BİR SOBOLEV TİP DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

2022
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Hale KOYUNCU

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Şerif AMİROV

BİR SOBOLEV TİP DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Hale KOYUNCU

T.C.
Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Şerif AMİROV

KARABÜK
Haziran 2022

Hale KOYUNCU tarafından hazırlanan "BİR SOBOLEV TİP DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Şerif AMİROV ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından Oy Birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 16/06/2022

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)		İmzası
Başkan	: Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (BEÜ)	....
Üye	: Prof. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Ebru ERGÜN HÜSEYİN (KBÜ)	....

KBÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Hasan SOLMAZ ....

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Hale KOYUNCU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR SOBOLEV TİP DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Hale KOYUNCU

Karabük Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Şerif AMİROV

Haziran 2022, 37 Sayfa

Bu tez çalışmasında, bir Sobolev tip denklem için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün asimptotik davranışı incelenmiştir. Ön değerlendirmeler yaparak ve bazı özel eşitsizlikler kullanılarak lineer olmayan terimle ilgili çok basit ve genel bir varsayım altında, t zamanı sonsuza yaklaştığında problemin çözümünün üstel olarak sıfıra yakınsadığı kanıtlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Başlangıç sınır değer problemi, Sobolev tip denklem,çözümün asimptotik davranışı.

Bilim Kodu **:** 20406

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN EQUATION OF THE SOBOLEV TYPE

Hale KOYUNCU

Karabuk University
Institute of Graduate Programs
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Prof. Dr. Serif AMİROV
June 2022, 37 Pages

In this thesis, the asymptotic behavior of the solution of the initial boundary value problem for an equation of the Sobolev type is investigated. By making a priori estimates and using some special inequalities, it is proved that the solution of the problem decay to zero exponentially as time t approaches infinity, under a very simple and general assumption about the non-linear term.

Key Word **:** Initial boundary value problem, Sobolev type equation, asymptotic behavior of the solution.

Science Code : 20406

TEŞEKKÜR

TEŞEKKÜR Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Şerif AMİROV'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme ve Orhan AMİROV'a manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

λ	: Reel Sayı (lamda)
Δ	: Laplace Operatörü (delta)
∇	: Gradyan vektörü (nabla)
∇u	: $(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$
δ	: Delta
Ω	: Omega
Ψ	: Değişken (psi)
ξ	: Değişken (ksi)
α	: katsayı (alfa)
φ	: Değişken (fi)
ϕ	: Değişken (fi)
γ	: Değişken (gamma)
‖.‖	: Norm
R^n	: n boyutlu Euclid uzayı
$L^n(\Omega)$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı $\{ v \mid v , v', \dots , D^m v \in L_p(\Omega)\}$
u_{xx}	: Kısmi türev
u_{tt}	: Kısmi türev
u_{xxtt}	: Kısmi türev
u'	: u fonksiyonun 1. adi türevi
(u, v)	: $\int_0^1 uvdx$ (iç çarpım)

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tez çalışmasında altıncı mertebeden bir lineer olmayan Sobolev tip kısmi diferansiyel denklem için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün asimptotikliği incelenmiştir. Önce Enerji fonksiyonu elde edilmiştir. Sonra bu fonksiyon için ön değerlendirmeler elde edilmiştir. Daha sonra denklemin sağ tarafındaki fonksiyonun üzerine bazı şartlar getirerek uygun eşitsizlikleri kullanarak çözümün asimptotik olarak sönümlendiği gösterilmiştir.

Tezin amacı: Verilen denkleme konulan başlangıç sınır değer probleminin çözümünün asimptotikliğinin incelenmesi.

1.1. TANIMLAR

Tanım 1.1: Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge , m negatif olmayan bir tamsayıdır. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$w^{m,p}(\Omega) = \{\, u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad , \qquad 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev Uzayı denir [16].

Tanım 1.2:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

denklemine Laplace denklemi denir.Δ Laplace operatörüdür.ve n=1,2,3 boyutlu gösterimi aşağıdaki gibi

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad , \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad , \quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

tanımlanır.

Tanım 1.3: Ω, R^n de ölçülebilir bir bölge , $1\leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$L^p(\Omega) = \{u| \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}$$

Bu uzayda norm aşağıdaki gibi tanımlanır [16].

$$||u||_{L_p(\Omega)} = (\int_\Omega |u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

Tanım 1.4:

$$L[u] = u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = f(x) \tag{1.2}$$

denklemi için

$$\mathrm{u}(t_o) = u_0, \mathrm{u}'(t_0)=u_1, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \tag{1.3}$$

şartını sağlayan (1.2)-(1.3) problemine başlangıç değer problemi denir.

Tanım 1.5: Eğer L[u]=$f(x)$ denklemi $\mathcal{D} = \{t \geq 0, \ x \in \Omega\}$ bölgesinde verilmiş ise **Ω** sınırlı bölge olmak üzere (1.2) şartlarına ilave

$$u_{|\partial\Omega} = \varphi(x) \quad , x \in \partial\Omega \, , t \geq 0 \tag{1.4}$$

Şartı da verilirse, (1.2)-(1.3)-(1.4) problemine başlangıç sınır değer problemi denir.

Tanım 1.6: ($H^S(R^n)$ Sobolev uzayında gömülme) : $s > \frac{n}{2}$ ise $H^s(R^n) \hookrightarrow C(R^n)$ olur.Yani $\forall u \in H^s(R^n)$ için

$$||u||_{C(R^n)} \leq c||u||_{H^s(R^n)}$$

Olacak şekilde c > 0 sayısı vardır [16].

Teorem 1.7: $W^{m,p}(\Omega)$ Banach uzayıdır [16].

Teorem 1.8: $1 \leq p < \infty$ ve m negatif olmayan herhangi bir tam sayı olmak üzere

$$W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$$

dır [16].

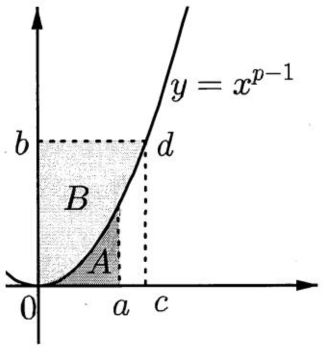
Bazı Önemli Eşitsizlikler

Tanım 1.9: (Young Eşitsizliği): a,b ≥ 0 ve p >1 için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun.

Bu durumda

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{dir.}$$

İspat: $f(x) = x^{p-1}$ fonksiyonun grafiği



şeklindedir.

$$ab \leq A + B$$

dır.

$$A = \int_0^a y dx$$

$$= \int_0^a x^{p-1} dx$$

$$= \frac{a^p}{p}$$

ve

$$B = \int_0^b x dy$$

$$= \int_0^b y^{q-1} dx$$

$$= \frac{b^q}{q}$$

dır. Böylece

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

olur [16].

