

**GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİE CEBİRLERİ VE
EKSTREMAL ELEMANLAR**

**MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

TOLGA KIRMIZI

KASIM 2017

KASIM 2017

Yüksek Lisans Matematik Bölümü

TOLGA KIRMIZI

Lie Cebirleri Ve Ekstremal Elemanlar

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN

Tolga KIRMIZI

Kasım 2017



© 2017 [Tolga KIRMIZI]

T.C.
GAZIANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Lie Cebirleri ve Ekstremal Elemanlar

Öğrencinin, Adı Soyadı: Tolga KIRMIZI

Tez Savunma Tarihi: 27.11.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI


FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığımı onaylarım.


Doç. Dr. Mehmet ŞAHİN

Enstitü ABD Başkanı V.

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri :

Doç. Dr. Necati OLGUN

Yrd. Doç. Dr. Cennet ESKAL

Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN

İmzası




İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Tolga KIRMIZI

ABSTRACT

LIE ALGEBRAS AND EXTREMAL ELEMENTS

KIRMIZI, Tolga

M.Sc. in Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN

November 2017

38 pages

An L Lie algebra is defined as a vector space with a transformation that provides bilinear, skew-symmetric and Jacobi identity on field F . For each $y \in L$, the elements $x \in L$ that provide the condition $[x, [x, y]] \in Fx$ are called extremal elements. In this study, the center, central and inner automorphisms of Lie algebras generated by two and three extremal elements and the normalization of some subspaces were investigated.

Key words: Lie algebras, Extremal elements, Central automorphisms, Inner automorphisms

ÖZET

LIE CEBİRLERİ VE EKSTREMAL ELEMANLAR

KIRMIZI, Tolga

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Özge ÖZTEKİN

Kasım 2017

38 sayfa

Bir L Lie cebiri, \mathbb{F} cismi üzerinde bilinear, ters simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlayan bir dönüşüme sahip bir vektör uzayı olarak tanımlanır. Her bir $y \in L$ için $[x, [x, y]] \in \mathbb{F}x$ koşulunu sağlayan $x \in L$ elemanlarına ekstremal elemanlar denir

Bu çalışmada iki ve üç ekstremal eleman tarafından üretilen Lie cebirlerinin merkezi, merkezi ve iç otomorfizmleri ile bazı altuzaylarının normalleyeni incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie cebirleri, Ekstremal Elemanlar, Merkezi Otomorfizmler, İç Otomorfizmler

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın geliőtirilmesinde bilgilerini benimle paylaőmaktan kaçınmayan, her tŸrlŸ konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde bŸyŸk emeği olan Gaziantep Ÿniversitesi Ÿęretim Ÿyelerinden danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ŗzge ŖZTEKİN'e sonsuz minnet ve teőekkŸrlerimi sunarım.

Lisans ve LisansŸstŸ eğitimim boyunca yardım bilgi ve tecrŸbeleri ile bizlere sŸrekli destek olan Gaziantep Ÿniversitesi matematik bŸlŸmŸndeki tŸm hocalarıma çok teőekkŸr ederim.

Bu alıőma sŸresince beni hep destekleyen ve gŸvenen çok sevdiğim aileme sonsuz teőekkŸrlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER	viii
GİRİŞ	1
BÖLÜM 1	3
1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
1.2. GRUPLAR.....	3
1.3. HALKALAR.....	6
1.4. VEKTÖR UZAYLARI.....	8
1.5. LİNEER DÖNÜŞÜMLER.....	10
1.6. CEBİR.....	10
BÖLÜM 2	12
2.1. LİE CEBİRLERİ.....	12
2.2. YAPI SABİTLERİ.....	14
2.3. MERKEZ VE NORMALLEYEN	15
2.4. NİLPOTENTLİK VE ÇÖZÜLEBİLİRLİK.....	19
BÖLÜM 3	21
3.1. EKSTREMAL ELEMANLAR.....	21
BÖLÜM 4	24
4.1. İKİ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN MERKEZİ VE OTOMORFİZMLERİ.....	24
4.2. ÜÇ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN MERKEZİ VE OTOMORFİZMLERİ.....	29
4.3. ÜÇ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN YAPISI:	29
KAYNAKLAR	39

GİRİŞ

\mathbb{F} cismi üzerindeki bir L cebirinin $[-, -]: L \times L \rightarrow L$ çarpımı aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa L cebirine Lie cebiri denir.

- i. $[-, -]$ çarpımı ters-simetriktir. Her $x \in L$ için $[x, x] = 0$
- ii. $[-, -]$ çarpımı Jacobi özdeşliğini sağlar. Her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

veya

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Lie cebirlerinin fizik ve matematiğin birçok alanındaki çalışmalarda özellikle diferansiyel denklemlerde uygulamaları bulunmaktadır. Bir Lie cebiri genellikle çarpım tablosu veya üreteçleri ve bağıntılarından oluşan kümesinin bir takdimi ile bilinebilir. Üreteç sayısı çoğaldıkça Lie cebirinin çarpım tablosunu yazmak oldukça zordur. Bundan dolayı, bu çalışmada sadece iki ve üç ekstremal eleman tarafından üretilen Lie cebirlerinin bazı özel otomorfizmleri incelenmiştir.

Her bir $y \in L$ için $[x, [x, y]] \in \mathbb{F}x$ koşulunu sağlayan $x \in L$ elemanlarının yani ekstremal elemanların özelliklerini ve bu elemanlar tarafından üretilen Lie cebirlerinin yapısını Don Roozmond, Cohen, Steinbach, Ushirobira ve Wales [1], [2], [3] ve [19] çalışmalarında incelemiştir.

Bu çalışma, dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda cebirin temel tanım ve teoremleri verilerek Lie cebiri kavramına hazırlık yapılmıştır.

İkinci kısımda ise Lie cebirleri tanıtılarak bazı Lie cebiri örnekleri ile Lie cebirlerinin temel tanım ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü kısımda [1], [2], [3] ve [19] çalışmalarından faydalanılarak ekstremal elemanlar tarafından üretilen Lie cebirleri tanıtılmış ve bazı önemli özellikleri verilmiştir.

L , \mathbb{F} cismi üzerinde sonlu üretilmiş bir Lie cebiri olsun. θ, L nin bir otomorfizmi olmak üzere her $x \in L$ için $\theta(x) - x \in C(L)$ ise θ ya "merkezi otomorfizm" denir. Burada $C(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0, \text{ her } y \in L\}$ L Lie cebirinin merkezidir.

Bu tanımdan yola çıkarak dördüncü kısımda iki ve üç ekstremal eleman tarafından üretilen Lie cebirlerinin merkezi, merkezi ve iç otomorfizmleri ile bazı altuzaylarının normalleyeni incelenmiştir.



BÖLÜM 1

Bu bölümde Lie cebirleri kavramına temel oluşturacak şekilde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1: A ve B boştan farklı kümeler olmak üzere $A \times B$ nin boş olmayan her alt kümesine A dan B ye bir bağıntı denir

R , A da bir bağıntı olsun. $(a, b) \in R$ ise a , b ye bağlıdır denir.

Tanım 1.1.2: f , A dan B ye bir bağıntı olsun. $\forall a \in A$ için a ya f ile bağlı B de bir ve yalnız bir eleman bulunabiliyorsa, f ye A dan B ye bir fonksiyon denir ve $f: A \rightarrow B$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3: $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $a_1, a_2 \in A$ için $f(a_1) = f(a_2)$ iken $a_1 = a_2$ oluyor ise f ye birebir fonksiyon denir. Eğer her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir. Eğer f hem örten hem de birebir ise f ye birebir eşleme denir.

Tanım 1.1.4: $A \times A$ dan A ya bir fonksiyona A da bir ikili işlem denir.

1.2. GRUPLAR

Tanım 1.2.1: G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebir yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

- i. $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır yani her $a, b, c \in G$ için

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

- ii. $*$ işleminin G de birim elemanı vardır yani her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.
- iii. Her $a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir a' bulunabilir. (a' elemanına a nın $*$ işlemine göre tersi denir)

Tanım 1.2.2: $(G, *)$ bir grup ve her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba değişmeli grup veya Abel grubu denir.

Örnek 1.2.3: m . mertebeden regüler matrisleri çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba genel lineer grup denir ve $GL_m(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.4: G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G deki işleme göre bir grup oluyor ise H ye G nin bir alt grubu denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.5: G grubunun boş olmayan bir altkümesinin altgrup olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in H$ için $ab^{-1} \in H$ olmasıdır.

Önerme 1.2.6: Bir grubun bir takım altgruplarının arakesiti de bir altgruptur.

Örnek 1.2.7: G grubunun tüm elemanları ile değişmeli olan elemanları bir altgrup oluşturur. Bu alt gruba G nin merkezi denir.

Tanım 1.2.8: M bir G grubunun bir alt kümesi olsun. M yi kapsayan, G nin bütün altgruplarının arakesitine M nin ürettiği altgrup denir ve $\langle M \rangle$ ile gösterilir. M nin elemanlarına da $\langle M \rangle$ grubunun üreteçleri denir.

Tanım 1.2.9: G bir grup, $a \in G$ ve $H \leq G$ olsun.

