T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Δ^{m} FARK OPERATÖRÜNÜN c VE cs DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer ÖZDEMİR
(20199237003)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nuh DURNA

SİVAS
Haziran 2022

Ömer ÖZDEMİR'in hazırladığı ve **"Δ^{m} FARK OPERATÖRÜNÜN c VE cs DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı :	**Doç. Dr. Nuh DURNA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyelesi :	**Doç Dr. İbrahim KARAHAN** Erzurum Teknik Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyelesi :	**Dr. Öğr. Üyesi Merve Esra TÜRKAY** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

24.06.2022

Ömer ÖZDEMİR

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan benden bilgi ve yardımlarını eksik etmeyen çok değerli danışman hocam; Doç. Dr. Nuh DURNA' ya, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen başta eşim Fatıma ÖZDEMİR olmak üzere aileme ve bölüm arkadaşlarıma beni yalnız bırakmadıkları için minnet ve şükranlarımı sunarım.

ÖZET

Δ^{m} FARK OPERATÖRÜNÜN c VE cs DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

Ömer ÖZDEMİR

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nuh DURNA

2022, 41+x sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, sınırlı lineer operatörlerin spektrumundan kısaca bahsedilmiştir ve spektrumun Goldberg sınıflandırılması verilmiştir.

İkinci bölümde, tez çalışması ile alakalı literatür özeti ve gösterimler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, P. Baliarsingh ve ark. 2021 de çalıştığı c üzerinde Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ fark operatörünün ince spektrumları verilmiştir. Ayrıca bizim tarafımızdan bu operatör için spektrumun aralarında ayrık olması gerekmeyen ayrışımları hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde ise Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ fark operatörünün cs dizi uzayı üzerinde ince spektrumları ve spektrumun aralarında ayrık olması gerekmeyen ayrışımları hesaplanmıştır. Bu bölüm orjinaldir.

Anahtar Kelimeler: Spektrum, yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum, sıkıştırma spektrum.

ABSTRACT

SPECTRAL DECOMPOSITION OF Δ^{m} DIFFERENCE OPERATOR OVER c AND cs SEQUENCE SPACES

Ömer ÖZDEMİR

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Associate Professor Dr. Nuh DURNA

2021, 41+x pages

This thesis consists of four sections.

In the first chapter, the spectrum of bounded linear operators is briefly mentioned and the Goldberg classification of the spectrum is given.

In the second chapter, the literature summary and representations related to the thesis study are given.

In the third chapter, P. Baliarsingh et al. fine spectra of the difference operator Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ are given on c that he worked in 2021. In addition, we have calculated decompositions of the spectrum for this operator, which do not need to be disjoint.

In the fourth chapter, the fine spectra of the difference operator Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ over the cs sequence space and the decompositions of the spectrum that do not need to be disjoint between them are calculated. This part is original.

Keywords: Spectrum, approximate point spectrum, defect spectrum, compression spectrum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}\,(\mathbf{X})$	**:**	X uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathbf{R}\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün görüntü kümesi
$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün rezolvent kümesi
$\boldsymbol{\sigma}\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün spekturumu
$\boldsymbol{\sigma}_p\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün özdeğerlerinin kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_c\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün sürekli spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_r\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün rezidü spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{ap}\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün yaklaşık nokta spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_\delta\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün eksik spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{co}\,(\mathbf{L})$	**:**	L operatörünün sıkıştırılmış spektrumunun kümesi
Δ^m	**:**	Genelleştirilmiş fark operatörü

1. GİRİŞ

Birinci dereceden fark operatörü ile dizi uzayı tanımlama fikri[20] de ortaya atıldı ve [21] de daha da genelleştirildi. Daha sonra farklı mertebeden fark operatörleri aracılığıyla çeşitli dizi uzayları birçok yazar tarafından incelenmiştir (ayrıntılar için bakınız[22]-[27]). Baliarsingh ve ark. 2021 yılında [42] de, daha önce tanımlanan fark operatörlerinin çoğunu birleştirip ince spektrumlarını daha genel ve kapsamlı bir şekilde bulmuştur.

Mevcut literatüre kapsamlı bilgi sağlamak için, bu alanda birçok yenilikçi ve yeni fikirlere ulaşmaya kendini tamamen adamış birçok önemli araştırmacıya başvurabiliriz. Örneğin, Reade [28] ve Akhmedov ve Başar [29]-[30] Cesàro operatörünün spektrumlarını sırasıyla c_0 ve bv_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır. Fark operatörünün c_0, c ve ℓ_p $(0 \leq p < 1)$ dizi uzayları üzerindeki ince spektrumu sırasıyla Altay ve Başar tarafından [31]-[32] incelenmiştir. $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün c_0 ve c üzerindeki ince spektrumları [33] de Altay ve Başar tarafından incelenmiştir ve fark operatörü ℓ_p ve bv_p $(1 < p < \infty)$ dizi uzayları üzerinde[34]-[35] de Akhmedov ve Başar tarafından hesaplanmıştır. Srivastava ve Kumar [36]-[37] de c_0 ve ℓ_1 dizi uzayları üzerindeki Δ_v genelleştirilmiş fark operatörünün ince spektrumlarını incelemişlerdir, burada $a = (a_k)$ ve $b = (b_k)$ belirli özelliklere sahip yakınsak dizilerdir, $v = (v_k)$ sabit veya kesin olarak azalan bir dizidir ve $r \in \mathbb{N}$ dir. Son zamanlarda, Akhmedov ve El-Shabrawy ,[38] Dutta ve Baliarsingh[39]-[40] , sırasıyla c, c_0 ve ℓ_1 dizi uzayları üzerinde $\Delta_{a,b}$, Δ^2 ve Δ_v^r genelleştirilmiş fark operatörlerinin ince spektrumlarını incelemişlerdir, burada $a = (a_k)$ ve $b = (b_k)$ belirli özelliklere sahip yakınsak dizilerdir, $v = (v_k)$ sabit veya kesin olarak azalan bir dizidir ve $r \in \mathbb{N}$ dir. Daha fazla ayrıntı için, okuyucu son zamanlarda çalışılan [41]-[48] de başvurabilir. Bu konu hakkında daha fazla ayrıntılı bilgi için [49] daki Mursaleen ve Başar'ın kitabına başvurulabilir. Daha önce tartışıldığı gibi, Banach uzayı c üzerindeki fark operatörlerinin spektrumlarına ilişkin bilinen sonuçlardan bazılarını sunuyoruz.

Yukarıda bahsedilen çalışmaların çoğunda spektrum aralarında ayrık olan; nokta spektrum, sürekli spektrum ve rezidü spektrum biçiminde ayrıştırılmıştır. Bununla birlikte[6] da Durna ve Yıldırım c_0 üzerinde factorable matrislerinin ve[3] de Başar, Durna ve Yıldırım bazı dizi uzayları üzerinde genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumun alt ayrışımını (yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum, sıkıştırılmış spektrum) incelemişlerdir. Bu çalışmalardan sonra spektrum ile ilgili yapılan bir çok makalede yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum da hesaplanmıştır. Örneğin, [54] de Durna, c_0 ve c dizi uzayları üzerinde Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift-bant matrisinin spektral ayrışımını hesaplanıştır. [55] de Das c_0 dizi uzayı üzerinde $U(r_1, r_2; s_1, s_2)$ üst üçgensel matrisinin spektrumunu ve fine spekturmunu çalışmıştır. [44] de El-Shabrawy ve Abu-Janah bv_0 ve h dizi uzayları üzerinde $B(r, s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektral ayrışımlarını incelemişlerdir. [56] da Tripathy ve Das c_0 dizi uzayı üzerinde $U(r, 0, 0, s)$ üst üçgensel matrisinin spektrumunu ve fine spekturmunu çalışmışlardır.

Spektral teori fonksiyonel analizin önemli bir parçasıdır. Spektral teorinin; fonksiyon teorisi, karmaşık analiz, diferansiyel ve integral denklemler, kontrol teorisi ve kuantum fiziği de dahil olmak üzere matematiğin ve fiziğin birçok yerinde uygulamaları bulunmaktadır.

Son yıllarda, spektral teori önemli gelişmelere sahne olmuştur. Yaklaşık noktasal spektrum, Taylor spektrum, yerel spektrum, essential spektrum gibi bir çok tipe sahip olan spektrum için bir çok önemli uygulamalar vardır.

Bu tezde Δ^m operatörünün c Banach uzayı üzerinde Baliarsingh ve ark. [42] de çalıştığı ve cs dizi uzayı üzerinde bizim hesapladığımız spektrumunu, nokta spektrum, sürekli spektrum, rezidü spektrum ve ince spektrum gibi spektral ayrışımını verilecektir. Tezin son kısmı orjinaldir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

X sonsuz boyutlu kompleks Banach uzayı olsun. Eğer $T \in B(X)$ ise bu durumda T nin $R(T)$ değer kümesi için : (I) $R(T) = X$, (II) $\overline{R(T)} = X$, fakat $R(T) \neq X$, (III) $\overline{R(T)} \neq X$, durumları ve T^{-1} için: (1) T^{-1} mevcut ve sürekli, (2) T^{-1} mevcut fakat süreksiz, (3) T^{-1} mevcut değil, durumları geçerlidir. Mümkün olan bütün olasılıklar düşünüldüğünde dokuz farklı durum oluşur. Bunlar, I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3 biçiminde numaralandırılır. Örneğin, eğer bir operatör III_2 durumunda ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1} mevcut fakat sürekli değildir. Ayrıca kapalı grafik teoreminden $I_2 = \emptyset$ dir (Goldberg, S. [10]).

Şimdi spektrumun ve spektrumun bazı ayrışımlarının tanımlarını verelim.

Tanım 2.1 $T : D(T) \to X$, $D(T) \subset X$ *üzerinde tanımlı bir lineer operatör olsun, burada* $D(T)$, T *nin tanım kümesini göstermektedir ve* X *sonsuz boyutlu bir kompleks normlu uzaydır.* I *birim operatörü göstermek üzere* $T \in B(X)$ *ve* $\lambda \in \mathbb{C}$ *için* $T_\lambda := \lambda I - T$ *olsun. Bu durumda spektrumla ilgili bazı tanım ve gösterimler aşağıdaki gibi verilir:*

1. T_λ^{-1} *mevcut, sınırlı ve* X *içinde yoğun bir küme üzerinde tanımlı olacak şekilde ki* λ *kompleks sayılarının kümesine* T *nin rezolvent kümesi denir ve* $\rho(T, X)$ *biçiminde gösterilir.*

2. $\sigma(T, X)$ *spektrum kümesi* $\rho(T, X)$ *in* $\mathbb{C}$ *deki tümleyenidir,*

3. *Nokta spektrum (öz değerler kümesi):* $\sigma_p(T, X) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T_\lambda \text{ birebir değil}\}$,

4. *Sürekli spektrum:* $\sigma_c(T, X) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T_\lambda \text{ birebir ve } \overline{R(T_\lambda)} = X, \text{ fakat } R(T_\lambda) \neq X\}$,

5. *Rezidü spektrum:* $\sigma_r(T, X) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T_\lambda \text{ birebir fakat } \overline{R(T_\lambda)} \neq X\right\}$,

6. *Eksik spectrum:* $\sigma_\delta(T, X) := \{\lambda \in \sigma(T, X) : R(T_\lambda) \neq X\}$,

7. *Sıkıştırma spektrum:* $\sigma_{co}(T, X) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{R(T_\lambda)} \neq X\right\}$,

8. *Yaklaşık nokta spectrum:* $\sigma_{ap}(T,X) := \{\lambda \in \mathbb{C}$: *Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* X *de* $\|x_k\| = 1$ *ve* $\lim_{k\to\infty} \|T_\lambda(x_k)\| = 0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi mevcuttur*$\}$ *(Appell ve ark.* [2] *ve Stone* [15]*).*

Yukarıda ki tanımlar ışığında, eğer λ kompleks sayısı $T_\lambda \in I_1$ veya $T_\lambda \in II_1$ biçiminde ise $\lambda \in \rho(T,X)$ dir. $\rho(T,X)$ de bulunmayan bütün λ skaler değerleri T nin spektrumunu oluşturur. Eğer T_λ, III_2 ye aitse $\lambda \in III_2\sigma(T,X)$ yazılır. $\sigma(T,X)$ in bu sınıflandırılması T nin ince spektrumunu meydana getirir. Bu, $\sigma(T,X)$ in $I_2\sigma(T,X) = \emptyset$, $I_3\sigma(T,X)$, $II_2\sigma(T,X)$, $II_3\sigma(T,X)$, $III_1\sigma(T,X)$, $III_2\sigma(T,X)$, $III_3\sigma(T,X)$ biçiminde aralarında ayrık alt kümelerine bölünebilmesi demektir (bak [10]).