Tanım 1.10: (Hölder Eşitsizliği): $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer u$\in L^p(\Omega)$ ise bu durumda uv$\in L(\Omega)$ ve

$||uv||_1 \leq ||u||_p||v||_q$ dır.

İspat: u ve v den biri veya her ikisi sıfır olduğunda eşitsizlik açıktır. $u \neq 0, v \neq 0$ olsun. Bu durumda

$.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Young eşitsizliğinde

$$a = \frac{|u|}{||u||_p}$$

$$b = \frac{|v|}{||v||_q}$$

Alınırsa

$$\frac{|u|}{||u||_p} \cdot \frac{|v|}{||v||_q} \leq \frac{\left(\frac{|u|}{||u||_p}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{|v|}{||v||_q}\right)^q}{q}$$

$$= \frac{|u|^p}{p||u||_p^p} + \frac{|v|^q}{q||v||_q^q}$$

Olur. Buradan her iki tarafın Ω bölgesi üzerinde integrali alınırsa

$$\int_\Omega \frac{|u|}{||u||_p} \cdot \frac{|v|}{||v||_q} dx \leq \int_\Omega \left(\frac{|u|^p}{p||u||_p^p} + \frac{|v|^q}{q||v||_q^q}\right) dx$$

Elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{||u||_p||v||_q}\int_\Omega |uv|dx \leq \int_\Omega \frac{|u|^p}{p||u||_p^p}dx + \int_\Omega \frac{|v|^q}{q||v||_q^q}\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{1}{p||u||_p^p}\int_\Omega |u|^p dx + \frac{1}{q||v||_q^q}\int_\Omega |v|^q dx$$

Olur.

$\int_\Omega |u|^p dx = ||u||_p^p$ ve $\int_\Omega |v|^q dx = ||v||_q^q$ olduğundan

$$\frac{1}{||u||_p||v||_q}\int_\Omega |uv|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

dır.

$$\int_\Omega |uv|dx \leq ||u||_p||v||_q$$

$$||uv||_1 \leq ||u||_p||v||_q$$

bulunur [16].

Tanım 1.11: (Minkowski Eşitsizliği): $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer u,v ∈ $L^p(\Omega)$ ise bu durumda

u + v ∈ $L^p(\Omega)$ ve

$||u + v\,||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$ dır.

İspat: $p = 1$ ise

$$||\mathrm{u} + \mathrm{v}||_1 = \int_\Omega |\mathrm{u} + \mathrm{v}|\mathrm{dx} \leq \int_\Omega |u|dx + \int_\Omega |v|dx = ||u||_1 + ||v||_1$$

dır.

$p > 1$ ise

$$\int_{\Omega} |u+v|^p dx = \int_{\Omega} |u+v|^{p-1}.|u+v|dx$$

$$\leq \int_{\Omega} |u+v|^{p-1}.|u|dx + \int_{\Omega} |u+v|^{p-1}.|v|dx$$

Yazılabilir. Şimdi eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller için kestirimler elde edelim. Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega} |u|.|u+v|^{p-1}dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_{\Omega} |u+v|^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ den $(p-1)q=p$ olduğundan

$$\int_{\Omega} |u|.|u+v|^{p-1}dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_{\Omega} |u+v|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= ||u||_p||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$$

olur. Benzer şekilde

$$\int_{\Omega} |v|.|u+v|^{p-1}dx \leq ||v||_p||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$$

dır. Bu ifadeler yerlerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} |u+v|^p dx \leq \int_{\Omega} |u|.|u+v|^{p-1}dx + \int_{\Omega} |v|.|u+v|^{p-1}dx$$

$$\leq ||u||_p||u+v||_p^{\frac{p}{q}} + ||v||_p||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$$

$$= (||u||_p + ||v||_p)||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$$

$$||u+v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$$

olur. Buradan eşitsizlik $||u+v||_p^{\frac{p}{q}}$ ile bölünürse

$$||u+v||_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \left(||u||_p + ||v||_p\right)$$

$$||u+v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$$

bulunur [16].

Tanım 1.12: (Gronwall Eşitsizliği (Diferansiyel Form)): u(t), [0,T] aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$ negatif olmayan [0,T] üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$u'(t) \leq \phi(t)u(t) + \psi(t)$$

Eşitsizliği sağlasın. Bu durumda $0 \leq t \leq T$ için

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \phi(\tau)d\tau}\left(u(0) + \int_0^t \psi(\tau)d\tau\right)$$

yazılabilir.

İspat:

$$\frac{d}{dt}\left(u(t)e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}\right) = e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}(u' - \phi(t)u(t))$$

$$\leq e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}.\psi(t)$$

yazılabilir.

Buradan (0,t) aralığında integral alınırsa

$$u(t)e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau} - u(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}.\psi(\tau)d\tau$$

$$u(t)e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau} \leq u(0) + \int_0^t e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}.\psi(\tau)d\tau$$

$$u(t) \leq e^{\int_0^t \phi(\tau)d\tau}\left(u(0) + \int_0^t e^{-\int_0^t \phi(\tau)d\tau}.\psi(\tau)d\tau\right)$$

bulunur [16].

Tanım 1.13: (Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form)):

i. $v(t)$, hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau)d\tau + C_2$$

İntegral eşitsizliğini sağlayan, negatif olmayan ve [0,T] üzerinde integrallenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

olur.

ii. Özel olarak

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau)d\tau$$

olur.

İspat:

i. $u(t) = \int_0^t v\,(\tau)d\tau$ olsun. Bu durumda

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau)d\tau + C_2$$

Eşitsizliği

$$u'(t) \leq C_1 u(t) + C_2$$

Eşitsizliğine dönüşür. Gronwall eşitsizliğinin diferansiyel formundan

$$u(t) \leq e^{C_1 t}(u(0) + C_2 t) = C_2 t e^{C_1 t}$$

Yazılabilir. Böylece

$$v(t) \leq C_1 \int_0^t v(\tau)d\tau + C_2$$

$$= C_1 u(t) + C_2$$

$$\leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t})$$

Bulunur.

ii. Önceki eşitsizlikte $C_2 = 0$ alınırsa istenen bulunur [16].

Tanım 1.14: (Sobolev-Poincare Eşitsizliği): $2 \leq q < \infty$ $(n = 1,2)$ ve $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ $(n \geq 3)$ olsun. Bu durumda $u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$||u||_q \leq ||\nabla u||_2$$

dır. Burada $c = c(\Omega, p)$ dır.

