DÜZLEMİN AFİN DÖNÜŞÜMLERİ VE PSEUDO-AFİN DÖNÜŞÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülbahar KAYNAK

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜZLEMİN AFİN DÖNÜŞÜMLERİ VE PSEUDO-AFİN DÖNÜŞÜMLER

Gülbahar KAYNAK

Danışman
Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Gülbahar KAYNAK tarafından hazırlanan "Düzlemin Afin dönüşümleri ve Pseudo Afin Dönüşümler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca …/…/… tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği/oy çokluğu** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Başkan **:** Prof. Dr. Nesip AKTAN
Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fak.

Üye **:** Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edeb. Fak.

Üye **:** Prof. Dr. Muhittin BAŞER
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edeb. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

22 / 07 / 2022

Gülbahar KAYNAK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜZLEMİN AFİN DÖNÜŞÜMLERİ VE
PSEUDO-AFİN DÖNÜŞÜMLER

Gülbahar KAYNAK
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ise çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde afin dönüşümler, afin dönüşümlerle ilgili temel sonuçlar, Fermat-Torricelli noktaları ve afin dönüşümlerle olan ilişkisi, sabit noktalı afin dönüşümler ve $\mathbb{R}^n$'de sabit noktaları olmayan afin dönüşümlerin invaryant doğruları verilmiştir. Dördüncü bölümde pseudo-afin dönüşümler, üçgen yansımalar ve g-üçgen yansımalar verilmiştir. Beşinci bölümde üst düzlemde doğrudan-doğruya olan dönüşümün yeni bir karakterizasyonu ele alınmıştır.

2022, vi + 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: Afin dönüşümler, Fermat-Torricelli noktaları, Sabit noktalı afin dönüşümler, Pseudo-afine dönüşümler, Üçgen yansımalar ve g- Üçgen yansımalar.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

AFFINE TRANSFORMATIONS OF THE PLANE AND
PSEUDO-AFINE TRANSFORMATIONS

Gülbahar KAYNAK
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Oğuzhan DEMİREL

This thesis consists of five chapters. First part is introductory part. Essential basic concepts are reminded in the second part. Affine transformations, main results on affine transformations, Fermat-Torricelli points and the relationship with affine transformations, fixed point affine transformations invariant straight lines of some affine transformation in $\mathbb{R}^n$ without fixed points are given in the third part. Pseudo-affine transformations, triangle-reflections and g-triangle-reflections are given in the fourth part. A new characterization of line-to-line maps in the upper plane is considered in the fifth part.

2022, vi + 47 pages

Keywords: Affine transformation, Fermat-Torricelli points, Fixed point affine transformations, Pseudo-affine transformations, Triangle-reflections and g-Triangle reflections.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın her aşamasında araştırmalarımı yönlendiren, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan danışman hocam Prof. Dr. Oğuzhan DEMİREL‘e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

Gülbahar KAYNAK
Afyonkarahisar 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$'nin kendisiyle n kez kartezyen çarpımı
$\mathbb{H}$	Hiperbolik Düzlem
$\angle(x,y)$	n-boyutlu Öklid uzayında *x* ve *y* arasındaki açı
$\vert\ \vert$	Modül
$\triangle_{ABC}$	ABC üçgeni tarafından sınırlanan üçgensel bölge
I	Birim dönüşüm
ImT	T dönüşümünün görüntü kümesi
$KerT$	T dönüşümünün çekirdeği
$\oplus$	Doğrudan toplam
X^o	X kümesinin içi
$B(X,\epsilon)$	X merkezli ϵ yarıçaplı açık yuvar
$C(X,\epsilon)$	X merkezli ϵ yarıçaplı çember

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Dönüşümler geometride çok önemli bir yere sahiptir. Ünlü Alman matematikçi Felix Klein geometrini tanımını dönüşümler yardımıyla vermiştir. Felix Klein'e göre geometri; S bir küme ve G ise S'yi kendisine dönüştüren dönüşümlerin oluşturduğu grup olmak üzere S kümesinin G'nin elemanları altında değişmez kalan özelliklerinin incelenmesidir. Bu tanım açıkça geometriyi cebirsel bir yapı olan dönüşümler grubuyla birlikte ele almaktadır. Bazı matematikçiler tarafından bu tanımın geometrinin genel bir tanımından ziyade bir kümenin geometrisinin tanımı olabileceğine dair eleştiriler gelse de bu durum geometri ile dönüşümler arasındaki bağlantının varlığını değiştirmez.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ bir reel tersinir matris, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ve $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(x) = Ax + b$$

kuralıyla verilen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne bir afin dönüşüm denir. Afin dönüşümler Öklid geometrisindeki rigid (katı) hareketlerle bazı benzer özelliklere sahiptir. Katı hareketler öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri olmak üzere tüm bu dönüşümler uzaklıkları, alanları ve açıların büyüklüklerini korurken (simetri dönüşümü açının yönünü değiştirir), afin dönüşümler altında uzaklıklar, alanlar ve açılar korunmayabilir. Dolayısıyla bir afin dönüşüm ne bir izometri, ne de bir conform dönüşüm olmak zorunda değildir. Katı hareketlerin tümü birer afin dönüşümdür. Afin dönüşümler doğruların ve hiperdüzlemlerin, üçgenlerin, paralelkenarların, doğru parçalarının, n-kenarlı çokgenlerin, paralelliğin, aynı (paralel) doğru üstündeki doğru parçalarının uzunluklarının oranlarının ve üçgenlerin alanlarının oranlarının korunduğu özel dönüşümlerdir ve bu dönüşümler birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bu dönüşümler doğrular, hiperdüzlemler, üçgenler gibi birçok geometrik objeler yardımıyla karakterize edilmiştir. Örneğin $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir-örten bir fonksiyon olmak üzere paralel doğruların görüntüleri paralel ise f bir afin dönüşümdür, (Artin 1957). Ayrıca J. Jeffers, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir-örten bir fonksiyon olmak üzere f doğruları koruyorsa f'nin bir afin dönüşüm olduğunu göstermiştir, (Jeffers 2000). Bu sonuçlarda Chubarev ve Pinelis birebirlik koşulunu kaldırılıp, "f'nin doğruları koruma" özelliği yerine "f'nin doğrudan doğruya" olma özelliğini kullanarak, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ örten ve doğrudan-doğruya olması durumunda f'nin bir afin dönüşüm olduğu sonucunu elde ettiler, (Chubarev ve Pinelis 1999)**.** Daha sonra Li ve Wang, doğruları koruyan bir $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşulun f'nin dejenere olmaması gerektiği sonucunu elde ettiler, (Li ve Wang 2005). Literatürde afin dönüşümlerin karakteristiklerinden farklı olarak afin dönüşümlerin çeşitli cebirsel özellikleri de birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Z. Kovacs afin dönüşümlerin sabit bıraktığı noktaları (Kovacs, 2016), E. Kasparek ise afin dönüşümlerin sabit bıraktığı doğruları incelemiştir, (Kasparek, 2010). O. Demirel ise düzlemde Fermat-Torriçelli noktalarını koruyan dönüşümleri incelerken, bu dönüşümlerin birer afin dönüşüm olduğunu kanıtlamıştır, (Demirel 2021). Li ve Wang, $\mathbb{R}^2$ Öklid düzlemindeki bir D bölgesi için, $f^2 = I$ özelliğinde doğrudan-doğruya bir $f: D \to D$ dönüşümünü eğer $\mathbb{R}^2$ deki bir afin dönüşümün kısıtlanmışı değilse bu dönüşüme pseudo afin dönüşüm adını verdiler (Li ve Wang, 2010) ve bu dönüşümlerin birçok özelliğini üçgen yansımalar yardımıyla ele aldılar. Bu tez çalışmasında, verilen kaynaklar çerçevesinde afin dönüşümler ve pseudo-afin dönüşümler detaylı bir biçimde ele alınacak olup, bu dönüşümlerin çeşitli özelliklerinden bahsedilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 V boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olsun. Aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa V kümesi $\mathcal{F}$ cismi üstünde bir vektör uzayı denir.

$(V1)$ V kümesi üzerinde tanımlanan "+" işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $\forall\, u, v \in V$ için $u + v$ tanımlıdır ve $u + v \in V$ dir. Yani, V kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.
2. $\forall\, u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$ dir. Yani, V kümesinde toplama işleminin birleşme özelliği vardır.
3. $[\exists\, 0 \in V, (\forall\, u \in V$ için $u + 0 = u$ ve $0 + u = u)]$ dir. Yani, V kümesinde toplama işleminin etkisiz (birim) elemanı vardır ve 0 ile gösterilir.
4. $\forall\, u \in V$ için V kümesinde $-u$ ile gösterilen ve

$$u + (-u) = 0 \text{ ve } (-u) + u = 0$$

eşitliklerini sağlayan bir $-u$ elemanı vardır. Yani, V kümesindeki her bir u elemanının toplamaya göre tersi vardır. u elemanının tersi $-u$ ile gösterilir.

5. $\forall\, u, v \in V$ için $u + v = v + u$ dur. Yani, V kümesinde toplama işleminin değişme

özelliği vardır.

$(V2)$ $\mathcal{F} \times V \to V$, $(a, u) \to au$ biçiminde, adına skalarla çarpma işlemi denilen fonksiyon aşağıdaki önermeleri doğrular:

1. $\forall\, a \in \mathcal{F}, \forall\, u, v \in V$ için $a(u + v) = au + av$.
2. $\forall\, a, b \in \mathcal{F}, \forall\, u \in V$ için $(a + b)u = au + bu$.
3. $\forall\, a, b \in \mathcal{F}, \forall\, u \in V$ için $(ab)u = a(bu)$.
4. $\mathcal{F}$'nın çarpmaya göre birim elemanı 1 olduğuna göre V'nin her bir elemanı için

$$1u = u$$

dur.

Tanım 2.2 $A \neq \emptyset$ bir küme ve V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\psi : A \times A \to V$$

dönüşümü $\psi(p,q)=\overrightarrow{pq}$ olmak üzere aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A kümesine V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

1. $\forall\, p,q,r \in A$ için $\overrightarrow{pr}=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}$ biçiminde yazılabilir.
2. $\forall\, p \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $\overrightarrow{pq}=\alpha$ olacak biçimde bir tek $q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.3 A, $n \times n$ tipinde tersinir bir matris ve b ise $\mathbb{R}^n$ uzayında bir vektör olmak üzere $f(\mathrm{x}) = Ax + b$ biçiminde verilen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne bir afin dönüşüm denir.

$a \in \mathbb{R}^n$ ve $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ birebir örten bir lineer dönüşüm olsun. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü $f(x)=g(x)+a$ formunda ise f bir afin dönüşümdür.

Tanım 2.4 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$P \mapsto f(P) = P + u$$

kuralıyla verilen fonksiyona $\mathbb{R}^n$ uzayında öteleme vektörü u vektörü olan bir öteleme fonksiyonu denir

Tanım 2.5 $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ve $W=(w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. $P=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ verildiğinde, P noktasını, $|WP'|=|WP|$ ve PWP' açısının ölçüsü θ olacak biçimdeki P' noktasına dönüştüren $f_\theta(p_1,p_2)=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1-w_1 \\ p_2-w_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan $f_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonuna, düzlemde, W noktası çevresindeki θ radyanlık dönme fonksiyonu denir.

Tanım 2.6 $f(P)=2H-P$ kuralıyla verilen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonuna H noktasına göre simetri fonksiyonu denir.

Tanım 2.7 Düzlemdeki bir A noktasının bir l doğrusuna göre simetriği öyle bir A' noktasıdır ki;

1. AA' doğru parçası l doğrusuna diktir.
2. l doğrusu AA' doğru parçasının orta noktasından geçer.

A noktasının l doğrusuna göre simetriği A' ise, "A ve A' noktaları l doğrusuna göre simetriktir." denir.

Tanım 2.8 $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n boyutlu bir afin uzay A olsun. A ile birleşen n boyutlu vektör uzayı V olmak üzere

$$I : V \to V$$

özdeşlik dönüşümü ile $c \in \mathcal{F}$ $(c \neq 0)$, skalarının çarpımı olan $cI : V \to V$ dönüşümüne A da karşılık gelen merkezil afin dönüşüm bir merkezil otomorfizmdir. Bu dönüşümün ifadesi ; $\begin{bmatrix} cI_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_{n+1}^{n+1}$ matris grubu ile $X \in \mathcal{F}_1^n$ olmak üzere

$$X' = cX$$

olur. Bu dönüşüm de A da merkezil bir dönüşüm olup radyal dönüşüm (dilatasyon) adını alır.

Tanım 2.9 z düzleminin bir bölgesindeki bütün noktalarda bir $f(z)$ fonksiyonu analitik ve türevi sıfırdan farklı ise bu fonksiyon yardımıyla yapılan dönüşüme konform dönüşüm denir. Yani, türevi sıfır olmayan analitik fonksiyonlarla gerçekleştirilen dönüşümdür.

Tanım 2.10 X ve Y, $\mathbb{R}$ üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere $\forall\, u, v \in X$ ve $\forall\, c \in \mathbb{R}$ için;

$$T: X \to Y$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağladığında T dönüşümüne lineer dönüşüm denir.

1. $\forall\, u, v \in X$ için $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $\forall\, u \in X$ için $T(cu) = cT(u)$ $(\forall\, c \in \mathbb{R})$

Tanım 2.11 $\omega : X \to X$ lineer dönüşümü $\forall\, x, y \in X$ için $\langle w(x), w(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ koşulunu sağlıyorsa ortagonaldir denir. Burada $\langle\, , \rangle$ ile iç çarpım gösterilmektedir.

Tanım 2.12 $T: V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $T^{-1}(0) = \{\alpha \in V: T(\alpha) = 0_W\} \subset V$ alt kümesine T lineer dönüşümünün çekirdeği veya T'nın sıfır uzayı denir ve $T^{-1}(0) = KerT$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.13 $T: V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $T(V) = \{T(\alpha): \alpha \in V\} \subset W$ olsun. $T(V) \subset W$ alt uzayı sonlu boyutlu ise bu uzayın boyutuna T lineer dönüşümün rankı denir ve $boyT(V) = rankT$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.14 X ve Y reel normlu vektör uzayları olsun.

$$f: X \to Y$$

dönüşümü $\forall\, x, y \in X$ için;

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

koşulunu sağlıyorsa f'ye bir izometri denir. f bir izometri ise, $f^{-1}: Y \to X$ de bir izometridir. X'den Y'ye bir izometri varsa bu uzaylara izometrik uzaylar denir.

Tanım 2.15 Bir t doğrusu ve bu t doğrusu üstünde olmayan p ve q noktaları verildiğinde t doğrusu üstündeki noktaları sabit bırakan ve p'yi q'ya resmeden bir tek afin dönüşüm vardır. Bu afin dönüşüm eksenel afin dönüşüm olarak adlandırılır ve $[t, p \to q]$ ile gösterilir.

Tanım 2.16 Alan koruyan afin dönüşümlere equiafin dönüşüm denir.