Böylece spektrumun tam bir ayrık ayrışımı elde edilir. Yukarıdaki tanımlardan yola çıkarak [6] da Durna ve Yıldırım spektrumun bu ayrışımları arasındaki ilişkiyi bir tabloda toparlamıştır. Bu tablodan yola çıkarak aşağıdaki önerme verilebilir:

Önerme 2.1 *Bir* $T \in B(X)$ *operatörünün spektrumu ve alt spektrumları aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

1. $\sigma(T,X) = I_3\sigma(T,X) \cup II_2\sigma(T,X) \cup II_3\sigma(T,X) \cup III_1\sigma(T,X) \cup III_2\sigma(T,X) \cup III_3\sigma(T,X)$,

2. $\rho(T,X) = I_1\sigma(T,X) \cup II_1\sigma(T,X)$,

3. $\sigma_p(T,X) = I_3\sigma(T,X) \cup II_3\sigma(T,X) \cup III_3\sigma(T,X)$,

4. $\sigma_c(T,X) = II_2\sigma(T,X)$,

5. $\sigma_r(T,X) = III_1\sigma(T,X) \cup III_2\sigma(T,X)$,

6. $\sigma_\delta(T,X) = \sigma(T,X)\backslash I_3\sigma(T,X)$,

7. $\sigma_{co}(T,X) = III_1\sigma(T,X) \cup III_2\sigma(T,X) \cup III_3\sigma(T,X)$,

8. $\sigma_{ap}(T,X) = \sigma(T,X)\backslash III_1\sigma(T,X)$.

Banach uzayları üzerinde tanımlı sınırlı lineer operatörlerin spektrumlarını ve spektral ayrışımlarını hesaplamada yararlanılan kullanışlı bir önerme verelim.

Önerme 2.2 *$T \in B(X)$ operatörünün ve onun $T^* \in B(X^*)$ adjoint operatörünün spectrumu ve spektral ayrışımları için aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

(a) $\sigma(T^*, X^*) = \sigma(T, X)$,

(b) $\sigma_c(T^*, X^*) \subseteq \sigma_{ap}(T, X)$,

(c) $\sigma_{ap}(T^*, X^*) = \sigma_\delta(T, X)$,

(d) $\sigma_\delta(T^*, X^*) = \sigma_{ap}(T, X)$,

(e) $\sigma_p(T^*, X^*) = \sigma_{co}(T, X)$,

(f) $\sigma_{co}(T^*, X^*) \supseteq \sigma_p(T, X)$,

(g) $\sigma(T, X) = \sigma_{ap}(T, X) \cup \sigma_p(T^*, X^*) = \sigma_p(T, X) \cup \sigma_{ap}(T^*, X^*)$ *([2] , Önerme 1.3)*

2.1 Gösterimler

Bu tez boyunca w ile bütün reel veya kompleks değerli dizilerin uzayını göstereceğiz. w nın herhangi altvektör uzayına dizi uzayı denir. ℓ_∞, c, c_0, bv ve bv_0 ile sırasıyla; tüm sınırlı, yakınsak, sıfır, sınırlı salınımlı ve sıfıra yakınsayan sınırlı salınımlı diziler uzayı gösterilir. Ayrıca ℓ_1, ℓ_p, bv_p ile sırasıyla; tüm mutlak toplanabilir diziler, $p-$mutlak toplanabilir diziler ve $p-$sınırlı salınımlı diziler gösterilir.

Üçgen, tüm esas köşegen elemanları sıfırdan farklı olan alt üçgensel matrisdir. λ ve μ iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$; n, $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ olmak üzere a_{nk} reel veya kompleks sayıların sonsuz matrisi olsun. Bu durumda her $x = (x_k) \in \lambda$ için

$$(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

olmak üzere x in A dönüşümü, $Ax = \{(Ax)_n\}$ dizisi, μ de ise $A : \lambda \to \mu$ ile gösterilen A, λ dan μ ye bir matris dönüşümü tanımlar. Gösterimlerde kolaylık için burada ve ilerisinde toplamları 0 dan ∞ a limitsiz göstereceğiz. $A : \lambda \to \mu$ olacak şekildeki tüm A matrislerinin sınıfı (λ, μ) ile gösterilir. Böylece $A \in (\lambda, \mu)$ olması için gerekli ve yeterli koşul (2.1) in sağ tarafındaki serinin her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in \lambda$ için yakınsak olmasıdır ve her $x \in \lambda$ için $Ax = \{(Ax)_n\} \in \mu$ olması gerekir.

Bu tez boyunca tüm negatif alt indisli terimler sıfır olarak kabul edilir.

2.2 Literatür Özeti

Bir çok yazar bazı dizi uzayları üzerinde özel limitleme matrisleri ile verilen lineer operatörlerin spektrumunu ve fine spektrumunu çalışmıştır. Spektrum ve fine spektrum ile ilgili literatürde var olan bilgileri özetleyelim. $1 < p < \infty$ için ℓ_p dizi uzayı üzerinde Cesàro operatörünün fine spektrumu [19] da Gonzalez tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Wenger [18] de c üzerinde Cesàro operatörünün tamsayı kuvvetinin fine spektrumunu incelemiştir ve Rhoades [14] de bu sonucu ağırlıklı ortalama metotlarına genelleştirmiştir. Reade [28] de, c_0 dizi uzayı üzerinde Cesàro operatörünün spektrumunu çalışmıştır. c_0 ve c dizi uzayları üzerinde Rhaly operatörlerinin spektrumu Yıldırım tarafından [16] ve [17] de çalışılmıştır. Son yıllarda bir çok yazar genelleştirilmiş fark matrislerinin spektral ayrışımlarını incelemiştir. Örneğin, Akhmedov ve El-Shabrawy, [1] ,[38] de c_0, c ve ℓ_p $(1 < p < \infty)$ dizi uzayları üzerinde Δ_v genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin spektrumunu ve fine spektrumunu çalışmıştır.

ℓ_1 ve bv dizi uzayları üzerinde Δ fark operatörünün fine spektrumu [11] de Kayaduman ve Furkan tarafından ve c_0 ve c üzerinde ise [31] de Altay ve Başar tarafından araştırılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar Goldberg tarafından tanımlanan spektrumun ayrışımı ile ilgilidir. Bununla birlikte [6] da Durna ve Yıldırım c_0 üzerinde factorable matrisleri için spetrumun alt ayrışımını incelemiştir ve [3] de Başar, Durna ve Yıldırım bazı dizi uzayları üzerinde genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunu incelemiştir.

3. c DİZİ UZAYI ÜZERİNDE Δ^m FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

Banach uzayları üzerinde sınırlı operatörlerin spektrumlarının çok fazla uygulaması vardır. Bu nedenle sınırlı lineer operatörlerin spektrumları son yıllarda bir çok kişi tarafından çalışılmıştır. Bu çalışma, c Banach uzayı üzerinde literatürdeki fark operatörlerinin veya matrislerinin spektrumları üzerine bazı incelemeleri bir araya getirmeyi ve ilgili problemler için bir temel sağlamayı amaçlamaktadır. Şimdiye kadar c dizi uzayı üzerinde problem maksimum 2 mertebeye kadar çözülmüştür. Fakat P. Baliarsingh ve ark. 2021 de, c üzerinde Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ fark operatörünün ince spektrumlarını hesaplamışlardır. Bu tezde biz Δ^m, $m \in \mathbb{N}$ fark operatörünün c ve cs dizi uzayları üzerinde spektral ayrışımlarını vereceğiz. Böylece daha önce $m = 1$ için [31] de çalışılan Δ fark operatörü, [33] de çalışılan $B(1, -1)$ genelleştirilmiş fark operatörü ve $m = 2$ için [52] de çalışılan $B(1, -2, 1)$ genelleştirilmiş fark operatörü için elde edilen sonuçlar bu çalışmada içerilmiş ve genelleştirilmiş olacaktır.

c Banach uzayında bir m doğal sayısı için Δ^m genelleştirilmiş fark operatörü $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(\Delta x)_k &= x_k - x_{k-1} \\
(\Delta^2 x)_k &= \Delta(\Delta x)_k = \Delta(x_k - x_{k-1}) = x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2} \\
(\Delta^3 x)_k &= x_k - 3x_{k-1} + 3x_{k-2} - x_{k-3} \\
&\vdots \\
(\Delta^m x)_k &= x_k - \binom{m}{1} x_{k-1} + \binom{m}{2} x_{k-2} + \cdots + (-1)^m x_{k-m} \\
&= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k-i} \\
&= x_k - m x_{k-1} + \frac{m(m-1)}{2!} x_{k-2} + \cdots + (-1)^m x_{k-m}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \cdots\}$ dır ve $k < 0$ için $x_k = 0$ dır (bak [42]).

Δ^m operatörünün $m + 1$ bantlı bir (a_{nk}) matrisi ile gösterilebildiği kolayca ispatlanabilir. Burada her $n,k\in\mathbb{N}_0$ için

$$a_{nk}=\begin{cases}(-1)^{n-k}\binom{m}{k} & , \quad \max\{0,n-m\}\le k\le n\\ 0 & , \quad 0\le k<\max\{0,n-m\} \text{ veya } k>n\end{cases}$$

dir. Buna denk olarak

$$\Delta^m=(a_{nk})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ -m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \frac{m(m-1)}{2} & -m & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\\ (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

yazılabilir.

Aslında, Δ^m operatörü, farklı limitleme koşulları altında Δ, Δ^2, $B(r,s)$ ve $B(r,s,t)$ biçimindeki fark operatörlerini genelleştiren bir $(m+1)$-inci bant matrisi ile temsil edilir. İlk olarak, Δ^m geri fark operatörünün linerliliği ve sınırlılığı hakkında bazı temel bilgiler verilecektir. Daha sonra, c uzayında tanımlanan operatörün; nokta spektrumu, sürekli spektrumu ve artık spektrumu gibi spektrum ve ince spektrum kümeleri hesaplanacaktır.

c Banach uzayı üzerinde fark operatörlerinin spektrumları hakkında bilinen bazı sonuçları aşağıdaki gibidir.

(i). c üzerinde Δ operatörünün fine spektrumu [31] de aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

- $\sigma(\Delta,c)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-1|\le 1\}$,
- $\sigma_p(\Delta,c)=\emptyset$,
- $\sigma_r(\Delta,c)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-1|<1\}\cup\{0\}$,
- $\sigma_c(\Delta,c)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-1|=1\}\backslash\{0\}$.

(ii). c üzerinde Δ^3 operatörünün fine spektrumu [31] de aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

- $\sigma(\Delta^3, c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 7\}$,
- $\sigma_p(\Delta^3, c) = \emptyset$,
- $\sigma_r(\Delta^3, c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 7\} \cup \{0\}$,
- $\sigma_c(\Delta^3, c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 7\} \backslash \{0\}$.