İspat: Sobolev gömülme teoreminden

$$p \leq q \leq \begin{cases} \dfrac{np}{n - mp} & n > mp \\ +\infty & n \leq mp \end{cases}$$

İçin

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

dır. Buradan $m = 1$ ve $p = 2$ alınırsa

$$2 \leq q \leq \begin{cases} \dfrac{2n}{n - 2} & n > 2 \\ +\infty & n \leq 2 \end{cases}$$

İçin

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

yani

$$||u||_q \leq C||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)}$$

olur. Ayrıca

$$||u||_{W_0^{1,2}(\Omega)} = ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = ||\nabla u||$$

olduğundan ispat tamamlanır [16].

Tanım 1.15: (İnterpolasyon Eşitsizliği): $1 \leq p < q < r$ ve $0 < \theta < 1$ için $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{q}$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ ise $u \in L^q(\Omega)$ ve

$$||u||_q \leq ||u||_p^{\theta}||u||_r^{1-\theta}$$

dır.

İspat: $s = \frac{p}{\theta q}$ ve $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ olsun. Bu durumu s≥ 1 ve

$$s' = \frac{s}{s-1}$$
$$= \frac{\frac{p}{\theta q}}{\frac{p}{\theta q} - 1}$$
$$= \frac{p}{p - \theta q}$$

dır. Ayrıca $\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r} = \frac{1}{q} \Longrightarrow \frac{p}{p-\theta q} = \frac{r}{(1-\theta)q}$ olduğundan

$$s' = \frac{s}{s-1}$$
$$= \frac{r}{(1-\theta)q}$$

$(r < \infty)$ olur.

Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$||u||_q^q = \int_\Omega |u|^q dx$$

$$= \int_\Omega |u|^{\theta q} |u|^{(1-\theta)q} dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega |u|^{\theta q s}\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta)q s'} dx \right)^{\frac{1}{s'}}$$

$$= ||u||_p^{\theta q} ||u||_r^{(1-\theta)q}$$

olur. Burada her tarafın $\frac{1}{q}$. kuvveti alınırsa

$$||u||_q \leq ||u||_p^{\theta} ||u||_r^{1-\theta}$$

bulunur [16].

BÖLÜM 2

LİTERATÜR ÇALIŞMASI

1980 yılında Webb [6] tarafından bakılan

$$w_{tt} - \alpha\Delta w_t - \Delta w = f(w) \quad , t > 0 \tag{2.1}$$

$$w(x, 0) = \phi(x) , \quad x \in \Omega \tag{2.2}$$

$$w_t(x, 0) = \psi(x) \quad , x \in \Omega \tag{2.3}$$

$$w(x, 0) = 0 , x \in \partial\Omega \quad , t \geq 0 \tag{2.4}$$

(2.1)-(2.4) lineer olmayan başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile beraber t→ ∞ daki davranışları incelenmiştir.

Mitsuhiro ve Kosuke, dağıtıcı terimli tipik yarı lineer dalga denklemi için

$$u_{tt} - \Delta u + u_t - |u|^p u = 0, \quad R^N x[0, \infty) \tag{2.5}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad u_t(x, 0) = u_1(x) \tag{2.6}$$

(2.5)-(2.6) Cauchy probleminin çözümünün varlığını incelemişlerdir [11].

Shubin ve Guowang , çok boyutlu genelleştirilmiş IMBq denklemine konulan Cauchy problemi için

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} - \Delta u = \Delta f(u), \quad (x, t) \in R^n \; x \; (0, \infty) \tag{2.7}$$

$$u(x,0) = u_0\,(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in R^n \tag{2.8}$$

(2.7)-(2.8) başlangıç değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini incelemişlerdir ve genelleştirilmiş IMBq denklemine konulan Cauchy problemi için global çözümlerinin var olmadığını kanıtlamışlardır [21].

Xu , Zhao ve Shen, dördüncü dereceden dalga denklemine konulan

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} = f(u), \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0 \tag{2.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x), \qquad\qquad x \in \Omega \tag{2.10}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.11}$$

(2.9)-(2.11) başlangıç sınır değer problemini dağılımlı ve dağıtıcı terimlerle incelemişlerdir. Çarpan yöntemi kullanılarak, lineer olmayan terime ilişkin zayıf koşullar altında, problemin global çözümünün, zaman sonsuza yaklaştıkça üstel olarak sıfıra yakınsadığını kanıtlamışlardır [17].

Xu ve Yacheng, sönümlü lineer olmayan dalga denklemi için

$$u_{tt} - \alpha\Delta u_t - \Delta u = f(u), \qquad \alpha > 0, x \in \Omega, t > 0 \tag{2.12}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x), \qquad\qquad x \in \Omega \tag{2.13}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.14}$$

(2.12)-(2.14) başlangıç sınır değer problemini incelemişlerdir. Genelleştirilmiş integral tahmin yöntemleri kullanılarak, lineer olmayan terimlerle ilgili zayıf koşullar altında t zamanı sonsuza yaklaştıkça çözümlerin üstel olarak sıfıra yakınsadığını kanıtlamışlardır [18].

Polat ve Kaya dağıtıcı ve dağılımlı terimler ile birlikte lineer olmayan dalga denklem sınıfı için

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} - \lambda u_{xxt} + u = \sigma(u_x)_x \qquad ,(x,t) \in (0,t)x(0,t) \qquad (2.15)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad ,t \geq 0 \qquad (2.16)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad ,u_t(x,0) = u_1(x) \qquad ,x \in [0,1] \qquad (2.17)$$

(2.15)-(2.17) başlangıç değer probleminin hem global hem de lokal olarak asimptotik davranışları ve patlamalı çözümleri ele almışlardır. Lineer olmayan terimler ve başlangıç verileri üzerindeki zayıf koşullar altında problemin tek çözümü olduğunu global çözümlerin sürekliliğini ve $t \to \infty$'a giderken çözümün üstel olarak sıfıra yaklaşıp yok olabileceğini incelemişlerdir. [14].

Hui ve Yuzhu,

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + u_t = f(u), \quad x \in \Omega, t > 0 \qquad (2.18)$$

$$u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, t > 0 \qquad (2.19)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \qquad (2.20)$$

lineer olmayan kuvvetli sönümlü dalga denklemiyle birlikte yarı lineer dalga denklemini ele almışlardır. Bunun sonucunda yeni inşaa edilmiş bir fonksiyon ve içbükeylik argümenti yardımıyla, bu problem için genel bir sonlu zaman patlaması kriteri oluşturmuşlardır [10].

Xiangying ve Guowang, dördüncü dereceden lineer olmayan bir evrim denklemi için

$$u_{tt} - a_1 u_{xx} - a_2 u_{xxt} - a_3 u_{xxtt} = \varphi(u_x)_x, \; x \in (0,1), t > 0 \qquad (2.21)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \qquad (2.22)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in [0,t] \tag{2.23}$$

(2.21)-(2.23) başlangıç–sınır değer probleminin çözümünün asimptotik davranışını incelemişlerdir [23].

