

ASİMETRİK UZAYLAR

Merve ÇAY
201409101

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

İstanbul
T.C. Maltepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Ağustos, 2022

ASİMETRİK UZAYLAR

Merve ÇAY

201409101

ORCID: 0000-0003-3178-2925

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Tezli Yüksek Lisans

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

İstanbul

T.C. Maltepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ağustos, 2022



JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulu tarafından 19.01.2021 tarihli “*Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge*” ile bildirilen 6689 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.



ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI

Bu belge, Yükseköğretim Kurulu tarafından 19.01.2021 tarihli “*Lisansüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge*” ile bildirilen 6689 Sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanunu kapsamında gizlenmiştir.



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, dersleriyle vizyon kazandıran ve bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve tecrübesi ile bana destek veren değerli Tez Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI'ya teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Tüm eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle yanımda olup, sabredip, bana ümit verdikleri için Annem Mürvet ÇAY'a, Babam İlhan ÇAY'a ve Kardeşim Büşra ÇAY'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Merve ÇAY

Ağustos, 2022

ÖZ

ASİMETRİK UZAYLAR

Merve Çay
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Tezli Yüksek Lisans
Danışman: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı
Maltepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, 2022

Boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir pseudo-asimetrik, $X \times X$ üzerinde her $x, y, z \in X$ için $p(x, x) = 0$ ve $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ olacak şekilde negatif olmayan reel değerli bir p fonksiyonudur. Eğer p ek olarak $p(x, y) = 0$ olması $x = y$ olmasını da gerektiriyorsa p ye X üzerinde asimetrik denir. p asimetrik ise her $x, y \in X$ için $q(x, y) = p(y, x)$ ile tanımlanan q da bir asimetrik olur. Bu asimetriğe p nin eşleniği denir. $B^+(x, p, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$ kümesi x merkezli ε yarıçaplı ileri açık yuvar, $B^-(x, p, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$ kümesi de x merkezli ε yarıçaplı geri açık yuvardır. Bir asimetrik uzayda bir dizinin yakınsaklığı ileri topoloji ve geri topolojiye bağlı olduğundan ileri yakınsaklık ve geri yakınsaklık adı verilen iki türlü yakınsaklık türü ortaya çıkar. Bu tez çalışmasında ileri topoloji, geri topoloji, ileri yakınsaklık, geri yakınsaklık, ileri Cauchy dizisi, geri Cauchy dizisi, ileri kompaktlık, geri kompaktlık kavramları ele alınmış ve ilgili teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Asimetrik, ileri topoloji, geri topoloji, ileri yakınsak dizi, geri yakınsak dizi, ileri kompaktlık, geri kompaktlık.

ABSTRACT

ASYMMETRIC SPACES

Merve Çay
Master Thesis
Mathematics Department
Mathematics Master Programme With Thesis
Thesis Advisor: Prof. Dr. Hüseyin Çakallı
Maltepe University Graduate School, 2022

A pseudo-asymmetric on a non-empty set X is a non-negative real-valued function p on $X \times X$ such that for $x, y, z \in X$ we have $p(x, x) = 0$ and $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$. If p satisfies the additional condition that $p(x, y) = 0$ implies $x = y$ then p is an asymmetric on X , so is q where q is defined by $q(x, y) = p(y, x)$ for $x, y \in X$, and q is called the conjugate of p . The set $B^+(x, p, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$ is the forward ball with centre x and radius ε , the set $B^-(x, p, \varepsilon) = \{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$ is the backward ball with centre x and radius ε . The topology generated by the forward balls is called forward topology, the topology generated by the backward balls is called backward topology. Convergence of a sequence of points in an asymmetric space depends on forward topology and backward topology, so there are two kinds of convergence of a sequence in an asymmetric space, namely forward convergence and backward convergence. In this thesis we study forward topology, backward topology, forward convergence, backward convergence, forward Cauchyness, backward Cauchyness, forward compactness, backward compactness, and give proofs of related theorems.

Keywords: Asymmetric, forward topology, backward topology, forward convergent sequence, backward convergent sequence, forward compactness, backward compactness,

İÇİNDEKİLER

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ETİK İLKE VE KURALLARA UYUM BEYANI	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZ	v
ABSTRACT.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR.....	viii
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER	3
2.1. Topolojik Uzaylar	3
2.2. Metrik Uzaylar	6
BÖLÜM 3. ASİMETRİK UZAYLAR	8
3.1. Asimetrik Uzay Kavramı	8
3.2. Asimetrik Uzaylarda Topolojiler	16
BÖLÜM 4. ASİMETRİK UZAYLARDA DİZİLER.....	20
4.1. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Yakınsaklık	20
4.2. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Sınırlılık	29
4.3. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Cauchy Dizileri	32
BÖLÜM 5. ASİMETRİK UZAYLARDA kompaktlık ÇEŞİTLERİ	38
5.1. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Kompaktlık.....	38
BÖLÜM 6. SONUÇ	43
KAYNAKÇA.....	44
ÖZGEÇMİŞ	46

KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
(X, d)	: Asimetrik uzay
τ_+ ileri topoloji	: X asimetrik uzayının ileri açık yuvarları tarafından oluşturulan
τ_- geri topoloji	: X asimetrik uzayının geri açık yuvarları tarafından oluşturulan
$B^+(x, \varepsilon)$	: İleri açık yuvar
$B^-(x, \varepsilon)$	: Geri açık yuvar
A'^+	: A kümesinin bütün ileri yığılma noktalarının kümesi
A'^-	: A kümesinin bütün geri yığılma noktalarının kümesi
$\bar{A}^+$	: A nın ileri kapanışı
$\bar{A}^-$	: A nın geri kapanışı
$x_n \xrightarrow{f} x_0$	: (x_n) dizisi x_0 a ileri yakınsak
$x_n \xrightarrow{b} x_0$	: (x_n) dizisi x_0 a geri yakınsak

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Asimetrik uzaklık fonksiyonu ilk kez 1914 yılında F. Hausdorff tarafından tanımlanmıştır. Hausdorff, bir metrik uzayın herhangi iki alt kümesinin birbirine olan uzaklığını ifade eden ve simetri özelliği taşımayan bir uzaklık tanımlayarak asimetri kavramını ortaya atmıştır. Asimetrik uzaylar ise ilk olarak 1931 yılında Wilson (1931) tarafından quasi-metrik kavramı tanımlanarak çalışılmıştır. Daha sonra Albert (1941) ve Stoltenberg (1969) tarafından quasi-metrik uzaylar olarak çalışılırken, Ribeiro (1943) bu uzayları zayıf metrikli uzaylar olarak adlandırmıştır. Reilly (1982) ve Kunzi (1983) quasi-pseudo metrik uzaylarda çalışmışlardır. İleri Cauchy ve geri Cauchy kavramları reel sayı dizileri için Çakallı (2018) tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Collins ve Zimmer (2007) asimetrik uzaylarda yakınsaklık, kompaktlık ve total sınırlılık kavramlarını incelemiştir. Cobzaş (2012) quasi-metrik uzaylar konusundaki çalışmalarını derlemiştir. Dağcı ve Çakallı (2022) asimetrik uzaylarda düzgün yakınsaklık üzerinde çalışmıştır.

Asimetrik uzaylarda, metrik uzaylardan farklı olarak simetri özelliği gerçekleşmek zorunda olmadığından, yakınsaklık, tamlık, kompaktlık, total sınırlılık gibi kavramlar metrik uzayda olduğundan farklı ifade edilmektedir.

Asimetrik uzaylarda simetri özelliğinin olmaması bu uzaylarda iki türlü topolojinin var olmasını ve dolayısıyla yakınsaklık, tamlık, kompaktlık ve total sınırlılık gibi temel kavramların iki türlü incelenmesini ortaya çıkarmıştır.

Bu tez çalışmasında bir uzaklık fonksiyonu olan asimetrik kavramı ve asimetrik uzay kavramı ayrıntılı olarak incelenecek, bir asimetrik uzayın ileri topoloji ve geri topoloji adı verilen topolojileri ve bu topolojilerin özellikleri kullanılarak elde edilen temel kavramlar, teoremler ve sonuçlar sunulacaktır.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir.

Üçüncü bölümde bir asimetric uzay üzerinde tanımlı olan asimetric tarafından elde edilen ileri açık yuvarlar ve geri açık yuvarlar tanımlanarak bu yuvarlar tarafından üretilen ileri topoloji ve geri topoloji kavramları üzerinde durulacaktır. Ayrıca tanımlanan bu ileri ve geri topolojileriyle bir asimetric uzayın birinci sayılabilir bir uzay olduğu ayrıntılı olarak ifade edilecektir.

