

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONOTONİK HOMOTOPİ VE UYGULAMALARI

Salih YAZAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Danışman

Doç. Dr. Eyüp KIZIL

Temmuz, 2022

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONOTONİK HOMOTOPİ VE UYGULAMALARI

Salih Yazar tarafından hazırlanan tez çalışması 28.07.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Eyüp KIZIL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Eyüp KIZIL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ömer GÖK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi

Danışmanım Doç. Dr. Eyüp KIZIL sorumluluğunda tarafımda hazırlanan Monotonik Homotopi ve Uygulamaları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Salih YAZAR

İmza

TEŐEKKÜR

Bu araştırmada ve araştırmanın olgunlaşmasında değerli katkılarını esirgemeyen Doç. Dr. Eyüp KIZIL hocama ve Yıldız Teknik Üniversitesi 'ne teőekkür ederim.

Salih YAZAR



İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	2
1.3 Hipotez	2
2 GENEL BİLGİLER	3
2.1 Genel Topoloji.....	3
2.2 Bazı Özel Topolojiler	8
2.3 Homotopi.....	9
3 ÖRTÜ UZAYLARI	14
3.1 Örtü Uzayı, Örtü Tasviri.....	14
3.2 Yol ve Homotopi Kaldırma (Lifting) Özelliği	16
4 MONOTONİK EĞRİLER VE HOMOTOPI	19
4.1 Monotonik Eğriler	19
4.2 $\Gamma(S)$ 'in Evrensel Özelliği	23
4.3 Lie Semigrup	24
5 MONOTONİK HOMOTOPİNİN UYGULAMASI	30
KAYNAKÇA	36
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	38

SİMGE LİSTESİ

\bar{A}	A kümesinin kapanışı
S^1	Birim çember
S^2	Birim küre
\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Gerçel sayılar kümesi
Id_M	M 'nin özdeşlik (birim) tasviri
E^n	n -boyutlu Öklid Uzayı
$\langle S \rangle$	S ile gerilen küme
$intS$	S 'nin iç noktalarının kümesi
C^∞	Sürekli differansiyellenebilirlik
\mathbb{Z}	Tam Sayılar

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2. 1 Hawaii küpesi.....	4
Şekil 2. 2 Doğrusal homotopi	10
Şekil 2. 3 Yol homotopi	11
Şekil 3. 1 Örtü fonksiyonu	14
Şekil 3. 2 S^1 'in örtü uzayı olarak sonsuz spiral	15
Şekil 3. 3 S^1 'in örtü uzayı olmayan sınırlı spiral.....	15
Şekil 3. 4 Fonksiyonların kaldırmaları	17
Şekil 4. 1 Monotonik yol.....	19
Şekil 4. 2 C 'deki monotonik yol.....	20
Şekil 4. 3 Heisenberg gagası(beak)	26
Şekil 5. 1 Homotopi \Rightarrow monotonik homotopi.....	35

MONOTONİK HOMOTOPİ VE UYGULAMALARI

Salih YAZAR

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Eyüp KIZIL

Bu çalışmada homotopi teorisinin uygun bir varyasyonu olarak topolojik semigruplar ve özel olarak da Lie semigrupları üzerindeki bir takım özel eğriler (monotonik eğriler) için uyarlanmış homotopi ile homotopinin denklik sınıflarının uzayı olarak monotonik örtü uzayları incelenmiştir. Ayrıca, monotonik homotopinin kontrol teoride kullanıldığı şekli ile uygulamalarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Monotonik homotopi, örtü uzayları, Lie semigrupları

MONOTONIC HOMOTOPY AND ITS APPLICATIONS

Salih YAZAR

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Eyüp KIZIL

In this work, we consider an appropriate variant of homotopy adapted to a particular class of monotonic curves on topological (resp. Lie) semigroups and the covering space as the set of monotonic homotopy classes. We also mention how this homotopy is used in control theoretical setting as an application.

Keywords: Monotonic homotopy, covering space, Lie semigroups

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1.1 Literatür Özeti

Monotonik homotopi, kabaca, klasik teoride adi yollar arasında sürekli bir deformasyon olarak tanımlanan homotopi kavramının monotonik eğrilerden oluşan özel bir sınıfa uyarlanması şeklinde tarif edilebilir. Bu homotopi kavramı literatürde oldukça yeni sayılabilir. (Bknz Lawson [8], Kizil Colonus-San Martin [4] vs). Fizik kökenli oluşu sebebiyle *kausal homotopi* olarak da geçer. Klasik homotopiden en belirgin farkı ise sürekli deformasyonun ürettiği ara eğrilerin de yine aynı sınıftan yani monotonik eğriler olmasıdır. Bu yönü ile alışlagelmiş homotopi tanımı özel bir duruma kısıtlanmış gibi gözükse de aslında doğası gereği göz önüne alınan eğrilerin taşıdıkları özellikler yüzünden daha zengin bir homotopi teori ile muhatap olmamıza olanak vermektedir. Örneğin, dinamik ya da kontrol sistemlerinin çözüm eğrileri¹ ya da yaygın olarak kullanılan tabir ile trajektörleri arasında bu homotopiyi düşündüğümüzde homotopinin ara eğrileri de yine trajektörleri olmak zorunda olduğundan, dinamik bir süreç kendi içerisinde ne kadar zengin bir yapı barındırıyorsa monotonik (hatta dinamik) homotopi de bundan o kadar etkilenecektir.

Klasik teoride mevcut sonuçların hatırı sayılır bir kısmının, başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan adi yollara (kısaca kapalı yollar diyelim) endeksli olduğunu hatırlatalım. Burada ise diferansiyel denklemlerin çözümlerinin genelde periyodik olmamaları yüzünden açık eğriler ile çalışma zorunluluğu söz konusu olmaktadır. Benzer şekilde, Lie semigruları üzerindeki cebirsel yapıdan beslenen monotonik eğriler de kapalı eğriler olmak zorunda değildir. Kısaca, homotopinin tanımında en genel haliyle adi yollar arasında değil de bir takım özel eğriler arasında olacak

¹ Kontrol sistemi, parametrelenmiş diferansiyel denklemlerin ailesi gibi düşünüldüğünde, sistemin çözüm eğrilerinden yani trajektörlerinden bu diferansiyel denklemlerin çözümleri olan eğrileri kastediyoruz.

şekilde kısıtlamaya gidildiğinde her ne kadar işler zorlaşmaya başlasa da barındırdığı zengin yapı sebebiyle araştırmaya açık bir konudur.

Özellikle [4] de, örtü uzayları üzerine mevcut klasik sonuçlar kontrol trajektörileri arasında homotopi kullanarak ifade edilmiş ve kontrol sistemleri için dinamik bir örtü uzayı inşa edilmiştir. Bu örtü uzayı üzerinde hem diferansiyellenebilir manifold yapısı olduğu hem de örtü projeksiyonu ile durum uzayı arasında (üzerinde dinamik verilen uzayı) lokal homeomorfizma ile bağlantı kurulduğu gösterilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı Lie semigruplarının monotonik eğrilerinin monotonik homotopi teorisini çalışmaktır.

1.3 Hipotez

Biz bu çalışmada özellikle kontrol teori vurgusundan ziyade Lie semigruplarının Lie teorisi ağırlıklı olacak şekilde daha çok topolojik tarzda monotonik eğriler arasında monotonik homotopiyi ele alacağız. S bir Lie semigrup olmak üzere, [8] de Lawson $\Gamma(S)$ ile gösterilen bir semigrup (şimdiden homotopi semigrubu diyelim) tanımlamış ve S 'nin birim elemanı civarından başka bir T semigrubu içine her lokal homomorfizmanın global olanına üstelik tek türlü olacak şekilde genişletilebileceğini göstermiştir. Lie gruplarının evrensel örtü uzayını karakterize eden bu özelliğin Lie semigruplar söz konusu olduğunda daima geçerli olmayabileceği düşünüldüğünde elde edilen sonuçların değeri daha iyi anlaşılmaktadır.

Bu bölümde monotonik homotopiden bahsetmeden önce ileride ihtiyaç duyacağımız bazı temel bilgilere yer vereceğiz.

2.1 Genel Topoloji

Tanım 2.1.1 (Topoloji) Bir $X \neq \emptyset$ kümesi üzerindeki topoloji; X 'in aşağıdaki özelliklerini sağlayan alt kümelerinden oluşan bir T sınıfıdır [1].

1. $\emptyset, X \in T$
2. T 'nin herhangi elemanlarının birleşimi yine T 'nin elemanıdır.
3. T 'nin herhangi sonlu elemanlarının kesişimi yine T 'nin elemanıdır.

Tanım 2.1.2 (Bağlantılılık) X topolojik uzay olsun. $A, B \subset X$ açık ayrık kümeleri için $A \cup B = X$ eşitliği sağlanıyorsa X uzayına 'bağlantısızdır' denir. Eğer X uzayı bağlantısız değilse 'bağlantılıdır' denir [1].

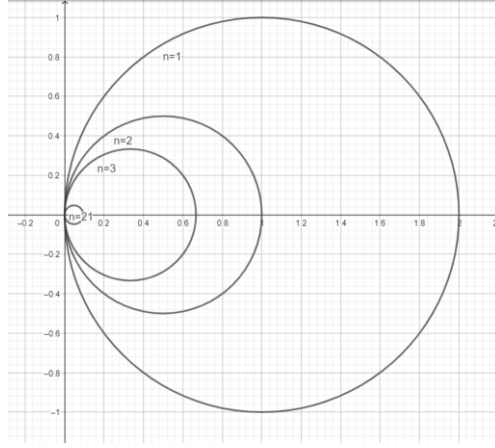
Tanım 2.1.3 (Yol Bağlantılılık) $f: [0,1] \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu için $f(0) = x$ ve $f(1) = y$ ise f için ' X uzayında bir yoldur' denir. Eğer $\forall x, y \in X$ için x 'den y 'ye bir yol bulunabiliyorsa X uzayına 'yol bağlantılıdır' denir [1].

Tanım 2.1.4 (Yerel (Yol) Bağlantılılık) X bir uzay ve $x \in X$ olsun. $\forall x \in U \subset X$ komşuluğu için $x \in V \subset U$ olacak şekilde V bağlantılı uzayı varsa X uzayı x 'de yerel bağlantılıdır. Eğer $\forall x \in X$ için X uzayı x 'de yerel bağlantılı ise X yerel bağlantılıdır. Benzer olarak $\forall x \in U \subset X$ komşuluğu için $x \in V \subset U$ olacak şekilde V yol bağlantılı uzayı varsa X uzayı x 'de yerel yol bağlantılıdır. Eğer $\forall x \in X$ için X uzayı x 'de yerel yol bağlantılı ise X yerel yol bağlantılıdır [1].

Tanım 2.1.5 (Yarı-Yerel Basit Bağlantılı) X uzayındaki her noktanın bir U komşuluğu için bu komşuluktaki her kapalı eğri X 'teki bir noktaya daraltılabiliyorsa X uzayı yarı-yerel basit bağlantılıdır [9].

Bu tanımı sağlamayan bir örnek vermek istersek, Hawaii küpesini örnek olarak verebiliriz. Bu topolojik uzay aşağıdaki gibidir:

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\} \quad (2.1)$$



Şekil 2. 1 Hawaii küresi

Tanım 2.1.6 (Homeomorfizma) X ve Y topolojik uzayları için $f: X \rightarrow Y$ birebir ve örten fonksiyon olsun. Eğer f ve f 'nin tersi olan $f^{-1}: Y \rightarrow X$ fonksiyonları sürekli ise f bir homeomorfizmadır [1].

Tanım 2.1.7 (Lokal Homeomorfizma) X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. $\forall x \in X$ ve X 'de açık $x \in U$ kümesi için $f(U) \subset Y$ açık ve $f|_U: U \rightarrow f(U)$ homeomorfizma ise $f: X \rightarrow Y$ lokal homeomorfizmadır [10].

Uyarı: Açıkça, her homeomorfizma aynı zamanda bir lokal homeomorfizmadır. Fakat tersi doğru değildir. Örneğin;

$$f: \mathbb{R} \rightarrow S^1, f(t) = e^{it} \quad (2.2)$$

fonksiyonu lokal homeomorfizmadır fakat homeomorfizma değildir.

