



**ÇİFT DİZİLERİN FUZZY n -NORMLU
UZAYLARDA λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Memnune KILIÇASLAN

Danışman

Doç. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİFT DİZİLERİN FUZZY n -NORMLU
UZAYLARDA λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Memnune KILIÇASLAN

Danışman

Doç. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Memnune KILIÇASLAN tarafından hazırlanan “Çift Dizilerin Fuzzy n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklığı” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğindeki ilgili maddeleri uyarınca 29 / 07 / 2022 tarihinde aşağıdaki ismi geçen jüri üyeleri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN

Başkan : Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... / / tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Enstitü Müdürü
(Ünvanı Adı ve SOYADI)

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29 / 07 / 2022

Memnune KILIÇASLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİFT DİZİLERİN FUZZY n -NORMLU UZAYLARDA λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Memnune KILIÇASLAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhammed Recai TÜRKMEN

Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde, n -normlu uzaylarda yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramları açıklanmıştır. Beşinci bölümde, çift dizilerde yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramları açıklanmıştır. Altıncı bölümde, fuzzy normlu uzaylarda yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramları açıklanmıştır. Yedinci bölümde, daha önceki bölümlerde açıklanan bilgiler yardımıyla sonuçlara ulaşılmıştır.

2022, v + 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, λ -istatistiksel yakınsaklık, Fuzzy n -normlu uzay, Toplanabilme, Çift dizi

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

λ -STATİSTİCAL CONVERGENCE OF DOUBLE SEQUENCES IN FUZZY n - NORMED SPACED

Memnune KILIÇASLAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Muhammed Recai TÜRKMEN

This thesis consists of seven chapters.

The first chapter is devoted to the introduction. In chapter two, basic definitions and theorems are given. In chapter three, information on statistical convergence is given. In chapter four, convergence in n -normed spaces, statistical convergence and λ -statistical convergence are explained. In chapter five, convergence in double sequences, statistical convergence and λ -statistical convergence are explained. In chapter six, convergence in fuzzy normed spaces, statistical convergence and λ -statistical convergence are explained. In chapter seven, The results were obtained with the help of the information explained in the previous sections.

2022, v + 54 pages

Keywords: Statistical convergence, λ -Statistical convergence, Fuzzy n -normed spaced, Summability, Double sequence

TEŐEKKÖR

Tez konunun belirlenmesinden, gerekli araştırma yöntemlerin uygulanmasındaki tüm süreçte benden desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübesiyle destek olan saygı değer hocam Doç. Dr. Muhammed Recai TÖRKMEN'e sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışmanın hazırlanmasında her zaman benden desteklerini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Memnune KILIÇASLAN
Afyonkarahisar 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	2
2.1 Temel Kavramlar	2
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	5
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık	5
3.2 λ -İstatistiksel Yakınsaklık	9
4. n -NORMLU UZAYLAR	12
4.1 n -Normlu Uzaylarda Yakınsaklık	12
4.2 n -Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık	14
4.3 n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklık	17
5. ÇİFT DİZİLERDE YAKINSAKLIK	21
5.1 Çift Dizilerde Yakınsaklık	21
5.2 Çift Dizilerde İstatistiksel Yakınsaklık	23
5.3 Çift Dizilerde λ -İstatistiksel Yakınsaklık	25
6. FUZZY NORMLU UZAYLAR	26
6.1 Fuzzy Sayılarında Yakınsaklık	26
6.2 Fuzzy Sayılarında İstatistiksel Yakınsaklık	28
6.3 Fuzzy Sayılarında λ -İstatistiksel Yakınsaklık	29
6.4 Fuzzy Normlu Uzaylarda Yakınsaklık	30
6.5 Fuzzy Normlu Uzaylarda Çift Dizilerin Yakınsaklığı	31
6.6 Fuzzy Normlu Uzaylarda Çift Dizilerin λ -İstatistiksel Yakınsaklığı	32
7. ÇİFT DİZİLERİN FUZZY n -NORMLU UZAYLARDA λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	35
7.1 Fuzzy n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklık	35
7.2 Çift Dizilerin Fuzzy n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklığı	48
8. KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	Hata! Yer işareti tanımlanmamış.

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

\mathbb{N}	Doğal sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
$x = (x_{jk})$	Reel sayıların bir çift dizisi
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\ \cdot, \dots, \cdot\ $	n -norm fonksiyonu
$(X, \ \cdot, \dots, \cdot\)$	n -normlu uzay
S	İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
S_λ	λ - İstatistiksel yakınsak diziler kümesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_2(K)$	K kümesinin çift doğal yoğunluğu
$P - \lim$	Pringsheim limit
$L(R)$	Fuzzy sayı kümesi
$(C, 1)$	Cesaro toplanabilme
$[C, 1]_{FnN}$	Fuzzy n -norma toplanabilirlerin kümesi
$st - \lim x_k$	(x_k) dizisinin istatistiksel limiti
$st_2 - \lim x_{jk}$	(x_{jk}) dizisinin istatistiksel limiti

Kısaltmalar

h.h.k.	Hemen hemen her k
--------	-------------------

1.GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, Analiz ve Fonksiyonel Analizin temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramından daha genel kavram olan istatistiksel yakınsaklık kavramının toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahip olduğu birçok araştırmacı tarafından yapılan çalışmalarda gösterilmiştir. Bu kavramların Fuzzy normlu uzaylarda çalışmaları gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Bu çalışma klasik n -normlu uzaylarda yapılan çalışmaların fuzzy n -normlu uzaylarda yapılabileceğini göstermek ve bundan sonra yapılacak çalışmalara yol göstermesi açısından önemlidir. Bu çalışmadaki temel amacımız; daha önce n -normlu uzaylarda çift reel sayı dizileri için çalışılmış olan istatistiksel yakınsaklık ve Fuzzy normlu uzaylarda verilen çift dizilerin λ -İstatistiksel yakınsaklık kavramlarını Fuzzy n -normlu uzaylara uygulamaktır. Bu bağlamda, daha önce verilmiş olan çift diziler için klasik ve Fuzzy normda tanımlanmış yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve λ -İstatistiksel yakınsaklık tanımlarını, bu yakınsaklıkların kendilerine özgü olan özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri yeniden ele alarak, Fuzzy n -normlu uzaylarda verilen çift diziler için λ -İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermek ve bu yeni tanımlar ile ilgili özellikleri ispatlamak amaçlanmaktadır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan önemli kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik ve Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y, z \in X$ için;

$$M1. d(x, x) = 0,$$

$$M2. d(x, y) = d(y, x),$$

$$M3. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

yukarıdaki şartlar sağlanıyorsa, d fonksiyonuna X üzerinde yarı metrik fonksiyonu ve (X, d) ikilisine de yarı metrik uzay denir.

Burada,

$$M1. d(x, x) = 0$$

şartı yerine

$$(M1)' d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

şartını almırsa d fonksiyonuna metrik fonksiyonu ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına tam metrik uzay veya Frechet uzay denir (Maddox 1988).

Bu çalışmada, \mathbb{R} reel uzayı üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan alışılmış mutlak değer metriği dikkate alınmıştır. Burada \mathbb{R} yerine \mathbb{C} kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2 Bir (X, d) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.3 (Dizi Uzayı) Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boştan farklı her alt vektör uzayına dizi uzayı denir.

$\ell_\infty, c_1, c_0, \ell_1$ dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary 1989).

Tanım 2.1.4 (X, d) bir metrik uzay ve \mathbb{N} doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n \in X$ olmak üzere $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ şeklindeki her fonksiyona X metrik uzayında tanımlı bir dizi denir ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ veya (x_n) şeklinde gösterilir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.5 \mathbb{N} doğal sayılar kümesi ve X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$$

$$(j, k) \rightarrow x_{jk}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna çift dizi veya çift indisli dizi denir (Burkill 1980) .

Tanım 2.6 (Yarı Norm ve Norm) X bir lineer uzay ve $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ ve her $a \in \mathbb{C}$ için

$$N1. \|x\| \geq 0,$$

$$N2. \|\theta\| = 0,$$

$$N3. \|ax\| = |a|\|x\|,$$

$$N4. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir yarı norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir yarı normlu uzay denir. (N2) şartı yerine,

$$(N2)' \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

Şartı sağlanır ise, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsaksa uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir (Maddox 1988).

Tanım 2.1.7 (x_n) , $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her n için $\|x_n\| \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sayısı var ise, (x_n) dizisine bir sınırlı dizi denir.

$n \rightarrow \infty$ için $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olacak şekilde bir x vektörü var ise (yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı var ise) (x_n) dizisi x e yakınsaktır denir. Bu x vektörü ise (x_n) dizisi tarafından bir tek olarak belirtilir.

$m, n \rightarrow \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ise (yani, verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğundan $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı var ise) (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar 2006).

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, istatistiksel yakınsaklık tanımları verilmiştir. Tek dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Fast (Fast 1951) tarafından takdim edilmiştir. Matematiğin birçok dalında, örneğin, Fourier analizi, Banach uzayları, Sayılar teorisi, Ölçüm teorisi, İstatistiksel yakınsama kavramı üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Connor (Connor 1988), Šalát (Šalát 1980), Fridy (Fridy 1985), Çolak (Çolak 2011), Çınar (Çınar 2013) ve diğerleri toplanabilirlik teorisinde istatistiksel yakınsama kavramını incelemişlerdir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 (Doğal Yoğunluk) $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k < n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{k \leq n : k \in K\}$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir (Niven 1951).

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir. Şimdi doğal yoğunlukla ilgili bazı özellik ve örnekler verelim:

1) $K \subset N$ sonlu ise

$$\delta(K) = 0 \text{ dir.}$$

2) $K = N$ ise

$$\delta(K) = \frac{n}{n} = 1 \text{ dir.}$$

(1) ve (2) den bir $K \subset N$ için;

$$0 \leq \delta(K) \leq 1 \text{ dir.}$$

3) $K = \{2n + 1 : n \in N\} = T$ ise

$$\delta(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n + 1} = \frac{1}{2}$$

olur.

$$4) K = \{2n : n \in N\} = C \text{ ise}$$

$$\delta(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n} = \frac{1}{2}$$

olur.

$$5) K = \{n^2 : n \in N\} \text{ ise}$$

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olur.

$$6) K_1 \cap K_2 = \emptyset \text{ ise}$$

$$\delta(K_1 \cup K_2) - \delta(K_1 \cap K_2) = \delta(K_1) + \delta(K_2)$$

olur.

$$7) K_1 \subseteq K_2 \text{ ise}$$

$$\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$$

olur.

$$8) K_1 \subseteq K \text{ ise}$$

$$\delta(K_1) = 1 - \delta(N / K) \text{ dir.}$$

Tanım 3.1.2 (İstatistiksel Yakınsaklık) Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n \in N}$ dizisi için $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\delta(\{n \in N : |x_n - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise, $x = (x_n)$ dizisi $L \in R$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir (Fast 1951).