Dördüncü bölümde bir asimetric uzayda ileri ve geri yakınsaklık, ileri ve geri sınırlılık, ileri ve geri Cauchy dizisi, ileri ve geri tamlık kavramları ele alınacaktır. Metrik uzaylardan farklı olarak, bir asimetric uzayda bir ileri yakınsak dizinin ileri limitinin tek olmak zorunda olmadığı gösterilecek ve ileri limitin tekliği için gerek şartın dizinin ileri yakınsadığı noktaya geri yakınsaması olduğu ifade edilecektir. Benzer durum geri yakınsaklık için de gösterilecektir.

Beşinci bölümde ise asimetric uzaylarda ileri ve geri kompaktlık, ileri ve geri dizisel kompaktlık kavramları ele alınacaktır. Ayrıca bir asimetric uzay ileri dizisel kompakt ise ileri limitin tek olduğu sonucuna varılacaktır. Bu durumun geri dizisel kompaktlık için de geçerli olduğu ifade edilecektir.

Sonuç bölümünde asimetric uzaylarda elde edilen teoremlerin ve sonuçların özeti verilecektir.

BÖLÜM 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde topolojik uzaylar ve metrik uzaylar ile ilgili temel tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir.

2.1. Topolojik Uzaylar

Bu kesimdeki tanım ve teoremler Çakallı (1997) kaynağı kullanılarak hazırlanmıştır.

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir τ topluluğu eğer

(T1) X ve $\emptyset$ τ ya aittir,

(T2) τ nun herhangi iki elemanının kesişimi τ ya aittir,

(T3) τ nun elemanlarının herhangi bir ailesinin birleşimi τ ya aittir.

özelliklerini sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir. τ nun her bir elemanına X de τ topolojisine göre açık küme veya τ nun söylenmemesi karışıklık çıkarmadığında X de açık küme ya da kısaca açık küme denir.

Tanım 2.1.2. (X, τ) bir topolojik uzay, $U \subset X$ ve $u \in U$ olsun. Eğer $u \in A$ ve $A \subset U$ olacak şekilde bir $A \in \tau$ bulunabiliyorsa U kümesine u noktasının bir komşuluğu denir.

Tanım 2.1.3. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her farklı iki elemanının ayrık komşulukları bulunabiliyorsa yani $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \neq x_2$ ise $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x_1 in bir U komşuluğu ve x_2 nin bir V komşuluğu bulunabiliyorsa X e Hausdorff uzayı (veya T_2 -uzayı) denir

Tanım 2.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. Bu takdirde, eğer τ nun her bir elemanı β nin elemanlarının bir birleşimine eşit oluyorsa β ya τ topolojisi için bir baz denir.

Teorem 2.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay ve β da τ için bir baz olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

(B1) $X = \cup\{B : B \in \beta\}$ dir,

(B2) β nin herhangi iki elemanının kesişimi β nin elemanlarının bir birleşimine eşittir.

Teorem 2.1.6. X herhangi bir küme ve β da X in alt kümelerinin Teorem 2.1.5 in (B1) ve (B2) koşullarını sağlayan bir sınıfı olsun. Bu takdirde,

$$\tau = \{A : A \subset X, A \text{ kümesi } \beta \text{ sınıfının elemanlarının bir birleşimidir.}\}$$

sınıfı X üzerinde bir topolojidir ve β sınıfı τ için bir bazdır. Hatta β yi baz kabul eden bu topoloji bir tektir.

Yukarıdaki tanımlanan τ topolojisinin β sınıfını baz kabul eden bir tek topoloji olduğu ise τ dan başka bir τ_1 topolojisi için de β nin bir baz olduğu varsayılp, celişkiye düşülerek ispatlanır.

Tanım 2.1.7. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S} \subset \tau$ olsun. Eğer

$$B = \{B : B, \mathcal{S} \text{ in sonlu adetteki elemanlarının kesişimine eşittir}\}$$

sınıfı τ için bir baz oluyorsa $\mathcal{S}$ sınıfına τ topolojisi için bir alt bazdır denir.

Teorem 2.1.8. X herhangi bir küme ve $\mathcal{S}$ de X in alt kümelerinin herhangi bir sınıfı olsun. Bu takdirde,

$$\beta = \{B : B, \mathcal{S} \text{ in sonlu adetteki elemanlarının kesişimine eşit veya } B = X\}$$

sınıfı X üzerinde

$$\tau = \{A : A \text{ kümesi } \beta \text{ nin elemanlarının bir birleşimine eşittir}\}$$

şeklinde tanımlanan τ topolojisi için bir bazdır ve $\mathcal{S} \subset \tau$ dir. Hatta τ topolojisi $\mathcal{S} \subset \tau$ özelliğine sahip en küçük topolojidir. Yani τ_1 , X üzerinde $\mathcal{S} \subset \tau_1$ olacak şekilde bir topoloji ise $\tau \subset \tau_1$ olmak zorundadır.

Tanım 2.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve x noktasının açık komşuluklarından oluşan X in bir alt kümeler ailesi β_x olsun. Eğer x in her U komşuluğu için $B \subset U$ olacak şekilde bir $u \in U$ $B \in \beta_x$ bulunabiliyorsa β_x sınıfına X noktasında bir yerel (veya lokal) baz denir.

Teorem 2.1.10. X birinci sayılabilir bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde, X in her x noktasında içiçe açıklar yerel bazı yani her $n \in N$ için $A_n \supset A_{n+1}$ özelliğini sağlayan x noktasında bir $\beta_x = \{A_n : n \in N\}$ yerel bazı vardır.

Teorem 2.1.11. X bir Hausdorff uzayı ise X deki her yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat: (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff uzayı olsun. X de yakınsak olan bir (x_n) dizisinin farklı iki limite sahip olduğunu kabul edelim. Diyelim ki $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ ve $x \neq y$ olsun. X bir Hausdorff uzayı olduğundan $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x in bir U komşuluğu ve y in bir V komşuluğu vardır. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olduğundan, yakınsak dizi tanımından, x noktasının U komşuluğu için

$$X_{n_1} = \{x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+i}, \dots\} \subset U$$

Olacak şekilde, U ya bağlı bir n_1 doğal sayısı vardır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ olduğundan, yakınsak dizi tanımından, y noktasının V komşuluğu için

$$X_{n_2} = \{x_{n_2}, x_{n_2+1}, \dots, x_{n_2+i}, \dots\} \subset V$$

Olacak şekilde, V ye bağlı bir n_2 doğal sayısı vardır. $\max\{n_1, n_2\} = n_0$ diyelim. Bu takdirde, $X_{n_0} \subset U$ ve $X_{n_0} \subset V$ bulunur ki buradan $X_{n_0} \subset U \cap V$ elde edilir. Bu ise $U \cap V = \emptyset$ olmasına aykırıdır. Çelişki, o halde $x = y$ dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.1.12. Birinci sayılabilir bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) (X, τ) Hausdorff uzayıdır.
- (b) X deki her yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) olduğu yukarıdaki teoremden görülmektedir.

(b) $\Rightarrow$ (a) ispatı için (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff değil ise farklı değerlere yakınsayan bir (x_n) dizisi elde etmek yeterlidir. (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff değil ise her $U \in N_x$ ve $V \in N_y$ için $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde farklı $x, y \in X$ noktaları vardır. Uzay birinci sayılabilir olduğundan x ve y noktalarında sırasıyla iç içe azalan sayılabilir $\beta_x = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\beta_y = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ yerel bazları vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ olur. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $a_n \in U_n \cap V_n$ seçerek oluşturulan (x_n) dizisi x ve y noktalarına yakınsar.

2.2. Metrik Uzaylar

1905 yılında Fransız matematikçi Maurice Frechet tarafından metrik kavramı ilk defa verilmiştir.

Tanım 2.2.1. (Metrik uzay) X herhangi bir küme olsun. $X \times X$ den $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi içine aşağıdaki (M1), (M2) ve (M3) özelliklerini sağlayan d fonksiyonuna X için bir metrik veya X üzerinde bir metrik denir.

$$(M1) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0; \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(M2) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = d(y, x),$$

$$(M3) \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Bir d metriği ile bir X kümesine bir metrik uzay denir ve (X, d) bir metrik uzay veya kısaca X bir metrik uzay denir (Dağcı, 2019).

Teorem 2.2.10. Eğer bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa kendisi de yakınsaktır.

Tanım 2.2.11. X bir küme, $A \subseteq X$ olsun. X in alt kümelerinin bir $\{U_i : i \in I\}$ ailesi

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \text{ koşulunu sağlıyorsa } A \text{ için bir örtü adını alır.}$$

Bu gösterimlerle, A için bir $\{U_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü, bir $J \subseteq I$ kümesi için yine bir örtü olan $\{U_j : j \in J\}$ alt ailesidir. Eğer J sonlu ise bu sonlu alt örtü adını alır.