(iii). c üzerinde Δ_{ab} operatörünün fine spektrumu [38] de aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

- $\sigma(\Delta_{ab}, c) = D \cup E$,
- $\sigma_p(\Delta_{ab}, c) = \begin{cases} E & , \text{ her } j \geq m \text{ için } a_i \neq a_j \text{ olacak şekilde } m \in \mathbb{N} \text{ mevcuttur} \\ \emptyset & , \text{ diğer yerde} \end{cases}$
- $\sigma_r(\Delta_{ab}, c) = \begin{cases} \{a_k : k \in \mathbb{N}\} \backslash \sigma_p(\Delta_{ab}, c) \subseteq \sigma_r(\Delta_{ab}, c), \\ \{\lambda \in \mathbb{C} : |a - \lambda| < |b|\} \cup \{a + b\} \subseteq \sigma_r(\Delta_{ab}, c), \\ \sigma_r(\Delta_{ab}, c) \subseteq \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_k \left|\frac{a_k - \lambda}{b_k}\right| < 1\right\} \cup \{a + b\}, \\ \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \sup_k \left|\frac{a_k - \lambda}{b_k}\right| < 1\right\} \subseteq \sigma_r(\Delta_{ab}, c), \\ \sigma_r(\Delta_{ab}, c) \subseteq ((D \cup E) \backslash G) \cup \{a + b\}. \end{cases}$
- $\sigma_c(\Delta_{ab}, c) = \begin{cases} \sigma_c(\Delta_{ab}, c) \subseteq \left((D \cup E) \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \sup_k \left|\frac{a_k - \lambda}{b_k}\right| \geq 1\right\}\right) \backslash H, \\ \sigma_c(\Delta_{ab}, c) \subseteq (\{\lambda \in \mathbb{C} : |a - \lambda| = |b|\} \cup E) \backslash H, \\ \left(\left\{\lambda \in \mathbb{C} : \inf_k \left|\frac{a_k - \lambda}{b_k}\right| < 1\right\} \cap E\right) \backslash \{a + b\} \subseteq \sigma_c(\Delta_{ab}, c), \\ (G \backslash \{a + b\}) \subseteq \sigma_c(\Delta_{ab}, c). \end{cases}$

burada

$$\begin{aligned} D &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |a - \lambda| \leq |b|\}, \\ E &= \{a_k : a_k \notin D, k \in \mathbb{N}\}, \\ G &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{her } k > k_0 \text{ için } |a_k - \lambda| = |b_k| \text{ olacak şekilde enaz bir } k_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır}\} \end{aligned}$$

dir.

(iv). c üzerinde $B(r,s)$ operatörünün fine spektrumu [33] de aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

- $\sigma(B(r,s),c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$,
- $\sigma_p(B(r,s),c) = \emptyset$,
- $\sigma_r(B(r,s),c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\} \cup \{r+s\}$,
- $\sigma_c(B(r,s),c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\} \setminus \{r+s\}$.

(v). c üzerinde $B(r,s,t)$ operatörünün fine spektrumu [52] de aşağıdaki biçimde belirlenmiştir:

- $\sigma(B(r,s,t),c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(r-\lambda)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\lambda)}}\right| \leq 1\right\}$,
- $\sigma_p(B(r,s,t),c) = \emptyset$,
- $\sigma_r(B(r,s,t),c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(r-\lambda)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\lambda)}}\right| < 1\right\} \cup \{r+s+t\}$,
- $\sigma_r(B(r,s,t),c) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\frac{2(r-\lambda)}{-s+\sqrt{s^2-4t(r-\lambda)}}\right| = 1\right\} \setminus \{r+s+t\}$.

3.1 c dizi uzayı üzerinde Δ^m fark operatörünün spektumu ve fine spektrumu

Şimdi Baliarsingh ve ark.[42] de çalıştığı c Banach uzayı üzerinde Δ^m operatörünün spektrumunu ve nokta spektrum, sürekli spektrum, rezidü spektrum ve ince spektrum gibi spektral ayrışımını verelim.

Lemma 3.1 *Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin c den c ye sınırlı lineer bir T operatörü belirtmesi için gerekli ve yeterli koşul*
(i) A nın satırları ℓ_1 dedir ve satırların ℓ_1 normları sınırlıdır,
(ii) A nın sütunları c dedir,
(iii) A nın satır toplamlarının dizisi c dedir.
Üstelik $\|A\|_{(c:c)} = \sup_n \sum_k |a_{nk}|$ dır ([53] , p.6 Teorem 6).

Lemma 3.2 *(z_k) ve (d_k) her $k \in \mathbb{N}_0$ için $|z_0| = p < \infty$ ile $z_{k+1} = z_k + d_{k+1}$ olacak şekilde iki karmaşık sayı dizisi olsun. Bu durumda*

(i) $(\sum_{k=0}^{n} d_k)$ dizisi sınırlı ise (z_k) dizisi de sınırlıdır,

(ii) $(\sum_{k=0}^{n} d_k)$ dizisi yakınsak ise (z_k) dizisi de yakınsaktır ([42] , Lemma 1).

İspat. (z_k) ve (d_k) nın her $k \in \mathbb{N}_0$ için $|z_0| = p < \infty$ ile $z_{k+1} = z_k + d_{k+1}$ olacak şekilde iki karmaşık sayı dizisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$z_{k+1} - z_k = d_{k+1}$$

dır. Şimdi yukarıdaki eşitliğin her iki tarafından 0 dan n ye kadar toplam alırsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(z_{k+1} - z_k) &= \sum_{i=0}^{n} d_{k+1} \\ &\Longrightarrow \quad z_{n+1} - z_0 = \sum_{i=0}^{n} d_{k+1} \\ &\Longrightarrow \quad z_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} d_{k+1} + z_0 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{i=0}^{n} d_{k+1}$ dizisi sırasıyla sınırlı veya yakınsak ise (z_k) dizisi de sınırlı veya yakınsaktır. ■

Teorem 3.1 *$\Delta^m : c \to c$ fark operatörü sınırlı lineerdir ve*

$$\|\Delta^m\|_{(c:c)} = 2^m$$

dir ([42] , Teorem 1).

İspat. Δ^m geri fark operatörünün (3.1) deki matris gösterimine dikkat edecek olursak Δ^m $m+1$ bantlı bir bant matristir. Dolayısıyla Lemma 3.1 in koşullarının sağlandığı açıktır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|\Delta^m\|_{(c:c)} &= \sup_n \sum_k |a_{nk}| \\ &= \sup_n \sum_k \left|(-1)^{n-k}\binom{m}{k}\right| \\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} \\ &= 2^m \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.2 *c üzerinde Δ^m operatörünün point spektrumu $\sigma_p(\Delta^m, c) = \emptyset$ dir ([42] , Teorem 2).*

İspat. c de $x \neq \theta = \{0, 0, 0, \cdots\}$ olmak üzere $\Delta^m x = \alpha x$ lineer denklem sistemini göz önüne alalım. (3.1) den

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m(m-1)}{2} & -m & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha x_0 \\ -mx_0 + x_1 &= \alpha x_1 \\ \frac{m(m-1)}{2!}x_0 - mx_1 + x_2 &= \alpha x_2 \\ \frac{-m(m-1)(m-2)}{3!}x_0 + \frac{m(m-1)}{2!}x_1 - mx_2 + x_3 &= \alpha x_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir. Birinci denklemden $x_0 \neq 0$ olursa $\alpha = 1$ dir. Dolayısıyla 2. denklemden $-mx_0 + x_1 = x_1$ olup $x_0 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabul edelim ki $x_0 = 0$ olsun bu durumda 2. denklemden $x_1 = \alpha x_1$ olup $x_1 \neq 0$ olursa $\alpha = 1$ dir. Dolayısıyla 3. denklemden $-mx_1 + x_2 = x_2$ olup $x_1 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Bu şekilde devam edersek $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots . = 0$ olur. Buradan $\Delta^m x = \alpha x$ olacak şekilde $x \neq 0$ yoktur. Dolayısıyla $\sigma_p(\Delta^m, c) = \emptyset$ dir. ■

Sonuç 3.1 $I_3\sigma(\Delta^m, c) = II_3\sigma(\Delta^m, c) = III_3\sigma(\Delta^m, c) = \emptyset$.

İspat. Önerme 2.1 (3) den $\sigma_p(\Delta^m, c) = I_3\sigma(\Delta^m, c) \cup II_3\sigma(\Delta^m, c) \cup III_3\sigma(\Delta^m, c)$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 3.2 den elde edilir. ■

$\Delta^m : c \to c$ sınırlı lineer bir operatör olduğundan, $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ üzerinde düşünüldüğünde $(\Delta^m)^* : c^* \to c^*$ adjoint operatörü

$$\begin{pmatrix} \chi & 0 \\ B & (\Delta^m)^T \end{pmatrix}$$

matris gösterimine sahiptir. Burada $(\Delta^m)^T$, Δ^m matrisinin transpozudur, χ, Δ^m nin satır toplamlarının dizisinin limitinden Δ^m nin sütunlarının limitlerinin toplamının farkıdır ve B, her $k \in \mathbb{N}_0$ için k -ıncı girişi Δ^m nin k -ıncı sütunlarının limiti olan sütun vektörüdür. Δ^m fark matrisi için $\chi = 0$ olduğu ve $B = \mathbf{0}$ sıfır sütun matrisi olduğu açıktır. Dolayısıyla $c^* \cong \ell_1$ üzerinde $(\Delta^m)^*$ adjoint operatörünün matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -m & \frac{m(m-1)}{2} & \cdots & (-1)^m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -m & \frac{m(m-1)}{2} & \cdots & (-1)^m & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -m & \frac{m(m-1)}{2} & \cdots & (-1)^m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dir.

Aşağıdaki Lemmalar ilerleyen kısımlar için gereklidir.

Lemma 3.3 *T lineer operatörünün yoğun görüntüye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T^* adjoint operatörünün bire bir olmasıdır ([10] , Theorem II 3.7).*

Lemma 3.4 *T lineer operatörünün sınırlı terse sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T^* adjoint operatörünün örten olmasıdır ([10] , Theorem II 3.7).*

Teorem 3.3 *$c^* \cong \ell_1$ üzerinde $(\Delta^m)^*$ adjoint operatörünün point spektrumu*

$$\sigma_p\left((\Delta^m)^*, \ell_1\right) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \cup \{0\}$$

kümesidir ([42] , Teorem 3).

İspat. Kabul edelim ki $(\Delta^m)^* f = \alpha f$ ve $0 \neq f \in \ell_1$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned}
0.f_0 + 0.f_1 + 0.f_2 + \cdots + 0.f_m &= \alpha f_0 \\
f_1 - m f_2 + \frac{m(m-1)}{2!} f_3 + \cdots + (-1)^m f_{m+1} &= \alpha f_1 \\
f_2 - m f_3 + \frac{m(m-1)}{2!} f_4 + \cdots + (-1)^m f_{m+2} &= \alpha f_2 \\
&\vdots \\
f_k - m f_{k+1} + \frac{m(m-1)}{2!} f_{k+2} + \cdots + (-1)^m f_{k+m} &= \alpha f_k \qquad (3.3) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

denklem sistemini göz önüne alalım. Direkt hesaplama ile her $k \geq 1$ için

$$|f_k| = \frac{1}{|1-\alpha|} |m f_{k+1} - \frac{m(m-1)}{2!} f_{k+2} + \cdots + (-1)^m f_{k+m}| \qquad (3.4)$$

elde edilir. O halde (3.4) den her $k \in \mathbb{N}_0$ için $|\alpha| < 1$ iken $f = (1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^k, \alpha^{k+1}, \cdots)$ vektörünün $|1-\alpha| < 2^m - 1$ eşitsizliğini sağlayan α öz değerine karşılık gelen bir öz vektör olduğu açıktır. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
|1-\alpha| &= \left| \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} \frac{f_{k+i}}{f_k} \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} \left| \frac{f_{k+i}}{f_k} \right| \\
&< \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} = 2^m - 1
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \subseteq .\sigma_p((\Delta^m)^*, \ell_1)$$

elde edilir.

