ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

AYŞE ÇOBANKAYA

BAZI BASİT LİE GRUPLARININ KENDİ ÜZERİNE ETKİSİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA-2018

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI BASİT LİE GRUPLARININ KENDİ ÜZERİNE ETKİSİ

Ayşe ÇOBANKAYA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez …/01/2018 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

……………………………..	…..………………………....	.....……………………..
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ	Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT	Prof. Dr. Erol YAŞAR
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE
………………………….	………………………………….	
Prof. Dr. Hayrullah AYIK	Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	
ÜYE	ÜYE	

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FDK-2015-4603
Bu Çalışma TÜBİTAK-BİDEB Tarafından Desteklenmiştir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

BAZI BASİT LİE GRUPLARININ KENDİ ÜZERİNE ETKİSİ

Ayşe ÇOBANKAYA

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Yıl: 2018, Sayfa: 29
Jüri : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

G kompakt, bağlantılı, basit Lie grubu ve G kendi üzerine geçişmeli veya aşikar olmayacak şekilde etkisin. Hsiang (1975), bu etkinin esas izotropi alt grubu tipinin maksimal torus, bölüm uzayının bir simpleks olacağı ve kohomolojik olarak eşlenik etki ile benzer olduğu sanısını ileri sürmüştür. Fakat Bredon (1977), basit bir ters örnek ile bu sanının yanlış olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada eşlenik-gibi etki tanımı verilmiş ve SO(n), (n>7) yada SU(3) ün kendi üzerine, boş olmayan sabit nokta kümesine sahip, pürüzsüz, aşikar olmayan etkilerinin eşlenik-gibi etki olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie grupları, Türevlenebilen dönüşüm grupları, Karakteristik Sınıflar

ABSTRACT

PhD THESIS

ACTIONS OF SOME SIMPLE LIE GROUPS ON THEMSELVES

Ayşe ÇOBANKAYA

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
Year: 2018, Page: 29
Jury : Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Erol YAŞAR
: Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Let G be a compact connected simple Lie group and let it act non-transitively, non-trivially on itself. Hsiang (1975), conjectured that the principal isotropy subgroup type must be the maximal torus and the action must be cohomologically similar that of the adjoint action. But Bredon (1977), with a simple counyrexample, showed that this idea is false.

In this work, we define adjoint-like action and we prove that if SO(n), (n>7) or SU(3) acts smoothly (and nontrivially) on itself with non-empty fixed point set, then the action is adjoint-like.

Key Words: Lie groups, Differentiable transformation groups, Characteristic classes

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Her G Lie grubunun kendi üzerine bilinen geçişmeli, aşikar ve eşlenik etkileri vardır. Hsiang (1975), bir basit Lie grubunun kendi üzerine aşikar ve geçişmeli olmayan etkisinin esas izotropi alt grubu tipinin maksimal torus, bölüm uzayının bir simpleks olacağı ve kohomolojik olarak eşlenik etki ile benzer olduğu sanısını ileri sürmüştür. Ayrıca Hsiang aynı kitabında G_2 basit Lie grubu için bu sanının doğruluğunu göstermiştir. Bunu da olabilecek tüm izotropi alt gruplarını elimine edip sadece esas izotropi alt grubunun maksimal torus olduğunu bularak ispatlamıştır. Fakat Bredon (1977), basit bir karşı örnek ile bu sanının yanlış olduğunu göstermiştir. Bu örneğe bakıldığında, bu etkinin sabit noktası bulunmadığı görülmektedir. Bu gözlemden esinlenerek, bu tezde, basit Lie grubunun kendi üzerine etkisinin sabit noktası var olarak kabul edilerek sanının doğruluğu gösterilmeye çalışıldı. Bunun için sabit noktadaki izotropi temsilinden yararlanıldı. Ayrıca Vietoris-Begle teoremi kullanılarak bölüm uzayının ve grubun kohomolojileri arasında düşük derecelerde bir izomorfizm elde edildi ve grubun kohomoloji halkasının özelliklerinden yararlanarak, sabit noktadaki izotropi temsilinin eşlenik etki olduğu gösterildi. Dolayısıyla bazı basit Lie gruplarının kendi üzerine etkisinin sabit noktası varsa, bu etkinin, aşikar etki veya eşlenik-gibi olduğu gösterilmiştir.

Birinci bölümde, tezde kullandığımız bazı temel tanımlar ve teoremler fazla ayrıntılı olmayacak şekilde hatırlatıldı.

İkinci bölümde, Hsiang'ın (1975) sanısı ve Bredon'un (1977), basit Lie gruplarının kendi üzerine etkisi ile ilgili Hsiang'ın (1975) sanısının doğru olmadığına dair vermiş olduğu aksine örnek detaylarıyla incelendi.

Üçüncü bölümde, eşlenik-gibi tanımı verildi ve bir Lie grubunda bu özellik ve onun evrensel örtü grubunun bu özelliği arasındaki ilişki incelendi.

Dördüncü bölümde, $SO(n)$ $(n \geq 6$ için$)$ in kendi üzerine sabit noktası olan etkisinin eşlenik-gibi bir etki olduğu gösterildi.

Beşinci bölümde, $SU(3)$ ün kendi üzerine sabit noktası olan etkisinin eşlenik-gibi bir etki olduğu gösterildi.

TEŞEKKÜR

Doktora Çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, yardımlarını esirgemeyen, bilgisi ve kişiliğiyle her zaman örnek aldığım saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ'e sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Doktora Tez Jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Ali Arslan Özkurt, Sayın Pof. Dr. Erol Yaşar, Sayın Prof. Dr. Hayrullah Ayık ve Sayın Prof. Dr. Mehmet Küçükaslan a destek ve teşviklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Bana her zaman moral kaynağı olan çocuklarım Fırat'a ve Betül'e, bugüne kadar manevi desteğini hiç esirgemeyen her zaman yanımda olan anneme, babama, abime ve sevgili eşime içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca maddi destek veren Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine (Proje No: FDK-2015- 4603) ve tüm Ç.Ü. Matematik Bölümü akademik personeline, çok teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince verdiği burstan dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Tanım 1.1 G bir topolojik uzay ve aynı zamanda bir grup olsun. Eğer $G \times G \to G : \ (x,y) \mapsto xy$ ve $G \to G : \ x \mapsto x^{-1}$ grup işlemleri sürekli ise, G bir topolojik gruptur denir.

Tanım 1.2 G bir topolojik grup ve X bir Hausdorff topolojik uzay olsun. Bir $\theta : G \times X \to X$ sürekli dönüşümü;

(i) Her $g,h \in G$ ve her $x \in X$ için $\theta(g,\theta(h,x)) = \theta(gh,x)$

(ii) Her $x \in X$ için $\theta(e,x) = x$ (e, G nin birim elemanı)
özelliklerini sağlıyorsa (G,X,θ) veya kısaca (G,X) e bir dönüşüm grubu denir. θ ya G nin X üzerine sol etkisi, X e de bir G uzay denir. Genellikle $\theta(g,x)$, gx şeklinde yazılır. Benzer şekilde sağ etki tanımlanır.