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Burada özel olarak $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir. İstatistiksel yakınsak sıfır dizilerinin kümesi S_0 ile gösterilir. Buna göre;

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Açıkça görüleceği üzere yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = L$ ise $S - \lim x_k = L$ 'dir, fakat bunun tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, m = 1, 2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $\forall \varepsilon > 0$ için;

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu ise $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak (x_k) yakınsak değildir. Ayrıca istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Yani l_∞ ve S uzayları birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, m = 1, 2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x_k = 1$ dir, ancak $x \notin l_\infty$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır, ancak istatistiksel yakınsak değildir. Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani

$$S - \lim x_k = L_1 \text{ ve } S - \lim x_k = L_2 \text{ ise } L_1 = L_2 \text{ dir.}$$

Örnek 3.1.3 $x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$x_k = \{1,0,0,1,0,0,0,0,1\}$ olup,

$$K_\varepsilon = \{k: |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k: |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{k: k = n^2\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

olduğunda, $st - \lim x = 0$ elde edilir.

Örnek 3.1.4 $x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3, n = 1,2,3.. \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$x_k = \{1,1,1,1,1,1,1,1,8, \dots\}$$

olup,

$$K_\varepsilon = \{k: |x_k - 1| \geq \varepsilon\} = \{k: k = n^3\}$$

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3} = 0$$

olduğunda, $st - \lim x = 1$ elde edilir.

Örnek 3.1.5 $x_k = \begin{cases} -1, & k \text{ tek ise} \\ 1, & k \text{ çift ise} \end{cases}$

dizisinin yoğunluğu 0 olmadığından dolayı istatistiksel yakınsak değildir.

Önerme 3.1.6 Yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Bu önermenin karşıtı ise her zaman doğru değildir. Yani, istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Tanım 3.1.7 (İstatistiksel Cauchy Dizisi) $x = (x_k)$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için, h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$,

$$\delta(\{k: |x_k - x_N| > \varepsilon\}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir. (Fridy 1985).

Teorem 3.1.8 Bir $x = (x_k)$ dizisi için aşağıdaki önermeler denktir:

- i. x dizisi istatistiksel yakınsaktır.
- ii. x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
- iii. h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy 1985).

3.2 λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1 $\lambda = (\lambda_m)$ pozitif sayıların ∞ a giden azalmayan bir dizisi olsun öyle ki

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \lambda_1 = 1$$

dır. Bu λ dizilerinin koleksiyonu Δ ile gösterilecektir.

Genelleştirilmiş de la Valli -Poussin ortalaması, $I_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_m(x) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} x_k$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.2 $x = (x_k)$ dizisi eğer, $m \rightarrow \infty$ iken

$$t_m(x) \rightarrow l$$

ise bir l sayısına (V, λ) toplanabilirdir denir.

Eğer, $\lambda_m = m$ ise, o zaman (V, λ) toplanabilirlik, $(C, 1)$ toplanabilirliğe indirgenir.

$x = (x_k)$ dizisinin kümeleri için

$$[C, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |x_k - l| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} |x_k - l| = 0 \right\}$$

yazabiliriz öyleki $x = (x_k)$ dizileri kuvvetli Cesaro toplanabilir ve l ye kuvvetli (V, λ) toplanabilirdir. Yani sırasıyla,

$$(x_k) \xrightarrow{[C,1]} l \text{ ve } (x_k) \xrightarrow{[V,\lambda]} l$$

dır (Leindler 1965).

Tanım 3.2.3 $x = (x_k)$ dizisi kompleks sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l ye λ istatistiksel yakınsaktır veya l ye S_λ -yakınsaktır denir.

Bu durumda $S_\lambda - \lim_x = l$ veya $(x_k) \xrightarrow{S_\lambda} l$

ve

$$S_\lambda = \{x = (x_k) : \exists l \in R, S_\lambda - \lim_x = l\}$$

yazılabilir.

$\lambda_m = m$ ise, S_λ nin S ile aynı olduğu açıktır (Mursaleen 2000).



4. n -NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde, Gunawan (Gunawan 2000), Reddy (Reddy 2010), Hazarika ve Savaş (Hazarika 2013) tarafından üzerinde çalışılmış olan n -normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi ile ilgili tanım, teorem ve özellikler verilmiştir.

4.1 n -Normlu Uzaylarda Yakınsaklık

Tanım 4.1.1 (n -normlu uzay) $n > 1$ ve $X, d \geq n$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. (Burada d sonsuz olabilir.)

- (1) $\|x_1, \dots, x_n\| = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ lineer bağımlı,
- (2) $\|x_1, \dots, x_n\|$ x_1, \dots, x_n 'in her permütasyon altında değişmeyen,
- (3) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x_1, \dots, x_{n-1}, \alpha x_n\| = |\alpha| \|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\|$,
- (4) $\|x_1, \dots, x_{n-1}, y + z\| \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y\| + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z\|$

şartlarını sağlayan X^n de tanımlı reel değerli $\| \cdot, \dots, \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir n -norm denir ve $(X, \| \cdot, \dots, \cdot \|)$ ikilisine n -normlu uzay denir (Gunawan 2000).

Örnek 4.1.2 $\forall i = 1, \dots, n$ için $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere;

$$\|x_1, \dots, x_n\|_E = \left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right|$$

bir norm belirtir. (Burada alt indis E ile Öklid kastedilmiştir.)

- (1) $\|x_1, \dots, x_n\|_E = \left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow x_1, \dots, x_n$ lineer bağımlıdır.
- (2) $\|x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\|_E = \|x_1, \dots, x_n, x_{n-1}\|_E = \dots$

$$(3) \begin{vmatrix} \alpha x_{11} & \cdots & \alpha x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \text{ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte her iki tarafın}$$

mutlak değeri alınırsa,

$$\left| \det \begin{bmatrix} \alpha x_{11} & \cdots & \alpha x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right| = |\alpha| \left(\left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right| \right) \text{ eşitliği elde edilir. Bu ise;}$$

$$\|x_1, \dots, \alpha x_n\|_E = |\alpha| \|x_1, \dots, x_n\|_E \text{ demektir.}$$

(4) $n \times n$ tipindeki A ve B matrislerinin toplamının determinantı genellikle A ve B'nin determinantları toplamı değildir. Bu aşamada en iyi sonuç olarak şunu verebiliriz: Eğer A, B ve C'nin k'ncı satırı A ve B'nin k'nci satırların toplamı ise bu durumda;

$$\det(C) = \det(A) + \det(B) \text{ olur (Hill 2002).}$$

Bu durumda;

$$\|x_1, \dots, x_{n-1}, y_n + z_n\|_E \leq \|x_1, \dots, x_{n-1}, y_n\|_E + \|x_1, \dots, x_{n-1}, z_n\|_E$$

dir. Dolayısıyla,

$$\|x_1, \dots, x_n\|_E = \left| \det \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \right|$$

bir n -normdur.

Tanım 4.1.3 $x(k), (X, \|\cdot\|, \dots, \|\cdot\|)$ n -normlu uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer;

$\forall x_1, \dots, x_{n-1} \in X$ için,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1, \dots, x_{n-1}, x(k) - x\| = 0$$

ise $x(k)$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. n -normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya n -norma göre yakınsama denir (Gunawan 2000).

Tanım 4.1.4 $x(k)$, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında bir dizi olsun. $\forall x_1, \dots, x_{n-1} \in X$ için,

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|x_1, \dots, x_{n-1}, x(k) - x(l)\| = 0$$

ise bu $x(k)$ dizisine n -norma göre Cauchy dizisi denir. Eğer X uzayında her Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise, X uzayına n -norma göre tamdır denir. n -normlu bir tam uzaya n -Banach uzay denir (Gunawan 2000).

4.2 n -Normlu Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.2.1 $\{x_k\}$, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve X de sıfırdan farklı her bir $z_2, \dots, z_n \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, $\{x_k\}$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır, denir.

Başka bir deyişle, X de sıfırdan farklı her $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{k : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $\{x_k\}$, $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayda L ye istatistiksel yakınsaktır. Demek ki her $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için,

$$\|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| < \varepsilon \quad (\text{h.h.k. için,})$$

dır. Bu durumda,

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z_2, z_3, \dots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \dots, z_n\|$$

yazılabilir.

Uyarı 4.2.2 $\{x_k\}$, X ' de herhangi bir dizi ve L , X in herhangi bir elemanıysa o zaman, $i = 2, 3, \dots, n$ için eğer $z_i = \bar{0}$ (0 vektör) ise

$$\|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| = 0 \not\geq \varepsilon$$

olduğundan dolayı

$$\{k \in N : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon \forall z_2, z_3, \dots, z_n \in X \text{ için}\} = \emptyset$$

kümedir. Böylece, yukarıdaki küme boştur.

Eğer $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayda bir dizi yakınsak ise, herhangi sonlu kümenin doğal yoğunluğu 0 olduğundan dolayı, bu dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Bu iddianın aksi genelde doğru değildir. Aşağıdaki örnekte bu durum görülebilir.

Örnek 4.2.3 $X = R^n, \forall i = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}) \in R^n$$

olmak üzere,

$$\|x_1, x_2, \dots, x_n\| = |\det(x_{ij})| = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

formülü ile n -normla donatılmış olsun.

$(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ n -normlu uzayda,

$$x_k = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1, k), k = m^2, m \in N \\ \left(1, 1, \dots, 1, \frac{k-1}{k}\right), \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile $\{x_k\}$ dizisini tanımlayalım.