Tersine, eğer $|1-\alpha| < 2^m - 1$ durumu düşünülürse $(\Delta^m)^* - \alpha I$ adjoint operatörü $1-1$ değildir. Çünkü $x = (0, x_1, x_2, \cdots) \neq (1, x_1, x_2, \cdots) = y$ için $((\Delta^m)^* - \alpha I)\, x = ((\Delta^m)^* - \alpha I)\, y$ dir. O halde Lemma 3.3 dan $\Delta^m - \alpha I$ operatörü c de yoğun görüntüye sahip değildir. Dolayısıyla $(\Delta^m)^* - \alpha I$ tersinir değildir ve

$$\sigma_p((\Delta^m)^*, \ell_1) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\}$$

dir.

Ayrıca $m = 1$ durumu için $f_0 \neq 0$ için $\alpha = 0$, $f = (f_0, 0, 0, \cdots)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Dolayısıyla $0 \in \sigma_p((\Delta^m)^*, \ell_1)$ elde edilir. Zaten $m > 1$ ise 0 $\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\}$ kümesi tarafından içerilir. ■

Teorem 3.4 *c üzerinde Δ^m operatörünün rezidü spektrumu*

$$\sigma_r(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \cup \{0\}$$

kümesidir ([42] , Teorem 4).

İspat. $\sigma_r(\Delta^m, c) = \sigma_p((\Delta^m)^*, \ell_1) \backslash \sigma_p(\Delta^m, c)$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 3.2 ve 3.4 den elde edilir. ■

Teorem 3.5 *c üzerinde Δ^m operatörünün spektrumu*

$$\sigma(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \tag{3.5}$$

kümesidir ([42] , Teorem 5).

İspat. Teoremin ispatı iki adımdan oluşur. İlk önce

$$\sigma(\Delta^m, c) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$$

olduğu veya eğer $\alpha \in \mathbb{C}$ iken $|1-\alpha| > 2^m - 1$ için $\alpha \notin \sigma(\Delta^m, c)$ olduğu göstermelidir. Bir sonraki adımda

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \subseteq \sigma(\Delta^m, c)$$

olduğu gösterilmelidir.

Kabul edelim ki $|1-\alpha| > 2^m - 1$ koşulu altında $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. $(\Delta^m - \alpha I)$ bir üçgen olduğundan bir terse sahiptir yani, $(b_{nk}) =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)^2} & \frac{m}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m^3}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2} & \frac{m^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)^2} & \frac{m}{(1-\alpha)^2} & \frac{1}{1-\alpha} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

olmak üzere $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} = (b_{nk})$ dir. Basit bir hesaplama ile her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}
b_{nn} &= \frac{1}{1-\alpha}, \\
b_{n,n-1} &= \frac{m}{(1-\alpha)^2}, \\
b_{n,n-2} &= \frac{m^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)^2}, \\
b_{n,n-3} &= \frac{m^3}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2} \\
b_{n,n-4} &= \frac{m^4}{(1-\alpha)^5} - \frac{m^3(m-1)}{(1-\alpha)^4} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} - \frac{m^3(m-1)}{2!(1-\alpha)^4} \\
&\quad + \frac{m^2(m-1)^2}{2!2!(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!(1-\alpha)^2} \\
&\vdots \\
b_{n,n-m} &= \frac{1}{1-\alpha}\Big[m b_{n,n-m+1} - \frac{m(m-1)}{2} b_{n,n-m+2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} b_{n,n-m+3} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{m-1} b_{n,n}\Big] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilebilir. Şimdi Lemma 3.1 i kullanarak $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} \in B(c)$ olduğunu kanıtlanacaktır. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğunu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| = |b_{n,0}| + |b_{n,1}| + \cdots + |b_{n,n}| \\
&= |b_{n,n}| + |b_{n,n-1}| + |b_{n,n-2}| + \cdots + |b_{n,0}| + \cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{1}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{m}{(1-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{m^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)^2}\right| \\
&\quad + \left|\frac{m^3}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2}\right| \\
&\quad + \Bigg|\frac{m^4}{(1-\alpha)^5} - \frac{m^3(m-1)}{(1-\alpha)^4} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} \\
&\quad - \frac{m^3(m-1)}{2!(1-\alpha)^4} + \frac{m^2(m-1)^2}{2!2!(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} \\
&\quad - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!(1-\alpha)^2}\Bigg| + \cdots \\
&= \frac{1}{|m|}\Bigg\{\left|\frac{m}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{m^2}{(1-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{m^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{m^2(m-1)}{2!(1-\alpha)^2}\right| \\
&\quad + \left|\frac{m^4}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^3(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2}\right| + \cdots\Bigg\}
\end{aligned}$$

olsun. Şimdi, $\beta_m = \frac{m}{1-\alpha}$ ve $|\beta_m|^k$ nın katsayısı ise

$$\frac{1}{|m|^k}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k=1}^{m}\binom{m}{i_1}\binom{m}{i_2}\cdots\binom{m}{i_k} = \frac{1}{|m|^k}\sum_{i_1=1}^{m}\binom{m}{i}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}\binom{m}{i_k}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{|m|}\left\{\left|\frac{m}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{m^2}{(1-\alpha)^2}\right| + \left|\frac{m^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{m^2(m-1)}{2!(1-\alpha)^2}\right|\right.\\
&\quad + \left|\frac{m^4}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^3(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2}\right|\\
&\quad + \left|\frac{m^5}{(1-\alpha)^5} - \frac{m^4(m-1)^2}{2!(1-\alpha)^4} + \frac{m^3(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3}\right.\\
&\quad - \frac{m^4(m-1)}{2!(1-\alpha)^4} + \frac{m^3(m-1)^2}{2!(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3}\\
&\quad \left.\left. - \frac{m^2(m-1)(m-2)\,(m-3)}{4!(1-\alpha)^2}\right| + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|m|}\left\{\left|\frac{m}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^2 + \left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^3\right.\\
&+\frac{m-1}{2!}\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^2 + \left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^4 + (m-1)\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^3\\
&+\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^2 + \left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^5 + (m-1)\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^4\\
&+\frac{2(m-1)(m-2)}{3!}\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^3 + \frac{(m-1)}{2!}\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^4\\
&\left.+\left(\frac{m-1}{2!}\right)^2\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^3 + \frac{(m-1)(m-2)\,(m-3)}{4!}\left|\frac{m}{1-\alpha}\right|^2 + \cdots\right\}\\
&= \frac{1}{|m|}\left\{|\beta_m| + |\beta_m|^2 + |\beta_m|^3 + \frac{m-1}{2!}|\beta_m|^2 + |\beta_m|^4\right.\\
&+2\frac{m-1}{2!}|\beta_m|^3 + \frac{(m-1)(m-2)}{3!}|\beta_m|^2\\
&+|\beta_m|^5 + (m-1)|\beta_m|^4 + \frac{2(m-1)(m-2)}{3!}|\beta_m|^3\\
&+\frac{m-1}{2!}|\beta_m|^4 + \left(\frac{m-1}{2!}\right)^2|\beta_m|^3\\
&\left.+\frac{(m-1)(m-2)\,(m-3)}{4!}|\beta_m|^2 + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|m|}\left\{|\beta_m| + \left(\frac{1}{|m|}\sum_{i_1=1}^{m}\binom{m}{i}\right)|\beta_m|^2 + \left(\frac{1}{|m|^2}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\binom{m}{i_1}\binom{m}{i_2}\right)|\beta_m|^3 + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{|m|}\left\{|\beta_m| + \left|\frac{2^m-1}{m}\right||\beta_m|^2 + \left|\frac{2^m-1}{m}\right|^2|\beta_m|^3 + \left|\frac{2^m-1}{m}\right|^3|\beta_m|^4 + \cdots\right\} \\
&< \frac{1}{|1-\alpha|}\left\{1 + \left|\frac{2^m-1}{1-\alpha}\right| + \left|\frac{2^m-1}{1-\alpha}\right|^2 + \left|\frac{2^m-1}{1-\alpha}\right|^3 + \cdots\right\} \\
&= \frac{1}{|1-\alpha| - |2^m-1|} < \infty
\end{aligned}
$$

dır. Her $k \geq 1$ $i$çin $\left|\dfrac{2^m-1}{1-\alpha}\right| < 1$ olduğundan $|\beta_m|^k$ nın katsayıları sonludur. Böylece $\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ dur. (S_n) bir pozitif ree sayı dizisi olarak yakınsaktır ve dolayısıyla sınırlıdır.

İkincisi,

$$\left|\frac{1}{1-\alpha}\right| \leq \left|\frac{m}{1-\alpha}\right| \leq \left|\frac{2^m-1}{1-\alpha}\right| < 1$$

olduğundan her $k \in \mathbb{N}_0$ için $\lim_{n\to\infty} b_{nk}$ mevcuttur.

Son olarak (b_{nk}) nın satır toplamlarının dizisinin genel terimi z_k olarak düşünüldüğünde

$$
\begin{aligned}
z_k &= \frac{1}{1-\alpha} \times \left\{1 + \frac{m}{1-\alpha} + \frac{m^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{m^3}{(1-\alpha)^3} - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)} + \cdots + (1-\alpha)b_{0k}\right\} \\
z_{k+1} &= \frac{1}{1-\alpha} \times \left\{1 + \frac{m}{(1-\alpha)} + \frac{m^2}{(1-\alpha)^2} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)} + \frac{m^3}{(1-\alpha)^3}\right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^2} + \cdots + (1-\alpha)b_{1,k+1} + (1-\alpha)b_{0,k+1}\right\} \\
&= z_k + b_{0,k+1}
\end{aligned}
$$

dir. $|z_0| = \left|\dfrac{1}{1-\alpha}\right| < 1$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|b_{0k}| = \lim_{n\to\infty} S_n < \infty$ olduğu açıktır. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için (b_{nk}) dizisi yakınsaktır. Bu Lemma 3.2 den (z_k) dizisinin de yakınsak olmasını sağlar. Dolayısıyla (b_{nk}) nın satır toplamlarının dizisi yakınsaktır $|1-\alpha| > 2^m - 1$ iken ve $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} \in B(c)$ dir.