Topolojik grup tanımından, $G \times G \to G$ (grup çarpımı) dönüşümü ile G kendi üzerine hem sağdan, hem de soldan etkir. $G \times G \to G : \ (g,h) \mapsto ghg^{-1}$ de bir sol etkidir. Bu etkiye eşlenik etki denir.

Tanım 1.3 X, G uzay, $H \subset G$ ve $A \subset X$ için $H(A) = \{gx : g \in H, x \in A\}$ olup, eğer $H(A) = A$ oluyorsa A ya X in H invaryant alt uzayı denir.

Özel olarak; $Gx = \{gx : g \in G\}$ kümesine x in orbiti denir. $X/G = \{Gx : x \in X\}$ e (bölüm topolojisi ile) orbit uzayı denir.

Tanım 1.4 X bir G uzay, $x \in X$ olmak üzere $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ alt grubuna x in izotropi alt grubu denir.

Tanım 1.5 X,G uzay, $G_x = G$ ise x e bir sabit nokta denir. Tüm sabit noktaların kümesi, X^G veya $F(G,X)$ veya kısaca F ile gösterilir.

Tanım 1.6 (G,X,θ) bir dönüşüm grubu olsun.

(i) Eğer her $x \in X$ için $G_x = G$ ise aşikar

(ii) Eğer her $x \in X$ için $G_x = \{e\}$ ise serbest

(iii) Eğer X, tek orbitten oluşuyorsa, geçişmeli

etki olarak adlandırılır.

Bir topolojik grubun kendi üzerindeki sağ ve sol etkileri geçişmelidir. Çoğu grupta eşlenik etki geçişmeli değildir.

Tanım 1.7 (G,X,θ) dönüşüm grubu ve $g \in G$ için $\theta_g : X \to X$, $\theta_g(x) = gx = \theta(g,x)$ olarak tanımlanan dönüşüm bir homeomorfizm olup, $\mathrm{Homeo}(X) = \{f | f : X \to X$ homeomorfizma $\}$ olmak üzere, $\Theta : G \to \mathrm{Homeo}(X)$ e, $g \mapsto \theta_g$ olan bir grup homomorfizması belirler. Bu Θ homorfizmasının çekirdeği, θ etkisinin çekirdeği olarak adlandırılır ve $\mathrm{Ker}\,\theta = \{g \in G |$ Her $x \in X$ için $gx = x\}$ dir. Açıkça görülür ki $\mathrm{Ker}\,\theta$, G nin normal alt grubudur ve kapalıdır. Eğer $\mathrm{Ker}\,\theta$, G nin aşikar alt grubu (yani Θ birebir) ise θ etkisine efektif etki denir. Eğer $\mathrm{Ker}\,\theta$ sonlu ise etki neredeyse efektif olarak adlandırılır. Eğer $\mathrm{Ker}\,\theta \neq \{e\}$ ise $G/\mathrm{Ker}\,\theta$ nın, X üzerinde efektif bir dönüşüm grubu olacağı kolayca gösterilir.

Bir topolojik grubun kendi üzerinde eşlenik etkisinde, grubun merkezi, hem etkinin çekirdeği hem de sabit nokta kümesidir.

Tanım 1.8 X bir G uzayı, Y bir G' uzayı ve $\Phi : G \to G'$ homomorfizm olsun. $f : X \to Y$ ve her $x \in X$ ve her $g \in G$ için $f(gx) = \Phi(g)f(x)$ oluyorsa f ye $\Phi-$

ekivaryant dönüşüm denir. Eğer $G' = G$ ve $\Phi-$ özdeşlik dönüşüm ise f ye ekivaryant dönüşüm denir.

Tanım 1.9 $V, (\mathbb{R}$ üzerinde$)$ $n-$ boyutlu bir vektör uzayı ve G bir topolojik grup olsun. G, V üzerine her bir θ_g lineer olacak şekilde etkiyorsa ya da eşdeğer olarak $\Theta : G \to GL(V)$ oluyor ise, θ ya, G nin bir (reel) temsili ve V ye de G nin temsil uzayı denir.

Tanım 1.10 X ve Y, G nin iki temsil uzayı olsun. Eğer bir $f : X \to Y$ ekivaryant izomorfizmi varsa bu temsillere denk temsiller denir.

Not 1.11 Kompakt grupların temsilleri (invaryant Haar ölçümünün varlığı nedeniyle) ortogonal bir temsile denktir.

Tanım 1.12 G, kompakt bir topolojik grup, V, G nin bir temsil uzayı olsun. $V_1, V_2 \subseteq V$, G nin invaryant alt uzayları olmak üzere, $\dim V_1 > 0,\ \dim V_2 > 0,\ \ V = V_1 \oplus V_2$ (invaryant direkt toplam) olarak yazılabiliyorsa V indirgenebilir $G-$ uzayıdır deriz.

Not 1.13 Genellikle indirgenemez temsil biraz farklı şekilde tanımlanır. Kompakt topolojik gruplarda, invaryant Haar ölçümünün varlığı nedeniyle bu iki tanım eşdeğer olur.

Teorem 1.14 G kompakt bir grup, X bir G uzayı ise her $x \in X$ için $\alpha_x : G/G_x \to Gx,\ \alpha_x(gG_x) = gx$ olarak tanımlanan fonksiyon bir homeomorfizmdir.

G kompakt bir grup H ve K, G nin kapalı alt grupları olmak üzere $G/H \to G/K$ ekivaryant bir dönüşüm var olması için gerek ve yeter koşul H nin K nın eşlenik alt grubu (yani bir $g \in G$ için $gHg^{-1} \subseteq K$) olmasıdır. Ayrıca $G-$ orbitler kategorisi denkliklere göre ayırdığımızda $G-$ orbit tiplerinin kategorisini elde ederiz. Eğer X, $G-$ orbit ise onun orbit tipini (X) yada type (X) ile gösteririz, (yani ekivaryant homeomorfizm altında denklik sınıfı) $(X), G/H$ şeklindeki koset uzayları içerir. X ve Y, $G-$ orbitler ise bir $(X) \to (Y)$ morfizmasının var olması için gerek ve yeter koşul $X \to Y$ ekivaryant dönüşümün var olmasıdır. X ve Y, $G-$ orbitleri için bir $(X) \to (Y)$ morfizması varsa $(X) \geq (Y)$ dir denir. Dolayısıyla orbit tipleri üzerinde kısmi sıralama vardır. $(*) = (G/G)$ minimum orbit tipi (G) maksimum orbit tipidir. G nin H, K kapalı altgrupları için, $(G/H) \geq (G/K)$ olması için gerek ve yeter koşul H nin K nın bir altgrubuna eşlenik olmasıdır. Bu durumda $(H) \leq (K)$ olarak yazılır. Dahası $(G/H) = (G/K)$ olması için gerek ve yeter koşul H ve K nın eşlenik olmasıdır. (Bu durumda $H \sim K$ yazarız) (Bredon, 1972)

Tanım 1.15 M Hausdorff, ikinci sayılabilir bir topolojik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer her $x \in M$ için bir $x \in U \subset M$ ve bir $W \subset \mathbb{R}^n$ açık kümeleri ve bir $\varphi : U \to W$ homeomorfizması varsa M ye n- boyutlu topolojik manifold denir. (Boyutu belirtmek için bazen M^n yazılır.)