$L = (1, 1, \dots, 1, 1)$ ve $i = 2, 3, \dots, n$ için $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{in})$ alalım. Eğer, $i = 2, 3, \dots, n$ için $z_i = 0$ ise, o zaman $\forall z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$K = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\} = \emptyset$$

dır. Böylece, $\delta(K) = 0$ olur. Bu durumda, $i = 2, 3, \dots, n$ için $z_{i1} \neq 0$ elde edilir. Her $\varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için,

$$\left\{k \in \mathbb{N} : k \neq m^2, m \leq \frac{|\det(z_{i1})|}{\varepsilon}, i = 2, 3, \dots, n\right\}$$

bir sonlu kümedir, böylece

$$\begin{aligned} & \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\} \\ &= \left\{k \in \mathbb{N} : k = m^2, m \geq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{|\det(z_{i1})|} + 1\right)}, i = 2, 3, \dots, n\right\} \\ & \quad \cup \{\text{sonlu küme}\} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda, X te her $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} |\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k} \left| \left\{k \in \mathbb{N} : k = m^2, m \geq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{|\det(z_{i1})|} + 1\right)}, i = 2, 3, \dots, n-1\right\} \right| \cup \frac{1}{k} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\forall \varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir ki bu

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z_2, z_3, \dots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \dots, z_n\|$$

anlamına gelir. Ancak $\{x_k\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

Örnek 4.2.4 n -normlu $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayında $\{x_k\}$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} (0,0, \dots, 0, n), & k = m^2, m \in \mathbb{N} \\ (0,0, \dots, 0,0), & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlayalım ve $L = (0,0, \dots, 0,0)$ ve $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{in})$ tanımlayalım. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\} \subset \{1,4,9,16, \dots, k^2, \dots\}$$

dır. $\forall \varepsilon > 0$ ve $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - L, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde ederiz. Bu

$$st - \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k, z_2, z_3, \dots, z_n\| = \|L, z_2, z_3, \dots, z_n\|$$

olmasını gerektirir. Ancak $\{x_k\}$ dizisi L ye yakınsak değildir.

İstatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez.

Tanım 4.2.5 n -normlu $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayda bir $\{x_k\}$ dizisi, eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve her sıfırdan farklı $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için bir $N = N(\varepsilon, z_2, z_3, \dots, z_n)$ sayısı vardır öyle ki

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_N, z_2, z_3, \dots, z_n\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani, her sıfırdan farklı $z_2, z_3, \dots, z_n \in X$ için $\|x_k - x_N, z_2, z_3, \dots, z_n\| < \varepsilon$, h.h.k için ise, X de istatistiksel Cauchy dizisidir, denir.

4.3 n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 4.3.1 $\lambda = (\lambda_m)$ pozitif sayıların ∞ a giden azalmayan bir dizisi olsun öyle ki

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \lambda_1 = 1$$

dır. Bu λ dizilerinin koleksiyonu Δ ile gösterilecektir.

Genelleştirilmiş de la Vallié Poussin ortalaması, $I_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_m(x) = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} x_k$$

ile tanımlanır.

Tanım 4.3.2 $x = (x_k)$ dizisi eğer, $m \rightarrow \infty$ iken

$$t_m(x) \rightarrow l$$

ise bir l sayısına (V, λ) toplanabilir, denir.

Eğer, $\lambda_m = m$ ise, o zaman (V, λ) toplanabilirlik, $(C, 1)$ toplanabilirliğe indirgenir. $x = (x_k)$ dizisinin kümeleri için

$$[C, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |x_k - l| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda] = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} |x_k - l| = 0 \right\}$$

yazılabilir. Öyle ki $x = (x_k)$ dizileri kuvvetli Cesaro toplanabilir ve l ye kuvvetli (V, λ) toplanabilir. Yani sırası ile,

$$(x_k) \xrightarrow{[C,1]} l \text{ ve } (x_k) \xrightarrow{[V,\lambda]} l$$

dır (Leindler 1965).

Tanım 4.3.3 $x = (x_k)$ dizisi kompleks sayı dizisi olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l ye λ istatistiksel yakınsaktır veya l ye S_λ -yakınsaktır denir.

Bu durumda,

$$S_\lambda - \lim x = l$$

veya

$$(x_k) \xrightarrow{S_\lambda} l$$

ve

$$S_\lambda = \{x = (x_k) : \exists l \in R, S_\lambda - \lim x = l\}$$

yazabiliriz.

$\lambda_m = m$ ise, o halde S_λ nin S ile aynı olduğu açıktır (Mursaleen 2000).

$S^{nN}(X)$ ile n -normlu X uzayında istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilir.

Tanım 4.3.4 n -normlu $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayındaki bir $x = (x_k)$ dizisi için, $\forall \varepsilon > 0$

ve $\forall z_2, z_3, \dots, z_{n-1} \in X$ olmak üzere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : \|x_k - l, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}\| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise n -norma göre λ - istatistiksel yakınsak veya $l \in X$ ye S_λ -yakınsaktır, denir. Bu durumda

$$S_\lambda^{nN} - \lim x = l \text{ veya } (x_k) \xrightarrow{S_\lambda^{nN}} l$$

ve

$$S_\lambda^{nN}(X) = \{x = (x_k) : \exists l \in R, S_\lambda^{nN} - \lim x = l\}$$

olarak yazılabilir.

n -normlu X uzayında λ istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\lambda^{nN}(X)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.5 n -normlu bir $(X, \|\cdot, \dots, \cdot\|)$ uzayında bir $x = (x_k)$ dizisi için, eğer

$$m \rightarrow \infty \text{ iken } t_m(x) \rightarrow l$$

ise $l \in X$ e n -norma göre (V, λ) -toplanabilirdir denir.

$\lambda_m = m$ ise, o halde n -norma göre, (V, λ) -toplanabilirlik, $(C, 1)$ –toplanabilirliğe indirgenir. X -değerli $x = (x_k)$ dizilerinin kümeleri için

$$[C, \lambda]^{nN}(X) = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \|x_k - l, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}\| = 0 \right\}$$

ve

$$[V, \lambda]^{nN}(X) = \left\{ x = (x_k) : \exists l \in R, \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m}^m \|x_k - l, z_2, z_3, \dots, z_{n-1}\| = 0 \right\}$$

yazılabilir öyle ki $x = (x_k)$ dizileri n -norma göre l ye kuvvetli Cesario toplanabilir ve (V, λ) -kuvvetli toplanabilirdir ve sırasıyla

$$(x_k) \xrightarrow{[C, 1]^{nN}} l \text{ ve } (x_k) \xrightarrow{[V, \lambda]^{nN}} l$$

elde edilir.

5. ÇİFT DİZİLERDE YAKINSAKLIK

Çift diziler üzerinde ilk çalışma Bromwich (Bromwich 1908) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Hardy (Hardy 1917), Moricz (Moricz 1991), Moricz ve Rhoades (Moricz 1988), Tripathy (Tripathy 2004) tarafından ve diğer pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Pringsheim 1900 yılında çift dizilerin yakınsaklık kavramını vermiştir. Mursaleen ve Edely (Edely 2003) ile Móricz (Móricz 2003) birbirlerinden bağımsız olarak istatistiksel yakınsaklık kavramını çift dizilere genişletmişlerdir.

5.1 Çift Dizilerde Yakınsaklık

Tanım 5.1.1 $x = (x_{mn})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ için, $m, n > N$ olduğundan,

$$|x_{mn} - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı bulunabiliyor ise, $x = (x_{mn})$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. L sayısına da $x = (x_{mn})$ dizisinin Pringsheim limiti denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir diziye ise kısaca yakınsak çift dizi denilir ve

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} x_{mn} = L \text{ veya } x_{mn} \rightarrow L$$

şeklinde gösterilir (Pringsheim 1900).

Örnek 5.1.2 $x = (x_{mn}) = \left(\frac{n}{m+n+1}\right)$ çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değildir. Gerçektende, verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için yeterince büyük $m, n (m = n) \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındığında

$$\left| x_{mn} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

olacaktır. Fakat $n = 2m$ olacak şekilde yeterince büyük $m, n \in \mathbb{N}$ sayıları ele alındığında ise

$$\left| x_{mn} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$$

olur. O halde $x = (x_{mn})$ dizisi yakınsak değildir.

Tanım 5.1.3 $x = (x_{mn})$ bir çift dizi olmak üzere

$$\sup_{m,n \geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine sınırlıdır denir (Moricz 1991).

Yakınsak olan bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekte bu görülür.

Örnek 5.1.4 $x = (x_{mn})$ çift dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_{mn} = \begin{cases} n & , \quad m = 0 \text{ ise} \\ m & , \quad n = 0 \text{ ise} \\ \frac{1}{mn} & , \quad n = m \geq 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Bu dizi sınırlı olmamasına rağmen 0 noktasına yakınsaktır.

Tanım 5.1.5 $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için, $m, n, p, q > N$ olduğunda

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

oluyorsa $x = (x_{mn})$ dizisine Cauchy dizisi denir (Pringsheim 1897).

Teorem 5.1.6 $x = (x_{mn})$ çift dizi olmak üzere $x = (x_{mn})$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin Cauchy dizisi olmasıdır (Habil 2005).

5.2 Çift Dizilerde İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.2.1 $x = (x_{jk})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun. Verilen her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\{(j, k): |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, yani

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{(j, k): j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $x = (x_{jk})$ çift dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu ise

$$st_2 - \lim x_{jk} = L \text{ veya } x_{jk} \xrightarrow{st} L$$

şeklinde gösterilir (Mursaleen 2003).

Not 5.2.2 $x = (x_{jk})$ reel veya kompleks sayıların bir çift dizisi olsun.

- Eğer $x = (x_{jk})$, L sayısına yakınsak ise o zaman $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır.
- Eğer $x = (x_{jk})$, L sayısına istatistiksel yakınsak ise L tektir.
- $x = (x_{jk})$ istatistiksel yakınsak ise yakınsak olmasına gerek yoktur. Sınırlı olmasına da gerek yoktur.

Şimdi c) ifadesine örnek verelim.

Örnek 5.2.3 $x = (x_{jk})$ dizisi

$$x_{jk} = \begin{cases} j, & j \text{ tam kare, her } k \text{ için} \\ 2, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. $x = (x_{jk})$ çift dizisi yakınsak değildir ve sınırlı da değildir.

Ancak 2 noktasına istatistiksel yakınsaktır. Çünkü burada verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için;

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{(j, k): j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - 2| \geq \varepsilon\}| \leq \frac{(\sqrt{m} + 1)(n + 1)}{(m + 1)(n + 1)}$$

olduğundan dizinin 2 haricindeki elemanlarının yoğunluğu 0 dır.

Teorem 5.2.4 $x = (x_{jk})$ çift reel sayı dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$K = \{(j, k) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}; j, k = 1, 2, 3 \dots\}, \delta_2(K) = 1$$

ve

$$\lim_{j, k \rightarrow \infty, (j, k) \in K} x_{jk} = L$$

olacak şekilde $K \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt kümesi var olmasıdır (Mursaleen 2003).

Tanım 5.2.5 $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $j, p \geq N, k, q \geq M$ için,

$$\delta_2(\{(j, k): j \leq m \text{ ve } k \leq n : |x_{jk} - x_{pq}| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$ sayıları varsa dizisine $x = (x_{jk})$ istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem 5.2.6 $x = (x_{jk})$ reel değerli bir çift dizi olsun. Bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{jk})$ çift dizisinin istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır (Mursaleen 2003).