Gür ve Güleç, aşağıdaki dördüncü dereceden lineer olmayan dalga denkleminin

$$u_{tt} - \alpha_1 \Delta u - \beta_1 \Delta u_t - \gamma_1 \Delta u_{tt} = f(u) \tag{2.24}$$

$$u(x,0) = 0\,, \qquad u_t(x,0) = 0 \tag{2.25}$$

$$u_{|\partial\Omega} \tag{2.26}$$

(2.24)-(2.26) problemi için ön değerlendirmeler yapıldıktan sonra problemin çözümünün $H^1(\Omega)$ deki α, β ve γ katsayılarına sürekli bağlı olduğu kanıtlamışlardır [7].

Amin ve Hamideh, akışkan bir sıvı da çift yönlü yüzey dalgalarını modelleyen bir evrim denklemi için

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + \alpha \Delta u_t + \gamma \Delta^2 u_t = \Delta\Big(\beta\big(f(u_t)\big) + g(u)\Big), x \in R^n, t > 0 \tag{2.27}$$

$$u(0) = u_0(x), \quad u_t(0) = u_1(x), \qquad x \in R^n, \qquad t > 0 \tag{2.28}$$

(2.27)-(2.28) Cauchy problemini ele almışlardır. Başlangıç değeri üzerindeki zayıf koşullar altında, bazı zaman ağırlıklı uzaylarda global çözümlerin varlığı ve asimptotik davranışı daralma dönüşümü ile elde etmişlerdir [4].

Stephane ve Belkacem, Kelvin-Voigt sönümü ile ilgili dinamik sınır koşulları ve çok boyutlu dalga denklemi incelemişlerdir.

$$u_{tt} - \Delta u - \alpha \Delta u_t = |u|^{p-2} u, \qquad x \in \Omega, \qquad t > 0 \tag{2.29}$$

$$u(x,t) = 0,\ x \in \Gamma_0\ ,\qquad t > 0 \tag{2.30}$$

$$u_{tt}(x,t) = -a\left[\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) + \frac{\alpha \partial u_t}{\partial v}(x,t) + r|u_t|^{m-2}u_t(x,t)\right], x \in \Gamma_1, t > 0 \tag{2.31}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x),\qquad x \in \Omega \tag{2.32}$$

Kararlı bir kümede çözümlerin varlığı ve kararlılığı kanıtlanmıştır. Kararsız kümede başlangıç verileriyle ve lineer dinamik sınır koşulları ile birlikte (2.29)-(2.32) problemin çözümü için patlama elde etmişlerdir [22].

Polat ve Pişkin, genelleştirilmiş sönümlü çift dağılım denklemi için

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxx} - \alpha u_{xxt} = g(u)_{xx},\ \ x \in R, t > 0 \tag{2.33}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2.34}$$

(2.33)-(2.34) Cauchy problemini incelemişlerdir. Çarpan yöntemi kullanılarak, lineer olmayan terimle ilgili çok basit ve zayıf koşullar altında, $t \to \infty$ yaklaştıkça problemin çözümünün sıfıra yakınsadığını kanıtlamışlardır [13].

Polat ve Pişkin, genelleştirilmiş sönümlü çok boyutlu Boussinesq denklemi için

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - k\Delta u_t = \Delta f(u)\ ,\quad (x,t) \in R^n x(0,\infty) \tag{2.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\ \ , u_t(x,0) = u_1(x)\ , x \in R^n \tag{2.35}$$

(2.34)-(2.35) Cauchy problemini incelemişlerdir. Bir çarpan yöntemi kullanılarak, lineer olmayan terimle ilgili çok basit ve zayıf koşullar altında, $t \to \infty$ yaklaştıkça problemin çözümünün sıfıra yakınsadığını kanıtlamışlardır [12].

Yinxia ve Hengujan, Genelleştirilmiş sönümlü Boussinesq denklemi için

$$u_{tt} - \Delta u - 2b\Delta u_t + \alpha\Delta^2 u = \Delta f(u), \qquad t > 0 \tag{2.36}$$

$$t{:}\,0\; u = u_0(x), \qquad u_t = u_1(x) \tag{2.37}$$

(2.36)-(2.37) Cauchy problemini incelemişlerdir. Başlangıç değerindeki zayıf koşul altında, tüm uzay boyutları için çözümlerin global varlığını ve optimal bozulma tahminini kanıtlamışlardır. Ayrıca, zaman sonsuza doğru giderken çözümün lineer çözüme yaklaştırılabileceği gösterilmiştir [25].

Xu ve Yanbing, lineer olmayan dördüncü mertebeden dağılımlı-dağıtıcı dalga denkleminin

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} + u_t = |u|^{p-1}u, \quad \Omega x(0,\infty) \tag{2.38}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \;\; t > 0 \tag{2.39}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \Omega \tag{2.40}$$

(2.38)-(2.40) başlangıç sınır değeri problemini araştırmışlardır. İç bükeylik yöntemi kullanılarak keyfi pozitif başlangıç enerjisine sahip belli çözümler için patlama elde etmişlerdir [19].

Xu ve Yanbing, dördüncü dereceden güçlü sönümlü lineer olmayan dalga denklemleri sınıfı için

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u - \alpha\Delta u_t = f(u) \quad , \quad x \in \Omega, \;\; t > 0 \tag{2.41}$$

$$u(x,0) = u_o(x) \quad u_t(x,0) = u_1(x) \;\; , \quad x \in \Omega \tag{2.42}$$

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad , t \geq 0 \tag{2.43}$$

(2.41)-(2.43) Başlangıç sınır değer problemini incelemişlerdir. Potansiyel kuyu ailesini tanıtarak F(u)'da bazı zayıf koşullar altında çözümün asimptotik davranışı ve varlığı kanıtlamışlardır [20].

Yuzhu, genelleştirilmiş Boussinesq denklemi için

$$u_{tt} - a\Delta u_{tt} - 2b\Delta u_t - \alpha\Delta^3 u + \beta\Delta^2 u - \Delta u = \Delta f(u), \quad x \in R^n, t > 0 \tag{2.44}$$

$$t{:}\,0, \ \ u = u_0(x), \quad u_t = u_1(x), \ \ x \in R^n, \quad t > 0 \tag{2.45}$$

(2.44)-(2.45) Cauchy probleminin global çözümünün varlığını ve tekliğini elde etmiştir. Bazı varsayımlar altında, genelleştirilmiş Boussinesq denklemi için Cauchy probleminin zayıf çözümünün L^∞ normunda, t sonsuza giderken sıfıra yakınsadığı kanıtlamıştır [24].

