



**α -KENMOTSU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE
BAZI TENSÖR ŞARTLARININ İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Deniz KARA

Danışman

Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**α -KENMOTSU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE
BAZI TENSÖR ŞARTLARININ İNCELENMESİ**

Deniz KARA

Danışman

Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2022

TEZ ONAY SAYFASI

Deniz KARA tarafından hazırlanan “ α -Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Bazı Tensör Şartlarının İncelenmesi” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 29 / 07 / 2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Anabilim Dalı Adı Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Başkan : Doç. Dr. Emrah KARAMAN
Karabük Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Üye : Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon MYO

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
..... /..... /..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29 / 07 / 2022

Deniz KARA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

α -KENMOTSU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI TENSÖR ŞARTLARININ İNCELENMESİ

Deniz KARA

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. Değme yapılar, hemen hemen değme metrik yapılar ve Kenmotsu manifoldlar ile ilgili gerekli bilgiler sunulmuştur. Tezin ikinci bölümünde, temel kavramlar ve literatür bilgileri verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, η -paralel Ricci tensörlü, η -Einstein ve Einstein α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir. Tezin son bölümünde, yarı-simetrik, lokal simetrik, Ricci-yarı simetrik, Ricci rekürent, konformal yarı-simetrik, projektif yarı-simetrik, konsirküler yarı-simetrik, konformal flat, projektif flat, konsirküler flat, D -konformal eğrilik tensörü, genelleştirilmiş rekürent, genelleştirilmiş Ricci rekürent, genelleştirilmiş konsirküler rekürent, lokal ve global ϕ -simetrik şartlarını sağlayan α -Kenmotsu manifoldlar incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2022, v + 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: α -Kenmotsu manifold, Riemann eğrilik tensörü, Yarı-simetrik şartlar, Ricci rekürent manifold, Genelleştirilmiş rekürent manifold, Global ve lokal ϕ -simetrik manifold.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INVESTIGATION OF SOME TENSOR CONDITIONS ON α -KENMOTSU MANIFOLDS

Deniz KARA

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of four chapters. The first chapter of the thesis is devoted to the introduction part. Necessary information about contact structures, almost contact metric structures, and Kenmotsu manifolds are presented. The second chapter of the thesis gives basic concepts and literature information. In the third chapter of the thesis, some results are obtained on η -parallel Ricci tensor, η -Einstein, and Einstein α -Kenmotsu manifolds. In the last chapter of the thesis, α -Kenmotsu manifolds satisfying semi-symmetric, locally symmetric, Ricci semi-symmetric, Ricci recurrent, conformal semi-symmetric, projective semi-symmetric, concircular semi-symmetric, conformal flat, projective flat, concircular flat, D -conformal curvature tensor, generalized recurrent, generalized Ricci recurrent, generalized concircular recurrent, local and global ϕ -symmetric conditions are examined and some results are obtained.

2022, v + 52 pages

Keywords: α -Kenmotsu manifold, Riemann curvature tensor, Semi-symmetric conditions, Ricci recurrent manifold, Generalized Ricci recurrent manifold, Global and local ϕ -symmetric manifold.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, sonuçların değerlendirilmesi, ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Deniz KARA
Afyonkarahisar 2022

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR ve LİTERATÜR BİLGİLERİ	4
2.1 Riemann Manifoldları ve Özellikleri.....	4
2.2 Hemen Hemen Değme Metrik Yapılar	9
2.3 Hemen Hemen α -Kenmotsu Manifoldlar	12
3. α -KENMOTSU MANİFOLDLAR.....	18
4. BAZI ŞARTLARI SAĞLAYAN α -KENMOTSU MANİFOLDLAR	25
5. KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ.....	52

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^∞ vektör alanları uzayı
K	Kesit eğriliği
div	Diverjans operatörü
$TM^\perp$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
C	Weyl konformal tensör alanı
$\bar{C}$	Konsirküler eğrilik tensör alanı
P	Projektif eğrilik tensör alanı
k	Sabit uzay eğriliği
r	Skalar eğrilik
$M(k)$	Uzay form
L	Lie türevi
J	Hemen hemen kompleks yapı
N_ϕ	ϕ -tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensör alanı
B	D-konformal eğrilik tensör alanı

1 GİRİŞ

Değme geometrisinin dayandığı kökler; Huygens, Barrow, Newton, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optikler ile ilgili üç asır önce yapılan çalışmalarına dayanmaktadır. Değme geometrisi, "tam integrallenebilir olmayan" adı verilen bir koşulu sağlayan tanjant demetindeki bir hiperdüzlem dağılımı tarafından verilen türevlenebilir manifoldlar üzerindeki geometrik bir yapının incelenmesinden ibarettir. Başka bir deyişle, böyle bir dağılım (en azından yerel olarak) bir diferensiyel 1-formun çekirdeği olarak verilebilir ve integrallenebilir olmama koşulu, bu form üzerinde maksimum bir dejenere olmama koşuluna dönüşür. Bu koşullar, bir hiperdüzlem dağılımının "tam integrallenebilirlik" için iki eşdeğer koşulun tersidir. Yani, denk önermesi Frobenius teoreminin içeriği olan manifold üzerinde bir eşboyut foliasyonuna tanjant (teğet) olmasıdır. Değme geometrisi birçok yönden simplektik geometrinin tek boyutlu bir karşılığıdır, belirli çift boyutlu manifoldlar üzerindeki bir yapıdır. Hem değme hem de simplektik geometri, klasik mekaniğin matematiksel formundan ilham alır.

Değme dönüşümler teorisi (bir değme yapısını koruyan dönüşümler), diferensiyel denklemleri (örnek olarak, Legendre dönüşümü veya kanonik dönüşüm) incelemek için 1872 yılında Sophus Lie tarafından geliştirilmiştir. Değme geometri, teorik matematiğin birçok alanıyla ilişkilidir ve özellikle, mekanik, optik, kontrol teorisi ve termodinamik gibi fiziğin ve mühendisliğin altdisiplinlerinde çok önemli bir yere sahiptir.

Tek boyutlu manifoldlar üzerinde $U(n) \times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapılar Gray (1959) tarafından tanımlanmıştır. Bundan sonra, hemen hemen değme metrik yapılar Sasaki (1960) tarafından verilmiştir. Bunu takiben, Sasaki (1961) çalışmasında hemen hemen değme manifoldlar üzerinde normallik şartını tanımlamış ve bu şartın J kompleks yapısının ($J^2 = -I$) integrallenebilmesi olduğunu ispatlamıştır.

Ayrıca, Goldberg ve Yano hemen hemen değme metrik yapıların bir alt sınıfı olan kosimplektik manifoldları tanımladılar (Goldberg ve Yano 1969). Bunu takiben, Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde önemli çalışmalar yapmıştır (Olszak 1981, 1989).

Çalışmamızın esasını oluşturan manifold tanımı 1972 yılında Kenmotsu tarafından yapılmıştır (Kenmotsu 1972). Günümüzde, Kenmotsu manifoldlar olarak adlandırılan bu tür manifoldlar; hemen hemen değme metrik Riemann manifoldların bir sınıfıdır. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi,$$

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, (ϕ, ξ, η, g) -yapısı normaldir. Buna karşın, ξ karakteristik vektör alanı Killing vektör alanı olmadığından Sasakian yapıda değildir. Bu şartları sağlayan Kenmotsu manifoldlar kompakt bir yapıya da sahip değildir ($\text{div } \xi = 2n$). Kenmotsu manifoldlarla ilgili dikkat çeken sonuçları içeren çalışmalar pek çok yazar tarafından kaleme alınmıştır (De 2004, 2009, Özgür 2007, Öztürk 2010, 2017, Jun vd. 2005, Dileo ve Pastore 2007, 2009, Kim ve Pak 2005, Naik vd. 2020).

Bundan başka, 1981 yılında Vanhecke hemen hemen Kenmotsu yapıların bir genellemesi olarak, hemen hemen α -Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır (Vanhecke 1981).

Tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. Değme yapılar, hemen hemen değme metrik yapılar ve Kenmotsu manifoldlar ile ilgili gerekli bilgiler verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde, temel kavramlar ve literatür bilgileri verilmiştir. Birinci kısımda, Riemann manifoldları ve özellikleri tanıtılmıştır. İkinci kısımda, hemen hemen değme metrik yapılar ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Üçüncü kısımda ise, hemen hemen α -Kenmotsu manifoldlar tanıtılmış ve ayrıntılı bir örnek inşa edilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, α -Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel kavramlar ve bazı özellikler incelenmiştir. Özellikle, Riemann eğrilik tensörü R ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, η -paralel Ricci tensörüne sahip η -Einstein (veya Einstein) α -Kenmotsu manifoldlar araştırılmıştır.

Tezin son bölümünde, α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı özel tensörel çarpım şartları araştırılmıştır. Yarı-simetrik, lokal simetrik, Ricci-yarı simetrik, Ricci rekürent, konformal yarı-simetrik, projektif yarı-simetrik, konsirküler yarı-simetrik, konformal

flat, projektif flat, konsirküler flat, D -konformal eğrilik tensörü, genelleştirilmiş rekürent, genelleştirilmiş Ricci rekürent, genelleştirilmiş konsirküler rekürent, lokal ve global ϕ -simetrik koşullarını sağlayan α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde edilmiştir.



2 TEMEL KAVRAMLAR ve LİTERATÜR BİLGİLERİ

Bu bölüm araştırma konumuz ile ilgili olan temel tanımlar, kavramlar ve literatür bilgilerinin sunulmasına adanmıştır.

2.1 Riemann Manifoldları ve Özellikleri

Tanım 2.1.1 n -boyutlu bir C^∞ manifold M , M üzerinde reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı g dönüşümüne M üzerinde bir Riemann metrik tensör ve (M, g) ikilisiyle verilen manifolda ise bir Riemann manifoldu adı verilir. M nin herhangi iki q ve r noktası için, M üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa, M ye bağlantılı manifold denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2 Bir C^∞ manifold M ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. Bu takdirde, $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\xrightarrow{\text{bilineer}} \chi(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü,

- (i) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$,
- (ii) $\nabla_X(f Y) = f \nabla_X Y + X(f)Y$,

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve ∇ , M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere,

- (i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon şartı),
- (ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma şartı),

özellikleri sağlanıyorsa, ∇ ya M nin Levi-Civita konneksiyonu (sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu) denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu takdirde, $\forall X, Y, Z, \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan $(1, 3)$ -tipli tensör alanı R ye M nin Riemann eğrilik tensörü adı verilir. Ayrıca, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, Riemann eğrilik tensörü R aşağıdaki özellikleri sağlar:

- (i) $R(X, Y)W = -R(Y, X)W$,
- (ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,
- (iii) $R(X, Y)W + R(Y, W)X + R(W, X)Y = 0$,
- (iv) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$,

(O'Neill 1983).