Tanım 1.16 E yol bağlantılı bir topolojik uzay, B Hausdorff topolojik uzay ve $p : E \to B$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bir $U \subset B$ açık kümesi için $p^{-1}(U) = \cup_{i\in I} V_i$, $V_i \subset E$ açık, $\{V_i\}_{i\in I}$ ikişer ikişer ayrık ($i \neq j$ için $V_i \cap V_j = \emptyset$) ve her $i \in I$ için $p|_{V_i} : V_i \to U$ bir homeomorfizma ise $U \subset B$ açık kümesine eş örtülü (evenly-covered) denir.

Tanım 1.17 E yol bağlantılı $p : E \to B$ örten, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $b \in B$ için U_b eş örtülü olacak şekilde b nin U_b açık komşuluğu varsa E ye B nin bir örtü uzayı denir. $p^{-1}(b)$ sonlu ve $| p^{-1}(b) | = n$ ise örtü $n-$ katlıdır denir.

Not 1.18 G sonlu ($n = \mid G \mid$) bir grup ve bir X Hausdorff uzayı üzerinde serbest etkiyor ise $X \to X/G$, n-katlı örtü uzayı olur.

Tanım 1.19 $U \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun.
$C^\infty(U,\mathbb{R}^m) = \{f | f : U \to \mathbb{R}^m,\ f = (f_1, f_2, ..., f_m),\ \forall i$ için f_i, U da her mertebeden sürekli kısmi türeve sahip$\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 1.20 M, Hausdorff ve parakompakt (n boyutlu) bir topolojik manifold olsun. M üzerindeki C^∞ sınıfından bir $\mathcal{F}$ diferansiyellenebilir yapısı aşağıdaki üç şartı sağlayan $\{(U_i, \varphi_i),\ i \in I\}$ koordinat sistemlerinin bir topluluğudur. ((U_i, φ_i) lerin her birine harita denir)

(i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i,\ U_i \subset M$ açık,

(ii) $\varphi_i \circ \varphi_j{}^{-1} \in C^\infty(\varphi_j(U_j) \cap \varphi_i(U_i), \mathbb{R}^n), \forall i, j \in I$

(iii) $\mathcal{F}$ topluluğu maksimaldir yani (U, φ) koordinat sistemi $\forall i \in I$ için $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \varphi_i{}^{-1} \in C^\infty$ yi sağlıyorsa $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ dir.

C^∞ sınıfından türevlenebilen manifold, pürüzsüz (smooth) manifold olarak adlandırılır. İki pürüzsüz manifoldun çarpımının da (doğal olarak) bir pürüzsüz manifold olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 1.21 M ve N (sırasıyla m ve n boyutlu) pürüzsüz manifoldlar ve $F : M \to N$ bir fonksiyon olsun. Eğer $p \in M,\ F(p) \in V$ için $F(U) \subseteq V$ ve
$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}^n)$ olacak şekilde (U, φ) ve (V, ψ) haritaları varsa F ye pürüzsüz fonksiyon denir.

Tanım 1.22 G bir cebirsel grup, aynı zamanda pürüzsüz manifold olsun. Eğer
$G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy$ ve $G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$

fonksiyonları pürüzsüz ise G ye bir Lie grubu denir.

G bir Lie grubu M pürüzsüz manifold ve bir G uzayı olsun. Eğer $\theta : G \times M \to M$ pürüzsüz ise M pürüzsüz $G-$ uzayıdır (veya M türevlenebilir G uzayıdır) deriz. G kompakt ise M üzerinde bir $G-$ invaryant Riemann metriği vardır. Her $x \in M$ için T_xM, G nin bir temsil uzayıdır ve bu temsil (invaryant Riemann metriğe göre) ortogonaldir.

Eğer bağlantılı bir Lie grubunun Lie cebiri basit ise o grup basit Lie grup olarak adlandırılır.
E.Cartan a göre basit Lie grupları aşağıdaki şekilde sınıflandırılır.
$SO(n)$ $(n \geq 5)$, $SU(n)$ $(n \geq 2)$, $Sp(n)$ $(n \geq 1)$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 (Her bir basit Lie cebiri için o Lie cebirine sahip sonlu sayıda Lie grubu vardır. Her biri için tek bir basit bağlantılı Lie grubu vardır.)

Tanım 1.23 E,F,B topolojik uzaylar ve $p : E \to B$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer B nin bir $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için $\pi_1\varphi_\alpha = p$ olacak şekilde $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ homeomorfizmaları varsa $\xi(E,B,F,\pi)$ ye lif demeti denir.

Burada F : lif(fiber), B : taban(base), E : total uzay olarak adlandırılır.

Tanım 1.24 F bir topolojik uzay ve G,F nin homeomorfizmaların bir alt grubu olsun. (E,B,F,p) lif demeti olsun. Her α, β ve her $b \in U_\alpha \cap U_\beta$ için $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}(b) \in G$ oluyorsa G ye $\xi(E,B,F,p)$ lif demetinin yapı grubu denir.

Tanım 1.25 $\xi(E,B,F,p)$, $F = G$ olan lif demeti olsun. G, F üzerine sağdan çarpma şeklinde etkiyorsa $\xi(E,B,p)$ ye (principal) esas $G-$ demeti denir.

Tanım 1.26 $F = \mathbb{R}^n$, $G = GL(n,\mathbb{R})$ olan lif demetlerine reel vektör demeti denir.

Tanım 1.27 $\xi(E,B,F,p)$ bir lif demeti, $f : B_1 \to B$ sürekli olsun. Bu durumda B_1 üzerinde bir lif demeti şöyle oluşturabiliriz:

$$E_1 = \{(b,e) \in B_1 \times E : f(b) = p(e)\} \subset B_1 \times E$$

$\pi_1 : E_1 \to B_1$ ve $\pi_2 : E_1 \to E$ izdüşümler olsun. O halde $p\pi_2 = f\pi_1$ dir ve $f^!\xi(E_1, B_1, \pi_1)$ bir lif demetidir. $f^!\xi$ lif demetine ξ nin f ile geri çekilmesi ile elde edilen lif demeti denir (pull back bundle). Bu lif demeti de ξ ile aynı yapı grubuna sahiptir.