$aH = \{ ah \mid h \in H \}$ ve $Ha = \{ ha \mid h \in H \}$ kümelerine sırasıyla H nin G deki sol koseti ve sağ koseti denir.

Tanım 1.2.10: G bir grup olsun. G nin bir alt grubu H ve bir elemanı a olsun. Her $g \in G$ için aga^{-1} elemanına g nin a ya göre eşleniği denir.

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$$

kümesine H nin a ya göre eşleniği denir.

Tanım 1.2.11: G bir grup ve N, G nin bir alt grubu olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$gNg^{-1} = N$$

ise N ye G nin bir normal alt grubu denir.

Örnek 1.2.12: G nin merkezi bir normal alt gruptur.

Tanım 1.2.13: G bir grup ve H, G nin bir normal alt grubu olsun. G/H üzerinde bir çarpma işlemi şöyle tanımlansın. Her $aH, bH \in G/H$ için

$$(aH)(bH) = (ab)H$$

olsun. Bu işleme göre G/H bir gruptur ve bu gruba G nin H ile bölüm grubu denir.

Tanım 1.2.14: (G, \cdot) ve $(H, *)$ iki grup ve $f: G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in G$ için $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ ise f ye G den H ye bir homomorfizma denir. Eğer ek olarak f birebir ise f ye monomorfizma, f örten ise epimorfizma ve f hem örten hem de birebir ise f ye izomorfizma denir. Ayrıca f, G den G ye bir izomorfizma ise f ye otomorfizma denir.

Önerme 1.2.15: G nin bütün otomorfizmaların kümesi $O(G)$ bileşke işlemi altında bir gruptur.

Tanım 1.2.16: $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizması olsun.

$$\ker(f) = \{g \in G: f(g) = e_H\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir.

Tanım 1.2.17: G bir grup ve $a \in G$ olsun. Her $x \in G$ için

$$\varphi_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlı $\varphi_a: G \rightarrow G$, G nin bir otomorfizmasıdır. φ_a ya G nin bir iç otomorfizması denir.

Önerme 1.2.18: Bir G grubunun bütün iç otomorfizmaların kümesi $\text{Inn}(G)$, $O(G)$ otomorfizmalar grubunun bir alt grubudur.

Önerme 2.2.19: Her $a \in G$ için $\psi(a) = \varphi_a$ ile tanımlı $\psi: G \rightarrow \text{Inn}(G)$ fonksiyonu bir homomorfizma ve $\ker \psi = M$ (G nin merkezi) olup $G/M \cong \text{Inn}(G)$ dir.

Tanım 1.2.20: G bir grup $x_1, x_2 \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 nin komütatörü denir.

H_1 ve H_2 , G grubunun boştan farklı altkümeleri olsun.

$$[H_1, H_2] = \langle [h_1, h_2] : h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Burada $H_1 = H_2 = G$ ise $[G, G]$ komütatör grubuna G nin komütatör altgrubu denir.

Tanım 1.2.21: A boştan farklı bir küme olsun. A üzerinde tanımlı birebir ve örten bir fonksiyona A üzerinde bir permutasyon denir. Bir A kümesi üzerinde tanımlı bütün permutasyonların kümesi $\text{Sym}A$ ile gösterilir ve $\text{Sym}A$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. $\text{Sym}A$ grubuna A kümesi üzerinde bir grup denir.

Tanım 1.2.22: G bir grup ve A bir küme olsun. Eğer $\varphi: G \rightarrow \text{Sym}A$ homomorfizması varsa φ ye G nin bir permutasyon temsili denir.

1.3. HALKALAR

Tanım 1.3.1: R boş olmayan bir küme olsun ve bu küme üzerinde tanımlı $+$ ve \cdot ikili işlemleri verilsin. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

- i. $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.
- ii. \cdot işleminin R de birleşme özelliği vardır. Yani her $a, b, c \in R$ için

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

- iii. \cdot işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır:

Her $a, b, c \in R$ için

$$a.(b+c) = ab+ac \text{ ve } (a+b).c = ac+bc$$

Eğer her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise halkaya değişmeli halka denir. R nin toplama işlemine göre etkisiz elemanı 0_R ile gösterilir ve buna halkanın sıfır elemanı denir. Halkanın \cdot işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer ikinci işleme göre de etkisiz eleman varsa halkaya birimli halka denir ve etkisiz elemana da halkanın birim elemanı denir ve I_R ile gösterilir.

Tanım 1.3.2: R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. $a, b \neq 0$ iken $ab = 0$ ise a ya sol sıfır bölen ve b ye sağ sıfır bölen denir. R nin değişmeli olması durumunda sıfır bölen ifadesi kullanılır.

Tanım 1.3.3: R birim elemanlı ve değişmeli bir halka olsun. R sıfır bölensiz ise R ye tamlık bölgesi denir.

Tanım 1.3.4: R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işleme göre bir grup ise R ye bir cisim denir.

Tanım 1.3.5: R bir tamlık bölgesi olsun. $m \cdot 1_R = 0_R$ olacak şekilde $m > 0$ tamsayısı varsa bu m sayılarının en küçüğüne R nin karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa R nin karakteristiği sıfır denir.

Tanım 1.3.6: R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer bazı pozitif n tamsayıları için $a^n = 0$ oluyorsa a elemanına nilpotent eleman denir.

Tanım 1.3.7: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. R deki işlemlere göre S altkümesi bir halka oluyorsa S ye R halkasının bir alt halkası denir.

Tanım 1.3.8: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun.

- i. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$
- ii. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ (veya $ar \in I$)

ise I ya R nin bir sol (veya sağ) ideali denir.

Hem sol hem de sağ ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir.

Önerme 1.3.9: Bir halkanın bir takım ideallerinin arakesiti de bir idealdir.

Tanım 1.3.10: A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine A nin ürettiği ideal denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.11: R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında

$$(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I$$

$$(a + I) \odot (b + I) = (ab) + I$$

ile tanımlanan \oplus ve \odot işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre bölüm halkası denir.

Tanım 1.3.12 : R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için

- i. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- ii. $f(ab) = f(a).f(b)$

ise f ye R den S ye bir halka homomorfizması denir. Eğer bir f halka homomorfizması aynı zamanda birebir ise f ye bir halka monomorfizması, örten ise bir halka epimorfizması ve birebir eşleme ise bir halka izomorfizması denir. R den R ye tanımlı bir izomorfizmaya otomorfizma denir.

Tanım 1.3.13: R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ homomorfizması olsun.

$$\text{Ker } f = \{r \in R \mid f(r) = 0_s\}$$

kümesine f nin çekirdeği denir.

1.4 VEKTÖR UZAYLARI

Tanım 1.4.1: Bir V vektör uzayı aşağıdakilerden oluşur.

1. Boş olmayan bir V kümesinin elemanlarına vektör denir.
2. F cismi elemanlarına skaler denir.
3. Her $\alpha, \beta \in V$ elemanlarına $(\alpha + \beta) \in V$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdakileri sağlayan “ + ” toplama işlemi
 - a. Her $\alpha, \beta \in V$ için $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
 - b. Her $\alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
 - c. Her $\alpha \in V$ için $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ olacak şekilde $0 \in V$ vardır.
 - d. Her $\alpha \in V$ için $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ olacak şekilde $-\alpha \in V$ vardır.

4. Her $\alpha \in V$ ve $c \in F$ elemanlarına $c\alpha \in V$ elemanını karşılık getiren ve aşağıdakileri sağlayan “ \cdot ” çarpma işlemi
- Her $\alpha, \beta \in V$ ve $c \in F$ için $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$
 - Her $c_1, c_2 \in F$, $\alpha \in V$ için $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$
 - Her $c_1, c_2 \in F$, $\alpha \in V$ için $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$
 - Her $\alpha \in V$ için $1 \cdot \alpha = \alpha$ olacak şekilde $1 \in F$ vardır.

$(V, +, F)$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 1.4.2 : V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $W \subset V$ olsun. W, V deki işlemlerle bir vektör uzayı oluyorsa W ya V nin bir altuzayıdır denir.

Önerme 1.4.3 : V nin boş olmayan bir W altkümesinin bir altuzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $\alpha, \beta \in W$ ve her $c \in F$ için $c\alpha + \beta \in W$ olmasıdır.

Tanım 1.4.4: V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ olmak üzere

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i$$

vektörüne, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörlerinin bir lineer toplamı veya lineer kombinasyonu denir.

Teorem 1.4.5: Bir V vektör uzayının altuzaylarının arakesiti de V nin bir alt uzayıdır.

Tanım 1.4.6 : V bir vektör uzayı ve S de V deki vektörlerin bir kümesi olsun. S yi içeren bütün alt uzayların arakesitine S tarafından gerilen altuzay denir ve $Sp(S)$ ile gösterilir. $Sp(S)$ uzayı S yi içeren en küçük altuzayıdır.

Tanım 1.4.7 : V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve S de V nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer S deki farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörleri için

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

olacak şekilde hepsi aynı anda sıfır olmayan c_1, c_2, \dots, c_n skalerleri varsa $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ vektörleri lineer bağımlıdır denir. Aksi takdirde lineer bağımsızdır.