Polat ve Pişkin, çok boyutlu genelleştirilmiş Boussinesq tipi denklemi için

$$u_{tt} - \Delta u - a\Delta u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} - k\Delta u_t = \Delta f(u) \ \ , (x,t) \in R^n x(0,\infty) \tag{2.46}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \ \ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad , \qquad x \in R^n \tag{2.47}$$

(2.46)-(2.47) Cauchy probleminin çözümleri sönümlü terimlerle birlikte zaman içinde hem lokal hem de global olarak varoluşu ve global varoluşsuzluğuyla asimptotik davranışlarını ele almışlardır [15].

Huafei ve Shang, aşağıdaki lineer olmayan sönümlü terimler ve kaynak terimlerle birlikte çift dağılımlı -dağıtıcı dalga denkleminin

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + \Delta^2 u - \Delta u_{tt} + a|u_t|^{m-2}u_t = b|u|^{p-2}u, x \in \Omega, t > 0 \tag{2.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2.49}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{2.50}$$

(2.48)-(2.50) Başlangıç sınır değer problemini ele almışlardır. Galerkin yöntemiyle monoton kompaktlık yönteminin birleşmesiyle en az tahminle global çözümlerin varlığı elde etmişlerdir. Ayrıca bazı varsayımlar altında global çözümlerin asimptotik davranışlarını da araştırmışlardır [9].

Gür ve Güleç , lineer olmayan kuvvetli sönümlü bir dalga denklemi için başlangıç-sınır değeri problemi ele alınmışlardır.

$$u_{tt} - \Delta u + \beta |u_t|^2 u_t = \alpha \Delta u_t, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{2.51}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2.52}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0 \tag{2.53}$$

$H^1(\Omega)$ deki α, β katsayılarına sürekli bağlılığı ve lineer olmayan kuvvetli sönümlü dalga denkleminin çözümünün kararlılığı incelenmiştir [8].

Gür ve Bayraktar ,sönümlü lineer olmayan geliştirilmiş Boussinesq denklemi için

$$u_{tt} - b\Delta u - \delta \Delta u_{tt} - r\Delta u_t = \Delta f(u), \qquad (x,t) \in \Omega x[0,T] \tag{2.54}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \subset R^n (n \geq 3) \tag{2.55}$$

$$u(x,t) = 0\,, \quad (x,t) \in \partial\Omega x[0,T], \qquad T > 0 \tag{2.56}$$

(2.54)-(2.56) başlangıç sınır değer problemini incelemişlerdir. Problemin başlangıç verileri ve katsayıları göz önünde bulundurularak denklemin çözümleri için a prior değerlendirmeler yapılmıştır. Çözümlerin δ,b ve r katsayılarındaki sürekli bağımlılığı çarpan yöntemiyle elde etmişlerdir [5].

Amirov ve Anutgan,

$$u_{ttxx} + \alpha^2 u_{xx} - \beta^2((q(u))_{tt} = f(x,t)$$

Burada, q(ξ) sürekli bir fonksiyondur. Böyle bir denklem için sınır-değer probleminin çözülebilirliği [1]. makalede ispatlanmıştır. Bahsedilen çalışmadaki q(ξ) fonksiyonuna belli şartlar yüklenerek farklı sınır-değer problemleri için çözümlerin varlık ve teklik teoremleri elde etmişlerdir. Bu çalışmanın devamı olarak, denklem için konulan sınır-değer probleminin yaklaşık çözümü ve belli şartlar dahilinde çözümün dayanıklılığını araştırmışlardır. [2]. Ek olarak, aynı tip denklem için q(ξ) durumunda polinom fonksiyon ve tanh yöntemleri kullanarak solitary dalga çözümlerini elde edilmiştir [3].

Bu tez aşamasında aşağıda verilen altıncı dereceden lineer olmayan Sobolev tip kısmi diferansiyel denklem için başlangıç sınır değer problemini inceleyeceğiz.

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxt} - u_{xxtt} - u_{xxxxxx} = f(u)\ ,\ \ x \in (0,1)\ , \qquad t \geq 0 \quad (2.57)$$

Burada $f(s)$ lineer olmayan bir fonksiyondur. (2.57) de ön değerlendirmeler yaparak lineer olmayan terimle ilgili çok basit ve genel bir varsayım altında, t zamanı sonsuza yaklaştığında problemin çözümünün üstel olarak sıfıra yakınsadığını kanıtlayacağız.

BÖLÜM 3

BİR SOBOLEV TİP DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN ASİMPTOTİK DAVRANIŞI

Bu çalışmada aşağıdaki altıncı mertebeden bir lineer olmayan Sobolev tip kısmi diferansiyel denklem için başlangıç sınır değer probleminin

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} - \Delta^3 u = f(u) \ , x \in (0,1) \ , t \geq 0 \qquad (3.1)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ , \quad u_t(x,0) = u_1(x) \ , \qquad x \in [0,1] \qquad (3.2)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ , \qquad t \geq 0 \qquad (3.3)$$

(3.2) başlangıç , (3.3) sınır şartlarını sağlayan çözümün asimptotik davranışlarını inceleyeceğiz. Burada u(x,t) aranan fonksiyonu , $f(s)$ lineer olmayan bir fonksiyon ve $u_0(x)$, $u_1(x)$ başlangıç verileridir.

Teorem 3.1.: Varsayalım ki

$$0 \leq -F(u) \leq -f(u)u \qquad \forall u \in R \ , \qquad F(u) = \int_0^u f(s)ds.$$

u ,(3.1)-(3.3) probleminin çözümü olsun. O zaman C ve λ pozitif sabitleri için

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t} \qquad 0 \leq t < \infty \qquad (3.4)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada

$$E(t) = \frac{||u_t||^2}{2} + \frac{||\nabla u||^2}{2} + \frac{||\nabla \mathrm{u}_t||^2}{2} + \frac{||\nabla^3 u||^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx \qquad (3.5)$$

Enerji fonksiyonudur.

İspat: (3.1) denklemini u_t ile skaler çarpıp 0'dan 1'e kadar integralleyelim

$$\int_0^1 u_{tt}u_t dx - \int_0^1 u_{xx}u_t dx - \int_0^1 u_{xxt}u_t dx - \int_0^1 u_{xxtt}u_t dx$$
$$- \int_0^1 u_{xxxxxx}u_t dx = \int_0^1 f(u)u_t dx$$

Şimdi kısmi integrasyon formülü kullanırsak

$$\frac{d}{2dt}\left||u_t|\right|^2 + \frac{d}{2dt}\left||u_x|\right|^2 + \left||u_{xt}|\right|^2 + \frac{d}{2dt}\left||u_{xt}|\right|^2 + \frac{d}{2dt}\left||\nabla^3 u|\right|^2$$
$$- \frac{d}{dt}\int_0^1 F(u)dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{||u_t||^2}{2} + \frac{||\nabla u||^2}{2} + \frac{||\nabla u_t||^2}{2} + \frac{||\nabla^3 u||^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx\right) + ||u_{xt}||^2 = 0 \qquad (3.6)$$

eşitliği elde ederiz.