Önerme 2.1.1 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda, G, E, F , sırasıyla, $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı, simetrik bir tensör alanı ve ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\nabla_X G)Y &= \nabla_X GY - G(\nabla_X Y), \\ g((\nabla_X E)Y, Z) &= g(Y, (\nabla_X E)Z), \\ g((\nabla_X F)Y, Z) &= -g(Y, (\nabla_X F)Z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.5 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $X, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(X, X)g(W, W) - g(X, W)^2 \neq 0$$

olmak üzere,

$$K(X, W) = \frac{g(R(X, W)W, X)}{g(X, X)g(W, W) - g(X, W)^2} \quad (2.3)$$

değerine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile sembolize edilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.6 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanlarının cümlesi olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} S : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, W) &\longrightarrow S(X, W) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)W, e_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlı $(0, 2)$ -tipli S tensör alanına M üzerindeki Ricci eğrilik tensörü denir. Bundan başka, $(0, 2)$ -tipli Q Ricci operatörü,

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (2.5)$$

ile verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.7 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanlarının cümlesi olsun. Bu takdirde,

$$r = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan r değerine M nin skalar eğriliği denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.8 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Eğer M nin eğrilik tensörü paralel ($\nabla R = 0$) ise o zaman, M ye lokal simetrik uzay adı verilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.9 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ve M üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon ζ olsun. O halde, $g^* = \zeta^2 g$ eşitliği M üzerinde bir metrik değişimini gösterir. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı invarianttır. Bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi adı verilir. Eğer ζ sabit ise konformal dönüşüm homotetiktir denir. Eğer ζ özdeş olarak 1 e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak bilinir. Eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal ilişkili ise o zaman, M Riemann manifolduna konformal düzlemsel (konformal flat) denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.10 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} C(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \frac{1}{2n-1}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y - g(X, Z)QY \\ &+ g(Y, Z)QX] + \frac{r}{2n(2n-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanan C tensörüne M nin $(1, 3)$ -tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı denir. C nin diverjansı c ($c = \text{div } C$) ise,

$$c(X, Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(2n-1)} [(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X] \quad (2.8)$$

eşitliği geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.11 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\overline{C}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{2n(2n+1)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y], \quad (2.9)$$

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan $(1, 3)$ -tipli $\overline{C}$ ve P tensör alanlarına sırasıyla, konsirküler ve projektif eğrilik tensör alanları denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.12 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y).R = 0 \quad (2.11)$$

tensör çarpımı şartı sağlanıyorsa, (M, g) bir yarı-simetrik uzay olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. M nin konformal flat olması için gerek ve yeter şart $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $c = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.2 Sabit bir k eğrilğine sahip bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, W \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y)W = k [g(Y, W)X - g(X, W)Y] \quad (2.12)$$

eşitliği geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.13. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n -boyutlu bir M uzay formu $M(k)$ ile gösterilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.14 Sabit bir k eğriliğine sahip bir n -boyutlu uzay form (M, g) olsun. Bu takdirde, $n \geq 2$ olmak üzere,

$$M(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise } M(k) = E^n \text{ Öklid uzayı} \\ k = \frac{1}{r^2} & \text{ise } M(k) = S^n(r) \text{ küresi} \\ k = -\frac{1}{r^2} & \text{ise } M(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay} \end{cases}$$

dır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.15 Bir n -boyutlu C^∞ manifold M olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t, p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan φ dönüşümü

- (i) $\forall t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,
- (ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa, φ ye M nin diferensiyellenebilir bir 1-parametrelili grubu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.16 Bir n -boyutlu C^∞ manifold M ve $\forall Y \in \chi(M)$ için, Y ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametrelili grup φ_t olsun. Bu takdirde, K bir tensör alanı ve $p \in M$ için,

$$(\mathcal{L}_Y K)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [K_p - (\varphi_t K)_p] \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_Y K$ dönüşümüne Y yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_Y K$ ile gösterilir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.1.2 Bir n -boyutlu C^∞ manifold M ve M üzerindeki bir Y vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

- (i) $\mathcal{L}_Y(X \otimes Z) = (\mathcal{L}_Y X) \otimes Z + X \otimes (\mathcal{L}_Y Z)$, ($\forall X, Z \in \chi(M)$)
- (ii) $\mathcal{L}_Y f = Y(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)
- (iii) $\mathcal{L}_Y X = [Y, X]$, ($X \in \chi(M^n)$)

şartları geçerlidir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.1.17 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Bu durumda, $\forall Y \in \chi(M)$ için, $\mathcal{L}_Y g = 0$ şartı sağlanıyorsa, Y vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Blair 1976).

2.2 Hemen Hemen Değme Metrik Yapılar

Tanım 2.2.1 $(2n + 1)$ -boyutlu bir manifold M , ϕ, ξ, η da M üzerinde, sırasıyla, $(1, 1)$ -tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Bu durumda, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1 \quad (2.14)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapı denir. Bu yapı ile birlikte M manifolduna bir hemen hemen değme manifold adı verilir (Blair 1976).

Tanım 2.2.2 $(2n + 1)$ -boyutlu bir M manifoldu (ϕ, ξ, η) üçlüsüyle birlikte hemen hemen bir değme yapıya sahip olsun. Bu takdirde, M üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi), \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanıyorsa g metriğine hemen hemen değme metrik, (ϕ, ξ, η, g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapı denir. (ϕ, ξ, η, g) yapısı ile birlikte M ye de hemen hemen değme metrik manifold denir. Bundan sonraki kısımlarda (M, ϕ, ξ, η, g) gösterimi ile $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold kastedilmektedir (Blair 1976).

Önerme 2.2.1 Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (2.16)$$

eşitliği geçerlidir (Blair 1976).

Tanım 2.2.3 Bir (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (2.17)$$

şeklinde verilen Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.4 (M^n, g) bir Riemann manifold ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ ve $g(x) > 0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i , M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.2.5 (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot vd. 2004).

Tanım 2.2.6 Yukarıda verilen tanımlar ışığında, $(M^n, \phi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Φ ters simetrik ve $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$) (Chinea ve Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.7. Bir C^∞ manifold M olsun. Eğer w 1-form ise, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$2dw(X, Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w[X, Y] \quad (2.18)$$

ve eğer w 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3dw(X, Y, Z) &= X(w(Y, Z)) + Y(w(Z, Y)) + Z(w(X, Y)) \\ &\quad - w([X, Y], Z) - w([Y, Z], X) - w([Z, X], Y) \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ da bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu takdirde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(i) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$$

$$(ii) (\nabla_X \Phi)(Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$$

$$(iii) (\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$$

$$(iv) 2d\eta(X, Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$$

$$(v) 3d\Phi(X, Y, Z) = \bigoplus_{X, Y, Z} (\nabla_X \Phi)(Y, Z)$$

dir. Burada $\bigoplus_{X, Y, Z} X, Y, Z$ vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı ifade etmektedir (Chinea ve Gonzalez 1990).

Önerme 2.2.3 (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold, ∇ bir Riemann konneksiyonu ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$, M nin açık bir altcümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. Bu takdirde, M üzerinde δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^n \{(\nabla_{X_i}\eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i}\eta)\phi X_i\} \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır (Chinea ve Gonzalez 1990).

Tanım 2.2.8 M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_p M$ tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano ve Kon 1984).

Hatırlatma 2.2.1 M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $(X, f \frac{d}{dt})$ şeklinde tanımlanır. Burada X , M manifolduna teğet bir vektör alanı; t , $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^∞ fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = \left(\phi X - f \cdot \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \quad (2.21)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan $J^2 = -I$ elde edilir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.9 Bir n -boyutlu diferensiyellenebilir manifold M olmak üzere, M üzerinde $(1, 1)$ -tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.10 J , M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.2.9 yardımıyla M üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= J^2[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \\ &= -[X, Y] + [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] \end{aligned} \quad (2.23)$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.11 (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. Bu durumda, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilir denir. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebiliyorsa, (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

Önerme 2.2.4 $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldun normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \quad (2.24)$$

denkleminin sağlamasıdır. Burada N_ϕ , ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano ve Kon 1984).

Tanım 2.2.12 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu (M, ϕ, ξ, η, g) ,

$$d\Phi = 0, \quad d\eta = 0 \quad (2.25)$$

şartlarını sağlıyorsa M manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifold normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.2.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M nin bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin özdeş olarak sıfır olmasıdır (Olszak 1981).

2.3 Hemen Hemen α -Kenmotsu Manifoldlar

Tanım 2.3.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (2.26)$$

denklemleri sağlanıyorsa, M ye bir hemen hemen α -Kenmotsu manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Hatırlatma 2.3.1 Özel olarak, bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) normal ise o zaman α -Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Önerme 2.3.1 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde,

$$\eta^* = \frac{1}{\alpha}\eta, \quad \xi^* = \alpha\xi, \quad \phi^* = \phi, \quad g^* = \frac{1}{\alpha^2}g \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlanan homotetik deformasyon yardımıyla M üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim ve Pak 2005).

Teorem 2.3.1 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \quad \nabla_X \xi = -\phi^2 X, \quad (2.28)$$

dir (Kenmotsu 1972).

Hatırlatma 2.3.2 Tanım 2.3.1 deki $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemini sağlayan α reel sayısı yerine daha genel manada türevlenebilir fonksiyon seçebiliriz (Janssens ve Vanhecke 1981).

Önerme 2.3.2 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \quad (2.29)$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi hX \quad (2.30)$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0 \quad (2.31)$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \quad (2.32)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(\phi Y, hX) \quad (2.33)$$

$$\delta\eta = -2\alpha n, \quad \dot{I}z(h) = 0 \quad (2.34)$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla \xi = -\alpha\phi^2 \quad (2.35)$$

dir (Öztürk 2009).

Yardımcı Teorem 2.3.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu durumda, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

dir (Blair 2002).

Yardımcı Teorem 2.3.2 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M üzerinde $(1, 1)$ -tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla \xi$ ve $h = \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \phi$ biçiminde tanımlansın. Bu takdirde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

- (i) A ve h simetriktir ve $A\phi + \phi A = -2\alpha\phi$,
- (ii) $\eta \circ A = 0$, $\eta \circ h = 0$ ve $h = A \circ \phi + \alpha\phi$,
- (iii) $hA + Ah = -2\alpha h$, $\dot{I}z(A) = -2\alpha n$ ve $\dot{I}z(\phi A) = 0$

dir (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$R(X, Y)\xi = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \quad (2.37)$$

dir (Öztürk 2009).

Önerme 2.3.4. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$R(X, \xi)\xi = \alpha^2 \phi^2 X + 2\alpha \phi hX - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X, \quad (2.38)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X, \xi)\xi - \alpha^2 \phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X, \quad (2.39)$$

$$R(X, \xi)\xi - \phi R(\phi X, \xi)\xi = 2 [\alpha^2 \phi^2 X - h^2 X], \quad (2.40)$$

$$S(X, \xi) = -2n\alpha^2 \eta(X) - (\text{div}(\phi h))X, \quad (2.41)$$

$$S(\xi, \xi) = \dot{I}z(l) = - [2n\alpha^2 + \dot{I}z(h^2)] \quad (2.42)$$

dir (Öztürk vd. 2014).

Önerme 2.3.5 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu durumda, $\nabla_\xi h = 0$ dır (Dileo ve Pastore 2007).

Önerme 2.3.6 Bir $(2n+1)$ -boyutlu hemen hemen α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M üzerinde R Riemann eğrilik özellikleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &+ [\alpha^2 + \xi(\alpha)] [\eta(X)Y - \eta(Y)X], \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$R(X, \xi)\xi = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \phi^2 X + 2\alpha \phi hX - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X, \quad (2.44)$$

$$R(X, \xi)\xi - \phi R(\phi X, \xi)\xi = 2 [(\alpha^2 + \xi(\alpha))\phi^2 X - h^2 X], \quad (2.45)$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X, \xi)\xi - [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \phi X - 2\alpha hX - \phi h^2 X, \quad (2.46)$$

$$S(X, \xi) = -2n [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \eta(X) - (\text{div}(\phi h))X, \quad (2.47)$$

$$S(\xi, \xi) = -[2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \dot{I}z(h^2)]. \quad (2.48)$$

Burada α reel sabiti yerine M üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ koşulu ile verilen bir türevlenebilir fonksiyon seçtik. Ayrıca, $\xi(\alpha)$ ifadesi α türevlenebilir fonksiyonunun ξ vektör alanı yönündeki ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevidir (Öztürk vd. 2014).