Teorem 5.2.7 Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- a) $x = (x_{jk})$ çift dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır.
- b) $x = (x_{jk})$ çift dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.
- c) $x = (x_{jk})$ çift dizisinin bir $y = (y_{j_m k_n})$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim y_{j_m k_n} = L$ dir.

5.3 Çift Dizilerde λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 5.3.1 $x = (x_{kl})$ çift dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$P - \lim_{m,r \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{mr}} |\{(k, l) \in I_m \times J_r : |x_{kl} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_{kl})$ dizisi X de λ -istatistiksel yakınsaktır veya $L \in X$ için S_λ^2 -yakınsaktır denir.

Bu durumda, $x_{kl} \xrightarrow{S_\lambda^2} L$ veya $x_{kl} \rightarrow L(S_\lambda^2)$ veya $S_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L$ yazılır.

6. FUZZY NORMLU UZAYLAR

Fuzzy sayılar dizisinin olağan yakınsama kavramı ilk olarak Matloka (Matloka 1986) tarafından tanıtıldı ve fuzzy sayı dizileri için bazı temel teoremleri kanıtlandı. Altınok ve ark (Altınok 2004) ve birçoğu fuzzy sayılarının istatistiksel yakınsaklığı üzerine çalışmışlardır. Mohiuddine ve diğerleri (Mohiuddine 2012) fuzzy normlu uzaylarda çift dizilerin istatistiksel yakınsamasını inceledi. Son olarak Türkmen ve Çınar (Türkmen 2018) fuzzy normlu lineer uzaylarda istatistiksel yakınsama üzerinde çalışmışlardır.

6.1 Fuzzy Sayılarında Yakınsaklık

Tanım 6.1.1 X kümesinin bir fuzzy alt kümesi $u: X \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlanan bazı fonksiyonlar için $X \times [0, 1]$ 'in boş olmayan $\{(x, u(x)): x \in X\}$ şeklinde bir alt kümesidir. Çoğu zaman u fonksiyonunun kendisi fuzzy kümeleri için kullanılır.

\mathbb{R} 'de bir u fuzzy kümesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir fuzzy sayısı olarak kabul edilir:

- i) u bir normaldir. Yani, öyle bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır ki $u(x_0) = 1$;
- ii) u bir fuzzy konvektir. Yani, $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda$, $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min[u(x), u(y)]$;
- iii) u üst yarı süreklidir;
- iv) $[u]_0 = \text{suppu} = \text{cl}\{x \in \mathbb{R}: u(x) > 0\}$ kompakttır (Zadeh 1965).

$L(\mathbb{R})$ tüm fuzzy sayılarının kümesi olsun. Eğer $t < 0$ için $u \in L(\mathbb{R})$ ve $u(t) = 0$ ise, o zaman u bir negatif olmayan fuzzy sayısı olarak adlandırılır. Tüm negatif olmayan fuzzy sayıları için $L^*(\mathbb{R})$ gösterimi kullandık. Eğer her bir $\alpha \in [0, 1]$ için $u_{\alpha} \geq 0$ ise $u \in L^*(\mathbb{R})$ söyleyebiliriz. Açıkçası $\tilde{0} \in L(\mathbb{R})$ elde ederiz. $u \in L(\mathbb{R})$ için u 'nun α düzeyi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[u]_{\alpha} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}: u(x) \geq \alpha\}, & \text{Eğer } \alpha \in (0, 1) \\ \text{suppu}, & \text{Eğer } \alpha = 0 \end{cases}$$

$L(\mathbb{R})$ üzerinde parçalı merteye \preceq aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tüm $\alpha \in [0, 1]$ için eğer $u_{\alpha}^{-} \leq v_{\alpha}^{-}$ ve $u_{\alpha}^{+} \leq v_{\alpha}^{+}$ ise $u \preceq v$

$L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı \oplus, \ominus, \odot ve \oslash aritmetik işlemleri aşağıdaki gibidir,

$$(u \oplus v)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{u(s) \wedge v(t-s)\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(u \ominus v)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{u(s) \wedge v(s-t)\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(u \odot v)(t) = \sup_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s \neq 0}} \{u(s) \wedge v(t/s)\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(u \oslash v)(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \{u(st) \wedge v(s)\} \quad t \in \mathbb{R}$$

$k \in \mathbb{R}^+$ için, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere ku şöyle tanımlanır:

$$ku(t) = u\left(\frac{t}{k}\right) \text{ ve } 0u(t) = \tilde{0}$$

α – düzey için bazı aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$u, v \in L(\mathbb{R})$ ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $[u]_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+}]$ ve $[v]_{\alpha} = [v_{\alpha}^{-}, v_{\alpha}^{+}]$ tanımlansın. O zaman:

$$[u \oplus v]_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-} + v_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+} + v_{\alpha}^{+}]$$

$$[u \ominus v]_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-} - v_{\alpha}^{+}, u_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{-}]$$

$$[u \odot v]_{\alpha} = [u_{\alpha}^{-} \cdot v_{\alpha}^{-}, u_{\alpha}^{+} \cdot v_{\alpha}^{+}]$$

$$[\tilde{1} \oslash u]_{\alpha} = \left[\frac{1}{u_{\alpha}^{+}}, \frac{1}{u_{\alpha}^{-}} \right] u_{\alpha}^{-} > 0$$

Her $u, v \in L(\mathbb{R})$ için $L(\mathbb{R})$ üzerinde supremum metrik aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u_{\alpha}^{-} - v_{\alpha}^{-}|, |u_{\alpha}^{+} - v_{\alpha}^{+}|\}$$

$D, L(\mathbb{R})$ üzerinde bir metriktir ve $(L(\mathbb{R}), D)$ tam bir metrik uzaydır.

Bir $x = (x_k)$ fuzzy sayı dizisi eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olmak koşuluyla bir k_0 pozitif tam sayısı mevcut ve $D(x_k, x_0) < \varepsilon$ sağlanırsa bu $x = (x_k)$ fuzzy sayı dizisi x_0 fuzzy sayısına seviyeli olarak yakınsıyor denir. Ayrıca bir $x = (x_k)$ fuzzy sayı dizisinde

eğer $\lim_{k \rightarrow \infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^-$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} [x_k]_\alpha = [x_0]_\alpha^+$ oluyor ise bu $x = (x_k)$ fuzzy sayı dizisi seviyeli olarak x_0 'a yakınsar denir. Burada her bir $\alpha \in (0, 1)$ için $[x_k]_\alpha = [(x_k)_\alpha^-, (x_k)_\alpha^+]$ ve $[x_0]_\alpha = [(x_0)_\alpha^-, (x_0)_\alpha^+]$ dir [(Bag 2008), (Diamondand 1994), (Kaleva 1984), (Mizumoto 1979)].

6.2 Fuzzy Sayılarında İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 6.2.1 $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim X_k = X_0$ yazılır.

Bütün istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesi $S(F)$ ile gösterilir. (Nuray 1995)

Özel olarak $X_0 = \bar{0}$ alınırsa $S(F)$ yerine $S_0(F)$ yazılır. Ayrıca sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak bir fuzzy sayı dizisi istatistiksel yakınsaktır yani $c(F) \subset S(F)$ dir, ancak istatistiksel yakınsak bir fuzzy sayı dizisinin yakınsak olması gerekmez.

Tanım 6.2.2 $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $m = m(\varepsilon)$ sayısı varsa, bu durum $X = (X_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir (Nuray 1995).

6.3 Fuzzy Sayılarında λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 6.3.1 $X = (X_k)$ bir fuzzy sayıyı dizisi ve $(\lambda = \lambda_n) \in \Lambda$ olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına λ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\lambda - \lim X_k = X_0$ ile gösterilir (Savaş 2000).

Burada $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_n = 1$ olacak şekildeki pozitif sayıların sayıların azalmayan bir dizisidir ve $\lambda_n = n$ alırsak, λ -istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa dönüşür.

Teorem 6.3.2 Eğer $X = (X_k)$ dizisi X_0 a istatistiksel yakınsak ve $\liminf_n \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) > 0$ ise X_0 a λ -istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 6.3.3 $\lambda = (\lambda_n)$, pozitif sayıların azalmayan bir dizisi $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_n = 1$ ve $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise fuzzy sayılarının $X = (X_k)$ dizisine λ -istatistiksel Cauchy dizisi denir (Tuncer 2006).

Burada $\lambda_n = n$ alırsak λ -istatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel Cauchy dizine dönüşür. Eğer $(\lambda_n) = (1, 1, \dots)$ alırsak λ -istatistiksel Cauchy dizisi, adi (klasik) Cauchy dizine dönüşür.

Teorem 6.3.4 Fuzzy sayılarının $X = (X_k)$ dizisinin λ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $X = (X_k)$ dizisinin λ -istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 6.3.5 Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi istatistiksel Cauchy dizisi ve $\liminf_n \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) > 0$ ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi λ –istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat: Verilen $\varepsilon > 0$ için $\exists m(\varepsilon) \in N$ vardır, öyle ki

$$\{k \leq n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\} \supset \{k \in I_n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| &\geq \left| \frac{1}{n} \{k \in I_n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\} \right| \\ &= \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n: d(X_k, X_m) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve $\liminf_n \left(\frac{\lambda_n}{n}\right) > 0$ şartı kullanılırsa, X in λ –istatistiksel Cauchy dizisi olduğu ispatlanmış olur.

