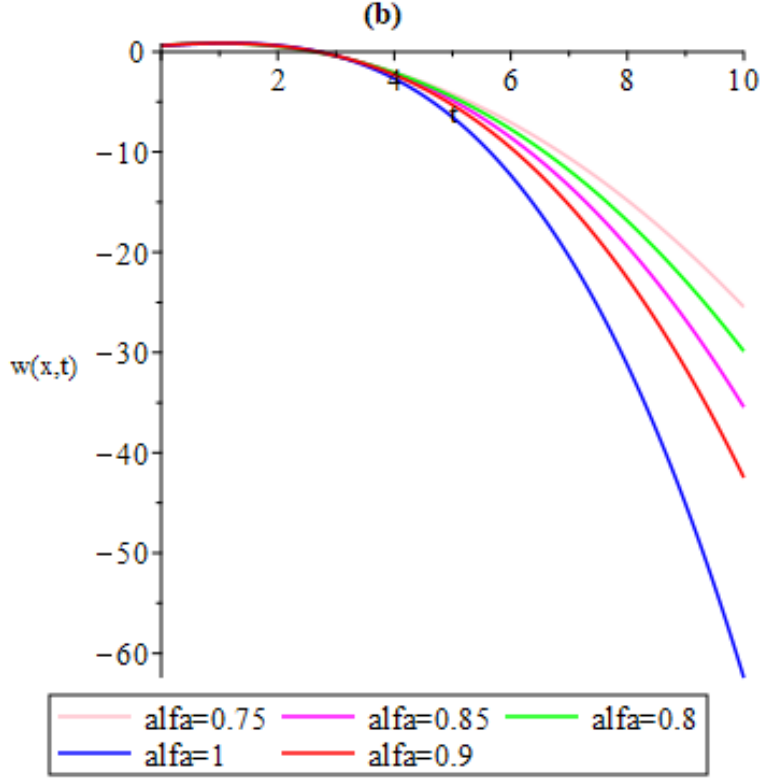
Öyleyse, UHPEDM çözümü:

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3$$

(Eşitlik 263)

olarak bulunur.





Şekil 12. a) UKMCA denkleminin UHPEDM çözümü b) UKMCA denkleminin Uq-HADY çözümü' dir.

Tablo 15. UKMCA denkleminde $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle UKMCA denklemini için Uq-HADY ile $w(x, t)$ 'nin analitik çözümleri