Örnek 2.3.1 3-boyutlu $M \subset IR^3$ manifoldu

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq 0\}$$

şeklinde verilsin. M üzerindeki vektör alanları

$$e_1 = e^{z^3} \frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^{z^3} \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olsun. $\{e_1, e_2, e_3\}$ cümlesinin M nin her noktasında lineer bağımsız olduğu açıktır. O halde, g Riemann metriği

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = g(e_3, e_3) = 1,$$

$$g(e_1, e_2) = g(e_1, e_3) = g(e_2, e_3) = 0$$

dir. Bundan başka, g Riemann metriği

$$g = \frac{1}{e^{2z^3}}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz$$

tensör çarpımı ile verilsin.

Ayrıca, η 1-formu $\forall X \in \chi(M)$ için, $\eta(X) = g(X, e_3)$ ve ϕ (1,1)-tipli tensör alanı

$$\phi(e_1) = e_2, \phi(e_2) = -e_1, \phi(e_3) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Bunun yanında, h (1,1)-tipli tensör alanı

$$h(e_1) = -\lambda e_1, h(e_2) = \lambda e_2, h(e_3) = 0$$

ile verilsin. Bu takdirde, g ve ϕ nin tanımlarından

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)e_3,$$

$$\eta(e_3) = 1,$$

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

elde edilir.

∇ , g Riemann metriği ile verilen Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$[e_1, e_3] = -3z^2 e_1,$$

$$[e_2, e_3] = -3z^2 e_2,$$

$$[e_1, e_2] = 0$$

yazılır. Böylece (ϕ, ξ, η, g) dörtlü yapısı bulunmuş olur. Şimdi, bu yapının bir hemen hemen α -Kenmotsu yapısı olması için Φ nin sıfırdan farklı bileşenlerini kontrol etmek yeterli olacaktır. Bu takdirde,

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\frac{1}{e^{2z^3}}$$

dir. Buradan

$$\Phi = -\frac{1}{e^{2z^3}}(dx \wedge dy) \quad (2.49)$$

bulunur. Burada $\Phi(e_1, e_2) = -1$ ve aksi halde $i \leq j$ için, $\Phi(e_i, e_j) = 0$ olacaktır.

Dolayısıyla Φ nin dış türevi tanımından

$$d\Phi = 6z^2 e^{-2z^3}(dx \wedge dy \wedge dz) \quad (2.50)$$

elde edilir. Ayrıca, $\eta = dz$ olduğundan (2.49) ve (2.50) eşitliklerinin yardımıyla

$$d\Phi = -6z^2 (\eta \wedge \Phi)$$

sonucuna ulaşılır. Burada α türevlenebilir fonksiyonu

$$\alpha(z) = -3z^2$$

şeklindedir. Bundan başka, $N_\phi = 0$ dır. Başka bir ifadeyle, M manifoldu normal bir hemen hemen α -Kenmotsu (α -Kenmotsu) manifoldudur.



3 α -KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde, α -Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel kavramlar ve belli tensör şartları ele alınarak, bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M nin bir α -Kenmotsu manifold olması için, $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere,

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X = \alpha [X - \eta(X)\xi], \quad (3.1)$$

$$(\nabla_X \phi)Y = -\alpha [g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X] \quad (3.2)$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir ($\alpha = 1$ durumu Kenmotsu 1972).

Önerme 3.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, aşağıdaki eğrilik özellikleri sağlanır:

$$R(X, Y)\xi = \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X], \quad (3.3)$$

$$R(X, Y)Z = -(\nabla_Z R)(X, Y)\xi - \alpha^2 g(Y, Z)X + \alpha^2 g(X, Z)Y, \quad (3.4)$$

$$R(\xi, X)Y = \alpha^2 [-g(X, Y)\xi + \eta(Y)X], \quad (3.5)$$

$$g(R(\xi, X)Y, \xi) = \alpha^2 [-g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)], \quad (3.6)$$

$$S(X, \xi) = -2n\alpha^2 \eta(X), \quad (3.7)$$

$$(\nabla_X \eta)(Y) = \alpha [g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)], \quad (3.8)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = \alpha^2 [\eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z)] \quad (3.9)$$

(Öztürk vd. 2010).

Hatırlatma 3.1 Yukarıdaki eşitlikler n -boyut için verilirse, $2n$ yerine $(n-1)$ alınmalıdır.

Teorem 3.1 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + 2n\alpha^2 \eta(X)\eta(Y) \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanır (Öztürk vd. 2010, $\alpha = 1$ durumu Jun vd. 2005).

Teorem 3.2 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X, Y)\phi Z - \phi R(X, Y)Z = \alpha^2 [g(\phi Y, Z)X + g(Y, Z)\phi X] - \alpha^2 [g(\phi X, Z)Y + g(X, Z)\phi Y], \quad (3.11)$$

$$R(\phi X, \phi Y)Z = R(X, Y)Z - \alpha^2 [g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] - \alpha^2 [g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y] \quad (3.12)$$

İspat (3.9) eşitliğinden

$$R(X, Y)Z = -\alpha^2 g(Y, Z)X + \alpha^2 g(X, Z)Y \quad (3.13)$$

yazılır. (3.13) eşitliğinde Z yerine ϕZ seçersek,

$$R(X, Y)\phi Z = -\alpha^2 g(Y, \phi Z)X + \alpha^2 g(X, \phi Z)Y \quad (3.14)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.13) eşitliğinin her iki tarafına $-\phi$ uygulanırsa,

$$-\phi(R(X, Y)Z) = +\alpha^2 g(Y, Z)\phi X - \alpha^2 g(X, Z)\phi Y \quad (3.15)$$

bulunur. (3.14) ve (3.15) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa (3.11) eşitliğinin ispatına ulaşılır.

Benzer yolla, (3.13) eşitliğinde X yerine ϕX ve Y yerine ϕY alınarak,

$$R(\phi X, \phi Y)Z = -\alpha^2 g(\phi Y, Z)\phi X + \alpha^2 g(\phi X, Z)\phi Y \quad (3.16)$$

yazılır. (3.1), (3.11) ve (3.16) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa (3.12) eşitliği ispatlanmış olur.

Önerme 3.2 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için α , $d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, aşağıdaki eğrilik özellikleri sağlanır:

$$R(X, Y)\xi = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] (\eta(X)Y - \eta(Y)X), \quad (3.17)$$

$$R(X, \xi)\xi = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] (\eta(X)\xi - X), \quad (3.18)$$

$$R(\xi, X)Y = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] (\eta(Y)X - g(X, Y)\xi), \quad (3.19)$$

$$g(R(\xi, X)Y, \xi) = [\alpha^2 + \xi(\alpha)] (-g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)), \quad (3.20)$$

$$S(X, \xi) = -2n [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \eta(X), \quad (3.21)$$

$$S(\xi, \xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)), \quad (3.22)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = S(X, Y) + 2n [\alpha^2 + \xi(\alpha)] \eta(X)\eta(Y) \quad (3.23)$$

(Öztürk 2017).

Tanım 3.2 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer S Ricci tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = 0 \quad (3.24)$$

eşitliğini sağlıyorsa, M ye η -paralel Ricci tensörlü α -Kenmotsu manifold adı verilir (Jun vd. 2005).

Teorem 3.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M nin η -paralel Ricci tensörlü α -Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}(\nabla_X S)(Y, Z) = & -2n\alpha^2 [\eta(Z)g(X, Y) + \eta(Y)g(X, Z)] \\ & - [\eta(Z)S(Y, X) + \eta(Y)S(X, Z)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\alpha, d\alpha \wedge \eta = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyondur.

İspat Hipotez gereğince $\xi(\alpha) = 0$ ($\nabla_\xi \alpha = 0$) olsun. Bu durumda, bir $(2n + 1)$ -boyutlu η -paralel Ricci tensörlü α -Kenmotsu manifoldu M olmak üzere,

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = & \nabla_X S(\phi Y, \phi Z) \\ & - S(\nabla_X \phi Y, \phi Z) - S(\phi Y, \nabla_X \phi Z) \end{aligned} \quad (3.26)$$

yazılır. (3.1), (3.2) ve (3.23) eşitlikleri (3.26) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = & \nabla_X S(Y, Z) + 2n\alpha^2 [\eta(Z)\nabla_X \eta(Y) + \eta(Y)\nabla_X \eta(Z)] \\ & + \alpha\eta(Y) [S(X, Z) + 2n\alpha^2 \eta(X)\eta(Z)] \\ & + \alpha\eta(Z) [S(Y, X) + 2n\alpha^2 \eta(X)\eta(Y)] - S(\nabla_X Y, Z) \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\nabla_X S(Y, Z) = (\nabla_X S)(Y, Z) + S(\nabla_X Y, \phi Z) + S(Y, \nabla_X Z) \quad (3.28)$$

ve

$$(\nabla_X \eta)Y = \nabla_X \eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \quad (3.29)$$

dır. (3.8), (3.28) ve (3.29) eşitlikleri yardımıyla (3.27) eşitliği

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) &= (\nabla_X S)(Y, Z) + 2n\alpha^3 [\eta(Z)g(X, Y) + \eta(Y)g(X, Z)] \\ &+ \alpha [\eta(Z)S(Y, X) + \eta(Y)S(X, Z)] \end{aligned} \quad (3.30)$$

indirgenir. Hipotezin kullanılmasıyla, (3.24) eşitliği (3.30) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.25) eşitliğine ulaşılır. Tersine olarak, (3.25) eşitliğinin doğru olduğunu kabul edersek, M nin η -paralel Ricci tensörlü α -Kenmotsu manifold olduğunu kolayca yukarıdaki benzer yolla gösterebiliriz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M η -paralel Ricci tensöre sahip ise o zaman M nin skalar eğriliği sabittir.

İspat $\{E_1, E_2, \dots, E_{2n}, \xi\}$ cümlesi $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ için tanjant uzayın herhangi noktasının bir ortonormal tabanı olsun. (3.30) eşitliğinin her iki tarafına $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ için, $Y = Z = E_i$ olmak üzere, kontraksiyon yaparsak,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n+1} (\nabla_X S)(E_i, E_i) &= -2n\alpha^3 \sum_{i=1}^{2n+1} [\eta(E_i)g(X, E_i) + \eta(E_i)g(X, E_i)] \\ &- \alpha \sum_{i=1}^{2n+1} [\eta(E_i)S(E_i, X) + \eta(E_i)S(X, E_i)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu takiben,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} (\nabla_X S)(E_i, E_i) = 0$$

bulunur. Bundan dolayı, $dr(X) = 0$ denklemi ortaya çıkar ki bu da r nin sabit olması anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.2 Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ün ispatları $\alpha = 1$ için Jun vd. (2005) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer M nin Ricci tensörü $S, \forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \quad (3.31)$$

şartını sağlıyorsa M ye bir η -Einstein manifold denir. Burada $a, b : M \rightarrow R$ fonksiyonlardır. Özel olarak, $b = 0$ ise M bir Einstein manifoldudur (Blair 1976).

Teorem 3.5 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M bir η -Einstein manifold ise

$$a + b = -2n\alpha^2 \quad (3.32)$$

dir ($\alpha = 1$ için Kenmotsu 1972).

İspat (3.21) ve (3.31) eşitliklerinden $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$S(X, \xi) = a\eta(X) + b\eta(X)$$

ve

$$S(X, \xi) = -2n\alpha^2\eta(X)$$

yazılır. Buradan (3.32) eşitliğinin ispatı aşıkardır.