Tanım 1.28 (Evrensel Lif Demeti) (G bir topolojik grup), Eğer $\xi_G(EG, BG, p)$ bir esas $G-$ demeti ve (B bir CW kompleksine homotopi denk olmak üzere) her $\xi(E,B,p')$ esas $G-$ demeti için $f^!(\xi_G) \simeq \xi$ ($\simeq$: Vektör demeti izomorfizması) olacak şekilde bir $f : B \to BG$ varsa ξ_G ya evrensel $G-$ demeti denir.

Teorem 1.29 (Milnor, 1956) Her G topolojik grubu için bir evrensel lif demeti vardır.

Tanım 1.30 $f : X \to Y$ örten ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f \circ s = 1_Y$ olacak şekilde bir $s : Y \to X$ sürekli fonksiyonu varsa s ye bir kesit denir. Bir $U \subset Y$ için U üzerinde bir kesit, $f \mid f^{-1}(U) : f^{-1}(U) \to U$ kısıtlanmış fonksiyonu için bir kesittir. Bu durumda Y nin her bir y noktası için y nin bir U komşuluğu ve U üzerinde bir kesit varsa f ye yerel kesite sahip fonksiyondur denir.

Teorem 1.31 (Kawakubo, 1991) G topolojik grup ve H, G nin kapalı bir altgrubu olsun. Bu durumda $p : G \to G/H$ nin yerel kesite sahip olması için gerek ve yeter koşul $p : G \to G/H$ nin esas H demeti olmasıdır. (G bir Lie grubu ise p yerel kesite sahiptir.)

Teorem 1.32 (Kawakubo, 1991) $p : G \to G/H$ yerel kesite sahip olsun. Bu durumda G/H üzerindeki G- ekivaryant vektör demetleri ile H nin temsilleri arasında $V \mapsto G \times_H V$ ile belirli birebir bir eşleme vardır. (Burada $G \times_H V$, H nin $G \times V$ üzerindeki $((g,v)h = (gh, h^{-1}v)$ ile tanımlı) etkisinin orbit uzayıdır.)

Tanım 1.33 $\xi(E,B,p)$ esas $G-$ demeti olsun. $\lambda : G \to GL(n,\mathbb{R})$ bir homomorfizma (Yani G nin n boyutlu bir temsili olsun) bir grup homorfizması olsun. Bu durumda $E' = E \times_G \mathbb{R}^n,\ p' : E' \to B,\ p'([e,v]) = p(e)$ olmak üzere $\xi'(E',B,p')$ bir vektör demeti olup, $\xi'(E',B,p')$ vektör demetine $\xi(E,B,p)$ esas $G-$ demetinin $\lambda-$ genişlemesi denir ve $\alpha_\xi(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanım 1.34 Kohomoloji: Topolojik uzay ikilileri kategorisinden işaret değişimli derecelenmiş halkalar kategorisine (Eilenberg-McLane aksiyomlarını sağlayan) kontravaryant bir funktordur. (R değişmeli bir halka olmak üzere)

$H^*(X;R) = \sum_{i \geq 0} H^i(X;R)$, $\cup$ (cup product çarpımı) ile gösterilen bir çarpma işlemi vardır ve bu işlemle birlikte $H^*(X;R)$ bir halka olur.

$x \in H^i(X;R),\ y \in H^j(X;R)$ ise $x \cup y = (-1)^{ij} y \cup x$ (işaret değişmeli olmak) ($x \cup y$ yerine kısaca xy yazacağız.)

R nin karakteristiği 2 veya her tek i için $H^i(X;R) = 0$ ise $H^*(X,R)$ değişmeli bir halkadır.

$G = O(n), SO(n), U(n)$ olmak üzere B_G nin bazı katsayılarla kohomoloji halkaları aşağıdaki gibidir.

$H^*(BSO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_2,...,w_n]$ $(w_i \in H^i(BSO(n),\mathbb{Z}_2))$

$H^*(BO(n);\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[w_1,...,w_n]$ $(w_i \in H^i(BO(n),\mathbb{Z}_2))$

$H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1,...,c_n]$ $(c_i \in H^{2i}(BU(n),\mathbb{Z}))$

$$H^*(BSO(n);\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}[p_1,...,p_n], & n \text{ tek}, \ p_i \in H^{4i}(BSO(n);\mathbb{Q}) \\ \mathbb{Q}[p_1,...,p_{n-1},\chi_m], & n=2m, \chi_m \in H^{2m}(BSO(n);\mathbb{Q}), \ p_i \in H^{4i}(BSO(n);\mathbb{Q}) \end{cases}$$

w_i : i-inci evrensel Stiefel-Whitney Sınıfı

c_i : i-inci evrensel Chern Sınıfı

p_i : i-inci evrensel Pontryagin Sınıfı

χ_m: m-inci evrensel Euler Sınıfı

olarak adlandırılır (Bu durumda $p_n = \chi_m^2$ kabul edilir).

$c = 1 + c_1 + c_2 + \cdots$, $p = 1 + p_1 + p_2 + \cdots$, $w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$ olarak tanımlanır.

Teorem 1.35 (Borel ve Hirzebruch, 1958) G kompakt Lie grup, $G' = U(m)$ veya $SO(m)$, $\lambda : G \to G'$ bir homomorfizm ve T, T' $\lambda(T) \subset T'$ ve (w_j) ler λ nın ağırlıkları olmak üzere G ve G' nün maksimal torusları olsun. $\xi(E,B,p)$ bir esas $G-$ demeti ve η, onun $\lambda-$ genişlemesi ve ρ da E_ξ/T den B_ξ ye projeksiyon olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $G' = U(m)$ ise $\rho^*(c(\eta)) = \prod(1+w_j)$

(ii) Eğer $G' = SO(m)$ ise $p(\eta)$ Pontryagin sınıfı aşağıdaki eşitliği sağlar.
$\rho^*(p(\eta)) = \prod(1+(w_j)^2)$.

(iii) Eğer $G' = SO(2m)$ ise $\chi_m(\eta)$ Euler-Poincare sınıfı aşağıdaki eşitliği sağlar.
$\rho^*(\chi_m(\eta)) = \prod w_j$.

Tanım 1.36 $G = SO(n), U(n)$ veya $O(n)$ ve $\xi(E,B,F,p)$ bir vektör demeti ve (ξ', ξ ile ilişkili esas $G-$ demeti olmak üzere) $\xi' = f^*(\xi_G)$ olsun. O zaman (uygun katsayılarla) $f^*(w_i), f^*(c_i), f^*(p_i) \in H^*(B)$ olur. Bu sınıflara vektör demetinin karakteristik sınıfları denir.