$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$, bir X topolojik uzayının bir A alt kümesi için bir örtü ve her bir $i \in I$ için U_i , X de açık ise $\mathcal{U}$ ya A için bir açık örtü denir.

Tanım 2.2.12. Bir X topolojik uzayının bir A alt kümesinin her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa A ya kompakt küme denir.

Tanım 2.2.13. Bir X metrik uzayında her dizi X in bir noktasına yakınsayan bir alt diziye sahipse bu metrik uzaya dizisel kompakt adı verilir.

Bir (X, d) metrik uzayının boş olmayan bir A alt kümesi d_A metrikli altuzay olarak bu tanımını sağlarsa A ya dizisel kompakt denir.

Tanım 2.2.14. Eğer bir X metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak oluyorsa bu uzaya tam uzay denir.

BÖLÜM 3. ASİMETRİK UZAYLAR

Bu bölümde, asimetrik uzay kavramı, asimetrik uzayda ileri topoloji ve geri topoloji kavramları ayrıntılı olarak incelenecektir.

3.1. Asimetrik Uzay Kavramı

Bu kesimde, metrik uzay tanımındaki $d(x, y) = d(y, x)$ simetri olma özelliğini sağlamayan ve metrikte olduğu gibi bazı özellikleri sağlayan bir uzaklık fonksiyonu yardımıyla tanımlanan asimetrik uzay kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 3.1.1. Bir X kümesi üzerinde aşağıdaki koşulları sağlayan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir asimetrik denir.

$$(D1) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) \geq 0,$$

$$(D2) \quad \forall x, y \in X \text{ için } d(x, y) = 0 \text{ olması için gerek ve yeter koşul } x = y \text{ dir.}$$

$$(D3) \quad \forall x, y, z \in X \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Üzerinde bir asimetrik tanımlanan X kümesine asimetrik uzay denir ve (X, d) ile gösterilir. Ya da kısaca X bir asimetrik metrik uzaydır denir.

Bundan sonra (X, d) ya da kısaca X yazdığımızda asimetrik uzay olacaktır.

Bu tanıma göre her metriğin bir asimetrik olduğu açıktır.

Örnek 3.1.2. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ fonksiyonu bir asimetriktir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ bir asimetrik uzaydır. Çünkü d fonksiyonunun (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

(D1) d fonksiyonunun tanımından her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğu kolayca görülebilir.

(D2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ve $y < x$ iken ve $\alpha(x - y) \neq 0$ olacağından $y \geq x$ iken $y - x = 0$ olmak zorundadır.

$$\Leftrightarrow y \geq x \text{ iken } y = x \text{ bulunur.}$$

Dolayısıyla $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

(D3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için

$$z \leq y \leq x \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\alpha(x - z) \leq \alpha(x - y) + \alpha(y - z)$$

$$\alpha x - \alpha z \leq \alpha x - \alpha z$$

$$0 \leq 0$$

$$y \leq z \leq x \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\alpha(x - z) \leq \alpha(x - y) + z - y$$

$$\alpha x - \alpha z \leq \alpha x - (\alpha + 1)y + z$$

$$(\alpha + 1)y \leq (\alpha + 1)z$$

$$y \leq z$$

$$z \leq x \leq y \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\alpha(x - z) \leq y - x + \alpha(y - z)$$

$$\alpha x - \alpha z \leq -x + (\alpha + 1)y - \alpha z$$

$$(\alpha + 1)x \leq (\alpha + 1)y$$

$$x \leq y$$

$$x \leq z \leq y \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$z - x \leq y - x + \alpha(y - z)$$

$$z - x \leq -x + (\alpha + 1)y - \alpha z$$

$$(\alpha + 1)z \leq (\alpha + 1)y$$

$$z \leq y$$

$$y \leq x \leq z \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$z - x \leq \alpha(x - y) + z - y$$

$$z - x \leq \alpha x - (\alpha + 1)y + z$$

$$(\alpha + 1)y \leq (\alpha + 1)x$$

$$y \leq x$$

$$x \leq y \leq z \text{ olmak üzere } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$z - x \leq y - x + z - y$$

$$z - x \leq -x + z$$

$$0 \leq 0$$

olduğundan

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ için } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

bulunur.

O halde d fonksiyonu (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı için bir asimetriktir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ bir asimetrik uzaydır.

Bunlara ek olarak

$1, 2 \in \mathbb{R}$ için

$$d(1, 2) = 2 - 1 = 1$$

$$d(2, 1) = \alpha(2 - 1) = \alpha \text{ olduğundan}$$

d fonksiyonu $\alpha \neq 1$ için metriğin (M2) simetrik olma şartını sağlamamaktadır.

Yani $\alpha \neq 1$ için her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) \neq d(y, x)$ dir.

O halde d fonksiyonu (M2) sağlamadığı için $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi için bir metrik değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzay değildir.

Örnek 3.1.3. (X, d) bir asimetric uzay olsun. $\rho(x, y) = d(y, x)$ ile tanımlı $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir asimetriktir. Yani (X, ρ) bir asimetric uzaydır.

(D1) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dir.

$\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) = d(y, x) \geq 0$ olur.

(D2) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

$\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) = d(y, x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $y = x$ olur.

(D3) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

$\forall x, y, z \in X$ için $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x)$ olacağından,

$$\rho(x, z) \leq \rho(y, z) + \rho(x, y)$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

olur.

O halde ρ fonksiyonu (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı için X kümesi için bir asimetriktir. Dolayısıyla (X, ρ) bir asimetric uzaydır.

Örnek 3.1.4. (X, d) bir asimetric uzay ve $\rho(x, y) = d(y, x)$ olmak üzere

$d_{\max}(x, y) = \max\{d(x, y), \rho(x, y)\}$ ile tanımlanan $d_{\max}$ bir metriktir.

(M1) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır. Yukarıdaki

örnekten $\rho(x, y) = d(y, x)$ de asimetric olduğu için

$\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) = d(y, x) \geq 0$ dır.

O halde $\forall x, y \in X$ için $\max\{d(x, y), \rho(x, y)\} \geq 0$ dır.

Buradan $\forall x, y \in X$ için $d_{\max}(x, y) \geq 0$ olur.

d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

$\rho(x, y) = d(y, x)$ de asimetric olduğu için,

$\forall x, y \in X$ için $\rho(x, y) = d(y, x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $y = x$ dir.

Buradan $\forall x, y \in X$ için $\max\{d(x, y), \rho(x, y)\} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olur.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d_{\max}(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olur.

(M2) $\forall x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned} d_{\max}(x, y) &= \max\{d(x, y), \rho(x, y)\} \\ &= \max\{d(x, y), d(y, x)\} \\ &= \max\{d(y, x), d(x, y)\} \\ &= \max\{d(y, x), \rho(y, x)\} \\ &= d_{\max}(y, x) \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X$ için $d_{\max}(x, y) = d_{\max}(y, x)$ olur.

(M3) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

$\rho(x, y) = d(y, x)$ de asimetric olduğu için,

$\forall x, y, z \in X$ için $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ dir.

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ için, $\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$ eşitsizliğini göz önüne alırsak,

$\forall x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned} d_{\max}(x, z) &= \max\{d(x, z), \rho(x, z)\} \\ &\leq \max\{d(x, y) + d(y, z), \rho(x, y) + \rho(y, z)\} \\ &\leq \max\{d(x, y), \rho(x, y)\} + \max\{d(y, z), \rho(y, z)\} \\ &\leq d_{\max}(x, y) + d_{\max}(y, z) \end{aligned}$$

O halde $\forall x, y, z \in X$ için $d_{\max}(x, z) \leq d_{\max}(x, y) + d_{\max}(y, z)$ olur.

Örnek 3.1.5. (X, d) bir asimetric uzay olmak üzere $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ ile tanımlanan d^* X üzerinde bir asimetriktir.

(D1) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır.

$\forall x, y \in X$ için $1 + d(x, y) \geq 0$ dır.

$\forall x, y \in X$ için $\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \geq 0$ olacağından,

$\forall x, y \in X$ için $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \geq 0$ olur.

(D2) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ olduğundan, $1 + d(x, y) \neq 0$ dır.

$\forall x, y \in X$ için $\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d(x, y) = 0$ dır.

d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır.

(D3) d bir asimetrik olduğundan $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

Buradan $\frac{1}{d(x, y) + d(y, z)} \leq \frac{1}{d(x, z)}$ yazılabilir.

$\forall x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned}
 d^*(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{d(x, z)}} \\
 &\leq \frac{1}{1 + \frac{1}{d(x, y) + d(y, z)}} \\
 &= \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\
 &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \\
 &= d^*(x, y) + d^*(y, z)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için $d^*(x, z) \leq d^*(x, y) + d^*(y, z)$ olur.