Teorem 3.6 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu η -Einstein Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer a ve b fonksiyonlarından biri sabit ise o zaman M bir Einstein manifoldudur (Kenmotsu 1972).

Önerme 3.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde,

$$a = \alpha^2 + \frac{r}{2n} \quad (3.33)$$

$$b = -\frac{r}{2n} - \alpha^2(2n + 1) \quad (3.34)$$

$$r = (2n + 1)a + b \quad (3.35)$$

dır.

İspat (3.31) eşitliğinin her iki tarafına $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ için, $X = Y = E_i$ olmak üzere, kontraksiyon yapılırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} S(E_i, E_i) = a \sum_{i=1}^{2n+1} g(E_i, E_i) + b \sum_{i=1}^{2n+1} \eta(E_i)\eta(E_i)$$

eşitliğinden (3.35) elde edilir. Bundan başka, (3.32) ve (3.35) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$r = 2na - 2n\alpha^2 \quad (3.36)$$

bulunur. O halde, (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden (3.33) eşitliğine ulaşılır. (3.33) eşitliği (3.32) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha^2 + \frac{r}{2n} + b = -2n\alpha^2$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik (3.34) eşitliğinin ispatıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu η -Einstein α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. O halde, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \left(\alpha^2 + \frac{r}{2n} \right) g(X, Y) - \left(\frac{r}{2n} + \alpha^2(2n + 1) \right) \eta(X)\eta(Y) \quad (3.37)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat Önerme 3.3 ve (3.31) eşitliğinden ispat açıktır.

Teorem 3.8 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu η -Einstein Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, a ve b fonksiyonlarının her ikisi de sabittir (Jun vd. 2005).

Teorem 3.9 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu η -Einstein α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α , ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

- (i) M , η -paralel Ricci tensörüne sahiptir,
- (ii) M , $-2n(2n + 1)\alpha^2$ skalar sabit eğriliğine sahiptir,
- (iii) M , $S(X, Y) = -2n\alpha^2 g(X, Y)$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

İspat Teorem 3.3, Teorem 3.4, Tanım 3.3 ve Önerme 3.3 birlikte düşünülürse yukarıdaki üç önermenin, sırasıyla, birbirine denk olduğu görülür. Ayrıca, (3.1) ve (3.37)

eşitliklerinin birlikte kullanılmasıyla,

$$(\nabla_X S)(\phi Y, \phi Z) = \frac{1}{2n} dr(X)g(\phi Y, \phi Z) \quad (3.38)$$

elde edilir. (3.38) eşitliği ve Teorem 3.4 kullanılarak ispat tamamlanır.

Hatırlatma 3.3 Teorem 3.9 un ispatı $\alpha = 1$ için Özgür vd. (2006) tarafından verilmiştir.



4 BAZI ŞARTLARI SAĞLAYAN α -KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde, α -Kenmotsu manifoldları üzerinde bazı eğrilik şartları ve bazı özel tensör şartları incelenecektir.

Teorem 4.1 Bir $(2n+1)$ -boyutlu yarı-simetrik Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Bu takdirde, M manifoldu -1 negatif sabit eğrilğine sahiptir (Kenmotsu 1972).

Teorem 4.2 Bir $(2n+1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M yarı-simetrik ise o zaman M üzerinde sabit eğrilik mevcut değildir.

İspat Hipotez gereğince, tensör çarpımı tanımından, $\forall Y, U, V, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= R(Y, \xi)R(U, V)W - R(R(Y, \xi)U, V)W \\ &\quad - R(U, R(Y, \xi)V)W - R(U, V)R(Y, \xi)W \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitliği (2.11) eşitliğine denktir. (3.18) ve (3.19) eşitliklerinin yardımıyla (4.1) eşitliğinin sağ tarafındaki dört tensörel çarpım ifadeleri $U = \xi$ için, ayrı ayrı hesaplanır ve toplanırsa

$$\begin{aligned} &(\alpha^2 + \xi(\alpha))^2 [g(V, W)Y - g(Y, W)V] + (\alpha^2 + \xi(\alpha)) R(X, V)W \\ &= (\alpha^2 + \xi(\alpha))^2 [\eta(V)\eta(W)X - \eta(V)g(X, W)\xi] \\ &(\alpha^2 + \xi(\alpha)) [-\eta(V)\eta(W)X + \eta(V)g(X, W)\xi] \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) eşitliği sadeleştirilerek,

$$\begin{aligned} R(Y, V)W &= (\alpha^2 + \xi(\alpha)) [g(Y, W)V - g(V, W)Y] \\ &(\alpha^2 + \xi(\alpha)) (\alpha^2 + \xi(\alpha) - 1)\eta(V) [\eta(W)Y - g(Y, W)\xi] \end{aligned} \quad (4.3)$$

yazılır. Buradan $\xi(\alpha) = 0$ eşitliğini takiben

$$\begin{aligned} R(Y, V)W &= \alpha^2 [g(Y, W)V - g(V, W)Y] \\ &\alpha^2(\alpha^2 - 1)\eta(V) [\eta(W)Y - g(Y, W)\xi] \end{aligned} \quad (4.4)$$

bulunur. (4.4) ve (2.12) eşitliklerinden M üzerinde sabit eğrilğin olmadığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1 $\alpha = 1$ için Teorem 4.1 in ispatı açıktır.

Teorem 4.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M lokal simetrik ise o zaman M manifoldu $-\alpha^2$ negatif sabit bir uzay eğriliğine sahiptir (Öztürk 2017).

İspat Hipotezden dolayı $\xi(\alpha) = 0$ olsun. (3.3) eşitliğinin her iki tarafının W vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X, Y)\xi &= \nabla_W R(X, Y)\xi - R(\nabla_W X, Y)\xi \\ &\quad - R(X, \nabla_W Y)\xi - R(X, Y)\nabla_W \xi \end{aligned} \quad (4.5)$$

yazılır. Bu son eşitlik (3.1) ve (3.3) eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} (\nabla_W R)(X, Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(\nabla_W X)Y + g(X, \nabla_W \xi)Y + \eta(X)\nabla_W Y - \eta(\nabla_W Y)X \\ &\quad - g(Y, \nabla_W \xi)X - \eta(Y)\nabla_W X] - \alpha^2 [\eta(\nabla_W Y)X - \eta(Y)\nabla_W X] \\ &\quad - \alpha^2 [\eta(X)\nabla_W Y - \eta(\nabla_W Y)X] + \alpha R(X, Y)\phi^2 W \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. (4.6) eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$(\nabla_W R)(X, Y)\xi = \alpha^3 [g(X, W)Y - g(Y, W)X] - \alpha R(X, Y)W \quad (4.7)$$

denklemine ulaşılır. $\nabla R = 0$ olduğundan (4.7) denklemi

$$\alpha R(X, Y)W = \alpha^3 [g(X, W)Y - g(Y, W)X] \quad (4.8)$$

haline indirgenir. Buradan

$$R(X, Y)W = -\alpha^2 [-g(X, W)Y + g(Y, W)X]$$

elde edilir. Böylece $\alpha \neq 0$ olmak üzere, M nin $k = -\alpha^2$ olacak şekilde bir negatif sabit uzay eğriliğine sahip olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) manifoldu ($\alpha = 1$) için, aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

- (i) M , -1 sabit eğriliğine sahiptir,
- (ii) M lokal simetriktir,
- (iii) M yarı-simetriktir.

Tanım 4.1 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Eğer M üzerinde, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(R(X, Y).S)(Z, W) = R(X, Y)S(Z, W) - S(R(X, Y)Z, W) - S(Z, R(X, Y)W), \quad (4.9)$$

tensor çarpımı ile tanımlanan

$$R.S = 0 \quad (4.10)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye Ricci yarı-simetrik manifold denir (Sinyakov 1981).

Tanım 4.2 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. Eğer M üzerinde Ricci tensörü S sıfırdan farklı ve β bir 1-form olmak üzere, $\forall Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_Y S)(Z, W) = \beta(Y)S(Z, W) \quad (4.11)$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye Ricci rekürent manifold adı verilir (Patterson 1952).

Teorem 4.4 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer M Ricci yarı-simetrik ise o zaman M bir Einstein manifoldudur (Jun vd. 2005).

Teorem 4.5 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M Ricci yarı-simetrik ise o zaman M manifoldu $S = -2n\alpha^2 g$ ile verilen bir Einstein manifoldudur (Öztürk 2017).

İspat Hipotezimiz

$$R(X, \xi)S(Z, W) - S(R(X, \xi)Z, W) - S(Z, R(X, \xi)W) = 0 \quad (4.12)$$

önermesine denktir. Bu son eşitlikte $W = \xi$ ve $\xi(\alpha) = 0$ alırsak,

$$\alpha^2 [g(X, Z)S(\xi, \xi) - \eta(Z)S(X, \xi) + \eta(X)S(Z, \xi) - S(X, Z)] = 0 \quad (4.13)$$

bulunur. (3.21) ve (3.22) eşitlikleri (4.13) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\alpha^2 [2n\alpha^2 g(X, Z) + S(X, Z)] = 0$$

elde edilir. Bu son eşitliği takiben

$$2n\alpha^2 g(X, Z) + S(X, Z) = 0$$

yazılır. Bu da istenen sonuçtur.

Hatırlatma 4.1 $R \cdot R = 0 \subset R \cdot S = 0$ olduğundan $R \cdot R = 0$ önermesi $R \cdot S = 0$ önermesini gerektirir.

Sonuç 4.3 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu yarı-simetrik α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M bir Einstein manifoldudur.

Teorem 4.6 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. Eğer M Ricci rekürent ise o zaman M bir Einstein manifoldudur (Jun vd. 2005).

Teorem 4.7 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M Ricci rekürent ise o zaman M bir Ricci yarı-simetrik ve Einstein manifoldudur.

İspat M üzerinde $h^2 = g(Q, Q)$ şartını sağlayan bir h fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $S(X, Y) = g(QX, Y)$ dır. Bu durumda,

$$X(h^2) = X[g(Q, Q)] = 2g(\nabla_X Q, Q)$$

yazılır. (4.11) eşitliğini takiben

$$X(h^2) = 2h^2\beta(X) \quad (4.14)$$

dir. Burada β 1-formdur. Bundan başka,

$$X(h^2) = 2h(Xh) \quad (4.15)$$

eşitliğinden

$$h(Xh) = h^2\beta(X) \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerden

$$Xh = h\beta(X) \neq 0 \quad (4.17)$$

bulunur. (4.17) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$Y(Xh) - X(Yh) = \{Y\beta(X) - X\beta(Y)\}h$$

eşitliğine ulaşılır. Bu son eşitlik yardımıyla

$$\{\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]}\} h = \{Y\beta(X) - X\beta(Y) - \beta[Y, X]\} h \quad (4.18)$$

yazılır. $h \neq 0$ olmak üzere, (4.18) eşitliği

$$d_\beta(Y, X) = 0 \quad (4.19)$$

dır. (4.19) eşitliği β 1-formunun kapalı olduğunu göstermektedir. Ayrıca, (4.11) eşitliği yardımıyla,

$$(\nabla_Y \nabla_X S)(Z, W) = \{Y\beta(X) - X\beta(Y) - \beta[Y, X]\} S(Z, W) \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$(R(Y, X).S)(Z, W) = 2d_\beta(Y, X)S(Z, W)$$

ifadesi özdeş olarak sıfırdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 Bir $(2n+1)$ -boyutlu konformal yarı-simetrik α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M konformal flat şartını sağlar.