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$
1	0.001	2.1×10^{-3}	1.3×10^{-3}	7.6×10^{-4}	4.0×10^{-4}	1.4×10^{-10}
	0.002	3.5×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.3×10^{-3}	7.0×10^{-4}	7.1×10^{-11}
	0.003	4.6×10^{-3}	2.9×10^{-3}	1.7×10^{-3}	9.7×10^{-4}	1.3×10^{-10}
	0.004	5.6×10^{-3}	3.6×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.2×10^{-3}	4.7×10^{-11}
	0.005	6.6×10^{-3}	4.2×10^{-3}	2.6×10^{-3}	1.4×10^{-3}	2.1×10^{-10}
2	0.001	1.5×10^{-3}	9.3×10^{-4}	5.4×10^{-4}	2.8×10^{-4}	1.3×10^{-10}
	0.002	2.4×10^{-3}	1.5×10^{-3}	9.3×10^{-4}	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-10}
	0.003	3.2×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.2×10^{-3}	6.9×10^{-4}	1.9×10^{-10}
	0.004	4.0×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1.5×10^{-3}	8.7×10^{-4}	2.7×10^{-10}
	0.005	4.6×10^{-3}	3.0×10^{-3}	1.8×10^{-3}	1.0×10^{-3}	1.9×10^{-10}
3	0.001	9.2×10^{-4}	5.6×10^{-4}	3.3×10^{-4}	1.7×10^{-4}	2.3×10^{-15}
	0.002	1.5×10^{-3}	9.4×10^{-4}	5.6×10^{-4}	3.0×10^{-4}	3.7×10^{-14}
	0.003	1.9×10^{-3}	1.2×10^{-3}	7.7×10^{-4}	4.2×10^{-4}	1.8×10^{-13}
	0.004	2.4×10^{-3}	1.5×10^{-3}	9.6×10^{-4}	5.2×10^{-4}	5.9×10^{-13}
	0.005	2.8×10^{-3}	1.8×10^{-3}	1.1×10^{-3}	6.3×10^{-4}	1.4×10^{-12}
4	0.001	5.1×10^{-4}	3.1×10^{-4}	1.8×10^{-4}	9.5×10^{-5}	3.6×10^{-15}
	0.002	8.3×10^{-4}	5.2×10^{-4}	3.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}	5.8×10^{-14}
	0.003	1.0×10^{-3}	7.0×10^{-4}	4.2×10^{-4}	2.3×10^{-4}	2.9×10^{-13}
	0.004	1.3×10^{-3}	8.6×10^{-4}	5.3×10^{-4}	2.9×10^{-4}	9.3×10^{-13}
	0.005	1.5×10^{-3}	1.0×10^{-3}	6.2×10^{-4}	3.4×10^{-4}	2.2×10^{-12}
5	0.001	2.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	9.5×10^{-5}	5.0×10^{-5}	3.6×10^{-15}
	0.002	4.3×10^{-4}	2.7×10^{-4}	1.6×10^{-4}	8.7×10^{-5}	5.8×10^{-14}
	0.003	5.7×10^{-4}	3.6×10^{-4}	2.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.9×10^{-13}
	0.004	6.9×10^{-4}	4.5×10^{-4}	2.7×10^{-4}	1.5×10^{-4}	9.3×10^{-13}
	0.005	8.1×10^{-4}	5.2×10^{-4}	3.2×10^{-4}	1.8×10^{-4}	2.2×10^{-12}

Tablo 16. UKMCA denkleminde $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α ve farklı x ve t değerleriyle UKMCA denklemi için UHPEDM ile $w(x, t)$ 'nin analitik çözümleri

x	t	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 1$
1	0.001	2.1×10^{-3}	1.3×10^{-3}	7.6×10^{-4}	4.0×10^{-4}	1.4×10^{-10}
	0.002	3.5×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.3×10^{-3}	7.0×10^{-4}	7.1×10^{-11}
	0.003	4.6×10^{-3}	2.9×10^{-3}	1.7×10^{-3}	9.7×10^{-4}	1.3×10^{-10}
	0.004	5.6×10^{-3}	3.6×10^{-3}	2.2×10^{-3}	1.2×10^{-3}	4.7×10^{-11}
	0.005	6.6×10^{-3}	4.2×10^{-3}	2.6×10^{-3}	1.4×10^{-3}	2.1×10^{-10}
2	0.001	1.5×10^{-3}	9.3×10^{-4}	5.4×10^{-4}	2.8×10^{-4}	1.3×10^{-10}
	0.002	2.4×10^{-3}	1.5×10^{-3}	9.3×10^{-4}	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-10}
	0.003	3.2×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.2×10^{-3}	6.9×10^{-4}	1.9×10^{-10}
	0.004	4.0×10^{-3}	2.5×10^{-3}	1.5×10^{-3}	8.7×10^{-4}	2.7×10^{-10}
	0.005	4.6×10^{-3}	3.0×10^{-3}	1.8×10^{-3}	1.0×10^{-3}	1.9×10^{-10}
3	0.001	9.2×10^{-4}	5.6×10^{-4}	3.3×10^{-4}	1.7×10^{-4}	2.3×10^{-15}
	0.002	1.5×10^{-3}	9.4×10^{-4}	5.6×10^{-4}	3.0×10^{-4}	3.7×10^{-14}
	0.003	1.9×10^{-3}	1.2×10^{-3}	7.7×10^{-4}	4.2×10^{-4}	1.8×10^{-13}
	0.004	2.4×10^{-3}	1.5×10^{-3}	9.6×10^{-4}	5.2×10^{-4}	5.9×10^{-13}
	0.005	2.8×10^{-3}	1.8×10^{-3}	1.1×10^{-3}	6.3×10^{-4}	1.4×10^{-12}
4	0.001	5.1×10^{-4}	3.1×10^{-4}	1.8×10^{-4}	9.5×10^{-5}	3.6×10^{-15}
	0.002	8.3×10^{-4}	5.2×10^{-4}	3.1×10^{-4}	1.6×10^{-4}	5.8×10^{-14}
	0.003	1.0×10^{-3}	7.0×10^{-4}	4.2×10^{-4}	2.3×10^{-4}	2.9×10^{-13}
	0.004	1.3×10^{-3}	8.6×10^{-4}	5.3×10^{-4}	2.9×10^{-4}	9.3×10^{-13}
	0.005	1.5×10^{-3}	1.0×10^{-3}	6.2×10^{-4}	3.4×10^{-4}	2.2×10^{-12}
5	0.001	2.6×10^{-4}	1.6×10^{-4}	9.5×10^{-5}	5.0×10^{-5}	3.6×10^{-15}
	0.002	4.3×10^{-4}	2.7×10^{-4}	1.6×10^{-4}	8.7×10^{-5}	5.8×10^{-14}
	0.003	5.7×10^{-4}	3.6×10^{-4}	2.2×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.9×10^{-13}
	0.004	6.9×10^{-4}	4.5×10^{-4}	2.7×10^{-4}	1.5×10^{-4}	9.3×10^{-13}
	0.005	8.1×10^{-4}	5.2×10^{-4}	3.2×10^{-4}	1.8×10^{-4}	2.2×10^{-12}