6.4 Fuzzy Normlu Uzaylarda Yakınsaklık

X, \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow L^*(\mathbb{R})$ ve $L; R$ eşleştirmeleri (sırasıyla sol norm ve sağ norm): $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ her iki argüment için simetrik, azalmayan ve $L(0, 0) = 0$ ve $R(1, 1) = 1$ şartlarını sağlıyor olsun [(Felbin 1992), (J. Xiao and X. Zhu 2002)]. $(X, \|\cdot\|, L, R)$ dördlüsü fuzzy normlu lineer uzay olarak adlandırılır (kısaca $(X, \|\cdot\|)FNS$) ve $\|\cdot\|$ aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa bir fuzzy norm olur:

- 1) Eğer $x = \theta$ ise $\|x\| = \tilde{0}$
- 2) $x \in X, t \in \mathbb{R}$ için $\|rx\| = |r| \odot \|x\|$
- 3) Tüm $x, y \in X$ için
 - a) Her ne zaman $s \leq \|x\|_1^-, t \leq \|y\|_1^-$ ve $s + t \leq \|x + y\|_1^-$ ise $\|x + y\|(s + t) \geq L(\|x\|(s), \|y\|(t))$
 - b) Her ne zaman $s \geq \|x\|_1^-, t \geq \|y\|_1^-$ ve $s + t \geq \|x + y\|_1^-$ ise $\|x + y\|(s + t) \leq R(\|x\|(s), \|y\|(t))$

4) $(X, \|x\|_C)$ sıradan normlu bir lineer uzay olsun. X üzerinde $\|\cdot\|$ fuzzy normu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$5) \|x\|(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq a\|x\|_C \text{ veya } t \geq b\|x\|_C \\ \frac{t}{(1-a)\|x\|_C} - \frac{a}{1-a} & a\|x\|_C \leq t \leq \|x\|_C \\ \frac{-t}{(b-1)\|x\|_C} + \frac{ab}{b-1} & \|x\|_C \leq t \leq b\|x\|_C \end{cases} \quad (1)$$

Burada $\|x\|_C$ x 'in $x \neq \theta$ olmak üzere sıradan normdur, $0 < a < 1$ ve $1 < b < \infty$ dir. $x = \theta$ için $\|x\| = \tilde{0}$ tanımlıdır. Bunun sonucunda $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu lineer uzaydır (Felbin 1992).

Şençimen (Şençimen 2008) fuzzy normlu uzaylarda yakınsaklığı Kaleva (Kaleva 1984) ve Felbin (Felbin 1992) den yararlanarak aşağıdaki gibi tanımladı:

$(X, \|\cdot\|)$ bir FNS olsun. $(D) - \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \tilde{0}$; yani her bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki, tüm $n \in \mathbb{N}$ için $D(\|x_n - x\|, \tilde{0}) < \varepsilon$ sağlanırsa X içinde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi $x \in X$ sayısına X üzerindeki fuzzy normuna göre yakınsaktır denir ve bu $x_n \xrightarrow{FN} x$ ile gösterilir.

Bunun anlamı her bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki tüm $n \geq N(\varepsilon)$ için aşağıdaki koşulu sağlar:

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} \|x_n - x\|_{\alpha}^+ = \|x_n - x\|_0^+ < \varepsilon$$

6.5 Fuzzy Normlu Uzaylarda Çift Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 6.5.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay, $x = (x_{mn})$ X de bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ var öyle ki her $m, n \geq N(\varepsilon)$ için $D(\|x_{mn} - L\|, \tilde{0}) < \varepsilon$ oluyorsa (x_{mn}) dizisi fuzzy norma göre L noktasına yakınsaktır denir ve $x_{mn} \xrightarrow{FN} L$ şeklinde gösterilir.

6.6 Fuzzy Normlu Uzaylarda Çift Dizilerin λ -İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 6.6.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay olsun. X de bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,r \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{mr}} |\{(k, l) \in I_m \times J_r : D(\|x_{kl} - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| = 0,$$

oluyorsa, X üzerindeki fuzzy norma göre $L \in X$ 'e λ - istatistiksel olarak yakınsaktır veya FS_λ^2 -yakınsak denir.

Böylece $x_{kl} \xrightarrow{FS_\lambda^2} L$ veya $x_{kl} \rightarrow L(FS_\lambda^2)$ veya $FS_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L$ yazabiliriz. Bu, her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{(k, l) \in I_m \times J_r : \|x_{kl} - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu anlamına gelir, yani kısaca her bir $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k ve l için $\|x_{kl} - L\|_0^+ < \varepsilon$ dur.

Bu durumda $FS_\lambda^2 - \lim x = L$ yazabiliriz. Bu çalışmada X üzerindeki fuzzy norma göre λ -istatistiksel olarak yakınsak dizilerin tümü FS_λ^2 ($FS_\lambda^2 = \{x = (x_{kl}) : \exists L, FS_\lambda^2 - \lim x = L\}$) ile gösterilecektir. Bu durumda (x_{kl}) , $L \in X$ 'e FS_λ^2 yakınsak ise (x_{kl}) X üzerindeki fuzzy norma göre λ -istatistiksel olarak $L \in X$ 'e yakınsaktır denir.

Tüm m, r için $\gamma_m = m$ ve $\mu_r = r$ ise o zaman $FS_\lambda^2(X)$ uzayı $FS_2(X)$ uzayına indirgenir ve $\delta_2(K) \leq \delta_\lambda^2(K)$ olduğundan $FS_\lambda^2(X) \subset FS_2(X)$ elde edilir.

Önerme 6.6.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve $x = (x_{kl})$ X te bir çift dizi olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki ifadeler eşdeğerlidir:

- i) $FS_\lambda^2 - \lim_{k,l \rightarrow \infty} x_{k,l} = L.$
- ii) $\delta_\lambda^2(\{(k, l) : (k, l) \in I_m \times J_r, \|x_{kl} - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}) = 0$
- iii) $\delta_\lambda^2(\{(k, l) : (k, l) \in I_m \times J_r, \|x_{kl} - L\|_0^+ < \varepsilon\}) = 1$
- iv) $FS_\lambda^2 - \lim_{k,l \rightarrow \infty} \|x_{kl} - L\|_0^+ = 0$

Teorem 6.6.3 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve $\lambda \in \Lambda_2$ olsun. Eğer bir (x_{kl}) dizisi $FS_\lambda^2 -$ yakınsak ise $FS_\lambda^2 -$ limit tektir.

İspat: $FS_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L_1$ ve $FS_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L_2$ ve $L_2 - L_1 = 2\varepsilon > 0$ olsun. Aşağıdaki kümeleri

$$A(\varepsilon) = \left\{ (k, l) \in I_m \times J_r : \|x_{kl} - L_1\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ ve}$$

$$B(\varepsilon) = \left\{ (k, l) \in I_m \times J_r : \|x_{kl} - L_2\|_0^+ \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olarak tanımlayalım. Böylece $\delta_\lambda^2(A(\varepsilon)) = 0$ ve $\delta_\lambda^2(B(\varepsilon)) = 0$ dır.

Buradan $\|x_{kl} - L_1\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|x_{kl} - L_2\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k \in I_m$, $l \in J_r$ vardır. Ayrıca, bu k ve l için

$$2\varepsilon = \|L_2 - L_1\|_0^+ \leq \|x_{kl} - L_2\|_0^+ + \|x_{kl} - L_1\|_0^+ < \varepsilon$$

olduğundan bir çelişki vardır. Buda ispatı tamamlar.

Bir sonraki teorem, fuzzy normlu uzaylarda $\lambda -$ istatistiksel yakınsaklığının cebirsel karakterizasyonunu verir.

Teorem 6.6.4. (x_{kl}) ve (y_{kl}) $(X, \|\cdot\|)$ fuzzy normlu uzayda 2 dizi ve $L_1, L_2 \in X$ olmak üzere $x_{kl} \xrightarrow{FS_\lambda^2} L_1$ ve $y_{kl} \xrightarrow{FS_\lambda^2} L_2$ ve $\lambda \in \Lambda_2$ olsun. Bu durumda

- i) $(x_{kl} + y_{kl}) \xrightarrow{FS_\lambda^2} L_1 + L_2,$
- ii) $tx_{kl} \xrightarrow{FS_\lambda^2} tL_1$ ($t \in \mathbb{R}$).

Teorem 6.6.5 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay olsun. Eğer bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi, X üzerindeki fuzzy norma göre L ye yakınsaksa, o zaman L ye $FS_\lambda^2 -$ yakınsaktır.

İspat: $x_{kl} \xrightarrow{FN} L$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $k > k_0, l > l_0$ için $D(\|x_{kl} - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $(k_0, l_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çifti vardır. Dolayısıyla

$$\{(k, l): k \in I_m, l \in J_r: D(\|x_{kl} - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır ve bu da $FS_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L$ demektir.

Tanım 6.6.6 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay olsun. X teki bir (x_{kl}) dizisinin, X üzerindeki fuzzy norma göre λ –istatistiksel Cauchy dizisi olması için, her $\varepsilon > 0$ ve tüm $k, p \geq t$ ve $l, q \geq v$ pozitif $t = t(\varepsilon)$ ve $v = v(\varepsilon)$ tamsayılarının olması koşuluyla aşağıdaki eşitlik sağlanmalıdır.

$$\delta_\lambda^2 \{(k, l) \in I_m \times J_r: \|x_{kl} - x_{pq}\|_0^+ \geq \varepsilon\} = 0$$

Bu duruma eş olarak (x_{kl}) $FS_\lambda^2 - Cauchy$ olması için (x_{kl}) nin X üzerindeki fuzzy norma göre λ –istatistiksel olarak Cauchy olması gerekir.

Teorem 6.6.7 $(X, \|\cdot\|)$ bir fuzzy normlu uzay ve (x_{kl}) X ' de bir çift dizi olsun. $(X, \|\cdot\|)$ de, her $FS_\lambda^2 - yakınsak$ dizisi aynı zamanda X üzerindeki fuzzy norma göre bir $FS_\lambda^2 - Cauchy$ dir.

İspat: $x_{kl} \xrightarrow{FS_\lambda^2} L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman h.h.k ve l için $\|x_{kl} - L\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ var.

$\|x_{pq} - L\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $t \leq p$ ve $v \leq q$ pozitif $t = t(\varepsilon)$ ve $v = v(\varepsilon)$ tamsayılarını alalım. Şimdi $\|\cdot\|_0^+$ genel anlamda bir norm olduğundan, tüm $k, p \geq t$ ve $l, q \geq v$ için

$$\begin{aligned} \|x_{kl} - x_{pq}\|_0^+ &= \|(x_{kl} - L) + (x_{pq} - L)\|_0^+ \\ &\leq \|x_{kl} - L\|_0^+ + \|x_{pq} - L\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (x_{kl}) nin $FS_\lambda^2 - Cauchy$ olduğunu gösterir.

7. ÇİFT DİZİLERİN FUZZY n -NORMLU UZAYLARDA λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde ilk olarak fuzzy n -normlu uzaylarda λ -istatistiksel yakınsak diziler, λ -istatistiksel Cauchy dizileri ile ilgili tanım ve teoremler verildi. Daha sonra çift dizilerin fuzzy n -normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy tanımları ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi.

7.1 Fuzzy n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 7.1.1 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ bir FnNS ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. X içinde bir $x = (x_k)$ dizisi eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

koşulu sağlarsa, bu dizi bir $L \in X$ sayısına X üzerindeki fuzzy n -normuna göre λ -istatistiksel yakınsaktır veya FnS_λ -yakınsak denir.

Öyleyse $x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} L$ veya $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ veya $S_\lambda^{FnN} \lim x_k = L$ yazılır. Burada $I_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ dir.