(3.6)'yı (3.5) te yerine yazarsak:

$$\frac{d}{dt}E(t) + \left||\nabla \mathrm{u}_t|\right|^2 = 0 \qquad (3.7)$$

elde ederiz.

(3.7) eşitsizliğini $\delta > 0$ olmak şartıyla $e^{\delta t}$ ile çarpalım:

$$e^{\delta t}\frac{d}{dt}E(t)+e^{\delta t}\left\|\nabla u_t\right\|^2=0$$

Bu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\delta t}E(t)\right)+e^{\delta t}\left\|\nabla u_t\right\|^2=\delta e^{\delta t}E(t) \quad (3.8)$$

(3.8) denklemini 0'dan t'ye kadar integrallersek

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(e^{\delta\tau}E(\tau)\right)d\tau+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau=\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$e^{\delta t}E(t)-E(0)+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau=\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}\left\|\nabla u_\tau\right\|^2 d\tau=E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafındaki integralde E(t) yerine (3.5)'i kullanırsak

$$\begin{aligned}e^{\delta t}E(t)+\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \\ &= E(0) \\ &+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\Big(\frac{||u_\tau||^2}{2}+\frac{||\nabla u||^2}{2}+\frac{||\nabla u_\tau||^2}{2}+\frac{||\nabla^3 u||^2}{2}-\int_0^1 F(u)dx\Big)d\tau\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{||u_\tau||^2}{2}+\frac{||\nabla u||^2}{2}+\frac{||\nabla u_\tau||^2}{2}\right)\\ &\qquad+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{\left\|\nabla^3 u\right\|^2}{2}-\int_0^1 F(u)dx\right)d\tau \qquad (3.9)\end{aligned}$$

elde ederiz.

Teorem 1'in şartlarını dikkate alarak (3.9)'da ki son integrali değerlendirelim

$$\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx \leq \frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 f(u)udx$$

$$\delta \int_0^t e^{\delta\tau} \left(\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx \right) d\tau$$
$$\leq \delta \int_0^t e^{\delta\tau} \left(\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 f(u)udx \right) d\tau \qquad (3.10)$$

Bu eşitsizlikte görüldüğü gibi , eşitsizliğin sağ tarafındaki integraldeki $\int_0^1 f(u)udx$ ifadesindeki $f(u)$ yerine (3.1) denkleminin sol tarafını yazarsak

$$\int_0^t e^{\delta\tau} \left(\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx \right) d\tau$$
$$\leq \int_0^t e^{\delta\tau} \left(\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \left||\nabla^3 u|\right|^2 - (u_{\tau\tau}u) - \left||\nabla u|\right|^2 - \frac{d}{2d\tau}\left||\nabla u|\right|^2 \right.$$
$$\left. - (\nabla u_{\tau\tau}\nabla u) \right) d\tau$$
$$= \int_0^t e^{\delta\tau} \left(-\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - (u_{\tau\tau}u) - \left||\nabla u|\right|^2 - \frac{d}{2d\tau}\left||\nabla u|\right|^2 - (\nabla u_{\tau\tau}\nabla u) \right) d\tau \qquad (3.11)$$

elde ederiz.

(3.11)'in sağ tarafından

$$-\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} \ ve \ -\left||\nabla u|\right|^2$$

gibi kesin negatif olan terimleri atarsak (3.11) aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür.

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2}-\int_0^1 F(u)dx\right)d\tau$$

$$\leq \delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(-(u_{\tau\tau}u)-\frac{d}{2d\tau}\left||\nabla u|\right|^2-(\nabla \mathrm{u}_{\tau\tau}u)\right)d\tau \qquad (3.12)$$

(3.12) eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri sırasıyla değerlendirelim:
Önce

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}u)d\tau$$

İntegraline bakalım:

Bunun için aşağıdaki ifadeyi inceleyelim

$$-\frac{d}{dt}(\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau u)d\tau)=-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau u)d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}u)d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}||u_\tau||^2 d\tau$$

$$-e^{\delta t}(u_t u)+(u_1 u_0)=-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau u)d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}u)d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}||u_\tau||^2\,d\tau$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını δ ,$(\delta>0)$ ile çarpalım ve istenen integrali yalnız bırakırsak

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}u)d\tau$$

$$=-\delta e^{\delta t}(u_t u)+\delta(u_1 u_0)+\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}(u_\tau u)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left||u_\tau|\right|^2 d\tau$$

eşitliği elde ederiz.

Bu eşitlikte son terim hariç geri kalan terimlere Young eşitsizliği uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(u_{\tau\tau}u)d\tau$$

$$\leq \frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\left|\left|u_t\right|\right|^2+\left|\left|u\right|\right|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\left|\left|u_1\right|\right|^2+\left|\left|u_0\right|\right|^2\right)$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left|\left|u_\tau\right|\right|^2+\left|\left|u\right|\right|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left|\left|u_\tau\right|\right|^2 d\tau \qquad (3.13)$$

Şimdi aşağıdaki integrale bakalım

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{2d\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau$$

Bunun için aşağıdaki ifadeyi inceleyelim:

$$-\int_0^t \frac{d}{2d\tau}\left(e^{\delta\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2\right)d\tau=-\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{2d\tau}||\nabla u||^2 d\tau$$

$$-\frac{1}{2}e^{\delta t}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2+\frac{1}{2}\left|\left|\nabla u_0\right|\right|^2=-\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau-\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{2d\tau}||\nabla u||^2 d\tau$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını δ ,$(\delta>0)$ ile çarpalım ve istenen integrali yalnız bırakırsak

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{2d\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau=-\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2+\frac{\delta}{2}\left|\left|\nabla u_0\right|\right|^2+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau$$

eşitliği elde ederiz.