Tablo 17. $\alpha = 1$ olduğunda UKMCA denklemi için YİDM (Ali vd., 2022) ile karşılaştırmalı olarak Uq-HADY ve UHPEDM ile elde edilen mutlak hatalar

x	t	YİDM	Uq - HADY	UHPEDM
1	0.001	3.3×10^{-11}	2.6×10^{-14}	2.6×10^{-14}
	0.002	2.6×10^{-10}	4.1×10^{-13}	4.1×10^{-13}
	0.003	8.9×10^{-10}	2.1×10^{-12}	2.1×10^{-12}
	0.004	2.1×10^{-9}	6.7×10^{-12}	6.7×10^{-12}
	0.005	4.1×10^{-9}	1.6×10^{-11}	1.6×10^{-11}
2	0.001	4.9×10^{-11}	1.7×10^{-14}	1.7×10^{-14}
	0.002	3.9×10^{-10}	2.8×10^{-13}	2.8×10^{-13}
	0.003	1.3×10^{-9}	1.4×10^{-12}	1.4×10^{-12}
	0.004	3.1×10^{-9}	4.5×10^{-12}	4.5×10^{-12}
	0.005	6.2×10^{-9}	1.1×10^{-11}	1.1×10^{-11}
3	0.001	4.1×10^{-11}	2.3×10^{-15}	2.3×10^{-15}
	0.002	3.3×10^{-10}	3.7×10^{-14}	3.7×10^{-14}
	0.003	1.1×10^{-9}	1.8×10^{-13}	1.8×10^{-13}
	0.004	2.6×10^{-9}	5.9×10^{-13}	5.9×10^{-13}
	0.005	5.1×10^{-9}	1.4×10^{-12}	1.4×10^{-12}
4	0.001	2.6×10^{-11}	3.6×10^{-15}	3.6×10^{-15}
	0.002	2.0×10^{-10}	5.8×10^{-14}	5.8×10^{-14}
	0.003	7.0×10^{-10}	2.9×10^{-13}	2.9×10^{-13}
	0.004	1.6×10^{-9}	9.3×10^{-13}	9.3×10^{-13}
	0.005	3.2×10^{-9}	2.2×10^{-12}	2.2×10^{-12}

Tablo 17. (Devamı)