Tanım 1.4.8 : V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V yi geren lineer bağımsız bir kümeye V nin bir bazı denir.

Tanım 1.4.9 : V nin herhangi bir bazındaki vektörlerin sayısına V nin boyutu denir ve $\dim V$ ile gösterilir.

1.5. LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Tanım 1.5.1 : V ile W aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $T: V \rightarrow W$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in V$ ve $c \in F$ için

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

oluyorsa T ye bir lineer dönüşüm denir.

Tanım 1.5.2 : V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $T^2 = T$ olacak biçimdeki bir $T: V \rightarrow V$ lineer dönüşümüne izdüşüm denir.

Tanım 1.5.3 : U, V, W bir F cismi üzerinde vektör uzayları olsun. $f: U \times V \rightarrow W$ fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa f ye bilinear dönüşüm denir.

i. Her $c \in F$, her $u_1, u_2 \in U$, her $v \in V$ için

$$f(u_1 + cu_2, v) = f(u_1, v) + cf(u_2, v)$$

ii. Her $c \in F$, her $u \in U$, her $v_1, v_2 \in V$ için

$$f(u, v_1 + cv_2) = f(u, v_1) + cf(u, v_2)$$

dir.

Tanım 1.5.4 : U, W bir F cismi üzerinde vektör uzayları olmak üzere $f: U \times U \rightarrow W$ bilinear dönüşümü her $u_1, u_2 \in U$ için $f(u_1, u_2) = f(u_2, u_1)$ eşitliğini sağlarsa f bilinear dönüşümüne simetriktir denir.

Tanım 1.5.5: Simetrik bir bilinear fonksiyona U vektör uzayı üzerinde bilinear form denir.

1.6. CEBİR

Tanım 1.6.1 : $A, m: A \times A \rightarrow A$ bilinear dönüşüme sahip \mathbb{F} cismi üzerinde bir vektör uzayı ise A ya bir cebir denir.

Buradaki m , bilinear dönüşümüne çarpım denir.

A cebir olmak üzere ve her $x, y \in A$ için $m(x, y)$ yazmak yerine kısaca xy yazarız.

Tanım 1.6.2: A bir cebir olmak üzere A nın bir B alt uzayına her $x, y \in B$ için $xy \in B$ oluyorsa alt cebir denir.

Tanım 1.6.3: Eğer her $x \in A$ ve $y \in B$ için $xy \in B$ ve $yx \in B$ oluyor ise B ye bir ideal denir.

Tanım 1.6.4: A bir cebir ve B, A nın bir ideali ise A/B uzayına bölüm cebiri denir.

Tanım 1.6.5: A ve B , bir F cismi üzerinde iki cebir ve $\theta: A \rightarrow B$ bir lineer dönüşüm olsun.

Eğer her $x, y \in A$ için $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ oluyorsa θ ya bir cebir morfizmi denir. θ birebir eşleme ise θ ya cebir izomorfizmi denir. $\theta: A \rightarrow A$ cebir izomorfizmi ise otomorfizm denir.

Tanım 1.6.6 : A bir cebir olsun. Her $x, y, z \in A$ için

$$(xy)z = x(yz)$$

sağlanıyorsa A ya birleşmeli cebir denir.

BÖLÜM 2

2.1. LIE CEBİRLERİ

Tanım 2.1.1: \mathbb{F} cismi üzerindeki bir L cebirinin $[-, -]: L \times L \rightarrow L$ çarpımı aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa L cebirine Lie cebiri denir. Bu çarpıma braket diyeceğiz.

- i. $[-, -]$ çarpımı ters-simetriktir. Her $x \in L$ için $[x, x] = 0$
- ii. $[-, -]$ çarpımı Jacobi özdeşliğini sağlar. Her $x, y, z \in L$ için

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

veya

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Not 2.1.2: i. koşuluna özdeş olarak $[x, y] = -[y, x]$ alabiliriz.

Örnek 2.1.3: V herhangi bir vektör uzayı olmak üzere

$$[x, y] = 0 \quad x, y \in V$$

trivial braket ile bir Lie cebiridir.

Örnek 2.1.4: L , \mathbb{F} cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Sıfırdan farklı $x \in L$ alalım. x tarafından üretilen uzayı $\mathbb{F}x$ ile gösterelim. $\mathbb{F}x$ bir boyutlu abelyen Lie cebiridir. $a, c \in \mathbb{F}x$ alalım.

$$[ax, cx] = ac[x, x] = 0 \quad a, c \in \mathbb{F}$$

olup tüm 1 boyutlu Lie cebirleri trivial brakete sahiptir.

Örnek 2.1.5: \mathbb{R}^3 , $[x, y] = x \times y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$

vektör çarpımı ile bir Lie cebiridir.

Çözüm: İlk önce bu çarpım ile \mathbb{R}^3 vektör uzayının bir cebir olduğunu gösterelim.

Yani bu çarpımın bilineer olduğunu gösterelim. $\alpha \in \mathbb{F}$, $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ alalım.

$$\begin{aligned} [\alpha x + y, z] &= \begin{pmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \alpha x_2 + y_2 \\ \alpha x_3 + y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha x_2 + y_2)z_3 - (\alpha x_3 + y_3)z_2 \\ (\alpha x_3 + y_3)z_1 - (\alpha x_1 + y_1)z_3 \\ (\alpha x_1 + y_1)z_2 - (\alpha x_2 + y_2)z_1 \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_2 z_3 - x_3 z_2 \\ x_3 z_1 - x_1 z_3 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} = \alpha [x, z] + [y, z] \end{aligned}$$

benzer şekilde $[x, \alpha y + z] = \alpha [x, y] + [x, z]$ olduğu gösterilir. Bu durumda \mathbb{R}^3 tanımlanan işlem ile bir cebirdir. Şimdi bu çarpımın Tanım 2.1.1 deki iki özelliği sağladığını gösterelim.

$$\text{i.} \quad [x, x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 - x_3 x_2 \\ x_3 x_1 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - x_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

olup bu çarpım ters-simetriktir.

$$\begin{aligned} \text{ii.} \quad & [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = \\ & = \left(x \times \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} \right) + \left(y \times \begin{pmatrix} z_2 x_3 - z_3 x_2 \\ z_3 x_1 - z_1 x_3 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \end{pmatrix} \right) + \left(z \times \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \right) \\ & = \begin{pmatrix} x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3 \\ x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 \\ x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} y_2 z_1 x_2 - y_2 z_2 x_1 - y_3 z_3 x_1 + y_3 z_1 x_3 \\ y_3 z_2 x_3 - y_3 z_3 x_2 - y_1 z_1 x_2 + y_1 z_2 x_1 \\ y_1 z_3 x_1 - y_1 z_1 x_3 - y_2 z_2 x_3 + y_2 z_3 x_2 \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} z_2 x_1 y_2 - z_2 x_2 y_1 - z_3 x_3 y_1 + z_3 x_1 y_3 \\ z_3 x_2 y_3 - z_3 x_3 y_2 - z_1 x_1 y_2 + z_1 x_2 y_1 \\ z_1 x_3 y_1 - z_1 x_1 y_3 - z_2 x_2 y_3 + z_2 x_3 y_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Örnek 2.1.6: Herhangi V asosyatif cebiri, braket olarak komütatör aldığımızda Lie cebirine dönüşür.

$$[x, y] = xy - yx, \quad x, y \in V$$

Örnek 2.1.7: V, \mathbb{F} cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. V den V ye olan tüm lineer dönüşümlerin kümesi $End V$ vektör uzayını düşünelim.

$$End V = \{f \mid f: V \rightarrow V \text{ lineer dönüşüm}\}$$

$End V$ fonksiyonların bileşkesi ile asosyatif bir cebirdir. $End V$ üzerinde çarpımı $[f, g] = fg - gf$ olarak tanımlayalım. $End V$ bu çarpım ile bir Lie cebirdir. Bu Lie cebirine “genel lineer cebir” diyeceğiz ve $gl(V)$ ile göstereceğiz. $gl(V)$ nin asosyatif bir cebir olduğu açıktır.

Örnek 2.1.8: $gl_n(\mathbb{F}) = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{F}\}$ kümesini düşünelim. $gl_n(\mathbb{F})$ vektör uzayı $[A, B] = AB - BA$ çarpımı ile bir Lie cebiridir. $gl_n(\mathbb{F})$ nin asosyatif bir cebir olduğu açıktır.

Örnek 2.1.9: $a \in gl_n(\mathbb{F})$ için $Tr(a)$ ile a nın izini gösterelim. $sl_n(\mathbb{F}) = \{a \in gl_n(\mathbb{F}) \mid Tr(a) = 0\}$ olsun. $sl_n(\mathbb{F}), gl_n(\mathbb{F})$ nin bir alt cebiridir. Bu cebire özel Lie cebiri denir.