Şimdi $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ operatörünün tanım kümesinin c de yoğun olduğu denk olarak $\Delta^m - \alpha I$ operatörünün görüntü kümesinin c de yoğun olduğu, ki bu durumda $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ operatörü örtendir, gösterilebilir. Böylece

$$\sigma(\Delta^m, c) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \tag{3.7}$$

dır. Tersine $\alpha \neq 1$ ve $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ olduğu düşünülürse $\Delta^m - \alpha I$ nın bir üçgen olduğu ve dolayısıyla $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ in mevcut olduğu açıktır. Teorem 3.2 nin sonucu olarak $y = (1, 0, 0, \cdots)$ birim dizisinin $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ dönüşümü yani, $x = (\Delta^m - \alpha I)^{-1} y$ dizisi c dedir. Bu $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ koşulu altında ve Teorem 3.3 den $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ operatörünün bir özdeğeri olmamasını önerir. Buradan $(\Delta^m)^* - \alpha I$ nın 1-1 olmadığı sonucuna varılır. Dolayısıyla $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ koşul altında $\Delta^m - \alpha I$ operatörü c de yoğun değildir. Son olarak $\alpha = 1$ durumu için sonuç ispatlanır. Eğer $\alpha = 1$ ise bu durumda

$$\Delta^m - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -m & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m(m-1)}{2!} & -m & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{m(m-1)(1-2)}{3!} & \frac{m(m-1)}{2!} & -m & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

tersinir değildir. Böylece

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \subseteq \sigma(\Delta^m, c) \tag{3.8}$$

dir. (3.7) ve (3.8) kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Şimdi yukarıdaki sonuçların daha fazla ayrıntısı ve doğruluğu için aşağıdaki uyarılar ve örnek verilecektir:

Uyarı 3.1 *(Teorem 3.5 in 1. kısmına alternatif bir ispat)* $\Delta^m = I + B$ *olacak şekildeki bir* $B : c \to c$ *matris operatörünü ele alalım.* $\Delta^m : c \to c$ *ve* $\|\Delta^m\|_{(c:c)} = 2^m$ *olduğundan* $\|B\|_{(c:c)} = 2^m - 1$ *olduğu açıktır. Şimdi* $1 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ *için*

$$\begin{aligned} \Delta^m - \alpha I &= (1-\alpha) I + B \\ &= (1-\alpha)\left(I + \frac{1}{1-\alpha} B\right) \end{aligned}$$

hesaplanırsa bu $\left\| \frac{1}{1-\alpha} B \right\|_{(c:c)} = \frac{2^m - 1}{1-\alpha} < 1$ *iken* $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ *nin* c *de mevcut ve sınırlı olduğunu gösterir. Bu* $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ *olmasına denktir ([42] , Uyarı 1).*

Uyarı 3.2 Δ^m *nin lineer operatör olduğunu bildiğimiz gibi*

$$\Delta^m = \Delta \circ \Delta^{m-1}$$

şeklinde yazılabilir burada $\circ$ *sembolü,* Δ^m *operatörüne karşılık gelen matrislerin çarpımı olarak tanımlanabilen operatörlerin birleşimini gösterir. Spektral dönüşüm teoremi kullanılarak*

$$\sigma(\Delta^m, c) = [\sigma(\Delta, c)]^m$$

elde edilir. Bu

$$\sigma(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$$

olduğunu gösterir ([42] , Uyarı 2).

Bu iki uyarının, spektrumun alt ayrışımı yerine yalnızca sınırlı bir lineer operatörün spektrumunu bulmak için kullanıldığına dikkat edilmelidir.

Örnek 3.1 *$m = 2$ ve $\alpha = -1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\alpha \in \sigma_r(\Delta^2, c)$ dir. Teorem 3.3 den $|1-(-1)| < 2^2 - 1 = 3$ olduğu açıktır.*
Buna rağmen $-1 \notin \sigma_p(\Delta^2, c)$ ve $-1 \notin \sigma_c(\Delta^2, c)$ olduğu fakat $-1 \in \sigma(\Delta^2, c)$ olduğu kolayca görülür.
Bu amaçla $\Delta^2 + I$ operatörü ele alınırsa, burada

$$\Delta^2 + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & -2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

dır. Δ^2+I üçgen olduğundan bir terse sahiptir yani, $(\Delta^2+I)^{-1}$ mevcuttur. Bu $-1 \notin \sigma_p(\Delta^2, c)$ olduğunu ispatlar. Şimdi $(\Delta^2+I)^{-1} = (c_{nk})$ ters matrisinin elemanları için genel tekrarlı formül türetilir. Yani $z_0 = z_1 = 1/2$ başlangıç değerleri ile

$$2z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = 0, \;\; n > 0$$

dır.

$$(\Delta^2+I)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca hesaplanabilir. Şimdi $(\Delta^2+I)^{-1}$ *nin satırların* ℓ_1 *normunun supremumu alınırsa*

$$\begin{aligned}\sup_n \sum_{k=0}^{n}|c_{nk}| &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|c_{nk}| \\ &= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\cdots\right] \\ &= \left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{256}+\cdots\right] \\ &= \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{512}+\cdots\right] \\ &= 1+\frac{1}{2\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, $(\Delta^2+I)^{-1}$ *nin satır ve sütün toplamlarının* c *de olduğunu gösterir. Böylece* $(\Delta^2+I)^{-1}\in B(c)$ *dir ve* $-1\notin\sigma_c(\Delta^2,c)$ *sonucuna varılır.*
Son olarak, Teorem 3.3 den $(\Delta^2+I)^*$ *örten değildir ve Lemma 3.4 gereğince* Δ^2+I *operatörünün görüntü kümesi* c *de yoğun değildir. Böylece* $-1\in\sigma_r(\Delta^2,c)$ *dir ve sonuç olarak* $-1\in\sigma(\Delta^2,c)$ *dir ([42] , Örnek 1).*

Teorem 3.6 *c üzerinde* Δ^m *operatörünün sürekli spektrumu*

$$\sigma_c(\Delta^m,c)=\{\alpha\in\mathbb{C}:|1-\alpha|=2^m-1\}\setminus\{0\}$$

kümesidir ([42] , Teorem 6).

İspat. Sınırı lineer bir operatörün spektrumunun tanımından ve Teorem 3.5, 3.2 ve 3.4 den doğrudan elde edilir. ■

Teorem 3.7 *Eğer* $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \cup \{0\} \backslash \{1\})$ *ise* $\alpha \in III_2\sigma(\Delta^m, c)$ *dir ([42] , Teorem 7).*

İspat. Kabul edelim ki $a \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \cup \{0\} \backslash \{1\})$ olsun. Bu durumda Teorem 3.3 den $(\Delta^m)^* - \alpha I$ operatörü $1-1$ değildir ve dolayısıyla Lemma 3.3 den $\alpha \in III\sigma(\Delta^m, c)$ elde edilir. Dahası $\alpha \neq 1$ için $\Delta^m - \alpha I$ operatörünün bir terse sahip olduğu fakat $\alpha = 0$ için $(\Delta^m)^* - \alpha I$ operatörünün örten olmadığı elde edilir. Böylece Lemma 3.4 den $\Delta^m - \alpha I$ operatörü sınırlı terse sahip değildir. Bu $\Delta^m - \alpha I$ nın sürekli olmadığını gösterir. ■

Sonuç 3.2 $III_1\sigma(\Delta^m, c) = \{1\}$ *dir.*

İspat. Önerme 2.1 (5) den $\sigma_r(\Delta^m, c) = III_1\sigma(\Delta^m, c) \cup III_2\sigma(\Delta^m, c)$ olduğundan ve $III_1\sigma(\Delta^m, c) \cap III_2\sigma(\Delta^m, c) = \emptyset$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 3.4 ve 3.7 den elde edilir. ■

Teorem 3.8 *Eğer* $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| > 2^m - 1\} \backslash \{1\})$ *ise* $\alpha \in I_1\sigma(\Delta^m, c)$ *dir ([42] , Teorem 7).*

İspat. Kabul edelim ki $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| > 2^m - 1\} \backslash \{1\})$ olsun. $a \neq 1$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\Delta^m - \alpha I$ operatörü bir terse sahiptir. Bu $\Delta^m - \alpha I$ operatörünün örten olduğunu gösterir ve dolayısıyla $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ ters operatörü c de yoğun görüntüye sahiptir. Böylece Lemma 3.3 den $(\Delta^m - \alpha I)$ operatörü c de yoğundur. Bu nedenle $\alpha \in I\sigma(\Delta^m, c)$ dir. Dahası, $|1-\alpha| > 2^m - 1$ olduğundan Teorem 3.5 den $\Delta^m - \alpha I$ operatörü bir sınırlı terse sahiptir. Dolayısıyla $\alpha \in 1\sigma(\Delta^m, c)$ dir. Böylece $|1-\alpha| > 2^m - 1$ eşitsizliğini sağlayan α lar için $\alpha \in I_1\sigma(\Delta^m, c)$ sonucuna ulaşılır. ■

3.2 c dizi uzayı üzerinde Δ^m fark operatörünün aralarında ayrık olması gerekmeyen spektral ayrışımları

Teorem 3.9 *c üzerinde Δ^m operatörünün spektral ayrışımı için aşağıdakiler geçerlidir:*

a) $\sigma_{ap}(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \backslash \{1\}$,

b) $\sigma_\delta(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$,

c) $\sigma_{co}(\Delta^m, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \cup \{0\}$.

İspat. a) Önerme 2.1 (8) den $\sigma_{ap}(\Delta^m, c) = \sigma(\Delta^m, c) \backslash III_1\sigma(\Delta^m, c)$ olduğundan, istenilen sonuç Teorem 3.5 ve Sonuç 3.2 den elde edilir.
b) Önerme 2.1 (6) dan $\sigma_\delta(\Delta^m, c) = \sigma(\Delta^m, c) \backslash I_3\sigma(\Delta^m, c)$ olduğundan, istenilen sonuç Teorem 3.5 ve Sonuç 3.1 den elde edilir.
c) Önerme 2.1 (6) dan

$$\begin{aligned}\sigma_{co}(\Delta^m, c) &= III_1\sigma(\Delta^m, c) \cup III_2\sigma(\Delta^m, c) \cup III_3\sigma(\Delta^m, c) \\ &= \sigma_r(\Delta^m, c) \cup III_3\sigma(\Delta^m, c)\end{aligned}$$

olduğundan, istenilen sonuç Teorem 3.4 ve Sonuç 3.1 den elde edilir. ■

Sonuç 3.3 $\sigma_{ap}((\Delta^m)^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^m - 1\}$ *dir ve* $\sigma_\delta((\Delta^m)^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^m - 1\} \backslash \{1\}$ *dir.*

İspat. Önerme 2.2 (c)-(d) ve Teorem 3.9 dan elde edilir. ■

3.3 m sayısının seçimine göre karşılaştırma

Bu kısımda X fark operatörleri için farklı m sayıları alarak bu araştırmanın sonuçlarının daha önce yapılan çalışmaları içerdiği gösterilecektir.

(i) Eğer $m = 1$ ve $X = \Delta$ alınırsa (bakınız [5] ve [31]):

- $\sigma(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^1 - 1 = 1\}$,
- $\sigma_p(\Delta, c) = \emptyset$,
- $\sigma_r(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^1 - 1 = 1\} \cup \{0\}$,
- $\sigma_c(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{0\}$,
- $\sigma_{ap}(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{1\}$,
- $\sigma_\delta(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^1 - 1 = 1\}$,
- $\sigma_{co}(\Delta, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^1 - 1 = 1\}$,
- $\sigma_{ap}((\Delta^m)^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \le 2^1 - 1 = 1\}$,

- $\sigma_\delta((\Delta^m)^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{1\}$ dir.

(ii) Eğer $m = 1$ ve $X = B(1,-1)$ alınırsa (bakınız [3] ve [33]):

- $\sigma(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq |-1|\}$,

- $\sigma_p(B(1,-1), c) = \emptyset$,

- $\sigma_r(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^1 - 1 = 1\} \cup \{0\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < |-1|\} \cup \{1-1\}$,

- $\sigma_c(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{0\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = |-1|\} \backslash \{1-1\}$,

- $\sigma_{ap}(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{1\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq |-1|\} \backslash \{1\}$,

- $\sigma_\delta(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\} = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq |-1|\}$,

- $\sigma_{co}(B(1,-1), c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^1 - 1 = 1\} \cup \{0\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < |-1|\} \cup \{1+(-1)\}$,

- $\sigma_{ap}((B(1,-1))^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq |-1|\}$,

- $\sigma_\delta((B(1,-1))^*, \ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^1 - 1 = 1\} \backslash \{1\}$
 $= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq |-1|\} \backslash \{1\}$ dir.