Yukarıdaki eşitlikte kesin negatif olan terimi atarsak

$$-\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\frac{d}{2d\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau \quad \leq\frac{\delta}{2}\left|\left|\nabla u_0\right|\right|^2+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left|\left|\nabla u\right|\right|^2 d\tau \qquad (3.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Son olarak aşağıdaki integrale bakalım:

$$-\delta \int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_{\tau\tau}\nabla u)d\tau$$

Bunun için aşağıdaki ifadeyi inceleyelim:

$$-\frac{d}{dt}(\int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla \mathrm{u}_\tau \nabla u)d\tau)$$

$$= -\delta \int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_\tau \nabla u)d\tau - \int_0^t (\nabla u_{\tau\tau}\nabla u)d\tau - \int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

$$-e^{\delta t}(\nabla u_t \nabla u) + (\nabla u_1 \nabla u_0)$$

$$= -\delta \int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_\tau \nabla u)d\tau - \int_0^t (\nabla u_{\tau\tau}\nabla u)d\tau - \int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

Şimdi elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafını δ ,$(\delta > 0)$ ile çarpalım ve istenen integrali yalnız bırakırsak

$$-\delta \int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_{\tau\tau}\nabla u)$$

$$= -\delta e^{\delta t}(\nabla u_t \nabla u) + \delta(\nabla u_1 \nabla u_0)$$

$$+ \delta^2 \int_0^t e^{\delta\tau}((\nabla u_\tau \nabla u)d\tau + \delta \int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

eşitliği elde ederiz.

Bu eşitlikte son terim hariç geri kalan terimlere Young eşitsizliği uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$-\delta \int_0^t e^{\delta\tau}(\nabla u_{\tau\tau}\nabla u)$$

$$\le \frac{\delta}{2} e^{\delta t}(\left||\nabla u_t|\right|^2 + ||\nabla u||^2) + \frac{\delta}{2}(\left||\nabla u_1|\right|^2 + ||\nabla u_0||^2)$$

$$+ \frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(||\nabla u_\tau\right||^2 + \left|\nabla u|\right|^2\right) + \delta \int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \qquad (3.15)$$

(3.13) , (3.14) ve (3.15). eşitsizlikleri (3.9) ve (3.12) de dikkate alırsak

$$e^{\delta t}E(t)+\int_0^1 e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

$$\leq E(0)+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}(\frac{||u_\tau||^2}{2}+\frac{||\nabla u||^2}{2}+\frac{||\nabla u_\tau||^2}{2})\,d\tau$$

$$+\frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\left||u_t|\right|^2+\left||u|\right|^2\right)+\frac{\delta}{2}\left(\left||u_1|\right|^2+\left||u_0|\right|^2\right)$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left||u_\tau|\right|^2+\left||u|\right|^2\right)d\tau+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left||u_\tau|\right|^2 d\tau+\frac{\delta}{2}\left||\nabla u_0|\right|^2$$

$$+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left||\nabla u|\right|^2 d\tau+\frac{\delta}{2}e^{\delta t}(\left||\nabla u_t|\right|^2+||\nabla u||^2)+\frac{\delta}{2}(\left||\nabla u_1|\right|^2$$

$$+||\nabla u_0||^2)+\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(||\nabla u_\tau\right||^2+\left||\nabla u|\right|^2\right)$$

$$+\delta\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \tag{3.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.16) eşitsizliğinde bulunan

$$\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left||u_\tau|\right|^2 d\tau\ ,\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}||u||^2 d\tau\ \ ,\delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left||u_\tau|\right|^2 d\tau,\frac{\delta}{2}e^{\delta t}||u||^2$$

İntegrallerine $\forall u\in H_0^1(\Omega)\ için\ ||u||^2\leq\lambda_0||\nabla u||^2$ Sobolev-Poincare eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$\delta\int_0^t e^{\delta\tau}||u_\tau||^2 d\tau\leq\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

$$\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left||u_\tau|\right|^2 d\tau\leq\lambda_0\frac{\delta}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

$$\frac{\delta}{2}e^{\delta t}||u||^2\leq\lambda_0\frac{\delta}{2}e^{\delta t}||\nabla u||^2$$

$$\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}||u||^2 d\tau\leq\lambda_0\frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u||^2 d\tau$$

Bu eşitsizlikleri (3.16) da yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
e^{\delta t}E(t) + \int_0^1 e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \\
&\le E(0) + \delta\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{\lambda_0||\nabla u_\tau||^2}{2} + \frac{||\nabla u||^2}{2} + \frac{||\nabla u_\tau||^2}{2}\right) d\tau \\
&+ \frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\left||u_t|\right|^2 + \lambda_0\left||\nabla u|\right|^2\right) + \frac{\delta}{2}\left(\left||u_1|\right|^2 + \left||u_0|\right|^2\right) \\
&+ \frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\left||u_\tau|\right|^2 + \lambda_0\left||\nabla u|\right|^2\right) d\tau + \delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}\left||\nabla u_\tau|\right|^2 d\tau \\
&+ \frac{\delta}{2}\left||\nabla u_0|\right|^2 + \frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left||\nabla u|\right|^2 d\tau + \frac{\delta}{2}e^{\delta t}\left(\left||\nabla u_t|\right|^2 + ||\nabla u||^2\right) \\
&+ \frac{\delta}{2}\left(\left||\nabla u_1|\right|^2 + ||\nabla u_0||^2\right) + \frac{\delta^2}{2}\int_0^t e^{\delta\tau}\left(||\nabla u_\tau||^2 + \left||\nabla u|\right|^2\right) \\
&+ \delta\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.17) eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$$
\frac{3}{2}\delta\lambda_0\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau + \frac{3}{2}\delta\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau = \frac{3}{2}\delta(1+\lambda_0)\int_0^t e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau
$$

$$
\delta e^{\delta t}\left(\frac{\left||u_t|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla u|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla u_t|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx\right) \le C_1\delta e^{\delta t}E(t)
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}\left(\frac{\left||u_\tau|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla u|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla u_\tau|\right|^2}{2} + \frac{\left||\nabla^3 u|\right|^2}{2} - \int_0^1 F(u)dx\right) d\tau \\
\le C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

Bu ifadeleri (3.17)’de yerine yazarsak

$$e^{\delta t}E(t) + \int_0^1 e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau$$

$$\leq E(0) + \frac{3}{2}\delta(1+\lambda_0)\int_0^t e^{\delta\tau}\left||\nabla u_\tau|\right|^2 d\tau + C_1\delta e^{\delta\tau}E(t)$$

$$+ C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau \qquad 3.18)$$

elde ederiz.

(3.18) den δ yı $0 < \delta < \min\left\{\frac{2}{3(1+\lambda_0)}, \frac{1}{2C_1}\right\}$ seçerek aşağıdaki eşitsizliği

$$e^{\delta t}E(t) + \int_0^1 e^{\delta\tau}||\nabla u_\tau||^2 d\tau \leq E(0)$$

$$+ \int_0^t e^{\delta\tau}\left||\nabla u_\tau|\right|^2 d\tau + \frac{e^{\delta t}}{2}E(t) + C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$e^{\delta t}E(t) \leq E(0) + \frac{e^{\delta t}}{2}E(t) + C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$\frac{e^{\delta t}}{2}E(t) \leq E(0) + C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

$$e^{\delta t}E(t) \leq 2E(0) + 2C_2\delta^2\int_0^t e^{\delta\tau}E(\tau)d\tau$$

elde ederiz.