Bu her bir $\varepsilon > 0$ için $K(\varepsilon) = \{k \in I_m : \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu anlamına gelir. Yani, her bir $\varepsilon > 0$ ve h.h.k için

$$\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+ < \varepsilon.$$

Bu durumda, $S_\lambda^{FnN} \lim x_k = L$ yazılır. X üzerindeki fuzzy n -normuna göre istatistiksel yakınsak tüm dizilerin kümesi FnS_λ ile gösterilecektir. $L \in X$ elemanı (x_k) dizisinin FnS_λ -limitidir. Komşuluk terimlerine göre her bir $\varepsilon > 0$ için $x_k \mathfrak{N}_L(\varepsilon, 0)$ sağlanırsa $x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} L$ elde edilir. Yukarıdaki tanımın kullanışlı bir yorumu aşağıdadır:

Eğer $S_\lambda^{FnN} \lim \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+ = 0$ ise $x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} L$ olur.

Dikkat edilirse $S_{\lambda}^{FnN} \lim \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+ = 0$ olması her bir $\alpha \in [0, 1]$ için

$$S_{\lambda}^{FnN} \lim \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_{\alpha}^- = S_{\lambda}^{FnN} \lim \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_{\alpha}^+ = 0$$

olduğunu ima eder. Çünkü

$$0 \leq \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_{\alpha}^- \leq \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_{\alpha}^+ \leq \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+$$

eşitsizliği her bir $k \in I_m$ ve her bir $\alpha \in [0, 1]$ sağlanır.

Bu durum için bu çalışmanın tümünde “ $(x_k), L \in X$ sayısına FnS_{λ} -yakınsaktır” yazıldı ancak bunun ile “ $(x_k), L \in X$ sayısına X üzerindeki fuzzy n -normuna göre FnS_{λ} -istatistiksel yakınsaktır” kast edildi. Sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır, her yakınsak dizi, FnNS' de istatistiksel olarak yakınsaktır, ancak bunun tersi aşağıdaki örnekte görülebileceği gibi genel olarak doğru değildir.

Örnek 7.1.2 ($\mathbb{R}^m, \|\cdot, \dots, \cdot\|$) Bir FnNS olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ (1) ile \mathbb{R}^m üzerinde tanımlanan fuzzy n -normda sıfır olmayan sabit bir vektör olsun. Öyle ki;

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2} = \|x\|_c$$

ve

$$\lambda = (\lambda_m) = (m) \in \Lambda.$$

Şimdi \mathbb{R}^m de bir (x_k) dizisi $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_k = \begin{cases} x & \text{Eğer } k = t^2 \\ \theta & \text{Eğer } k \neq t^2 \end{cases}$$

O zaman gördük ki $0 < \varepsilon \leq b (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$ eşitsizliğini sağlayan her ε sayısı için

$K(\varepsilon) = \{k \in I_m : \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - \theta\|_0^+ \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, \dots\}$ eşitliği elde edilir ve bu sebepten $\delta(K(\varepsilon)) = 0$ Eğer $\varepsilon > b (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}$ seçersek o zaman $K(\varepsilon) = \emptyset$ ve dolayısıyla $\delta(\emptyset) = 0$.

Bunun sonucunda $x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} \theta$ olur fakat (x_k) yakınsak değildir çünkü $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ kümesi sayılabilir sonsuz bir kümedir.

Ayrıca, (x_{k^2}) alt dizisi istatistiksel olarak x 'e yakınsarsa, istatistiksel olarak yakınsak bir dizinin bir alt dizisinin $FnNS$ ' de (x_k) dizisinin istatistiksel limitine yakınsak olması gerekmediğini görülür.

Aşağıdaki önermede, istatistiksel limitin bazı temel özellikleri özetlenmiştir.

Önerme 7.1.3 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ $FnNS$ ' de (x_k) ve (y_k) iki dizi öyle ki $x, y \in X$ iken $x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} x$ ve $y_k \xrightarrow{FnS_\lambda} y$ olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

- i) $(x_k + y_k) \xrightarrow{FnS_\lambda} x + y$
- ii) $tx_k \xrightarrow{FnS_\lambda} tx$ ($t \in \mathbb{R}$)
- iii) $S_\lambda \xrightarrow{FnN} \lim \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k\| = \|x\|$

Tanım 7.1.4 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ bir $FnNS$ olsun. X içinde bir dizi (x_k) olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \left| \{ k \in I_m : \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - x_N\|_0^+ \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

koşulunu sağlayan bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı var ise (x_k) dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre λ - istatistiksel Cauchy dizisidir.

Devamında, (x_k) dizisinin FnS_λ -Cauchy dizisi olmasının anlamı (x_k) dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre λ - istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek 7.1.5 Örnek 7.1.2 bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

Önerme 7.1.6 Bir FnNS $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ içinde her bir FnS_λ –yakınsak dizisi aynı zamanda FnS_λ –Cauchy dizisidir.

İspat:

$x_k \xrightarrow{FnS_\lambda} L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman $\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_N - x\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ seçilir. Şimdi $\|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|_0^+$ alışılmış anlamda bir norm olarak, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - x_N\|_0^+ &= \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, (x_k - x) + (x - x_N)\|_0^+ \\ &\leq \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - x\|_0^+ + \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x - x_N\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

Bu eşitlik (x_k) dizisinin bir FnS_λ –Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Aşağıdaki tanımda, X üzerinde fuzzy n -normuna göre kuvvetli λ –toplanabilirlik kavramı tanıtıldı ve incelendi ve λ –istatistiksel yakınsaklık ile ilişkisi bulundu. Daha önceden sözü verilen ilişkiler verilmeden önce X üzerindeki fuzzy n -normuna göre λ – toplanabilirlik tanımları verildi.

Tanım 7.1.7 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ bir FnNS ve $\lambda = (\lambda_m)$ ise bir azalmayan, pozitif terimli ve sonsuza giden bir dizi, $\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1$, $\lambda_1 = 1$ ve $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer $I_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) = 0$ olması için bir $L \in X$ varsa $x = (x_k)$ dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre kuvvetli λ –toplanabilirdir. Bu durum için $[V, \lambda]_{FnN} - \lim x_k = L$ yazılır.

X üzerinde fuzzy n -normuna göre kuvvetli toplanabilir bütün (V, λ) ikilileri $[V, \lambda]_{FnN}$ ile gösterildi. Bu durumda X, L' ye fuzzy n -norma göre X üzerinde kuvvetli λ – toplanabilirdir denilir. Eğer $\lambda_m = m$ ise o zaman kuvvetli λ –toplanabilirlik X üzerindeki fuzzy n -normuna göre kuvvetli Cesaro toplanabilirliğe daralır ki bu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) = 0$$

Bu durum için $[C, 1]_{FnN} - \lim x_k = L$ yazdık. X üzerinde tüm kuvvetli $(C, 1)$ fuzzy n -norma toplanabilirlerin kümesi $[C, 1]_{FnN}$ ile gösterildi. Bu nedenle aşağıdaki eşitlikler yazıldı:

$$[V, \lambda]_{FnN} = \{x = (x_k): \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) = 0 \text{ Bazı } L \text{ için}\}$$

$$[C, 1]_{FnN} = \{x = (x_k): \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) = 0 \text{ Bazı } L \text{ için}\}$$

Örnek 7.1.8 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ örnek 7.1.2 de tanımlanan bir FnNS ve $\lambda = (\lambda_m)$ ise bir azalmayan, pozitif terimli ve sonsuza giden bir dizi, $\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1$, $\lambda_1 = 1$ ve

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1 & m - \sqrt{\lambda_m} + 1 < k \leq m \\ 0 & \text{Diğer} \end{cases}$$

$\mathbb{R}'de$ bir dizi olsun. Bu durum için $[V, \lambda]_{FnN} - \lim x_k = 0$ yazılır. Bu durum için x, \mathbb{R} üzerindeki fuzzy n -normuna göre $0'$ a kuvvetli λ -toplanabilir denir.

Teorem 7.1.9 Eğer bir dizi $x = (x_k)$, L' ye $[V, \lambda]_{FnN} -$ toplanabilir ise o zaman L' ye $FnS_\lambda -$ yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\ & \geq \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\ & \geq \varepsilon |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik L' ye $[V, \lambda]_{FnN} -$ toplanabilir olduğunu ima eder, o zaman x, L' ye $FnS_\lambda -$ yakınsaktır.

Teorem 7.1.10 Eğer bir sınırlı $x = (x_k)$ dizisi L' ye $FnS_\lambda -$ yakınsak ise o zaman L' ye $[V, \lambda]_{FnN} -$ toplanabilirdir ve bunun sonucunda x, L' ye $[C, 1]_{FnN} -$ toplanabilirdir.

İspat: Farz edelim ki $x = (x_k)$ sınırlı bir dizi olsun ve L' ye $F_n S_\lambda$ –yakınsak olsun. x , sınırlı olduğu için tüm k değerleri için $D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) < M$ olur.

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin, aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&+ \frac{1}{\lambda_m} \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) < \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \frac{M}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon
\end{aligned}$$

Bu bağıntı x' in L' ye $[V, \lambda]_{F_n N}$ – toplanabilir olduğunu ima eder. Ayrıca aşağıdaki bağıntı da vardır:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-\lambda_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&+ \frac{1}{m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=1}^{m-\lambda_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&+ \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \frac{2}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}).
\end{aligned}$$

Bunun sonucunda x' in L' ye $[C, 1]_{F_n N}$ – toplanabilir olduğu ortaya çıkar çünkü x, L' ye $[V, \lambda]_{F_n N}$ – toplanabilirdir.

Teorem 7.1.11 Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre L' ye istatistiksel yakınsak ise ve $\liminf_m \left(\frac{\lambda_m}{m}\right) > 0$ ise o zaman L' ye FnS_λ -yakınsaktır.