5	0.001	1.4×10^{-11}	3.6×10^{-15}	3.6×10^{-15}
	0.002	1.1×10^{-10}	5.8×10^{-14}	5.8×10^{-14}
	0.003	3.9×10^{-10}	2.9×10^{-13}	2.9×10^{-13}
	0.004	9.3×10^{-10}	9.3×10^{-13}	9.3×10^{-13}
	0.005	1.8×10^{-9}	2.2×10^{-12}	2.2×10^{-12}



5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Mevcut çerçevede, uyumlu kesirli mertebeden Kuramoto-Sivashinsky denklemleri (UKMKS), uyumlu kesirli mertebeden Whitham-Broer-Kaup (UKMWBK) denklemleri, uyumlu zaman-kesirli mertebeden Jaulent-Miodek (UZKMJM) sistemi, uyumlu kesirli mertebeden Cahn-Allen (UKMCA) denklemi için uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi (Uq-HADY), uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi (UKEAY) ve uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm metodu (UHPEDM) olarak adlandırılan üç farklı yöntem kullanılarak yeni sayısal çözümler araştırılmıştır. Uyumlu q-homotopi analiz dönüşüm yöntemi, uyumlu kesirli Elzaki ayrıştırma yöntemi ve uyumlu homotopi pertürbasyon Elzaki dönüşüm yöntemi yeni önerilen çözüm metotları olmaktadır. Önerilen bu metotların etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için bu yöntemlerle çözümler elde edilmiş, sayısal simülasyonlar yapılmış, çözüm grafikleri çizdirilmiş ve karşılaştırmalı tablolar oluşturulmuştur. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırma, her üç yeni tekniğin de doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmek için basit, güçlü ve etkili olduğunu göstermektedir.

Önerilen üç yeni teknik farklı türden kesirli kısmi diferansiyel denklemler ve farklı türden kesirli gecikmeli diferansiyel denklemlerin analizi için de etkili olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Ahmad, J., Mushtaq, M. ve Sajjad, N. (2015). Exact solution of whitham broer-kaup shallow water wave equations. *Journal of Science and Arts*, 15(1), 5.
- Ala, V., Demirbilek, U. ve Mamedov, K. R. (2014). Exact solutions of a conformable fractional equation via Improved Bernoulli Sub-Equation Function Method. In 9th International Eurasian Conference On (Vol. 264, p. 106).
- Ali, A., Seadawy, A. R. ve Baleanu, D. (2020). Computational solutions of conformable space-time derivatives dynamical wave equations: Analytical mathematical techniques. *Results in Physics*, 19, 103419.
- Ali, A., Shah, K. ve Khan, R. A. (2018). Numerical treatment for traveling wave solutions of fractional Whitham-Broer-Kaup equations. *Alexandria engineering journal*, 57(3), 1991-1998.
- Ali, L., Shah, R. ve Weera, W. (2022). Fractional View Analysis of Cahn–Allen Equations by New Iterative Transform Method. *Fractal and Fractional*, 6(6), 293.
- Al-Smadi, M., Arqub, O. A. ve Hadid, S. (2020). An attractive analytical technique for coupled system of fractional partial differential equations in shallow water waves with conformable derivative. *Communications in Theoretical Physics*, 72(8), 085001.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2020). Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method. *SN Applied Sciences*, 2(6), 1-11.
- Anaç, H. (2022). The New solutions of Conformable Fractional Whittam-Broer-Kaup Equations. The Sixth International Conference on Computational Mathematics and Engineering (CMES-2022), 20-22 Mayıs 2022, Ordu, 105
- Anaç, H., (2022). A New Method For Solving The Conformable Time-Fractional Jaulent-Miodek Equations. The International IFS and Contemporary Mathematics Conference, 16-19 Haziran 2022, Mersin, 18-19
- Anaç, H. ve Avit, Ö. (2022). The New Numerical Solutions for Conformable Fractional Kuramoto-Sivashinsky by Using Two Effective Techniques. International

Symposium on Applied Mathematics and Engineering (ISAME-2022), 21-23 Ocak 2022, İstanbul