Tanım 1.37 Kompakt bir Lie grubun bir uzay üzerinde etkisinde (varsa) maksimum orbit tipine esas orbiti tipi, bu tipteki orbitlere esas orbitler, bu orbitlere karşılık gelen izotropi alt gruplarına ise esas izotropi alt grupları denir.

Tanım 1.38 X bir G uzay, G kompakt bir topolojik grup, $P \subset X$, G/H tipinde bir orbit ($P = Gx$, $G_x = gHg^{-1}$) olsun. A bir $H-$uzayı olmak üzere $\varphi : G \times_H A \to X$ ekivaryant ve P nin bir açık komşuluğuna homeomorf olacak şekilde bir φ varsa $\varphi(G \times_H A)$, P etrafında bir tüptür denir. Burada $G \times_H A$, H nin $G \times A$ üzerindeki ($(g,a)h = (gh, h^{-1}a)$ ile tanımlı) etkisinin orbit uzayıdır.
Diğer taraftan $G \times_H A$ daki her G orbiti ve bir $a \in A$ için $[e,a]$ dan geçer. O halde bir $a \in A$ için $x = \varphi([e,a])$ olur. Dolayısıyla $G_x = G_{[e,a]} = H_a \subset H$ olur. P ile G/H aynı orbit tipinde olduklarından G_x, H ye eşlenik olup, $G_x = H_a = H$ dir.

Tanım 1.39 X bir G uzay, $x \in S \subset X$ olsun. Eğer $G_x(S) = S$ ve $\varphi : G \times_{G_x} S \to X$, $\varphi[g,s] = gs$, Gx etrafında tüp ise S, x de bir dilimdir denir.

Teorem 1.40 (Tüplerin varlığı)(Montgomery, 1957) G bir kompakt Lie grubu olsun. Tam regüler $G-$ uzayların her orbitinin etrafında bir tüp vardır.

Teorem 1.41 (Montgomery, 1957) (Pürüzsüz Dilim Teoremi) G kompakt Lie grubu ve M bir pürüzsüz $G-$ manifold olsun. M nin keyfi bir x noktası için, x in Gx orbiti, M nin $G-$ invaryant altmanifoldudur. ν, M de Gx in normal $G-$ vektör demetini göstersin. Bu durumda ν nun x üzerindeki ν_x lifi, G_x izotropi grubunun bir temsil uzayıdır. Öyle ki ν, pürüzsüz $G-$ vektör demeti olarak $G \times_{G_x} \nu_x \to G/G_x$ a izomorftur. Dahası, M de Gx in bir $G-$ invaryant U açık komşuluğu ve bir $G-$ difeomorfizmi vardır öyle ki $f : G \times_{G_x} \nu_x \to U$ sıfır kesiti için f nin kısıtı G/G_x den Gx e bir $G-$ difeomorfizmdir. Eğer M üzerinde bir G invaryant Riemann metriği alınırsa, bu durumda ν_x üzerinde G_x- etkisi, $T_x(M)$ de $T_x(Gx)$ e dik uzay üzerinde ortogonal bir G_x- etkisi ile verilir. Bunun sonucu olarak $i^!(TM) \cong T(Gx) \oplus \nu$ (G invaryant direkt toplam) dir. Bu ayrışımda $T(Gx) = \alpha_\eta(AdG\mid_{G_x} - AdG_x)$ ve $\nu = \alpha_\eta(\psi_x)$ olur. ($\psi_x : G_x \to GL(\nu_x)$, $\eta : G \to G/G_x$ esas G_x- demeti)

Teorem 1.42 (Montgomery, 1956) Kompakt Lie gruplarının, bağlantılı uzaylar üzerinde pürüzsüz etkilerinde bir esas orbit tipi vardır.

Eğer x, etkinin sabit noktası ise, (Pürüzsüz dilim teoreminden) φ_x in esas izotropi altgrubu tipi, G nin X üzerine etkisinin esas izotropi altgrubu tipi ile aynıdır.

Teorem 1.43 (Yang, 1963) G kompakt bir Lie grup ve M, pürüzsüz bir $G-$ uzayı olsun. Bu durumda M/G orbit uzayı üçgenleştirilebilirdir.

Tanım 1.44 G bir Lie grup, $T_e(G)$, e birim elemanının teğet (tanjant) uzayı ve $\varphi : G \times G \to G$ eşlenik etki olsun. e bu etkinin bir sabit noktasıdır. Bu da G nin $T_e(G)$ de bir temsilini belirler. Bu temsile, G nin eşlenik temsili denir ve AdG ile gösterilir.

Basit Lie gruplarında eşlenik etki aşikar veya geçişmeli değildir, eşlenik temsilin ve eşlenik etkinin esas izotropi altgrubu maksimal torustur.

Teorem 1.45 (Vietoris-Begle)(Vietoris, 1927) X, X' parakompakt, Hausdorff uzaylar ve $f : X' \to X$ örten, sürekli fonksiyon olsun. Her $x \in X$ ve $k < n$ için $\widetilde{H^k}(f^{-1}(x)) = 0$ olacak şekilde $n \geq 0$ var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f^* : H^k(X) \to H^k(X')$, $k < n$ için izomorfizm ve $k = n$ için birebirdir.

Teorem 1.46 (Hatcher, 2002) Let $\pi : X \to Y$, X üzerinde sonlu bir grubun serbest etkisi ile tanımlı $n-$ katlı örtü uzayı olsun. Bu durumda karakteristiği 0 veya n yi bölmeyen bir asal sayı olan her F cismi için $\pi^* : H^k(Y;F) \to H^k(X;F)$ birebirdir.

Teorem 1.47 (Hsiang, 1966) $M, m-$ boyutlu, sadece sabit noktalar ve S^{n-1} - tipinde orbitlerden oluşan bir $G-$ uzayı olsun. Bu durumda M/G, $m-n+1$ boyutlu, sınırlı bir manifolddur.

Not 1.48 (Lefschetz düalitesi) (Lefschetz, 1927) M kompakt, bağlantılı, yönlendirilebilen (sınırı ∂M olan) sınırlı bir manifold ve $\dim M = n$ olsun. Bu durumda $H^k(M;R) \cong H_{n-k}(M, \partial M; R), (\forall\ 0 \leq k \leq n)$ dir. O zaman $\partial M \neq \emptyset$ ise açıkça görülmektedir ki $H^n(M,R) = 0$ dır.