Not 2.1.10: $gl(V) \cong gl_n(\mathbb{F})$

Not 2.1.11: A bir cebir ve $B \subseteq A$ alt cebir olsun. A da olan özelliklerin tamamı B için de geçerlidir. Yani A bir Lie cebir ise B de Lie cebirdir. A asosyatif ise B de asosyatiftir

2.2. YAPI SABİTLERİ

Tanım 2.2.1: A, \mathbb{F} cismi üzerinde bazı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan bir cebir olsun.

$$x_i x_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

çarpımı A cebirinin çarpım tablosunu belirler. Gerçekten de

$$x = \sum x_i \alpha_i, \quad y = \sum \beta_j x_j$$

ise

$$xy = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j x_i x_j = \sum_{i,j,k} \alpha_i \beta_j c_{ij}^k x_k$$

olup A daki çarpım n^3 tane c_{ij}^k sabitinin bilinmesiyle tam olarak bellidir. Bu sabitlere yapı sabitleri denir.

2.3. MERKEZ VE NORMALLEYEN

Tanım 2.3.1: $L, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir Lie cebiri olsun. S, L nin alt kümesi olmak üzere

$$C_L(S) = \{x \in L \mid [x, s] = 0, \text{ her } s \in S \text{ için}\}$$

kümesine S nin L deki merkezleyeni (centralizer) denir.

Tanım 2.3.2: $C(L) = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ her } y \in L\}$ kümesine L Lie cebirinin merkezi denir.

Teorem 2.3.3: $C(L)$, L nin bir idealidir.

İspat:

i. $C(L)$, L nin altuzayıdır: $y \in L; \alpha, \beta \in \mathbb{F}; x_1, x_2 \in C(L)$ alalım.

$$[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = [\alpha x_1, y] + [\beta x_2, y] = \alpha [x_1, y] + \beta [x_2, y] = 0$$

olup $\alpha x_1 + \beta x_2 \in C(L)$ dir.

ii. $C(L)$, L nin altcebiridir: $x_1, x_2 \in C(L); y \in L$ olmak üzere

$$[[x_1, x_2], y] = -[x_2, y], x_1] - [y, x_1], x_2] = 0$$

olup $[x_1, x_2] \in C(L)$ dir.

iii. $C(L)$, L nin bir idealidir. $x \in C(L)$; $l, y \in L$ olmak üzere

$$[[x, y], l] = [0, l] = 0$$

olup $[x, y] \in C(L)$ dir.

Burada merkezi hesaplayan bir algoritma verelim.

L , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir Lie cebiri olsun.

$x = \sum_i \alpha_i x_i \in C(L)$ için $[x, x_j] = 0$, $1 \leq j \leq n$ dir. Buradan,

$$\left[\sum_i \alpha_i x_i, x_j \right] = 0$$

$$\sum \alpha_i [x_i, x_j] = \sum \alpha_i \sum c_{ij}^k x_k = 0$$

elde edilir. Burada, c_{ij}^k yapı sabitidir. $x_k \neq 0$ olduğundan $\sum_{i,j} \alpha_i c_{ij}^k = 0$ dir. Buradan, n tane bilinmeyene $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ bağlı n^2 tane denklem elde ederiz. Gauss eliminasyon yöntemi ile bu denklem sistemini çözerek merkezi elde ederiz.

Not 2.3.4: $C(L) = L$ ise L ye abelyan veya komutatif denir.

Lemma 2.3.5: I ve J, L nin iki ideali ise $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ ve $[I, J] = \{ \sum [x_i, y_i] \mid x_i \in I, y_i \in J \}$ kümeleri de L nin idealleridir.

Tanım 2.3.6: L_1 ve L_2 iki Lie cebiri olsun. $\vartheta: L_1 \rightarrow L_2$ lineer dönüşümü her $x, y \in L_1$ için $\vartheta[x, y] = [\vartheta(x), \vartheta(y)]$ oluyor ise ϑ ye Lie cebir homomorfizması diyeceğiz.

- a. Eğer ϑ Lie cebir homomorfizmi birebir ve örten ise Lie cebir izomorfizmi diyeceğiz.
- b. Eğer $\vartheta: L \rightarrow L$ Lie cebir homomorfizmi ise ϑ ye endomorfizm diyeceğiz
- c. Eğer $\vartheta: L \rightarrow L$ Lie cebir izomorfizmi ise ϑ ye Lie cebir otomorfizmi diyeceğiz. L nin tüm otomorfizmlerinin kümesini $Aut(L)$ ile göstereceğiz

Eğer L bir Lie cebiri ise $\vartheta: L \rightarrow gl(L)$ herhangi bir ϑ dönüşümü için $[\vartheta(x), \vartheta(y)] = \vartheta(x)\vartheta(y) - \vartheta(y)\vartheta(x)$ tanımlayabiliriz.

Tanım 2.3.7: L , \mathbb{F} cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. Her $x \in L$ için

$$ad_x: L \rightarrow L, \quad ad_x(y) = [x, y], \quad y \in L$$

lineer dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüme x tarafından belirlenen adjoint dönüşüm denir.

Tanım 2.3.8: L sonlu boyutlu bir Lie cebiri olsun.

$$ad: L \rightarrow gl(L), \quad ad(x) = ad_x, \quad x \in L$$

lineer dönüşümü bir Lie cebiri homomorfizmidir.

İspat: L bir Lie cebiri ve $x, y \in L$ olsun. Her $z \in L$ için Jacobi özdeşliğinden

$$\begin{aligned} ad_{[x,y]}(z) &= [[x, y], z] \\ &= -[z, [x, y]] \\ &= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= ad_x ad_y(z) - ad_y ad_x(z) \\ &= [ad_x, ad_y](z) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda $ad_{[x,y]}(z) = [ad_x, ad_y](z)$ olup ad bir homomorfizmdir.

Not 2.3.9: Kolaylık olması açısından $[x, [x, [x, y]]]$ yerine $(ad_x)^3(y)$ yazacağız.

Teorem 2.3.10: Merkez, ad dönüşümünün çekirdeğidir.

İspat: $x \in \text{çekad}$ alalım. Her $y \in L$ için

$$ad_x(y) = [x, y] = 0$$

olup $x \in C(L)$ dir. $x \in C(L)$ alalım. Her $y \in L$ için

$$[x, y] = ad_x(y) = 0$$

olup $x \in \text{çekad}$ dır.

Tanım 2.3.11: Bir d , Lie cebir homomorfizmi $d[x, y] = [d(x), y] + [x, d(y)]$ koşulunu sağlıyorsa d ye bir derivasyondur denir.

Teorem 2.3.12: L bir Lie cebiri olsun. $x \in L$ için $ad_x: L \rightarrow L$ homomorfizmi L nin bir derivasyonudur.

İspat: $y, z \in L$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ad_x([y, z]) &= [x, [y, z]] \\ &= -[z, [x, y]] - [y, [z, x]] \\ &= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \\ &= [ad_x y, z] + [y, ad_x z] \end{aligned}$$

Tanım 2.3.13: V , L Lie cebirinin bir alt uzayı olsun.

$$N_L(V) = \{x \in L \mid [x, v] \in V, \forall v \in V\}$$

kümesine V nin L deki normalleyeni denir.

Teorem 2.3.14: $N_L(V)$, L Lie cebirinin bir alt cebiridir.

İspat:

i. $N_L(V)$, L nin altuzayıdır: $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; $x_1, x_2 \in N_L(V)$ alalım.

$$[\alpha x_1 + \beta x_2, v] = [\alpha x_1, v] + [\beta x_2, v] = \alpha [x_1, v] + \beta [x_2, v] = \alpha v' + \beta v'' \in V$$

olup $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N_L(V)$, dir.

ii. $N_L(V)$, L nin alt cebiridir: $x_1, x_2 \in N_L(V)$ alalım.

$$[[x_1, x_2], v] = -[[x_2, v], x_1] - [[v, x_1], x_2] \in V$$

olup $[x_1, x_2] \in N_L(V)$ dir.

Teorem 2.3.15: V, L Lie cebirinin bir alt cebiri ise $V, N_L(V)$ Lie cebirinin bir idealidir.

Burada normalleyeni hesaplayan bir algoritma verelim.

$L, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bazına sahip bir Lie cebiri olsun. V, L nin $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ tarafından üretilen alt uzayı olsun. Bu durumda her $y_i, 1 \leq i \leq k$ için $y_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_j$ dir.

Normalleyen tanımından bir $x = \sum_i \alpha_i x_i$ elemanının $N_L(V)$ nin içinde olması için gerek ve yeter koşulun her $v \in V$ için $[x, v] \in V$ olması gerektiğini biliyous. Özel olarak V nin baz elemanları için de doğrudur. O halde, $x = \sum_i \alpha_i x_i \in N_L(V)$ olmak üzere, $[x, y_i] \in V$ dir. Bu çarpımdan α_i lere bağlı bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek $N_L(V)$ elde edilir.

2.4. NİLPOTENTLİK VE ÇÖZÜLEBİLİRLİK

Verilen bir Lie cebiri nilpotent veya çözülebilir olabilir.

Tanım 2.4.1: L bir Lie cebiri olsun. L nin ideallerinin bir zinciri

$$L^{(1)} = [L, L], L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = [[L, L], [L, L]],$$

$$L^{(3)} = [L^{(2)}, L^{(2)}], \dots L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}], \dots$$

tanımlansın. Eğer $d \geq 1$ tamsayısı için $L^{(d)} = 0$ oluyorsa L ye çözülebilir Lie cebir, en küçük d sayısına da çözülebilirlik derecesi denir.