İspat. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki bağıntı vardır:

$$\begin{aligned} & \{k \leq m: D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\} \\ & \supseteq \{k \in I_m: D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

Bunun sonucunda aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} |\{k \leq m: D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \geq \frac{1}{m} |\{k \in I_m: D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \geq \frac{\lambda_m}{m} \cdot \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m: D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

$m \rightarrow \infty$ için limit olarak ve $\liminf_m \left(\frac{\lambda_m}{m}\right) > 0$ kullanılarak x 'in L' ye FnS_λ -yakınsak olduğu elde edilir. Bu çalışmanın tümünde, aksi söylenmemiş ise, “tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için ” sözünün anlamı “tüm $m \in \mathbb{N}$, sonlu pozitif tamsayılar hariç” anlamında kullanılacaktır. Burada bazı $m_0 \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ için $\mathbb{N}_{m_0} = \{m_0, m_0 + 1, m_0 + 2, \dots\}$

Teorem 7.1.12 $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_m)$ iki dizi Λ içinde, öyle ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun.

i) Eğer $\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} > 0$ ise $FnS_\mu \subseteq FnS_\lambda$

(2)

ii) Eğer $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ ise $FnS_\lambda \subseteq FnS_\mu$ (3)

İspat. (i) Farz edelim ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun ve (2) sağlansın. O zaman $I_m \subset J_m$ ve bu nedenle her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki bağıntı yazılır:

$$\begin{aligned} & |\{k \in J_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \geq |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

Ve bunun sonucu olarak tüm $m_0 \in \mathbb{N}_{m_0}$ için aşağıdaki bağıntı yazılır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_m} |\{k \in J_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \geq \frac{\lambda_m}{\mu_m} \cdot \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $J_m = [m - \mu_m + 1, m]$

Şimdi $m \rightarrow \infty$ için son eşitsizlikte limit alınır ve (2) kullanılırsa $FnS_\mu \subset FnS_\lambda$ elde edilir.

(İİ) $(x_k) \in FnS_\lambda$ olsun ve (3) sağlansın. $I_m \subset J_m$ ve $\varepsilon > 0$ olduğundan tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için aşağıdaki bağıntıyı yazılır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_m} |\{k \in J_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & = \frac{1}{\mu_m} |\{m - \mu_m + 1 \leq k \leq m - \lambda_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\ & \geq \varepsilon\}| \\ & \quad + \frac{1}{\mu_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{\mu_m - \lambda_m}{\mu_m} + \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq (1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}) + \frac{1}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

(3)e göre $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ olduğundan ve $x = (x_k) \in FnS_\lambda$ olduğundan sağ tarafın ikinci terimi $m \rightarrow \infty$ için 0' a yakınsar. Bu $m \rightarrow \infty$ için aşağıdaki ifadenin varlığını gösterir:

$$\frac{1}{\mu_m} |\{k \in J_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$$

Bunun sonucu olarak $x = (x_k) \in FnS_\lambda$ olur ve bunun sonucunda $FnS_\lambda \subseteq FnS_\mu$ elde edilir.

Sonuç 7.1.13 $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_m)$ iki dizi Λ içinde, öyle ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun.

Eğer (3) sağlanırsa o zaman $FnS_\lambda = FnS_\mu$

Eğer Sonuç 7.1.13 de $\mu = (\mu_m) = (m)$ alırsak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 7.1.14 $\lambda = (\lambda_m) \in \Lambda$ olsun. Eğer $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{m} = 1$ ise $FnS_\lambda = FnS$ eşitliği vardır.

Teorem 7.1.15 $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_m) \in \Lambda$ olsun. Varsayalım ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun.

- i. Eğer (2) korunursa o zaman $[V, \mu]_{FnN} \subseteq [V, \lambda]_{FnN}$
- ii. Eğer (3) korunursa o zaman $l_\infty \cap [V, \mu]_{FnN} \subseteq [V, \lambda]_{FnN}$

İspat i. Varsayalım ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun. O zaman $I_m \subset J_m$ olur ve bu nedenle tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için aşağıdaki bağıntı yazılır:

$$\frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0})$$

Bu bağıntı aşağıdakini verir:

$$\frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \frac{\lambda_m}{\mu_m} \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0})$$

Bunun sonucunda son eşitsizlikte $m \rightarrow \infty$ için limit alınarak ve (2) kullanılarak

$$[V, \mu]_{FnN} \subseteq [V, \lambda]_{FnN}$$

elde edilir.

ii. $x = (x_k) \in l_\infty \cap [V, \mu]_{FnN}$ olsun ve (3) ün sağlandığını kabul edelim. $(x_k) \in l_\infty$ olduğundan tüm k değerleri için $D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \leq M$ eşitsizliğini sağlayan bazı $M > 0$ vardır. Şimdi $\lambda_m \leq \mu_m$ olduğundan $\frac{1}{\mu_m} \leq \frac{1}{\lambda_m}$ yazılır ve tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $I_m \subset J_m$ olur. Aşağıdaki eşitsizlik tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için yazılır:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&= \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m/I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) + \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \frac{\mu_m - \lambda_m}{\mu_m} \cdot, \dots, \cdot M + \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq (1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}) \cdot, \dots, \cdot M + \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0})
\end{aligned}$$

(3) nedeniyle $\lim_m \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ ve $x = (x_k) \in [V, \lambda]_{FnN}$ olduğundan son eşitsizlikte sağ tarafın ikinci teriminde $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa 0'a gider ve (2) kullanılarak $[V, \mu]_{FnN} \subseteq [V, \lambda]_{FnN}$ elde edilir. (Not: tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m} \geq 0$ dir.)

Bu sonuç $l_\infty \cap [V, \lambda]_{FnN} \subseteq [V, \mu]_{FnN}$ olduğunu ima eder ve bu nedenle $l_\infty \cap [V, \lambda]_{FnN} \subseteq l_\infty \cap [V, \mu]_{FnN}$ olur.

Teorem 7.1.15 ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 7.1.16 $\lambda, \mu \in \Lambda$ öyle ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun. Eğer (3) sağlanıyorsa o zaman

$$l_\infty \cap [V, \lambda]_{FnN} = l_\infty \cap [V, \mu]_{FnN}$$

olur.

Teorem 7.1.17 $\lambda, \mu \in \Lambda$ öyle ki tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m \leq \mu_m$ olsun.

(i) Eğer (2) sağlanıyorsa o zaman $x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN}) \Rightarrow x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$,

Ve $[V, \mu]_{FnN} \subset FnS_\lambda$ kapsamı bazı $\lambda, \mu \in \Lambda$ için değişmezdir.

(ii) Eğer $(x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ ise o zaman (3) ün sağlandığı her zaman $x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN})$ olur.

İspat (i) $\varepsilon > 0$ ve $x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN})$ verilsin. Şimdi her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki eşitsizliği yazılır:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
& \geq \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
& \geq \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
& \geq \varepsilon \cdot |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

Böylelikle tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
& \geq \frac{\lambda_m}{\mu_m} \frac{1}{\lambda_m} \cdot \varepsilon \cdot |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte $m \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (2) kullanılarak her ne zaman $x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN})$ olursa $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ olacağını elde ederiz. $[V, \mu]_{FnN} \subset FnS_\lambda$ kapsamasının bazı $\lambda, \mu \in \Lambda$ için değişmez olduğunu göstermek için tüm $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda_m = \sqrt{m}$, $\mu_m = m$ yazarız. $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x_k = \begin{cases} k; & k = m^2 \\ 0; & k \neq m^2 \end{cases}$$

O zaman açık olarak örnek 7.1.2 deki gibi $x_k \rightarrow 0 (FnS_\lambda)$ olduğu görülür. Diğer yandan biliniyor ki;

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + s + m^2 = \frac{m \cdot (m + 1) \cdot (2m + 1)}{6}$$

her m doğal sayısı için vardır. Bu eşitlik ile

$$\frac{1}{\mu_m} \sum_{j \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - 0\|, \tilde{0})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \|x_k\|_0^+ = \frac{1}{m} (1 + 0 + 0 + 4 + \dots + s + [\sqrt{m}]^2) \\
&= \frac{1}{m} \cdot \frac{([\sqrt{m}]) \cdot ([\sqrt{m}] + 1) \cdot (2[\sqrt{m}] + 1)}{6}
\end{aligned}$$

olduğunu bildiğimiz için

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{([\sqrt{m}] + 1) \cdot (2[\sqrt{m}] + 1)}$$

yazılır. Bu nedenle

$$m \rightarrow \infty \text{ için } \frac{1}{\mu_m} \sum_{j \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - 0\|, \tilde{0}) > \frac{[\sqrt{m}]}{6} \rightarrow \infty$$

olur. Bunun sonucunda $x \notin [V, \mu]_{FnN}$ bulunur.

(ii) $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ ve $x = (x_k) \in l_\infty$ olduğunu varsayalım. O zaman bazı $M > 0$ sayıları ve tüm k sayıları için $D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \leq M$ sağlanır çünkü $\frac{1}{\mu_m} \leq \frac{1}{\lambda_m}$ dir.

O zaman her $\varepsilon > 0$ ve $m \in N$ için aşağıdaki eşitsizliği yazılır:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&= \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in J_m / I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) + \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \frac{\mu_m - \lambda_m}{\mu_m} \cdot M + \frac{1}{\mu_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}\right) \cdot M + \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k \in I_m} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
&\leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}\right) \cdot M + \frac{1}{\lambda_m} \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\lambda_m} \sum_{\substack{k \in I_m \\ D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) < \varepsilon}} D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \\
& \leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}\right) \cdot M + \frac{M}{\lambda_m} |\{k \in I_m : D(\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_k - L\|, \tilde{0}) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon
\end{aligned}$$

(3)'ü kullanarak her ne zaman $x_k \rightarrow L(FS_\lambda)$ olursa $x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN})$ olacağını ispatlanmış oldu. Bunun sonucunda $l_\infty \cap FnS_\lambda \subseteq [V, \mu]_{FnN}$ bağıntısını elde edilir.

Eğer Teorem 7.1.17 'de tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\mu_m = m$ alırsak aşağıdaki sonuçları elde edilir.

$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ olması $\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1 > 0$ olduğunu ima ettiği için (3) \Rightarrow (2) olur.

Sonuç 7.1.18 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ olsun. O zaman

- (i) Eğer $(x_k) \in l_\infty$ ve $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ ise o zaman $x_k \rightarrow L([C, 1]_{FnN})$ olur.
- (ii) Eğer $x_k \rightarrow L([C, 1]_{FnN})$ ise o zaman $x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$ olur.

Sonuçlar 7.1.19 (V, λ) toplanabilirlik ve $(C, 1)$ toplanabilirlik fuzzy n -normlu uzaylarda verildi. $[V, \lambda]_{FnN}$ ve $[C, 1]_{FnN}$ arasındaki ilişki de verildi. Ayrıca, λ – istatistiksel yakınsaklık hangi koşullar olacağı verilmiştir.

$$x_k \rightarrow L([V, \mu]_{FnN}) \Rightarrow x_k \rightarrow L(FnS_\lambda)$$

Son olarak aşağıdaki benzerlikler gösterilmiştir:

- (i) Teorem 7.1.17 de tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m = \mu_m$ alırsak [13]'de teorem 2.1 de (i) ve (ii) elde edilir. (Not: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_m}{\mu_m} = 1$ olduğuna dikkat ediniz ve bu nedenle (2) ve (3) bu durum için sağlanır.)
- (ii) Teorem 7.1.17 de tüm $m \in \mathbb{N}_{m_0}$ için $\lambda_m = \mu_m = m$ alırsak teorem 2.1'in $q=1$ özel durumunu [3]' de bulunur. (Bu durum için de (2) ve (3) sağlanır.)