O halde d^* fonksiyonu (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı için X kümesi için bir asimetriktir. Dolayısıyla (X, d^*) bir asimetrik uzaydır.

Örnek 3.1.6. (X, d) bir asimetrik uzay olmak üzere $d^{**}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ ile tanımlanan d^{**} X üzerinde bir asimetriktir.

(D1) d bir asimetrik olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır.

Bu durumda $\forall x, y \in X$ için $\min\{1, d(x, y)\} \geq 0$ dır.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d^{**}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \geq 0$ olur.

(D2) $\forall x, y \in X$ için $d^{**}(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\min\{1, d(x, y)\} = 0$ dır.

$\min\{1, d(x, y)\} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d(x, y) = 0$ dır.

d bir asimetric olduğundan, $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d^{**}(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olur.

(D3) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

$\forall x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} d^{**}(x, z) &= \min\{1, d(x, z)\} \\ &\leq \min\{1, d(x, y) + d(y, z)\} \\ &\leq \min\{1, d(x, y)\} + \min\{1, d(y, z)\} \\ &\leq d^{**}(x, y) + d^{**}(y, z) \end{aligned}$$

Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için $d^{**}(x, z) \leq d^{**}(x, y) + d^{**}(y, z)$ olur.

O halde d^{**} fonksiyonu (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı için X kümesi için bir asimetricdir. Dolayısıyla (X, d^{**}) bir asimetric uzaydır.

Örnek 3.1.7. (X, d) bir asimetric uzay olmak üzere k sabit pozitif sayısı için $d^{***}(x, y) = k \cdot d(x, y)$ ile tanımlanan d^{***} X üzerinde bir asimetricdir.

(D1) d bir asimetric olduğundan $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ dır.

Bu durumda k pozitif bir sayı olduğu için $\forall x, y \in X$ için $k \cdot d(x, y) \geq 0$ dır.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d^{***}(x, y) \geq 0$ olur.

(D2) $\forall x, y \in X$ için $d^{***}(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $k \cdot d(x, y) = 0$ dır.

$k \neq 0$ olduğundan $k \cdot d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $d(x, y) = 0$ dır.

d bir asimetrik olduğundan, $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ dir.

O halde $\forall x, y \in X$ için $d^{***}(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olur.

(D3) d bir asimetrik olduğundan $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

$\forall x, y, z \in X$ için

$$\begin{aligned} d^{***}(x, z) &= k \cdot d(x, z) \\ &\leq k(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq k \cdot d(x, y) + k \cdot d(y, z) \\ &\leq d^{***}(x, y) + d^{***}(y, z) \end{aligned}$$

Bu durumda $\forall x, y, z \in X$ için $d^{***}(x, z) \leq d^{***}(x, y) + d^{***}(y, z)$ olur.

O halde d^{***} fonksiyonu (D1), (D2), (D3) şartlarını sağladığı için X kümesi için bir asimetriktir. Dolayısıyla (X, d^{***}) bir asimetrik uzaydır.

3.2. Asimetrik Uzaylarda Topolojiler

Asimetrik tanımında simetri özelliği sağlanmadığından dolayı ileri ve geri yuvar kavramları karşımıza çıktığından bu yuvarlar tarafından iki türlü topoloji üretilir. Bunlar ileri topoloji ve geri topoloji adını alır.

Tanım 3.2.1. (İleri ve Geri Topolojiler) Bir d asimetriği tarafından elde edilen τ_+ ileri topolojisi,

$$\text{her } x \in X, \varepsilon > 0 \text{ için } B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

ileri açık yuvarları tarafından üretilen topolojidir.

Benzer şekilde bir d asimetriği tarafından elde edilen τ_- geri topolojisi,

her $x \in X, \varepsilon > 0$ için $B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$

geri açık yuvarları tarafından üretilen topolojidir (Collins ve Zimmer, 2007; Mennucci, 2004).

Teorem 3.2.2. (X, d) asimetric uzay ise (X, τ_+) birinci sayılabilir topolojik uzaydır (Dağcı, Mısırlıoğlu, Çakallı ve Çay, 2022).

İspat. $B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) = \{y \in X : d(x, y) < \frac{1}{n}\}$ olmak üzere

$\beta_x^+ = \{B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfı x noktasında bir yerel bazdır. Gerçekten,

x in herhangi bir komşuluğu U olsun. $B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U$ olacak şekilde n pozitif tamsayısı bulmamız gerekir. x in herhangi bir komşuluğu U olsun. İleri topolojinin tanımından, d asimetriği tarafından elde edilen τ_+ ileri topolojisi,

her $x \in X, \varepsilon > 0$ için $B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$

ileri açık yuvarları tarafından üretilen topoloji olduğundan dolayı $B^+(x, \delta) \subset U$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $\lim \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $n \geq n_\delta$ olduğunda $\frac{1}{n} < \delta$ dolayısıyla $d(x, y) < \frac{1}{n}$ olduğunda $d(x, y) < \delta$ olacak şekilde bir n_δ pozitif tamsayısı vardır.

Buradan $n \geq n_\delta$ olduğunda $B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset B^+(x, \delta)$ olacak şekilde bir n_δ pozitif tam sayısı bulunmuş oldu. Bu da $\beta_x^+ = \{B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ sınıfının x noktasında bir yerel baz olduğunu gösterir. Her $x \in X$ için β_x^+ sınıfı sayılabilir olduğundan X asimetric uzayının ileri topolojisi birinci sayılabilir bir topolojik uzay olur.

Teorem 3.2.3. (X, d) asimetric uzay ise (X, τ_-) birinci sayılabilir topolojik uzaydır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 3.2.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 3.2.4.

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetriğinde,

τ_+ , $\mathbb{R}$ üzerindeki alt limit topolojisidir. τ_- ise $\mathbb{R}$ üzerindeki üst limit topolojisidir.

Çünkü her $0 < \varepsilon \leq 1$ için ve her $x \in X$ için

$$B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

$$B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : y < x \text{ ve } d(x, y) < \varepsilon\} \cup \{y \in X : y \geq x \text{ ve } d(x, y) < \varepsilon\}$$

$$B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : y < x \text{ ve } 1 < \varepsilon\} \cup \{y \in X : y \geq x \text{ ve } y - x < \varepsilon\}$$

$$B^+(x, \varepsilon) = \emptyset \cup \{y \in X : y \geq x \text{ ve } y - x < \varepsilon\}$$

$$B^+(x, \varepsilon) = \{y \in X : y \geq x \text{ ve } y < x + \varepsilon\}$$

$$B^+(x, \varepsilon) = [x, x + \varepsilon)$$

bulunur.

Benzer şekilde her $0 < \varepsilon \leq 1$ için ve her $x \in X$ için

$$B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

$$B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : x < y \text{ ve } d(y, x) < \varepsilon\} \cup \{y \in X : x \geq y \text{ ve } d(y, x) < \varepsilon\}$$

$$B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : x < y \text{ ve } 1 < \varepsilon\} \cup \{y \in X : x \geq y \text{ ve } x - y < \varepsilon\}$$

$$B^-(x, \varepsilon) = \emptyset \cup \{y \in X : x \geq y \text{ ve } x - y < \varepsilon\}$$

$$B^-(x, \varepsilon) = \{y \in X : x \geq y \text{ ve } x - \varepsilon < y\}$$

$$B^-(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x]$$

bulunur.

Tanım 3.2.5. (X, d) bir asimetric uzay ve $A \subset X$ olsun. Eger her $\varepsilon > 0$ için $B^+(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ oluyorsa yani x noktasını içeren her ileri açık küme A kümesinin x den başka en az bir elemanını içeriyorsa X in bu x noktasına A kümesinin bir ileri yığılma noktası denir. A kümesinin bütün ileri yığılma noktalarının kümesi A'^+ ile gösterilir.

Tanım 3.2.6. (X, d) bir asimetric uzay ve $A \subset X$ olsun. Eger her $\varepsilon > 0$ için $B^-(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ oluyorsa yani x noktasını içeren her geri açık küme A kümesinin x den başka en az bir elemanını içeriyorsa X in bu x noktasına A kümesinin bir geri yığılma noktası denir. A kümesinin bütün geri yığılma noktalarının kümesi A'^- ile gösterilir.

Tanım 3.2.7. (X, d) bir asimetric uzay ve $A \subset X$ olsun. Eger her $\varepsilon > 0$ için $B^+(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa yani x noktasını içeren her ileri açık küme A kümesinin en az bir elemanını içeriyorsa X in bu x noktasına A kümesinin bir ileri değme noktası denir. A kümesinin bütün ileri değme noktalarının kümesine A nın ileri kapanışı denir ve $\bar{A}^+$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.8. (X, d) bir asimetric uzay ve $A \subset X$ olsun. Eger her $\varepsilon > 0$ için $B^-(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa yani x noktasını içeren her geri açık küme A kümesinin en az bir elemanını içeriyorsa X in bu x noktasına A kümesinin bir geri değme noktası denir. A kümesinin bütün geri değme noktalarının kümesine A nın geri kapanışı denir ve $\bar{A}^-$ ile gösterilir.