Not 2.4.2:

1. L , 1. dereceden çözülebilir ise yani

$$L^{(1)} = [L^{(0)}, L^{(0)}] = [L, L] = 0$$

ise L değişmeli Lie cebiridir.

2. L , 2. dereceden çözülebilir Lie cebiri ise yani

$$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = [[L, L], [L, L]] = 0$$

ise L metabelyan Lie cebirdir.

Tanım 2.4.3: L bir Lie cebiri olsun L nin ideallerinin bir serisi

$$L^1 = L, L^2 = [L, L], L^3 = [L, L^2], \dots, L^{i+1} = [L, L^i] \dots$$

tanımlansın.

$$L = L^1 \supset L^2 \supset L^3 \dots \supset L^i \supset \dots$$

serisine azalan merkezi seri denir. Eğer $k \geq 1$ için $L^k = 0$ oluyorsa L ye nilpotent Lie cebiri denir. $L^c \neq 0$ fakat $L^{c+1} = 0$ olacak şekilde en küçük c sayısına nilpotentlik sınıfı denir.

Not 2.4.4: 1. sınıftan nilpotent Lie cebiri değişmelidir.

Lemma 2.4.5: L , nilpotent ise çözülebilirdir.

Tanım 2.4.6: L bir Lie cebiri olsun. L nin en geniş (maksimal) idealine L nin radikali denir. $Rad(L)$ ile gösterilir.

Lemma 2.4.7: d, L nin nilpotent derivasyonu olsun. $\exp d$, L nin bir otomorfizmi olur.

Tanım 2.4.8: Eğer adx nilpotent ise $\exp(adx) = e^{adx}$ otomorfizmdir. Bu formdaki otomorfizmlere iç, iç otomorfizmler tarafından üretilen $Aut(L)$ nin alt grubuna iç otomorfizm grubu denir ve $Inn(L)$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.9 (Engel): L sonlu boyutlu bir Lie cebiri olsun. L nilpotenttir ancak ve ancak her $x \in L$ için adx nilpotent endomorfizmdir.

İspat : [4, sf 41]

BÖLÜM 3

3.1 EKSTREMAL ELEMANLAR

Tanım 3.1.1: L , \mathbb{F} cismi üzerinde bir Lie cebir olsun. Sıfırdan farklı bir x elemanı $[x, [x, L]] \subseteq \mathbb{F}x$ koşulunu sağlıyorsa ekstremal eleman denir. Özel olarak $[x, [x, L]] = 0$, $x \in L$ oluyor ise x ekstremal elemanına sandwiches denir.

Not 3.1.2: x, L Lie cebirinin ekstremal elemanı olsun. Herhangi bir $y \in L$ için $\alpha \in \mathbb{F}$ olmak üzere $ad_x^3(y) = [x, [x, [x, y]]] = [x, \alpha x] = \alpha[x, x] = 0$ olur. Bu durumda, x en fazla 3. mertebeden ad-nilpotenttir.

Bu bölümde L Lie cebirini karakteristiği 2 den farklı olan bir \mathbb{F} cismi üzerinde kabul edeceğiz.

Not 3.1.3: $[x, [x, y]]$, y ye göre lineerdir.

İspat:

$$\begin{aligned} [x, [x, \alpha y_1 + y_2]] &= [x, [x, \alpha y_1] + [x, y_2]] \\ &= [x, [x, \alpha y_1]] + [x, [x, y_2]] \\ &= \alpha[x, [x, y_1]] + [x, [x, y_2]] \end{aligned}$$

Lemma 3.1.4: x ekstremal elemandır ancak ve ancak her $y \in L$ için $[x, [x, y]] = f_x(y)x$ olacak şekilde $f_x: L \rightarrow K$, $y \rightarrow f_x(y)$ lineer fonksiyoneli vardır.

İspat: Ekstremal elemanın tanımından açıktır.

Not 3.1.5: Eğer x ve y değişmeli ise $[x, y] = [y, x]$ dir. Çarpımın ters simetrik özelliğinden $[x, y] = -[y, x]$ elde edilir. Bu durumda $[y, x] = [x, y] = -[y, x] = 0$ elde edilir. Bu ise $f_x(y) = 0$ olması demektir.

Lemma 3.1.6: L nin sıfırdan farklı ekstremal elemanlarının kümesini ε ile gösterelim. Eğer $x, y \in \varepsilon$ ise $f_x(y) = f_y(x)$ tir.

İspat: [1]

Tanım 3.1.7(Exponential): $x \in \varepsilon$ ve $s \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$\exp(x, s) = 1 + sad_x + \frac{1}{2}s^2 ad_x^2$$

$x \in \varepsilon$ ise $ad_x^3=0$ olduğundan bu sad_x derivasyonunun eksponantialidir. Yani $\exp(x, s) = e^{sad_x}$ dir.

$\exp(x, s)$, L nin bir otomorfizmidir. İlk olarak

$$[ad_x^2(y), ad_x^2(z)] = f_x(y)f_x(z)[x, x] = 0 \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} [ad_x(y), ad_x^2(z)] + [ad_x^2(y), ad_x(z)] &= [[x, y], [x, [x, z]]] + [[x, [x, y]], [x, z]] \\ &= [[x, y], f_x(z)x] + [f_x(y)x, [x, z]] \\ &= -f_x(z)[x, [x, y]] + f_x(y)[x, [x, z]] \\ &= -f_x(z)f_x(y)x + f_x(y)f_x(z)x \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi bu özdeşliklerin aşağıdaki zincirini elde ederiz.

$$\begin{aligned} [\exp(x, s)(y), \exp(x, s)(z)] &= \\ &= [y + sad_x(y) + \frac{1}{2}s^2 ad_x^2(y), z + sad_x(z) + \frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z)] \\ &= [y, z] + [y, sad_x(z)] + [y, \frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z)] \\ &\quad + [sad_x(y), z] + [sad_x(y), sad_x(z)] + [sad_x(y), \frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z)] \\ &\quad + [\frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z), z] + [\frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z), sad_x(z)] + [\frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z), \frac{1}{2}s^2 ad_x^2(z)] \\ &= [y, z] + s[y, ad_x(z)] + s[ad_x(y), z] \\ &\quad + 2 \cdot \frac{1}{2}s^2 [ad_x(y), ad_x(z)] + \frac{1}{2}s^2 [y, ad_x^2(z)] + \frac{1}{2}s^2 [ad_x^2(y), z] + 0 + 0 \\ &= [y, z] + sad_x([y, z]) + \frac{1}{2}s^2 ad_x^2([y, z]) \\ &= \exp(x, s)([y, z]). \end{aligned}$$

Böylece $\exp(x, s)$ gerçekten L nin bir otomorfizimidir. G ile $\exp(x, s)$ tarafından üretilen tüm otomorfizmlerin grubunu gösterelim.

Lemma 3.1.8: [1] Eğer L ekstremal elemanlar tarafından üretilen Lie cebiri ise L, ε tarafından lineer olarak gerilir.

Teorem 3.1.9: Eğer L sonlu sayıda ekstremal eleman tarafından üretilen Lie cebiri ise L sonlu boyutludur.

Bu teoremin ispatı Zelmanov ve Kostrikin [18] çalışmasında bulunmaktadır.



BÖLÜM 4

4.1. İKİ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN MERKEZİ VE OTOMORFİZMLERİ

Teorem 4.1.1 :[1] L , \mathbb{F} cismi üzerinde x ve y ekstremal elemanları tarafından üretilen bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki 3 durumdan birisi sağlanır.

1. $L = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y$ abelyendir, $\mathcal{E} = L \setminus \{0\}$
2. $L = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y + \mathbb{F}z$ burada $z = [x, y] \neq 0$ ve $\mathcal{E} = L \setminus \{0\}$
3. $L \cong sl_2$ ve \mathcal{E}, L nin tüm nilpotent elemanlarından oluşur.

Tanım 4.1.2: L , \mathbb{F} cismi üzerinde sonlu üretilmiş bir Lie cebiri olsun. $\theta \in Aut(L)$ olmak üzere her $x \in L$ için $\theta(x) - x \in C(L)$ ise θ ya "merkezi otomorfizm" denir.

Yukarıdaki 3 durum için L nin merkezi ve merkezi otomorfizmleri aşağıdaki gibidir.

1. Eğer $L = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y$ abelyan, $\mathcal{E} = L \setminus \{0\}$ ise $C(L) = \{x, y\}$ ve

$$Aut_C(L) = \left\{ \begin{array}{l} [\theta_1: x \rightarrow x, y \rightarrow y], [\theta_2: x \rightarrow x + y, y \rightarrow y] \\ [\theta_3: x \rightarrow x, y \rightarrow y + x] \end{array} \right\}$$

İspat: $C(L) = \{u \in L \mid [v, u] = 0, \text{ her } v \in L\}$ tanımını kullanarak, 1. durum için

$$[x, x] = [x, y] = [y, y] = 0$$

elde ederiz. Buradan $C(L) = \{x, y\}$ olduğu açıktır.

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ lineer dönüşümler olup L nin otomorfizmleridir.

$$\theta_1(x) - x = 0, \theta_1(y) - y = 0$$

olup $0 \in C(L)$ dir.