Tanım 2.1.8 (Topolojik Gömme) X ve Y topolojik uzayları için $f: X \rightarrow Y$ birebir fonksiyon olsun. $Z \subset Y$ alt kümesi Y 'nin alt uzayı ve $f(X) = Z$ olsun. Eğer $f': X \rightarrow Z$ fonksiyonu homeomorfizma ise f bir topolojik gömme veya kısaca gömmedir [1].

Teorem 2.1.9 (Yapıştırma Lemması) A ve B kümeleri X 'te kapalı ve $X = A \cup B$ olsun. $f: A \rightarrow Y$ ve $g: B \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonlar olsun.

$\forall x \in A \cap B$ için $f(x) = g(x)$ ise

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases} \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir sürekli fonksiyon vardır [1].

Tanım 2.1.10 (Manifold) M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa M 'ye n -boyutlu manifold veya n -boyutlu topolojik manifold denir [12].

1. M bir Hausdorff uzayıdır.
2. M 'nin her açık alt kümesi E^n 'ye veya E^n 'nin bir açık kümesine homeomorftur.
3. M sayılabilir çoğunluktaki açık kümelerle örtülebilir.

Tanım 2.1.11 (Harita-Koordinat Komşuluğu) M , n -boyutlu topolojik manifold olsun. O halde M 'nin bir açık kümesi ile E^n 'nin açık kümesi arasında

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M \quad (2.4)$$

homeomorfizması vardır. Burada (ψ, W) ikilisine koordinat komşuluğu veya harita denir [12].

Tanım 2.1.12 (Atlas) M , n -boyutlu topolojik manifold ve M 'nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha | \alpha \in A\}$ olsun. Öyleyse $\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow W_\alpha$ olacak şekilde homeomorfizmalar vardır. $\{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}$ kümesine atlas denir [12].

Tanım 2.1.13 (Diferansiyellenebilir yapı) M , n -boyutlu topolojik manifold ve M 'nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha | \alpha \in A\}$ olsun. Bir $p \in M$ noktası için,

$p \in W_\alpha$ ve $p \in W_\beta$ olacak şekilde (ψ_α, W_α) ve (ψ_β, W_β) koordinat komşuluklarını seçelim. O halde

$$\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow W_\alpha \quad (2.5)$$

ve

$$\psi_\beta: U_\beta \rightarrow W_\beta \quad (2.6)$$

homeomorfizmaları vardır. Daha sonra

$$\psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) = U \subset U_\alpha \subset E^n \quad (2.7)$$

ve

$$\psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) = V \subset U_\beta \subset E^n \quad (2.8)$$

olmak üzere

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta: V \rightarrow U \quad (2.9)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_{\beta}^{-1} \circ \psi_{\alpha}: U \rightarrow V \quad (2.10)$$

fonksiyonları vardır. ψ_{α} ve ψ_{β} fonksiyonları homeomorfizma olduğundan $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları da homeomorfizmadır. Eğer $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları diferansiyellenebilir ise M manifoldu üzerinde tanımlı

$$\{(\psi_{\alpha}, W_{\alpha}) | \alpha \in A, A \text{ indis kümesi}\} \quad (2.11)$$

atlasına diferansiyellenebilir yapı denir [12].

Tanım 2.1.14 (Diferansiyellenebilir Manifold) M , n -boyutlu topolojik manifoldu üzerinde bir diferansiyellenebilir yapı tanımlı ise M manifolduna diferansiyellenebilir manifold denir [12].

Tanım 2.1.15 (Tanjant Uzayı) M , diferansiyellenebilir manifold ve p , M üzerinde bir nokta olsun. Aşağıdaki eşitliğin sağlandığı $v: C^{\infty}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu p 'nin türevidir.

$$v(fg) = f(p)v g + g(p)v f \quad \forall f, g \in C^{\infty}(M) \quad (2.12)$$

Böyle tüm p noktasındaki türevlerin kümesi, M 'nin ve p 'deki tanjant uzayıdır. $T_p M$ şeklinde gösterilir [13].

Tanım 2.1.16 (Vektör Alanı) M diferansiyellenebilir manifold ise M üzerindeki bir vektör alanı $\pi: M \rightarrow TM$ fonksiyonunun bir parçasıdır. Daha somut olarak bir vektör alanı $\pi \circ X = Id_M$ özelliğine sahip genellikle $p \mapsto X_p$ ile yazılan sürekli bir $X: M \rightarrow TM$ fonksiyonudur [13].

Tanım 2.1.17 (Topolojik Grup) G topolojik uzayı bir grup ve grubun işlemine göre

$$*: G \times G \rightarrow G: (x, y) \mapsto x * y \quad (2.13)$$

ve

$$\circ: G \rightarrow G: x \mapsto x^{-1} \quad (2.14)$$

işlemleri sürekli ise G 'ye topolojik grup denir [13].

Tanım 2.1.18 (Lie Grubu) G diferansiyellenebilen manifold yapısına sahip bir topolojik grubu için $*: G \times G \rightarrow G: (x, y) \mapsto x * y$ ve $\circ: G \rightarrow G: x \mapsto x^{-1}$ işlemleri diferansiyellenebilir fonksiyon ise G 'ye Lie grubu denir [13].

Tanım 2.1.19 (Lie Cebiri) g , bir F cismi üzerinde tanımlı vektör uzayı olsun.

$$[\cdot, \cdot]: g \times g \rightarrow g \quad (2.15)$$

ikili işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa yani Lie parantezi özellikleri sağlanıyorsa g 'ye Lie cebiri denir [14].

1. Bilineerlik,

$\forall a, b \in F$ ve $\forall x, y, z \in g$ olmak üzere;

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y] \quad (2.16)$$

2. Alternatiflik,

$$[x, x] = 0, \forall x \in g \quad (2.17)$$

3. Jakobi Özdeşliği,

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \forall x, y, z \in g \quad (2.18)$$

4. Antisimetrik,

$$[x, y] = -[y, x], \forall x, y \in g \quad (2.19)$$

2.2 Bazı Özel Topolojiler

Tanım 2.2.1 (Metrik Topoloji) (X, d) bir metrik uzay olsun.

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon, x \in X, \varepsilon > 0\} \quad (2.20)$$

tüm açık yuvarları ile oluşan sınıf, X üzerinde bir topoloji için baz(taban) oluyorsa bu topolojiye d metriği ile üretilen topoloji veya metrik topoloji denir [1].

Tanım 2.2.2 (Standart Sınırlı Metrik) (X, d) bir metrik uzay olsun.

$$\bar{d}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanan metriğe standart sınırlı metrik denir [1].

Tanım 2.2.3 (Uniform Topoloji) Bir J indeks kümesi ve $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}, y = (y_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathbb{R}^J$ noktaları verilsin. Şimdi de \bar{d} standart sınırlı metrik olmak üzere \mathbb{R}^J 'de bir metrik tanımlayalım:

$$\bar{q} = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\} \quad (2.22)$$

Bu metriğe \mathbb{R}^J üzerinde uniform metrik bu metrik ile üretilen topolojiye uniform topoloji denir [1].

Tanım 2.2.4 (Kompakt-Açık Topoloji) X ve Y topolojik uzay ve

$$C(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \text{ sürekli fonksiyon}\} \quad (2.23)$$

olsun. $K \subset X$ kompakt alt kümesi ve $U \subset Y$ açık alt kümesi için

$$V(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\} \quad (2.24)$$

kümesi verilsin. Böyle $V(K, U)$ kümelerinin sınıfının oluşturduğu alttaban $C(X, Y)$ üzerinde kompakt-açık topolojiyi üretir [11].

Tanım 2.2.5 (Bölüm Fonksiyonu) X ve Y topolojik uzayları için $f: X \rightarrow Y$ örten fonksiyon olsun. $U \subset Y$ açık ancak ve ancak $f^{-1}(U) \subset X$ açık ise f fonksiyonu bölüm fonksiyonudur [1].

Tanım 2.2.6 (Bölüm Topolojisi) X bir uzay ve A bir küme olsun. Eğer $f: X \rightarrow A$ örten fonksiyon ise A kümesi üzerinde bir T topolojisi vardır. Bu topolojiye bölüm topolojisi denir [1].

2.3 Homotopi

Tanım 2.3.1 f ve g , X 'den Y 'ye sürekli fonksiyonlar olsunlar. Eğer $\forall x$ için

$$F(x, 0) = f(x) \text{ ve } F(x, 1) = g(x) \quad (2.25)$$

olacak şekilde $F: X \times I \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu var ise f ile g homotopiktir (Burada, $I = [0,1]$). F fonksiyonu f ile g arasındaki homotopidir ve f ile g homotopik ise $f \simeq g$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 2.3.2 f ve g , $[0,1]$ den X 'e iki yol olsun. Eğer aynı başlangıç x_0 ve aynı bitiş x_1 noktalarına sahipler ise ve

$$F(s, 0) = f(s) \quad F(0, t) = x_0 \quad (2.26)$$

$$F(s, 1) = g(s) \quad F(1, t) = x_1 \quad (2.27)$$

olacak şekilde $F: I \times I \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu var ise f ile g yol homotopiktir ve $F: f \simeq_p g$ şeklinde gösterilir [1].

NOT: $F(s, t) = F_t(s)$ şeklinde de gösterilir.

Teorem 2.3.1 \simeq ve \simeq_p denklik bağıntısıdır [1].

İspat: $F(x, t) = f(x)$ için $f \simeq f$ sağlanır. (Yansıma özelliği)

$F: f \simeq f'$ olsun. Öyleyse

$$G(x, t) = F(x, 1 - t) \quad (2.28)$$

f' ile f arasında homotopi olur. (Simetri özelliği)

Şimdi de, f ile f' arasındaki homotopi F ve f' ile f'' arasındaki homotopi F' olsun.

Bir G tanımlayalım. $G: X \rightarrow Y$;

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F'(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

olacak şekilde G , f ile f'' arasındaki homotopidir. (Geçişme özelliği)

Çünkü, $t = \frac{1}{2}$ için

$$F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1) \quad (2.30)$$

olduğundan ve $X \times I = \left(X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cup \left(X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ olduğundan yani yapıştırma lemmasından G süreklidir. Dolayısıyla bu bağıntı denklik bağıntısıdır. \simeq_p için de benzer işlemler kullanılarak denklik bağıntısı olduğu gösterilir.

Örnek 2.3.1 X topolojik uzay ve $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ iki yol olsun.

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x) \quad (2.31)$$

fonksiyonu f ile g arasında bir homotopidir. Bu homotopiye doğrusal homotopi denir. Doğrusal homotopi denilmesinin sebebi her $f(x)$ ile $g(x)$ noktası arasında bir doğru parçasının bulunabilmesidir [1].

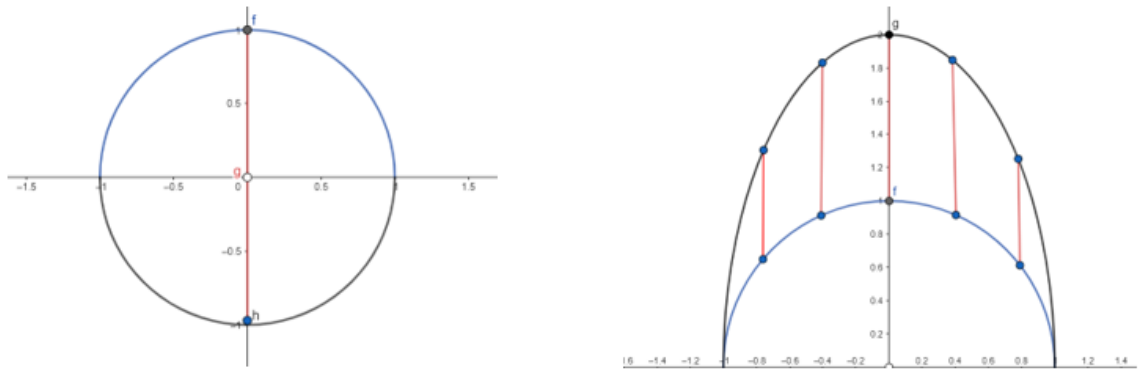
Örnek 2.3.2 $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ delikli düzlem olmak üzere, X 'te alınan

$$f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s) \text{ ve } g(s) = (\cos \pi s, 2 \sin \pi s) \quad (2.32)$$

yol homotopik olan yollar, doğrusal homotopidir. Fakat $f(s)$ ile

$$h(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s) \quad (2.33)$$

doğrusal homotopi değildir. Çünkü $s = \frac{1}{2}$ için $f\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 1)$ ve $h\left(\frac{1}{2}\right) = (0, -1)$ noktalarını birleştiren bir doğru parçası yoktur [1].