BÖLÜM 4. ASİMETRİK UZAYLARDA DİZİLER

Bu bölümde, asimetrik uzaylarda ileri ve geri yakınsaklık, asimetrik uzaylarda ileri ve geri sınırlılık, asimetrik uzaylarda ileri ve geri Cauchy dizi kavramları ayrıntılı olarak incelenecektir.

4.1. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Yakınsaklık

Asimetrik uzayda iki türlü topoloji olduğundan dizilerinde iki türlü yakınsaklığı olacaktır. Bunlar ileri yakınsaklık ve geri yakınsaklık adını alacaktır.

Asimetrik uzayda bir dizinin ileri yakınsaklığını aşağıdaki şekilde veriyoruz.

Tanım 4.1.1. (İleri Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e ileri yakınsaktır denir, ya da x noktasına ileri yakınsar denir.

Buradan (x_n) dizisinin x e ileri yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Notasyon olarak $x_n \xrightarrow{f} x_0$ şeklinde gösterilir.

Asimetrik uzayda bir dizinin geri yakınsaklığını aşağıdaki şekilde veriyoruz.

Tanım 4.1.2. (Geri Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisi x e geri yakınsaktır denir, ya da x noktasına geri yakınsar denir.

Buradan (x_n) dizisinin x e geri yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. Notasyon olarak $x_n \xrightarrow{b} x_0$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.1.3. (X, τ_+) topolojik uzayı bir Hausdorff uzayı ise X deki ileri yakınsak her dizinin limiti tektir (Dağcı vd., 2022).

İspat. (X, τ_+) topolojik uzayı Hausdorff uzayı olsun. X de ileri yakınsak olan bir (x_n) dizisinin farklı iki ileri limite sahip olduğunu kabul edelim. $x_n \xrightarrow{f} x$, $x_n \xrightarrow{f} y$ ve $x \neq y$ olsun. X bir Hausdorff uzayı olduğundan $B^+(x, \delta_1) \cap B^+(y, \delta_2) = \emptyset$ olacak şekilde x in bir $B^+(x, \delta_1)$ komşuluğu ve y nin bir $B^+(y, \delta_2)$ komşuluğu vardır. $x_n \xrightarrow{f} x$ olduğundan, ileri yakınsak dizi tanımından, her $n \geq n_1$ için $x_n \in B^+(x, \delta_1)$ olacak şekilde, $B^+(x, \delta_1)$ na bağlı bir n_1 doğal sayısı vardır. $x_n \xrightarrow{f} y$ olduğundan, ileri yakınsak dizi tanımından, her $n \geq n_2$ için $x_n \in B^+(y, \delta_2)$ olacak şekilde, $B^+(y, \delta_2)$ ya bağlı bir n_2 doğal sayısı vardır. $\max\{n_1, n_2\} = n_0$ diyelim. Bu takdirde, her $n \geq n_0$ için $x_n \in B^+(x, \delta_1) \cap B^+(y, \delta_2)$ bulunur ki bu $B^+(x, \delta_1) \cap B^+(y, \delta_2) = \emptyset$ olmasına aykırıdır. O halde $x = y$ dir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 4.1.4. Bir (X, d) asimetrik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) τ_+ Hausdorff uzayıdır.
- (b) X deki her ileri yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat. (a) $\Rightarrow$ (b) olduğu yukarıdaki teoremden görülmektedir.

(b) $\Rightarrow$ (a) ispatı için (X, τ_+) topolojik uzayı Hausdorff değil ise farklı değerlere ileri yakınsayan bir (x_n) dizisi elde etmek yeterlidir. (X, τ_+) topolojik uzayı Hausdorff değil ise her ε için $B^+(x, \varepsilon) \cap B^+(y, \varepsilon) \neq \emptyset$ olacak şekilde farklı $x, y \in X$ noktaları vardır. (X, d) asimetrik olduğundan x ve y noktalarında sırasıyla iç içe azalan sayılabilir $\beta_x^+ = \left\{ B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ ve $\beta_y^+ = \left\{ B^+\left(y, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ yerel bazları vardır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap B^+\left(y, \frac{1}{n}\right) \neq \emptyset$ olur. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $x_n \in B^+\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap B^+\left(y, \frac{1}{n}\right)$ seçerek oluşturulan (x_n) dizisi x ve y noktalarına yakınsar.

Teorem 4.1.5. (X, τ_-) topolojik uzayı bir Hausdorff uzayı ise X deki her bir geri yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.6. Bir (X, d) asimetrik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (a) τ_- Hausdorff uzayıdır.
- (b) X deki her geri yakınsak dizinin limiti tektir.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.1.4 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.7. Bir X asimetrik uzayında ileri yakınsak dizinin her alt dizisi de ileri yakınsaktır.

İspat. Kabul edelim ki (x_n) dizisi x e ileri yakınsak olsun. (x_n) dizisinin herhangi bir alt dizisi (x_{n_k}) olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı alalım. (x_n) dizisi x e ileri yakınsak olduğundan

$n \geq n_0$ olduğunda $d(x, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_0 sayısı vardır.

$n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$ dır. Bu takdirde $n \geq n_0$ olduğunda $d(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ olur. O halde (x_{n_k}) dizisi x e ileri yakınsaktır.

Teorem 4.1.8. Bir X asimetrik uzayında geri yakınsak dizinin her alt dizisi de geri yakınsaktır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.1.7 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.9. (x_n) X de bir dizi olsun. Eğer (x_n) , $x_0 \in X$ e ileri yakınsak ve $y_0 \in X$ e geri yakınsak ise o zaman $x_0 = y_0$ dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{f} x_0$ olsun. Bu durumda her $n \geq N_1$ için $d(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{b} y_0$ olsun. Bu durumda her $n \geq N_2$ için $d(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ diyelim. O zaman her $n \geq N$ için

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) < \varepsilon$$

olur. ε keyfi olduğundan $d(x_0, y_0) = 0$ elde ederiz. Asimetriğin tanımındaki (D1) özelliğinden $x_0 = y_0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.10. Bir (X, d) asimetrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa ileri limit tektir.

İspat. X asimetrik uzayında (x_n) ileri yakınsak bir dizi olsun. (x_n) dizisinin $l \neq l'$ olmak üzere hem l hem de l' sayılarına ileri yakınsadığını varsayalım. Bu durumda $d(l, l') \neq 0$ dır. $\alpha = d(l, l')$ alalım. $\alpha > 0$ dır. $x_n \xrightarrow{f} l$ olduğundan tüm $n \geq N_1$ için $d(l, x_n) < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır. $x_n \xrightarrow{f} l'$ olduğundan ve ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden $x_n \xrightarrow{b} l'$ olur. Bu durumda tüm $n \geq N_2$ için $d(x_n, l') < \frac{\alpha}{2}$ olacak şekilde bir $N_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $N = \max\{N_1, N_2\}$ alalım.

$$\alpha = d(l, l') \leq d(l, x_n) + d(x_n, l') < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

elde edilir ve bu çelişki nedeniyle $l = l'$ bulunur.

Sonuç 4.1.11. Bir (X, d) asimetrik uzayında ileri yakınsak her dizi geri yakınsak oluyorsa (X, τ_+) Hausdorff uzayıdır.

Teorem 4.1.12. Bir (X, d) asimetrik uzayında geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektiriyorsa geri limit tektir.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.1.10 un ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.1.13. Bir (X, d) asimetrik uzayında geri yakınsak her dizi ileri yakınsak oluyorsa (X, τ_-) Hausdorff uzayıdır.

Önerme 4.1.14. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetrik olmak üzere her $x, y \in X$ için

$d(y, x) \leq c(x, y)d(x, y)$ olacak şekilde $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa

$$\forall x \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists y \in B^+(x, \varepsilon) \Rightarrow c(x, y) \leq C(x)$$

özellikliğini sağlayan yalnızca x e bağlı bir C fonksiyonu vardır.

Bu durumda ileri limitlerin varlığı geri limitlerin varlığını gerektirir ve böylece limitler tektir.

Örnek 4.1.15. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetriği $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$C = \max\left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\}$ olmak üzere

Önerme 4.1.14. deki $d(y, x) \leq C \cdot d(x, y)$ kısıtını sağlar.

$y < x$ ise $d(y, x) = x - y \leq C \cdot \alpha(x - y)$ elde edilir. Buradan $\frac{1}{\alpha} < C$ bulunur.