Tanım 2.17 p, q, r düzlemde aynı doğru üstünde bulunmayan üç nokta olsun. p'yi sabit bırakan ve q ile r'yi birbirine eşleyen afin dönüşüme afin yansıma denir ve $[p, q \leftrightarrow r]$ ile gösterilir. Bu afin yansıma, qr doğru parçasının orta noktası s olmak üzere ps doğrusu üstündeki tüm noktaları sabit bırakır fakat diğer noktaların hiçbirini sabit bırakmaz.

Tanım 2.18 p, q, r düzlemde aynı doğru üstünde bulunmayan üç nokta olsun. p noktasından geçen ve qr'ye paralel olan doğru üstündeki tüm noktaları sabit bırakan bir tek afin dönüşüm vardır ve bu afin dönüşüm shear dönüşümü olarak adlandırılır ve $[p; q \mapsto r]$ ile gösterilir.

3. AFİN DÖNÜŞÜMLER

3.1 Afin Dönüşümler

A tersinir bir matris ve f dönüşümünü $f(x) = Ax + b$ biçiminde ise f afin dönüşümdür.

Afin dönüşümlerle ilgili aşağıdaki sonuçlar iyi bilinmektedir.

Teorem 3.1.1 Her afin dönüşümün tersi vardır ve tersi de bir afin dönüşümdür.

İspat $f(x) = Ax + b$ afin dönüşümü verilsin. A tersinir bir matris olduğu için

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow Ax + b = y \\ &\Leftrightarrow Ax = y - b \\ &\Leftrightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}(y - b) \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}y - A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow I_2 x = A^{-1}y - A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}(y - b) \end{aligned}$$

olup böylece $f^{-1}(x) = A^{-1}(x - b)$'dir. f fonksiyonunun afin olduğu açıktır.

Sonuç 3.1.2 Afin dönüşümlerin bileşkesi afin dönüşümdür.

İspat $f(x) = Ax + b$ ve $g(x) = Bx + b$ afin dönüşümler olsun. O halde

$(gof)(x) = g(f(x)) = B(Ax + a) + b = (BA)x + (Ba + b)$ dır. A ve B tersinir matrisler olduğundan, BA'da tersinirdir ve $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$'dir.

Dolayısıyla gof bir afin dönüşümdür.

Teorem 3.1.3 A bir $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;

(1) $detA = 0$,

(2) A'nın satır vektörleri lineer bağımlıdır,

(3) A'nın sütun vektörleri lineer bağımlıdır.

Teorem 3.1.4 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ bir afin dönüşümü;

(1) doğruları doğrulara götürür,

(2) doğru parçalarını doğru parçalarına götürür,

(3) paralel doğruların görüntüleride paraleldir (yani paralellik korunur),

(4) n-kenarlı çokgenleri n-kenarlı çokgenlere dönüştürür,

(5) paralelkenarları paralelkenarlara dönüştürür,

(6) iki paralel doğru parçasının uzunlukları oranını korur,

(7) iki şeklin alanlarının oranlarını korur. (Byer vd. 2010)

Teorem 3.1.5 (Afin dönüşümlerin temel teoremi) Düzlemde doğrusal olmayan sıralı üç noktayı, doğrusal olmayan sıralı üç noktaya eşleyen tek bir afin dönüşüm vardır. (Byer vd. 2010)

İspat $\{p, q, r\}$ ile $\{p', q', r'\}$ vektör üçlüleri verilsin. Bu üçlülerin elemanlarını sırasıyla birbirine eşleyen bir afin dönüşüm şu şekilde bulunur.

$\left\{0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ vektör üçlüsünü sırasıyla,

$\left\{p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}\right\}$ vektör üçlüsüne dönüştürelim.

$A = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{bmatrix}$ ve $b = p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$.

$A0 + b = p,\ Ai + b = q\ ve\ Aj + b = r$ olduğu açıktır. A'nın sütunlarını oluşturan $q - p$ ve $r - q$ paralel olmayan vektörlerdir. Buradan, Teorem 3.1.3'ten, A'nın determinantı sıfırdan farklıdır. Böylece, A tersinirdir ve tanımdan $f(x) = Ax + b$ bir afin dönüşümdür. Benzer düşünceyle $\{0, i, j\}$ üçlüsünü $\{q', p', r'\}$ üçlüsüne eşleyen bir $g(x) = A'x + b'$ afin dönüşümü vardır. Böylece $g \circ f^{-1}$ de bir afin dönüşüm olup bu afin dönüşüm için $(g \circ f^{-1})(p) = p'$, $(g \circ f^{-1})(q) = q'$, $(g \circ f^{-1})(r) = r'$ olduğu açıktır.

Böylece doğrusal olmayan $\{p, q, r\}$ üçlüsünü doğrusal olmayan $\{q', p', r'\}$ üçlüsüne dönüştüren f afin dönüşümü vardır. Şimdi f'nin tek olduğunu gösterelim.

$$f(p) = g(p) = p',\ f(q) = g(q) = q',\ f(r) = g(r) = r'$$

olacak biçimde g afin dönüşümünün var olduğunu kabul edelim.

f'nin ve g'nin lineer kısımlarını sırasıyla df ve dg ile gösterelim.

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
d(g \circ f^{-1})(q' - p') &= dg \circ d(f^{-1})(q' - p') \\
&= dg(q - p) \\
&= g(q) - g(p) \\
&= q' - p'
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde

$$d(g \circ f^{-1})(r' - p') = r' - p'$$

olup $q - p$ ve $q - r$; $\mathbb{R}^2$'nin bir tabanı olduğundan $g \circ f^{-1} = I$ elde edilir. Yani $f = g$'dir.

Sonuç 3.1.6

(1) Herhangi iki üçgenden, birini diğerine eşleyen bir afin dönüşüm vardır.

(2) Herhangi iki paralelkenardan, birini diğerine eşleyen bir afin dönüşüm vardır. (Byer vd. 2010)

Teorem 3.1.7 Üçgendeki üç kenarortay aynı noktadan geçer. (Byer vd. 2010)

İspat Sonuç 3.1.6'dan, bir $\triangle ABC$ üçgenini $\triangle DEF$ eşkenar üçgenine dönüştüren bir f afin dönüşümü vardır. Teorem 3.1.4 (2) ile f dönüşümü $\triangle ABC$ üçgeninin herhangi bir kenarını, $\triangle DEF$'nin bir kenarına dönüştürür. $\overline{AB}$ kenarı $\overline{DE}$'ye dönüşsün. C', $\overline{AB}$'nin orta noktası olsun. Böylece $\frac{AC'}{C'B} = \frac{1}{1}$'dir. Teorem 3.1.4'ün (6) özelliği ile $f(C') = F'$, $\overline{DE}$'nin orta noktasıdır. Sonuç olarak f dönüşümü $\triangle ABC$'nin orta noktasını $\triangle DEF$'nin orta noktasına dönüştürür. Benzer şekilde $\triangle ABC$ üçgenin kenarlarının orta noktaları $\triangle DEF$ üçgeninin kenarlarının orta noktasıda dönüşür. Eşkenar üçgenleri köşelerden karşılarındaki kenarların orta noktalarına çizilen dik doğrular hem açıortay, hem kenarortay olup tek noktada kesişir. Bu durumda $\triangle ABC$ üçgeninin kenarortaylarıda bir noktada kesişir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.1.8 f bir afin dönüşüm ve P bir çokgen olsun. O zaman f ve P'nin merkezini $f(P)$'nin merkezine dönüştürür. (Byer vd. 2010)

3.2 Konikler ve Afin Dönüşümler

A, B, C, F, G, H birer reel sayı ve A, B, C sayılarının hepsi birden sıfır olmak üzere bir konik eğrisi

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0,$$

biçimindedir. Burada

$B^2 - 4AC \leq 0$ ise bu denklem bir elips yada çember gösterir.

$B^2 - 4AC = 0$ ise bu denklem bir parabol gösterir.

$B^2 - 4AC \geq 0$ ise bu denklem bir hiperbol gösterir.

Teorem 3.2.1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x) = Ax + b$ afin dönüşümü verilsin. Bu durumda f altında elipsler elipslere (ya da çemberlere), paraboller parabollere, hiperboller hiperbollere dönüşür.

İspat $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0$ denklemli dejenere olmayan konik eğrisi verilsin . (Dejenere konik eğrisi tek bir doğru, kesişen doğrular, tek bir nokta ve boş kümeden ibarettir.). (x, y) noktası bu denklemi sağlasın ve bu noktaya karşılık gelen vektör $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ile gösterilsin. Bu durumda

$f(x) = x' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Ax + k$'dir. f^{-1} dönüşümünde bir afin dönüşüm olup,

$f^{-1}(x') = A^{-1}x' - A^{-1}k$'dir. Böylece

$$x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ u \end{bmatrix}$$

Buradan $x = ax' + by' + t$ ve $y = cx' + dy' + u$ bulunur.

Bu eşitlikler verilen konik eğrisinin denkleminde kullanılırsa x' ve y' ye bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Ele alınan konik eğrisini $\mathcal{F}$ ile ve $\mathcal{F}$ eğrisinin görüntüsünü $\mathcal{F}'$ ile gösterelim. $\mathcal{F}$ konik eğrisi dejenere olmayan konik eğrisi olduğundan, $\mathcal{F}'$ de dejenere değildir.

$\mathcal{F}'$ nün denklemi;

$$A(ax' + by' + t)^2 + B(ax' + by' + t)(cx' + dy' + u) + C(cx' + dy' + u)^2$$
$$+ F(ax' + by' + t) + G(cx' + dy' + u) + H = 0$$

bu denklemin diskrimantı ise $(ad - bc)^2(B^2 - 4AC)$'dir.

Dikkat edilecek olursa $B^2 - 4AC$ sayısı $\mathcal{F}$ koniğinin diskriminantıdır. $(ad - bc)^2 > 0$ dır. Eğer $ad - bc = 0$ olsaydı A matrisi tersinir olmazdı. O halde $\mathcal{F}'$'nün diskriminantı ile $\mathcal{F}$'nin diskriminantı aynı işaretlidir. Teorem 3.1.4'ten bir afin dönüşüm bir konik eğrisinin aynı tipten başka bir konik eğrisine dönüştürür. Üçgenlerde ve paralelkenarlarda olduğu gibi elips başka bir elipse, parabol başka bir parabole, hiperbol başka bir hiperbole afin dönüşümlerle dönüştürülebilir.

Örneğin asal eksen uzunluğu $2a$ ve yedek eksen uzunluğu $2b$ olan merkezi (h, k) olan $\mathcal{E}$ elipsi seçilsin.

$b = \begin{bmatrix} -h \\ -k \end{bmatrix}$ vektörüne göre öteleme uygulanırsa $\mathcal{E}$ elipsinin görüntüsü orjin merkezli bir başka elipstir. Başlangıç noktasına göre uygun bir α dönmesiyle orjin merkezli olan elips asal ve yedek eksenleri sırasıyla x ve y ekseni olacak biçimde bir elipse dönüştürebilir. Böylece $\mathcal{E}$ elipsi özel iki afin dönüşüm yardımıyla $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemli $\mathcal{E}'$ elipsine dönüşmüş olur. Şimdi

$$f(x) = \begin{bmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/a \\ y/b \end{bmatrix}$$

biçiminde üçüncü bir afin dönüşümü ele alalım. Bu f afin dönüşümü altında $\mathcal{E}'$ elipsi birim çembere dönüşür. Böylece Teorem 3.2.1 ispatlamış oldu. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.2 Verilen bir $\mathcal{E}$ elipsini birim çembere dönüştüren bir afin dönüşüm vardır. (Byer vd. 2010)

Sonuç 3.2.3 $\mathcal{E}_1$ ve $\mathcal{E}_2$ iki elips olmak üzere $\mathcal{E}_1$ elipsini $\mathcal{E}_2$ elipsine dönüştüren bir afin dönüşüm vardır. (Byer vd. 2010)

İspat $\mathcal{E}_1$ elipsini birim çembere dönüştüren f afin dönüşümünü ve $\mathcal{E}_2$ elipsini birim çembere döndönüştüren g afin dönüşümü ele alınsın. g^{-1} dönüşümüde bir afin dönüşüm olup $g^{-1} \circ f$ dönüşümü $\mathcal{E}_1$ elipsini $\mathcal{E}_2$ elipsine dönüştüren bir afin dönüşümdür

3.3 $\mathbb{R}^n$ Uzayının Afin Dönüşümleri ve Temel Sonuçlar

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tersinir bir lineer dönüşüm olmak üzere $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = g(x) + b$ afin dönüşümü verilsin. f afin dönüşümü altında invaryant kalan bir çok geometrik özellik vardır. Örneğin, afin dönüşümler altında noktalar noktalara, doğrular doğrulara (doğru parçaları doğru parçalarına) ve düzlemler düzlemlere (hiperdüzlemler hiperdüzlemlere) dönüşür.

Literatürde, afin dönüşümlerin aşağıdaki gibi bir çok karakterizasyonu vardır:

Teorem 3.3.1 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir, örten ve doğruları koruyan bir dönüşüm olsun ve paralel doğruların görüntüsü f altında paralel olsun. Bu durumda f bir afin dönüşümdür. (Artin 1957)

Burada, tüm doğruların görüntüsü yine bir doğruysa f doğruları korur denir.

Teorem 3.3.2 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir, örten ve doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. Böylece f bir afin dönüşümdür. (Jeffers 2000)

Teorem 3.3.3 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ örten ve doğrudan-doğruya bir dönüşüm ise f afindir. (Chubarev ve Pinelis 1999)

Burada, eğer $\mathbb{R}^n$'deki her bir doğrunun görüntüsü $\mathbb{R}^n$'de bir doğru tarafından kapsanıyorsa f'ye doğrudan-doğruyadır denir.

Teorem 3.3.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ doğruları koruyan bir dönüşüm olsun. O halde f bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul f'nin dejenere olmamasıdır. Burada f'nin dejenere olmaması demek $f(\mathbb{R}^n)$ kümesinin bir doğru tarafından kapsanmaması demektir. (Li ve Wang 2005)

Teorem 3.3.5 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Böylece f'in bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul f'nin üçgenlerin alanlarıyla korumasıdır. (Li ve Wang 2009)

Teorem 3.3.6 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Böylece f bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul f'in üçgenleri korumasıdır. (Li ve Wang 2009)

3.4 Fermat-Toricelli Noktaları ve Afin Dönüşümler

Geometride, bir üçgenin Fermat-Torricelli noktası, üçgenin üç köşesine olan toplam uzaklığın minimum olduğu noktadır. ABC, $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde bir üçgen olsun. Eğer en büyük açının ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ radyan (veya daha büyük) ise, o zaman en büyük açının bulunduğu köşe noktası Fermat-Torricelli noktasıdır. Eğer en büyük açının ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$'ten küçükse, o zaman Fermat probleminin çözümü üçgenin kenarlarıyla sınırlanan üçgensel bölgenin bir iç noktasıdır. Üçgenin üç kenarı yardımıyla üç tarafında eşkenar üçgenler oluşturmak (iki tanesini çizmek yeterlidir) ve orijinal üçgenin köşelerini ve yeni oluşturulan eşkenar köşelerine birleştiren doğru parçaları çizmek, bu noktayı bulmak için izlenen bir yoldur. Bu doğru parçaları Fermat probleminin çözümü olan bir noktada buluşurlar. Eğer P, ABC için Fermat probleminin çözümü ise ve ABC üçgeni iç açıları $\frac{2\pi}{3}$'ten küçük ise, o zaman $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = \frac{2\pi}{3}$'tür. Fermat-Torricelli noktalarının bu özelliği ispatlarımızda önemli bir yol oynayacaktır.