Bu tezde, G, basit bir Lie grubu ve her manifold pürüzsüz (C^∞) manifold ve her etki pürüzsüz olarak kabul edilecektir. G nin kendi üzerine etkisi aksi belirtilmedikçe aşikar olmayan ve geçişmeli olmayan etki olarak anlaşılacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

G bir basit Lie grubu olduğunda $G\times G\to G,\ (g,h)\mapsto ghg^{-1}$ eşlenik etkisinin esas izotropi alt grubu tipi maksimal torustur ve sabit nokta kümesi $Z(G)$ dir ($Z(G)$: G nin merkezi). Hsiang (1975) kompakt, bağlantılı, basit G Lie grubu için, G nin kendi üzerine aşikar ve geçişmeli olmayan etkisinin kohomolojik olarak eşlenik etkiyle benzer olduğu sanısını öne sürmüştür. Fakat Bredon (1977), $SU(3)\times SU(3)\to SU(3),\ (A,B)\mapsto ABA^T$ karşıt örneğini vermiştir. Şimdi, bu örneği inceleyelim.

$SU(3)=\{A\in GL(3,\mathbb{C})\mid \overline{A^T}=A^{-1},\ detA=1\}$

$$T=\{S\in SU(3)\mid S=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0\\ 0 & e^{i\theta_2} & 0\\ 0 & 0 & e^{i\theta_3}\end{pmatrix},\ \theta_1+\theta_2+\theta_3=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

$T,\ G=SU(3)$ ün bir maksimal torusu olur. G^T yi hesaplayalım.

$G^T=\{A\in G\mid KAK^T=A,\forall K\in T\}=\{A\in G\mid KAK=A,\forall K\in T\}$

$A\in G^T$ olsun.

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0\\ 0 & e^{i\theta_2} & 0\\ 0 & 0 & e^{i\theta_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0\\ 0 & e^{i\theta_2} & 0\\ 0 & 0 & e^{i\theta_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

dir. Yani

$a_{11}e^{2i\theta_1}=a_{11},\ a_{12}e^{i(\theta_1+\theta_2)}=a_{12},\ a_{13}e^{i(\theta_1+\theta_3)}=a_{13},\ a_{21}e^{(\theta_1+\theta_2)}=a_{21},\ a_{22}e^{2i\theta_2}=a_{22},\ a_{23}e^{(\theta_2+\theta_3)}=a_{23},\ a_{31}e^{(\theta_1+\theta_3)}=a_{31},\ a_{32}e^{(\theta_2+\theta_3)}=a_{32},\ a_{33}e^{2i\theta_3}=a_{33},$

$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\dfrac{2\pi}{3}$ olsun.

$a_{jk}e^{i(\theta_j+\theta_k)}=a_{jk},\ (1\le j,\ k\le 3)$ olduğundan $a_{jk}e^{i\frac{\pi}{3}}=a_{jk}$ olur. Yani her j,k için $a_{jk}=0$ olur. Çelişki. Böylece $G^T=\varnothing$ dolayısıyla bu etkinin sabit nokta kümesi de boş küme olur. (Daha kısaca $a=e^{\frac{2\pi i}{3}}$ olmak üzere

$K = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in Z(SU(3)) \cap T,\ KAK^T = K^2A = A \Rightarrow (K^2 - I)A = 0,\ K^2 - I$
tekil olmadığı için A tekil olur. Çelişki.)

Ayrıca $SU(n)$ nin kendi üzerindeki aynı şekilde tanımlanan etkisinin sabit noktasının olmaması, $n > 3$ için de aynı şekilde geçerlidir.

Bu örnek, Hsiang in sanısının yanlış olmasına yetiyor. Ama biz bu etki için esas izotropi alt grubunu bulmaya çalışalım.

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ için $G_I = \{A \in SU(3) \mid AIA^T = I\} = SO(3)$.

$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ için G_L yı hesaplayalım. $B \in G_L$ olsun.

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir. Buradan ;

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

olur. Yani $G_L = SU(2)$ dir. Şimdi $G = SU(3)$ için $H = SO(3)$ ve $K = SU(2)$ izotropi alt gruplarının kıyaslanamadığını gösterelim.

$A \in SU(3)$ olsun. $K = SU(2)$ bağlantılı Lie grubunu düşünelim. AKA^{-1}, K

ya izomorf olan bağlantılı bir Lie grubudur. $\dim K = 3$ olduğundan $\dim(AKA^{-1}) = 3$ olur. Kabul edelim ki $AKA^{-1} \subseteq SO(3)$ olsun. $SO(3)$ bağlantılı ve $\dim SO(3) = 3$ olduğundan $SO(3)$ ün içinde aynı boyutlu bağlantılı AKA^{-1} alt manifoldu olduğundan $AKA^{-1} = SO(3)$ olmalıdır. Yani $K \cong SO(3)$ olmalıdır. Bu da çelişkidir. Çünkü $H = SO(3)$ basit bağlantılı değil fakat $SU(2)$ basit bağlantılır. Sonuç olarak $AKA^{-1} \subseteq SO(3)$ olamaz.
$A \in SU(3)$ olsun. $H = SO(3)$ bağlantılı Lie grubunu düşünelim. AHA^{-1}, H ye izomorf olan bağlantılı Lie grubudur. $\dim H = 3$ olduğundan $\dim(AHA^{-1}) = 3$ olur. Kabul edelim ki $AHA^{-1} \subseteq SU(2)$ olsun. $SU(2)$ bağlantılı ve $\dim SU(2) = 3$ olduğundan $SU(2)$ nin içinde aynı boyutlu bağlantılı AHA^{-1} alt manifoldu olduğundan $AHA^{-1} = SU(2)$ olmalıdır. Yani $H \cong SU(2)$ olmalıdır. Bu da çelişkidir. Çünkü $H = SO(3)$ basit bağlantılı değil fakat $SU(2)$ basit bağlantılır. Sonuç olarak $AHA^{-1} \subseteq SU(2)$ olamaz. H ve K kıyaslanamaz. Yani ne $SU(3)$ ne de $SO(3)$ bu etkinin esas izotropi alt grubu olamaz.