- Atangana, A., Baleanu, D. ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13(1).
- Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
- Baleanu, D., Defterli, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.
- Baleanu, D., Jajarmi, A., Bonyah, E. ve Hajipour, M. (2018). New aspects of poor nutrition in the life cycle within the fractional calculus. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-14.
- Bekir, A. ve Güner, Ö. (2013). Exact solutions of nonlinear fractional differential equations by (G'/G)-expansion method. *Chinese Physics B*, 22(11), 110202.
- Butera, S. ve Di Paola, M. (2014). Fractional differential equations solved by using Mellin transform. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(7), 2220-2227.
- Dehghan, M., Manafian, J. ve Saadatmandi, A. (2010). Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 26(2), 448-479.
- Ding, H. (2016). General Padé approximation method for time–space fractional diffusion equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 299, 221-228.
- Duan, J. S., Rach, R., Baleanu, D. ve Wazwaz, A. M. (2012). A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations. *Communications in Fractional Calculus*, 3(2), 73-99.
- El-Sayed, S. M. ve Kaya, D. (2005). Exact and numerical traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup equations. *Applied mathematics and computation*, 167(2), 1339-1349.
- Gambo, Y. Y., Jarad, F., Baleanu, D. ve Abdeljawad, T. (2014). On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2014(1), 1-12.
- Gözütok, N. Y. ve Gözütok, U. (2017). Multivariable conformable fractional calculus. *Arxiv preprint arXiv:1701.00616*.

- Guner, O. ve Atik, H. (2016). Soliton solution of fractional-order nonlinear differential equations based on the exp-function method. *Optik*, 127(20), 10076-10083.
- Güner, O., Bekir, A. ve Cevikel, A. C. (2015). A variety of exact solutions for the time fractional Cahn-Allen equation. *The European Physical Journal Plus*, 130(7), 1-13.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699-708.
- He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and computation*, 135(1), 73-79.
- Hosseini, K., Bekir, A. ve Ansari, R. (2017). New exact solutions of the conformable time-fractional Cahn–Allen and Cahn–Hilliard equations using the modified Kudryashov method. *Optik*, 132, 203-209.
- Jaber, K. K. ve Ahmad, R. S. (2018). Analytical solution of the time fractional Navier-Stokes equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 9(4), 1917-1927.
- Javeed, S., Saif, S. ve Baleanu, D. (2018). New exact solutions of fractional Cahn–Allen equation and fractional DSW system. *Advances in difference equations*, 2018(1), 1-15.
- Kexue, L. ve Jigen, P. (2011). Fractional abstract Cauchy problems. *Integral Equations and Operator Theory*, 70(3), 333-361.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, 264, 65-70.
- Khater, M. M., Seadawy, A. R. ve Lu, D. (2017). Elliptic and solitary wave solutions for Bogoyavlenskii equations system, couple Boiti-Leon-Pempinelli equations system and Time-fractional Cahn-Allen equation. *Results in physics*, 7, 2325-2333.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). elsevier.
- Kudryashov, N. A. (1990). Exact solutions of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation. *Physics Letters A*, 147(5-6), 287-291.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z. ve Kesemen, T. (2019). Solving of some random partial differential equations by using differential transformation method and laplace-padé method. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 9(1), 108-118.

- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley
- Mohyud-Din, S. T., Yıldırım, A. ve Demirli, G. (2010). Traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup equations by homotopy perturbation method. *Journal of King Saud University-Science*, 22(3), 173-176.
- Odibat, Z. ve Kumar, S. (2019). A robust computational algorithm of homotopy asymptotic method for solving systems of fractional differential equations. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 14(8), 081004.
- Oldham, K. ve Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier.
- Pillai, R. N. (1990). On Mittag-Leffler functions and related distributions. *Annals of the Institute of statistical Mathematics*, 42(1), 157-161.
- Podlubny, I. (1997). The Laplace transform method for linear differential equations of the fractional order. *arxiv preprint funct-an/9710005*.
- Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208-214.
- Rezazadeh, H. ve Ziabarya, B. P. (2016). Sub-equation method for the conformable fractional generalized kuramoto sivashinsky equation. *Computational Research Progress in Applied Science & Engineering*, 2(3), 106-109.
- Saha Ray, S. (2015). A novel method for travelling wave solutions of fractional Whitham–Broer–Kaup, fractional modified Boussinesq and fractional approximate long wave equations in shallow water. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(7), 1352-1368.
- Sahoo, S., Saha Ray, S., Abdou, M. A. M., Inc, M. ve Chu, Y. M. (2020). New soliton solutions of fractional Jaulent-Miodek system with symmetry analysis. *Symmetry*, 12(6), 1001.
- Sahoo, S. ve Ray, S. S. (2016). Solitary wave solutions for time fractional third order modified KdV equation using two reliable techniques (G'/G)-expansion method and improved (G'/G)-expansion method. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 448, 265-282.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives* (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon.