$\triangle$, $\mathbb{R}^2$'de iç açıları $\frac{2\pi}{3}$ radyandan küçük olan tüm üçgenlerin kümesi olsun. A'nın f altındaki görüntüsünü A' ile, A ve B noktaları arasındaki doğru parçası $[AB]$ ile, A ve B noktalarından geçen doğru AB ile ve A ve B arasındaki Öklid uzaklığını $|AB|$ ile gösterilsin.

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$'nin $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruması demek, eğer P noktası ABC üçgeninin Fermat-Torricelli noktası ise P' noktasının da $A'B'C'$ üçgeninin Fermat-Torricelli noktasıdır demektir.

Lemma 3.4.1 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f birebirdir. (Demirel 2021)

İspat A ve B, $\mathbb{R}^2$'de iki farklı nokta olsun. $ABC \in \triangle$ olacak biçimde bir C noktası seçelim ve ABC üçgeninin Fermat-Torricelli noktasını P ile gösterelim. f; Fermat-Torricelli noktalarını koruduğundan P' noktası $A'B'C'$ nin Fermat-Torricelli noktasıdır. Böylece $A' \neq B'$ olup f birebirdir.

Lemma 3.4.2 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını korusun. Eğer ABC, $\angle CAB = \frac{2\pi}{3}$ olan bir üçgen ise, bu durumda $A'B'C'$ üçgeni de, $\angle C'A'B' = \frac{2\pi}{3}$ özelliğinde bir üçgendir. (Demirel 2021)

İspat g_{AB}, AB doğrusuna göre simetri fonksiyonu olsun ve g_{AB} altında C'nin görüntüsünü D olsun. CBD, $\angle DAC = \angle CAB = \angle DAB = \frac{2\pi}{3}$ özelliğinde bir ikizkenar üçgendir ve $\angle ABC = \angle ABD < \frac{\pi}{3}$, $\angle ACD = \angle ADC < \frac{2\pi}{3}$'tür. Ayrıca A, CBD üçgeninin Fermat-Torricelli noktasıdır ve $BCD \in \triangle$'dir. f, $\triangle$ içindeki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruduğu için, A', $C'B'D'$ üçgeninin Fermat-Torricelli noktasıdır. Bu nedenle, $A'B'C'$, $\angle C'A'B' = \frac{2\pi}{3}$ özelliğinde bir üçgendir.

Lemma 3.4.3 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f doğrusallığı da korur. (Demirel 2021)

İspat $\mathbb{R}^2$'de $|GD| = |GC| + |CD|$ olacak biçimde doğrusal G, C, D noktaları seçilsin. A, $\mathbb{R}^2$'de $\angle AGC < \frac{2\pi}{3}$ ve $|AG| = |GC|$ olacak şekilde bir nokta olsun. A'nın GC'ye göre simetriği B olmak üzere ABC üçgeni oluşturalım. ABC, $\triangle$'de bir eşkenar üçgendir. Lemma 3.4.2'ye göre, $\angle AGC = \angle AGB = \angle BGC = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan, $\angle A'G'C' = \angle A'G'B' = \angle B'G'C' = \frac{2\pi}{3}$'dir. Ayrıca $\angle AGD = \angle BGD = \frac{2\pi}{3}$ olduğundan, $\angle A'G'D' = \angle B'G'D' = \frac{2\pi}{3}$'dir. D' noktasının ya $G'C'$ ya da $G'B'$ üzerinde olduğu kolaylıkla görülebilir. Çünkü $A'G'$ arasındaki açının ölçüsü $\frac{2\pi}{3}$ olacak biçimde iki doğru vardır ve bunlar $G'C'$ ile $G'B'$'dir. BGD üçgeni için $\angle BGD = \frac{2\pi}{3}$ olup, Lemma 3.4.2'ye göre, $B'G'D'$ üçgeni için $\angle B'G'D' = \frac{2\pi}{3}$ olduğu görülür. Böylece D', G', B' noktaları aynı doğru üzerinde değildir ve bu, D' noktasının $G'C'$ üzerinde olması gerektiğini gösterir.

Lemma 3.4.4 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, arasındalığı korur, yani A, C, E, $\mathbb{R}^2$ de $|AE| = |AC| + |CE|$ olacak biçimde üç farklı nokta ise, $|A'E'| = |A'C'| + |C'E'|$'dir. (Demirel 2021)

İspat A, C ve E düzlemde, $|AE| = |AC| + |CE|$ özelliğinde üç farklı nokta olsun.

$|A'C'| = |A'E'| + |E'C'|$ olduğunu varsayalım. $\mathbb{R}^2$'de $|AC| = |CD|$ ve $\angle ACD = \frac{2\pi}{3}$ olacak biçimde bir D noktası seçelim. D'nin C'ye göre yansıması B olsun. Lemma 3.4.2'den $A'C'D' = \angle B'C'E' = \frac{2\pi}{3}$ olup ve Lemma 3.4.3'ten B', C', D' noktalarının doğrusal olduğu görürülür. $[B, E]$ üzerinde $\angle ACY = \frac{2\pi}{3}$ olacak biçimde Y noktası seçelim. B, Y, E doğrusal noktalar olduğundan, B', Y', E' noktalarının da Lemma 3.4.3'den doğrusal olduğu elde edilir. Ayrıca, Lemma 3.4.2'den $\angle A'C'Y' = \frac{2\pi}{3}$ olup $Y' = B'$ elde edilir ki bu f'nin birebirliği ile çelişir. Böylece $|A'E'| = |A'C'| + |C'E'|$ eşitliği sağlanmış olur.

Lemma 3.4.5 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f eşkenar üçgenleri korur. (Demirel 2021)

İspat ABC, $\mathbb{R}^2$'de bir eşkenar üçgen ve K, AC üzerinde $|CK| = |AC| + |AK|$ olacak biçimde bir nokta olsun. Lemma 3.4.2, Lemma 3.4.3 ve Lemma 3.4.4'ten, K', A', C' noktaları $\angle B'A'K' = \frac{2\pi}{3}$ ve $|C'K'| = |A'C'| + |A'K'|$ olacak biçimde doğrusal noktalardır. Aynı yol izlenerek, $\angle A'B'C' = \angle B'C'A' = \frac{\pi}{3}$ olduğu kolayca görülür. Böylece $A'B'C'$ üçgeninin bir eşkenar üçgen olduğu görülür.

Lemma 3.4.6 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f orta noktaları korur. (Demirel 2021)

İspat A ve B, $\mathbb{R}^2$'de iki farklı nokta olsun ve $[A, B]$'nin orta noktası M olsun. $A_1 = A$ ve $A_4 = B$ olmak üzere, merkezi M olan $A_1 \ldots A_6$ düzgün altıgenini oluşturalım. Lemma 3.4.5'ten f eşkenar üçgenleri koruduğu için, $A_1' \ldots A_6'$ merkezi M' olan bir düzgün altıgendir. Böylece, M' noktası $[A', B']$'nin orta noktasıdır.

Lemma 3.4.7 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f, $\triangle$'nin ikizkenar üçgenlerini korur. (Demirel 2021)

İspat ABC, $\triangle$ içinde $|AB| = |AC|$ olacak biçimde de bir ikizkenar üçgen olsun. $\mathbb{R}^2$'de B ve C ile noktalarıyla bir eşkenar üçgen oluşturacak iki nokta vardır. D, A ya bu iki noktadan en yakın olanı olsun. BCD'nin merkezini M ile ve $[B, C]$'nin orta noktasını E ile gösterelim. M, BCD üçgeninin Fermat-Torricelli noktası olduğundan ve $|AB| = |AC|$

olduğundan, M, ABC üçgeninin Fermat-Torricelli noktasıdır. Üstelik, Lemma 3.4.3'e göre A, D, E noktaları doğrusal olduğundan A', D', E' noktaları doğrusaldır. Lemma 3.4.5'e göre $B'C'D'$ bir eşkenar üçgendir. M', $B'C'D'$ ve $A'B'C'$ nin Fermat-Torricelli noktası olduğundan $A'B'C'$, $\triangle$'de içinde $|A'B'| = |A'C'|$ olacak biçimde bir ikizkenar üçgendir.

Lemma 3.4.8 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f süreklidir. (Demirel 2021)

İspat X, $\mathbb{R}^2$'de bir nokta olmak üzere X merkezli ϵ yarıçaplı açık yuvar ve çember sırasıyla $B(X,\epsilon)$ ve $C(X,\epsilon)$ ile gösterilsin. f'nin X noktasında sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. $B_X = \{B(X,\epsilon): \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$ ve $B_{X'} = \{B(X',\sigma): \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ kümeleri sırasıyla X ve X' noktalarının yerel tabanlarıdır. $B(X',p)$ açık yuvarını ele alalım.

A ve B, $\mathbb{R}^2$'de AXB bir eşkenar üçgen olacak biçimde iki fark nokta olsun ve $|AB| = r$ olsun. Bir kenar uzunluğu r'ye eşit olacak şekilde A ile bir eşkenar üçgen oluşturan tüm nokta çiftlerinin $C(X,r)$ üzerinde olması gerektiğinden, A ve B noktalarının $C(X,r)$'de iki nokta olduğu sonucu çıkar. Varsayalım $|A'B'| = r'$ olsun. Lemma 3.4.5 ve Lemma 3.4.7 den $f(C(X,r)) \subset C(X',r')$ elde edilir. Ayrıca, Lemma 3.4.6'dan, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $f\left(C\left(X,\frac{r}{2^n}\right)\right) \subset C\left(X',\frac{r\prime}{2^n}\right)$ elde edilir. Eğer $r' \leq p$ ise $f(B(X,r)) \subset C(X',p)$'dir. Eğer $r' > p$ ise $\frac{r\prime}{2^k} < p$ olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı vardır. Dolayısıyla $f\left(B\left(X,\frac{r}{2^k}\right)\right) \subset f\left(B\left(X',\frac{r\prime}{2^k}\right)\right) \subset B(X',p)$ elde edilir. Böylece f; X noktasında sürekli olup f'nin her noktada sürekli olmasından dolayı f sürekli olur.

Lemma 3.4.9 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f, $\triangle$'deki üçgenlerin açılarını da korur. (Demirel 2021)

İspat X, $\mathbb{R}^2$'de bir nokta olmak üzere $k > 1$ olacak biçimdeki k tamsayısı için $\angle A_iXA_{i+1} = \frac{\pi}{k}$ ve $|XA_i| = |XA_{i+1}|$ $(1 \leq i \leq 2k-1)$ olacak biçimde $\triangle$'den seçilen XA_iA_{i+1} ikizkenar üçgenlerin bir dizisini oluşturalım. Açıkça, $A_1A_2 \dots A_{2k}$ merkezi X noktası olan $2k$ kenarlı bir düzgün çokgendir. $A'_1A'_2 \dots A'_{2k}$'nin de X' merkezli $2k$ kenarlı bir düzgün çokgen olduğunu iddia ediyoruz. Lemma 3.4.7'ye göre, XA_iA_{i+1} $(1 \leq i \leq$

$2k-1)$ ve $XA_{2k}A_1$ üçgenleri ikizkenar olduğundan, $X'A'_iA'_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2k-1)$ ve $X'A'_{2k}A'_1$ üçgenleri $|X'A'_i| = |X'A'_{i+1}|$ olacak biçimde ikizkenar üçgenlerdir. Lemma 3.4.7'den, $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ $(1 \leq i \leq 2k-2)$, $A_{2k-1}A_{2k}A_1$ ve $A_{2k}A_1A_2$ üçgenleri $|A_iA_{i+1}| = |A_{i+1}A_{i+2}|$ olacak biçimde ikizkenar üçgenlerdir. $|A_{2k-1}A_{2k}| = |A_{2k}A_1|$, $|A_{2k}A_1| = |A_1A_2|$, $A'_iA'_{i+1}A'_{i+2}$ $(1 \leq i \leq 2k-2)$ olduğundan, $A'_{2k-1}A'_{2k}A'_1$ ve $A'_{2k}A'_1A'_2$ görüntü üçgenleri ikizkenar olup $|A'_iA'_{i+1}| = |A'_{i+1}A'_{i+2}|$, $|A'_{2k-1}A'_{2k}| = |A'_{2k}A'_1|$, $|A'_{2k}A'_1| = |A'_1A'_2|$ ile ikizkenardır. Dolayısıyla $A'_1A'_2 \ldots A'_{2k}$, $2k$ kenarlı bir düzgün çokgendir. Ayrıca $|X'A'_i| = |X'A'_{i+1}|$ $(1 \leq i \leq 2k-1)$, $X'A'_iX'A'_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2k-1)$ ve $X'A'_{2k}A'_1$ üçgenlerinin eş olduğu kenar-kenar-kenar teoremiyle kolayca görülebilir. Bu nedenle, $A'_1A'_2 \ldots A'_{2k}$ nin $2k$ kenarlı eş açılı çokgen olduğunu elde ederiz. Böylece $A'_1A'_2 \ldots A'_{2k}$, X' merkezli $2k$ kenarlı bir düzgün çokgendir ve her $1 \leq i \leq 2k-1$ için $\angle A'_iX'A'_{i+1} = \frac{\pi}{k}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla f, X noktasında k, n tam sayıları için $\frac{n\pi}{k}$ değeri değerli açıları korur. f, Lemma 3.4.8'den sürekli olduğundan ve rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'de yoğun olduğundan, f'nin X noktasındaki tüm açıları koruduğu sonucu çıkar ve bu ispatı tamamlar.

Sonuç 3.4.10 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, f çemberleri de korur. (Demirel 2021)

Lemma 3.4.11 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$'deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyorsa, bu durumda f doğrularıda korur. Daha açık olarak, eğer l, $\mathbb{R}^2$de bir Öklid doğrusu ise, $f(l)$, $\mathbb{R}^2$'de bir Öklid doğrusudur. (Demirel 2021)

İspat Lemma 3.4.3 ve Lemma 3.4.4'ten $\mathbb{R}^2$'de keyfi iki A, B noktasından geçen AB doğrusu için $f(AB) \subset A'B'$'dir. S, $A'B'$ üzerinde bir nokta olsun ve AB üzerinde $f(X) = S$ olacak şekilde bir X noktası bulmaya çalışalım. $|A'B'| + |B'S| = |A'S|$ olduğunu kabul edelim. A ve B noktalarının birbirine göre yeterli sayıda simetrisini alarak $|A'S| + |SC'| = |A'C'|$ olacak biçimde C' noktasını bulabiliriz. İki köşesi A ve C olan bir eşkenar üçgen oluşturalım ve bu üçgeni ACD ile gösterelim. Lemma 3.4.5'ten $A'C'D'$ bir eşkenar üçgen olur. $D'A'S$ ve $D'C'S$ üçgenlerinden en az biri $\triangle$ içinde olmalıdır. $D'A'S \in \triangle$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. $\angle D'XS := \alpha$ olsun. ACD ve $A'C'D'$ üçgenleri eşkenar üçgen olduğundan AB üzerinde $\angle DXA = \alpha$ olacak biçimde bir X noktası vardır.