(iii) Eğer $m = 2$ ve $X = B(1,-2,1)$ alınırsa (bakınız [4] ve [52])

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2(\alpha-1)}{2+\sqrt{4-4(1-\alpha)}}\right| = |\sqrt{\alpha}-1| \leq 1 \\
&||\sqrt{\alpha}|-1| \leq |\sqrt{\alpha}-1| \leq 1 \\
&\Longrightarrow -1 \leq |\sqrt{\alpha}|-1 \leq 1 \\
&\Longrightarrow |\sqrt{\alpha}| \leq 2 \\
&\Longrightarrow |\alpha| \leq 4
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $|1-\alpha| \leq 3$ ise $|\alpha| \leq 4$ olacağından $|1-\alpha| \leq 3$ ise $\left|\frac{2(\alpha-1)}{2+\sqrt{4-4(1-\alpha)}}\right| \leq 1$ olup aşağıdakiler geçerlidir:

- $\sigma(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^2 - 1 = 3\}$,

- $\sigma_p(B(1,-2,1),c) = \emptyset$,

- $\sigma_r(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^2 - 1 = 3\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 3\} \cup \{1-2+1\}$,

- $\sigma_c(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 2^2 - 1 = 3\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 3\} \backslash \{1-2+1\}$,

- $\sigma_{ap}(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^2 - 1 = 3\} \backslash \{1\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 3\} \backslash \{1-2+1\}$,

- $\sigma_\delta(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^2 - 1 = 3\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 3\}$,

- $\sigma_{co}(B(1,-2,1),c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^2 - 1 = 3\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 3\} \cup \{1-2+1\}$,

- $\sigma_{ap}(B(1,-2,1)^*,\ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^2 - 1 = 3\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 3\}$,

- $\sigma_{ap}(B(1,-2,1)^*,\ell_1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^2 - 1 = 3\} \backslash \{1\}$
$= \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 3\} \backslash \{1-2+1\}$ dir.

(iv) Her $k \in \mathbb{N}$ için $m = 1$, $a_k = 1$, $b_k = 1$ ve $X = \Delta_{11}$ alınırsa (bakınız [38]) bu durumda

$$D = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 1\}$$
$$E = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-1| > 1\} = \emptyset$$
$$G = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 1\}$$
$$H = \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla

- $\sigma(\Delta_{11},c) = D \cup E = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 1\}$,

- $\sigma_p(\Delta_{11},c) = E = \emptyset$,

- $\sigma_r(\Delta_{11},c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 3\} \cup \{0\}$,

- $\sigma_c(\Delta_{11}, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 3\} \backslash \{0\}$
  olduğu doğrulanabilir.

(v) $m = 3$ ve $X = \Delta^3$ alınırsa (bakınız [50])

- $\sigma(\Delta^3, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^3 - 1 = 7\}$,

- $\sigma_p(\Delta^3, c) = \emptyset$,

- $\sigma_r(\Delta^3, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^3 - 1 = 7\} \cup \{0\}$,

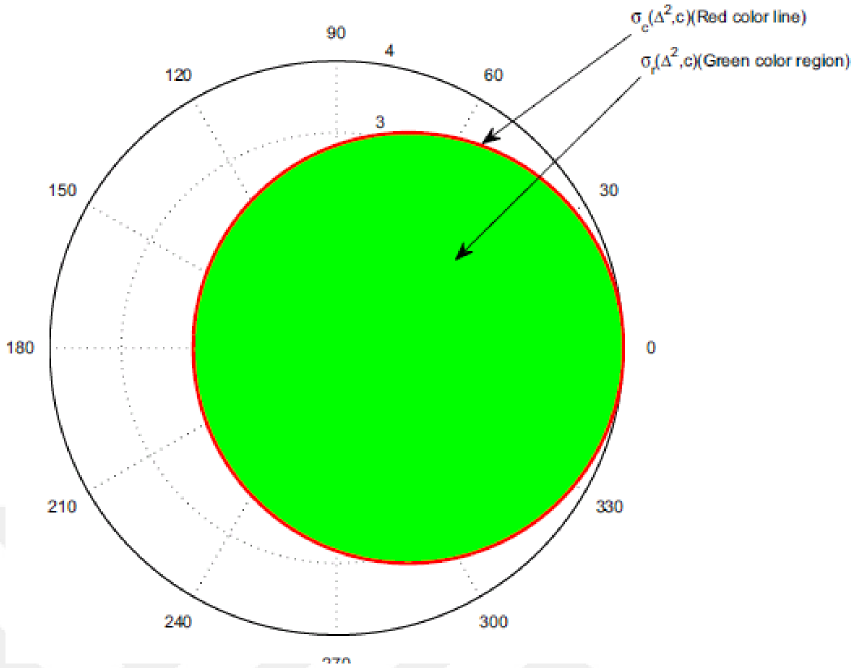
- $\sigma_c(\Delta^3, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 2^3 - 1 = 7\} \backslash \{0\}$
  elde edilir.

3.4 Geometrik Yorum

$\alpha = \rho(\cos t + i \sin t) \in \sigma(\Delta^m, c)$ olsun. Teorem 3.5 kullanılarak

$$\begin{aligned} |1-\alpha| &\leq 2^m - 1 \\ &\Longrightarrow (1-\rho\cos t)^2 + \rho^2 \sin^2 t \leq 2^{2m} - 2^{m+1} + 1 \\ &\Longrightarrow \rho^2 - 2\rho\cos t - 2^{2m} + 2^{m+1} \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu, merkezi $(1, 0)$ ve yarıçapı $2^m - 1$ olan kapalı bir dairesel diski temsil eder. Benzer bir şekilde Δ^m fark operatörünün rezidü spektrumunun yukarıdaki dairesel diskin iç kısmını temsil ettiği kolaylıkla gösterilebilir. Dairesel diskin çevresi, Δ^m fark operatörünün sürekli spektrumunun bir bölümünü belirtir. Örneğin, MATLAB çizim araçlarını kullanarak, spektrumun bölgelerini (bkz. Şekil 1), $m = 2$ için Δ^m fark operatörünün rezidü ve sürekli spektrumu çizilmiştir. Beyaz ve yeşil renkli bölgeler, sırasıyla rezidü ve sürekli spektrumları belirtirken, her iki bölge için birleştirilmiş kısım, Δ^2 fark operatörünün spektrumunu belirtir.



$\sigma(\Delta^2, c)$ (sınır ile birlikte dairesel bölge)

Şekil 1. c dizi uzayı üzerinde Δ^2 fark operatörünün fine spektrumunun spektral ayrışımları

3.5 Sonuç

m nin farklı uygun koşulları altında Δ^m operatörünün, birkaç fark operatörünü genellediği fark edilmiştir. Örneğin; $m = 1$ için Δ operatörü, $m = 1$ için $B(1, -1)$ operatörü, $m = 2$ için $B(1, -2, 1)$ operatörü, $m = 1$ için her k için $a_k = 1$ ve $b_k = -1$ olmak üzere Δ_{ab} operatörü elde edilir. Ayrıca, bu bölümde verilen sonuşlar Altay ve Başar [31] tarafından çalışılan Δ operatörünün spektruma, Altay ve Başar tarafından çalışılan $B(r, s)$ operatörünün spektrumuna [33] ve Furkan, Bilgiç ve Altay [52] tarafından c Banach uzayı üzerinde çalışılan $B(r, s, t)$ operatörünün spektrumuna indirgenmiştir. Daha önceki çalışmalarda fark operatörlerinin spektrumları sadece ikinci mertebeye kadar incelendi, ancak [42] de m. yüksek mertebeden $(m \geq 1)$ fark operatörünün spektrumunu ve ince spektrumu da araştırıldı ve bu bölümde sunuldu. Bu nedenle, bu bölümde verilen [42] nin sunduğu sonuçlar daha geneldir ve literatürdeönceki yazarlarınkinden daha kapsamlıdır.

4. cs DİZİ UZAYI ÜZERİNDE Δ^m FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

Bu bölümde Δ^m operatörünün cs dizi uzayı üzerinde spektrumunu fine spektrumunu ve spektral ayrışımları hesaplanacaktır. Burada

$$cs : \left\{ x = (x_n) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i \text{ mevcut} \right\}$$

biçimindeki dizi uzayıdır. Eğer $T : cs \to cs$, A matris gösterimine sahip sınırlı lineer bir operatör ise $T^* : cs^* \to cs^* \cong bv$ adjoint operatörünün matris gösterimi A matrisinin transpozudur.

Lemma 4.1 *$A = (a_{nk})$ matrisinin bir $T \in B(cs)$ operatörü belirtmesi için gerekli ve yeterli koşul*
i) Her k için $\sum_n a_{nk}$ yakınsaktır,
ii) $\sup_N \sum_k \left| \sum_{n=1}^{N} (a_{nk} - a_{n,k-1}) \right| < \infty$ dir ([53] , 8.4.6B).

Lemma 4.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} b_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} b_{nk}$ *geçerlidir.*

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} b_{nk} &= \sum_{k=0}^{m} b_{0k} + \sum_{k=0}^{m} b_{1k} + \sum_{k=0}^{m} b_{2k} + \cdots \\
&= b_{00} + b_{01} + b_{02} + \cdots + b_{0m} \\
&\quad + b_{10} + b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1m} \\
&\quad + b_{20} + b_{21} + b_{22} + \cdots + b_{2m} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n1} + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} b_{nm} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} b_{nk}.
\end{aligned}$$

■

Teorem 4.1 $\Delta^m \in B(cs)$ *dir.*

İspat. Δ^m geri fark operatörünün (3.1) deki matris gösterimine dikkat edecek olursak Δ^m $m+1$ bantlı bir bant matristir. Dolayısıyla Lemma 4.1 nin (i) koşulunu sağlandığı açıktır.

ii)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(a_{nk}-a_{n,k-1}) &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-k}\left[\binom{m}{k}-\binom{m}{k-1}\right] \\ &= (-1)^{k}\left[\binom{m}{k}-\binom{m}{k-1}\right]\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n} \\ &= (-1)^{k}\left[\binom{m}{k}-\binom{m}{k-1}\right]A\end{aligned}$$

dır. Burada $A=\begin{cases}0 & , \quad N \text{ çift} \\ 1 & , \quad N \text{ tek}\end{cases}$ sayısıdır. O halde

$$\begin{aligned}\sum_{k}\left|\sum_{n=1}^{N}(a_{nk}-a_{n,k-1})\right| &\leq \sum_{k}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right] \\ &\leq 2^{m+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\Delta^m \in B(cs)$ dir. ■

4.1 cs dizi uzayı üzerinde Δ^m fark operatörünün spektumu ve fine spektrumu

Teorem 4.2 *Δ^m nin cs üzerindeki point spektrumu $\sigma_p(\Delta^m, cs)=\emptyset$ dir.*

İspat. cs de $x\neq\theta=\{0,0,0,\cdots\}$ olmak üzere $\Delta^m x=\alpha x$ lineer denklem sistemini göz önüne alalım. (3.1) den

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -m & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m(m-1)}{2} & -m & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & (-1)^m & (-1)^{m-1}m & \cdots & -m & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
x_0 &= \alpha x_0 \\
-mx_0 + x_1 &= \alpha x_1 \\
\frac{m(m-1)}{2!}x_0 - mx_1 + x_2 &= \alpha x_2 \\
\frac{-m(m-1)(m-2)}{3!}x_0 + \frac{m(m-1)}{2!}x_1 - mx_2 + x_3 &= \alpha x_3 \qquad (4.1) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) denklem sisteminin birinci denkleminden $x_0 \neq 0$ olursa $\alpha = 1$ dir. Dolayısıyla 2. denklemden $-mx_0 + x_1 = x_1$ olup $x_0 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Kabul edelim ki $x_0 = 0$ olsun bu durumda 2. denklemden $x_1 = \alpha x_1$ olup $x_1 \neq 0$ olursa $\alpha = 1$ dir. Dolayısıyla 3. denklemden $-mx_1 + x_2 = x_2$ olup $x_1 = 0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Bu şekilde devam edersek $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olur. Buradan $\Delta^m x = \alpha x$ olacak şekilde $x \neq 0$ yoktur. Dolayısıyla $\sigma_p(\Delta^m, cs) = \emptyset$ dur. ■

Sonuç 4.1 $I_3\sigma(\Delta^m, cs) = II_3\sigma(\Delta^m, cs) = III_3\sigma(\Delta^m, cs) = \emptyset$.