Bu durumda θ_1 merkezi otomorfizm olur.

$$\theta_2(x) - x = y, \quad \theta_2(y) - y = 0$$

olup $y, 0 \in C(L)$ dir. Bu durumda θ_2 merkezi otomorfizm olur.

$$\theta_3(x) - x = 0, \quad \theta_3(y) - y = x$$

olup $x, 0 \in C(L)$ dir. Bu durumda θ_3 merkezi otomorfizm olur.

1. durum için L nin iç otomorfizmleri

$$\psi_1: e^{sadx}: x \rightarrow x + s[x, x] = x$$

$$y \rightarrow y + s[y, x] = y$$

dir. Benzer şekilde

$$\psi_2: e^{sady}: x \rightarrow x$$

$$y \rightarrow y$$

elde edilir. Öyleyse $Inn(L) = \{Id\}$ dir.

Not 4.1.3: $\theta \in Aut_C(L)$ olmak üzere $\theta Id = Id \theta$ olduğu açıktır.

2. Eğer $L = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y + \mathbb{F}z$ burada $z = [x, y] \neq 0$, $\mathcal{E} = L \setminus \{0\}$ ve $f = 0$ ise $C(L) = \langle [x, y] \rangle$ dir.

$$Aut_C(L) = \left\langle \begin{array}{l} [\theta_1: x \rightarrow x, y \rightarrow y], \quad [\theta_2: x \rightarrow x + \alpha_1[x, y], y \rightarrow y], \\ [\theta_3: x \rightarrow x, y \rightarrow y + \alpha_2[x, y]] \end{array} \right\rangle$$

dir.

İspat: 2. durum için çarpım tablosu aşağıdaki gibidir.

	x	y	z
x	0	z	0
y	$-z$	0	0
z	0	0	0

$[x, y] = z$ olup

1) $[x, [x, y]] = [x, z] = 0$

2) $[y, [x, y]] = [y, z] = 0$

olduğu tablodan görülür. Bu durumda $C(L) = \langle [x, y] \rangle$ dir.

2. durum için L nin iç otomorfizmleri

$$\psi_1: e^{sadx}: x \rightarrow x$$

$$y \rightarrow y + s[y, x]$$

$$\psi_2: e^{sady}: x \rightarrow x + s[x, y]$$

$$y \rightarrow y$$

$$\psi_3: Id$$

şeklindedir.

Şimdi θ_2 ve θ_3 ün merkezi otomorfizmler olduğunu gösterelim.

$$\theta_2(x) = x = \alpha[x, y] \in C(L), \quad \theta_2(y) = y = 0 \in C(L)$$

olup θ_2 merkezi otomorfizmdir. Benzer şekilde θ_3 te merkezi otomorfizmdir.

Bu durumda θ_1 , θ_2 ve θ_3 aynı zamanda iç otomorfizmlerdir.

3. Eğer $L \cong sl_2$ ve \mathcal{E} , L nin tüm nilpotent elemanlarından oluşuyor ise bu durumda \mathcal{E} , sl_2 nin tüm nilpotent elemanlarından oluşur.

$$L = \langle x, y \mid x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Not 4.1.4: x ve y sl_2 nin nilpotent elemanlarıdır.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Not 4.1.5: L nilpotent Lie cebiri değildir.

$$u_i \in L \text{ olmak üzere } [u_i, \dots [u_2, [u_1, [x, y]] \dots]] = \alpha u, \quad u \in L$$

L nin merkezi $C(L) = \{0\}$ olup

$$\text{Aut}_C(L) = \{\theta: [x_1 \rightarrow x_1, y \rightarrow y]\}$$

elde edilir.

$$\text{Aut}_C(L) = \text{Inn}(L)$$

Örnek 4.1.6: L , \mathbb{F} cismi üzerinde x ve y elemanları tarafından üretilen bir Lie cebiri ve $L = \mathbb{F}x + \mathbb{F}y$ abelyen, $\mathcal{E} = L \setminus \{0\}$ olsun. V, L nin $\{x\}$ ile üretilen altuzayı olsun. V nin L içindeki normalleyenini bulalım.

$$z \in L \Rightarrow z = k_1x + k_2y$$

$$z \in N_L(V) \Leftrightarrow [z, x] \in V$$

$$z \in N_L(V) \Leftrightarrow [k_1x + k_2y, x] \in V$$

$$z \in N_L(V) \Leftrightarrow [k_1x + k_2y, x] = k_1 \underbrace{[x, x]}_{=0} + k_2 \underbrace{[x, y]}_{=0} = 0 \in V$$

$$N_L(V) = \text{Sp}\{y\}$$

Lemma 4.1.7: ψ_1, ψ_2 sırasıyla x ve y ekstremal elemanları tarafından belirlenen iç otomorfizmler olsun. $c_1, c_2 \in F$ olmak üzere

1. $e^{\text{adc}_1x} e^{\text{adc}_2x} = e^{\text{ad}(c_1+c_2)x}$
2. Eğer $[x, y] = 0$ ise $[\psi_1, \psi_2] = 1$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned} 1. \quad e^{\text{adc}_1x} e^{\text{adc}_2x}(z) &= e^{\text{adc}_1x} \left(z + [z, c_2x] + \frac{[z, c_2x, c_2x]}{2} \right) \\ &= e^{\text{adc}_1x} \underbrace{\left(z + [z, c_2x] + \frac{c_2^2}{2} \alpha x \right)}_t, \\ &= t + [t, c_1x] + \frac{[t, c_1x, c_1x]}{2} \\ &= z + [z, c_2x] + \frac{c_2^2}{2} \alpha x + [z, c_1x] + [z, c_2x, c_1x] \\ &\quad + \frac{[z, c_1x, c_1x]}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z + (c_1 + c_2)[z, x] + \underbrace{\alpha \frac{(c_2^2 + c_1^2)}{2} x + c_2 c_1 \alpha x}_{\frac{(c_1 + c_2)^2}{2} [z, x, x]} \\
&= e^{ad(c_1 + c_2)x}
\end{aligned}$$

2. ψ_1 , x elemanı tarafından belirlenen iç otomorfizm ise ψ_1^{-1} , $-x$ extremal elemanı tarafından belirlenir. Benzer şekilde ψ_2 , y elemanı tarafından belirlenen iç otomorfizm ise ψ_2^{-1} , $-y$ extremal elemanı tarafından belirlenir.

$x, y \in \varepsilon$ ve $[x, y] = 0$ ise $[[z, x], y] = [[z, y], x]$ dir. Görelim

$$\begin{aligned}
[[z, x], y] &= -\underbrace{[[x, y], z]}_{=0} - [[y, z], x] \\
&= -[[y, z], x] \\
&= [[z, y], x]
\end{aligned}$$

Şimdi $[x, y] = 0$ ise $e^{adx}e^{ady} = e^{ad(x+y)}$ olduğunu görelim. $z \in L$ için

$$\begin{aligned}
e^{adx}e^{ady}(z) &= e^{adx}\left(z + [z, y] + \frac{[z, y, y]}{2}\right) \\
&= z + [z, y] + \frac{[z, y, y]}{2} + [z, x] \\
&\quad + [z, y, x] + \frac{[z, x, x]}{2} + \frac{[[z, y], x, x]}{2}
\end{aligned}$$

Son terim;

$$\begin{aligned}
[[z, y], x, x] &= [[z, x], y, x] \\
&= \underbrace{[y, x, [z, x]]}_{=0} - [x, [z, x], y] \\
&= -[x, [z, x], y] = [[z, x], x, y] = [\alpha x, y] = 0
\end{aligned}$$

Buradan;

$$e^{adx}e^{ady}(z) = z + [z, x + y] + \frac{[z, x + y, x + y]}{2}$$

$$= e^{ad(x+y)}(z)$$

elde edilir. Öyleyse

$$\begin{aligned} [\psi_1, \psi_2] &= e^{ad(-x_1)}e^{ad(-y_1)}e^{adx_1}e^{ady_1} \\ &= e^{ad(-x_1-y_1+x_1+y_1)} = Id \end{aligned}$$

4.2. ÜÇ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN MERKEZİ VE OTOMORFİZMLERİ

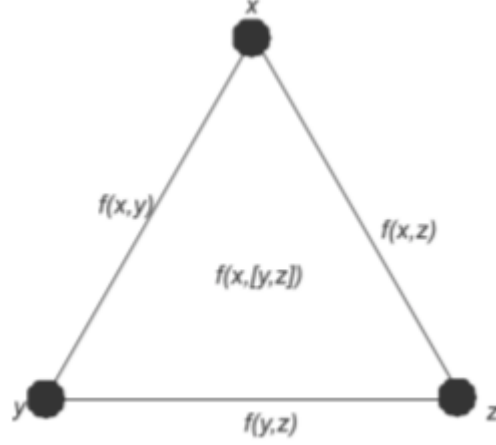
Bu bölümde bir L Lie cebirlerinin x, y ve z gibi üç ekstremal eleman tarafından üretilmesini çalışacağız. Aşağıdaki 8 eleman,

$$x, y, z, [x, y], [y, z], [x, z], [x, [y, z]], [y, [x, z]]$$

L yi gerer. Bu L nin 8 den daha fazla boyuta sahip olmadığını gösterir. Herhangi bir durumda bazın 8 eleman tarafından üretildiği kontrol edilebilir, böylece $\dim L = 8$ dir.