Lemma 3.4.9’dan $f(X) = S$ olup ispat tamamlanır.

Şimdiye kadar elde edilen sonuçlardan f fonksiyonu dejenere değildir ve doğruları korur, dolayısıyla Teorem 3.3.4 ile aşağıdaki ana sonuç verilebilir.

Teorem 3.4.12 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\triangle$’deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını korusun. O halde f bir afin dönüşümdür. (Demirel 2021)

Doğal olarak, Teorem 3.4.12’nin $\triangle$’deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını koruyan $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümleri için geçerli olup olmadığını merak edilir. Burada $\triangle$ yukarıda sonuçlardaki gibi aynı biçimde tanımlanmıştır. $\mathbb{R}^n$’de, $\triangle$’deki bir ABC üçgeninin Fermat-Torricelli noktası, ABC’yi içeren düzlemde bir noktadır. Bu düzlemi Ω ile gösterelim. $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$’daki her X noktası için,

$$|\psi(X)A| + |\psi(X)B| + |\psi(X)C| < |XA| + |XB| + |XC|$$

olduğu açıktır. Burada $\psi(X)$, X’in Ω üzerindeki dik izdüşümüdür. M, ABC üçgeninin Ω’de Fermat-Torricelli noktası ise M aynı zamanda $\mathbb{R}^n$’de ABC’nin Fermat-Torricelli noktasıdır. Bu, yukarıda ispatlanan tüm lemmaların burada da geçerli olmasını gerektirir. Böylece, Teorem 3.4.12’yi n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayına genişletebiliriz.

Teorem 3.4.13 $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\triangle$’deki tüm üçgenlerin Fermat-Torricelli noktalarını korusun. O halde f bir afin dönüşümdür. (Demirel 2021)

Uyarı 1 Teorem 3.4.12 ve Lemma 3.4.9 veya Sonuç 3.4.10’dan f, $f(x) = ag(x) + b$ biçiminde ifade edilebilir, burada $g(x)$ bir izometridir (veya bir ortogonal dönüşüm) ve $a \in \mathbb{R}\ (a \neq 0),\ b \in \mathbb{R}^n$ dir.

3.5 Sabit Noktalı Afin Dönüşümler

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ birebir ve örten bir dönüşüm olmak üzere; $\forall t \in \mathbb{R}^n$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(t),$$

eşitliği sağlanıyorsa, yada buna denk olarak f dönüşümü bir tek $\phi \in GL(\mathbb{R}^n)$ lineer otomorfizmi bir tek τ_v ötelemesi yardımıyla $f = \tau_v \circ \phi$ biçiminde yazılabiliyorsa f

afindir. Buradaki ϕ'ye f'nin lineer kısmı (parçası) denir.

$x \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $f(x) = x$ oluyorsa, yada buna denk olarak $\phi(x) + v = x$ oluyorsa x'e f'nin sabit noktası denir. $\phi(x) + v = x$ eşitliği $(\phi - I)(x) = -v$ biçiminde de yazılabilir. Bu son eşitlik bir denklem sistemi tanımlar.

Teorem 3.5.1 $f = \tau_v \circ \phi$ afin dönüşümünün tek bir sabit noktası olması için gerek ve yeter koşul $\phi - I$'nin $\mathbb{R}^n$'nin bir izomorfizmi olmasıdır. Üstelik buradaki tek sabit nokta $(\phi - I)^{-1}(-v)$ 'dir. (Kovacs 2016)

Sonuç 3.5.2 (Benzerlikler için sabit nokta teoremi) $\mathbb{R}^n$'de tanımlı bir benzerlik dönüşümü izometri değilse tek bir sabit noktaya sahiptir. (Kovacs 2016)

İspat f; büyütme faktörü $1 \neq \lambda > 0$ olan bir benzerlik dönüşümü olsun. f'nin lineer parçası $\lambda\tau$ olup, τ, $\mathbb{R}^n$ uzayının ortogonal bir dönüşümüdür. $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü $\tau\lambda - I$ dönüşümünün çekirdeğinden seçilsin. Bu durumda $\lambda\tau(x) = x$ olup $\lambda\|\tau(x)\| = \|x\|$ eşitliği sağlanır. τ dönüşümü normu koruduğu için $(\lambda - I)\|x\| = 0$ olup böylece $x = 0$ bulunur. Böylece $\lambda\tau - I$ dönüşümünün çekirdeğinde sadece sıfır vektörü vardır.

Düzlem afin geometrisinin temel teoremi iki üçgenin (yada buna denk olarak iki paralelkenarın) bir tek afin dönüşümle birbirine eşlenebildiğini ifade eder. Bu teorem ilgili üçgenler yardımıyla düzlem afin dönüşümü tanımlamamıza olanak sağlar. Örneğin bir t doğrusu ve bu t doğrusu üstünde olmayan p ve q noktaları verildiğinde t doğrusu üstündeki noktaları sabit bırakan ve p'yi q'ya resmeden bir tek afin dönüşüm vardır. Bu afin dönüşüm eksenel afin dönüşüm olarak adlandırılır ve $[t, p \to q]$ ile gösterilir.

$x, y \in \mathbb{R}^2$, $(x \neq y)$ için bu iki noktadan geçen $tx + (1-t)y$ $(t \in \mathbb{R})$ doğrusunu xy ile, uç noktaları bu iki nokta olan $tx + (1-t)y$ $(t \in [0,1])$ doğru parçasını $[xy]$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.5.3 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir afin dönüşüm olmak üzere $\forall z \in \mathbb{R}^n$ için

$$z \to f(z) = z'$$

düzlemde bir paralelkenar (a, b, c, d) ile gösterilsin (yani a, b, c, d düzlemde $b - a = c - d$ özelliğinde doğrusal olmayan dört nokta) ve

$$rank(b - a, b' - a') = rank(d - a, d' - a') = 2$$

olsun. $ab \cap a'b' = p$, $dc \cap d'c' = r$, $bc \cap b'c' = q$, $ad \cap a'd' = s$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır. (Kovacs 2016)

(i) f'nin tek bir m sabit noktası varsa $m = pr \cap qs$'dir.

(ii) f'nin sabit noktası yoksa $pr \parallel qs$ olup $pr \neq qs$'dir.

(iii) f'nin noktasal-sabit doğrusu varsa bu doğru $pr = qs$ doğrusudur.

İspat (iii)'nin ispatı açıktır.

Eğer f bir eksenel afin dönüşümse doğrular eksen üzerinde kesişir. Tersine, eğer $pr = qs$ ise

$$p = ta + (1-\alpha)b, \ (t \in \mathbb{R}) \tag{3.1}$$

biçiminde yazılabilir. $cb \parallel ad$ ve $c'b' \parallel a'd'$ olduğundan dolayı (3.1)'den

$$p = ts + (1-t)q \Rightarrow p = ta' + (1-t)b' \Rightarrow p = p',$$

ve benzer biçimde $r = r'$'dir. Böylece $pr = qs$ doğrusu noktasal olarak sabittir.

Şimdi (i)'yi ispatlayalım. p ve r'nin tanımı gereğince

$$p = \alpha a + (1-\alpha)b = \beta a' + (1-\beta)b' \tag{3.2}$$

$$r = \gamma d + (1-\gamma)c = \sigma d' + (1-\sigma)c' \tag{3.3}$$

olacak şekilde $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ vardır.

(3.2) ve (3.3)'ten

$$p' = \alpha a' + (1-\alpha)b' \tag{3.4}$$

$$r' = \gamma d' + (1-\gamma)c' \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.4)'ten

$$p' - p = (\alpha - \beta)(a' - b') \tag{3.6}$$

ve; (3.3) ve (3.5)'ten

$$r' - r = (\gamma - \sigma)(d' - c') \tag{3.7}$$

elde edilir. (a', b', c', d') bir paralel kenar olduğundan

$$a' - b' = d' - c' = x \tag{3.8}$$

biçimindedir. (3.6)'yı t ile çarparsak

$$tp' - tp = t(\alpha - \beta)x \tag{3.9}$$

ve (3.7)'yi $(1-t)$ ile çarparsak

$$(1-t)r' - (1-t)r = (1-t)(\gamma - \sigma)x \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.9) ile (3.10) taraf tarafa toplanırsa

$$tp' + (1-t)r' = tp + (1-t)r + [t(\alpha - \beta) + (1-t)(\gamma - \sigma)] \tag{3.11}$$

elde edilir. $\phi - I$ bir lineer otomorfizm olduğundan t'yi

$$t(\alpha - \beta) + (1-t)(\gamma - \sigma) = 0 \Leftrightarrow t\big((\alpha - \beta) - (\gamma - \sigma)\big) = -(\gamma - \sigma) \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Eğer $(\alpha - \beta) - (\gamma - \sigma) = 0$ ise (3.6) ve (3.7)'den

$$p' - p = r' - r \Rightarrow \phi(p) - p = \phi(r) - r$$

$$\Rightarrow (\phi - I)(p - r) = 0$$

olur. Bu ise çelişkidir.

$$t = -\frac{\lambda - \sigma}{(\alpha - \beta) - (\lambda - \sigma)}$$

olmak üzere (3.11)'deki formül

$$tp' + (1-t)r' = tp + (1-t)r \tag{3.13}$$

eşitliğinden indirgenir.Burada elde edilen nokta m ile gösterilirse

$$f(m) = f(tp - (1-t)r) = tp' + (1-t)r' = m$$

elde edilir. Böylece sabit m noktası pr üstünde olup benzer biçimde qs üstündedir. (i)'nin ispatı böylece tamamlanmış olur.

(3.11)'de $\alpha - \beta = \lambda - \sigma = 0$ alınırsa (3.6) ve (3.7)'den $p' = p$ ve $r' = r$ elde edilir. Bu ise f'nin p ve r'yi sabit bıraktığını gösterir. Eğer bir afin dönüşüm iki noktayı sabit bırakıyorsa bu iki noktadan geçen doğru üstündeki tüm noktaları sabit bırakacağından (iii)'deki durum karşımıza çıkar. Böylece f'nin sabit noktası yoksa $\alpha - \beta = \lambda - \sigma \neq 0$ olup (3.6) ve (3.7)'den

$$p' - p = r' - r \Leftrightarrow \phi(p - r) = p - r$$

$$\Leftrightarrow \phi(p - r) - (p - r) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\phi - I)(p - r) = 0$$

$$\Leftrightarrow p - r \in Ker(\phi - I)$$

elde edilir. Benzer biçimde $q - s \in Ker(\phi - I)$ olduğuda gösterilirse

$dimKer(\phi - I) = 1$ olduğundan $q - s \parallel p - r$ elde edilir. Böylece (ii)'nin ispatıda tamamlanmış olur.

3.5.1 Düzlemde Afin Dönüşümlerin Sınıflandırılması

Düzlemde her afin dönüşümün bir benzerlik ile eksenel afin dönüşümün bileşkesi olarak yazılması düzlem afin dönüşümlerin temel teoreminin basit bir sonucudur.

$$(p, q, r) \to (p', q', r')$$

biçiminde verilen f afin dönüşümü $X(p) = p'$, $X(q) = q'$ olacak biçimdeki X benzerlik dönüşümüyle $[p'q', X(r) \to r']$ eksenel afin dönüşümünün bileşkesi biçiminde yazılabilir.

Eğer f tek bir sabit noktaya sahipse ve bu nokta p olarak seçilirse $p' = p$'dir.

Teorem 3.5.4 Düzlemde bir afin dönüşüm tek bir sabit p noktasına sahipse, bu afin dönüşüm p noktasına göre bir dönme fonksiyonu, p merkezli bir merkezil genişleme ve p noktasını üzerinde bulunduran eksene göre bir eksenel afin dönüşümün bileşkesi olarak yazılabilir. (Kovacs 2016)

Eğer afin dönüşümün sabit noktası yoksa benzerlik dönüşümü bir ötelemeye indirgenir ve aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.5.5 Düzlemde bir afin dönüşüm sabit noktaya sahip değilse bu afin dönüşüm bir öteleme ile eksenel afin dönüşümün bileşkesidir. (Kovacs 2016)

İspat Sabit nokta teoreminin bir sonucu olarak $dimKer(\phi - I) \geq 1$ dir. $q - p \in Ker(\phi - I)$, $(p, q \in \mathbb{R}^2, p \neq q)$ olarak seçilsin. Bu durumda $f(q) - f(p) = q - p$ olup (p, q) ikilisi $(f(p), f(q))$ iklisine ötelenir. $p \to f(p)$ ile tanımlanan öteleme τ ile gösterilsin. Bu durumda gerekli afin dönüşüm

$$(p, q, r) \to (f(p), f(q), f(r))$$

biçimindedir. Bu afin dönüşüm τ ötelemesiyle $[f(p)f(q), \tau(r) \to f(r)]$ eksenel afin dönüşümün bileşkesidir.

3.5.2 Equiafin Durumu

Alan koruyan afin dönüşümlere equiafin dönüşüm denir. p, q, r düzlemde aynı doğru üstünde bulunmayan üç nokta olsun. p'yi sabit bırakan ve q ile r'yi birbirine eşleyen afin dönüşüme afin yansıma denir ve $[p, q \leftrightarrow r]$ ile gösterilir. Bu afin yansıma, qr doğru parçasının orta noktası s olmak üzere ps doğrusu üstündeki tüm noktaları sabit bırakır fakat diğer noktaların hiçbirini sabit bırakmaz.

p, q, r düzlemde aynı doğru üstünde bulunmayan üç nokta olsun. p noktasından geçen ve qr'ye paralel olan doğru üstündeki tüm noktaları sabit bırakan bir tek afin dönüşüm vardır ve bu afin dönüşüm $[p; q \mapsto r]$ ile gösterilir ve shear olarak adlandırılır.