İspat. Önerme 2.1 (3) den $\sigma_p(\Delta^m, cs) = I_3\sigma(\Delta^m, cs) \cup II_3\sigma(\Delta^m, cs) \cup III_3\sigma(\Delta^m, cs)$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 4.2 den elde edilir. ■

Teorem 4.3 *$cs^* \cong bv$ üzerinde $(\Delta^m)^*$ adjoint operatörünün point spektrumu*

$$\sigma_p((\Delta^m)^*, bv) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \cup \{0\}$$

kümesidir.

İspat. Kabul edelim ki $(\Delta^m)^*x = \alpha x$ ve $0 \neq x \in bv$ olsun. Bu durumda (3.1) de verilen matrisin transpozesinden

$$\begin{aligned}
\binom{m}{0}x_0-\binom{m}{1}x_1+\binom{m}{2}x_2+\binom{m}{3}x_3+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}x_m &= \alpha x_0\\
\binom{m}{0}x_1-\binom{m}{1}x_2+\binom{m}{2}x_3+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m-1}x_m+(-1)^m\binom{m}{m}x_{m+1} &= \alpha x_1\\
\binom{m}{0}x_2-\binom{m}{1}x_3+\cdots+(-1)^m\binom{m}{m}x_{m+2} &= \alpha x_2\\
&\vdots\\
\binom{m}{0}x_k-\binom{m}{1}x_{k+1}+\binom{m}{2}x_{k+2}+\cdots+(-1)^m x_{k+m} &= \alpha x_k\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.2}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.2) denkleminde $k = n$ ve $k = n+1$ yazıp taraf tafara çıkartırsak

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(x_{k+n}-x_{k+n+1}) = \alpha(x_n - x_{n+1})$$

elde edilir. O halde üçgen eşitsizliğinden

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{|\alpha|}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}|x_{k+n}-x_{k+n+1}| \tag{4.3}$$

bulunur. (4.3) eşitsizliklerini $n = 0, 1, 2, \cdots$ için yazıp taraf tarafa toplarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{|\alpha|}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}|x_{k+n}-x_{k+n+1}| \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) eşitsizliğinin sağ tarafına Lemma 4.2 yi uygularsak

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{|\alpha|}\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{k}\sum_{n=0}^{\infty}|x_{k+n}-x_{k+n+1}|$$

elde edilir. $\|x\|_{bv} = \sum_{n=0}^{\infty}|x_{k+n}-x_{k+n+1}|$ olduğundan

$$\|x\|_{bv} \leq \frac{\|x\|_{bv}}{|\alpha|}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} = \frac{2^m}{|\alpha|}\|x\|_{bv}$$

elde edilir. Böylece $|\alpha| \leq 2^m$ bulunur. O halde $\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \subseteq \sigma_p((\Delta^m)^*, bv)$ elde edilir. Tersine, eğer $|1-\alpha| < 2^m - 1$ durumu düşünülürse $(\Delta^m)^* -$

aI adjoint operatörü $1-1$ olmadığından Lemma 3.3 den $\Delta^m - aI$ operatörü cs de yoğun görüntüye sahip değildir. Dolayısıyla $(\Delta^m)^* - aI$ tersinir değildir ve

$$\sigma_p((\Delta^m)^*, bv) \subseteq \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\}$$

dir.

Ayrıca $m = 1$ durumunda $x_0 \neq 0$ için $\alpha = 0,\ f = (x_0, 0, 0, \cdots)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Dolayısıyla $0 \in \sigma_p((\Delta^m)^*, bv)$ elde edilir. Zaten $m > 1$ ise 0 $\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\}$ kümesi tarafından içerilir. ■

Teorem 4.4 *cs üzerinde Δ^m operatörünün rezidü spektrumu*

$$\sigma_r(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \cup \{0\}$$

kümesidir.

İspat. $\sigma_r(\Delta^m, cs) = \sigma_p((\Delta^m)^*, bv) \backslash \sigma_p(\Delta^m, cs)$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 4.2 ve 4.3 den elde edilir. ■

Teorem 4.5 *Δ^m nin cs üzerindeki spektrumu*

$$\sigma(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$$

kümesidir.

İspat. $(\Delta^m - \alpha I)$ bir alt büçgensel matris olduğundan tersi mevcuttur. $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} = (b_{nk})$ matrisi (3.6) de verilmiştir ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
b_{nn} &= \frac{1}{1-\alpha}, \\
b_{n,n-1} &= \frac{m}{(1-\alpha)^2}, \\
b_{n,n-2} &= \frac{m^2}{(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)}{2!(1-\alpha)^2}, \\
b_{n,n-3} &= \frac{m^3}{(1-\alpha)^4} - \frac{m^2(m-1)}{(1-\alpha)^3} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^2} \\
b_{n,n-4} &= \frac{m^4}{(1-\alpha)^5} - \frac{m^3(m-1)}{(1-\alpha)^4} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} - \frac{m^3(m-1)}{2!(1-\alpha)^4} \\
&\quad + \frac{m^2(m-1)^2}{2!2!(1-\alpha)^3} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{3!(1-\alpha)^3} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!(1-\alpha)^2} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{n,n-m} &= \frac{1}{1-\alpha}\Big[mb_{n,n-m+1} - \frac{m(m-1)}{2}b_{n,n-m+2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}b_{n,n-m+3} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{m-1}b_{n,n}\Big] \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} \in B(cs)$ olduğunu gösterelim. Bunun için Lemma 4.1 kullanılacaktır. Teorem 3.5 de herbir k için $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğu gösterilmişti. Mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $\sum_n b_{nk}$ serisi yakınsak olup Lemma 4.1 in (i) koşulu sağlanır.

Şimdi Lemma 4.1 in (i) koşulu olan $\sup_N \sum_k \left|\sum_{n=1}^{N}(b_{nk} - b_{n,k-1})\right| < \infty$ olduğunu gösterelim. Her $t = 1, 2, 3, ..., N-1$ için $b_{Nk} = b_{n-t,k-t}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& \sup_N \sum_{k=1} |(b_{1k} - b_{1,k-1}) + (b_{2k} - b_{2,k-1}) + (b_{3k} - b_{3,k-1}) + ... + (b_{Nk} - b_{N,k-1})| \\
=\ & \sup_N \sum_k |b_{Nk}| = \sup_N \sum_{k=1}^{N} |b_{Nk}| \\
=\ & |b_{N1}| + |b_{N2}| + |b_{N3}| + ... + |b_{N,N-1}| + |b_{NN}| \\
=\ & |b_{N1}| + |b_{N-1,1}| + |b_{N-2,1}| + ... + |b_{21}| + |b_{11}| = \sum_{n=1}^{N} |b_{nk}|
\end{aligned}
$$

elde edilir. Teorem 3.5 den $\sum_{n=1}^{N} |b_{nk}| = S_N$ olup (S_N) dizisinin yakınsak olması için $\left|\frac{2^m-1}{1-a}\right| < 1$ olması gerektiği söylenmiştir. Yani $|1-a| > 2^m - 1$ için $(\Delta^m aI)^{-1} \in B(cs)$ dir. Dolayısıyla

$$
\sigma(\Delta^m, cs) \subseteq \{a \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \tag{4.5}
$$

elde edilir. $(\Delta^m - \alpha I)^{-1} \in B(c)$ dir.

Tersine $\alpha \neq 1$ ve $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ olduğu düşünülürse. $\Delta^m - \alpha I$ nın bir üçgen olduğu ve dolayısıyla $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ in mevcut olduğu açıktır. Teorem 4.2 nin sonucu olarak $y = (1, 0, 0, \cdots)$ birim dizisinin $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ dönüşümü yani, $x = (\Delta^m - \alpha I)^{-1}y$ dizisi cs dedir. Bu $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ koşulu altında ve Teorem 4.3 den $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ operatörünün bir özdeğeri olmamasını önerir. Buradan $(\Delta^m)^* - \alpha I$ nın 1-1 olmadığı sonucuna varılır. Dolayısıyla $|1-\alpha| \leq 2^m - 1$ koşulu altında $\Delta^m - \alpha I$ operatörü cs de yoğun değildir. Son olarak $\alpha = 1$ durumu için sonuç ispatlanır. Eğer $\alpha = 1$ ise bu durumda

$$\Delta^m - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -m & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{m(m-1)}{2!} & -m & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{m(m-1)(1-2)}{3!} & \frac{m(m-1)}{2!} & -m & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

tersinir değildir. Böylece

$$\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \subseteq \sigma(\Delta^m, c) \tag{4.6}$$

dir. (4.5) ve (4.6) kullanılarak ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.6 *cs üzerinde Δ^m operatörünün sürekli spektrumu*

$$\sigma_c(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| = 2^m - 1\} \setminus \{0\}$$

kümesidir.

İspat. Sınırı lineer bir operatörün spektrumunun tanımından ve Teorem 4.2, 4.4 ve 4.5 den doğrudan elde edilir. ■

Teorem 4.7 *Eğer $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \cup \{0\} \backslash \{1\})$ ise $\alpha \in III_2\sigma(\Delta^m, cs)$ dir.*

İspat. Kabul edelim ki $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \cup \{0\} \backslash \{1\})$ olsun. Bu durumda Teorem 4.3 den $(\Delta^m)^* - \alpha I$ operatörü $1-1$ değildir ve dolayısıyla Lemma 3.3 den $\alpha \in III\sigma(\Delta^m, cs)$ elde edilir. Dahası $\alpha \neq 1$ için $\Delta^m - \alpha I$ operatörünün bir terse sahip olduğu fakat $\alpha = 0$ için $(\Delta^m)^* - aI$ operatörünün örten olmadığı elde edilir. Böylece Lemma 3.4 den $\Delta^m - \alpha I$ operatörü sınırlı terse sahip değildir. Bu $\Delta^m - \alpha I$ nın sürekli olmadığını gösterir. ■

Sonuç 4.2 $III_1\sigma(\Delta^m, cs) = \{1\}$ *dir.*

İspat. Önerme 2.1 (5) den $\sigma_r(\Delta^m, cs) = III_1\sigma(\Delta^m, cs) \cup III_2\sigma(\Delta^m, cs)$ olduğundan ve $III_1\sigma(\Delta^m, cs) \cap III_2\sigma(\Delta^m, cs) = \emptyset$ olduğundan istenilen sonuç Teorem 4.4 ve 4.7 den elde edilir. ■

Teorem 4.8 *Eğer* $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| > 2^m - 1\} \setminus \{1\})$ *ise* $\alpha \in I_1\sigma(\Delta^m, cs)$ *dir.*

İspat. Kabul edelim ki $\alpha \in (\{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| > 2^m - 1\} \setminus \{1\})$ olsun. $a \neq 1$ olduğu açıktır. Dolşayısıyla $\Delta^m - \alpha I$ operatörü bir terse sahiptir. Bu $\Delta^m - \alpha I$ operatörünün örten olduğunu gösterir ve dolayısıyla $(\Delta^m - \alpha I)^{-1}$ ters operatörü cs de yoğun görüntüye sahiptir. Böylece Lemma 3.3 den $(\Delta^m - \alpha I)$ operatörü cs de yoğundur. Bu nedenle $\alpha \in I\sigma(\Delta^m, cs)$ dir. Dahası, $|1-\alpha| > 2^m - 1$ olduğundan Teorem 4.5 den $\Delta^m - \alpha I$ operatörü bir sınırlı terse sahiptir. Dolayısıyla $\alpha \in 1\sigma(\Delta^m, cs)$ dir. Böylece $|1-\alpha| > 2^m - 1$ eşitsizliğini sağlayan α lar için $\alpha \in I_1\sigma(\Delta^m, cs)$ sonucuna ulaşılır. ■

4.2 cs dizi uzayı üzerinde Δ^m fark operatörünün aralarında ayrık olması gerekmeyen spektral ayrışımları

Teorem 4.9 *cs üzerinde Δ^m operatörünün spektral ayrışımı için aşağıdakiler geçerlidir:*

a) $\sigma_{ap}(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \setminus \{1\}$,

b) $\sigma_\delta(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$,

c) $\sigma_{co}(\Delta^m, cs) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| < 2^m - 1\} \cup \{0\}$.