Şekil 2. 2 Doğrusal homotopi

Tanım 2.3.3 Bir X uzayında iki yol alalım. Bu yollardan birinin sonu diğersinin başlangıcı ile aynı olsun. İki yolun birbirine eklenmesi ya da çarpımı, yollar

sırasıyla f ile g olmak üzere, aşağıdaki sürekli fonksiyonu ile yapıştırma lemmasından iyi tanımlıdır:

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & , \quad \forall s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2s - 1) & , \quad \forall s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad (2.34)$$

Ayrıca, f ile g 'nin çarpımı $f * g$ ile gösterilir. h fonksiyonu f 'in başlangıcı x_0 'dan g 'nin sonu olan x_2 'ye bir yoldur. h yolunun ilk yarısı f , ikinci yarısı g yoludur [1].

Şimdi de ispatını [1] den aldığımız aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 2.3.2 * işlemleri yol homotopi sınıfları üzerinde iyi tanımlıdır. Yani

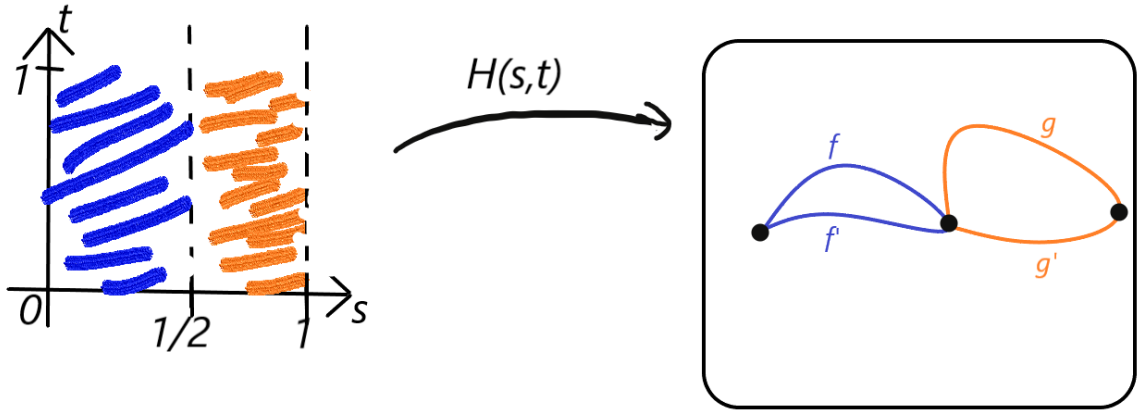
$$[f] * [g] = [f * g]. \quad (2.35)$$

İspat: f ile f' arasındaki yol homotopi F , g ile g' arasındaki yol homotopi G olsun.

Bir H fonksiyonu tanımlayalım.

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & , \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & , \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

$F(1, t) = x_1 = G(0, t)$ ve H yapıştırma lemmasından sürekli, dolayısıyla iyi tanımlıdır.



Şekil 2. 3 Yol homotopi

Teorem 2.3.3 * işlemleri aşağıdaki özelliklere sahiptir [1].

1) $[f] * ([g] * [h])$ tanımlı ise $([f] * [g]) * [h]$ tanımlıdır ve birbirine denktir.

2) $x \in X$ ve $e_x: I \rightarrow X$ sabit yol yani I 'nın tüm elemanlarını x 'e götüren yol olsun.

f, X üzerinde x_0 'dan x_1 'e bir yol ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \text{ ve } [e_{x_0}] * [f] = [f] \quad (2.37)$$

3) f, X üzerinde x_0 'dan x_1 'e bir yol olsun. $\tilde{f}(s) = f(1 - s)$ olacak şekilde bir \tilde{f} yolu vardır. \tilde{f}, f 'nin tersidir öyleyse aşağıdaki eşitlikleri sağlanır.

$$[f] * [\tilde{f}] = [e_{x_0}] \text{ ve } [\tilde{f}] * [f] = [e_{x_1}] \quad (2.38)$$

İspat: ilk olarak ikinci özelliği ispatlayalım. $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $e_0: I \rightarrow X$, $e_0(x) = 0$ sabit yol ve $i: I \rightarrow I$ birim fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $e_0 * i$ sıfırdan bire yol olur. Dolayısıyla, I üzerinde i ile $e_0 * i$ arasında bir G yol homotopisi vardır. Buradan da $f \circ G$ fonksiyonu $f \circ i = f$ ile $f \circ (e_0 * i) = (f \circ e_0) * (f \circ i) = e_{x_0} * f$ arasında yol homotopi vardır. Yani, $[f] * [e_{x_0}] = [f]$.

$[f] * [e_{x_1}] = [f]$ eşitliği de benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi de üçüncü özelliği ispatlayalım: i birim fonksiyonun tersi $\bar{i}(s) = 1 - s$ şeklindedir. $i * \bar{i}$ fonksiyonu başlangıç ve bitiş noktası sıfır olan bir yoldur. Yani bu yol e_0 sabit yoludur. Bu da I 'da e_0 ile $i * \bar{i}$ arasında bir H yol homotopisi olduğu anlamına gelir. H yol homotopi olduğundan $f \circ H$ fonksiyonu $f \circ e_0 = e_{x_0}$ ile

$f \circ (i * \bar{i}) = (f \circ i) * (f \circ \bar{i}) = f * \bar{f}$ arasında yol homotopidir. Yani

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}]. \quad (2.39)$$

Benzer şekilde

$$[\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}] \quad (2.40)$$

olduğu da gösterilebilir. Son olarak da birinci özelliği ispatlayalım. $f * g$ yolunu farklı bir şekilde tanımlayacağız. $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere a noktasını c noktasına, b noktasının d noktasına taşıyan

$$l: [a, b] \rightarrow [c, d], p(x) = mx + k \quad (2.41)$$

fonksiyonuna pozitif lineer fonksiyon denir.

$f: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0,1]$, $g: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [0,1]$ iki pozitif lineer fonksiyon olsun. Şimdi, $f(1) = g(0)$ ve $g(1) = h(0)$ olmak üzere $f * (g * h)$ ve $(f * g) * h$ yollarını tanımlayalım. $0 < a < b < 1$ olmak üzere $k_{a,b}$ fonksiyonu şu şekilde tanımlayalım:

$$k_{a,b} = \begin{cases} f: [0, a] \rightarrow I \\ g: [a, b] \rightarrow I \\ h: [b, 1] \rightarrow I \end{cases} \quad (2.42)$$

Bu $k_{a,b}$ yolu elbette a ve b noktalarının seçimine bağlıdır, fakat aynı şey homotopi denklik sınıfları için geçerli değildir. Yukarıda bahsi geçen pozitif lineer fonksiyon üzerinden $0 < c < d < 1$ için tanımlanan $k_{c,d}$ yolu ile $k_{a,b}$ 'nin yol homotopik oldukları görülecektir (Baknz Theorem 51.2 nin ispatı, [1]).

Dolayısıyla, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$ seçilmek sureti ile $[f] * ([g] * [h])$ ile $([f] * [g]) * [h]$ 'nin denk oldukları görülecektir.

Tanım 2.3.4 X bir uzay ve x_0 , X üzerinde bir nokta olsun. X 'de başlangıç ve bitişi x_0 olan bir yola x_0 merkezli kapalı yol denir. x_0 merkezli kapalı yolların yol homotopi sınıflarının kümesi, $*$ işlemi ile , X 'in x_0 merkezli temel grubudur. $\pi_1(X, x_0)$ şeklinde gösterilir [1].

Not: X yol bağlantılı ise $\pi_1(X, x_0)$ temel grubu x_0 noktasına bağlı değildir.

Tanım 2.3.5 X yol bağlantılı uzay ve $\forall x_0 \in X$ için $\pi_1(X, x_0)$ aşıkâr grup ise X "basit bağlantılıdır" denir [1].

Teorem 2.3.4 X basit bağlantılı uzayında başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan herhangi iki yol, yol homotopiktir [1].

İspat: α ve β , x_0 'dan x_1 'e iki yol olsun. Öyleyse $\alpha * \bar{\beta}$, x_0 merkezli kapalı yoldur. X basit bağlantılı olduğundan bu kapalı yol x_0 merkezli bir sabit kapalı yola homotopiktir. Yani;

$$[\alpha * \bar{\beta}] = [e_{x_0}] \quad (2.43)$$

$$[\alpha * \bar{\beta}] * [\beta] = [e_{x_0}] * [\beta] \quad (2.44)$$

$$[\alpha] = [\beta] \quad (2.45)$$

3.1 Örtü Uzayı, Örtü Tasviri

Tanım 3.1.1 $p: E \rightarrow B$ sürekli örten fonksiyon olsun. $U \subset B$ açık alt kümesi için;

1) $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in I} V_\alpha$, $V_\alpha \subset E$ açık alt küme ve V_α 'lar ayrık,

2) $\forall \alpha$ için $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizma,

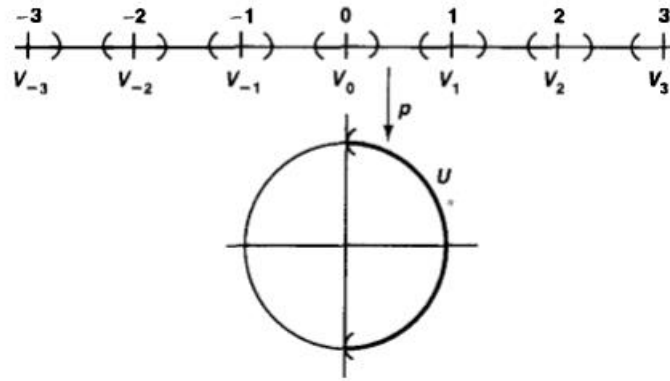
özellikleri sağlanıyorsa p tarafından muntazam örtülmüş komşuluk denir [1].

Tanım 3.1.2 (Örtü Uzayı) $p: E \rightarrow B$ sürekli örten fonksiyon olsun. Eğer $\forall b \in B$ için $b \in U$ komşuluğu p tarafından muntazam örtülmüş ise p 'ye örtü fonksiyonu denir. E 'de B 'nin örtü uzayıdır [1].

Örnek 3.1.1 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ örtü fonksiyonudur [1].

İspat: Kosinüs ve sinüs fonksiyonları sürekli olduğundan p süreklidir.

$U = \{(x, y) \in S^1 | x > 0\} \subset S^1$ olsun. Sonra $p^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R} | \cos 2\pi x > 0\}$ olacağından $V_n = (n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4})$, $n \in \mathbb{Z}$ şeklindeki aralıkların birleşimi $p^{-1}(U)$ 'yu oluşturur. Bu aralıkların kesişimi de boş küme olduğu açıktır.

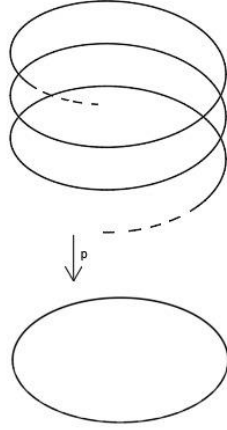


Şekil 3. 1 Örtü fonksiyonu ([1])

p 'nin \bar{V}_n 'ye kısıtlaması olan $p|_{\bar{V}_n}$ birebirdir. Çünkü $\sin 2\pi x$ bu aralıkta monotondur.

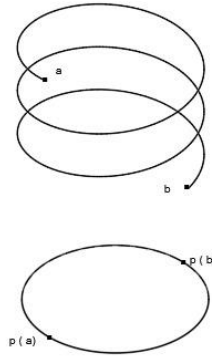
$p|_{\bar{V}_n}: \bar{V}_n \rightarrow \bar{U}$ örtendir. Ayrıca ortalama değer teoreminden $p|_{V_n}: V_n \rightarrow U$ da örtendir. \bar{V}_n kompakt olduğundan $p|_{\bar{V}_n}$ homeomorfizmadır. Öyleyse $p|_{V_n}$ homeomorfizmadır.

Örnek 3.1.2 E sonsuz spiral ve $p: E \rightarrow S^1$ izdüşüm fonksiyonu olsun. Spiral üzerindeki her nokta çember üzerinde bir noktaya karşılık gelir [15].



Şekil 3. 2 S^1 'in örtü uzayı olarak sonsuz spiral

Yukarıdaki şekle bakıldığında S^1 'in örtü uzayının E olduğu kolayca görülür. Spiraliniz sonlu ya da sınırlı olsaydı aşağıdaki şekilde de görüldüğü üzere E artık S^1 'in örtü uzayı olmazdı. Çünkü $p(x_1) \in U$ açık komşuluğu ve $x_1 \in V_\alpha$ için $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizma değil bir gömmedir.



Şekil 3. 3 S^1 'in örtü uzayı olmayan sınırlı spiral

Şimdi de ispatını [1] den aldığımız aşağıdaki önermeyi verelim:

Önerme 3.1.1 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu açık fonksiyondur.

İspat: $A \subset E$ açık alt küme olsun.

$x \in p(A)$ olacak şekilde $x \in U$ açık kümesini seçelim, bu küme p ile muntazam örtülmüş olsun.

$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, $V_\alpha \subset E$ açık alt küme ve V_α 'lar ayrık olsun. $p(y) = x$ olacak şekilde $y \in A$ noktasını alalım. Sonra bir $y \in V_\beta$ alalım. $V_\beta \cap A \subset E$ 'de ve dolayısıyla V_β 'da açıktır. Çünkü; $p|_{V_\beta}: V_\beta \rightarrow U$ homeomorfiktir, $p(V_\beta \cap A) \subset U$ 'da ve dolayısıyla B 'de açıktır. Bu nedenle $p(A)$ 'da x 'in bir komşuluğudur.

$p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu lokal homeomorfizmadır. Fakat p 'nin lokal homeomorfizma olması p 'nin örtü fonksiyonu olduğu anlamına gelmez.

Örnek 3.1.4 $p: \mathbb{R}_+ \rightarrow S^1$, $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ örten fonksiyonu lokal homeomorfizmadır fakat örtü fonksiyonu değildir. Çünkü; $b_0 = (1,0)$ noktasının p ile muntazam örtülmüş U komşuluğu yoktur. $V_n = \left(n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ şeklindeki aralıkların birleşimi $p^{-1}(U)$ 'yu oluşturur ve $\forall n$ için $p|_{V_n}: V_n \rightarrow U$ bir homeomorfizmadır. Ancak p 'nin $n = 0$ için $V_0 = (0, \epsilon)$ kısıtlaması $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ bir homeomorfizma değil bir gömmedir. Dolayısıyla p örtü fonksiyonu değildir [1].

Teorem 3.1.1 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu olsun. Eğer $B_0 \subset B$ alt uzay ve $E_0 = p^{-1}(B_0)$ ise $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ bir örtü fonksiyonudur [1].

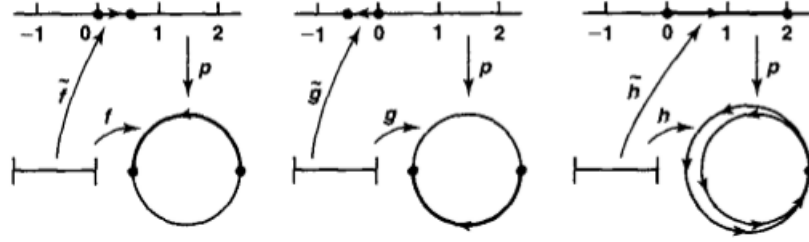
İspat: Bir $b_0 \in B_0$ noktası alalım. Sonra bir $U \subset B$ açık alt kümesini seçelim. U p tarafından muntazam örtülmüştür. Öyleyse $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, $V_\alpha \subset E$ açık alt küme ve V_α 'lar ayrıktır ve $\forall \alpha$ için $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ bir homeomorfizmadır. $b_0 \in U \cap B_0$ B_0 da açık, her $V_\alpha \cap E_0$ da E_0 da açıktır. Dolayısıyla, $p^{-1}(U \cap B_0) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha \cap E_0$, $V_\alpha \cap E_0 \subset E_0$ açık alt küme ve $V_\alpha \cap E_0$ 'lar ayrıktır ve $\forall \alpha$ için $p|_{V_\alpha \cap E_0}: V_\alpha \cap E_0 \rightarrow U \cap B_0$ bir homeomorfizmadır. $p_0: E_0 \rightarrow B_0$ bir örtü fonksiyonudur.

3.2 Yol ve Homotopi Kaldırma (Lifting) Özelliği

Tanım 3.2.1 $p: E \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f: X \rightarrow B$ sürekli fonksiyon ise $p \circ \tilde{f} = f$ olacak şekilde $\tilde{f}: X \rightarrow E$ sürekli fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona f 'nin kaldırması² denir [1].

² İngilizce kaynaklarda lifting olarak geçmektedir.

Örnek 3.2.1 $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ fonksiyonunun örtü fonksiyonu olduğunu göstermiştik. Şimdi $(0,1)$ noktasında başlayan $f: [0,1] \rightarrow S^1$, $f(s) = (\cos \pi s, \sin \pi s)$, yolunun kaldırması 0 'da başlayan $\frac{1}{2}$ 'de biten $\tilde{f}(s) = \frac{s}{2}$ yoludur. Benzer şekilde $g(s) = (\cos \pi s, -\sin \pi s)$ yolunun kaldırması 0 'da başlayan $-\frac{1}{2}$ 'de biten $\tilde{g}(s) = -\frac{s}{2}$ yoludur. $h(s) = (\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$ yolunun kaldırması 0 'da başlayan 2 'de biten $\tilde{h}(s) = 2s$ yoludur. Dikkat edilmelidir ki h fonksiyonu çemberini $[0,1]$ aralığı üzerinde iki kez dolmaktadır [1].



Şekil 3. 4 Fonksiyonların kaldırmaları ([1])

Teorem 3.2.1 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu ve $p(e_0) = b_0$ olsun. b_0 da başlayan herhangi $f: [0,1] \rightarrow B$ fonksiyonu, E 'de e_0 'da başlayan bir tek \tilde{f} kaldırmasına sahiptir [1].

İspat: $U \subset B$, p tarafından muntazam örtülmüş açık alt kümelerinin birleşimi B 'yi örtsün.

$[0,1]$ aralığını alt aralıklara bölelim yani $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < 1$ olsun. $\forall i$ için $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U$ olur. Şimdi de \tilde{f} fonksiyonunu adım adım oluşturalım. İlk olarak $\tilde{f}(0) = e_0$ olsun. Sonra $[s_i, s_{i+1}]$ üzerinde $\tilde{f}(s)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $f([s_i, s_{i+1}]) \subset U$ olacak şekilde bazı U açık kümeleri vardır. $\{V_\alpha\}, p^{-1}(U)$ 'nun ayrık parçası ve $\forall \alpha$ için $p|_{V_\alpha}: V_\alpha \rightarrow U$ homeomorfizma olsun. $\tilde{f}(s_i)$ bu kümelerin birinin içindedir. Bu küme V_0 olsun. $p|_{V_0}: V_0 \rightarrow U$ homeomorfizma ve \tilde{f} fonksiyonu $[s_i, s_{i+1}]$ üzerinde sürekli olduğundan $\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$ sağlanır. Öyleyse yapıştırma lemmasından $\tilde{f}(s)$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir.

Şimdi de, $\tilde{f}(s)$ 'in tekliğini adım adım gösterelim. f fonksiyonunun bir diğer kaldırması e_0 'da başlayan $\tilde{\tilde{f}}$ fonksiyonu olsun. Sonra $\tilde{\tilde{f}}(0) = e_0 = \tilde{f}(0)$.

Her $s \in [0, s_i]$ için $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)$ olduğunu varsayalım. Daha sonra $\forall s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) = (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$.

\tilde{f}, f fonksiyonunun bir kaldırması olduğundan $[s_i, s_{i+1}]$ aralığını

$p^{-1}(U) = \cup V_\alpha$ kümesine taşır. $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ bağlantılı olduğundan ve V_α 'lar açık ve ayrık kümeler olduğundan $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}])$ bir tane V_α içindedir. $\tilde{f}(s_i) = \tilde{f}(s_i) \in V_0$ olduğundan $\tilde{f}([s_i, s_{i+1}]) \subset V_0$ olur. $\forall s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s), (p|_{V_0})^{-1}(f(s))$ 'ın V_0 'ın bir y noktasına eşit olur. Ama sadece bir tane y noktası vardır yani $(p|_{V_0})^{-1}(f(s))$. Bu yüzden $\forall s \in [s_i, s_{i+1}]$ için $\tilde{f}(s) = \tilde{f}(s)$.

Teorem 3.2.2 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu ve $p(e_0) = b_0$ olsun. $F(0,0) = b_0$ olacak şekilde $F: I \times I \rightarrow B$ sürekli fonksiyon olsun. F fonksiyonunun $\tilde{F}(0,0) = e_0$ olacak şekilde bir tek $\tilde{F}: I \times I \rightarrow E$ kaldırması vardır. F yol homotopi ise \tilde{F} yol homotopidir [1].

Teorem 3.2.3 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu ve $p(e_0) = b_0$ olsun. f ve g B 'de b_0 'dan b_1 'e iki yol olsun. \tilde{f} ve \tilde{g}, f ve g 'nin sırasıyla E 'de e_0 'da başlayan kaldırmaları olsunlar. f ve g yol homotopik ise \tilde{f} ve \tilde{g} 'nın bitiş noktaları aynıdır ve yol homotopiklerdir [1].

Tanım 3.2.2 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu, $b_0 \in B$ olsun. $p(e_0) = b_0$ olacak şekilde e_0 seçilsin. $\pi_1(B, b_0)$ 'ın bir $[f]$ elemanı verilsin ve bu elemanın kaldırması E 'de e_0 'da başlayan \tilde{f} olsun. $\phi([f])$ \tilde{f} 'nin son noktası $\tilde{f}(1)$ olarak tanımlansın. Bu taktirde,

$\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ iyi tanımlıdır. Burada ϕ p tarafından üretilen kaldırmasıdır. Bu seçimin seçilen e_0 a bağlı olduğuna dikkat edilmelidir [1].

Aşağıdaki teoremlerin ispatlarına [1] ayrıntılı olarak bakılabilir. Biz burada sadece ifadelerini vermekle yetineceğiz:

Teorem 3.2.4 $p: E \rightarrow B$ örtü fonksiyonu, $b_0 \in B$ olsun.

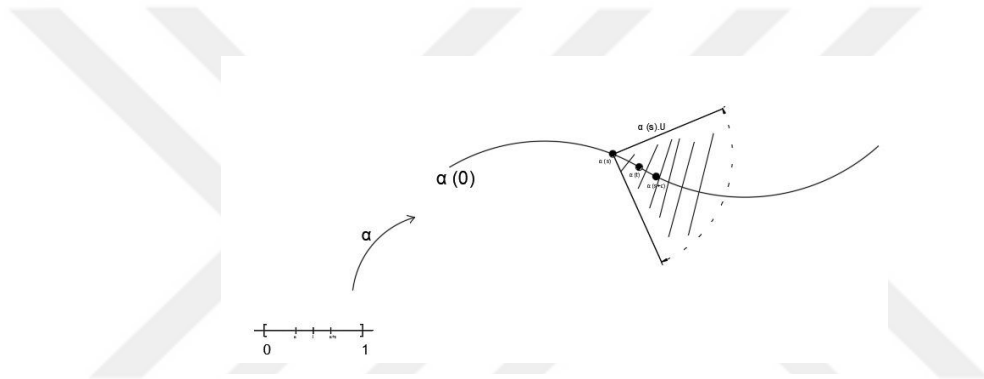
$p(e_0) = b_0$ olacak şekilde e_0 seçilsin. E yol bağlantılı ise p tarafından üretilen kaldırması, $\phi: \pi_1(B, b_0) \rightarrow p^{-1}(b_0)$ örtendir. Ayrıca E basit bağlantılı ise ϕ birebir ve örtendir [1].

Teorem 3.2.5 S^1 'in temel grubu, tam sayıların toplamsal grubuna izomorftur [1].

4.1 Monotonik Eğriler

Tanım 4.1.1 S birimi 1_S olan topolojik semigrup olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\alpha: [0,1] \rightarrow S$ yoluna monotonik yol denir [2].

1. $\alpha(0) = 1_S$
2. $1_S \in U$ komşuluğu verilsin. $\forall s, t \in [0,1]$ ve $s < t < s + \varepsilon$ için $\alpha(t) \in \alpha(s)U$ yani $\alpha(t) = \alpha(s)u$, $u \in U$, olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.



Şekil 4. 1 Monotonik yol

$\alpha: [0,1] \rightarrow S$ ve $\beta: [0,1] \rightarrow S$ iki monotonik yol olsun. İki yolun birbirine bağlanması yani $\alpha * \beta: [0,1] \rightarrow S$ yolu şu şekilde tanımlıdır:

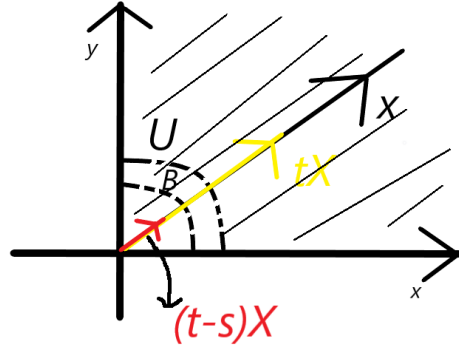
$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1)\beta(2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Tanım 4.1.2 Reel topolojik vektör uzayı L 'nin bir alt kümesi W olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa W alt kümesine bir koni denir [2].

1. $W + W \subset W$
2. $\mathbb{R}^+ \cdot W \subset W$
3. $\bar{W} = W$

Örnek 4.1.1 Toplama işlemi ile semigrup $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$ 'de $X \subset C$ birim vektör olmak üzere $\alpha(t) = tX$ yolunu alalım. C kümesinin biriminin bir U komşuluğunu ve $\varepsilon > 0$ için bir B yuvarını seçelim. Öyleyse $U \cap B \subset U$ olur.

Eğer $s, t \in [0, 1]$ ve $s < t < s + \varepsilon$ ise $\alpha(t) = \alpha(s) + (t - s)X$ 'tir. Burada $(t - s)X \subset U$ olduğu açıktır. Benzer işlemler ile orjinden çıkan ışınlar \mathbb{R}^n 'de monotonik yoldur [2].



Şekil 4.2 C 'deki monotonik yol

Örnek 4.1.2 S topolojik semigrup ve $\alpha: [0, \infty] \rightarrow S$ bir parametrelili alt semigrup olsun. Öyleyse $\alpha|_{[0,1]}$ yolu S 'de monotonik yoldur. $\alpha(0) \in U$ komşuluğu ve $0 < x < \varepsilon$ olacak şekilde seçilen $\varepsilon > 0$ için $\alpha(x) \in U$ olur. Daha sonra $s < t < s + \varepsilon$ olacak şekilde seçilen $s, t \in [0, 1]$ için $\alpha(t) = \alpha(s + t - s) = \alpha(s)\alpha(t - s)$ 'dir. Buradan, $t - s < \varepsilon$ olduğundan $\alpha(t - s) \in U$ olduğu görülür [2].

Örnek 4.1.3 I kapalı aralık, G bir grup ve $\alpha(0) = 1$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow G$ herhangi bir yol olsun. Verilen $1 \in U$ komşuluğu ve seçilen $\varepsilon > 0$ için eğer $t \in I, s < t < s + \varepsilon$ ise $\alpha(s)^{-1}\alpha(t) \in U$ 'dur. Öyleyse grup içinde alınan herhangi bir yol monotonik yoldur [2].

Teorem 4.1.1 S ve T topolojik semigruplar ve $h: S \rightarrow T$ sürekli homomorfizma olsun. α, S 'de monotonik yol ise $h(\alpha)$ da T 'de monotonik yoldur [2].

İspat: $1_T \in U$ komşuluğu verilsin. Öyleyse $1_S \in h^{-1}(U)$ komşuluğu olur. $s, t \in [0, 1]$ ve $s < t < s + \varepsilon$ için $\alpha(t) \in \alpha(s)h^{-1}(U)$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. h homomorfizma olduğundan,

$$(h \circ \alpha)(t) = (h \circ \alpha)(s)h \circ h^{-1}(u) = (h \circ \alpha)(s)u, u \in U.$$

Teorem 4.1.2 S topolojik semigrup olsun. S 'de alınan iki monotonik yolun birbiri ile bağlanması ile oluşan yol da monotonik bir yoldur [2].

İspat: α ve β S 'de iki monotonik yol ve U da S 'nin biriminin bir komşuluğu olsun. $W^2 \subset U$ olacak şekilde S 'nin biriminin bir komşuluğu olan W seçilsin. Monotonik yol tanımından sırasıyla α ve β ya karşılık $W^2 \subset U$ şartını sağlayan $\varepsilon_1 > 0$ ve $\varepsilon_2 > 0$ seçilsin. $0 \leq \varepsilon < \min\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$ olacak şekilde ε seçelim. $0 \leq s < t < s + \varepsilon$ için üç farklı durum vardır:

1. $0 \leq s < t \leq \frac{1}{2}$
 $\alpha * \beta(s) = \alpha(2s)$ ve $\alpha * \beta(t) = \alpha(2t)$. $2s < 2t < 2s + 2\varepsilon_1$ olduğundan $\alpha(2t) = \alpha(2s)w$ olacak şekilde $w \in W$ vardır. Bundan dolayı $\alpha * \beta(t) \in \alpha * \beta(s)U$ olur.
2. $\frac{1}{2} \leq s < t$
 $\alpha * \beta(t) = \alpha(1)\beta(2t - 1)$ ve $\alpha * \beta(s) = \alpha(1)\beta(2s - 1)$. $2s < 2t < 2s + \varepsilon_2$ olduğundan $2s - 1 < 2t - 1 < 2s - 1 + \varepsilon_2$ yazılabilir. Bundan dolayı $\beta(2t - 1) = \beta(2s - 1)w$ olacak şekilde $w \in W$ vardır. Son eşitliğin $\alpha(1)$ ile çarpılmasıyla $\alpha * \beta(t) = \alpha * \beta(s)w$ elde edilir yani $\alpha * \beta(t) \in \alpha * \beta(s)U$.
3. $s < \frac{1}{2} < t$
 $2s < 1 < 2t < 2s + 2\varepsilon < 1 + 2\varepsilon$ eşitsizliğinden $2s < 1 < 2s + \varepsilon_1$ eşitsizliği sağlanır. Öyleyse $\alpha(1) = \alpha(2s)w_1$ olacak şekilde $w_1 \in W$ vardır. Aynı zamanda $1 < 2t < 1 + 2\varepsilon$ olduğundan $0 < 2t - 1 < \varepsilon_2$ eşitsizliği sağlanır. Burdan da, $\beta(2t - 1) = \beta(0)w_2 = w_2$ olacak şekilde $w_2 \in W$ vardır. Sonuç olarak, $\alpha * \beta(t) = \alpha(1)\beta(2t - 1) = \alpha(2s)w_1w_2 \in \alpha(2s)W^2 \subset \alpha(2s)U$ olduğundan artık ispat tamamlanmıştır.

Tanım 4.1.3 $\alpha, \beta: [0,1] \rightarrow S$ bitiş noktaları aynı olan, $\alpha(1) = \beta(1)$, iki monotonik yol olsun. α ile β arasındaki monotonik homotopi aşağıdaki özellikleri sağlayan

$H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow S$ sürekli fonksiyonudur.

1. $H(t, 0) = \alpha(t)$, $\forall t \in [0,1]$,
2. $H(t, 1) = \beta(t)$, $\forall t \in [0,1]$,
3. $H(0, s) = 1_S$ ve $H(1, s) = \alpha(1) = \beta(1)$, $\forall s \in [0,1]$,
4. $\gamma_s(t) = H(t, s)$ yolu her $s \in [0,1]$ için monotonik yoldur.

İki yol arasında monotonik homotopi var ise bu yollar “monotonik homotopiktir” denir. Eğer H , α ve β monotonik yolları arasında monotonik homotopi ise $H: \alpha \sim \beta$ şeklinde gösteririz [2].

Buradaki yolların klasik homotopiden farklı olarak monotonik yollar olduğunu söylemeliyiz. İki homotopi arasındaki örnek ileri de verilecektir.

Teorem 4.1.3 Monotonik homotopi bağıntısı monotonik yolların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır [2].

İspat: S semigrup ve α S 'de monotonik bir yol olsun. $H: [0,1] \times [0,1] \rightarrow S$ tanımlayalım.

$H(t, s) = \alpha(t)$ için $H: \alpha \sim \alpha$ sağlanır yani bu bağıntı yansımalıdır. H 'nin α ile β arasındaki monotonik homotopi olduğunu varsayalım. Öyleyse,

$F(t, s) = H(t, 1 - s)$ β ile α arasında monotonik homotopi olur. Yani bu bağıntı simetriktir. Şimdi de $F: \alpha \sim \beta$ ve $G: \beta \sim \gamma$ olduğunu varsayalım.

$$H(t, s) = \begin{cases} F(t, 2s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(t, 2s - 1) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

olacak şekilde H , α ile γ arasındaki monotonik homotopidir. Yani bu bağıntı geçişkendir. Dolayısıyla bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.4 Monotonik yolların monotonik homotopi sınıflarının $\Gamma(S)$ kümesi üzerinde bağlama işlemi iyi tanımlıdır ve birleşme özelliğini sağlar [2].

İspat: α Monotonik yolunun monotonik homotopi sınıfı $[\alpha]$ ile tanımlayalım. $\Gamma(S)$ deki çarpımı $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$ şeklinde tanımlanır. $F: \alpha \sim \alpha'$ ve $G: \beta \sim \beta'$ ise

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1)G(2t - 1, s) & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Şeklinde tanımlanan fonksiyon $\alpha * \beta$ ile $\alpha' * \beta'$ arasında monotonik homotopidir.

Yani

$$[\alpha][\beta] = [\alpha'][\beta'] . \quad (4.4)$$

Bundan dolayı bağlama işlemi $\Gamma(S)$ üzerinde iyi tanımlıdır.

İspatın ikinci kısmında birleşme özelliğinin sağlandığını göstereceğiz. α , β ve γ monotonik yollarını göz önüne alalım.

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right) & , 0 \leq s \leq \frac{1}{4(t+1)} \\ \alpha(1)\beta(4s - t - 1) & , \frac{1}{4(t+1)} \leq s \leq \frac{1}{4(t+2)} \\ \alpha(1)\beta(1)\gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & , \frac{1}{4(t+2)} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$\Gamma(S)$ de $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ birleşme özelliği parçalı fonksiyonu ile sağlanır.

Yani $\Gamma(S)$ birimli bir semigrup yapısına sahiptir.

4.2 $\Gamma(S)$ 'in Evrensel Özelliği

Tanım 4.2.1 S semigrup, T semigrup ve Hausdorff uzayı olsun. $\sigma: S \rightarrow T$ bir fonksiyon olsun. σ fonksiyonu $1_S \in U$ dan T 'ye sürekli fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise bu fonksiyona S üzerinde lokal homomorfizm denir [2].

- 1) $a, b, ab \in U$ için $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$
- 2) σ U üzerinde sürekli fonksiyon

Aşağıdaki teoremi ayrıntılı ispatı [8] de bulunabilir. Biz burada sadece teoremin ifadesini vermekle yetineceğiz.

Teorem 4.2.1 S , topolojik grup olan ve e birimini içeren G 'nin alt semigrubu ve $e \in U \subset G$ açık kümesi olsun. $\sigma: S \cap U \rightarrow T$ lokal homomorfizma olsun. Daha sonra $\alpha([0,1]) \subset U \cap S$ özelliğini taşıyan $\alpha: [0,1] \rightarrow G$ monotonik yolu verildiğinde, $\hat{\sigma}([\alpha]) = \sigma(\alpha(1))$ özelliğini taşıyan bir tek $\hat{\sigma}: \Gamma(S) \rightarrow T$ homomorfizması vardır.

4.3 Lie Semigrup

Tanım 4.3.1 (Lie Konisi) g sonlu boyutlu bir lie cebiri olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan $W \subset g$ konisine lie konisi denir. (W, g) veya kısaca W ile gösterilir.

$$e^{adX}W = W, \forall X \in H(W) \quad (4.8)$$

Burada, $H(W) := W \cap -W$ 'dir [3].

Bir sonraki tanımları vermeden önce G sonlu boyutlu lie grubu, $L(G)$, G 'nin lie cebiri ve

$$\exp: L(G) \rightarrow G \quad (4.9)$$

üstel fonksiyondur.

Tanım 4.3.2 (Lie Semigrubu) G bağlantılı lie grubu ve

$$S = S_{L(S)} = \langle \exp L(S) \rangle \subseteq G \quad (4.10)$$

kapalı alt semigrup olsun. $W \subseteq L(G)$ konisi için

$$S_W := S_{W,G} := \langle \exp W \rangle \quad (4.11)$$

tanımlansın. Bu teğet koni W 'yi içeren en küçük kapalı alt semigruptur. Burada (S, G) çifti lie semigrubudur [3].

Aşağıdaki örnek ve peşinde gelen önerme [3] kaynağından alınmıştır.

Örnek 4.3.1 Heisenberg grubu G 'nin genel formu aşağıdaki gibidir:

$$(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

Ancak üstel işlevi kullanarak onu Lie cebiri $L(G)$ ile tanımlamak faydalı olacaktır. Bu temsilde çarpma, Campbell-Hausdorff formülüyle verilmektedir, bu örnekte şu şekildedir:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y], \forall X, Y \in L(G) \quad (4.13)$$

Yukarıdaki G grubu için onun Lie cebiri $L(G)$ aşağıdaki gibidir:

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Yukarıdaki bilgilerden aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\exp(x, y, z) = \left(x, y, z + \frac{1}{2}xy\right) \quad (4.15)$$

$$\log(a, b, c) = \left(a, b, c - \frac{1}{2}ab\right) \quad (4.16)$$

$L(G)$ 'deki bir W konisinin içi $L(G)$ 'nin merkeziyle buluşuyorsa, o zaman $\exp W$ tarafından üretilen semigrubunun G 'ye eşit olduğunu göstereceğiz.

Önerme 4.3.1 S , Heisenberg G grubunun merkez elemanları içeren bir alt semigrubu olsun. O zaman $S = G$.

İspat: $X = (1,0,0)$, $Y = (0,1,0)$, $Z = (0,0,1)$ elemanları için $\mathbb{R}Z$ G 'nin merkezi olur. $W = mX + nY$ ve $W' = nX - mY$ için $Z_0 = \lambda Z$ ve $k \in \mathbb{N}$ için;

$$U := (k(Z_0 + W)) * (k(Z_0 + W')) \quad (4.17)$$

$$= k(m + n)X + k(n - m)Y + k\left(2\lambda - \frac{1}{2}k(m^2 + n^2)\right)Z \quad (4.18)$$

S , Z_0 'ın tam bir komşusunu içeren bir semigrup ise, bu hesaplama, uygun bir m , n ve k seçimi için, U ifadesinin hem $\text{int}S$ 'de hem de XY düzleminde olduğunu gösterir. W ve W' yi Z eksenini etrafında döndürerek de $-U \in \text{int}S$ 'yi buluruz. Ama sonra $1 = U * -U \in \text{int}S$, yani $S = G$ olur.

G 'de $\mathbb{R}^2 = G/Z(G)$ 'de bir koninin ters görüntüsünü aldığımızda, G 'de birçok alt-semigrup bulduğumuzu unutmayın. Aslında, $L(G)$ 'de, kenarı $L(G)$ 'nin merkezini içeren her W konisi için bize $L(S) = W$ olan bir S semigrubu verir.

Heisenberg grubunda trivial olmayan bir grup içermeyen alt gruplar da vardır:

$$S = \{(a, b, c) \in G \mid 0 \leq a, b; 0 \leq c \leq ab\} \quad (4.19)$$

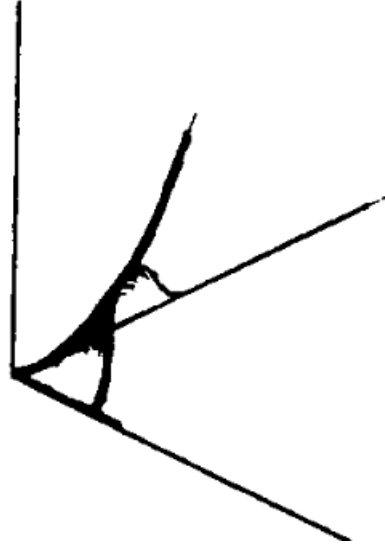
sonra

$$\log(S) = \left\{(x, y, z) \in L(G) \mid 0 \leq x, y, |z| \leq \frac{1}{2}xy\right\} \quad (4.20)$$

ve dolayısıyla

$$L(S) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in L(G) \mid \gamma = 0, 0 \leq \alpha, \beta\}. \quad (4.21)$$

G 'yi üç boyutlu bir vektör uzayıyla tanımlayarak, S 'yi, $z = xy$ yüzeyi ve xy -düzlemiyle sınırlanan birinci oktanttaki bölge olarak görselleştirebiliriz.



Şekil 4. 3 Heisenberg gagası(beak), ([3])

Bir parametrelili $\sigma(t) = \exp t. (1,0,0) = (t, 0,0)$ ve $\tau(t) = \exp t. (0,1,0) = (0, t, 0)$ S 'yi üretir. Gerçekten de $(a, b, c) \in S$ ve $b > 0$ ise $(a, b, c) = \sigma\left(\frac{c}{b}\right) \tau(b) \sigma\left(a - \frac{c}{b}\right)$.

Eğer $b = 0, c = 0$ ise $(a, b, c) = \sigma(a)$.

Teorem 4.3.1 G 'de üretilen S lie semigrubu için aşağıdaki özellikler sağlanır [3].

1. S ve $int(S)$ yol bağlantılıdır.
2. S yerel yol bağlantılıdır.
3. S yarı yerel basit bağlantılıdır.

İspat:

1. Sonuç 3.11 ([3]) 'den $int(S)$ 'nin yoğun olduğu ve yol bağlantılı semigrup $\langle \exp L(S) \rangle$ 'nin içinde olduğu sonucu ortaya çıkar. $\alpha(0) = 1$ ve $\alpha([0,1]) \subseteq int(S)$ olacak şekilde $\alpha: [0,1] \rightarrow S$ yolunu ele alalım. Şimdi de aşağıdaki şartları sağlayan $\gamma: [0,1] \rightarrow S, s \in S$ için $t \rightarrow s\alpha(t)$, yolunu tanımlayalım.

$$\gamma(0) = s \text{ ve } \gamma((0,1]) \subseteq s int(S) \subseteq int(S). \quad (4.22)$$

$\gamma(1), 1'$ in yol bileşeninde yer aldığından aynı şeyin s için de geçerli olduğu ortaya çıkar. Bu nedenle S yol bağlantılıdır.

Eğer $a, b \in int(S)$ ise $U := a \cdot S^{-1} \cap b \cdot S^{-1} \subset G$ $1'$ in komşuluğudur. Öyleyse bir

$s_0 \in \text{int}(S) \cap U$ elemanı vardır. Buradan da, $a, b \in s_0 S$ yol bağlantılı olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, a ve b , $\text{int}(S)$ içinde bir yol ile bağlanır.

2. $s \in S$ ve $U \subset G$, s 'yi içeren açık alt küme olsun. $U \cap S$ kümesinin s 'nin yol bağlantılı bir komşuluğunu içerdiğini göstermeliyiz.

$\alpha: [0,1] \rightarrow S$, $s\alpha([0,1]) \subseteq S \cap U$ koşuluyla birlikte ilk kısımdaki gibi olsun. Dolayısıyla, $s\alpha(1) \in \text{int}(S) \cap U$ olur. Buradan G 'de $Ws\alpha(1) \subseteq \text{int}(S) \cap U$ ve

$(Ws \cap S)\alpha([0,1]) \subseteq S \cap U$ olacak şekilde $1 \in W$ büzülebilir komşuluğu vardır. Şimdi de, $x, y \in V := (Ws \cap S)\alpha([0,1])$ olsun. Bu takdirde, $t_x, t_y \in [0,1]$ ve $x', y' \in Ws \cap S$ için $x = x'\alpha(t_x)$ ve $y = y'\alpha(t_y)$ olur.

V 'nin yol bağlantılı olduğunu göstermek için, V 'de x 'ten y 'ye sürekli bir yolun varlığını göstermeliyiz. Öncelikle, x ve y 'yi sırasıyla $x'\alpha(1)$ ve $y'\alpha(1)$ elemanlarına bağlayan yolları tanımlayalım:

$$\alpha_x: [t_x, 1] \rightarrow S, t \rightarrow x'\alpha(t) \quad (4.23)$$

$$\alpha_y: [t_y, 1] \rightarrow S, t \rightarrow y'\alpha(t) \quad (4.24)$$

$x'\alpha(1), y'\alpha(1) \in Ws\alpha(1)$ büzebilir ya da deforme edilebilir bir küme olduğundan, V 'de, $x'\alpha(1)$ ve $y'\alpha(1)$, V kümesinde bir yol ile bağlanabilir. Sonuç olarak, $V \subset S \cap U$ ve V , S 'de s 'nin yol bağlantılı bir komşuluğudur.

3. Her kapalı yol $\beta: [0,1] \rightarrow Ws \cap S$, S 'de sabit bir kapalı yola homotopiktir.

$$F(s, t) = \begin{cases} \beta(0)\alpha(3t) & , 0 \leq t \leq \frac{s}{3} \\ \beta\left(\frac{3t-s}{3-2s}\right)\alpha(s) & , \frac{s}{3} \leq t \leq 1 - \frac{s}{3} \\ \beta(0)\alpha(3-3t) & , 1 - \frac{s}{3} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

homotopisi için $F: [0,1] \times [0,1] \rightarrow S$ süreklidir ve $F(0, t) = \beta(t)$,

$F(s, 0) = F(s, 1) = \beta(0)$ koşullarını sağlar. Ayrıca, $\gamma: t \rightarrow F(1, t)$ ile $\alpha * \beta\alpha(1) * \hat{\alpha}$ homotopiktir ve $\beta\alpha(1)$ S 'nin büzülebilir alt kümesinde bulunur. Sonuç olarak;

$$[\beta] = [\alpha] = [\alpha * \beta\alpha(1) * \hat{\alpha}] = [\alpha * \hat{\alpha}] = 1 \quad (4.26)$$

Teorem 4.3.2 Her üreteç $S \subseteq G$ lie semigrubu için aşağıdaki özellikleri sağlayan yerel olarak kompakt topolojik monoid \hat{S} ve $p: \hat{S} \rightarrow S$ fonksiyonu vardır [3].

1. S yol bağlantılı, yerel olarak yol bağlantılıdır ve $\pi_1(\hat{S}) = \{1\}$.

2. $p: \hat{S} \rightarrow S$ bir örtü ve bir semigrup homomorfizmasıdır.
3. $int(\hat{S}) := p^{-1}(int(S))$, \hat{S} 'de yoğun bir semigrup idealidir.
4. $q: T \rightarrow S$ yol bağlantılı topolojik monoidlerin örtü homomorfizması ise $\hat{p}(1_{\hat{S}}) = 1_T$ ve $q \circ \hat{p} = p$ şartını sağlayan $\hat{p}: \hat{S} \rightarrow T$ tek örtü homomorfizması vardır.
5. $\alpha: T \rightarrow S$ yerel olarak yol bağlantılı ,bağlantılı topolojik monoidlerin sürekli bir homomorfizması ve D , $\pi_1(S) \subseteq \hat{S}$ 'nın bir alt grubu olsun. $p \circ \hat{\alpha} = \alpha$ şartıyla $\hat{\alpha}: T \rightarrow \hat{S}/D$ tek sürekli monoid homomorfizması vardır ancak $\alpha_*(\pi_1(T)) \subseteq D$.

İspat:

1. $p: \hat{S} \rightarrow S$ evrensel örtüsünün varlığı S 'nin yol bağlantılı , yerel yol bağlantılı ve yarı yerel yol bağlantılılıktan gelir.
2. \hat{S} üzerinde bir monoid yapısını tanımlamak için $\hat{1} \in p^{-1}(1)$ seçelim.

$\mu_S: S \times S \rightarrow S$, S deki çarpımı tanımlasın. Sonra $\mu_S \circ (p \times p): \hat{S} \times \hat{S} \rightarrow S$ benzersiz şekilde, $\mu_S(\hat{1}, \hat{1}) = \hat{1}$ ve $p \circ \mu_S = \mu_S \circ (p \times p)$ olacak şekilde sürekli bir $\mu_{\hat{S}}: \hat{S} \times \hat{S} \rightarrow \hat{S}$ ile kaldırılır.

\hat{S} 'nin monoid olduğunu gösterelim.

α fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlasın.

$$\alpha: \hat{S} \rightarrow \hat{S}, s \rightarrow \hat{1}s \text{ ve } p \circ \alpha = p = p \circ id_{\hat{S}}, \alpha(\hat{1}) = 1.$$

Kaldırmanın tekliğinden $\alpha = id_{\hat{S}}$. Bu yüzden $\hat{1}s = s$, $\forall s \in S$ sağlanır. $\hat{1}$ benzer şekilde sağ birimdir.

$$p \circ (\mu_{\hat{S}} \times id_{\hat{S}}) \circ \mu_{\hat{S}} = p \circ (id_{\hat{S}} \times \mu_{\hat{S}}) \circ \mu_{\hat{S}} \quad \text{ve} \quad (\hat{1} \hat{1}) \hat{1} = \hat{1} = \hat{1}(\hat{1} \hat{1})$$

olduğundan gerçektende $\hat{S} \times \hat{S} \times \hat{S}$ yol bağlantılı, yerel yol bağlantılı ve basit bağlantılıdır. Daha sonra $(\mu_{\hat{S}} \times id_{\hat{S}}) \circ \mu_{\hat{S}} = (id_{\hat{S}} \times \mu_{\hat{S}}) \circ \mu_{\hat{S}}$ olduğundan \hat{S} üzerindeki çarpma birleşmelidir. $p: \hat{S} \rightarrow S$ bir homomorfizma olması $\mu_S \circ (p \times p) = p \circ \mu_{\hat{S}}$ eşitliğinin bir sonucudur.

3. Bir idealin ters görüntüsü olarak $int(\hat{S}) := p^{-1}(int(S))$ alt kümesi bir semigrup idealidir. p yerel bir homeomorfizma ve $1 \in \overline{int(S)}$ olduğundan, $\hat{1} \in \overline{int(\hat{S})}$ 'dir. Bu yüzden $\forall s \in S$ için

$$s \in s \cdot \overline{int(\hat{S})} \subseteq \overline{int(\hat{S})} \quad (4.27)$$

4. $q \circ \hat{p} = p$ ve $\hat{p}(\hat{1}) = 1_T$ olacak şekilde, $\hat{p}: \hat{S} \rightarrow T$ sürekli fonksiyonu vardır.

Eğer T deki çarpma ile $\mu_T: T \times T \rightarrow T$ tanımlanırsa

$$\hat{p} \circ \mu_{\hat{S}}(\hat{1}, \hat{1}) = \mu_T \circ (\hat{p} \times \hat{p})(\hat{1}) \quad (4.28)$$

ve

$$q \circ \mu_T \circ (\hat{p} \times \hat{p}) = \mu_S \circ (q \times q) \circ (\hat{p} \times \hat{p}) = \mu_S \circ (p \times p) = p \circ \mu_{\hat{S}} = q \circ \hat{p} \circ \mu_{\hat{S}}$$

5. $\hat{\alpha}(1) = 1$ ile sürekli bir $\hat{\alpha}: T \rightarrow S' := \hat{S}/D$ fonksiyonu mevcut olduğunda, bunun bir monoid homomorfizma olduğunu, yani

$$\hat{\alpha} \circ \mu_T = \mu_{S'} \circ (\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}) \quad (4.29)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermemiz gerekir, burada μ_T ve $\mu_{S'}$, sırasıyla T ve S' çarpım fonksiyonlarıdır. Eğer $p': S' \rightarrow S$ örtü morfizması olmak üzere;

$$p' \circ \mu_{S'} \circ (\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}) = \mu_S \circ (p' \times p') \circ (\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}) \quad (4.30)$$

$$= \mu_S \circ (p' \circ \hat{\alpha}) \times (p' \circ \hat{\alpha}) \quad (4.31)$$

$$= \mu_S \circ (\alpha \times \alpha) \quad (4.32)$$

$$= \alpha \circ \mu_T \quad (4.33)$$

$$= p' \circ \hat{\alpha} \circ \mu_T \quad (4.34)$$

Gerçekten de,

$$\hat{\alpha} \circ \mu_T(1,1) = 1 = \mu_{S'} \circ (\hat{\alpha} \times \hat{\alpha})(1,1) \quad (4.35)$$

MONOTONİK HOMOTOPİNİN UYGULAMASI

Tezin ana gövdesinde topolojik bir semigrup olarak Lie semigrupları üzerinde ve semigrubun ikili işlemini kullanacak şekilde tanımlanan özel eğrilere (monotonik eğri) uyarlanmış bir homotopiden (monotonik homotopi) bahsettik. Aslında, klasik homotopinin belirli bir sınıfa ait fonksiyonlara ya da eğrilere özel olacak şekilde varyantları literatürde geçmektedir. Örneğin öz tasvirler³ için homotopinin ara eğrileri yine aynı familyadan (yani, yine bir öz tasvir) olacak şekilde bir homotopi (öz homotopi) den bahsedilebilir. Ya da bizi daha çok ilgilendiren Geometrik Kontrol Teori 'de parametrelenmiş adi diferansiyel denklemler ile modellenen dinamik ya da kontrol sisteminin çözüm eğrileri için modifiye edilmiş olan (ve kausal, monotonic, dinamik vs isimleri ile anılan) homotopi göz önüne alınabilir (Bknz [4]). Yine, tam kontrollenebilen sistemlerin trajektörlerinin uzayının homotopik özelliklerini konu edinen [5] deki makalede Sarychev tarafından benzer çizgide bir çalışma yapılmıştır.

Bir kontrol sisteminin çözüm eğrileri (yaygın adı ile trajektörlerinin) tezin önceki bölümlerinde tanımlanan monotonic eğri olma koşullarını sağladığı görülmektedir. Dolayısı ile, kontrol sistemlerinin trajektörlerine de monotonic homotopi tanımı benzer tarzda uyarlanabilir. [4] de tam olarak da bu yapılmıştır. Özellikle bu bölümün okuyucu tarafından anlaşılabilirliğini arttırmak adına gerekli bazı teknik tanımlar ve terminolojiden özetle de olsa bahsedelim.

M ile üzerinde bir Riemann metriği kondurulmuş sonlu boyutlu diferansiyellenebilen (C^∞) bir manifoldunu gösterelim ve başlangıç noktası olarak da $x \in M$ seçelim. M için durum uzayı tabirini kullanacağız. M üzerinde bütün diferansiyellenebilir vektör alanlarının vektör uzayını da $V = \text{Vect}^\infty(M)$ notasyonu

³ Öz tasvir İngilizce kaynaklarda proper maps şeklinde ifade edilir.

Tanım (Öz Tasvir): X ve Y iki topolojik uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon ve her kompakt $K \subset Y$ için $f^{-1}(K)$ kompakt oluyorsa f fonksiyonuna öz tasvir denir.

ile gösterelim. V 'nin sonlu boyutlu bir W alt uzayında bir Σ konveks konisi alalım. Durum uzayımız üzerinde kontrol sistemimizi de aşağıdaki gibi (adi) diferansiyel denklemlerin sınıfı olacak şekilde seçelim:

$$\frac{d\alpha}{dt} \in \Sigma(\alpha(t)). \quad (5.1)$$

Burada, W alt uzayı üzerindeki temel hipotezlerimiz şunlar olacaktır:

- (i) W üzerinde bir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç-çarpım olmalı,
- (ii) Σ geren koni olmalı (yani, $\Sigma \subset U$ olacak şekilde bir $U \subsetneq W$ öz alt uzayı olmamalı) ve
- (iii) Lie cebiri rank koşulu (kısaltma, LCRK) sağlanmalı (yani, Σ yi kapsayan en küçük Lie cebiri olan olarak tanımlanan $\mathcal{L}(\Sigma)$ her noktada $\mathcal{L}(\Sigma)(x) = T_x M$ koşulu sağlamalı).

Notasyonu daha anlaşılır kılmak için $\mathcal{L}(\Sigma)$ cebirini tarif edelim; Bu Lie cebirinin elemanları, Σ 'nin elemanları olan vektör alanları, bunların tüm lineer kombinezonları ve istenilen mertebeye kadar ardışık Lie parantezleridir.

Esas teşkil etmemekle beraber, Σ 'nin elemanları olan vektör alanları özel olarak ileri yönlü tam vektör alanları şeklinde seçilebilirler. İleri yönlüden kasıt; zaman parametresinin daima pozitif (yani zamanda geriye hareket mümkün olmayacak şekilde) alınması ve vektör alanlarının integral eğrileri olan trajektörilerinin böyle zaman parametresi için tanımlı olmasıdır.

Trajektörilerin tanım kümelerinden (domenlerinden) ise $[0, T]$ şeklinde kompakt zaman aralığını anlayacağız. Fakat, Σ 'nin koni olarak seçilmesinden ötürü aslında bütün sonlu $T > 0$ 'ler için trajektörilerin uzayları benzer olduklarından parametrizasyona gidilerek domen olarak basitçe $[0, 1]$ kapalı birim aralığı olarak da alınabilecektir.

Şimdi, $c: [0, 1] \rightarrow W$ şeklinde ölçülebilir & sınırlı fonksiyonların Banach uzayını \mathcal{B} ile gösterelim. Böyle fonksiyonlara kontrol fonksiyonları diyeceğiz. Bu uzaydaki esensiyal supremum normunu da $\|\cdot\|_\infty$ ile gösterelim. \mathcal{B} Banach uzayının bu defa imajları W de değilde tastamam Σ ye düşecek şekilde olan yukarıdaki özelliklere haiz $c: [0, 1] \rightarrow \Sigma$ fonksiyonlarının $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ konveks konisini ele alalım.

Bir $c: [0,1] \rightarrow \Sigma$ kontrol fonksiyonu ve bir $x \in M$ başlangıç noktası verilmiş olsun. Bu durumda, c ile üretilen trajektörden de aşağıdaki başlangıç değer probleminin

$$\dot{x} = c(t)(x) \quad (5.2)$$

$$x(0) = x \quad (5.3)$$

çözümü olan mutlak sürekli (dolayısı ile, sürekli) bir

$$t_x(c): [0,1] \rightarrow M \quad (5.4)$$

eğrisi anlayacağız.

Yukarıda, sistemin çözüm eğrisi (trajektörü) diye tabir ettiğimiz eğriler bunlardır. Böyle eğrilerin uzayını da $T(\Sigma, x)$ notasyonu ile gösterelim. Başlangıç noktası belirtilmeyen trajektörlerin uzayını $T(\Sigma)$, başlangıç noktası $x \in M$ ve bitiş noktası $y \in M$ olacak şekilde tüm trajektörlerin uzayını da $T(\Sigma, x, y)$ notasyonu ile gösterelim.

Diferansiyel denklem çözümlerinin parametreye olan sürekli bağımlılıklarını ifade eden standart teoremlerden her $x \in M$ için

$$t_x: C \rightarrow T(\Sigma, x) \quad (5.5)$$

tasvirinin sürekli olduğu derhal söylenebilecektir. Bu tasvirin bitiş-noktasını da

$u_x(c) = t_x(c)(1)$ şeklinde diferansiyellenebilen bir tasvir olarak göz önüne alabiliriz. Dolayısı ile, artık elimizde iyi tanımlı diferansiyellenebilen bir

$$u_x: C \rightarrow M \quad (5.6)$$

uç-nokta tasviri bulunmaktadır.

Uyarı: Uç-nokta tasviri aslında tüm \mathcal{B} uzayında tanımlı olmasına rağmen biz burada domenini sadece C almakla yetineceğiz. Çünkü, yukarıda vektör alanlarını ileri yönlü tam olacak şekilde seçeceğimizi söylemiştik. [4] de de vurgulandığı üzere, trajektörlerin uzayını doğru topoloji ile ele almalıyız ki, üzerinde bahsi edilen makalede verilen yeniliklerden burada da bahsedebilelim.

Düzgün yakınsak topoloji, kompakt-açık topoloji vs gibi doğal topolojilerdense doğru topoloji olarak trajektörlerin hız vektörlerinin sürekli varyasyonlarını işin içine katan C^1 – topolojisini alacağız. Bu topolojinin, trajektörlerin düzgün

yakınsak topolojisinden daha kuvvetli (ince) bir topoloji olduğunu burada ifade edelim.

Herhangi kontrol fonksiyonları ile çalışmak çarpıcı sonuçlar elde etmeyi güçleştireceğinden, [4] de yazarlar regüler (düzenli) kontrol fonksiyonları ile üretilen trajektörler için homotopi tanımlamışlardır. Aslında regüler kontrol özgün bir tanım olmayıp standart diferansiyel geometri kaynaklarında da rahatlıkla bulunabilecek olan diferansiyellenebilen bir fonksiyonun regüler noktası tanımından başka bir şey değildir.

Tanım 5.1 Aşağıdaki şartları sağlayan bir c kontrol fonksiyonuna $x \in M$ noktasında regülerdir denir;

(i) $c \in \text{int}(C)$

(ii) u_x uç-nokta tasvirinin $c \in C$ deki diferansiyeli

$$d(u_x)_c: T_c C \rightarrow T_{u_x(c)} M \quad (5.7)$$

örten bir fonksiyondur. Regüler bir c kontrolü ile üretilen trajektöriye de $x \in M$ de regüler trajektörü denir.

Σ 'nin W de geren koni olması hipotezinden C uzayının (supremum normuna göre B de) iç-noktalarının kümesinin boş küme olmadığı görülecektir. Bu argüman yukarıdaki tanımın (i) maddesini desteklemektedir.

Madem regüler kontrol tanımı yapıldı ve sadece bu sınıf kontrol parametrelerine odaklanacağız o zaman bu bağlamda uygun düşen yeni notasyonlar tanımlayalım: $x \in M$ noktasında regüler kontrollerin kümesini $\mathcal{RC}_\Sigma(x) \subset C$ ile, böyle kontrollerin ürettiği trajektörlerin kümesini de $R(\Sigma, x)$ ile gösterelim. Bir $\alpha \in R(\Sigma, x)$ için $\alpha(1) = y \in M$ ise böyle trajektörler için de özel olarak $R(\Sigma, x, y)$ notasyonunu kullanalım. Son olarak, Σ kontrol sisteminin $x \in M$ den hareket eden regüler trajektörleri vasıtası ile elde edilen ya da ulaşılan bütün noktaların kümesini de $E_R(\Sigma, x)$ sembolü ile gösterelim. Kontrol literatüründe bu kümeye, Σ sisteminin $x \in M$ noktasından itibaren erişilebilirlik kümesi denir.

Standart homotopi teori kullanılarak sonlu boyutlu bir manifoldun basit bağlantılı örtü uzayının nasıl elde edileceği bilinmektedir (Bknz. [1]). Kabaca, $\alpha(0) = x_0$ olacak şekilde $\alpha: [0,1] \rightarrow M$ yollarının bitiş noktalarını sabit kılacak şekilde (klasik)

homotopi denklik sınıflarının kümesini \tilde{M} ile gösterecek olursak, aşağıdaki gibi tanımlı olan tasvirin bir örtü tasviri olduğu bilinmektedir:

$$q: \tilde{M} \rightarrow M, \quad q([\alpha]) = \alpha(1). \quad (5.8)$$

Burada, \tilde{M} uzayı n -boyutlu basit bağlantılı bir manifold olduğundan M 'ye lokal olarak difeomorfik olacaktır. Yukarıda da bahsettiğimiz üzere, şimdi de regüler kontroller ile üretilen regüler trajektörlere mahsus bir homotopiyi [4] deki gibi tanımlayalım:

Tanım 5.2 $x, y \in M$ için $\alpha, \beta \in R(\Sigma, x, y)$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $h_0 = \alpha$ ve $h_1 = \beta$ olacak şekilde

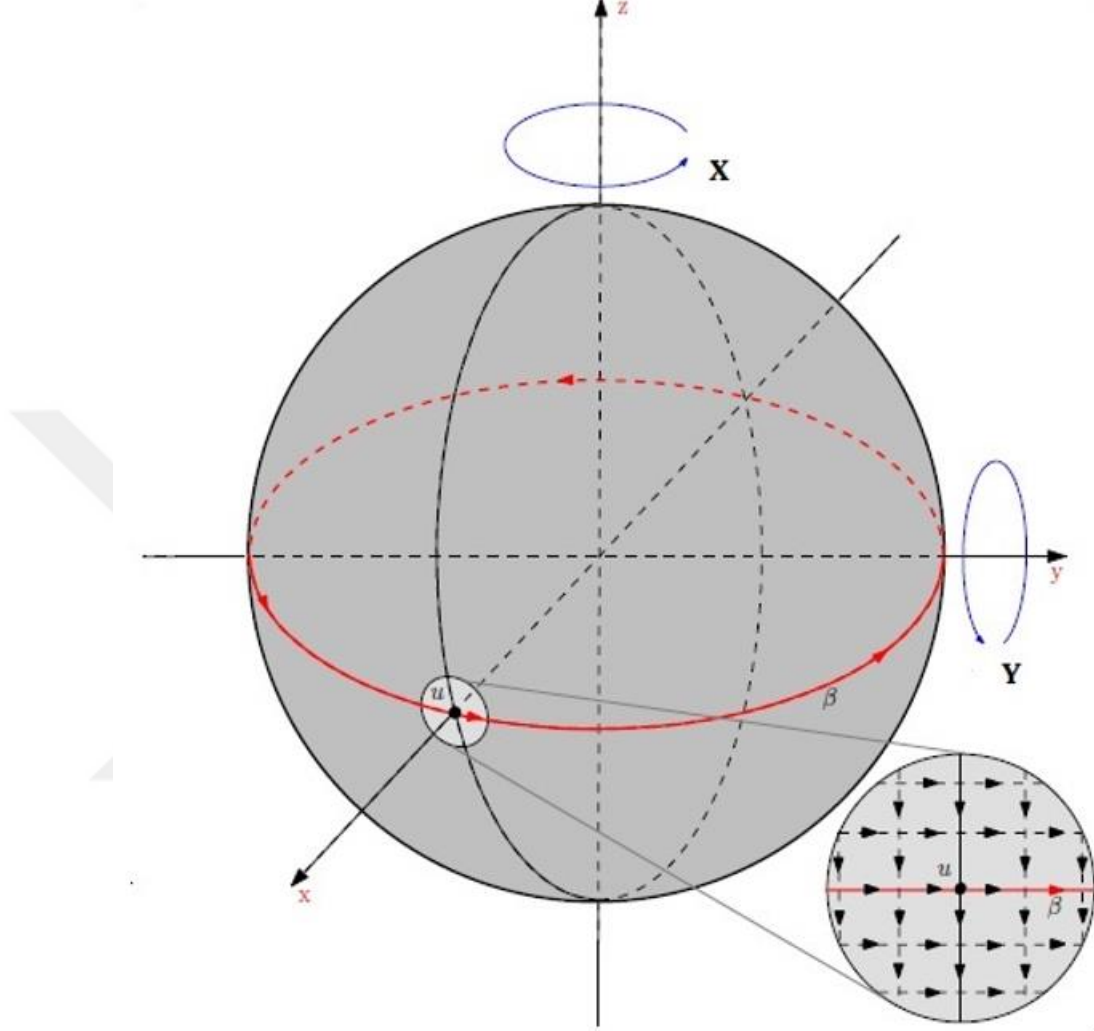
$$h_t: [0,1] \rightarrow R(\Sigma, x, y) \quad (5.9)$$

sürekli fonksiyonu varsa α ve β monotonik homotopikdirler denir ve $\alpha \simeq_m \beta$ olarak yazılır.

Trajektöriler pek tabiki adi anlamda yollar olarak düşünülebilirler. Bu durumda bunların klasik yol homotopisi ile yukarıdaki tanımda olduğu gibi verilen monotonik homotopisi farklılık arzedecektir. Monotonik homotopinin ara eğrileri de trajektöri olmak zorunda olduğundan klasik homotopiden tam da bu noktada ayrılmaktadır. Yani, adi yol olarak bakılan iki trajektöri yol homotopik oldukları halde monotonik homotopik olmak zorunda değildirler. Bunu somut şekilde gösteren aşağıdaki örnek A. Agrachev' e ait olup [6-7] deki makalelerde bahsi edilmiştir. Biz de burada aynı örneği vereceğiz.

Örnek 5.1 $M = S^2$ olsun. İki farklı koordinat eksenini etrafında sadece tek yönde rotasyon ile tanımlanan X ve Y vektör alanları ile gerilen bir Σ konisi alalım. Küreyi herhangi bir noktasından hareketle örtebileceğimiz ve Σ için LCRK sağladığı açıktır. Başlangıç noktası olarak $x_0 = (1,0,0) \in S^2$ ve bu nokta tabanlı β kapalı eğrisi olarak da ekvatoru seçelim. Küre basit bağlantılı olduğundan adi bir yol olarak bu β bir noktaya deforme edilebilir. Oysa β monotonik anlamda yani tüm kapalı ara eğriler de trajektöri olacak şekilde aynı noktaya deforme edilemez. Gerçekten de iddianın aksine β taban noktasına büzülebilseydi bu defa ilgili deformasyonu veren kapalı eğrilerden oluşan bir trajektöri familyasına sahip olmamız icap ederdi. Oysa, $E(\Sigma, x_0)$ erişilebilirlik kümesi konik bir kesite sahip olur söz konusu trajektöriler

açık eğri olduklarından kapalı eğri formasyonuna sahip olmaları mümkün değildir.
(Bknz Şekil 11, [5])



Şekil 5. 1 Homotopi ⇒ monotonik homotopi

Yukarıdaki örnek bize aynı zamanda S^2 nin topolojik örtüsü ile monotonik örtüsünün farklı olduklarını da söylemektedir. Monotonik örtü uzayından doğal olarak S^2 üzerinde verilen Σ kontrol sisteminin monotonik homotopik trajektörlerinin denklik sınıflarının bölüm uzayını anlıyoruz. Öte yandan, S^2 nin topolojik ya da klasik evrensel örtüsünün kendisi olduğu açık iken monotonik örtüsünün ne olduğu hala bilinmemektedir. Tüm bildiğimiz monotonik örtü uzayının da 2-boyutlu bir diferansiyellenebilen manifold olduğu fakat bunun da S^2 olmadığıdır.

- [1] J. R. Munkres, Topology, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle, NJ, 2000.
- [2] G. Gonz'alez , Locally Generated Semigroups, Divulgaciones Matem'aticas v. 4, No. 1/2 (1996), 5–20.
- [3] J. Hilgert and K. H. Neeb, "Lie Semigroups and their Applications," in Lecture Notes in Math. 1552, Springer-Verlag, 1993.
- [4] F. Colonius, E. Kizil and L.A.B. San Martin, Covering space for monotonic homotopy of trajectories of control systems. Journal of Differential Equations 216 (2005), 324-353.
- [5] A. Sarychev, On homotopy properties of the space of trajectories of a completely nonholonomic differential system. Soviet Math Dokl. 4 (1991), 674-678.
- [6] M.G.Oliveira, E Kizil and P. J. Catuogno, Monotonic homotopy of trajectories of Young systems. Journal of Differential Equations 19 (2013), 405-420.
- [7] E. Kizil, Universal covering of driftless control systems. Journal of Differential Equations 14 (2008), 453–464.
- [8] J. D. Lawson, Free Semigroup Constructions. Monatshefte für Math. 121 (1996), 309-333.
- [9] "Semi Locally Simply Connected", [Online], Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-locally_simply_connected, (25.12.2021).
- [10] "Local Homeomorphism", [Online], Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Local_homeomorphism#Formal_definition , (10.05.2021).
- [11] "Compact Open Topology", [Online], Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Compact-open_topology, (07.02.2022).
- [12] S. YÜCE-Matematik Bölümü. (2015, Bahar). MAT3152. İstanbul, Türkiye: Yıldız Teknik Üniversitesi.
- [13] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Springer, NY, 2012.

[14] "Lie Algebra", [Online], Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Lie_algebra, (25.07.2021).

[15] F. H. Croom, Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag, NY, 1978.



Konferans Bildirisi

S.Yazar, E.Kızıl, "Monotonic Homotopy and Its Application", 5th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications, İstanbul, 11-14 Mayıs, 2022.