İspat Öncelikle, M konformal yarı-simetrik olsun. Yani,

$$R.C = 0 \quad (4.21)$$

dır. Bu tensör çarpımının tanımı kullanılırsa (4.21) eşitliğinin denk önermesi

$$\begin{aligned} R(X, \xi)C(U, V)W - C(R(X, \xi)U, V)W \\ - C(U, R(X, \xi)V)W - C(U, V)R(X, \xi)W = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

olacaktır. Weyl konformal eğrilik tensörü tanımından (2.7) eşitliği yardımıyla, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\begin{aligned} g(C(X, Y)Z, \xi) &= \left[\frac{2n\alpha^2}{2n-1} - \alpha^2 + \frac{r}{2n(2n-1)} \right] \eta(X)g(Y, Z) \\ &+ \left[-\frac{2n\alpha^2}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)} + \alpha^2 \right] \eta(Y)g(X, Z) \\ &+ \frac{1}{2n-1} [\eta(Y)S(X, Z) - \eta(X)S(Y, Z)] \end{aligned} \quad (4.23)$$

dir. (4.23) eşitliğinde $X = \xi$ seçilirse,

$$\begin{aligned} g(C(\xi, Y)Z, \xi) &= \left[\frac{2n\alpha^2}{2n-1} - \alpha^2 + \frac{r}{2n(2n-1)} \right] g(Y, Z) \\ &+ \left[-\frac{2n\alpha^2}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)} + \alpha^2 \right] \eta(Y)\eta(Z) \\ &+ \frac{1}{2n-1} [-2n\alpha^2\eta(Y)\eta(Z) - S(Y, Z)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

veya kısalık için $L = \left[\frac{2n\alpha^2}{2n-1} - \alpha^2 + \frac{r}{2n(2n-1)} \right]$ için,

$$\begin{aligned} g(C(\xi, Y)Z, \xi) &= L [g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\ &+ \frac{1}{2n-1} [-2n\alpha^2\eta(Y)\eta(Z) - S(Y, Z)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

bulunur. (4.22)-(4.25) ve (3.5) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned} g(R(X, \xi)C(U, V)W, \xi) &= \alpha^2 g(C(U, V)W, X) \\ &- \alpha^2 \eta(X) [L (\eta(U)g(V, W) - \eta(V)g(U, W)) \\ &+ \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(U, W) - \eta(U)S(V, W))] \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} g(C(R(X, \xi)U, V)W, \xi) &= -\alpha^2 \eta(U) [L (\eta(X)g(V, W) - \eta(V)g(X, W)) \\ &+ \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(X, W) - \eta(X)S(V, W))] \\ &+ \alpha^2 g(X, U) [L (g(V, W) - \eta(V)\eta(W)) \\ &- \frac{1}{2n-1} (2n\alpha^2\eta(V)\eta(W) + S(V, W))] \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} g(C(U, R(X, \xi)V)W, \xi) &= \alpha^2 \eta(V) [L (\eta(X)g(U, W) - \eta(U)g(X, W)) \\ &+ \frac{1}{2n-1} (\eta(U)S(X, W) - \eta(X)S(U, W))] \\ &- \alpha^2 g(X, V) [L (g(U, W) - \eta(U)\eta(W)) \\ &- \frac{1}{2n-1} (2n\alpha^2\eta(U)\eta(W) + S(U, W))] \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} g(C(U, V)R(X, \xi)W, \xi) &= -\alpha^2 \eta(W) [L (\eta(U)g(X, V) - \eta(V)g(X, U)) \\ &+ \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(X, U) - \eta(U)S(V, X))] . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Burada $g(C(X, Y)\xi, \xi) = 0$ dir. (4.26)-(4.29) eşitlikleri (4.22) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 g(C(U, V)W, X) - \alpha^2 \eta(X) [L(\eta(U)g(V, W) - \eta(V)g(U, W)) \\
& + \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(U, W) - \eta(U)S(V, W))] + \alpha^2 \eta(U) [L(\eta(X)g(V, W) - \eta(V)g(X, W)) \\
& + \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(X, W) - \eta(X)S(V, W))] - \alpha^2 g(X, U) [L(g(V, W) - \eta(V)\eta(W)) \\
& - \frac{1}{2n-1} (2n\alpha^2 \eta(V)\eta(W) + S(V, W))] - \alpha^2 \eta(V) [L(\eta(X)g(U, W) - \eta(U)g(X, W)) \\
& + \frac{1}{2n-1} (\eta(U)S(X, W) - \eta(X)S(U, W))] + \alpha^2 g(X, V) [L(g(U, W) - \eta(U)\eta(W)) \\
& - \frac{1}{2n-1} (2n\alpha^2 \eta(U)\eta(W) + S(U, W))] + \alpha^2 \eta(W) [L(\eta(U)g(X, V) - \eta(V)g(X, U)) \\
& + \frac{1}{2n-1} (\eta(V)S(X, U) - \eta(U)S(V, X))] = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

elde edilir. $\{E_i, i = 1, 2, \dots, 2n+1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (2.7) eşitliği yardımıyla,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(C(E_i, Y)Z, E_i) = 0 \tag{4.31}$$

yazılır. (4.30) eşitliğinde $X = U = E_i$ alınarak kontraksiyon yapılır ve (4.31) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$S(V, W) = (2n-1)Lg(V, W) - \left(\frac{r}{2n} + \alpha^2(2n+1)\right)\eta(V)\eta(W), \tag{4.32}$$

bulunur. O halde, (4.30) ve (4.32) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa,

$$\begin{aligned}
g(C(U, V)W, X) &= \left(\frac{\frac{r}{2n} + \alpha^2(2n+1) - 2n\alpha^2}{2n-1} - L\right) g(X, U)\eta(V)\eta(W) \\
&+ \left(L - \frac{\frac{r}{2n} + \alpha^2(2n+1) - 2n\alpha^2}{2n-1}\right) g(X, V)\eta(U)\eta(W).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

denkleminde indirgenir. Son olarak, (4.33) eşitliğinde $X = U = E_i$ alınarak kontraksiyon yapılırsa,

$$\left(\frac{\frac{r}{2n} + \alpha^2(2n+1) - 2n\alpha^2}{2n-1} - L\right) 2n\eta(V)\eta(W) = 0 \tag{4.34}$$

elde edilir. Bu son denklemin birinci çarpanı her zaman sağlanır. Yani, C özdeş olarak sıfırdır. Böylece ispat tamamlanır. O halde, aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3 Bir $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve $n > 1$ olsun. Eğer M konformal yarı-simetrik ise o zaman M konformal flattir (Jun vd. 2005).

Teorem 4.9 Bir $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve $n > 1$ olsun. Eğer M konformal flat ise o zaman M manifoldu -1 negatif sabit eğrilige sahiptir (Kenmotsu 1972).

Teorem 4.10 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu projektif flat α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. O zaman M bir Einstein manifoldudur (Öztürk 2017).

İspat Kabul edelim ki $P = 0$ olsun. (2.10) eşitliği yardımıyla,

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{2n} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (4.35)$$

dır. (4.35) eşitliği kullanılarak, $W = \xi$ için,

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{1}{2n} [S(Y, Z)g(X, W) - S(X, Z)g(Y, W)]$$

ve

$$\eta(R(X, Y)Z) = \frac{1}{2n} [S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y)] \quad (4.36)$$

yazılır. Burada $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ dır. $X = \xi$ seçilerek, (3.18) ve (3.19) eşitliklerinin (4.36) eşitliğinde yerine yazılmasıyla,

$$S(Y, Z) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(Y, Z) \quad (4.37)$$

elde edilir. Burada $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$S(Y, Z) = -2n\alpha^2g(Y, Z) \quad (4.38)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.11 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 0$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M projektif yarı-simetrik ise o zaman M projektif flattir (Öztürk 2017).

İspat (2.10) eşitliğinde (3.17) eşitliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \eta(P(X, Y)Z) &= -(\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(X)g(Y, Z) + (\alpha^2 + \xi(\alpha))\eta(Y)g(X, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2n} [\eta(X)S(Y, Z) - \eta(Y)S(X, Z)] \end{aligned} \quad (4.39)$$

dir. (4.39) eşitliğinde Z yerine ξ alırsak,

$$\eta(P(X, Y)\xi) = 0 \quad (4.40)$$

bulunur. Tekrardan X yerine ξ alırsak,

$$\eta(P(\xi, Y)Z) = -(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(Y, Z) - \frac{1}{2n}S(Y, Z) \quad (4.41)$$

elde edilir. Şimdi, $R.P$ tensör çarpımının tanımını göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} (R(X, Y).P)(U, V)Z &= R(X, Y)P(U, V)Z - P(R(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - P(U, R(X, Y)V)Z - P(U, V)R(X, Y)Z \end{aligned} \quad (4.42)$$

dır. Hipotezden dolayı $R.P = 0$ olduğundan (4.42) eşitliği

$$\begin{aligned} R(X, Y)P(U, V)Z - P(R(X, Y)U, V)Z \\ - P(U, R(X, Y)V)Z - P(U, V)R(X, Y)Z &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

indirgenir. $X = \xi$ için, (4.43) eşitliğinin her iki tarafı ξ karakteristik vektör alanına göre iç çarpılırsa, $P(U, V, Z, Y) = g(P(U, V)Z, Y)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} -P(U, V, Z, Y) + \eta(Y)\eta(P(U, V)Z) - \eta(U)\eta(P(Y, V)Z) \\ + g(Y, U)\eta(P(\xi, V)Z) - \eta(V)\eta(P(U, Y)Z) \\ + g(Y, V)\eta(P(U, \xi)Z) - \eta(Z)\eta(P(U, V)Y) &= 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

haline döndürür. (4.44) eşitliğinde U yerine Y alınırsa,

$$\begin{aligned} -P(U, V, Z, U) + g(U, U)\eta(P(\xi, V)Z) - \eta(V)\eta(P(U, U)Z) \\ + g(U, V)\eta(P(U, \xi)Z) - \eta(Z)\eta(P(U, V)U) &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

yazılır. $\{E_i, i = 1, 2, \dots, 2n+1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (4.45) eşitliğine $U = E_i$ için, kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} \eta(P(\xi, V)Z) &= -\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right)S(V, Z) - \left(\frac{\alpha^2 + \xi(\alpha)}{2n+1}\right)g(V, Z) \\ &\quad + \left(\alpha^2 + \xi(\alpha) + \frac{r}{2n(2n+1)}\right)\eta(V)\eta(Z) \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.41) ve (4.46) eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned} S(V, Z) &= -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(V, Z) \\ &\quad - \left((2n+1)(\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \frac{r}{2n}\right)\eta(V)\eta(Z) \end{aligned} \quad (4.47)$$

dir. (4.47) eşitliğinde $Z = \xi$ alınırsa ve (3.21) eşitliği kullanılırsa,

$$r = -2n(2n+1)(\alpha^2 + \xi(\alpha)) \quad (4.48)$$

bulunur. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, (4.39), (4.46), (4.47) ve (4.48) eşitlikleri (4.44) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P(U, V)Z = 0$$

denkleminde ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.4 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 0$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M projektif yarı-simetrik ise o zaman M manifoldu skalar eğriliği

$$r = -2n\alpha^2(2n + 1)$$

ile verilen bir η -Einstein manifoldudur.

Teorem 4.12 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu konsirküler flat α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu durumda, M nin skalar eğriliği $r = -2n\alpha^2(2n + 1)$ dir.

İspat Farz edelim ki $\bar{C} = 0$ (konsirküler flat) olsun. (2.9) eşitliği yardımıyla,

$$R(X, Y)Z = \frac{r}{2n(2n + 1)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (4.49)$$

yazılır. Bundan başka, $W = \xi$ için, (4.49) eşitliğinden

$$R(X, Y, Z, W) = \frac{r}{2n(2n+1)} [g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)]$$

olmak üzere,

$$\left(\frac{r}{2n(2n+1)} + (\alpha^2 + \xi(\alpha)) \right) [\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)] = 0$$

bulunur. $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\left(\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 \right) [\eta(X)g(Y, Z) - \eta(Y)g(X, Z)] = 0 \quad (4.50)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{r}{2n(2n+1)} + \alpha^2 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.13 Bir $(2n+1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 0$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M konsirküler yarı-simetrik ise o zaman M konsirküler flattir (Öztürk 2017).

İspat (3.17) eşitliği (2.9) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\eta(\bar{C}(X, Y)Z) = \left((\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \frac{r}{2n(2n+1)} \right) (\eta(Y)g(X, Z) - \eta(X)g(Y, Z)) \quad (4.51)$$

bulunur. (4.51) eşitliğinde Z yerine ξ alırsak,

$$\eta(\bar{C}(X, Y)\xi) = 0 \quad (4.52)$$

elde edilir. Ayrıca, tekrardan (4.51) eşitliğinde X yerine ξ aldığımızda,

$$\eta(\bar{C}(\xi, Y)Z) = \left((\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \frac{r}{2n(2n+1)} \right) (\eta(Y)\eta(Z) - g(Y, Z)) \quad (4.53)$$

yazılır. Şimdi, $R.\bar{C}$ tensör çarpımının tanımından

$$\begin{aligned} (R(X, Y)\bar{C})(U, V)Z &= R(X, Y)\bar{C}(U, V)Z - \bar{C}(R(X, Y)U, V)Z \\ &\quad - \bar{C}(U, R(X, Y)V)Z - \bar{C}(U, V)R(X, Y)Z \end{aligned} \quad (4.54)$$

yazabiliriz. Hipotez gereğince, $R.\bar{C} = 0$ olsun. O halde, (4.54) eşitliği

$$\begin{aligned} R(X, Y)\bar{C}(U, V)Z - \bar{C}(R(X, Y)U, V)Z \\ - \bar{C}(U, R(X, Y)V)Z - \bar{C}(U, V)R(X, Y)Z &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

haline indirgenir. Bu son eşitlikte $X = \xi$ için, eşitliğin her iki tarafını ξ ye göre iç çarparsak,

$$\begin{aligned} &-\bar{C}(U, V, Z, Y) + \eta(Y)\eta(\bar{C}(U, V)Z) - \eta(U)\eta(\bar{C}(Y, V)Z) \\ &+ g(Y, U)\eta(\bar{C}(\xi, V)Z) - \eta(V)\eta(\bar{C}(U, Y)Z) \\ &+ g(Y, V)\eta(\bar{C}(U, \xi)Z) - \eta(Z)\eta(\bar{C}(U, V)Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. Burada $\bar{C}(U, V, Z, Y) = g(\bar{C}(U, V)Z, Y)$ dir. Ayrıca, (4.56) eşitliğinde U yerine Y alınırsa,

$$\begin{aligned} &-\bar{C}(U, V, Z, U) + g(U, U)\eta(\bar{C}(\xi, V)Z) - \eta(V)\eta(\bar{C}(U, U)Z) \\ &+ g(U, V)\eta(\bar{C}(U, \xi)Z) - \eta(Z)\eta(\bar{C}(U, V)U) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

dır. $\{E_i, i = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (4.57) eşitliğine $U = E_i$ için, kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} \eta(P(\xi, V)Z) &= \frac{1}{(2n+1)}S(V, Z) - \left(\frac{2(\alpha^2 + \xi(\alpha))^{n+r}}{2n(2n+1)} \right) g(V, Z) \\ &+ \left((\alpha^2 + \xi(\alpha)) + \frac{r}{2n(2n+1)} \right) \eta(V)\eta(Z) \end{aligned} \quad (4.58)$$

denkleminde ulaşılır. (4.53) ve (4.58) eşitliklerini takiben,

$$S(V, Z) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha))g(V, Z) \quad (4.59)$$

yazılır. O halde, $\xi(\alpha) = 0$ için, (4.59) eşitliği

$$S(V, Z) = -2n\alpha^2 g(V, Z) \quad (4.60)$$

formunu alır. Son olarak, (4.51)-(4.53) ve (4.60) eşitlikleri (4.56) eşitliğinde göz önüne alınırsa,

$$\bar{C}(U, V)Z = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır ve aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.5 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 0$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M konsirküler yarı-simetrik ise o zaman M manifoldu skalar eğriliği

$$r = -2n\alpha^2(2n + 1)$$

ile verilen bir Einstein manifoldudur.

Tanım 4.3 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ($n > 4$) olsun. Bu durumda, M üzerinde D -konformal eğrilik tensörü B ,

$$\begin{aligned} B(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \frac{1}{n-3}[S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY - g(Y, Z)QX \\ &- S(X, Z)\eta(Y)\xi + S(Y, Z)\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(Z)QY + \eta(Y)\eta(Z)QX] \\ &- \frac{(k-2)}{(n-3)}[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \\ &+ \frac{k}{(n-3)}[g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] \end{aligned} \quad (4.61)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k = \frac{r+2(n-1)}{n-2}$ dir (Chuman 1983).

Tanım 4.4 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ($n > 4$) olsun. Bu takdirde, M üzerinde D -konformal eğrilik tensörü B nin rotasyonu (curl)

$$\begin{aligned} Rot B &= (\nabla_W B)(X, Y, Z) + (\nabla_X B)(W, Y, Z) \\ &+ (\nabla_Y B)(W, Y, Z) - (\nabla_Z B)(X, Y, W) \end{aligned} \quad (4.62)$$

şeklinde tanımlıdır (Bagewadi vd. 2005).

Yardımcı Teorem 4.1 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) ($n > 4$) olsun. Bu takdirde, M üzerinde D -konformal eğrilik tensörü B ,

$$\begin{aligned} \nabla_Z (B(X, Y)\xi) &= B(\nabla_Z X, Y)\xi + B(X, \nabla_Z Y)\xi \\ &+ B(X, Y)\nabla_Z \xi \end{aligned} \quad (4.63)$$

eşitliğini sağlar (Bagewadi vd. 2005).

İspat $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, ikinci Bianchi özdeşliğinden,

$$(\nabla_W B)(X, Y)Z + (\nabla_X B)(Y, W)Z + (\nabla_Y B)(W, X)Z = 0 \quad (4.64)$$

yazılır. Buradan (4.62) eşitliği

$$Rot B = \text{curl } B = -(\nabla_Z B)(X, Y)W \quad (4.65)$$

dır. Eğer M üzerinde D -konformal eğrilik tensörü B rotasyonel değilse o zaman $\text{curl } B = 0$ ve

$$(\nabla_Z B)(X, Y)W = 0$$

eşitliklerini takiben

$$\nabla_Z (B(X, Y)W) = B(\nabla_Z X, Y)W + B(X, \nabla_Z Y)W + B(X, Y)\nabla_Z W \quad (4.66)$$

sağlanır. (4.66) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa (4.63) eşitliği elde edilir.

Önerme 4.1 Bir n -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 4$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M nin D -konformal eğrilik tensörü B , $\gamma = -2 \left(\frac{\alpha^2 - 1}{n - 3} \right)$ olmak üzere,

$$B(X, Y)\xi = \gamma [\eta(X)Y - \eta(Y)X] \quad (4.67)$$

koşulunu sağlar.

İspat (4.61) eşitliğinde $\xi(\alpha) = 0$ için, (3.17) ve (3.21) eşitlikleri kullanılırsa, (4.67) eşitliği kolayca elde edilir.

Önerme 4.2 Bir n -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 4$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M nin D -konformal eğrilik tensörü B rotasyonel değilse, o zaman D -konformal eğrilik tensörü B ,

$$B(X, Y)Z = \gamma[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \quad (4.68)$$

eşitliği ile gösterilir.

İspat (4.63) eşitliğinde (4.67) ve (3.17) eşitlikleri hesaba katılırsa, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\begin{aligned} \nabla_Z (\gamma[\eta(X)Y - \eta(Y)X]) &= \gamma[\eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X] \\ &+ \gamma[\eta(\nabla_Z X)Y - \eta(Y)\nabla_Z X] + \alpha[B(X, Y)(Z - \eta(Z)\xi)] \end{aligned} \quad (4.69)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik sadeleştirilirse (4.68) eşitliği bulunur.

Teorem 4.14 Bir n -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ($n > 4$) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M nin D -konformal eğrilik tensörü B rotasyonel değilse, M nin skalar eğriliği,

$$r = -\alpha^2(n-1)^2 + 1 - n^2 \quad (4.70)$$

dir.

İspat (4.61) ve (4.68) eşitliklerini takiben

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \gamma[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] - \frac{1}{n-3}[S(X, Z)Y - S(Y, Z)X + g(X, Z)QY \\ &- g(Y, Z)QX - S(X, Z)\eta(Y)\xi + S(Y, Z)\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(Z)QY + \eta(Y)\eta(Z)QX] \\ &+ \frac{k-2}{n-3}[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \\ &- \frac{k}{n-3}[g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(Z)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] \end{aligned} \quad (4.71)$$

elde edilir. $\{E_i, i = 1, 2, \dots, 2n+1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir ortonormal tabanı olmak üzere, (4.71) eşitliğinin her iki tarafı W vektör alanı ile iç

çarpılır ve $W = X = E_i$ için, kontraksiyon yapılırsa,

$$\left[\gamma(1-n) + \frac{r}{n-3} + \frac{(k-2)(1-n)}{n-3} + \frac{k}{n-3} \right] g(Y, Z) - \left[\frac{2\alpha^2(n-1)+r+k(2-n)}{n-3} \right] \eta(Y)\eta(Z) = 0 \quad (4.72)$$

bulunur. Son olarak, $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, (4.72) eşitliğinin her iki tarafına $Y = Z = E_i$ için, kontraksiyon yapılırsa,

$$r = 2\alpha^2 + \gamma n(n-3) + (k-2)n + k \left(\frac{n}{1-n} \right) - k \left(\frac{2-n}{1-n} \right) \quad (4.73)$$

dır. Burada (4.73) eşitliği sadeleştirilirse (4.70) eşitliğinin ispatı görülür.

Tanım 4.5 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. M üzerinde Riemann eğrilik tensörü R , $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W = \psi(X)R(Y, Z)W + \beta(X) [g(Z, W)Y - g(Y, W)Z] \quad (4.74)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye genelleştirilmiş rekürent manifold adı verilir. Burada ψ ve β 1-formları

$$\psi(X) = g(X, A), \quad \beta(X) = g(X, B) \quad (4.75)$$

ile tanımlı olup, $\beta \neq 0$, A ve B , sırasıyla, ψ ve β ile bağlantılı vektör alanlarıdır (De ve Guha 1991).

Tanım 4.6 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. M üzerinde Ricci eğrilik tensörü S , $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X S)(Y, Z) = \psi(X)S(Y, Z) + (n-1)\beta(X)g(Y, Z) \quad (4.76)$$

şartını sağlıyorsa, M ye genelleştirilmiş Ricci rekürent manifold adı verilir. Burada ψ ve β , (4.75) eşitliğinde verilen 1-formlardır (De ve Guha 1991).

Tanım 4.7 Bir n -boyutlu Riemann manifoldu (M, g) olsun. M üzerinde konsirküler eğrilik tensörü $\overline{C}$, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X \overline{C})(Y, Z)W = \psi(X)\overline{C}(Y, Z)W + \beta(X) [g(Z, W)Y - g(Y, W)Z] \quad (4.77)$$

şartını sağlıyorsa, M ye genelleştirilmiş konsirküler rekürent manifold adı verilir. Burada ψ ve β (4.75) eşitliğinde verilen 1-formlardır (Maralabhavi ve Rathnamna 1999).

Teorem 4.15 Bir n -boyutlu genelleştirilmiş rekürent α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M üzerinde her yerde

$$\alpha^2\psi - \beta = 0 \quad (4.78)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat M nin bir genelleştirilmiş rekürent α -Kenmotsu manifoldu olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, (4.74) eşitliği sağlanır. (4.74) eşitliğinde $Y = W = \xi$ alınırsa,

$$(\nabla_X R)(\xi, Z)\xi = \psi(X)R(\xi, Z)\xi + \beta(X)[g(Z, \xi)\xi - g(\xi, \xi)Z] \quad (4.79)$$

yazılır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} (\nabla_X R)(\xi, Z)\xi &= \nabla_X R(\xi, Z)\xi - R(\nabla_X \xi, Z)\xi \\ &\quad - R(\xi, \nabla_X Z)\xi - R(\xi, Z)\nabla_X \xi \end{aligned} \quad (4.80)$$

dır. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, (3.17)-(3.19) eşitlikleri yardımıyla (4.80) eşitliği

$$(\nabla_X R)(\xi, Z)\xi = 0$$

haline indirgenir. Ayrıca, (4.79) eşitliğinin sol tarafı, (2.15) ve (3.5) eşitlikleri kullanılırsa,

$$(\eta(Z)\xi - Z)(\alpha^2\psi(X) - \beta(X)) = 0 \quad (4.81)$$

elde edilir. (3.1) eşitliğinden dolayı (4.81) eşitliğinin çarpanlarından $\eta(Z)\xi - Z$ değeri asla özdeş olarak sıfır olamaz. Dolayısıyla (4.81) eşitliği gereğince, ikinci çarpan her X vektör alanı için, özdeş olarak sıfırdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.16 Bir n -boyutlu genelleştirilmiş Ricci rekürent α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. O zaman (4.78) eşitliği sağlanır.

İspat M nin bir genelleştirilmiş Ricci rekürent α -Kenmotsu manifoldu olduğunu farz edelim. O halde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için, (4.76) eşitliği sağlanır. (4.76) eşitliğinde $Y = Z = \xi$ seçilirse,

$$(\nabla_X S)(\xi, \xi) = -\alpha^2(n-1)\psi(X) + (n-1)\beta(X) \quad (4.82)$$

bulunur. Bundan başka,

$$(\nabla_X S)(\xi, \xi) = 0 \quad (4.83)$$

olduğu açıktır. $\xi(\alpha) = 0$ olmak üzere, (4.82) ve (4.83) eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$-\alpha^2(n-1)\psi(X) + (n-1)\beta(X) = 0 \quad (4.84)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin düzenlenmesiyle,

$$(n-1) [-\alpha^2\psi(X) + \beta(X)] = 0 \quad (4.85)$$

şekline döndürür. Böylece ispata ulaşılır.

Teorem 4.17 Bir n -boyutlu genelleştirilmiş rekürent α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde, M nin skalar eğriliği r ,

$$r = -(n-1) \left[2\alpha^2 + n \frac{\eta(B)}{\eta(A)} \right] \quad (4.86)$$

dir.

İspat M bir genelleştirilmiş rekürent α -Kenmotsu manifold olsun. O halde, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, ikinci Bianchi özdeşliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \psi(X)R(Y, Z)W + \beta(X)[g(Z, W)Y - g(Y, W)Z] \\ & + \psi(Y)R(Z, X)W + \beta(Y)[g(X, W)Z - g(Z, W)X] \\ & + \psi(Z)R(X, Y)W + \beta(Z)[g(Y, W)X - g(X, W)Y] = 0 \end{aligned} \quad (4.87)$$

elde edilir. (4.87) eşitliğinin Y vektör alanına göre kontraksiyonu yapılırsa,

$$\begin{aligned} & \psi(X)S(Z, W) + n\beta(X)g(Z, W) + R(Z, X, W, A) \\ & \beta(Z)g(X, W) - \beta(X)g(Z, W) - \psi(Z)S(X, W) - n\beta(Z)g(X, W) = 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

bulunur. Tekrardan (4.88) eşitliğinin W ve Z vektör alanına göre kontraksiyonu yapıldığında,

$$r\psi(X) + n(n-1)\beta(X) - 2S(X, A) = 0 \quad (4.89)$$

denklemine indirgenir. (4.89) eşitliğinde X yerine ξ seçilir, hipotez gereğince $\xi(\alpha) = 0$ için, (3.21) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$r\eta(A) = (1-n) [2\alpha^2\eta(A) + n\eta(B)] \quad (4.90)$$

dir. Böylece (4.90) eşitliğinden (4.86) eşitliğinin ispatına ulaşılır.

Teorem 4.18 Bir n -boyutlu genelleştirilmiş konsirküler rekürent α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu takdirde,

$$X(r) = n(n-1) [\alpha^2 \psi(X) - \beta(X)] + r\psi(X) \quad (4.91)$$

dir. Burada $X(r)$, X vektör alanına göre r nin türevidir.

İspat M bir genelleştirilmiş konsirküler rekürent α -Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için, (4.77) eşitliği sağlanır. (4.77) eşitliğinde $Y = W = \xi$ için,

$$(\nabla_X \bar{C})(\xi, Z)\xi = \psi(X)\bar{C}(\xi, Z)\xi + \beta(X)[g(Z, \xi)\xi - g(\xi, \xi)Z] \quad (4.92)$$

yazılır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \bar{C})(\xi, Z)\xi &= \nabla_X \bar{C}(\xi, Z)\xi - \bar{C}(\nabla_X \xi, Z)\xi \\ &\quad - \bar{C}(\xi, \nabla_X Z)\xi - \bar{C}(\xi, Z)\nabla_X \xi \end{aligned} \quad (4.93)$$

dır. (2.9) ve (3.19) eşitlikleri (4.93) eşitliğinde kullanılırsa, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\begin{aligned} (\nabla_X \bar{C})(\xi, Z)\xi &= \nabla_X \left[\left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) (Z - \eta(Z)\xi) \right] \\ &\quad - \left[\alpha \left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) \right] (\eta(X)\eta(Z)\xi - \eta(Z)X) \\ &\quad - \left[\left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) \right] (\nabla_X Z - \eta(\nabla_X Z)\xi) \\ &\quad - \left[\alpha \left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) \right] (\eta(Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\xi) \end{aligned} \quad (4.94)$$

yazılabilir. (4.94) eşitliğinin sadeleştirilmesiyle,

$$(\nabla_X \bar{C})(\xi, Z)\xi = \frac{1}{n(n-1)} X(r) (Z - \eta(Z)\xi). \quad (4.95)$$

formuna döndürür. Ayrıca, (4.92) eşitliği ile (4.95) eşitliği hesaba katılırsa,

$$\begin{aligned} \psi(X)\bar{C}(\xi, Z)\xi + \beta(X) (\eta(Z)\xi - Z) &= \\ (Z - \eta(Z)\xi) \left[\left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) \psi(X) - \beta(X) \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

bulunur. Böylece (4.95) ve (4.96) eşitliklerini takiben, $(Z - \eta(Z)\xi) \neq 0$ olmak üzere,

$$\left(\alpha^2 + \frac{r}{n(n-1)} \right) \psi(X) - \beta(X) - \frac{X(r)}{n(n-1)} = 0 \quad (4.97)$$

denkleminde ulaşılır. Bundan dolayı (4.97) eşitliğinin düzenlenmesiyle (4.91) eşitliğinin doğruluğu görülür.

Hatırlatma 4.2 Bir n -boyutlu genelleştirilmiş rekurent α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde elde edilen sonuçlar $\alpha = 1$ durumu için Özgür (2007) tarafından verilmiştir.

Tanım 4.8 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M üzerinde $\forall X, Y, Z, W \in \text{Ker}\eta$ için,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X, Y)Z) = 0 \quad (4.98)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye lokal ϕ -simetrik manifold adı verilir (De vd. 2009).

Tanım 4.9 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) olsun. M üzerinde $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X, Y)Z) = 0 \quad (4.99)$$

şartı sağlanıyorsa, M ye global ϕ -simetrik manifold adı verilir (De vd. 2009).

Teorem 4.19 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M global ϕ -simetrik ise o zaman M bir Einstein manifoldudur.

İspat M nin bir global ϕ -simetrik α -Kenmotsu manifoldu olduğunu kabul edelim. O halde, (4.99) eşitliğinden

$$(\nabla_W R)(X, Y)Z - \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\xi = 0 \quad (4.100)$$

ve

$$g((\nabla_W R)(X, Y)Z, V) - \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\eta(V) = 0 \quad (4.101)$$

dır. $\{E_i, i = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$ cümlesi M nin her noktasındaki tanjant uzayının bir orthonormal tabanı olmak üzere, (4.57) eşitliğine $X = V = E_i$ için, kontraksiyon yapılırsa,

$$(\nabla_W R)(Y, Z) - \sum_{i=1}^{2n+1} \eta((\nabla_W R)(E_i, Y)Z)\eta(E_i) = 0 \quad (4.102)$$

bulunur. Burada (4.102) eşitliğinin ikinci kısmı $Z = \xi$ için,

$$\eta((\nabla_W R)(E_i, Y)Z)\eta(E_i) = g((\nabla_W R)(E_i, Y)\xi, \xi)\eta(E_i)$$

olup, $\forall p \in M$ noktasında

$$\begin{aligned} g((\nabla_W R)(E_i, Y)\xi, \xi) &= g(\nabla_W R(E_i, Y)\xi, \xi) - g(R(\nabla_W E_i, Y)\xi, \xi) \\ &\quad - g(R(E_i, \nabla_W Y)\xi, \xi) - g(R(E_i, Y)\nabla_W \xi, \xi) \end{aligned} \quad (4.103)$$

yazılır. Buradan Riemann eğrilik tensörü özellikleri kullanılırsa,

$$g(R(E_i, \nabla_W Y)\xi, \xi) = 0 \quad (4.104)$$

$$g((\nabla_W R)(E_i, Y)\xi, \xi) = g(\nabla_W R(E_i, Y)\xi, \xi) - g(R(E_i, Y)\nabla_W \xi, \xi) \quad (4.105)$$

$$g(\nabla_W R(E_i, Y)\xi, \xi) + g(R(E_i, Y)\xi, \nabla_W \xi) = 0 \quad (4.106)$$

$$g((\nabla_W R)(E_i, Y)\xi, \xi) = -g(R(E_i, Y)\xi, \nabla_W \xi) - g(R(E_i, Y)\nabla_W \xi, \xi) \quad (4.107)$$

$$g((\nabla_W R)(E_i, Y)\xi, \xi) = 0 \quad (4.108)$$

(4.102) eşitliği

$$(\nabla_W S)(Y, Z) = 0 \quad (4.109)$$

formunu alır. (4.109) eşitliğinde $Z = \xi$ için,

$$(\nabla_W S)(Y, \xi) = 0 \quad (4.110)$$

dır. Ayrıca,

$$(\nabla_W S)(Y, \xi) = \nabla_W S(Y, \xi) - S(\nabla_W Y, \xi) - S(\nabla_W \xi, Y)$$

olduğundan $\xi(\alpha) = 0$ için, (3.8) ve (3.21) eşitlikleri (4.110) eşitliğinde kullanılırsa,

$$S(Y, W) = -(\nabla_W S)(Y, \xi) - 2n\alpha^2 g(Y, W) \quad (4.111)$$

elde edilir. (4.110) ve (4.111) eşitliklerinden

$$S(Y, W) = -2n\alpha^2 g(Y, W) \quad (4.112)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.20 Bir 3-boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Bu durumda, M nin lokal ϕ -simetrik olması için gerek ve yeter koşul M nin skalar eğriliği r nin sabit olmasıdır.