İspat. a) Önerme 2.1 (8) den $\sigma_{ap}(\Delta^m, cs) = \sigma(\Delta^m, cs) \setminus III_1\sigma(\Delta^m, cs)$ olduğundan, istenilen sonuç Teorem 4.5 ve Sonuç 4.2 den elde edilir.

b) Önerme 2.1 (6) dan $\sigma_\delta(\Delta^m, cs) = \sigma(\Delta^m, cs) \setminus I_3\sigma(\Delta^m, cs)$ olduğundan, istenilen sonuç Teorem 4.5 ve Sonuç 4.1 den elde edilir.

c) Önerme 2.1 (6) dan

$$\begin{aligned} \sigma_{co}(\Delta^m, cs) &= III_1\sigma(\Delta^m, cs) \cup III_2\sigma(\Delta^m, cs) \cup III_3\sigma(\Delta^m, cs) \\ &= \sigma_r(\Delta^m, cs) \cup III_3\sigma(\Delta^m, cs) \end{aligned}$$

olduğundan, istenilen sonuç Teorem 4.4 ve Sonuç 4.1 den elde edilir. ■

Sonuç 4.3 $\sigma_{ap}((\Delta^m)^*, bv) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\}$ *dir ve* $\sigma_\delta((\Delta^m)^*, bv) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |1-\alpha| \leq 2^m - 1\} \setminus \{1\}$ *dir.*

İspat. Önerme 2.2 (c)-(d) ve Teorem 4.9 den elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] **Akhmedov, A.M., El-Shabrawy, S.R.** (2010). The spectrum of the generalized lower triangle double-bant matrix Δ_a over the sequence space c. *Al-Azhar Univ. Eng. J., JAUES (speacial issue)*, 5(9), 54-60.

[2] **Appell, J., Pascale, E.D., Vignoli, A**. (2004). Nonlinear Spectral Theory. Walter de Gruyter · Berlin · New York.

[3] **Başar, F., Durna, N., Yildirim, M.** (2011). Subdivisions of the spectra for genarilized difference operator over certain sequence spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 9 (2), 285–295.

[4] **Başar, F., Durna, N., Yildirim, M.** (2011). Subdivisions of the spectra for trible band matrix over certain sequence spaces. *Gen. Math. Notes*, 4 (1), 35–48.

[5] **Başar, F., Durna, N., Yildirim, M.** (2012). Subdivision of the spectra for difference operator over certain sequence spaces. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 6 (S), 151–165.

[6] **Durna, N., Yildirim, M.** (2011). Subdivision of the spectra for factorable matrices on c_0. *GUJ Sci.*, 24 (1), 45-49.

[7] **Durna, N.** (2017). Subdivision of the spectra for the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ on the sequence space ℓ_p $(1 < p < \infty)$, *CBU J. Sci.* 13 (2), 359–364.

[8] **El-Shabrawy, S.R.** (2012). On the fine spectrum of the generalized difference operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space ℓ_p, $(1 < p < \infty)$. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 6 (1), 11-18.

[9] **Furkan, H., Bilgiç, H., Kayaduman, K.** (2006). On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces ℓ_1 and bv. *Hokkaido Math J.,* 35, 893–904.

[10] **Goldberg, S.**(1966). Unbounded Linear Operators. *McGraw Hill, New York.*

[11] **Kayaduman, K., Furkan, H.** (2006). On the fine spectrum of the difference operator Δ over the sequence spaces ℓ_1 and bv. *International Mathematical Forum,* 24 (1), 1153-1160.

[12] **Panigrahi, B.L., Srivastava, P.D.** (2011). Spectrum and fine spectrum of generalized second order difference operator Δ^2_{uv} on sequence space c_0. *Thai J Math.*, 9 (1), 57–74.

[13] **Rao, K.C.** (1990). The Hahn sequence spaces I. *Bull Calcutta Math Soc.*, 82, 72–78.

[14] **Rhoades, B.E.** (1983). The fine spectra for weighted mean operators. *Pacific J. Math.*, 104, 263-267.

[15] **Stone, M.H.** (1932). Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. *New York (NY): American Mathematical Society.*

[16] **Yıldırım, M.** (1998). On the spectrum of the Rhaly operators on c_0 and c. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 29, 1301-1309.

[17] **Yıldırım, M.** (2002). The Fine Spectra of the Rhaly Operators on c_0. *Turkish J. Math.*, 26 (3), 273-282.

[18] **Wenger, R.B.** (1975). The fine spectra of Hölder summability operators. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 6, 695-712.

[19] **Goldberg, S.** (1985) Unbounded Linear Operators. *Dover Publications, Inc., New York.*

[20] **Kızmaz, H.** (1981) On certain sequence spaces. *Can. Math. Bull.* 24(2), 169–176.

[21] **Et, M., Çolak, R.** (1995) On some generalized difference sequence spaces. *Soochow J. Math.* 21(4), 377–386.

[22] **Et, M., Başarır, M**. (1997) On some new generalized difference sequence spaces. *Periodica Math. Hung.* 35(3), 169–175.

[23] **Başar, F.** (2012) Summability Theory and Its Applications. *Bentham Sci. Publ. Istanbul-2012*, eISBN: 978-160805-252.

[24] **Baliarsingh, P.** (2013) Some new difference sequence spaces of fractional order and their dual spaces. *Appl. Math. Comput.* 219(18), 9737–9742.

[25] **Aydın, C., Başar, F.** (2004) Some new difference sequence spaces. *Appl.Math. Comput.* 157(3), 677–693.

[26] **Bektas, C.A., Et, M., Çolak, R**. (2004) Generalized difference sequence spaces and their dual spaces. *J. Math. Anal. Appl.* 292, 423–432.

[27] **Malkowsky, E., Mursaleen, M., Suantai, S**. (2007) The dual spaces of sets of difference sequence sequence spaces of order m and matrix transformations. *Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.)* 23(3), 521–532.

[28] **Reade, J.B.** (1985) On the spectrum of the Cesàro operator. *Bull. Lond. Math. Soc.* 17(3), 263–267.

[29] **Akhmedov, A.M., Başar, F.** (2004) On the spectrum of the Cesàro operator in c_0. *Math. J. Ibaraki Univ.* 36, 25–32.

[30] **Akhmedov, A.M., Başar, F.** (2008) The fine spectra of the Cesàro operator C_1 over the sequence space bv_p, $(1 \leq p < \infty)$ *Math. J. Okayama Univ.* 50, 135–147.

[31] **Altay, B., Başar, F.** (2004) On the fine spectrum of the difference operator on c_0 and c. *Inf. Sci.* 168, 217–224.

[32] **Altay, B., Başar, F.** (2007) The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator Δ on the sequence space ℓ_p, $(1 < p < \infty)$. *Commun. Math. Anal.* 2(2), 1–11.

[33] **Altay, B., Başar, F.** (2005) On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces c_0 and c. *Int. J. Math. Math. Sci.* 18, 3005–3013.

[34] **Akhmedov, A.M., Başar, F.** (2006) The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p, $(1 \leq p < \infty)$. *Demonstr. Math.* 39(3), 586–595.

[35] **Akhmedov, A.M., Başar, F.** (2007) On the fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$. *Acta. Math. Sin. (Engl. Ser.)* 23(10), 1757–1768.

[36] **Srivastava, P.D., Kumar, S.** (2009) On the fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v over the sequence space c_0. *Commun. Math. Anal.* 6(1), 8–21.

[37] **Srivastava, P.D., Kumar, S.** (2010) Fine spectrum of the generalized difference operator Δ_v on sequence space ℓ_1. *Thai. J. Math.* 8(2), 221–233.

[38] **Akhmedov, A.M., El-Shabrawy, S.R.** (2011) On the fine spectrum of the operator $\Delta_{a,b}$ over the sequence space c. *Comput. Math. Appl.* 61, 2994–3002.

[39] **Dutta, S., Baliarsingh, P.** (2013). On the spectrum of $2-nd$ order generalized difference operator Δ^2 over the sequence space c_0. *Bol. Soc. Paran. Mat.* 31(2), 235–244.

[40] **Dutta, S., Baliarsingh, P**. (2012) On the fine spectra of the generalized rth difference operator Δ_v^r on the sequence space ℓ_1. *Appl. Math. Comput.* 219, 1776–1784.

[41] **Baliarsingh, P., Dutta, S.** (2014) On a spectral classification of the operator Δ_v^r over the sequence space c_0. *Proc. Natl. Acad. Sci. India Sect. Phys. Sci.* 84(4), 555–561.

[42] **Baliarsingh, P., Mursalen, M., Rako■cevi´c, V.** (2021) A survey on the spectra of the difference operators over the Banach space c. *RACSAM.* 115:57. 84(4), 1–17.

[43] **Meng, J., Mei, L.** (2018) The matrix domain and the spectra of a generalized difference operator. J. *Math. Anal. Appl.* https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.10.051.

[44] **El-Shabrawy, S.R., Abu-Janah, S.H.** (2018) Spectra of the generalized difference operator on the sequence spaces bv_0 and h. *Linear Multilinear Algebra* 66(8), 1691–1708.

[45] **Yildirim, M., Mursaleen, M., Doğan, Ç.** (2018) The spectrum and fine spectrum of generalized Rhaly–Cesàro matrices on c_0 and c. Oper. Matrices 12(4), 955–975.

[46] **Birbonshi, R., Srivastava, P.D.** (2017) On some study of the fine spectra of *nth* band triangular matrices. *Complex Anal. Oper. Theory* 11(4), 739–753.

[47] **Mursaleen, M., Yildirim, M., Durna, N.** (2019) On the spectrum and Hilbert Schimidt properties of generalized Rhaly matrices. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1* 68(1), 712–723.

[48] **Yildirim, M.E.** (2019) The spectrum and fine spectrum of $q-$Cesàro matrices with $0 < q < 1$ on c_0. *Numer. Funct. Anal. Optim.* . https://doi.org/10.1080/01630563.2019.1633666.

[49] **Mursaleen, M., Başar, F**. (2020) Sequence Spaces: Topics in Modern Summability Theory. *CRC Press Taylor& Francis Group, Boca Raton*

[50] **Dutta, H., Baliarsingh, P**.: On the spectra of difference operators over some Banach spaces. *Appl. Math. Anal. Theory Methods Appl.* 791–810.

[51] **Altay, B., Başar, F.** (2005) On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the sequence spaces c_0 and c. *Int. J. Math. Math. Sci.* 18, 3005–3013.

[52] **Furkan, H., Bilgiç, H., Altay, B**. (2007) On the fine spectrum of the operator $B(r,s,t)$ over c_0 and c. *Comput. Math. Appl.* 53(6), 989–998

[53] **Wilansky, A.** (1984) Summability Through Functional Analysis. *North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam.*

[54] **Durna, N.** (2016), Subdivision of the spectra for the generalized upper triangular double-band matrices Δ^{uv} over the sequence spaces c_0 and c, *ADYU Sci.*, 6(1) , 31-43.

[55] **Das, R.** (2017), On the spectrum and fine spectrum of the upper triangular matrix $U(r_1, r_2; s_1, s_2)$ over the sequence space c_0, *Afr. Math.*, 28 , 841-849.

[56] **Tripathy, B. C.** (2018), Das, R., Fine spectrum of the upper triangular matrix $U(M, 0, 0, s)$ over the squence spaces c_0 and c, *Proyecciones J. Math.*, 37(1) , 85-101.