$y \geq x$ ise $d(y, x) = \alpha(y - x) \leq C \cdot (y - x)$ elde edilir. Buradan $\alpha \leq C$ bulunur.

Bu iki duruma göre $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $C = \max\left\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\right\}$ dır.

Örnek 4.1.16. $\alpha > 0$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi hem ileri hem de geri yakınsaktır.

Gerçekten $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x + \frac{1}{n} > x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} - x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x + \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(x + \frac{1}{n} - x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsaktır.

Örnek 4.1.17. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olup geri yakınsak olmayan bir dizidir.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x + \frac{1}{n} > x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} - x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x + \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsak değildir.

Bu asimetrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.1.18. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & y \leq x \\ 1, & y > x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olmayıp geri yakınsak olan bir dizidir.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x + \frac{1}{n} > x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsak değildir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x + \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{n} - x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsaktır.

Bu asimetrik uzayda geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.1.19. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ \alpha(x - y), & y < x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi hem ileri yakınsak hem de geri yakınsaktır.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x - \frac{1}{n} < x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha\left(x - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x - \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsaktır.

Örnek 4.1.20. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olmayıp geri yakınsak bir dizidir.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x - \frac{1}{n} < x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsak değildir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x - \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsaktır.

Bu asimetrik uzayda geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.1.21. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & y \leq x \\ 1, & y > x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x - \frac{1}{n}$$

şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olup geri yakınsak olmayan bir dizidir.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x - \frac{1}{n} < x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \left(x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x - \frac{1}{n}, x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsak değildir.

Bu asimetrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek 4.1.22. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriğinde

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$(x \in \mathbb{R}^+)$ şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olup geri yakınsak değildir.

Gerçekten $\forall x \in X$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$x + \frac{x}{n} > x$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x, x \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x}{n} - x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\left(x \left(1 + \frac{1}{n}\right), x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

bulunur. Bu durumda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsak değildir.

Bu asimetrik uzayda ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez.

4.2. Asimetrik Uzaylarda İleri ve Geri Sınırlılık

Metrik uzaydaki sınırlılık tanımından hareketle asimetrik uzayda sınırlılık kavramını düşündüğümüzde iki türlü sınırlılık tanımı ile karşılaşırız. Bunlar ileri sınırlılık ve geri sınırlılık kavramlarıdır.

Tanım 4.2.1 (İleri Sınırlılık) Bir $S \subset X$ kümesi, eğer $S \subset B^+(x, \varepsilon)$ olacak şekilde

$x \in X, \varepsilon > 0$ varsa ileri sınırlıdır.

Tanım 4.2.2 (Geri Sınırlılık) Bir $S \subset X$ kümesi, eğer $S \subset B^-(x, \varepsilon)$ olacak şekilde

$x \in X, \varepsilon > 0$ varsa geri sınırlıdır.

Tanım 4.2.3. (Dizilerde İleri sınırlılık)

Her n pozitif tamsayısı için

$$d(x, x_n) < M$$

olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif sayısı varsa (x_n) dizisine ileri sınırlıdır denir. Buna göre x_n dizisinin ileri sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B^+(x, M)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif sayısının var olmasıdır.

Tanım 4.2.4. (Dizilerde Geri sınırlılık)

Her bir n pozitif tamsayısı için

$$d(x_n, x) < M$$

olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif sayısı varsa (x_n) dizisine geri sınırlıdır denir. . Buna göre x_n dizisinin geri sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B^-(x, M)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif sayısının var olmasıdır.

Örnek 4.2.5. $(\mathbb{R}, d)$ uzayında

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

$(1 + \frac{1}{n})$ dizisini göz önüne alalım. Her n pozitif tamsayısı için

$$d(1, x_n) = \frac{1}{n} < 2$$

olacak şekilde bir 2 pozitif sayısı bulunduğundan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ dizisi ileri sınırlıdır.

Örnek 4.2.6. $(\mathbb{R}, d)$ uzayında

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ dizisini göz önüne alalım. Her n pozitif tamsayısı için

$$d(x_n, x) = d(x_n, 1) = \frac{1}{n} < 1$$

olacak şekilde bir 1 pozitif sayısı bulunduğundan $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ dizisi geri sınırlıdır.

Teorem 4.2.7. X asimetrik uzayında ileri yakınsak olan her dizi ileri sınırlıdır.

İspat. Kabul edelim ki (x_n) dizisi ileri yakınsak olsun.

$\varepsilon = 1$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x, x_n) < 1$ olacak şekilde bir n_0 pozitif tam sayısı vardır.

$\max\{d(x, x_1), d(x, x_2), \dots, d(x, x_{n_0-1}), 1\} = M$ diyelim. Bu takdirde

Her bir n pozitif tamsayısı için

$$d(x, x_n) < M$$

olacak şekilde bir $x \in X$ ve bir M pozitif sayısı bulunur. Bu da (x_n) dizisine ileri sınırlı olması demektir.

Teorem 4.2.8. X asimetrik uzayında geri yakınsak olan her dizi geri sınırlıdır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.2.7 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.9. Bir asimetrik uzayda ileri sınırlı kümelerin sonlu birleşimi ileri sınırlıdır.

İspat: (X, d) bir asimetrik uzay ve $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq X$ kümeleri ileri sınırlı olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $A_i \subseteq B^+(x_i, \varepsilon_i)$ olacak şekilde bir $x_i \in X$ ve bir $\varepsilon_i > 0$ vardır.

$x_0 \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere $M_1 = \max\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, $M_2 = \max\{d(x_0, x_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ olsun. $M = M_1 + M_2$ alalım. $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq B^+(x_0, M)$ olduğunu gösterelim. $x \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ alalım. Bu durumda $\exists i_0$ için $x \in A_{i_0}$ olur. $A_{i_0} \subseteq B^+(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0})$ olduğundan $x \in B^+(x_{i_0}, \varepsilon_{i_0})$ olur. Böylece $d(x_{i_0}, x) < \varepsilon_{i_0}$ dır. $d(x_0, x) \leq d(x_0, x_{i_0}) + d(x_{i_0}, x) < M_1 + \varepsilon_{i_0} \leq M_1 + M_2 = M$ olduğundan $x \in B^+(x_0, M)$ elde edilir. Buradan $\bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq B^+(x_0, M)$ dir. Yani $\bigcup_{i=1}^n A_i$ kümesi ileri sınırlı bulunur.

Teorem 4.2.10. Bir asimetric uzayda geri sınırlı kümelerin sonlu birleşimi geri sınırlıdır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.2.9 un ispatına benzer şekilde yapılabilir.

4.3. Asimetric Uzaylarda İleri ve Geri Cauchy Dizileri

Asimetric tanımında simetri özelliği bulunmadığından asimetric uzayda iki türlü Cauchy kavramı olacaktır. Bunlar ileri Cauchy ve geri Cauchy kavramlarıdır.

Tanım 4.3.1. (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. X deki bir (x_n) dizisi için eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m \geq n \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa

(x_n) dizisine ileri Cauchy dizisi denir.

Bir asimetric uzayda (x_n) dizisinin ileri yakınsak olması ileri Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Örnek 4.3.2. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriği tarafından elde edilen asimetric uzayda sabit herhangi bir $x \in X$ için

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi ileri yakınsak olmasına rağmen ileri Cauchy dizisi değildir. Gerçekten, $m \geq n \geq N$ için

$$m \geq n$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$$

$$x + \frac{1}{n} \geq x + \frac{1}{m}$$

olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m \geq n \geq N$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) = d\left(x + \frac{1}{n}, x + \frac{1}{m}\right) = 1$$

bulunduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e ileri yakınsak olmasına rağmen ileri Cauchy dizisi değildir.

Tanım 4.3.3. (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. X deki bir (x_n) dizisi için

eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $m \geq n \geq N$ için $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa

(x_n) dizisine geri Cauchy dizisi denir.

Bir asimetric uzayda (x_n) dizisinin geri yakınsak olması geri Cauchy dizisi olmasını gerektirmez.

Teorem 4.3.4. (X, d) asimetric uzayında ileri Cauchy dizisinin her alt dizisi ileri Cauchy dizisidir.

İspat. (x_n) dizisi X içinde bir ileri Cauchy dizisi ve (x_{n_k}) da (x_n) dizisinin herhangi bir alt dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $m \geq n \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. (x_{n_k}) dizisi (x_n) in bir alt dizisi olduğundan $m \geq k \geq N$ olduğunda

$n_m \geq n_k \geq N$ gerçeklenir. Bu $N \in \mathbb{N}$ için $m \geq k \geq N$ olduğunda $d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon$ gerçeklenir. Bu ise (x_{n_k}) dizisinin ileri Cauchy olduğunu gösterir.