$G_I = SO(3)$ ün $T_I(SU(3))$ de bir (ortogonal) temsili vardır. $T_x(X) = T_x(G(x)) \oplus N$ (G_x altında invaryant) olduğundan; $\dim N = \dim SO(3) = 3$ tür. N, $SO(3)$ ün 3 boyutlu temsil uzayıdır. O zaman $\varphi : SO(3) \to O(3)$ grup homomorfizması vardır. $SO(3)$ bağlantılı olduğundan $\varphi : SO(3) \to SO(3)$ olur.
φ aşikar olamaz. Çünkü φ aşikar olsaydı esas izotropi alt grubu tipi $SO(3)$ olurdu ama G_x in N üzerinde etkisinin esas izotropi alt grubu tipi ile G nin X üzerindeki etkisinin esas izotropi alt grubu tipi aynı olduğundan, $SU(3)$ ün $SU(3)$ üzerine etkisinde esas izotropi alt grubu tipi $SO(3)$ olurdu. Fakat $SO(3)$ ile $SU(2)$ kıyaslanamaz olduğundan, φ aşikar etki değildir. Bu durumda $\varphi = \rho_3$ ($SO(3)$ ün standart temsili ve aynı zamanda eşlenik temsilidir.) olduğu için esas izotropi alt grup $SO(3)$ ün mak-

simal torusu $SO(2)$ dir. Dolayısıyla $SU(3) \times SU(3) \to SU(3)$ etkisinin esas izotropi alt grup tipi de $1-$ torustur yani $SO(2)$ dir. Fakat rank$SU(3) = 2$ olduğundan, $SU(3)$ ün maksimal torusunun boyutu 2 olmalıdır. Fakat $\dim SO(2) = 1$ olduğundan, $SU(3)$ ün kendi üzerine bu etkisinin esas izotropi alt grubu tipi maksimal torus değildir.

Bu durumda bölüm uzayı (kompakt, $1-$ boyutlu, sınırı olan manifold olduğundan) $I = [0,1]$ e homeomorfik olup, Hsiang (1975) in bölüm uzayının simpleks olduğu sanısı bu etki için doğru olur.

3. EŞLENİK-GİBİ ETKİLER

Tanım 3.1 G kendi üzerine etki eden kompakt, basit bir Lie grubu olsun. Eğer bu etkinin;

(i) Sabit noktası var ($F \neq \varnothing$)

(ii) Esas izotropi alt grubu tipi maksimal torus

ise bu etkiye eşlenik-gibi bir etkidir denir.

Sabit noktadaki izotropi temsili, eşlenik etkiye denk ve grubun boyutu ile aynı olduğu için aşikar (sabit kalan) alt uzayı 0 boyutludur. Bu nedenle; eşlenik-gibi etkiler sonlu sayıda sabit noktaya sahiptir. Eşlenik etki için bu sayı, grubun merkezinin mertebesidir.

Teorem 3.2 G, kompakt basit Lie grup, $\widetilde{G}$, G nin evrensel örtü grubu olsun. Eğer, $\widetilde{G}$ nın kendi üzerine her (aşikar ve geçişmeli olmayan) etkisi eşlenik-gibi ise G nın kendi üzerine her (aşikar ve geçişmeli olmayan) etkisi eşlenik-gibi dir.

İspat:

$\theta : G \times G \to G$ (aşikar ve geçişmeli olmayan) bir etki olsun. Bredon (1972) göre, bu etki $\widetilde{G}$ ya yükseltilebilir ve

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] \arrow[d, "p \times p"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
G \times G \arrow[r, "\theta"'] & G
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir ve ayrıca $\widetilde{\theta}$ aşikar veya geçişmeli değildir. Kabulümüzden

$\widetilde{\theta}$ eşlenik-gibi bir etkidir. $\widetilde{x}$, $\widetilde{G}$ nın sabit noktası olsun. $x = p(\widetilde{x})$ da G nin bir sabit noktasıdır. Böylece Bredon (1972) dan, $\widetilde{G} = G$ alabiliriz. $\phi_{\widetilde{x}}$, ϕ_x, G nin izotropi temsilleri olsun. p örtü dönüşümü olduğundan, p yerel difeomorfizm olup, $dp : T_{\widetilde{x}} \to T_x$ izomorfizmdir. p ekivaryant olduğundan dp ekivaryant izomorfizmdir. Böylece $\phi_{\widetilde{x}}$ ve ϕ_x denk temsillerdir. $\phi_{\widetilde{x}}$ in esas izotropi alt grubu tipi maksimal torus olduğundan, ϕ_x in de esas izotropi alt grubu tipi maksimal torustur. Buradan, θ nın da esas izotropi alt grubu tipi maksimal torustur. Böylece G nin kendi üzerindeki her etkisi eşlenik-gibi bir etkidir.

4. $SO(n)$ NİN KENDİ ÜZERİNE ETKİSİ

Bilindiği üzere (Borel, 1954)
$H^*(SO(n);\mathbb{Z}_2) = \dfrac{\mathbb{Z}_2[e_1, e_3, \cdots, e_{2m-1}]}{(e_1^{a_1}, e_3^{a_2}, \cdots, e_{2m-1}^{a_m})} \cong \Delta(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}),\ m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$
burada $a_i,\ a_i(2i-1) \geq n$ olacak şekildeki 2 nin en küçük kuvvetidir.
$(\Delta(e_1, e_2, ..., e_{n-1}))^i$ nin toplamsal olarak bazı
$\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k,\ i_1 + i_2 + \cdots + i_k = i\}$, çarpımsal olarak da tek bağıntı $(e_i^2 = e_{2i},\ (2i \leq n-1))$ vardır. ($2i > n-1$ ise $e_{2i} = 0$ kabul ediliyor.)

İddia 4.1 $H^*(SO(n);\mathbb{Z}_2)$ için $e_1 e_2 \cdots e_{n-1} \neq 0$ dir.

İspat: $H^*(SO(n);\mathbb{Z}_2) = \dfrac{\mathbb{Z}_2[e_1, e_3, \cdots, e_{2m-1}]}{(e_1^{a_1}, e_3^{a_2}, \cdots, e_{2m-1}^{a_m})},\ m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$
$a_i : a_i(2i-1) \geq n$ olacak şekildeki en küçük 2 nin kuvveti olan sayıdır.
Her $t \leq m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ için, l, $(2t-1)2^l \leq n-1$ olacak şekildeki en büyük doğal sayı olsun. Bu durumda l, $(2t-1)2^{l+1} \geq n$ olacak şekildeki en küçük doğal sayıdır. $a_t = 2^{l+1}$ olduğundan, $2^{l+1} - 1 < a_t$ olup, ${e_{2t-1}}^1 {e_{2t-1}}^2 {e_{2t-1}}^{2^2} \cdots {e_{2t-1}}^{2^l} = {e_{2t-1}}^{1+2+\cdots+2^l} = {e_{2t-1}}^{2^{l+1}-1}$ dir. Böylece $e_1 e_2 \cdots e_{n-1} \neq 0$ elde edilir.
(Veya: $(\Delta(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}))^{\frac{n(n-1)}{2}} = < e_1 e_2 \cdots e_{n-1} >$)

ρ_n (kısaca ρ), $SO(n)$ nin esas temsilini ($\rho_n : SO(n) \hookrightarrow GL(n,\mathbb{R})$) θ da 1$-$boyutlu aşikar temsili belirtsin. $\{\Lambda^k \rho_n : 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\}$: $SO(n)$ nin (reel) indirgenemez temsilleridir. $\Lambda^2 \rho$, $SO(n)$ in eşlenik temsilidir (Bröcker ve Dieck, 1985).