7.2 Çift Dizilerin Fuzzy n -Normlu Uzaylarda λ -İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 7.2.1 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ bir FnNS ve $\lambda \in \Lambda$ olsun. X içinde bir $x = (x_k)$ dizisi eğer her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{m,r \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{mr}} \left| \{(k, l) \in I_m \times J_r : D(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \|x_{kl} - L, \tilde{0}\|) \geq \varepsilon\} \right| = 0,$$

koşulu sağlanırsa, bu dizi bir $L \in X$ sayısına X üzerindeki fuzzy n -normuna göre λ -istatistiksel yakınsaktır veya FnS_λ^2 -yakınsak denir.

Böylece $x_{kl} \xrightarrow{FnS_\lambda^2} L$ veya $x_{kl} \rightarrow L(FnS_\lambda^2)$ veya $FnS_\lambda^2 - \lim x_{kl} = L$ yazılır. Bu, her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{(k, l) \in I_m \times J_r : \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - L\|_0^+ \geq \varepsilon\}$$

kümesinin, doğal yoğunluk sıfırına sahip olduğu anlamına gelir, yani her bir $\varepsilon > 0$, $\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - L\|_0^+ < \varepsilon$ neredeyse tüm k ve l için.

Bu durumda $FnS_\lambda^2 - \lim x = L$ yazabiliriz. X üzerindeki fuzzy n -norma göre λ -istatistiksel olarak yakınsak dizilerin tümü FnS_λ^2 ve $FnS_\lambda^2 = \{x = (x_{kl}) : \exists L, FnS_\lambda^2 - \lim x = L\}$ ile gösterilecektir. Bu ise (x_{kl}) , FnS_λ^2 nin $L \in X$ ' e yakınsadığı anlamına gelir. (x_{kl}) X üzerindeki fuzzy n -norma göre λ -istatistiksel olarak $L \in X$ e yakınsaktır.

Tüm m, r için $\gamma_m = m$ ve $\mu_r = r$ ise o zaman $FnS_\lambda^2(X)$ uzayı $FnS_2(X)$ uzayına indirgenir ve $\delta_2(K) \leq \delta_\lambda^2(K)$ olduğundan $FnS_\lambda^2(X) \subset FnS_2(X)$ elde edilir.

Teorem 7.2.2 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ fuzzy n -normlu uzayda (x_{kl}) ve (y_{kl}) diziler olsun öyle ki

$x_{kl} \xrightarrow{FnS_\lambda^2} L_1$ ve $y_{kl} \xrightarrow{FnS_\lambda^2} L_2$ ve $\lambda \in \Lambda_2$ burada $L_1, L_2 \in X$ dir. O zaman

- i) $(x_{kl} + y_{kl}) \xrightarrow{FnS_\lambda^2} L_1 + L_2,$
- ii) $tx_{kl} \xrightarrow{FnS_\lambda^2} tL_1$ ($t \in \mathbb{R}$).

Tanım 7.2.3 $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ bir FnNS olsun. X ' teki bir dizi (x_{kl}) , her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{mr \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_{mr}} \left| \{ (k, l) \in I_m \times J_r : \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - x_{pq}\|_0^+ \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

koşulunu sağlayan tüm $k, p \geq t$ ve $l, q \geq v$ pozitif bir $t = t(\varepsilon)$ ve $v = v(\varepsilon)$ tamsayıları var ise, (x_{kl}) dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre λ – istatistiksel Cauchy dizisidir.

Devamında, (x_{kl}) dizisinin FnS_λ^2 – Cauchy dizisi olmasının anlamı (x_{kl}) dizisi X üzerinde fuzzy n -normuna göre λ – istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Önerme 7.2.4 Bir FnNS $(X, \|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|)$ içinde her bir FnS_λ^2 – yakınsak dizisi aynı zamanda FnS_λ^2 –Cauchy dizisidir.

İspat: $x_{kl} \xrightarrow{FnS_\lambda^2} L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman her k ve l için $\|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - L\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $\|x_{pq} - L\|_0^+ < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $t \leq p$ ve $v \leq q$ pozitif bir $t = t(\varepsilon)$ ve $v = v(\varepsilon)$ tamsayılarını alalım. Şimdi $\|\cdot, \cdot, \dots, \cdot\|_0^+$ alışılmış anlamda bir norm ve tüm $k, p \geq t$ ve $l, q \geq v$ için

$$\begin{aligned} \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - x_{pq}\|_0^+ &= \|(x_{kl} - L) + (x_{pq} - L)\|_0^+ \\ &\leq \|z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, x_{kl} - L\|_0^+ + \|x_{pq} - L\|_0^+ \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu (x_{kl}) nin FnS_λ^2 – Cauchy olduğunu gösterir.

8. KAYNAKLAR

- Altınok H, Altın Y, Et M, 2004, Lacunary Almost Statistical Convergence of Fuzzy Numbers, Thai Journal of Mathematics, 2(2), 265-274
- Apostol T, 1974, Mathematical Analysis, Addison-Wesley Pub.No.Co. Reading, Mass.
- Bag T, Samanta SK, 2008, Fixed point theorems in Felbin's type fuzzy normed linear spaces, J. Fuzzy Math., 16(1) (2008), 243-260.
- Bayraktar M, 2006, Fonsiyonel Analiz, Gazi Kitabevi.
- Bromwich TJ, 1908, An Introduction to the Theory of Infinite Series, Macmillan and Co. Ltd., London.
- Burkill JC, Burkill H., 1980, A second Course in Mathematical Analysis. Cambridge University Pres., Cambridge, New York.
- Choudhary B, Nanda S, 1989, Functional Analysis with Applications, John.
- Connor J S, 1988 The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis, 8, 47-63.
- Çınar M, Et M, Karakaş M, 2013, On λ - statistical convergence of order of sequences of function, J. Inequal. Appl., 204, 1-8.
- Çolak, R, 2011, On λ -statistical convergence, Conference on Summability and Applications, May 12-13, Istanbul Turkey.
- Edely, Mursaleen, Osama, Edely, 2003, H. Statistical convergence of double sequences. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 223–231.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 2, 241–244.
- Felbin C, 1992, Finite-dimensional fuzzy normed linear space, Fuzzy Sets and Systems, 48(2), 239-248.
- Fridy J A, 1985, On statistical convergence. Analysis, 5, 301–313.
- Gunawan, Mashadi, 2000, M. On n-normed spaces, Int. J. Math. and Math. Sci., 27: 631-639.

- Habil E, 2005, Double Sequences and Double Series. The Islamic University Journal, 14: 1-32.
- Hardy GH, 1917, On the Convergence of Certain Multiple Series. Proc. Camb. Phil. Soc., 19:86-95.
- Hazarika B, Savaş E, 2013, λ - statistical convergence in n-normed spaces, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 4(1): 85-91.
- Hill, Kolman, 2002, Elementary Linear Algebra with Applications (Editör: Akın. Ö.), Palme Yayıncılık, Ankara, 343s.
- Kaleva O, Seikkala S, 1984, On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12(3), 215-229.
- Kreyszig E, 1978, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons. Inc. ,
- Leindler L, 1965, Uber die de la Vallee-Pousinsche Summierbarkeit allgenmeiner Otho-gonalreihen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 16 (1965), 375-387.
- Matloka M, 1986, Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28–37.
- Mizumoto M, Tanaka K, 1979, Some properties of fuzzy numbers, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland Amsterdam, 153–164.
- Mursaleen M, 2000, statistical convergence, Math. Slovaca, 50(1), 111-115.
- Türkmen M R, Çınar M, 2018, Lambda Statistical Convergence in Fuzzy Normed Linear Spaces, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 34 (6), 4023–4030.
- Maddox I J , 1988, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres.
- Mohiuddine S A, Sevli H, Cancan M, 2012, Statistical convergence of double sequences in fuzzy normed spaces, Filomat, 26(4), 673-681.
- Moricz F, Rhoades BE, 1988. Almost Convergence of Double Sequences and Strong Regularity of Summability Matrices. Math. Proc. Phil. Soc., 104: 283-294.
- Moricz F, 1991, Extensions of the space c and c_0 from single to double sequences, Acta Math. Hungarica, 57: 129-136.

- Móricz F, 2003, Statistical convergence of multiple sequences. Arch. Math., 81.
- Mursaleen M, Osama H, Edely H, 2003, Statistical convergence of double sequences. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 223–231.
- Niven I, 1951, The Asymptotic Density of Sequences, Bulletin of the American Mathematical Society, 57:420-434.
- Nuray F, Savaş E, 1995, Statistical convergence of sequence of fuzzy numbers. Mathematica Slovaca, 45 (3): 269-273.
- P. Diamond and P. Kloeden. «P. Diamond and P. Kloeden, Metric Spaces of Fuzzy Sets- Theory and Applications, World Scientific Publishing, (1994), Singapore.» 1994.
- Pringsheim A, 1897, Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen. Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaft, Munich 27: 101-153.
- Pringsheim A, 1900, A. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. Mathematische.
- Reddy B Surender, 2010, Statistical convergence in n-normed spaces, International Mathematical Forum, 5(24), 1185,1193.
- Mohiuddine S A, 2012, Statistical convergence of double sequences in fuzzy normed spaces, Filomat 26(4), 673–681.
- Šalát T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca.
- Savaş E, 2000, On Strongly λ - summable Sequences of Fuzzy Numbers, Information Science, 125(1-4), 181-186.
- Schoenberg I J, 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66 361–375.
- Şençimen C, Pehlivan S, 2008, Statistical convergence in fuzzy normed linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 159(3), 361-370.
- Tripathy BC, 2003, Statistically Convergent Double Sequences. Tamkang J. Math., 34(3): 231-237.

Tripathy BC, 2004, Generalized Difference Paranormed Statistically Convergent Sequences Defined by Orlicz Function in a Locally Convex Space, *Soochow J. Math.*, 30(4): 431-446.

Tuncer A N, Benli F B, 2006, A note on l -statistical Cauchy sequences. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31:91-96.

Yıldız C, 2005, Genel Topoloji. ANKARA: Gazi Kitabevi.

Xiao J, Zhu X, 2002, On linearly topological structure and property of fuzzy normed linear space, *Fuzzy Sets and Systems* 125(2), 153-161.

Zadeh L A, 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8 (1965), 338-353.