- Shah, R., Khan, H., Baleanu, D., Kumam, P. ve Arif, M. (2020). A semi-analytical method to solve family of Kuramoto–Sivashinsky equations. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 402-411.
- Shah, R., Khan, H. ve Baleanu, D. (2019). Fractional Whitham–Broer–Kaup equations within modified analytical approaches. *Axioms*, 8(4), 125.
- Shen, G., Manafian, J., Zia, S. M., Huy, D. T. N. ve Le, T. H. (2021). The New Solitary Solutions to the Time-Fractional Coupled Jaulent–Miodek Equation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2021.
- Sherriffe, D., Behera, D. ve Nagarani, P. (2021). Analytical new soliton wave solutions of the nonlinear conformable time-fractional coupled Whitham–Broer–Kaup equations. *Modern Physics Letters B*, 35(32), 2150492.
- Shrinath, M. ve Bhadane, A. (2019). New conformable fractional ELZAKI transformation: Theory and applications. *Malaya Journal of Matematik (MJM)*, (1, 2019), 619-625.
- Tariq, H. ve Akram, G. (2017). New approach for exact solutions of time fractional Cahn–Allen equation and time fractional Phi-4 equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473, 352-362.
- Ünal, E. ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- Veerasha, P., Prakasha, D. G. ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.
- Veerasha, P. ve Prakasha, D. G. (2021). Solution for fractional Kuramoto–Sivashinsky equation using novel computational technique. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 7(2), 1-22.
- Wang, L. ve Chen, X. (2015). Approximate analytical solutions of time fractional Whitham–Broer–Kaup equations by a residual power series method. *Entropy*, 17(9), 6519-6533.
- Wang, Y., Zhang, Y. F., Liu, Z. J. ve Iqbal, M. (2017). A fractional Whitham-Broer-Kaup equation and its possible application to tsunami prevention. *Thermal Science*, 21(4), 1847-1855.
- Wu, G. C. ve Lee, E. W. M. (2010). Fractional variational iteration method and its application. *Physics Letters A*, 374(25), 2506-2509.

- Xie, F., Yan, Z. ve Zhang, H. (2001). Explicit and exact traveling wave solutions of Whitham–Broer–Kaup shallow water equations. *Physics Letters A*, 285(1-2), 76-80.
- Yaslan, H. ve Girgin, A. (2018). Sitem for the conformable space-time fractional coupled kd equations. *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 3(3), 223-233.
- Zafar, A., Bekir, A., Khalid, B. ve Rezazadeh, H. (2020). Abundant solitary wave solutions for the fractional coupled Jaulent–Miodek equations arising in applied physics. *International Journal of Modern Physics B*, 34(29), 2050279.
- Zhang, X., Zhao, J., Liu, J. ve Tang, B. (2014). Homotopy perturbation method for two dimensional time-fractional wave equation. *Applied Mathematical Modelling*, 38(23), 5545-5552.

ÖZGEÇMİŞ

Özkan AVIT, 2006 yılında Plevne Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2010 yılında tamamladı. 2013 yılında Sakarya'da Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı kadrolu lise öğretmeni olarak çalışmaya başlamıştır. Şu an Tekirdağ'da görev yapmaktadır. Evlidir ve bir çocuk babasıdır.