4.3. ÜÇ EKSTREMAL ELEMAN TARAFINDAN ÜRETİLEN LİE CEBİRLERİNİN YAPISI:

L nin lineer üreteçlerinde ad_x ve ad_y nin etkisini çalışacağız ve dört $f(x, y), f(x, z), f(y, z)$, ve $f(x, [y, z])$ parametresinin terimlerindeki özdeşlikler tarafından tamamen tanımlanabilir olduğunu göreceğiz. x, y, z tepeleri ile üçgenler çizerek bu parametreleri tanımlayacağız ve $f(x, y)$ parametresinin xy kenarını işaretliyoruz, ortaya yönelimin bir göstergesi ile merkez parametresi $f(x, [y, z])$ yi koyuyoruz. Şekil 5.1 de görülmektedir.



Şekil 5.1: Üç üreteçli durum

Üreteçlerin dönüştürülmesi ile $f(x, [y, z])$ sıfıra yaklaşacaktır, aşağıdaki gibi. $s \in \mathbb{F}$ olsun ve $x, y, \exp(x, s)z$ üçlü durumunu düşünelim. Aşağıdaki parametrelere elde ederiz.

$$f(x, y) = f(x, y)$$

$$f(x, \exp(x, s)z) = f(x, z)$$

$$f(y, \exp(x, s)z) = f(y, z) + sf(y, [x, z]) + \frac{1}{2}s^2 f(x, y), f(x, z)$$

$$f(x, [y, \exp(x, s)z]) = f(x, [y, z]) - sf(x, y)f(x, z).$$

İspat: ikinci parametre için

$$f(x, \exp(x, s)z) = f(x, z) + sf(x, [x, z]) + \frac{1}{2}s^2 f(x, [x, [x, z]]) = f(x, z)$$

elde ederiz. Üçüncü parametre için

$$\begin{aligned} f(y, \exp(x, s)z) &= f(y, z) + sf(y, [x, z]) + \frac{1}{2}s^2 f(y, [x, [x, z]]) \\ &= f(y, z) + sf(x, [y, z]) + \frac{1}{2}s^2 f(y, f(x, z)x) \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonraki parametre için

$$f(x, [y, \exp(x, s)z]) = f(x, [y, z]) + sf(x, [y, [x, z]]) + \frac{1}{2}s^2 f(x, [y, [x, [x, z]]])$$

elde ederiz.

Son terim açıkça sıfırdır ve ikinci terim için

$$f(x, [y, [x, z]]) = -f(y, [x, [x, z]]) = -f(x, z)f(y, x) = -f(x, y)f(x, z)$$

Böylece gerçekten $f(x, [y, \exp(x, s)z]) = f(x, [y, z]) - sf(x, y)f(x, z)$ tir.

Açıkça bu üç tekrar extremal elemanlar tarafından oluşur ve x, y, z gibi aynı cebiri üretir. İki durum öne çıkar:

- Üç kenarın en az ikisi sıfırdan farklı işaretlere sahip ise ($f(x, z)$ ve $f(x, y)$) merkez parametresi $f(x, [y, z])$ yi s nin uygun bir seçimi ile sıfıra dönüştürebiliriz, bu durum $s = \frac{f(x, [y, z])}{f(x, y)f(x, z)}$ dir.
- En fazla bir kenar sıfırdan farklı işaret ise, $f(x, y)$ varsayalım, ve merkez parametresi $f(x, [y, z])$ sıfırdan farklıdır, biz bir kenar ile üç x, y ve $\exp(x, s)z$ ekstremal üreteçleri için hareket edebiliriz (başka bir deyişle $f(y, \exp(x, s)z)$ Böylece birinci duruma indirgeyebiliriz ve böylece merkezi parametre sıfır olduğunda indirgemek her zaman mümkündür.

Şimdi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ ve x, y, z , ler $\alpha x, \beta y, \gamma z$ için ölçek olsun. Bu merkez parametresini 0 bırakır ve $\alpha\beta f(x, y)$, $\alpha\gamma f(x, z)$ ve $\beta\gamma f(y, z)$ için kenar işaretlerini değiştirir. Bu \mathbb{F} nin bir cisim uzantısının kullanılabileceği anlamına gelir, biz bütün kenar işaretlerini -2 için dönüştürebiliriz.

Yukarıdaki akıl yürütmeden dolayı, sadece dört farklı eses durumda bırakırız, üçgende sıfırdan farklı işaretli kenarların sayısı ile ayırt edildi.

Teorem 4.3.1: L nin üç ekstremal eleman tarafından üretilen bir Lie cebiri olduğunu varsayalım. Gerekirse cismi genişlettikten sonra, L merkezi parametresi sıfır olan ve sıfırdan farklı kenar parametresi -2 olan üç ekstremal eleman tarafından üretilir. Özellikle L, x, y, z ile $f(x, [y, z]) = 0$ ekstremal elemanları tarafından üretilen bir M Lie cebirinin bir bölümüdür ve $\dim M = 8$ dir.

Bu dört durum sıfırdan farklı kenar parametrelerinin sayısına bağlı olarak ayırt edilebilir.

Dört durum aşağıdaki gibidir.

- $f(x, y) = f(x, z) = f(y, z) = 0$

$f = 0$ ise $Rad(M) = M$ dir, böylece M çözülebilirdir.

- $f(x, y) = -2, f(x, z) = f(y, z) = 0:$

Bu durumda R çözülebilir radikalinin boyutu 5 olur

$\{z, [x, z], [y, z], [x, [y, z]], [y, [x, z]]\}$ tarafından gerilir.

- $f(x, y) = f(x, z) = -2, f(y, z) = 0:$

Bu durumda yine R çözülebilir radikalinin boyutu 5 tir

$$\left\{ y - \frac{1}{2}[y, [x, z]], z - \frac{1}{2}[y, [x, z]], [x, y] - [x, z], [y, z], [x, [y, z]] \right\}$$

ile gerilir.

- $f(x, y) = f(x, z) = f(y, z) = -2:$

Bu durumda $M \cong sl_3$ dir. Örnek olarak;

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorem 4.3.2: $L; x, y$ ve z ekstremal elemanları tarafından üretilen metabelyan ve 1. durum koşullarını sağlayan Lie cebiri olsun. Bu durumda L nin merkezi

$$C(L) = \langle [z, x, y], [z, y, x], [x, z, y] \rangle$$

dir.

İspat:

➤ $[z, x, y]$, $C(L)$ nin elemanıdır. Görelim:

$$\begin{aligned} [[z, x, y], x] &= -[y, x, [z, x]] - [x, [z, x], y] \\ &= -[x, [z, x], y] \\ &= [[z, x], x, y] \end{aligned}$$

1.durum koşullarından dolayı son ifade sıfırdır.

$$[[z, x, y], y] = [[L, y], y]$$

olup 1. durum koşullarından dolayı son ifade sıfırdır.

$$\begin{aligned} [[z, x, y], z] &= -[y, z, [z, x]] - [x, [z, x], y] \\ &= -[z, [z, x], y] \\ &= [[z, x], z, y] \\ &= -[[x, z], z, y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup $[z, x, y] \in C(L)$.

➤ $[z, y, x]$, $C(L)$ nin elemanıdır. Görelim:

$$[[z, y, x], x] = [[L, x], x] = 0$$

$$\begin{aligned} [[z, y, x], y] &= -[x, y, [z, y]] - [y, [z, y], x] \\ &= -[y, [z, y], x] \\ &= [[z, y], y, x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[z, y, x], z] &= -[x, z, [z, y]] - [z, [z, y], x] \\ &= -[z, [z, y], x] \\ &= [[z, y], z, x] \\ &= -[[y, z], z, x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

➤ $[x, z, y]$, $C(L)$ nin elemanıdır. Görelim:

$$\begin{aligned} [[x, z, y], x] &= -[y, x, [x, z]] - [x, [x, z], y] \\ &= -[x, [x, z], y] \\ &= [[x, z], x, y] \\ &= [[z, x], x, y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$[[x, z, y], y] = [[L, y], y] = 0$$

$$\begin{aligned} [[x, z, y], z] &= -[y, z, [x, z]] - [z, [x, z], y] \\ &= -[z, [x, z], y] \\ &= [[x, z], z, y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Not 4.3.4: $[y, x, z] = -[x, z, y] - [z, y, x]$

$$[y, z, x] = -[z, y, x]$$

$$[x, y, z] = -[y, z, x] - [z, x, y] = [z, y, x] + [x, z, y]$$

dir. $[y, x, z]$, $[y, z, x]$ ve $[x, y, z]$ merkezdeki elemanlar türünden yazılır.

Şimdi bu Lie cebirinin bazı merkezi otomorfizmlerini belirleyelim.

$$\theta_1: \{x \rightarrow x + [x, [y, z]], \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z\}$$

$$\theta_2: \{x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y + [y, [x, z]], \quad z \rightarrow z\}$$

$$\theta_3: \{x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z + [z, [x, y]]\}$$

otomorfizmleri hem merkezi hem de iç otomorfizmlerdir. Görelim.