Teorem 4.3.5. (X, d) asimetric uzayında geri Cauchy dizisinin her alt dizisi geri Cauchy dizisidir.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.3.4 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Örnek 4.3.6. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriği tarafından elde edilen asimetric uzayda sabit herhangi bir $x \in X$ için

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$$

eklinde tanımlanan dizi ileri Cauchy dizisidir. Gerçekten, $m \geq n \geq N$ için

$$m \geq n$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$$

$$x - \frac{1}{m} \geq x - \frac{1}{n}$$

olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m \geq n \geq N$ olduğunda $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $m \geq n \geq N$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) = d\left(x - \frac{1}{n}, x - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \varepsilon$$

gerçeklendiğinden $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi ileri Cauchy dizisidir.

Örnek 4.3.7. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriği tarafından elde edilen asimetric uzayda sabit herhangi bir $x \in X$ için

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi geri Cauchy dizisidir. Gerçekten, $m \geq n \geq N$ için

$$m \geq n$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$$

$$x + \frac{1}{n} \geq x + \frac{1}{m}$$

olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m \geq n \geq N$ olduğunda $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $m \geq n \geq N$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) = d\left(x + \frac{1}{m}, x + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \varepsilon$$

gerçeklendiğinden $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x + \frac{1}{n}\right)$ dizisi geri Cauchy dizisidir.

Örnek 4.3.8. $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x \\ 1, & y < x \end{cases}$$

asimetriği tarafından elde edilen asimetric uzayda sabit herhangi bir $x \in X$ için

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde tanımlanan dizi geri yakınsak olmasına rağmen geri Cauchy dizisi değildir. Gerçekten, $m \geq n \geq N$ için

$$m > n$$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$$

$$x - \frac{1}{m} \geq x - \frac{1}{n}$$

olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$ için $\forall m \geq n \geq N$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) = d\left(x - \frac{1}{m}, x - \frac{1}{n}\right) = 1$$

bulunduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(x - \frac{1}{n}\right)$ dizisi x e geri yakınsak olmasına rağmen geri Cauchy dizisi değildir.

Tanım 4.3.9. (X, d) bir asimetrik uzay olmak üzere terimleri S de olan her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak ise, $S \subset X$ e ileri tamdır denir.

Terimleri S de olan her geri Cauchy dizisi geri yakınsak ise, $S \subset X$ e geri tamdır denir.

Teorem 4.3.10. Bir (X, d) asimetrik uzayında, eğer bir ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahipse kendisi de ileri yakınsaktır.

İspat. (x_n) dizisi, (X, d) asimetrik uzayında bir ileri Cauchy dizisi olsun. (x_{n_k}) altdizisi $x \in X$ e ileri yakınsak olsun. $\varepsilon > 0$ olsun.

(x_n) dizisi ileri Cauchy dizisi olduğu için her $\varepsilon > 0$ ve her $m \geq n \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. $n_k \geq N$ ve $d(x, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ seçeriz.

$n \geq n_k \geq N$ için $d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \varepsilon$ olur.

O halde $x_n \xrightarrow{f} x$ olur.

Teorem 4.3.11. Bir (X, d) asimetric uzayında , eğer bir geri Cauchy dizisi geri yakınsak bir alt diziye sahipse kendisi de geri yakınsaktır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.3.10 un ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.3.12. Bir (X, d) asimetric uzayında , eğer her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahipse ileri tamdır.

Sonuç 4.3.13. Bir (X, d) asimetric uzayında , eğer her geri Cauchy dizisi geri yakınsak bir alt diziye sahipse geri tamdır.

BÖLÜM 5. ASİMETRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde, asimetric uzaylarda ileri ve geri kompaktlık, asimetric uzaylarda ileri ve geri dizisel kompaktlık kavramları ayrıntılı olarak incelenecektir.

5.1. Asimetric Uzaylarda İleri ve Geri Kompaktlık

Asimetric tanımında simetri özelliği sağlanmadığından asimetric uzaylarda iki türlü kompaktlık tanımı oluşacaktır. Bunlar ileri kompakt ve geri kompakt kavramlarıdır.

Tanım 5.1.1. (X, d) bir asimetric uzay olmak üzere bir $S \subset X$ kümesi, S nin ileri toplojideki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, ileri kompakttır.

(X, d) bir asimetric uzay olmak üzere bir $S \subset X$ kümesi, S nin geri toplojideki her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, geri kompakttır.

Tanım 5.1.2. (X, d) bir asimetric uzay ve $S \subset X$ kümesi olmak üzere terimleri S de olan her dizinin limiti S de olan ileri yakınsak bir alt dizisi varsa, S ye ileri dizisel kompakttır denir.

(X, d) bir asimetric uzay ve $S \subset X$ kümesi olmak üzere terimleri S de olan her dizinin limiti S de olan geri yakınsak bir alt dizisi varsa, S ye geri dizisel kompakttır denir.

Teorem 5.1.3. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetric olsun. Eğer (X, d) ileri dizisel kompakt ve $x_n \xrightarrow{b} x$ ise $x_n \xrightarrow{f} x$ dir.

İspat. Herhangi bir $x \in X$ için $x_n \xrightarrow{b} x$ şeklinde bir (x_n) dizisi düşünelim. X ileri dizisel kompakt olduğundan dolayı, (x_n) dizisi bir ileri yakınsak (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir. $j \rightarrow \infty$ için $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{f} y \in X$ olur. Geri yakınsak dizinin her alt dizisi de geri yakınsak olduğundan dolayı $j \rightarrow \infty$ için $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{b} x \in X$ bulunur.

Teorem 4.1.9. dan dolayı $x = y$ olur. Dolayısıyla $j \rightarrow \infty$ için $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{f} x$ elde edilir.

Kabul edelim ki $x_n \xrightarrow{f} x$ olmasın. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $d(x, x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde (x_{n_k}) alt dizisi ve $\varepsilon_0 > 0$ vardır. Fakat bu alt dizinin x e ileri yakınsayan bir $(x_{n_{k_j}})$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla $j \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $j \geq J$ için bir $d(x, x_{n_{k_j}}) < \varepsilon$ olur. Bu açıkça bir çelişkidir. Yani $x_n \xrightarrow{f} x$.

Sonuç olarak, X ileri dizisel kompakt olduğunda, dizinin limiti tek olur ve geri limit ileri limiti gerektirir.

Teorem 5.1.4. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetrik olsun. Eğer (X, d) geri dizisel kompakt ve $x_n \xrightarrow{f} x$ ise $x_n \xrightarrow{b} x$.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 5.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.1.5. Bir asimetrik uzayın ileri dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul sonsuz her alt kümesinin en az bir ileri yığılma noktasının var olmasıdır.

İspat. (X, d) bir asimetrik uzay olsun. Kabul edelim ki X ileri dizisel kompakt olsun ve X in sonsuz bir A alt kümesi verilsin. Terimleri A da olan farklı noktalardan oluşan bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. X ileri dizisel kompakt olduğundan, (x_n) dizisinin ileri yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu ileri yakınsadığı noktaya x diyelim.

Burada x in A nın ileri yığılma noktası olduğunu göstereceğiz.

Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_{n_k} \xrightarrow{f} x$ olduğundan $\forall k \geq N$ için $x_{n_k} \in B^+(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır.

Burada (x_n) dizisinin terimleri birbirinden farklı olduğundan $\exists k \geq N$ için $x_{n_k} \neq x$ dir. Dolayısıyla $k \geq N$ için $B^+(x, \varepsilon) \cap A$ nın x den farklı en az bir x_{n_k} elemanını içerir. Bu da x in, A nın bir ileri yığılma noktası olduğunu gösterir.

Böylece X in her sonsuz alt kümesi, X de bir ileri yığılma noktasına sahiptir.

Kabul edelim ki X in her sonsuz alt kümesi, X de bir ileri yığılma noktasına sahip olsun. (x_n) X de herhangi bir dizi olsun.

A , (x_n) dizisinin değerler kümesini göstermek üzere, A ya sonlu kümedir ya da sonsuz kümedir.

A sonlu küme ise (x_n) dizisinin bir tane elemanı sonsuz kere tekrar edeceğinden terimleri bu elemandan oluşan sabit alt dizi ileri yakınsak olur.

A sonsuz küme olsun. Kabulden A nın en az bir ileri yığılma noktası vardır. Bu ileri yığılma noktası x olsun. Şimdi $B^+(x, 1)$ ileri açık yuvarını alalım. Bu ileri açık yuvar A nın sonsuz çoklukta elemanını içerir. Bu elemanlar içinden x den farklı bir x_{n_1} elemanını seçelim. $B^+(x, \frac{1}{2})$ ileri açık yuvarı A nın sonsuz çoklukta elemanını içerir. Bu elemanlar içinden $n_2 > n_1$ olmak üzere bir x_{n_2} seçelim.