Teorem 3.5.6 Düzlemdeki her equiafine dönüşüm iki afin yansıma tarafından üretilir. (Kovacs 2016)

İspat Düzlemdeki bir equiafin dönüşüm, öteleme, yarı-dönme veya shearden farklı ise (a, b, c, d) paralelkenarının equiafin dönüşümü

$$(a, b, c, d) \to (b, c, c', d'), \quad ad = d'c'$$

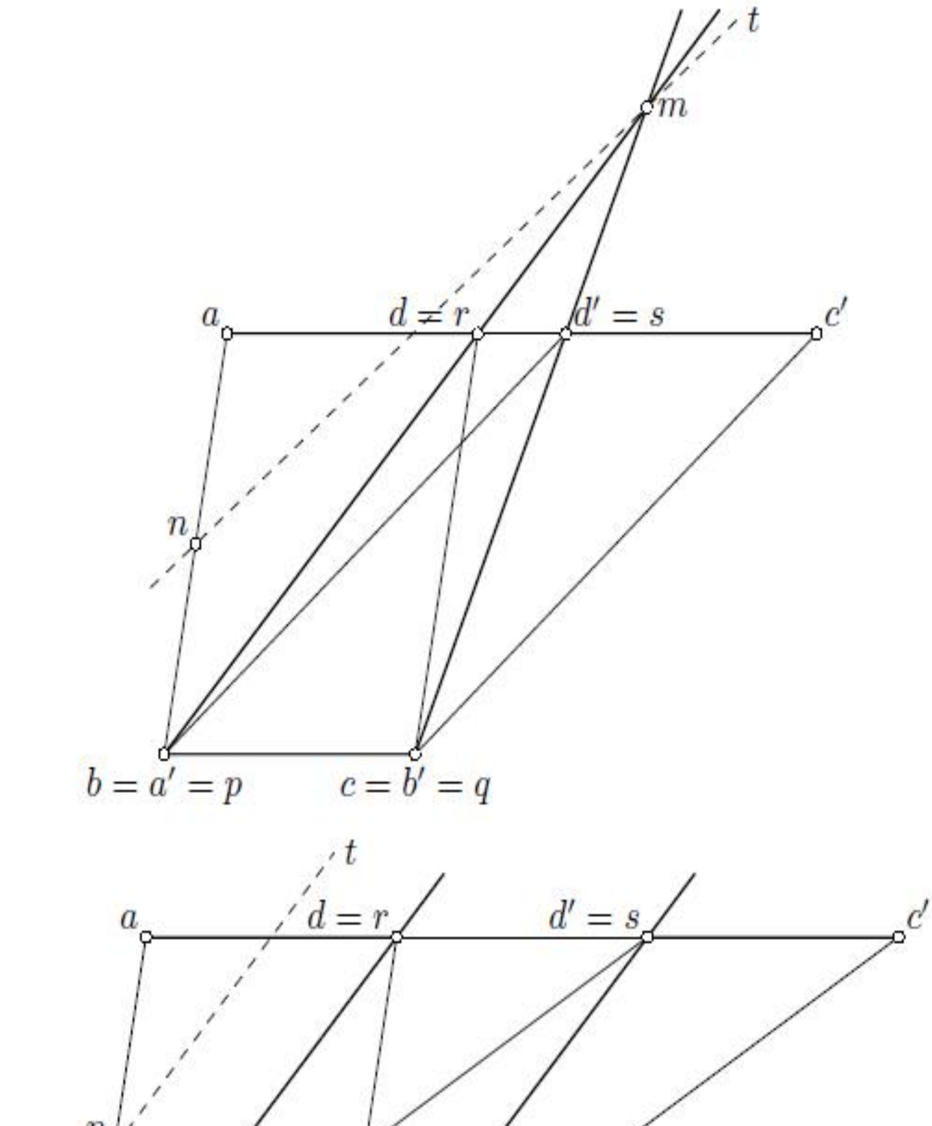
biçimindedir. n, $[ab]$ doğru parçasının orta noktası olsun. n ve tek sabit nokta olan m noktalarından geçen doğruyu t ile göstererelim, ya da sabit noktadan, bağımsız n'den geçen pr'ye (yada qs'ye) paralel olan t doğrusunu çizelim. Tek sabit nokta durumunda afin dönüşüm

$$(a, b, m) \to (b, c, m)$$

biçimindedir. Üstelik sabit noktadan bağımsız hareket edildiğinde ise

$$(a, b, d) \to (b, c, d')$$

biçimindedir. İki durumda da afin dönüşüm $[t, a \mapsto b]$ ve $[p, a \mapsto c]$ afin yansımaların bileşkesi olur. Shear durumu ise kolayca ele alınabilir. $[p; q \mapsto r]$ shear dönüşümü, $[p, q \leftrightarrow s]$ ve $[p, s \leftrightarrow r]$ afin yasımalarının bileşkesidir. Burada s; qr'nin p merkezli yarı-dönmesinin görüntüsü üzerindedir. Öteleme veya yarı-dönme iki Öklid yansımanın bileşkesi olduğundan ispat tamamanır.



Şekil 3.3.1 Sabit noktaların inşası

3.6 $\mathbb{R}^n$ de Sabit Noktaları Olmayan Afin Dönüşümlerin İnvaryant Doğruları

$\mathbb{R}^n$'de sabit noktası olmayan ve $|f(x)f(y)| < |xy|$ eşitsizliğini sağlayan her f afin dönüşümü bir invaryant doğruya sahiptir, (Atanasjan ve Bazylew 1986). Bu bölümde sabit noktası olmayan herhangi bir afin dönüşüm için bu problem ele alınacaktır.

f bir afin dönüşüm olmak üzere ve f'nin l gibi bir invaryant doğruya sahip olması durumunda f'nin l'ye kısıtlanmışı sıfırdan farklı bir v vektörüne göre ötelemedir. (f'nin sabit noktası yoktur.) $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax + a = x + v\}, f(x) = Ax + a$$

kümesi ya boş küme yada $\mathbb{R}^n$'in bir afin alt uzayıdır. $v = 0$ ise $f(x) = x$ olup f'nin sabit noktası olmadığından $H = \emptyset$'dir.

Bu çalışmada H'nın boş kümeden farklı olduğu ve f altında H'nın invaryant kaldığı sıfırdan farklı v vektörleri incelenecektir.

Teorem 3.6.1 $x \to Ax + a$ kuralıyla tanımlanan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ afin dönüşümünün $v \neq 0$ olmak üzere v yardımıyla tanımlanan H invaryant afin alt uzayına sahip olması için gerek ve yeter koşul $g(x) = (A - I)(x)$, $v \in Kerg$, $u \in Img$ olmak üzere $a = v + u$ ayrışımının olmasıdır. (Kasparek 2010)

İspat ($\Rightarrow$) Eğer

$$f(x) = Ax + a = x + v \tag{3.14}$$

denkleminin x'e göre bir çözümü varsa $v - a \in Im(g)$'dir. Gerçekten $Ax - x = v - a$'dır.

(1)'deki sistemin genel çözümü $x = s_1a_1 + s_2a_2 + \ldots + s_pa_p + x_0$ formunda olup $a_{1,}a_2, \ldots, a_p$ vektörleri $Kerg$'nin taban elamanları ve x_0 ise (3.14)'in özel çözümüdür. $f(H) = H + v$ olduğu açıktır ve $f(H) = H$ olması için gerek ve yeter koşul $v \in Kerg$ olmasıdır. Böylece, $v - a \in Img$ olduğundan dolayı $a = v + u$ ayrışımının sağlandığı görülür. $(v - (+v - a) = a)$.

($\Leftarrow$)$a = v + u$, $(v \neq 0, v \in Kerg, u \in Img)$ olacak biçimde ayrışım sağlansın. Bu durumda (3.14) lineer denklemi

$$(A - I)(x) = -u \tag{3.15}$$

eşitliğine denktir. $u \in Im(g)$ olduğundan ve $(A-I)(x_1) = -u$ olacak biçimde $x_1 \in \mathbb{R}^n$ için (3.15)

$$(A-I)(x-x_1) = 0 \tag{3.16}$$

biçiminde yazılabilir. f'nin sabit noktası olmadığı için $det(A-I) = 0$ olup böylece (3.16)'teki sistemin sıfırdan farklı çözümü vardır. $v \in Kerg$ olduğundan v yardımıyla tanımlanan H afin altuzayı f altında invaryanttır.

Teorem 3.6.2 Bir f afin dönüşümünün $v \neq 0$ vektörü yardımıyla tanımlı H invaryant afin alt uzayına sahip olması için gerek ve yeter koşul $g(a) \in \text{Im}(gog)$ olmasıdır. (Kasparek 2010)

İspat (⇒) Teorem 3.6.1'den $v \in Kerg$ ve $u \in Img$ olmak üzere $a = v + u$ ayrışımın olduğundan $g(a) = g(v+u) = g(v) + g(u)$ olup $g(a) = g(u) \in Im(gog)$ elde edilir.

(⇐) $g(a) \in \text{Im}(gog)$ ise $g(a) = g(g(w))$ olacak biçimde $w \in \mathbb{R}^n$ vardır. Böylece $g\big(a - g(w)\big) = 0$ olup $a - g(w)$; g'nin çekirdeğindedir, yani $a - g(w) \in Kerg$'dir. $v \in Kerg$ için $a = v + g(w)$ alınarak f'nin sabit noktası olmadığı için $v \neq 0$'dır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.6.3 $v \in Kerg, u \in Img$ olmak üzere $a = v + u$ ayrışımı varsa bu durumda x_0, (3.14)'in bir çözümü olmak üzere $x = x_0 + vt$ denklemli l doğrusu f afin dönüşümü altında invaryant kalır. (Kasparek 2010)

İspat $x = x_0 + vt$ ise $Ax + a = Ax_0 + Av + a$'dır. $v \in Kerg$ olduğundan $Av = v$ olup ve x_0, (3.14)'in bir çözümü olduğundan $Ax_0 + a = x_0 + v$'dir. Böylece $Ax + a = x_0 + (t+1)v$ yani $f(l) = l$'dir.

Uyarı 3.6.4 Burada $a = v + u$ ayrışımı tektir. Gerçekten $a = v_1 + u_1$ ve $a = v_2 + u_2$ biçiminde iki ayrışım olduğunda Sonuç 3.6.3'ten $x = x_0 + v_1 t$ ve $x = x_0 + v_2 t$ doğruları f altında invaryant kalır ve x_0 noktası f altında sabit kalan nokta olur. Bu ise çelişkidir.

Sonuç 3.6.5 Eğer sabit noktası olmayan bir f afin dönüşümünün g lineer dönüşümü

$$Kerg = Ker(gog) \tag{3.17}$$

eşitliğini sağlıyorsa f invaryant doğruya sahiptir. (Kasparek 2010)

İspat $Kerg = Ker(gog)$ olduğundan $\mathbb{R}^n = Kerg \oplus Img$ yani $a = v + u$ $(v \in Kerg, u \in Img)$ ayrışımı sağlar. f afin dönüşümünün sabit noktası olmadığından $v \neq 0$ olup Sonuç 3.6.3'ten ispat tamamlanır.

Uyarı 3.6.6 (3.16) eşitliği simetrik matrisle verilen bir afin dönüşüm için ya da öz değeri 1 olan bir matrisle verilen bir afin dönüşüm için de sağlanır.

4. PSEUDO AFİN DÖNÜŞÜMLER

Teorem 3.3.3'ten $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ doğrudan-doğruya ve $f^2 = I$ özelliklerini sağlaması durumunda bir afin dönüşüm olduğu bilinmektedir.

Burada doğal olarak şu soru akla gelir. $D \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere $f: D \to D$ doğrudan-doğruya bir fonksiyon ve $f^2 = I$ ise f, $\mathbb{R}^2$'deki bir afin dönüşümün kısıtlanmış hali midir? Burada ve bundan sonra I, $\mathbb{R}^2$'deki birim dönüşümün D'ye kısıtlanmışı olarak alınacaktır. Bu sorunun cevabının negatif olduğu sonraki bölümde detaylı olarak incelenecektr.

Tanım 4.1 $D \subset \mathbb{R}^2$, $D \neq 0$ olsun. $f: D \to D$ doğrudan-doğruya olan bir fonksiyon ve $f^2 = I$ olsun. Eğer f, $\mathbb{R}^2$'deki bir afin dönüşümün D'ye kısıtlanması değilse f'ye pseudo-afin dönüşüm denir. (Li vd. 2010)

4.1 Üçgen Yansımalar

Bu bölümde, üçgen yansımalar olarak adlandırılan pseudo-afin dönüşümlerin bir sınıfı inşa edilecektir ve bu dönüşümlerin belirli durumlarda afin dönüşüm olmadıklarını gösterilecektir.

Noktalar $A, B, \ldots$ ile ve bu noktaların incelediğimiz fonksiyon altındaki görüntüleri $A', B', \ldots$ ile gösterilecektir. A ve B noktalarından geçen doğruyu L_{AB} ile, başlangıç noktaları A ve B noktaları olan doğru parçalarını AB ile ve AB, BC, AC doğru parçalarıyla sınırlı olan üçgensel bölge $\triangle_{ABC}$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.1 $\delta: \triangle_{ABC} \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu doğrudan-doğruya ve $D \in (BC)^o$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa δ'ya AD boyunca $\triangle_{ABC}$'nin bir üçgen yansımasıdır denir. (Li vd. 2010)

$$P \in AD \text{ için } \delta(P) = P, \delta(B) = C = B' \text{ ve } \delta(C) = B = C'$$

Önerme 4.1.2 $\delta: \triangle_{ABC} \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu AD boyunca $\triangle_{ABC}$'nin bir üçgen yansıması ise bu durumda $\delta(\triangle_{ABC}) = \triangle_{ABC}$ olup

$$\delta{:}\triangle_{ABC} \to \triangle_{ABC}$$

bir homeomorfizmdir ve $\delta^2 = I$'dir (Homeomorfizmler topolojik uzaylar arasında tanımlı olan birebir, örten, sürekli ve terside sürekli olan dönüşümlerdir.). (Li vd. 2010)

Önerme 4.1.3 $\triangle_{ABC}$ üçgeni için $D \in (BC)^o$ olmak üzere $\triangle_{ABC}$'nin AD boyunca bir üçgen yansıması varsa tektir. (Li vd. 2010)

Yukarıdaki iki önermenin ispatı $\triangle_{ABC}$'deki bir noktanın görüntüsünün bulunma yöntemi kullanarak kolayca yapılabilir.

$P \in AD$ ise $P' = P$ olduğunu biliyoruz.

$P \in \triangle_{ABC} \setminus (AD \cup BC)$ olsun. $L_{BE} \cap L_{CF} = \{P\}$ olacak biçimde AD üstünde E ve F noktaları seçelim. Bu durumda P' noktası L_{CE} ve L_{BF} doğrularının kesişim noktasıdır. $P' \in \triangle_{ABC}$ olup bu nokta tektir.

$P \in BC \setminus AD$ ise $L_{EF} \cap L_{BC} = \{P\}$ olacak biçimde $E \in AD$ ve $F \in (\triangle_{ABC})^o \setminus AD$ noktalarını seçelim. Bu durumda P' noktası L_{BC} ve $L_{EF'}$'nin kesişim noktasıdır. Aynı zamanda $P' \in \triangle_{ABC}$ olup P' tektir.