Burada Gronwall lemmasını uygularsak

$$e^{\delta t}E(t) \leq 2E(0)e^{2C_2\delta^2 t}, \quad 0 \leq t < \infty$$

ve

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\lambda t}$$

elde ederiz.

Eğer δ’yı aşağıdaki aralıktan seçersek

$$0 < \delta < \min\{\frac{2}{3(1+\lambda_0)}, \frac{1}{2C_1}, \frac{1}{2C_2}\}$$

(3.4) ü elde ederiz. Bununla problemin çözümünün $c_1, c_2 > 1$ üstel mertebeden $t \to \infty$ iken azaldığını göstermiş oluruz.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİ

Bu çalışmada, $u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t - \Delta u_{tt} - \Delta^3 u = f(u)$ lineer olmayan Sobolev tip kısmi diferansiyel denklem için konulan başlangıç sınır değer probleminin çözümünün asimptotik davranışını incelemek için geliştirilmiş integral tahminleri ve bazı özel eşitsizlikler kullanılarak lineer olmayan terimle ilgili çok basit ve genel bir varsayım altında, zaman $t \to \infty$ yaklaştıkça problemin çözümünün üstel olarak sıfıra yakınsadığı kanıtlanmıştır.

(3.1) denklemindeki bazı terimleri ve sağ taraftaki fonksiyonu değiştirerek yeni oluşan dalga denklemi için konulan sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği teoremlerine ve bu problemin çözümünün asimptotikliğinin incelenmesine bakılabilir.

KAYNAKLAR

1. Amirov, Sh. and Kozhanov, A. I. “Global solvability of initial boundary value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation.” ***Mathematical Notes***, 99 (1-2), 183-191 (2016).

2. Amirov, Sh. and Anutgan,M., “Boundary value problem for the nonlinear analogues of the Boussinesq equation:numerical soluton and its stability.” ***New Trends in Mathematical Scieneces***, 5 (3),245-252 (2017).

3. Amirov, Sh. and Anutgan,M., “Analytical solitary wave solutious for the nonlinear analogues of the Boussinesq and sixth-order modified Boussinesq equations.” ***The Journal of Applied Analysis and Computation***.7 (4) 1613- 1623 (2017).

4. Amin E. and H. B. Mohammadi, Asymptotic behavior of solutions for the cauchy problem of a dissipative boussinesq-type equation, ***Analysis of PDEs*** 36715-364 (2010).

5. Bayraktar S. and Gur S. , continuous dependence of solutions for damped improved boussinesq equation, ***Turkish Journal of Mathematics***, 44: 334-341 (2020).

6. G.F. Webb, Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation, **Canadian Journal of Mathematics** 32 ,634–643 (1980).

7. Gur S. and Gulec I. ,continuous dependence of solutions to fourth-order nonlinear wave equation, ***Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics volume*** 45 (2),367-371 (2016).

8. Gur S. and Gulec I,structural stability analysis of solutions to the initial boundary value problem for a nonlinear strongly damped wave equation.Department of Mathematics, ***Turkish Journal of Mathematics*** 40: 1231-1236 (2016).

9. H. Di and Y. Shang Global existence and asymptotic behaviour of solutions for the double dispersive-dissipative wave equation with nonlinear damping and source terms**,** ***A springeropen Journal*** 29 35L35; 35L82; 35B40 (2015).

10. H. Yang and Y. Han, Initial boundary value problem for a strongly damped wave equation with a general nonlinearity, ***School of Mathematics, Jilin University***, 35L20, 35L71 (2010).

11. M. Nakao and K. Ono, Existence of global solutions to the cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations, ***Mathematische Zeitschrift*** 14 (12) 325-342 (1992).

12. Polat N. and Piskin E. Asymptotic behavior of a solution of the cauchy problem for the generalized damped multidimensional boussinesq equation, ***Applied Mathematics Letters*** 25,1871-1874 (2012).

13. Polat N. and Piskin E, Asymptotic behavior of solution of cauchy problem for the generalized damped double dispersion equation, ***International Mathematical Forum***, 3,145-151 (2012).

14. Polat N. and Kaya D. Existence asymyptotic behavior and blow up of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative and dispersive terms, ***Z. Naturforsch*** 64a, 315-326 (2009).

15. Polat N. and Piskin E. Existence global nonexistence and asymptotic behavior of solutions for the cauchy problem of a multidimensional generalized damped boussinesq-type equation, ***Turkish Journal of Mathematics*** 38: 706-727 (2014).

16. Pişkin E. , 'Sobolev Uzayları', ***Seçkin Yayıncılık A.Ş.***, Ankara 27-39, 69-70, 96-97 (2017).

17. R. Xu and Zhao X.R. , Shen J.H. , Asmptotic behaviour of solutions for fourth order wave equation with dispersive and dissipative terms, ***Applied Mathematics and Mechanics*** 29 (2) 259-262 (2008).

18. R. Xu and Y. Liu, Asmptotic behaviour of solutions for initial-boundary value problems for strongly damped nonlinear wave equations, ***Nonlinear Analysis*** 69 ,2492-2495 (2008).

19. R. Xu and Yanbing Y. Finite time blow-up for the nonlinear fourth-order dispersive-dissipative wave equation at high energy level, ***International Journal of Mathematics*** (5) 15-16 (2012).

20. R.Xu and Yanbing Y. Global existence and asymptotic behaviour of solutions for a class of fourth order strongly damped nonlinear wave equations, ***Quarterly of Applied Mathematics*** 23 (10) 401-415 (2012).

21. Sh.Wang and G. Chen,The cauchy problem for the generalized IMBq equation in $W^{s,p}(R^n)^1$, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications*** 266,38-54 (2002).

22. S. Gerbi and B.S. Houari,Asymptotic stabilitiy and blow up for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions, ***Nonlinear Analysis-theory Methods and Applications*** 74, 18,7137-715 (2011).

23. X. Chen and G. Chen,Asymptotic behavior and blow-up of solutions to a nonlinear evolution equation of fourth order, ***Nonlinear Analysis*** 68, 892-904 (2008).

24. Y. Wang, Existence and asymptotic behavior of solutions to the generalized damped boussinesq equation, ***Electronic Journal of Differential Equations***, 96, 1-11 (2012).

25. Y. Wang and H. Zhao , Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions to the Generalized Damped Boussinesq Equation, School of Mathematics and Information Sciences, ***Advances in Mathematical Physics*** 364165,7, (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Hale KOYUNCU, ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Düzce Akçakoca Lisesi'nden mezun oldu. 2011 yılında Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenim görmeye başlayıp 2016 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2017 yılında Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı.