ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AFİN UZAYDA EĞRİLER ÜZERİNE

Davut KOÇYİĞİT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2022

TEZ ONAYI

Davut KOÇYİĞİT tarafından hazırlanan **"Afin Uzayda Eğriler Üzerine"** adlı tez çalışması 11/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK

Eş Danışman : Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Jüri Üyeleri :

Başkan : Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK
Matematik Anabilim Dalı
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Afin Uzayda Eğriler Üzerine**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (11/08/2022).

Davut KOÇYİĞİT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

AFİN UZAYDA EĞRİLER ÜZERİNE

Davut KOÇYİĞİT

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Eş Danışman: Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

Bu tez çalışmasında, $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ düzlem eğrisinin bükülme noktası olmadığında, α eğrisi için afin yay uzunluğu parametresi olarak adlandırılan benzersiz parametrenin tanımı verilmiştir. Afin yay uzunluğu parametresi kullanılarak, α eğrisinin bir afin teğet vektörü ve bir afin normal vektörü elde edilmiştir. Bu vektörlerin türevleri alınarak α eğrisinin değişmezi olan eğriliği elde edilmiştir. Afin uzaklık fonksiyonlarının bir ailesi tanımı verilmiştir. Öklid teorisine tamamen benzer sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca, düzlem eğrisi durumu ve Öklid uzay eğrisi teorisine benzer şekilde ilerleyerek $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ uzay eğrileri için afin yay uzunluğu parametresi, afin eğriliklerini ve afin çatısı verilmiştir. Afin uzaklık fonksiyonlarının ailesi de tanımlanmıştır. Daha sonra, sabit afin eğrilikli afin uzay eğrisi ile Bertrand eğrilirinin karakterizasyonları incelenmiştir.

2022, 35 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Afin geometri, Afin eğri, Afin yay parametresi, Afin eğrilik, Bertrand eğri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

ON CURVES IN AFFINE SPACE

Davut KOÇYİĞİT

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ufuk ÖZTÜRK
Co-Advisor: Assoc. Prof. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK

In this thesis, the definition of the unique parameter called the affine arc length parameter is given for the α curve when the plane curve $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ has no inflection point. Using the affine arc length parameter, an affine tangent vector and an affine normal vector of the α curve are obtained. By taking the derivatives of these vectors, the invariant curvature of the α curve is obtained. A definition of a family of affine distance functions is given. It has been shown that results completely similar to the Euclidean theory are obtained. In addition, affine arc length parameter, affine curvatures and affine framework are given for $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ space curves, proceeding similarly to plane curve case and Euclidean space curve theory. A family of affine distance functions has also been defined. Then, the characterizations of the affine space curve with constant affine curvature and Bertrand curves were investigated.

2022, 35 pages

Keywords: Affine geometry, Affine curve, Affine arc-lenght parameter, Affine curvature, Bertrand curve

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK (Çankırı Karatekin Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Doç. Dr. Esra Betül KOÇ ÖZTÜRK (Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve çalışmalarım sırasında sonsuz desteğini esirgemeyen değerli aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Davut KOÇYİĞİT
Çankırı, Ağustos 2022

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Öklid diferansiyel geometrisi, katı hareketler grubuna göre diferansiyel değişmezlerin incelenmesidir. Afin diferansiyel geometrisi, afin dönüşümleri grubuna göre diferansiyel değişmezlerin, yani ötelemelerle birlikte tekil (singüler) olmayan doğrusal dönüşümlerin incelenmesidir.

Equi-afin veya tek modüllü dönüşümler grubu olarak da bilinen afin özel lineer dönüşümler grubu, ötelemelerle birlikte hacmi koruyan doğrusal dönüşümlerden oluşur.

Bu grup $ASL(n,\mathbb{R})$ ile gösterilir ve bir topolojik uzay olarak kartezyen çarpımının yapısına sahiptir, yani; $ASL(n,\mathbb{R}) := SL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ dir. Ancak bir Lie grubu olarak yarı direkt çarpım yapısına sahiptir.

1841'de A. Transon, afin diferensiyel geometri kavramını öne süren ilk kişidir. Fakat, 1872'de Alman matematikçi F. Klein, Öklid olmayan geometrileri, dönüşümler grubu altında invaryant kalan özellikleri incelediği "Erlanger programı" isimli araştırma planında afin geometri adını ilk kez kullanmıştır. Blaskche ve Reidemester (1923) ile Nomizu ve Sasaki (1991; 1994) bu alanda çok önemli çalışmalar yapmışlardır. Hu (2012) homojen uzaylar ve uzay eğrilerinin afin geometrisi konusunda doktora tezi hazırlamıştır. Davis (2018), Cansu (2015), Balkış (2018) afin diferensiyel geometride eğriler teorisi konusunda bir yüksek lisans tezi hazırlamışlardır.

Bu tezde afin uzayda düzlemsel ve uzay afin eğrilerin diferensiyel geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, sabit afin eğrilikli afin uzay eğrileri ile Bertrand eğrilerin tanımı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

2. AFİN DÜZLEM EĞRİLERİ

Bu bölümde $2-$ boyutlu afin uzayda düzlem eğrilerinin temel özelliklerini inceleyeceğiz. Bu bölümün hazırlanmasında D. Davis'in "Affine differential geometry and singularity theory" isimli tezinden geniş ölçüde yararlanılmıştır (Davis 2018).

$\mathbb{R}^2$ düzleminde, düzlemin öteleme grubu ile birleştirilmiş özel lineer grup

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \text{ ve } a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\},$$

olmak üzere

$$ASL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2,$$

yarı direkt çarpımına **afin özel lineer grup** denir ve **equi-afin** veya **tek modüllü** (unimodular) olarak da adlandırılır. Equi-afin dönüşümler alanı koruduğu için, afin değişmez olacağından, alanı kullanarak düzlem eğrilerinin parametrizasyonlarını elde edebiliriz.

Tanım 2.1 $I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha: I &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\longrightarrow \alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s)\big) \end{aligned}$$

diferensiyellenebilir bir düzlem eğrisi olsun. O halde $\forall s \in I$ için

$$\det\big(\alpha'(s), \alpha''(s)\big) := [\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$$

ise s ye **afin yay uzunluğu parametresi** denir.

Burada, $\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}\right)$ ve $\alpha''(s) = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(\frac{d^2\alpha_1}{ds^2}, \frac{d^2\alpha_2}{ds^2}\right)$ olup

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = \begin{vmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{ds} & \dfrac{d^2\alpha_1}{ds^2} \\ \dfrac{d\alpha_2}{ds} & \dfrac{d^2\alpha_2}{ds^2} \end{vmatrix}$$

dir.

Tanım 2.2 $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ eğrisi, keyfi bir parametre ile parametrelenmiş diferensiyellenebilir bir düzlem eğrisi olmak üzere;

(i) $t_0 \in I$ için $[\dot{\alpha}(t_0), \ddot{\alpha}(t_0)] = 0$ ise $\alpha(t_0)$ noktasına, **bükülme** veya **dönüm noktası**,

(ii) $\forall t \in I$ için $[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)] \neq 0$ ise α eğsinin **bükülme noktası yoktur**

denir. Burada, $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}$ ve $\ddot{\alpha}(t) = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ dir.

Tanım 2.3 $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ eğrisi, bükülme noktası olmayan keyfi bir t parametresi ile parametrelenmiş diferensiyellenebilir bir düzlem eğrisi olsun. O halde, α eğrisinin **afin yay uzunluğu parametresi**,

$$s(t) = \int [\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]^{\frac{1}{3}} dt \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.1 $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ eğrisi, keyfi bir parametre ile parametrelenmiş diferensiyellenebilir bir düzlem eğrisi olsun. O halde, $\forall s \in I$ için afin yay uzunluğu parametresi,

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$$

dir.

İspat

$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$ ve $\alpha''(s) = \frac{d^2\alpha}{ds^2}$ olduğundan zincir kuralını kullanarak

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt} \tag{2}$$

ve

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} \tag{3}$$

elde ederiz. (2) ve (3) denklemlerinden

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = \left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right] \tag{4}$$

olup determinantın temel özelliklerinden

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = \left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt}\right] + \left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \underbrace{\left[\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}\right]}_{0} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left[\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 \left[\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^3 [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] \tag{5}$$

elde edilir. Burada, (1) eşitliğinden $s(t) = \int\ [\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]^{\frac{1}{3}} dt$, yani; $ds = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]^{\frac{1}{3}} dt$ olduğundan

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$$

yazılabilir. ■

Uyarı 2.1 2 −boyutlu Öklid uzayında bir α düzlem eğrisinin eğriliği: $\forall s \in I$ için

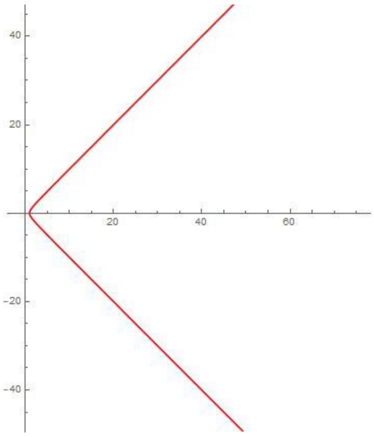
$$\kappa(s) = \frac{[\alpha'(s), \alpha''(s)]}{\|\alpha'(s)\|^3} \tag{6}$$

dir. α eğrisinin parametresi afin yay uzunluğu parametresi olduğunda

$$[\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$$

dir. Dolayısıyla $\kappa(s) = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|^3} > 0$ olup eğrilik her zaman pozitiftir.

Örnek 2.1 $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \big(acosh(t), bsinh(t)\big)$ ile verilen bir hiperbolü ele alalım (bak Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Hiperbol $(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \mathbf{1})$

Burada,

$$\dot{\alpha}(t) = (asinh(t), bcosh(t)),$$

$$\ddot{\alpha}(t) = (acosh(t), bsinh(t)),$$

olacağından

$$[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = \begin{bmatrix} a\sinh(t) & a\cosh(t) \\ b\cosh(t) & b\sinh(t) \end{bmatrix} = -ab, \tag{7}$$

olarak bulunur. (2) eşitliğinden eğrinin afin yay uzunluğu parametresi

$$s(t) = -(ab)^{\frac{1}{3}}t,$$

dir ve α eğrisinde t yerine $-(ab)^{-\frac{1}{3}}s$ yazılırsa α eğrisinin afin yay uzunluğu parametresi ile parametrik ifadesi

$$\alpha(s) = \left(a\cosh\left((ab)^{-\frac{1}{3}}s\right), -b\sinh\left((ab)^{-\frac{1}{3}}s\right)\right),$$

dir.

2.1 Afin Teğetler ve Afin Normaller

Tanım 2.4 Afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s)\big)$ olsun. O halde,

(i) $\alpha'(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **afin teğet vektörü** denir ve

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{d\alpha_1}{ds}, \frac{d\alpha_2}{ds}\right) = \big(\alpha_1'(s), \alpha_2'(s)\big)$$

dir.

(ii) $\alpha''(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **afin normal vektörü** denir ve

$$\alpha''(s) = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \left(\frac{d^2\alpha_1}{ds^2}, \frac{d^2\alpha_2}{ds^2}\right) = \big(\alpha_1''(s), \alpha_2''(s)\big)$$

dir.

Kabul edelim ki, $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$ eğrisinin parametresi, Öklid yay uzunluğu parametresi olsun. O halde, $\forall t \in I$ için $\|\dot{\alpha}\| = \left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\| = 1$ dir. Öyleyse (1) eşitliğinden

$$ds = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]^{\frac{1}{3}} dt$$

yazabiliriz. Ayrıca, α eğrisinin birim teğet vektörü T, birim normal vektörü N ve Öklid eğriliği κ olmak üzere yukarıdaki eşitliği

$$ds = [T, \kappa N]^{\frac{1}{3}} dt = \underbrace{[T, N]^{\frac{1}{3}}}_{1} \kappa^{\frac{1}{3}} dt = \kappa^{\frac{1}{3}} dt \tag{8}$$

olarak elde edilir. (2) ve (8) eşitliklerinden

$$\alpha'(s) = \kappa^{-\frac{1}{3}} T$$

ifadesi elde edilir. Buradan, herhangi bir keyfi parametre t ve $k = \left[\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right] = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]$ olmak üzere

$$k^{-\frac{1}{3}} = \frac{dt}{ds},$$

olup α düzlem eğrisinin afin teğet vektörü

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}$$

$$= k^{-\frac{1}{3}} \dot{\alpha}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, α düzlem eğrisinin afin normal vektörü

$$\alpha''(s) = \frac{d^2\alpha}{ds^2}$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$$

$$\alpha''(s) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)\frac{dt}{ds}$$

$$= \left(k^{-\frac{1}{3}}\ddot{\alpha} - \frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{4}{3}}\dot{\alpha}\right)k^{-\frac{1}{3}}$$

$$= k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha} - \frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha} \tag{9}$$

olarak yazılabilir.

Dahası, $\alpha(t_0)$ noktasındaki α eğrisinin afin teğet doğrusu, $\alpha(t_0)$ dan geçen $\alpha'\big(s(t_0)\big)$ a paralel olan doğru olacağından afin teğet doğrusu üzerindeki keyfi bir nokta $X \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\alpha(t_0)$ daki α eğrisinin **afin teğet doğrusunun denklemi**

$$[X - \alpha(t_0), \dot{\alpha}(t_0)] = 0 \tag{10}$$

şeklindedir.

Önerme 2.2 Keyfi bir t parametre ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s)\big)$ olsun. O halde, $\alpha(t_0)$ daki α eğrisinin **afin normal doğrusunun denklemi**

$$(y - \alpha_2)\big(3k\ddot{\alpha}_1 - \dot{k}\dot{\alpha}_1\big) - (x - \alpha_1)\big(3k\ddot{\alpha}_2 - \dot{k}\dot{\alpha}_2\big) = 0 \tag{11}$$

dir. Burada, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, afin normal doğrusu üzerindeki keyfi bir noktadır.

İspat (9) eşitliğinden $\alpha'' = k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha} - \frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha}$ olup $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ olduğundan

$$\alpha'' = \frac{1}{3}k^{-\frac{5}{3}}\big(3k\ddot{\alpha}_1 - \dot{k}\dot{\alpha}_1, 3k\ddot{\alpha}_2 - \dot{k}\dot{\alpha}_2\big) \tag{12}$$

dir. α eğrisinin afin normal doğrusu, $\alpha(t_0)$ dan geçen $\alpha''\big(s(t_0)\big)$ a paralel olan doğru olacağından afin normal doğrusu üzerindeki keyfi bir nokta $X=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere, $\alpha(t_0)$ daki α eğrisinin afin normal doğrusunun denklemi

$$\big[X-\alpha(t_0),\alpha''\big(s(t_0)\big)\big]=0$$

dir ve (5) eşitliğinden

$$\frac{1}{3}k^{\frac{-3}{5}}\begin{vmatrix}3k\ddot{\alpha}_1-\dot{k}\dot{\alpha}_1 & 3k\ddot{\alpha}_2-\dot{k}\dot{\alpha}_2\\ x-\alpha_1 & y-\alpha_2\end{vmatrix}=0$$

veya

$$\begin{vmatrix}3k\ddot{\alpha}_1-\dot{k}\dot{\alpha}_1 & 3k\ddot{\alpha}_2-\dot{k}\dot{\alpha}_2\\ x-\alpha_1 & y-\alpha_2\end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

elde edilir. Buradan

$$(y-\alpha_2)\big(3k\ddot{\alpha}_1-\dot{k}\dot{\alpha}_1\big)-(x-\alpha_1)\big(3k\ddot{\alpha}_2-\dot{k}\dot{\alpha}_2\big)=0,$$

dir.■

Kabul edelim ki, $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=\big(\alpha_1(t),\alpha_2(t)\big)$ eğrisinin parametresi, Öklid yay uzunluğu parametresi olsun. Bu durumda, $\frac{d\alpha}{dt}=T$ ve $\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\kappa N$ olacağından

$$k=\left[\frac{d\alpha}{dt},\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$=[T,\kappa N]$$

$$= \underbrace{[T, N]}_{1} \kappa$$

$$= \kappa$$

ve

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}([\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}])$$

$$= \underbrace{[\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}_{0} + [\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}]$$

$$= [T, \dot{\kappa} N - \kappa^2 T]$$

$$= \dot{\kappa} \underbrace{[T, N]}_{1} - \kappa^2 \underbrace{[T, T]}_{0}$$

$$= \dot{\kappa}$$

dir. Öyleyse, (9) eşitliğini

$$\alpha'' = \kappa^{\frac{1}{3}} N - \frac{1}{3} \dot{\kappa} \kappa^{-\frac{5}{3}} T \tag{14}$$

olarak elde ederiz.

2.2 Afin Eğrilik

Biliyoruz ki, Öklid eğriliği, izometrik dönüşümler altında değişmez. Benzer şekilde, equi-afin dönüşümler altında değişmeyen bir afin eğrilik tanımlanabilir.

Afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ olsun. O halde, Tanım 1'den α eğrisinin afin yay uzunluğu

$$[\alpha', \alpha''] = 1$$

olup her iki tarafın afin yay uzunluğuna göre türevi alındığında

$$[\alpha', \alpha'''] = 0$$

dir. Öyleyse, α' ve α''' vektörleri paraleldir. Yani, $\forall s \in I$ için

$$\alpha'''(s) + \mu(s)\alpha'(s) = 0$$

olacak şekilde bir $\mu: I \to \mathbb{R}$ vardır. Buradaki, reel değerli $\mu = \mu(s)$ fonksiyonuna, α eğrisinin afin eğriliği denir ve $\alpha''' + \mu\alpha' = 0$ olduğundan $\mu = [\alpha'', \alpha''']$ dir.

Tanım 2.5 Afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ olsun. O halde, α eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasında $\mu(s_0) \neq 0$ ve $\mu'(s_0) = 0$ ise, α eğrisi $\alpha(s_0)$ noktasında bir **afin tepeye sahiptir** denir. Eğer, $\mu''(s_0) \neq 0$ ise bu afin tepeye, **sıradandır** denir.

Örnek 2.2 $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ düzlem eğrisi

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right), b\sin\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right) \right)$$

eğrisi afin yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir elips olsun. Burada

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\sin\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right), \frac{b}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\cos\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right)\right),$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{(ab)^{\frac{2}{3}}}\cos\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right), -\frac{b}{(ab)^{\frac{2}{3}}}\sin\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right)\right),$$

$$\alpha'''(s) = \left(\frac{1}{b}\sin\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right), -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right)\right)$$

olup α eğrisinin afin eğriliği $\mu = [\alpha'', \alpha''']$ olduğundan

$$\mu = (ab)^{-\frac{2}{3}}\left(\cos^2\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{(ab)^{\frac{1}{3}}}\right)\right) = (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

elde edilir. $\forall a, b \neq 0$ için $(ab)^{-\frac{2}{3}} > 0$ olacağından, elipsin her noktasındaki afin eğrilik pozitif ve sabittir.

Uyarı 2.2 Diferansiyellenebilir bir $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ düzlem eğrisinin, $a_i \in \mathbb{R}$ ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere Monge formu

$$\alpha(t) = \left(t, \tfrac{1}{2}a_2t^2 + \cdots + \tfrac{1}{k!}a_kt^kg(t)\right)$$

dir. Burada $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. O zaman, $\alpha(0)$ noktasında α eğrisinin afin eğriliği

$$\mu(0) = \frac{3a_2a_4 - 5a_3^2}{9a_2^{\frac{8}{3}}}$$

olarak elde edilir. Buradan, μ afin eğrilik fonksiyonunun, α düzlem eğrisinin 4. mertebeden afin diferansiyel değişmezi olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2.3 Afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(s) = \big(\alpha_1(s), \alpha_2(s)\big)$ olsun. O halde, α eğrisinin afin eğriliği

$$\mu = \frac{1}{9}\big(3k\ddot{k} - 5\dot{k}^2 + 9k[\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]\big)k^{-\frac{8}{3}} \tag{15}$$

dir. Burada, $k = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]$ dir.

İspat (9) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\alpha''' = \left(\frac{5}{9}\dot{k}^2k^{-3} - \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-2}\right)\dot{\alpha} - \dot{k}k^{-2}\ddot{\alpha} + k^{-1}\dddot{\alpha} \tag{16}$$

elde edilir. Öyleyse, α eğrisinin afin eğriliği

$$\begin{aligned}
\mu &= [\alpha'', \alpha'''] \\
&= \left[k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha} - \frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha}, \left(\frac{5}{9}\dot{k}^2k^{-3} - \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-2}\right)\dot{\alpha} - \dot{k}k^{-2}\ddot{\alpha} + k^{-1}\dddot{\alpha}\right] \\
&= \left[k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha}, \left(\frac{5}{9}\dot{k}^2k^{-3} - \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-2}\right)\dot{\alpha}\right] + \left[k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha}, -\dot{k}k^{-2}\ddot{\alpha}\right] + \left[k^{-\frac{2}{3}}\ddot{\alpha}, k^{-1}\dddot{\alpha}\right] \\
&\quad + \left[-\frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha}, \left(\frac{5}{9}\dot{k}^2k^{-3} - \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-2}\right)\dot{\alpha}\right] + \left[-\frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha}, -\dot{k}k^{-2}\ddot{\alpha}\right] \\
&\quad + \left[-\frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{5}{3}}\dot{\alpha}, k^{-1}\dddot{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

$$\mu = \left(\frac{5}{9}\dot{k}^2 k^{-\frac{11}{3}} - \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-\frac{8}{3}}\right)[\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}] - \dot{k}k^{-\frac{8}{3}}\underbrace{[\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}_{0} + k^{-\frac{5}{3}}[\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}]$$

$$+\left(-\frac{5}{27}\dot{k}^3 k^{-\frac{14}{3}} + \frac{1}{9}\ddot{k}\dot{k}k^{-\frac{11}{3}}\right)\underbrace{[\dot{\alpha}, \dot{\alpha}]}_{0} + \frac{1}{3}\dot{k}^2 k^{-\frac{11}{3}}[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] - \frac{1}{3}\dot{k}k^{-\frac{8}{3}}[\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}],$$

dir. Ayrıca, $k = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}]$ ve $\dot{k} = [\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}]$ olduğundan yukarıdaki ifade

$$\mu = -\frac{5}{9}\dot{k}^2 k^{-\frac{8}{3}} + \frac{1}{3}\ddot{k}k^{-\frac{5}{3}} + k^{-\frac{5}{3}}[\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}] + \frac{1}{3}\dot{k}^2 k^{-\frac{8}{3}} - \frac{1}{3}\dot{k}^2 k^{-\frac{8}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ddot{k}k - \frac{5}{9}\dot{k}^2 + k[\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]\right)k^{-\frac{8}{3}}$$

$$= \frac{1}{9}\left(3\ddot{k}k - 5\dot{k}^2 + 9k[\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]\right)k^{-\frac{8}{3}},$$

olarak elde edilir. ■

Sonuç Diferansiyellenebilir bir $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ düzlem eğrisinin afin eğriliği μ, α eğrisinin Öklid eğriliği κ cinsinden

$$\mu = \frac{1}{9}(3\kappa\ddot{\kappa} - 5\dot{\kappa}^2 + 9\kappa^4)\kappa^{-\frac{8}{3}} \tag{17}$$

olarak yazılabilir.

İspat Kabul edelim ki, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ eğrisinin parametresi, Öklid yay uzunluğu parametresi olsun. Bu durumda,

$$k = \kappa,$$

$$\dot{k} = \dot{\kappa},$$

$$\ddot{k} = \ddot{\kappa},$$

dir ve

$$[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}] = [\kappa N, \kappa' N - \kappa^2 T] = \kappa^3,$$

olduğundan (15) eşitliğinden

$$\mu = \frac{1}{9}(3\kappa\ddot{\kappa} - 5\dot{\kappa}^2 + 9\kappa^4)\kappa^{-\frac{8}{3}}$$

olarak elde edilir. ■

2.3 Afin Uzaklık

Tanım 2.6 Afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ olsun. O halde,

$$\Delta(x, s) = [x - \alpha, \alpha'] \tag{18}$$

ile tanımlı $\Delta: \mathbb{R}^2 \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu α eğrisi üzerinde tanımlanan iki parametreli bir fonksiyon ailesidir ve bu aileye **afin uzaklık fonksiyonları ailesi** denir. Ayrıca, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ noktası ve $s_0 \in I$ verildiğinde, $\Delta(x_0, s_0)$ a, **$\mathbf{x_0}$ noktasından $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{s_0})$ noktasına olan afin uzaklık** denir.

Burada, afin uzaklık $\Delta(x_0, s_0)$ değerini hesaplamak için en az üç noktaya veya bir nokta ve bir vektöre ihtiyaç vardır. Bundan dolayı, $\Delta(x, s)$ afin uzaklık fonksiyonunun tanımı vektörleri içerdiğinden $\mathbb{R}^2$ de iki nokta arasında afin uzaklık tanımlı değildir.

Önerme 2.4 Keyfi bir t parametresi ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir düzlem eğrisi $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ olsun. O halde, afin uzaklık fonksiyonları ailesi

$$\Delta(x,s) = [x-\alpha,\dot{\alpha}][\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]^{-\frac{1}{3}} \tag{19}$$

dir.

İspat $\alpha'(s) = k^{-\frac{1}{3}}\dot{\alpha}$, $k = [\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]$ ve (18) eşitliklerini kullanarak afin uzaklık fonksiyonları ailesi $\Delta(x,s)$ nin (19) eşitliğini sağladığı kolayca gösterilebilir. ■

Uyarı 2.3 Afin uzaklık fonksiyonları ailesi $\Delta(x,s)$, determinant tarafından verildiği için özel afin dönüşümler altında değişmezdir.

3. AFİN UZAY EĞRİLERİ

3.1 Afin Yay Uzunluğu

$3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha = \alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\left[\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \frac{d^3\alpha}{ds^3}\right] = [\alpha', \alpha'', \alpha'''] = 1$$

dir. Ayrıca, α eğrisinin keyfi bir parametresi t olmak üzere $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$ ve $\frac{d^3\alpha}{dt^3} = \dddot{\alpha}$ olsun. O halde,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt} + 3\frac{dt}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

dir ve $[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = 1$ olduğundan yukarıdaki eşitlikleri kullanarak

$$1 = \left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt} + 3\frac{dt}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^3 \frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]$$

$$= \left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]$$

olacağından

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}] = [\alpha', \alpha'', \alpha'''],$$

olarak bulunur. Buradan $ds = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]^{\frac{1}{6}} dt$ olup

$$s(t) = \int [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}]^{\frac{1}{6}} dt,$$

olarak elde edilir.

Özel Durum: t parametresi, Öklid yay uzunluğu parametresi ise

$$\dot{\alpha} = T,$$

$$\ddot{\alpha} = N,$$

$$\dddot{\alpha} = \dot{\kappa}N + \kappa\tau B - \kappa^2 T$$

dir. Burada, $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$, α eğrisinin Serret-Frenet elemanlarıdır. Böylece

$$[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}] = [T, \kappa N, -\kappa^2 T + \dot{\kappa}N + \kappa\tau B] = \kappa^2\tau$$

dir ve $\left(\frac{dt}{ds}\right)^6 [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}] = 1$ olduğundan

$$\frac{dt}{ds} = \left(\frac{1}{\kappa^2\tau}\right)^{\frac{1}{6}}$$

yazılabilir. Burada, $\kappa\tau \neq 0$ dır. Çünkü, $\kappa\tau = 0$ olan noktalarda $\frac{dt}{ds}$ tanımlı değildir. Ayrıca

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt} \tag{20}$$

$$\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{ds^2}$$

$$= \frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} \tag{21}$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$+ \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

$$= \frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt} + 3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3} \tag{22}$$

$$\frac{d^4\alpha}{ds^4} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt} + 3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$$

$$=\frac{d^4t}{ds^4}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d^3t}{ds^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}+3\frac{d^3t}{ds^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}+3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$+3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^3\alpha}{dt^3}+3\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^3\alpha}{dt^3}+\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}$$

$$=\frac{d^4t}{ds^4}\frac{d\alpha}{dt}+\left(4\frac{d^3t}{ds^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)+3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$+6\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^3\alpha}{dt^3}+\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4} \tag{23}$$

dir.

3.2 Afin Eğrilik ve Burulma

$3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha=\alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = 1,$$

olup s ye göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$\left[\alpha', \alpha'', \alpha^{(4)}\right] = 0$$

dir. Öyleyse, α', α'' ve $\alpha^{(4)}$ vektörleri lineer bağımlıdır. Yani, $\forall s \in I$ için

$$\alpha^{(4)} + \nu\alpha' + \mu\alpha'' = 0, \tag{24}$$

olacak şekilde $\mu, \nu : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır. Buradaki, reel değerli $\mu = \mu(s)$ ve $\nu = \nu(s)$ fonksiyonlarına, sırasıyla, α eğrisinin afin eğriliği ve afin burulması denir ve $[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = 1$ olduğundan

$$\mu = \left[\alpha', \alpha''', \alpha^{(4)}\right]$$

ve

$$\nu = -\left[\alpha'', \alpha''', \alpha^{(4)}\right]$$

dir. Dahası, α', α'' ve α''' vektörlerine, sırasıyla, α eğrisini afin tanjant vektörü, asli afin normali ve afin binormali denir ve

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\nu & \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \alpha'' \\ \alpha''' \end{pmatrix},$$

dir.

Özel Durum: t parametresi, Öklid yay uzunluğu parametresi ise (20)-(23) eşitliklerinden

$$\mu = \left[\alpha', \alpha''', \alpha^{(4)}\right]$$

$$= \left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, 3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}, 6\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]$$

$$+\left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt}, 3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

$$+\left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\left(4\frac{d^3t}{ds^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)+3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$+\left[\frac{dt}{ds}\frac{d\alpha}{dt},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

ve

$$\nu=-\left[\alpha'',\alpha''',\alpha^{(4)}\right]$$

$$=-\left[\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt},3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2},6\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]$$

$$-\left[\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt},3\frac{d^2t}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2},\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

$$-\left[\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\left(4\frac{d^3t}{ds^3}\left(\frac{dt}{ds}\right)+3\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right]$$

$$-\left[\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d\alpha}{dt},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2},\frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt},6\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2t}{ds^2}\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2},\frac{d^3t}{ds^3}\frac{d\alpha}{dt},\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\left(\frac{dt}{ds}\right)^4\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\frac{d^2\alpha}{dt^2},\left(\frac{dt}{ds}\right)^3\frac{d^3\alpha}{dt^3},\frac{d^4t}{ds^4}\frac{d\alpha}{dt}\right].$$

3.3 Afin Uzaklık

Tanım 3.1 (Davis 2018) $3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha=\alpha(s)\colon I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ ve bir $x\in\mathbb{R}^3$ sabit nokta olmak üzere

$$\Delta(x,s_0)=[x-\alpha(s_0),\alpha'(s_0),\alpha''(s_0)],$$

ile tanımlı $\Delta\colon R^3\times I\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonuna **α eğrisi üzerinde tanımlanan üç parametreli bir fonksiyon ailesi** veya **afin uzaklık fonksiyonları ailesi** ve $\Delta(x,s_0)$ ifadesine de **x ile $\boldsymbol{\alpha(s_0)}$ arasındaki uzaklık** denir.

Önerme 3.1 (Davis 2018) $3-$ boyutlu uzayda keyfi bir t parametresi ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha=\alpha(s)\colon I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ olmak üzere afin uzaklık fonksiyonlarının ailesi

$$\Delta(x,t)=[x-\alpha,\dot{\alpha},\ddot{\alpha}][\dot{\alpha},\ddot{\alpha},\dddot{\alpha}]^{-\frac{1}{2}}$$

dir.

O halde, α uzay eğrisi üzerinde bir nokta $P=\alpha(t)$ olsun. $t_1=t+\Delta t, t_2=t_1+\Delta t_1$ ve $t_3=t_2+\Delta t_2$ olmak üzere α eğrisi üzerinde üç ardışık $P'=\alpha(t_1), P''=\alpha(t_2)$ ve $P'''=\alpha(t_3)$ noktalarını alalım.

A uzayda sabit bir nokta olmak üzere $A-P_1P_2P_3$ ve $P-P_1P_2P_3$ dört yüzlülerinin hacimleri, sırasıyla, V_1 ve V_2 olsun. O zaman

$$\Omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{6V_1}{\Delta t^3}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t^3} |A - \alpha(t_1), \alpha(t_1 + \Delta t_1) - \alpha(t_1), \alpha(t_2 + \Delta t_2) - \alpha(t_2)|$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t^3} \left| A - \alpha(t_1), \dot{\alpha}(t_1)\Delta t_1 + \frac{\ddot{\alpha}(t_1)}{2!}\Delta t_1^2 + \cdots, \dot{\alpha}(t_2)\Delta t_2 + \frac{\ddot{\alpha}(t_2)}{2!}\Delta t_2^2 + \cdots \right|$$

$$= |A - \alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}|, \tag{25}$$

ve

$$\Sigma^2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6V_2}{\Delta t^6}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t^6} |A - \alpha(t_1), \alpha(t_1 + \Delta t_1) - \alpha(t_1), \alpha(t_2 + \Delta t_2) - \alpha(t_2)|$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t^6} |A(t + \Delta t) - \alpha(t), \alpha(t_1 + \Delta t_1) - \alpha(t_1), \alpha(t_2 + \Delta t_2) - \alpha(t_2)|$$

$$= |\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}| \tag{26}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$\psi_1 = \frac{\Omega}{\Sigma} \tag{27}$$

olmak üzere

$$\psi_1 = \frac{|A-\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|A-\alpha, d\alpha, d^2\alpha|}{(d\bar{S})^3} = \left| A - \alpha, \frac{d\alpha}{d\bar{S}}, \frac{d^2\alpha}{d\bar{S}^2} \right| \tag{28}$$

elde edilir. Burada $d\bar{S}$ afin lineer elemanı belirtir.

O zaman, ψ_1, α eğrisi üzerinde bir **$\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})$ noktasında uzayda sabit bir A noktasından oskülatör düzleme afin dik uzaklık** olarak adlandırılır.

Sonuç 3.1 Afin uzayda ψ_1, parametre değişiminde değişmediğinden bir α eğrisi için bir afin değişmezdir.

Sonuç 3.2 Afin uzayda α eğrisinin dik mesafesi p_1, eğrilik yarıçapı ρ ve burulma yarıçapı τ olmak üzere

$$|\psi_1| = p_1 \rho^{-1} |\tau|^{-\frac{1}{2}} \tag{29}$$

eşitliği elde edilir.

4. ÖZEL EĞRİLER

$3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha=\alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\left[\frac{d\alpha}{ds},\frac{d^2\alpha}{ds^2},\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right]=[\alpha',\alpha'',\alpha''']=1$$

dir. Ayrıca, α eğrisinin keyfi bir parametresi t olmak üzere $\frac{d\alpha}{dt}=\dot{\alpha}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\ddot{\alpha}$ ve $\frac{d^3\alpha}{dt^3}=\dddot{\alpha}$ olsun. O halde

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^6[\dot{\alpha},\ddot{\alpha},\dddot{\alpha}]=[\alpha',\alpha'',\alpha''']=1 \tag{30}$$

olduğundan

$$\alpha'=\xi_1,$$

$$\alpha''=\xi_2, \tag{31}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^6\alpha'''=\xi_3$$

eşitlikleri (30) denkleminde yerine yazılırsa

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=1 \tag{32}$$

olup sonuç olarak

$$[\xi_1,\xi_2,\xi_3']=0 \tag{33}$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\xi_3' + \nu\xi_2 + \mu\xi_1 = 0 \qquad (34)$$

temel denklem elde edilir. Burada ξ_1, ξ_2, ξ_3, μ ve ν sırasıyla teğet, asli normal, binormal birim vektör, bağıl afin eğrilik ve bağıl afin burulma olarak adlandırılır. Dolayısıyla Frenet-Serret formüllerini

$$\xi_1' = \xi_2,$$

$$\xi_2' = \frac{\xi_2}{q^6}, \qquad (35)$$

$$\xi_3' = -\nu\xi_1 - \mu\xi_2$$

elde edilir. Burada, $\frac{ds}{dt} = q$ ve

$$\mu = [\xi_1, \xi_3, \xi_3'], \qquad (36)$$

$$\nu = -[\xi_2, \xi_3, \xi_3']$$

eşitlikleri elde edilir.

ÖZEL HAL

$3 -$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir eğri $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere α eğrisinin eğrilik merkezi

$$\eta = \alpha + \frac{1}{\mu}\alpha''$$

şeklinde tanımlanır. α eğrisi üzerindeki bir $\alpha(s)$ noktasında η eğrilik merkezinden $\{\xi_1, \xi_3\}$ rektifyan düzleme afin dik mesafeyi r_2 ile gösterelim. O halde (28) eşitliğinden

$$r_2 = \left[-\frac{1}{\mu}\alpha'', \xi_1, \xi_3\right] = \frac{1}{\mu}$$

eşitliğini elde ederiz.

Eğer μ =sabit ise,

$$\eta' = \alpha' + \frac{1}{\mu}\alpha'''$$

eşitliği elde edilir. Öyleyse, α eğrisinin η eğrilik merkezi teğetinin α eğrisi üzerindeki bir $\alpha(s)$ noktasındaki $\{\xi_1, \xi_3\}$ rektifyan düzleme paraleldir.

4.1 Bertnard Eğrileri

Tanım 5.1 $3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir $\alpha = \alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin asli afin normali α'', başka bir $\beta: J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin asli afin normali, yani; $\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}$ ile $\alpha''(s)$ paralel ise, (α, β) ikilisine bir afin Bertrand eğri çifti denir ve

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda\alpha''(s),$$

yazılabilir. Burada, $\lambda = \lambda(s)$, bir reel değerli fonksiyondur.

Şimdi, $3-$ boyutlu uzayda afin yay uzunlukları s ve s^* olan diferansiyellenebilir $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ eğrilerinin bertrand eğri çifti olması için gerekli ve yeterli bir koşul arayalım.

Tanım 5.1 den

$$\beta = \alpha + \lambda\alpha'' \tag{37}$$

ve

$$\frac{d^2\beta}{ds^{*2}} = a\alpha''(s) \tag{38}$$

dir. Burada, $a = a(s)$ bir reel değerli fonksiyondur. O halde, (37) ifadesinin s ye göre iki kez türevi alınırsa

$$\frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \alpha' + \lambda'\alpha'' + \lambda\alpha'''$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + \frac{d\beta}{ds^*}\frac{d^2s^*}{ds^2} = (1+\lambda'')\alpha'' + 2\lambda'\alpha''' + \lambda\alpha^{(4)}$$

dir ve $\frac{ds^*}{ds} = \varphi$ dersek

$$\frac{d\beta}{ds^*}\varphi = \alpha' + \lambda'\alpha'' + \lambda\alpha''' \tag{39}$$

$$\frac{d^2\beta}{ds^{*2}}\varphi^2 + \frac{d\beta}{ds^*}\varphi' = (1+\lambda'')\alpha'' + 2\lambda'\alpha''' + \lambda\alpha^{(4)} \tag{40}$$

denklemleri elde edilir. (24) ifadesinden $\alpha^{(4)} + \nu\alpha' + \mu\alpha'' = 0$ ve (38)-(40) eşitliklerinden

$$a\alpha''\varphi^2 + (\alpha' + \lambda'\alpha'' + \lambda\alpha''')\frac{\varphi'}{\varphi} = (1+\lambda'')\alpha'' + 2\lambda'\alpha''' + \lambda(-\nu\alpha' - \mu\alpha'')$$

ya da

$$\frac{\varphi'}{\varphi}\alpha' + \left(\lambda'\frac{\varphi'}{\varphi} + a\varphi^2\right)\alpha'' + \lambda\frac{\varphi'}{\varphi}\alpha''' = -\nu\lambda\alpha' + (1+\lambda''-\mu\lambda)\alpha'' + 2\lambda'\alpha'''$$

denklemi elde edilir. $[\alpha', \alpha'', \alpha'''] = 1$ olduğundan yukarıdaki son eşitlikten

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -\nu\lambda, \tag{41}$$

$$\lambda' \frac{\varphi'}{\varphi} + a\varphi^2 = 1 + \lambda'' - \mu\lambda, \tag{42}$$

$$\lambda \frac{\varphi'}{\varphi} = 2\lambda' \tag{43}$$

dir. (43) eşitliğinden

$$\varphi = A\lambda^2, \qquad A \in \mathbb{R}^+, \tag{44}$$

ve (38) ifadesinin s ye göre iki kez türevi alınırsa

$$\frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\varphi = a'\alpha'' + a\alpha''' \tag{45}$$

dir ve $\left[\frac{d\beta}{ds^*}\varphi, \frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\varphi\right] = \varphi^2 \underbrace{\left[\frac{d\beta}{ds^*}, \frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\right]}_{1} = \varphi^2$ olduğundan (38), (39) ve (45) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \left[\frac{d\beta}{ds^*}\varphi, \frac{d^2\beta}{ds^{*2}}, \frac{d^3\beta}{ds^{*3}}\varphi\right] \\
&= [\alpha' + \lambda'\alpha'' + \lambda\alpha''', a\alpha'', a'\alpha'' + a\alpha'''] \\
&= [\alpha', a\alpha'', a\alpha'''] \\
&= a^2 \underbrace{[\alpha', \alpha'', \alpha''']}_{1}
\end{aligned}$$

$$= a^2 \tag{46}$$

bulunur.

(41) ve (43) eşitliklerinden

$$\nu = -\frac{1}{\lambda}\frac{\varphi'}{\varphi} = -2\frac{\lambda'}{\lambda^2}$$

olup aşağıdaki iki durum vardır.

(I) $\nu = 0$ ise yukarıdaki eşitlikten $\lambda = \text{sabit} \neq 0$ olup (42) eşitliğinden

$$a\varphi^2 = 1 - \mu\lambda$$

dir. (46) eşitliğinden

$$a^3 = 1 - \mu\lambda$$

olup α eğrisinin afin eğriliği

$$\mu = \frac{1-a^3}{\lambda}$$

dir.

(II) $\nu \neq 0$ ise yukarıdaki eşitlikten $\lambda = \frac{2}{\int \nu ds}$ olup (42) eşitliğinden

$$\lambda\lambda'' - 2\lambda'^2 + \mu\lambda^2 + (1 - a^3)\lambda = 0$$

elde edilir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1 $3-$ boyutlu uzayda afin eğrilikleri μ ile ν olan afin yay uzunluğu s ile parametrelenmiş diferansiyellenebilir bir $\alpha(s): I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin bir $\beta(s^*)$ Bertrand eğri çifti olabilmesi için

(i) $\nu = 0$ ise

$$\mu = \frac{1-a^3}{\lambda}$$

dir. Burada, $\lambda = \text{sabit} \neq 0$ dir.

(ii) $\nu \neq 0$ ise

$$\lambda = \frac{2}{\int \nu ds}$$

ve

$$\lambda\lambda'' - 2\lambda'^2 + \mu\lambda^2 + (1-a^3)\lambda = 0$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

KAYNAKLAR

Balkış, A. 2018. Afin uzayda eğrilerin diferensiyel geometrisi. Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 45 sayfa, Uşak.

Blaschke, V. W. and Reidemester, K. 1923. Vorlesungen über Differentialgeometrie II ; Affine Differentialgeometrie. Springer, 269 pages, Berlin.

Cansu, G. 2015. Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 60 sayfa, Ankara.

Davis, D. 2008. Affine differential geometry and singularity theory. Master Thesis, The University of Liverpool, 169 pages, United Kingdom.

Hirakawa, J. 1940. The relative differential geometry in affine space. The Mathematical Society of Japan, 17: 347-400.

Hu, N. 2012. Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces. PhD Thesis, Hokkaido University, 73 pages, Japonya.

Nomizu, K. and Sasaki, T. 1991. A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces. Manuscripta Mathematica, 73(1): 39-44.

Nomizu, K. and Sasaki, T. 1994. Affine differential geometry: Geometry of affine immersions. Cambridge university press, 277 pages, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Davut KOÇYİĞİT

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-Halen
Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü	2014-2019