Lemma 4.1.4 $\delta{:}\triangle_{ABC} \to \mathbb{R}^2$; AD boyunca $\triangle_{ABC}$'nin bir üçgen yansıması $D \in (BC)^o$ ve $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir afin dönüşüm olsun. $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$, $g(C) = C_1$ ve $g(D) = D_1$ olmak üzere

$$\delta_\iota = g \circ f \circ g^{-1}{:}\triangle_{A_1B_1C_1} \to \triangle_{A_1B_1C_1}$$

fonksiyonu A_1D_1 boyunca $\triangle_{A_1B_1C_1}$'nin bir üçgen yansımasıdır. (Li vd. 2010)

Lemma 4.1.5 $\triangle_{ABC}$ bir üçgen ve $D \in (BC)^o$ olmak üzere

(1) $g(A) = A_1$, $g(B) = B_1$, $g(C) = C_1$ ve $g(D) = D_1$;

(2) $g(\triangle_{ABC}) = \triangle_{A_1B_1C_1}$;

(3) $A_1D_1 \perp B_1C_1$;

(4) $|BD| = |B_1D_1|$, $|DC| = |D_1C_1|$

olacak biçimde bir g afin dönüşümü ve $D_1 \in (B_1C_1)^o$ koşulunu sağlayan bir $\triangle_{A_1B_1C_1}$ üçgeni vardır. (Li vd. 2010)

İspat D noktasını orjin olarak almak genelliği bozmaz (D orjin olmasaydı uygun bir izometri ile D'yi orjine resmetmek gerekirdi.). Aynı düşünceyle L_{BC}'yi x-ekseni, $B =$

$(-|BD|, 0)$ ve $C = (|CD|, 0)$ alalım. $b > 0$ için $A = (a, b)$ olsun

$$g: \triangle_{ABC} \to \triangle_{A_1B_1C_1}$$
$$(x, y) \to (x', y') = (x - \frac{a}{b}y, y)$$

afin dönüşümü alalım. Bu durumda $g(B) = B_1(-|BD|, 0)$, $g(C) = C_1(|CD|, 0)$, $g(D) = D_1(0,0)$ ve $g(A) = A_1(0, b)$ elde edilir. Böylece istenilen g afin dönüşümü ile $\triangle_{A_1B_1C_1}$ üçgeni elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

$a, b, c \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(-c, 0)$, $D(0,0)$ noktaları için $\gamma: \triangle_{ABC} \to \triangle_{ABC}$ fonksiyonu $K = \frac{c-b}{bc}$ olmak üzere $P = (x, y) \in \triangle_{ABC}$ için $\gamma(x, y) = (\frac{-x}{1+Kx}, \frac{y}{1+Kx})$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.1.6 γ'nın AD boyunca $\triangle_{ABC}$ üçgeninin bir üçgen yansıması ve γ bir afin dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul $K = 0$ olması yani $|BD| = |CD|$ olmasıdır. (Li vd. 2010)

Burada ve bundan sonraki kısımda bir fonksiyonun Ω bölgesinde afin olması demek bu fonksiyonun $\mathbb{R}^2$'deki bir afin dönüşümün Ω'deki kısıtlanmışı olması demektir.

İspat İspatın ilk kısmını göstermek için γ'nın doğrudan-doğruya olduğunu göstermek yeterlidir. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$; Δ_{ABC}'de doğrusal üç farklı nokta olsun. Bu durumda

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

olacak biçimde 0 ve -1'den farklı bir λ sayısı vardır. P_1, P_2, P_3 noktalarının görüntüleri sırasıyla $P_1'(x_1', y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$, $P_3'(x_3', y_3')$ olmak üzere

$$x_3' = -\frac{x_3}{1 + Kx_3} = \frac{(1 + Kx_2')x_1' + \lambda(1 + Kx_1')x_2'}{(1 + Kx_2') + \lambda(1 + Kx_1')}$$

$$y_3' = \frac{y_3}{1 + Kx_3} = \frac{(1 + Kx_2')y_1' + \lambda(1 + Kx_1')y_2'}{(1 + Kx_2') + \lambda(1 + Kx_1')}$$

elde edilir. $\lambda' = \frac{\lambda(1+Kx_1')}{1+Kx_2'}$ olmak üzere;

$$x_3' = \frac{x_1' + \lambda' x_2'}{1+\lambda'} \text{ ve } y_3 = \frac{y_1' + \lambda' y_2'}{1+\lambda'}$$

olup P_1', P_2', P_3' noktalarının doğrusal olduğu kolayca görülür. İspatın ikinci kısmı ise açıktır.

Lemma 4.1.5 ve Önerme 4.1.6'ten aşağıdaki sonuç elde edilir

Teorem 4.1.7 Bir $\triangle_{ABC}$ üçgeni ve $D \in (BC)^{o}$ için AD boyunca $\triangle_{ABC}$'nin üçgen yansıması olan bir γ afin dönüşümünün olması için gerek ve yeter koşul $|BD| = |CD|$ olmasıdır. (Li vd. 2010)

4.2 g- Üçgen Yansımalar

Bu bölümde öncelikle g-üçgen yansımaları tanımlanıp, bu fonksiyonların temel özelliklerini incelenecektir.

K pozitif bir sabit olmak üzere

$$L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\},\ \ L_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \tfrac{-1}{K}\},$$

$$L_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

ve $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus L_b$ olsun.

$\mu : \Omega \to \Omega$ fonksiyonu $P = (x,y) \in \Omega$ için $\mu(P) = \mu(x,y) = \left(\frac{-x}{1+Kx}, \frac{y}{1+Kx}\right) = p'$ kuralıyla verilsin.

Ω; Ω_1 ve Ω_2 gibi iki bağlantılı bölgeden oluşur. L_a'yı içeren Ω_1 olsun.

Önerme 4.2.1 μ fonksiyonu $\mu^2 = I$ özelliğinde doğrudan doğruya bir fonksiyon olup μ altında sabit kalan noktalar kümesi $L_a \cup \{P_o(\frac{-2}{K}, 0)\}$'dir. Ayrıca Ω_1 ve Ω_2 bölgeleri μ altında invaryanttır. (Li vd. 2010)

Tanım 4.2.2 $\mathbb{R}^2$'de paralel iki s_1, s_2 doğrusu için $l_1 = s_1 \cap \Omega,\ l_2 = s_2 \cap \Omega$ doğrularına Ω'de paralel doğrular denir. (Li vd. 2010)

Önerme 4.2.3 Ω'de L_a'ya paralel olan bir l doğrusu için $\mu(l)$ doğrusu yine L_a'ya paraleldir. (Li vd. 2010)

Önerme 4.2.4 $E \in \Omega \setminus (L_a \cup P_0)$ için $L_{EE'}$ doğrusu P_0 noktasını kapsar. Üstelik P_0 noktasını kapsayan Ω'de ki her doğru μ altında invaryanttır. (Li vd. 2010)

İspat Eğer L_{EP_0} doğrusu L_a'ya paralel ise Önerme 4.2.3'ten $L_{E'P_0}$ doğrusu da L_a'ya paraleldir. Eğer L_{EP_0} doğrusu L_a'yı Q noktasında kesiyorsa bu durumda $E' \in L_{P_0Q}$ elde edilir. Her iki durumda da $P_0 \in L_{EE'}$'dir.

Önerme 4.2.5 l; Ω'de P_0 noktasından geçen ve L_a'ya paralel olan doğru olsun. Bu durumda $P \in l \setminus \{P_0\}$ için P ve P' noktaları P_0 noktasına göre simetriktir. (Li vd. 2010)

Önerme 4.2.6 s_1 ve s_2; $\mathbb{R}^2$'de L_b üstünde kesişen iki doğru olsun. Bu durumda $l_i = s_i \cap \Omega$ $(i = 1,2)$ olmak üzere $\mu(l_1)$ ile $\mu(l_2)$ paraleldir. (Li vd. 2010)

Bu önerme aşağıdaki önermenin bir sonucudur.

Önerme 4.2.7 s; $\mathbb{R}^2$'de eğimi k olan bir doğru olsun. Bu durumda $\mu(s \cap \Omega)$'yi kapsayan doğru P_0 noktasından geçen eğimi k olan doğru ile L_b'nin kesişim noktası olan $(\frac{-1}{K}, \frac{k}{K})$ noktasından geçer. (Li vd. 2010)

İspat $y = kx + d$ denklemli doğruyu (d sabit) ve bu doğru üstünde $P(x, y)$ noktasını seçelim. Bu doğru $P_1(0, d)$ ve $P_2(\frac{1}{K}, \frac{k}{K} + d)$ noktalarını kapsar. Buradan s' doğrusu $\mu(s \cap \Omega)$ tarafından tanımlanan ve $P_1'(0, d)$ ile $P_2'(\frac{-1}{2K}, \frac{k}{2K} + \frac{d}{2})$ noktalarından geçen doğrudur. Böylece s' doğrusunun denkleminin $v = (dK - k)u + d$ olduğu görülür.

Tanım 4.2.8 Yukarıda tanımlı $\mu: \Omega \to \Omega$ fonksiyonuna s-üçgen yansıma denir. L_a doğrusuna eksen, P_0 noktasına taban L_b noktasına sınır, eksene dik olan P_0 noktasından geçen L_e doğrusuna ekvator denir. Ω_1'e Ω'nin ana bileşeni, Ω_2'ye Ω'nin yedek bileşeni denir. (Li vd. 2010)

$P(x, y) \in \Omega \setminus L_a$ için P'nin görüntüsü $P'(x', y')$ ise $K = -\frac{x+x'}{xx'}$'dır. Önerme 4.2.3'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.2.9

(1) $D \in \Omega_1$, $P \in L_a \cap L_{P_0D}$ ve $D' \in PP_0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}|PP_0| = \frac{|PD||PD'|}{|PD| - |PD'|}$$

dir.

(2) $E \in \Omega_2$, $Q \in L_a \cap L_{P_0E}$ ve $E' \in QP_0$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{2}|QP_0| = \frac{|QE||QE'|}{|QE| + |QE'|} = \frac{|P_0E||P_0E'|}{|P_0E| - |P_0E'|}$$

dir. (Li vd. 2010)

Lemma 4.2.10 L_a ekseni, L_b sınırı ve P_0 taban noktasından herhangi ikisi diğerini ve ilgili s-üçgen yansımayı tanımlamak için yeterlidir. (Li vd. 2010)

Lemma 4.2.11 $\mu: \Omega \to \Omega$ bir s-üçgen-yansıma ve L_a, L_b, P_0 sırasıyla bu üçgen yansımanın ekseni, sınırı ve taban noktası olsun. Eğer $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bir afin dönüşüm ise $\mu_1 = go\mu og^{-1}: g(\Omega) \to g(\Omega)$ aşağıdakileri sağlar. (Li vd. 2010)

(1) μ_1 doğrudan doğruya olup $\mu_1^2 = I$'dir.
(2) $g(L_a) \cup g(P_0)$; μ_1 altında sabit kalır.
(3) μ_1'in sınırı $g(L_b)$'dir.
(4) Önerme 4.2.9'daki eşitlikler g altında sağlanır.

Lemma 4.2.11'den s-üçgen-yansıma kavramı aşağıdaki gibi genişletilebilir.

Tanım 4.2.12 $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ afin dönüşümü ve μ bir g-üçgen-yansıma olmak üzere

$$\phi = go\mu og^{-1}$$

biçiminde yazılan ϕ dönüşümüne g-üçgen yansıma denir. $g(L_a)$, $g(L_b)$, $g(P_0)$ sırasıyla eksen, sınır ve taban noktasıdır.

Önerme 4.2.13 ϕ ve Ψ iki g-üçgen yansıma olsun. Bu durumda $\Psi = go\phi og^{-1}$ olacak biçimde g afin dönüşümü vardır. (Li vd.2010)

Lemma 4.1.5 ve Teorem 4.1.7'den aşağıdaki önerme açıktır.

Önerme 4.2.14 Afin olmayan $\gamma: \triangle \to \triangle$ bir üçgen yansıması için $\gamma = \phi\ |_{\triangle}$ olacak biçimde bir tek ϕ g-üçgen-yansıma vardır. (Li vd. 2010)

Aşağıdaki sonuç Önerme 4.1.6 ve Lemma 4.2.11'den açıktır.

Sonuç 4.2.15 Her g-üçgen-yansıma bir pseudo-afin dönüşümdür.

Teorem 4.2.16 D, $\mathbb{R}^2$'nin konveks bir alt bölgesi olsun. Bu f'nin bir pseudo-afin dönüşüm olabilmesi için gerek ve yeter koşul $f = \theta\ |_D$ olacak biçimde bir g-üçgen yansımanın olmasıdır. (Li vd. 2010)

4.3. Teorem 4.2.16’nın İspatı

Teorem 4.2.16’daki ifadenin yeterlilik kısmı sonuç 4.2.15’den elde edilir. Gereklilik kısmı için ise bazı lemmalara ihtiyaç duyulur. $\mathcal{D}$, $\mathbb{R}^2$’de bir konveks bölge $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ boş kümeden farklı ve $f: D \to D$ bir pseudo-afin dönüşüm olsun.

Lemma 4.3.1 f; $\mathcal{D}$’deki doğruları doğrulara eşler. (Li vd. 2010)

Tanım 4.3.2 Eğer $\mathcal{D}$’deki bir l doğrusu $\mathbb{R}^2$’de de bir doğru ise bu doğruya “tam doğru” denir. (Li vd. 2010)

Eğer $\mathcal{D}$ bir tam doğru kapsıyorsa bu durumda $P \in \mathcal{D}$ noktasından geçen bir ve yalnız bir tam doğru vardır ve bu tam doğru L_p ile gösterilecektir. Böylece $\mathcal{D}$’de tam doğrular varsa hepsi birbirine paralel olmak zorundadır. Bu durumda $\mathcal{D}$ için ya yarı düzlem ya da şerit bölge diyebiliriz. Böylece $\mathcal{D}$’de bir l doğrusu ya L_p doğrusuna paraleldir ya da L_p ile $\mathcal{D}$’de kesişir.

Eğer l; $\mathcal{D}$’de tam değilse bu durumda $(L_1 \cup L_2) \cap l \cap \mathcal{D} = \emptyset$ olacak biçimde $\mathcal{D}$ ile kesişen L_1, L_2 doğruları vardır.

Lemma 4.3.3 Bir l doğrusunun $\mathcal{D}$’de tam olması için gerek ve yeter koşul l’nin görüntüsünün de tam olmasıdır. (Li vd. 2010)

$\mathcal{D}$’de bir l doğrusu $\mathcal{D}$’yi iki parçaya ayırır. Bu parçaları U_1 ve U_2 ile gösterelim. $P_1 \in U_1$ olsun. l’nin görüntüsü de $\mathcal{D}$’yi iki parçaya böler. P_1' noktasını kapsayan parçayı U_1' ile, diğerini ise U_2' ile gösterelim.

Lemma 4.3.4 $f(U_i) = U_i'$ $(i = 1,2)$’dir. (Li vd. 2010)

$P' \in U_1'$, $Q' \in U_2'$ olacak biçimde $P, Q \in U_1$ noktalarının var olduğunu kabul edelim.İki durumda inceleme yapmalıyız.

1. Durum l tam olmasın. Bu durumda $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$, $(l_1 \cup l_2) \cap l = \emptyset$ olacak biçimde P_1’den geçen l_1 ve Q’dan geçen l_2 doğrusu vardır. Bu durumda $l_1' \subset U_1'$ ve $l_2' \subset U_2'$ olup $l_1' \cap l_2' \neq \emptyset$ olduğundan çelişki elde edilir.

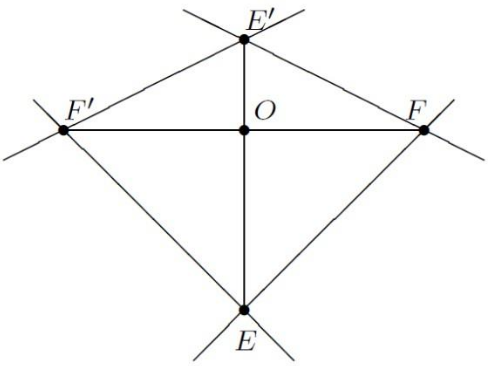
2. Durum l tam olsun. $l_1 \cap l_2 = \{K\}$, $l_1 \cap l_P = \{P_1\}$ ve $l_1 \cap l_Q = \{Q_1\}$ olacak biçimde tam olmayan l_1 doğrusu seçelim l_2 ise $l_1 \cap l_2 = \{K\}$ ve P_1,Q_1 noktaları $D \setminus l_2$'nin aynı parçalarında olacak biçimde tam olmayan bir doğru olsun. P_1' ve Q_1', $D \setminus l_2'$'nin farklı parçalarından olması gerektiğinden ve l_2' tam olmadığından 1.Duruma benzer çelişki elde edilir.