Benzer şekilde $B^+(x, \frac{1}{3})$ ileri açık yuvarı A nın sonsuz çoklukta elemanını içerir. Bu elemanlar içinden $n_3 > n_2$ bir x_{n_3} seçelim.

Bu şekilde devam ederek (x_n) dizisinin

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } (x_{n_k}) \in B^+(x, \frac{1}{k})$$

$$d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

$$x_{n_k} \xrightarrow{f} x$$

gerçekleyen bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunmuş olur. Bu durumda X deki her dizinin ileri yakınsak alt dizisi bulunduğundan X ileri dizisel kompakttır.

Teorem 5.1.6. Bir asimetric uzayın geri dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul sonsuz her alt kümesinin en az bir geri yığılma noktasının var olmasıdır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 5.1.5 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.1.7. Bir asimetrik uzay ileri kompakt ise sonsuz her alt kümesi en az bir ileri yığılma noktasına sahiptir.

İspat. (X, d) ileri kompakt asimetrik uzay olsun. X in sonsuz her alt kümesi en az bir ileri yığılma noktasına sahip olmasın. X in bir ileri yığılma noktasına sahip olmayan en az bir sonsuz A altkümesi vardır.

Herhangi bir $x \in X$ alalım. x , A nın bir ileri yığılma noktası değildir. Dolayısıyla A nın x den başka hiçbir elemanını içermeyen bir $B^+(x, \varepsilon_x)$ ileri açık yuvarı vardır. Böylece

$$B^+(x, \varepsilon_x) \cap A = \begin{cases} \emptyset & , \quad x \notin A \\ \{x\} & , \quad x \in A \end{cases} \quad (1)$$

olacaktır.

$$\mathfrak{G} = \{B^+(x, \varepsilon_x) : x \in X\}$$

sınıfı, X in bir açık örtüsüdür. X ileri kompakt olduğundan, $\mathfrak{G}$ nin sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu sonlu örtü

$$\{B^+(x_i, \varepsilon_{x_i}) : x_i \in X \quad 1 \leq i \leq N\}$$

olsun. Bu durumda

$$X = \bigcup_{i=1}^N B^+(x_i, \varepsilon_{x_i})$$

şeklinde yazılabilir.

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B^+(x_i, \varepsilon_{x_i}) \right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^N (A \cap B^+(x_i, \varepsilon_{x_i})) \subset \bigcup_{i=1}^N \{x_i\} \quad (1 \text{ den})$$

$$= \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$$

bulunur. Yani A , X in sonlu bir alt kümesi olur. Bu çelişkiden dolayı X in sonsuz her alt kümesi en az bir ileri yığılma noktasına sahiptir.

Teorem 5.1.8. Bir asimetric uzay geri kompakt ise sonsuz her alt kümesi en az bir geri yığılma noktasına sahiptir.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 5.1.7 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 5.1.9. X ileri kompakt ise ileri dizisel kompaktır.

İspat. Eğer X ileri dizisel kompakt değilse, X de ileri yakınsak alt dizisi olmayan bir (x_n) dizisi vardır. (x_n) dizisinin hiçbir alt dizisi ileri yakınsak olmadığından, sonsuz farklı noktalardan oluşur.

$x \in X$ olsun. X bir asimetric uzay olduğundan x noktasında içiçe azalan bir yerel bazı vardır. Her bir baz elemanı, (x_n) dizisinin x den farklı bir elemanını içeriyor olsaydı, bu eleman seçilerek oluşturulan alt dizi x e yakınsardı. O halde $B_{\varepsilon_x}^+(x)$ (x_n) dizisinin x den farklı hiçbir elemanını içermeyecek şekilde bir $\varepsilon_x > 0$ vardır.

Bu şekilde elde edilen $\{B_{\varepsilon_x}^+(x) : x \in X\}$ X in bir açık örtüsüdür.

Ancak bu ileri açık yuvarların sonlu sayıda birleşimi (x_n) dizisinin sonlu sayıda terimini içereceğinden X in bir sonlu açık örtüsü olamaz. O halde X ileri kompakt değildir. Bu ise bir çelişkidir. Yani X ileri dizisel kompaktır.

Teorem 5.1.10. X geri kompakt ise geri dizisel kompaktır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 5.1.9 un ispatına benzer şekilde yapılabilir.

BÖLÜM 6. SONUÇ

Bu çalışmada asimetric uzaylarda ileri ve geri yakınsaklık, ileri ve geri kompaktlık, ileri ve geri dizisel kompaktlık kavramları ele alınmış ve şu ana kadar yapılmış olan araştırmalar incelenmekle birlikte daha önceki araştırmalarda yer almayan bazı teorem ve sonuçlar da sunulmuştur. Metrik uzaylardan farklı olarak, bir asimetric uzayda bir ileri (geri) yakınsak dizinin ileri(geri) limitinin tek olmak zorunda olmadığı gösterilmiş ve ileri(geri) limitin tekliği için gerek şartın dizinin ileri(geri) yakınsadığı noktaya geri (ileri) yakınsaması olduğu ifade edilmiştir. Yine metrik uzaylardan farklı olarak, ileri(geri) yakınsak bir dizinin ileri(geri) Cauhcy dizisi olmadığı asimetric uzay örnekleri sunulmuştur. Ayrıca bir asimetric uzay ileri(geri) dizisel kompakt ise ileri(geri) limitin tek olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

- Albert, G.E. 1941. A note on quasi metric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 479- 482.
- Cobzaş, Ş. 2012. Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Frontiers in Mathematics, Springer, Basel.
- Collins, J., Zimmer, J. 2007. An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem. Topology and its Applications 154, 2312-2322.
- Çakallı, H. 1997. Genel Topolojiye Giriş. İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul Türkiye.
- Çakallı, H., Mucuk, O. 2016. Lacunary Statistically Upward and Downward Half Quasi-Cauchy Sequences. Journal of Mathematical Analysis, Volume 7 Issue 2(2016), Pages 12-23.
- Çakallı, H. 2018. Beyond Cauchy and Quasi-Cauchy Sequences. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, Filomat 32:3 (2018), 1035–1042.
- Çakallı, H. 2018. On λ Statistical Upward Compactness and Continuity. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, Filomat 32:12 (2018), 4435–4443.
- Çakallı, H. 2015. Upward and Downward Statistical Continuities. Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, Filomat 29:10 (2015), 2265–2273.
- Dağcı, F. İ., Mısırlıoğlu, T., Çakallı, H., Çay M. 2022. On Asymmetric Spaces. International Conference of Mathematical Sciences, ICMS 2022, Maltepe University İstanbul Turkey.
- Dağcı, F. İ., Çakallı, H. 2022. On Some Results in Asymmetric Spaces. International Conference of Mathematical Sciences, ICMS 2022, Maltepe University İstanbul Turkey.

- Dağcı, F. İ., Mısırlıoğlu, T., Çakallı, H., Kocinac, Lj.D.R. 2022. On Some Results in Asymmetric Spaces. American Institute of Physics of Conference Proceedings of International Mathematical Sciences, ICMS 2022.
- Dağcı, F. İ. 2019. Quasi Cauchy Dizileri. Yüksek Lisans Tezi, Maltepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- Künzi, H.P.A. 1983. A note on sequentially compact quasipseudometric spaces. *Monatsh. Math.* 95 (3) (1983) 219–220.
- Mennucci, A. 2004. On asymmetric distances. Technical report, Scuola Normale Superiore, Pisa.
- Reilly, I.L., Subrahmanyam, P.V., Vamanamurthy, M.K. 1982. Cauchy sequences in quasipseudometric spaces, *Monatsh. Math.* 93 (2), 127– 140.
- Ribeiro, H. 1943. Sur les espaces a metrique faible (French). *Portug. Math.* 4, 21- 40, [correction, the same issue, pp. 65-68].
- Stoltenberg, R.A. 1969. On quasi metric spaces. *Duke Math. J.* 36, 65-71.
- Wilson, W.A. 1931. On quasi-metric spaces. *Amer. J. Math.* 53(3), 675-684.

ÖZGEÇMİŞ

Merve ÇAY

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Derece	Yıl	Üniversite, Enstitü, Anabilim Dalı
Lisans	2018	Maltepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı
Lisans	2011	Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Lise	2006	Amasya Anadolu Lisesi

İş/İstihdam

Yıl	Görev
2019 -	Matematik Öğretmeni, Köşeler Ortaokulu, MEB

Alınan Burs ve Ödüller

Yıl	Burs/Ödül
2021	Tübitak Bursu

Yayınlar ve Diğer Bilimsel/Sanatsal Faaliyetler

Dağcı, F. İ., Mısırlıoğlu, T., Çakallı, H., Çay M. 2022. On Asymmetric Spaces. International Conference of Mathematical Sciences, ICMS 2022, Maltepe University, İstanbul Turkey.