İspat De ve Pathak (2004) çalışmasında kullanılan metodoloji ile 3-boyutlu Kenmotsu manifold için kullanılan

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \frac{r+4}{2} (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ &- \frac{r+6}{2} (\eta(X)g(Y, Z)\xi - \eta(Y)g(X, Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y) \end{aligned} \quad (4.113)$$

eşitlik yardımıyla sonuca ulaşılabilir. Ayrıca, 3-boyutta konformal tensör alanı özdeş olarak sıfır olduğundan, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= -S(X, Z)Y + S(Y, Z)X - g(X, Z)QY \\ &+ g(Y, Z)QX + \frac{r}{2}[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \end{aligned} \quad (4.114)$$

eşitliği de geçerli olacaktır. O halde, (4.114) eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafının W vektör alanına göre kovaryant türevi alınır ve daha sonra bu son eşitliğin her iki tarafına ϕ^2 tensörü uygulanırsa, $\forall X, Y, Z \in \text{Ker}\eta$ için,

$$dr(W)[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] = 0 \quad (4.115)$$

elde edilir. Yani, (4.115) eşitliğinden

$$dr(W) = 0 \quad (4.116)$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Hatırlatma 4.3 Teorem 4.19 ve Teorem 4.20 de elde edilen sonuçların $\alpha = 1$ durumları De vd. (2009) tarafından verilmiştir.

Teorem 4.21 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M global ϕ -simetrik ise, M nin sabit eğriliği $k = -\alpha^2$ dir.

İspat M nin bir global ϕ -simetrik α -Kenmotsu manifoldu olduğunu kabul edelim. Bundan başka, $\xi(\alpha) = 0$ için,

$$(\nabla_W R)(X, Y)\xi = \alpha^3[g(X, W)Y - g(Y, W)X] - \alpha R(X, Y)W \quad (4.117)$$

dır. (4.117) eşitliğinin her iki tarafına soldan iki kez ϕ tensörünü uygularsak,

$$\phi^2((\nabla_W R)(X, Y)\xi) = \alpha^3[g(X, W)\phi^2 Y - g(Y, W)\phi^2 X] - \alpha\phi^2(R(X, Y)W) \quad (4.118)$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlik yardımıyla,

$$\alpha\phi^2 (R(X, Y)W) = \alpha^3[g(X, W)\phi^2Y - g(Y, W)\phi^2X] \quad (4.119)$$

bulunur. Ayrıca, (4.119) ve (3.9) eşitlikleri birlikte hesaba katılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\alpha R(X, Y)W + \alpha^3[g(Y, W)X - g(X, W)Y] = 0 \quad (4.120)$$

formuna indirgenir. Böylece (4.120) eşitliğinden

$$R(X, Y)W = -\alpha^2[g(Y, W)X - g(X, W)Y] \quad (4.121)$$

elde edilir.

Sonuç 4.6 Bir $(2n + 1)$ -boyutlu α -Kenmotsu manifold (M, ϕ, ξ, η, g) ve α, ξ karakteristik vektör alanı boyunca paralel olsun. Eğer M lokal ϕ -simetrik ise, M nin sabit eğriliği $k = -\alpha^2$ dir.

5 KAYNAKLAR

- Arslan K, De U C, Murathan C, Yıldız A, 2009, On Generalized Recurrent Riemannian Manifolds, *Acta Math. Hungar.*, 123, 27–39.
- Başarı A, 2008, Kenmotsu Manifoldları Üzerinde Bazı Eğrilik Şartları, Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 58s, Bursa.
- Begawadi C S, Kumar E G, Venkatesha, 2005, On Irrational D -conformal Curvature Tensor, *Novi Sad J. Math.* 35, 85–92.
- Begawadi C S, Venkatesha, 2007, Some Curvature Tensors on a Trans-Sasakian Manifold, *Turk. J. Math.* 31, 111–121.
- Besse A L, 1987, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Blair D E, 1976, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York.
- Blair D E, 1977, Two Remarks on Contact Metric Structures, *Tôhoku Mathematical Journal*, 29, 319–324.
- Blair D E, 2002, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics 203, Birkhäuser, Boston.
- Boeckx E, Cho J T, 2005, η -parallel Contact Metric Spaces, *Differential Geometry and its Applications*, 22, 275–285.
- Boeckx E, Cho J T, 2006, Locally Symmetric Contact Metric Manifolds, *Monatsh Mathematics*, 148, 269–281.
- Chinea D, Gonzalez C, 1990, A Classification of Almost Contact Metric Manifolds, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 156, 15–36.
- Chuman G, 1983, On the D -conformal curvature tensor, *Tensor*, 40, 125–134.
- De U C, Guha N, 1991, On Generalized Recurrent Manifolds, *Proc. Math.*

- Soc., 7, 7–11.
- De U C, Pathak G, 2004, On 3-dimensional Kenmotsu Manifolds, Ind. J. Pure Applied Math., 35, 159–165.
- De U C, Yıldız A, Yalınz A F, 2009, On ϕ -Recurrent Kenmotsu Manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 33, 17–25.
- Dileo G, Pastore M, 2007, Almost Kenmotsu Manifolds and Local Symmetry, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, 14, 343–354.
- Dileo G, Pastore M, 2009, Almost Kenmotsu Manifolds with a Condition of η -parallelism, Differential Geometry and its Applications, 27, 671–679.
- Gallot S, Hulin D, Lafontaine J, 2004, Riemann Geometry, Springer Universitext.
- Dileo G, Pastore M, 2009, Almost Kenmotsu Manifolds and Nullity Distributions, Journal of Geometry, 93, 46–61.
- Goldberg S I, Yano K, 1969, Integrability of Almost Cosymplectic Structure, Pacific J. Math., 31, 373–382.
- Goldberg S I, 1969, Integrability of Almost Kaehler Manifolds, Proceedings of the American Math. Soc., 21, 96–100.
- Hacısalıhoğlu H H, 1993, Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu H H, 2000, Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu H H, Ekmekçi N, 2003, Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hong S, Özgür C, Tripathi M M, 2006, On Some Special Classes of Kenmotsu Manifolds, Kuwait J. Sci. Eng., 33, 19–32.

- Janssens D, Vanhecke L, 1981, Almost Contact Structures and Curvature Tensors, Kodai Mathematical Journal, 4, 1–27.
- Jun J, De U C, Pathak G, 2005, On Kenmotsu Manifolds, Journal of the Korean Mathematical Society, 42, 435–445.
- Kenmotsu K, 1972, A Class of Contact Riemannian Manifold, Tôhoku Mathematical Journal, 24, 93–103.
- Kim T W, Pak H K, 2005, Canonical Foliations of Certain Classes of Almost Contact Metric Structures, Acta Mathematica Sinica, 21, 841–846.
- Maralabhavi Y B., Rathnamna V, 1999, Generalized Recurrent and Concircular Recurrent Manifolds, Ind. J. Pure Applied Math., 30, 1167–1171.
- Naik D M, Venkatesha V, Prakasha D G, 2019, Certain Results on Kenmotsu Pseudo-Metric Manifolds, Miskolc Math. Notes, 20, 1083–1099.
- Naik D M, Venkatesha V, Kumara H A, 2020, Some Results on Almost Kenmotsu Manifolds, Note Math., 40, 87–100.
- Nomizu K, 1968, On Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Curvature Tensor, Tôhoku Mathematical Journal, 20, 46–69.
- Ogawa Y, 1977, A Condition for a Compact Kaehlerian Space to be Locally Symmetric, Natural Science Report. Ochanomizu University, 28, 21–23.
- O’neill B, 1983, Semi Riemannian Geometry, Academic Press, London.
- Olszak Z, 1981, On Almost Cosymplectic Manifolds, Kodai Mathematical Journal, 4, 239–250.
- Olszak Z, 1989, Locally Conformal Almost Cosymplectic Manifolds, College Mathematical Journal, 57, 73–87.
- Özgür C, 2007, On Generalized Reccurent Kenmotsu Manifolds, World Appl.

Sci. J., 2, 9–33.

Öztürk H, 2009, Hemen Hemen α -kosimplektik (κ, μ, ν) -Uzayları, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 134s, Afyonkarahisar.

Öztürk H, Aktan N, Murathan C, 2010, On α -Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions, Applied Sciences, 12, 115–126.

Öztürk H, Aktan N, Murathan C, Vanlı A T, 2014, Almost α -Cosymplectic f -Manifolds, The Journal of Alexandru Ioan Cuza University, 60, 211–226.

Öztürk H, 2015, On α -Kenmotsu Manifolds Satisfying Flatness Conditions, Journal of Advances in Mathematics, 11, 5598–5608.

Öztürk H, 2016, On Invariant Submanifolds of Almost α -Kenmotsu Manifolds, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 69, 247–258.

Öztürk H, 2016, Some Notes on Almost α -cosymplectic Manifolds, International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra, 25, 1–12.

Öztürk H, 2016, On Almost α -Kenmotsu Manifolds with Some Tensor Fields, AKU Journal of Science and Eng., 16, 256–264.

Öztürk H, 2017, On α -Kenmotsu Manifolds Satisfying Semi-Symmetric Conditions, Konuralp Journal of Mathematics, 5, 192–206.

Öztürk H, 2018, On Almost α -Cosymplectic Manifolds with a Condition of η -parallelism, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences 71, 597–605.

Öztürk S, Öztürk H, 2020, On Alpha Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds, AKU Journal of Science and Eng., 20, 975–982.

Öztürk S, Öztürk H, 2021, Almost α -Cosymplectic Pseudo Metric Manifolds, Hindawi Journal of Mathematics, 2021, Article ID 4106025, 1–10.

Öztürk S, Öztürk H, 2021, Certain Class of Almost α -Cosymplectic Manifolds,

- Hindawi Journal of Mathematics, 2021, Article ID 9277175, 1–9.
- Öztürk H, Öztürk S, 2021, Certain Results for α -Cosymplectic Manifolds, Fen ve Matematik Bilimleri, Teori, Güncel Araştırmalar ve Yeni Eğilimler, 63–77, İvpe Yayınları, Montenegro.
- Patterson E M, 1952, Some Theorems on Ricci Recurrent Spaces, J. London Math. Soc. 27, 287–295.
- Sharpe R W, 1997, Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.
- Sinyakov E N, 1981, On Geodesic Mappings of Some Special Riemannian Spaces (in Russian), Mat Zametki, 30, 889–894.
- Spivak M, 1965, Calculus on Manifolds, Westview Press, Massachusetts.
- Szabó Z I, 1982, Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R.R = 0$, Journal of Differential Geometry, 17, 531–582.
- Takahashi T, 1977, Sasakian ϕ -symmetric Spaces, Tôhoku Mathematical Journal, 29, 91–113.
- Tanno S, 1969, The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, Tôhoku Mathematical Journal, 21, 21–38.
- Tanno S, 1969, Isometric Immersion of Sasakian Manifolds in Spheres, Kodai Mathematical Journal, 21, 448–458.
- Vaisman I, 1980, Conformal Changes of Almost Contact Metric Manifolds, Lecture Notes in Mathematics, 792, 435–443.
- Venkatesha, Bagewadi C S, 2006, On Pseudo Projective ϕ -recurrent Kenmotsu manifolds, Sooch. J. Math. 32, 1–7.
- Yano K, Kon M, 1984, Structures on Manifolds. Series in Pure Mathematics, World Scientific Publishing Corporation, Singapore.