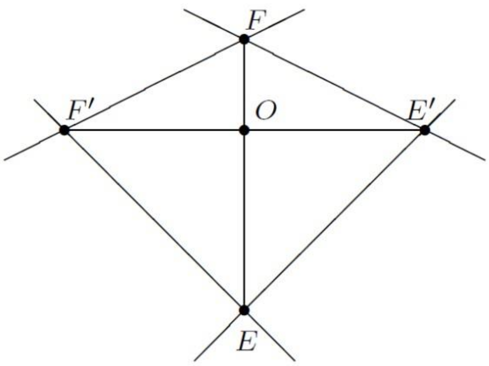
Lemma 4.3.5 $\{E, F\} \subset D$ olmak üzere, E, E', F, F' noktaları doğrusal değilse, köşe noktaları E, E', F, F' olan bir ve yalnız bir $\mathcal{P}$ konveks (kapalı) dörtgensel bölge vardır. (Li vd. 2010)

İspat E, E', F, F' noktalarından herhangi üçü doğrudaş değildir. Bu durumda E, E', F, F' noktalarından herhangi birinin, örneğin E' noktasının, köşeleri E, F, F' olan kapalı $\triangle_{EFF'}$ bölgesince kapsanmadığını göstermek yeterlidir. $E' \subset \triangle_{EFF'}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda E ile F; $\mathcal{D} \setminus L_{EF}$'nin ayırdığı aynı parçada ve E' ile F' ise $\mathcal{D} \setminus L_{E'F'}$'nin ayırdığı farklı parçalardadır. Lemma 4.3.4'ten bu bir çelişkidir.

Sonuç 4.3.6 $\{E, F\} \subset \mathcal{D}$ için, eğer E, E', F, F' doğrusal değilse bu durumda köşeleri E, E', F, F' olan konveks (kapalı) $\mathcal{P}$ dörtgensel bölgesi f altında invaryanttır. (Li vd. 2010)

Şekil 4.3.1'de görüldüğü üzere E, E', F, F' yardımıyla tanımlanan $\mathcal{P}$ dörtgensel bölgenin kenarları için iki durumu incelemek gerekir. Bunlar EF, FE', $E'F'$, $F'E$ ya da EE', $E'F$, FF', $F'E$'dir. Bu iki durum için $\mathcal{P}$'yi sırasıyla $\mathcal{P}_{EFE'F'}$ ve $\mathcal{P}_{EE'FF'}$ ile gösterelim.





Şekil 4.3.1 $EFE'F'$ ve $EE'FF'$ dörtgensel bölgeleri

Lemma 4.3.7 $\mathcal{P}_{EFE'F'}$ için $L_{EE'}$ ve $L_{FF'}$'nin kesişim noktası olan 0 noktası f'nin sabit bıraktığı tek nokta olup $P \in \mathcal{P}_{EFE'F'}$ için L_{OP}, f altında değişmez kalır. (Li vd. 2010)

İspat 0 noktasının f altında sabit kaldığı açıktır. Lemma 4.3.4'ten ise tek olduğu açıktır. İspatın ikinci kısmı için aksini kabul ederek yani $P' \notin L_{PQ}$ olacak biçimde $P \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ noktasının varlığını kabul edelim. Bu durumda $L_{PP'}$ ile $L_{EE'}$'nin kesişim noktası ya da $L_{PP'}$ ile $L_{FF'}$'nin kesişim noktası $\mathcal{P}_{EFE'F'}$'nin sabit noktası olup 0'dan farklıdır. Bu ise çelişkidir.

Lemma 4.3.8 $\mathcal{D}$; köşegenleri AA', BB' olan $P_{ABA'B'}$ paralelkenarını kapsasın. Bu durumda f dönme açısı π olan bir dönme fonksiyonudur. (Li vd. 2010)

İspat AA' ve BB''nin kesişim noktası M olsun. Lemma 4.3.7'den M; $\mathcal{P}_{ABA'B'}$'nin sabit tek noktasıdır. $P \in \mathcal{D}$ için P ile P'nin f altındaki görüntüsü olan P' noktasının M'ye göre simetrik olduklarını göstermek yeterli olacaktır. 3 durum söz konusudur.

1.Durum $P_{ABA'B'}$'nın sınırı $\partial_{ABA'B'}$ olmak üzere $P \in \partial_{ABA'B'}$ olsun. $P \in AB$ olduğunu kabul etmek genelliği bozmaz. Bu durumda P' noktası L_{PM} ile $L_{A'B'}$'nin kesişim noktası olup ispat tamamlanır.

2.Durum $P \in \mathcal{P}^0_{ABA'B'}$ olsun. P'nin $\triangle_{AA'B'}$ üçgeninin iç noktası olduğunu kabul edelim. C; $L_{A'P}$ ile AB kesişim noktası olsun. Bu durumda C' noktası L_{CM} ile $A'B'$'nin kesişim noktası olur. P noktası ise $AA' \cap CC' = \{M\}$ özelliğini sağlayan köşeleri AA' ile CC' olan $\mathcal{P}_{ACA'C'}$ paralelkenarının sınırı üstündedir. 1.Durum takip edilerek istenilen sonuca ulaşılır.

3.Durum $P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{P}_{ABA'B'}$ olsun. $\forall i \in \{1,2\}$ için l_i doğrusu P'den geçsin ve $ABA'B'$ paralelkenarının iki farklı kenarını iki noktada kessin. Bu noktaları P_{i1} ve P_{i2} ile gösterelim. Bu durumda P' noktası $L_{P'_{11}P'_{12}}$ ile $L_{P'_{21}P'_{22}}$'nin kesişim noktasıdır. P ile P''nin M'ye göre simetrik olduğu açıktır. Buradaki yöntemle aşağıdaki kolayca elde edilir.

Lemma 4.3.9 $\mathcal{D}$; köşegenleri CC' ve DD' olan $\mathcal{P}_0$ dörtgensel bölgesini kapsasın. Bu durumda $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ fonksiyonu C, D, C', D' köşegenleri yardımıyla tek türlü tanımlıdır. (Li vd. 2010)

Lemma 4.3.10 $f = \phi\,|_{\mathcal{D}}$ olacak biçimde bir ϕ g-üçgen-yansıma vardır. (Li vd. 2010)

İspat f bir pseudo-afin dönüşüm olduğundan Lemma 4.3.8'den dolayı $\mathcal{P}_{EFE'F'}$ $\mathcal{D}$'de bir paralelkenar değildir. $|EO| > |E'O|$ ve $|FO| \geq |F'O|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|AO| = |A'O|$ olacak biçimde $A \in EF'$ vardır. $BO \perp L_{AA'}$ olacak biçimde $B \in \partial_{EFE'F'}$ noktası seçelim. Lemma 4.3.8'den $|BO| > |B'O|$ olduğu kabul edilebilir. $B' \in PO$ ve

$$|PO| = \frac{2|BO||B'O|}{|BO| - |B'O|}$$

olacak biçimde $P \in L_{BB'}$ seçelim. P noktasından geçen AA' ye paralel olan doğruyu L_a ile gösterelim. ϕ; ekseni L_a ve taban noktası O olan bir g-üçgen-yansıma olsun. ϕ'nin tanımından, Önerme 4.2.14 ve Önerme 4.2.10'dan $\phi(A) = A'$ ve $\phi(B) = B'$'dir.

$\mathcal{P}_{ABA'B'}$'yi $\mathcal{P}_1$ ile gösterelim. Lemma 4.3.9'dan $f\ |_{\mathcal{P}_1}$; A,B,A',B' noktaları tarafından tek türlü tanımlıdır ve $f\ |_{\mathcal{P}_1}\ (\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}_1$'dir. Böylece $f\ |_{\mathcal{P}_1} = \phi\ |_{\mathcal{P}_1}$'dir ve f'nin $\mathcal{D}$'de doğrudan doğruya olma kabulunden $f = \phi\ |_{\mathcal{D}}$'dir. Böylece ispat tamamlanır.

İkinci olarak $\mathcal{P}_{EE'FF'} \subset \mathcal{D}$ olduğu kabul edilebilir.

Lemma 4.3.11 P ve Q, f'nin sabit bıraktığı noktalar olacak biçimde $P \in EE'$ ve $Q \in FF'$ noktaları vardır. (Li vd. 2010)

İspat EF ile $E'F'$'nin kesişim noktasını f'nin sabit bıraktığı açıktır. $A \in EE'$ için $A = A'$ ise P'yi A noktası olarak alırız. Eğer, $A' \neq A$ ise FA ile $F'A'$'nin ya da $F'A$ ile FA''nin kesişim noktası B, f altında sabittir. Bu durumda P'yi L_{BO} ile EE''nin kesişim noktası alırız. L_{PO}; f altında değişmez kaldığı için Q olarak L_{PQ} ile FF''nin arakesit noktasını alırız.

Lemma 4.3.12 PQ; f altında sabit kalır. (Li vd. 2010)

İspat Aksini kabul edelim yani $C' \neq C$ olacak biçimde $C \in (PQ)^o$ olsun. Bu durumda

E, E', C, C' doğrusal değildir ve Lemma 4.3.5'ten bu imkansızdır. O halde PQ, f altında sabittir.

Bölüm 4.1'deki üçgen yansımalar kısımdaki yöntemle PQ boyunca $\triangle_{PFF'}$'nin bir

$$\gamma : \triangle_{PFF'} \rightarrow \triangle_{PFF'}$$

üçgen yansıması vardır. Önerme 4.1.2 ve 4.1.3'ten $f\ |_{\triangle_{PFF'}} = \gamma$'dır. f bir pseudo-afin dönüşüm olduğundan Önerme 4.1.6'dan γ bir afin dönüşüm değildir. Önerme 4.2.14'ten $\gamma = \phi \mid_{\triangle_{PFF'}}$ olacak biçimde bir tek ϕ g-üçgen yansıması vardır. $\phi \mid_{\mathcal{D}}$; doğrudan doğruya olduğundan ve $\phi^2 \mid_{\mathcal{D}} = I$ olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 4.3.13 $f = \phi \mid_{\mathcal{D}}$ olacak biçimde bir g-üçgen yansıma vardır. (Li vd. 2010)

Lemma 4.3.11 ve 4.3.13 ; Teorem 4.2.16'daki gereklilik kısmının ispatını sağlar.

5. ÜST DÜZLEMDE DOĞRUDAN DOĞRUYA OLAN DÖNÜŞÜMLERİN YENİ BİR KARAKTERİZASYONU

Teorem 5.1 $f: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya olan örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda f bir afin dönüşümdür, ya da $f = A \circ \eta$ olacak biçimde $A: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ bir afin dönüşümü ve bir $\eta: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ g-yansıması vadır. (Li ve Wang 2013)

Teorem 5.2 η_1, η_2 aynı sınıra sahip iki g-yansıma olsun. O halde $\eta_1 \circ \eta_2$ bileşimi bir afin dönüşümdür. (Li ve Wang 2013)

Lemma 5.3 f doğruları doğruya örter. (Li ve Wang 2013)

İspat f; doğrudan doğruya örten olmasın. Bu durumda $f(l) \subset l'$ ve $Q' \in l' \setminus f(l)$ olacak şekilde bir l doğrusu vardır. f örten olduğundan $Q' \in l' \setminus f(l)$ olacak şekilde bir $Q \notin l$ vardır.

Eğer l tam doğru değilse $L_Q \cap l \neq \emptyset$'dir.

Eğer l tam doğruysa, l üstünde seçilen bir P noktasıyla L_{PQ} elde edilir.

Görüntüsü l' içinde kalacak şekilde tam olan ve tam olmayan bir doğru elde edilebilir. Diğer taraftan, $L_{A'B'} \cap l' \neq \emptyset$ olacak şekilde bir A', $B' \in \mathbb{H}$ noktaları seçilebilir. Bu noktaların ters görüntüsü A, B olsun. Bu durumda L_{AB} doğrusu tam doğru ya da tam olmayan doğrudan en az birini keser ki bu imkansızdır. Böylece çelişki elde edilir.

Lemma 5.4 Herhangi tam doğrunun görüntüsü de tamdır. Ayrıca, herhangi tam olmayan doğrunun görüstüsü de tam değildir. (Li ve Wang 2013)

İspat Varsayalım ki l bir tam doğru olsun ve $l' = f(l)$ tam olmasın. Bu durumda $L_{A'B'} \cap l' = L_{A'C'} \cap l' = \emptyset$ olacak biçimde doğrusal olmayan A, B, C noktaları vardır. A, B, C noktalarının terslerinin görüntüleri de doğrusal olmayıp ve $L_{AB} \cap l = L_{AC} \cap l = \emptyset$ elde edilir ve bu durum l tam olduğundan imkansızdır.

Şimdi l'nin tam olmadığını ve l''nün tam olduğunu kabul edelim. Herhangi bir L tam doğrusu için, L' tamdır ve $L \cap l \neq \emptyset$'dir. Kesişim noktası P olsun. $l' = L_{P'}$ ve $P' \in l'$ olup $L' = l'$ elde edilir. Buradan $f(\mathbb{H}) = l'$ elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Lemma 5.5 f birebirdir. (Li ve Wang 2013)

İspat f birebir olmasın. Bu durumda $f(P_1) = f(P_2) = P'$ olacak şekilde P_1, P_2 noktaları vardır.

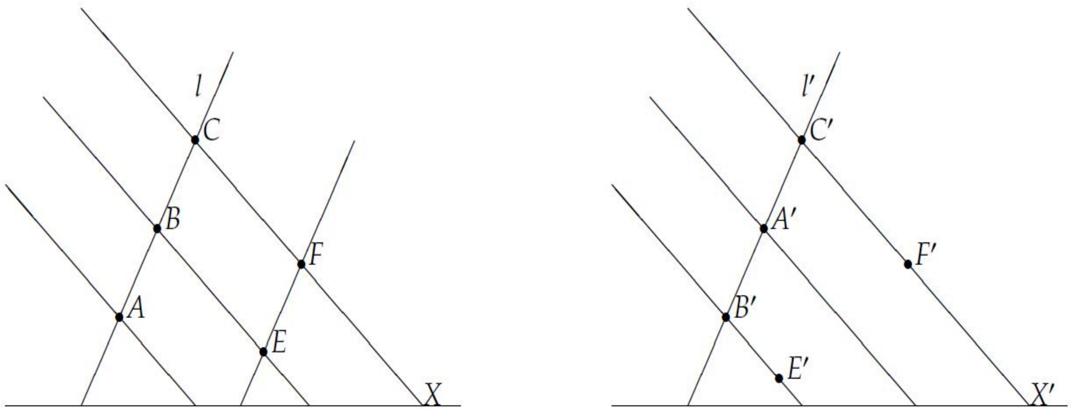
1.Durum $L_{P_1P_2}$ tam olmasın. Lemma 5.4'ten $f(L_{P_1P_2})$ tam değilidr. $P' \neq Q'$ olacak şekilde $Q \in L_{P_1}$ seçelim. O halde $L_{P'Q'} = f(L_{P_1Q})$ bir tam doğrudur. Diğer taraftan L_{P_2Q} tam değildir ve $L_{P'Q'} = f(L_{P_2Q})$ tamdır. Bu bir çelişkidir

2.Durum $L_{P_1P_2}$ tam olsun. $L_{P'} = f(L_{P_1P_2})$ tam doğru olsun. $Q' \notin L_{P'}$ olacak şekilde Q noktası seçilsin. $Q_2{}' \notin L_{P'Q'} \cup L_{P'}$ olacak şekilde Q_2 noktası seçilsin. Bu durumda $L_{P_1Q_2} \cap L_{QP_2}$ veya $L_{P_1Q} \cap L_{QQ_2P_2}$ boş küme olmamalıdır. P_3 kesim noktası olsun. Açıkça, $P_3 \notin L_{P_1P_2}$ ve $f(P_3) = P'$ dir. $L_{P_1P_3}$ tam doğru değildir. 1.Durum'dan bu bir çelişkidir.