θ_1 , $[y, z]$ elemanı tarafından belirlenen iç otomorfizmdir.

$$e^{ad[y,z]}(x) = x + [x, [y, z]] + \underbrace{\frac{[x, [y, z], [y, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= x + [x, [y, z]]$$

$$e^{ad[y,z]}(y) = y + [y, [y, z]] + \underbrace{\frac{[y, [y, z], [y, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= y + [y, [y, z]]$$

$$= y - [[y, z], y]$$

$$= y + [[z, y], y]$$

$$= y$$

$$e^{ad[y,z]}(z) = z + [z, [y, z]] + \underbrace{\frac{[z, [y, z], [y, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= z + [z, [y, z]]$$

$$= z - [[y, z], z]$$

$$= z$$

dir.

θ_1 , merkezi otomorfizmdir.

$$\theta_1(x) - x = [x, [y, z]] \in C(L)$$

$$\theta_1(y) - y = 0 \in C(L)$$

$$\theta_1(z) - z = 0 \in C(L)$$

olup $\theta_1 \in \text{Aut}_C(L) \cap \text{Inn}(L)$

Benzer şekilde θ_2 , $[x, z]$ elemanı tarafından belirlenen iç otomorfizmdir.

$$e^{\text{ad}[x,z]}(x) = x + [x, [x, z]] + \underbrace{\frac{[x, [x, z], [x, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= x + [x, [x, z]]$$

$$= x - [[x, z], x]$$

$$= x + [[z, x], x]$$

$$= 0$$

$$e^{\text{ad}[x,z]}(y) = y + [y, [x, z]] + \underbrace{\frac{[y, [x, z], [x, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= y + [y, [x, z]]$$

$$e^{\text{ad}[x,z]}(z) = z + [z, [x, z]] + \underbrace{\frac{[z, [x, z], [x, z]]}{2} + \dots}_{=0}$$

$$= z + [z, [x, z]]$$

$$= z - [[x, z], z]$$

$$= z$$

θ_2 , merkezi otomorfizmdir.

$$\theta_2(x) - x = 0 \in C(L)$$

$$\theta_2(y) - y = [y, [x, z]] \in C(L)$$

$$\theta_2(z) - z = 0 \in C(L)$$

olup $\theta_2 \in \text{Aut}_C(L) \cap \text{Inn}(L)$.

θ_3 , $[x, y]$ elemanı tarafından belirlenen iç otomorfizmdir. Görelim:

$$\begin{aligned}
 e^{ad[x,y]}(x) &= x + [x, [x, y]] + \underbrace{\frac{[x, [x, y], [x, y]]}{2}}_{=0} + \dots \\
 &= x + [x, [x, y]] \\
 &= x - [[x, y], x] \\
 &= x + [[y, x], x] \\
 &= x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{ad[x,y]}(y) &= y + [y, [x, y]] + \underbrace{\frac{[y, [x, y], [x, y]]}{2}}_{=0} + \dots \\
 &= y + [y, [x, y]] \\
 &= y - [[x, y], y] \\
 &= y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{ad[x,y]}(z) &= z + [z, [x, y]] + \underbrace{\frac{[z, [x, y], [x, y]]}{2}}_{=0} + \dots \\
 &= z + [z, [x, y]]
 \end{aligned}$$

θ_3 , merkezi otomorfizmdir.

$$\theta_3(x) - x = 0 \in C(L)$$

$$\theta_3(y) - y = 0 \in C(L)$$

$$\theta_3(z) - z = [z, [x, y]] \in C(L)$$

olup $\theta_3 \in Aut_C(L) \cap Inn(L)$.

Lemma 4.3.5: θ_1 , θ_2 ve θ_3 iç otomorfizmlerinin bileşkesi de iç otomorfizmdir.

$$\theta_1\theta_2, \theta_1\theta_3, \theta_2\theta_3, \theta_3\theta_1, \theta_3\theta_2, \theta_2\theta_1$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3, \theta_1\theta_3\theta_2, \theta_2\theta_1\theta_3, \theta_2\theta_3\theta_1, \theta_3\theta_1\theta_2, \theta_3\theta_2\theta_1$$

bileşmeleri de merkezi otomorfizim olur.

İspat:

- $$\begin{aligned}\theta_1\theta_2(x) &= \theta_1(\theta_2(x)) = \theta_1(x) = x + [x, [y, z]] \\ \theta_1\theta_2(y) &= \theta_1(\theta_2(y)) = \theta_1\theta_2(x) = \theta_1(y + [y, [x, z]]) \\ &= y + [y, [x, z]]\end{aligned}$$

$$\theta_1\theta_2(z) = \theta_1(z) = z$$

$$\theta_1\theta_2(x) - x = [x, [y, z]] \in C(L)$$

$$\theta_1\theta_2(y) - y = [y, [x, z]] \in C(L)$$

$$\theta_1\theta_2(z) - z = 0 \in C(L)$$

olup $\theta_1\theta_2 \in \text{Aut}_C(L)$ dir.

- $$\begin{aligned}\theta_1\theta_2\theta_3(x) &= \theta_1(\theta_2(\theta_3(x))) = \theta_1(\theta_2(x)) = \theta_1(x) = x + [x, [y, z]] \\ \theta_1\theta_2\theta_3(y) &= \theta_1(\theta_2(\theta_3(y))) = \theta_1(\theta_2(y)) = \theta_1(y + [y, [x, z]]) \\ &= y + [y, [x, z]]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_1\theta_2\theta_3(z) &= \theta_1(\theta_2(\theta_3(z))) = \theta_1(\theta_2(z + [z, [x, y]])) = \theta_1(z + [z, [x, y]]) \\ &= z + [z, [x, y]]\end{aligned}$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3(x) - x = [x, [y, z]] \in C(L)$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3(y) - y = [y, [x, z]] \in C(L)$$

$$\theta_1\theta_2\theta_3(z) - z = [z, [x, y]] \in C(L)$$

olup $\theta_1\theta_2\theta_3 \in \text{Aut}_C(L)$ dir.

Diğer bileşmeler de benzer şekilde yapılabilir

Sonuç 4.3.6: x, y ve z sandwiches elemanları tarafından üretilen metabelyen Lie cebirlerinin merkezi

$$C(L) = \langle [z, x, y], [z, y, x], [x, z, y] \rangle$$

olup $\text{Aut}_C(L) = \langle \theta_1, \theta_2, \theta_3 \rangle$ dir. Burada

$$\theta_1: \{x \rightarrow x + [x, [y, z]], \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z\}$$

$$\theta_2: \{x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y + [y, [x, z]], \quad z \rightarrow z\}$$

$$\theta_3: \{x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z + [z, [x, y]]\}$$

dir.



KAYNAKLAR

- [1] Roozmond, D. A. (2005). Lie algebras generated by extremal elements. *Department of mathematics and Computer Science, Technische Universiteit Eindhoven*.
- [2] Cohen, A. M., Steinbach, A., Ushirobira, R., & Wales, D. (2001). Lie algebras generated by extremal elements. *Journal of Algebra*, **236**(1), 122-154.
- [3] Roozmond, D. (2011). On Lie algebras generated by few extremal elements. *Journal of Algebra*, **348**(1), 462-476.
- [4] De Graaf, W. A. (2000). *Lie algebras: theory and algorithms* (Vol. 56). Elsevier.
- [5] Tange, R. (2002). *Extremal elements in Lie algebras* (Doctoral dissertation, Masters thesis, Eindhoven, June 2002. <http://www.win.tue.nl/~amc/doc/tange.pdf>).
- [6] Benkart, G. (1977). On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 232, 61-81.
- [7] Bauerle, G., & De Kerf, E. A. (1990). Finite and infinite dimensional Lie algebras and applications in physics. *Part I, North-Holland*.
- [8] Cohen, A. M., Gijsbers, D. A., & Knopper, J. W. (2008). GBNP 0.9. 5 (Non-commutative Gröbner bases).
- [9] Draisma, J. (2002). *Lie algebras of vector fields*. Technische Universiteit Eindhoven.
- [10] Hall, B. (2015). *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction* (Vol. 222). Springer.
- [11] Humphreys, J. E. (2012). *Introduction to Lie algebras and representation theory* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.
- [12] Jacobson, N. (1962). Lie algebras, volume 10 of Interscience tracts in pure and applied Mathematics. *Interscience, New York*.
- [13] Kostrikin, A. I. (1990). *Around Burnside*, Springer-Verlag.

- [14] Premet, A., & Strade, H. (1997). Simple Lie algebras of small characteristic: I. Sandwich elements. *Journal of Algebra*, **189**(2), 419-480.
- [15] Serre, J. P. (2000). *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Science & Business Media.
- [16] Sattinger, D. H., & Weaver, O. L. (2013). *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry, and mechanics* (Vol. 61). Springer Science & Business Media.
- [17] Varadarajan, V. S. (2013). *Lie groups, Lie algebras, and their representations* (Vol. 102). Springer Science & Business Media.
- [18] Zel'manov, E. I., & Kostrikin, A. I. (1990). A theorem on sandwich algebras. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, **183**, 106-111.
- [19] Cohen, A. M., Ivanyos, G., & Roozmond, D. (2008). Simple Lie algebras having extremal elements. *Indagationes Mathematicae*, **19**(2), 177-188.