Böylece bu ispat tamamlanır.

Lemma 5.6 f sıra korur. (Li ve Wang 2013)

İspat f'nin sıra korumadığını kabul edelim. Bu durumda B noktası A ve C noktaları arasındayken B' noktası A' ve C' noktaları arasında olmayan $A, B, C \in l$ özelliğinde A, B, C noktaları ve l doğrusu vardır. Şekil 5.1'de olduğu gibi A' noktasının B' ve C' arasında olduğunu varsayıyoruz. Sonra sırasıyla A', B', C' noktalarından sırasıyla geçen, tam olmayan paralel l_1, l_2, $l_3$doğruları vardır. Bu durumda $l_{EF} \cap l_1 = \emptyset$ olacak biçimde $E \in l_2$ ve $F \in l_3$ noktaları vardır. Diğer yandan $l_{E'F'} \cap l_1 \neq \emptyset$'dir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

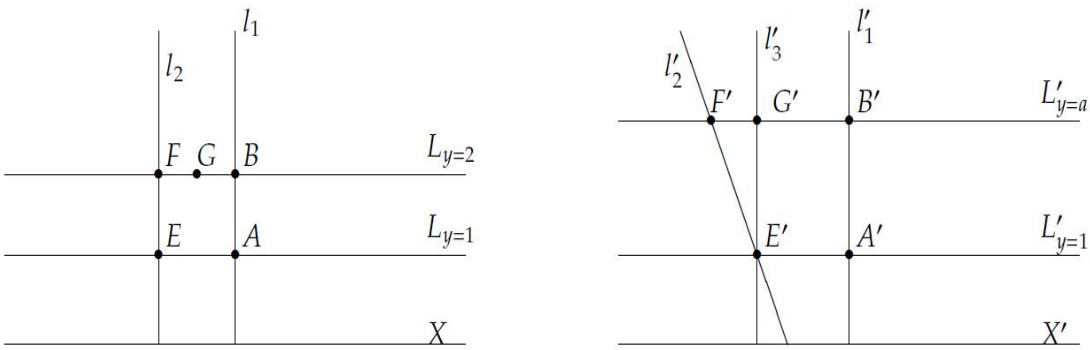


Şekil 5.1

Bazı uygun afin dönüşümleri ($\mathbb{H}$’yi koruyan) oluşturarak, daima f’nin $(0,1)$, $(1,1)$ noktalarını ve $L_{x=0} = \{(x,y) \in \mathbb{H}: x = 0\}$ doğrusunu aşağıdaki şekilde sabit bıraktığını varsayarız. $(0,2)$ noktasının görüntüsünü $(0,a)$ ile gösterelim. Ayrıca $a > 1$ olduğunu varsayalım. Diğer taraftan, g−yansımasını aşağıdaki gibi oluşturabiliriz:

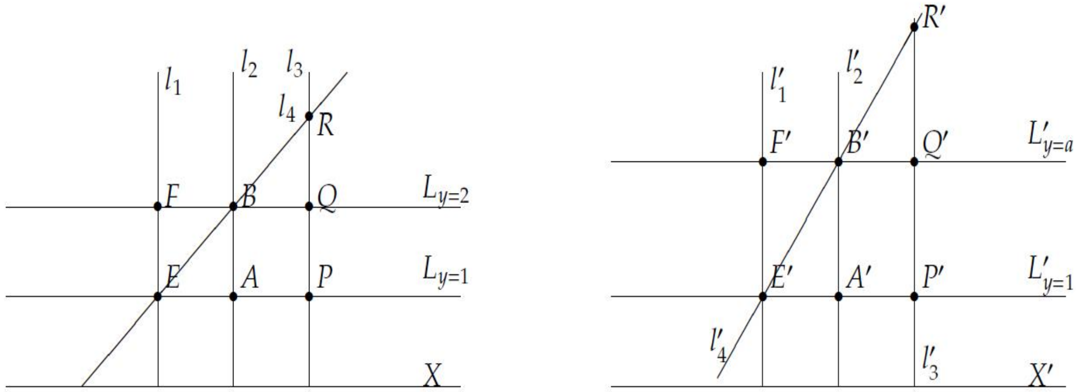
$$\eta_{(0,1)}: (x,y) \mapsto (\frac{x}{y}, \frac{1}{y}).$$

Lemma 5.7 f paralelliği koruyan dönüşümdür. Yani herhangi l_1, l_2 iki paralel doğruları için, $l_1{}'$, $l_2{}'$ doğrularının görüntüleride paraleldir. (Li ve Wang 2013)



Şekil 5.2

İspat Lemma 5.4’e göre, eğer l_1, l_2 tam ise, bu doğruların görüntü doğruları da tam olur. Bu doğruların paralel olduğu açıktır. Dolayısıyla l_1, l_2’nin tam olmadığını varsayabiliriz. Çelişki elde etmek için, l_1 ve l_2’nin birbirine paralel olduğunu ve bunların görüntüleri olan $l_1{}'$ ve $l_2{}'$‘nün paralel olmadığını kabul edelim . l_1, l_2 ve $L_{y=1}$, $L_{y=2}$’nin kesişim noktaları A, B, E, F ile gösterilsin. $l_1{}' \cap l_2{}' = \emptyset$ olduğundan, $G' \in B'F'$, $L_{E'G'}$, $l_1{}'$’e paralel olacak biçimde $G' \in B'F'$ vardır. Diğer taraftan, $G \in BF$, $L_{EG} \cap l_1 \neq \emptyset$’dir. Bu, ispatı tamamlayan bir çelişkidir.



Şekil 5.3

Şekil 5.3'teki gibi $A(0,1)$, $B(0,2)$, $P(1,1)$, $A'(0,1)$, $B'(0,a)$, $P'(1,1)$ noktaları için $\tau = a-1>0$ olsun. f paralelliği koruduğundan ve $L_{PQ} \parallel L_{AB}$ olduğundan $Q(1,2)$ noktasının görüntüsü $Q'(1,1+\tau)$ dir. $L_{BE} \parallel L_{AQ}$ ve $L_{BE} \cap L_{AP} = E(-1,1)$ dir. Böylece $L_{B'E'} \parallel L_{AQ'}$ ve $L_{B'E'} \cap L_{AP'} = E'(-1,1)$ dir. $L_{BE} \cap L_{PQ} = R(1,3)$ ve $L_{B'E'} \cap L_{P'Q'} = R'(1,1+2\tau)$'dir. Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Lemma 5.8 Herhangi bir n_1 tam sayısı ve n_2 pozitif tam sayısı için, $P(n_1, 1+n_2)$ olmak üzere $f(P) = (n_1, 1+n_2\tau)$'dir. (Li ve Wang 2013)

f ve f^{-1} her ikiside doğrudan doğruya birebir ve örten dönüşümler olduğu açıktır. Bu yüzden $a>2$ olduğunu varsayabiliriz, yani $\tau > 1$ olur. Aksi halde, $1<a<2$ ise, f yerine f^{-1}'i düşünebiliriz. $1 < \frac{n_2}{n_1} < \tau$ olacak şekilde iki pozitif n_1, n_2 tam sayı bulunabilir. O zaman $P_1(0,1)$ ve $P_2(n_1, 1+n_2)$'den geçen doğru $L_{x=-1}$ doğrusunu kesecektir. $P_1'(0,1)$ ve $P_2'(n_1, 1+n_{2\tau})$'den geçen doğru $L_{x=-1}$ doğrusunu kesmeyecektir. Bu istenen çelişkidir. Böylece $a=2$'dir. Ayrıca, f, $L_{x=0}$'daki noktaları sabit bırakır.

Lemma 5.9 $f\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya örten bir fonksiyon olsun, $P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$ ve $f(P_3(0,2)) = P_3'(0,a)$ noktalarını sabit bıraksın. Eğer $a>1$ ise $f=I$'dir

Lemma 5.9, Teorem 5.1'in sağladığını gösterir ve Teorem 5.1'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir. (Li ve Wang 2013)

Sonuç 5.10 $f\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya örten bir fonksiyon olsun ve bu fonksiyon $A\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ afin dönüşümü ile $\eta\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ bir g-yansımanın bileşkesiyle $f = A \cdot . \eta$

biçiminde yazılsın. Bu durumda $f = A' \cdot \eta'$ olacak şekilde A' ve η' vardır. (Li ve Wang 2013)

Sonuç 5.11 $f: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya örten bir fonksiyon olsun. Eğer f'nin P ve Q gibi iki sabit noktası varsa $E \in L_{PQ}$ noktası için $f(E) = E$'dir. (Li ve Wang 2013)

Sonuç 5.12 $f: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya örten bir fonksiyon olsun. f'nin doğrusal olmayan üç sabit noktası varsa, o zaman $f = I$'dir. (Li ve Wang 2013)

Sonuç 5.13 $f: \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ doğrudan doğruya örten bir fonksiyon olsun. Eğer f(P) paralel olacak biçimde P paralelkenarı varsa f bir afindir. (Li ve Wang 2013)

5.1 Teorem 5.2'nin İspatı

Bu kısımda Teorem 5.2'yi hesaplama yoluyla ispatlayacağız. Bazı uygun afin dönüşümler konjuge edildiğinde, g-yansımaların aynı $\mathcal{L}_B = \mathcal{X}$ sınırına sahip olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda bunların hepsi yarı üst düzlem $\mathbb{H}^2$'yi korur. Aslında, üst yarı düzlemi koruyan herhangi bir g-yansıma,

$$\eta_{(K,a)}: (x, y) \mapsto \left(\frac{x-a}{Ky} + a, \frac{1}{K^2 y}\right)$$

biçiminde olup, bu g-yansıma $K \neq 0$ ve a reel sayısıyla $\mathcal{P}_0 = \left\{\left(a, -\frac{1}{K}\right)\right\}$ taban noktası tarafından belirlenir.

Diğer g–yansıma $\eta_{(K\prime,a\prime)}$;

$$\eta_{(K\prime,a\prime)}: (x, y) \mapsto \left(\frac{x-a'}{K'y} + a', \frac{1}{K'^2 y}\right)$$

ile gösterilsin**.** Bunların bileşkesi;

$$\eta_{(K\prime,a\prime)} \circ \eta_{(K,a)}: (x, y) \mapsto \left(\frac{K}{K'}x + \frac{a-a'}{K'}K^2 y + a' - \frac{aK}{K'}, \frac{K^2}{K'^2}y\right)$$

bir afin dönüşümdür. Böylece Teorem 5.2'nin ispatını tamamlanır.

Önerme 5.1.1 $\eta_{(K\prime,a\prime)} \circ \eta_{(K,a)}$ afin dönüşümü, $\mathbb{R}^2$ içindeki $\mathbb{H}$'nin sınırındaki bir P

noktasını sabit bırakması için gerek ve yeter koşul $P_0^1\left(a,-\frac{1}{K}\right)$ ve $P_0^2\left(a',-\frac{1}{K'}\right)$ taban noktalarının, P ile doğrusal olmasıdır, yani $K \neq K'$ olmasıdır. Ayrıca, eğer $K = -K'$ ise, $\eta_{(K',a')} \circ \eta_{(K,a)}$ dönüşümü $L_{P_0^1 P_0^2}$ doğrusundaki noktaları sabit bırakır. Eğer $K \neq \pm K'$ ise P, $\eta_{(K',a')} \circ \eta_{(K,a)}$ afin dönüşümün tek sabit noktasıdır. (Li ve Wang 2013)

Önerme 5.1.2 Eğer $K = K'$ ise $\eta_{(K',a')} \circ \eta_{(K,a)}$ afin dönüşümü $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{K}\right\}$ doğrusundaki her noktayı sabit bırakır. (Li ve Wang 2013)

6. KAYNAKLAR

Artin E, 1957, Geometric Algebra, Interscience Publishers, New York.

Atanasjan L.S, Bazylew W.T,1986, Geometria, Cast I, Moskwa.

Byer O, Lazebnik F, Smeltzer D L, 2010, Methods For Euclidean of Geometry, The Mathematical Association of America, 12, 251−272.

Başar F, 2012, Lineer Cebir, Sürat Üniversite Yayınları.

Chubarev A, Pinelis I, 1999, Fundamental Theorem of Teometry Without the 1-to-1 Assumption, Proc. Amer. Math. Soc. 127, 2735–2744.

Demirel O,2021, On Mappings That Preserve Fermat-Torricelli Points, Mathematical Communications, 26, 21-27.

Dinçer S, Gökçe G, Ceran A, 2017, Dönüşümler, Ceran Matematik Yayınları.

Ellers E.W, 1977, Decomposition of Equiaffinities İnto Reflections, Geometriae Dedicata, 6, 297-304.

Hacısalihoğlu H.H, 1976, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrileri, Ankara, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

Jeffers J, 2000, Lost Theorems of Geometry, Amer Math Monthly 107, 800–812.

Kasparek E, 2010, The İnvariant Straight Lines of An Affine Aransformation in $\mathbb{R}^n$ Without Fixed Points, Ann. Math. Sil. 24, 35–37

Kovacs Z, 2016, On The Fixed Points of An Affine Transformation: An Elementary View, İnstitute of Mathematics and Computer Science, The Mathematical Association of America, 12, 251−255.

Li B, Wang Y, 2005, Transformations and Non-degenerate Maps, Sci. China Ser. A 48, 195–205.

Li B, Wang Y, 2009, A New Characterization for İsometries by Triangles, New York J. Math. 15, 423–429

Li B, Wang X&Wang Y, 2010, The Pseudo-affine Transformations in $\mathbb{R}^2$, Science China Mathematics, 53, 755-762.

Li B, Wang Y, 2013, A New Characterization of Line-to-line Maps in The Upper Plane, Filomat, 27, 1, 127-133.

Pambuccian V, 2003, What is Plane Equiaffine Geometry, Aequationes Matematicae, 66, 90-99.

Sabuncuoğlu A, 2005, Analitik Geometri, Ankara, Nobel Akademik Yayıncılık.

Samaris N, 2002, A New Characterization of Mobius Transformations by Use of 2n Points, Journal of Natural Geometry, 22, 35–38.

Soltan V, 2015, Lectures on Convex Sets, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hack-ensack, NJ.

İnternet Kaynakları

1- https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/mbilici/133761, 11.11.2021

2- https://web.itu.edu.tr/~yukselen/Uck351/07%20Konform%20d%F6n%FC%FE%FCm,%20Joukowsky%20profilleri.pdf, 23.06.2022