Teorem 4.2 $n \geq 5$ ve φ, $SO(n)$ nin $\frac{n(n-1)}{2}$ boyutlu temsili olsun. Bu durumda $\varphi = a\theta + b\rho + c\Lambda^2\rho$ dir. (H_φ), φ temsilinin esas izotropi alt grubu olsun. Bu durumda

$$(H_\varphi) = \begin{cases} (SO(n)) & b=c=0 \quad (a=\frac{n(n-1)}{2}) \\ (SO(n-b)) & c=0,\ b>0 \quad (a=\frac{n(n-1)}{2}-bn) \\ (T^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) & c=1 \quad (a=b=0) \end{cases} \tag{4.1}$$

dir.

Teorem 4.3 (Hsiang ve Hsiang 1970, Teorem 3.2.) $SO(n)$ birinci Pontryagin sınıfı 0 olan M pürüzsüz manifoldu üzerinde türevlenebilen şekilde etkisin. Bu etkinin H_ϕ^0 esas izotropi alt grubunun birimin bağlantılı bileşeni bir $l \geq 4$ için standart bir $SO(l)$ ye eşlenik ise, her $x \in M$ için $G_x^0 \sim SO(k_x),\ (k_x \geq l)$ dir. Burada $SO(k_x),\ SO(n)$ içine standart gömülmüştür. (Burada G_x^0; G_x in birimi içeren bağlantılı bileşenini göstermektedir.)

Hsiang ve Hsiang (1967) Remark 2.2. de belirtildiği gibi M paralelleştirilebilir ise G_x/G_x^0 nin mertebesi 2 olan elemanı yoktur. Tüm Lie grupları paralelleştirilebilir (parallelizable) olduğu için bu durum bizim inceleyeceğimiz etkilerde de geçerlidir.

Tanım 4.4 Reel Stiefel manifoldları, $V_k(\mathbb{R}^n)$ $(k \leq n)$, $\mathbb{R}^n$ deki ortonormal $k-$ çatıların uzayı olarak tanımlanır ve $k < n$ için $\frac{SO(n)}{SO(n-k)}$ ya difeomorfiktir ve $\dim V_k(\mathbb{R}^n) = nk - \frac{1}{2}k(k+1)$ dir. Ayrıca $V_k(\mathbb{R}^n)$, $n-k-1$ bağlantılıdır. (Yani $i \leq n-k-1$ için $\pi_i(V_k(\mathbb{R}^n)) = 0$ dır.)

İddia 4.5 Her $1 < b \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ $(n \geq 6)$ için $k < n-b-1$ ve $n-b-1 < 2k \leq n-1$ olacak şekilde bir k sayısı vardır.

İspat: $k,\ 2k > n-b-1$ olan en küçük tamsayı olsun. $n \geq 8$ için $b \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, olduğundan $k \geq 3$ dir. $k \geq 3$ olduğu için $k \leq\ 2k-3 \leq n-b+1-3 = n-b-2 <$

$n-b-1$ dir. $n=6,\ b=2$ için $k=2$; $n=7,\ b=2$ için $k=3$; $n=7,\ b=3$ için $k=2$ sayılarının istenen koşulu sağladığı kolayca görülmektedir.

Teorem 4.6 $n \geq 6$, $M=G=SO(n)$, G, M üzerinde türevlenebilir, $F \neq \varnothing$ ve aşikar olmayan şekilde etkisin. Bir $x \in M^G$ için φ, $SO(n)$ nin x noktasında izotropi temsili olsun. Bu durumda φ eşlenik temsildir.

İspat: Bu ispatta kullanılan tüm kohomolojiler $\mathbb{Z}_2$ katsayılıdır.
$\varphi = a\theta + b\rho + c\Lambda^2\rho$ olsun. Etki, aşikar olmayan bir etki olarak kabul edildiğinden, x noktasında izotropi temsili aşikar değildir. Bu durumda b ya da c nin en az biri 0 dan farklı olmak zorundadır. Biz, aksi durumda bir çelişki bularak, $b=0$ olduğunu göstereceğiz. İki durumu düşünelim:
Birinci durum: $b=1$ olsun. $(H_\varphi)=(SO(n-1))$ olduğundan, etkinin esas orbiti $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$ olur. Şimdi diğer orbitleri bulalım. $SO(n-1) \subsetneq G_y \subsetneq SO(n)$ olsun. $G_y = S(O(n-1)\times O(1))$ olduğundan, $G_y^0 = SO(n-1)$. Yani $\mid G_y/G_y^0 \mid = 2$ dir. Fakat Hsiang ve Hsiang (1967) Remark 2.2. den dolayı bu durum imkansızdır. Dolayısıyla etki, sabit nokta ve küre olmak üzere sadece 2 tip orbite sahiptir. Fakat Teorem 1.47 den dolayı, M/G, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ boyutlu, sınırlı bir manifolddur. Ayrıca, tüm orbitlerde $i<n-1$ için $\widetilde{H^i}(Gy)=0$ dır. Vietoris-Begle Teoreminden dolayı $i<n-1$ için $\pi^*: H^i(M/G) \to H^i(M)$ izomorfizmdir. Dolayısıyla $i<n-1$ için $\pi^*(f_i)=e_i$ olacak şekilde $f_1, f_2, \cdots, f_{n-2} \in H^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(M/G)$ vardır. $e_1e_2\cdots e_{n-2} \neq 0$ olduğundan, $f_1f_2\cdots f_{n-2} \neq 0$ olur. Lefschetz Düalitesinden dolayı, $H^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(M/G)=0$ dır. ($\deg(f_1\cdots f_{n-2}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ olduğu için) Bu bir çelişkidir.
Diğer durum: $b>1$ olsun.
$SO(n)/G_y \simeq \frac{G/G_y^0}{G_y/G_y^0}$ $(\forall y \in G)$, $(G_y^0 = SO(k_y))$
Hsiang ve Hsiang (1967) Remark 2.2. den dolayı, $\mid G_y/G_y^0 \mid = t$, t tek sayı ve

$\pi : SO(n)/G_y^0 \to SO(n)/G_y$, t- katlı örtü dönüşümü ve $2 \nmid t$ olduğundan, Teorem 1.46 den dolayı, $\pi^* : H^*(SO(n)/G_y) \to H^*(SO(n)/G_y^0)$ birebirdir. Teoremden 4.3 den dolayı bir $k_y \geq n-b$ için $G_y^0 = SO(k_y)$ dir ve $SO(n)/G_y^0$ Stiefel manifoldu olduğundan, tüm orbitler için $\widetilde{H^i}(SO(n)/G_y) = 0$ ($i < n-b$ için) elde ederiz. Vietoris-Begle Teoreminden dolayı $i < n-b$ için $\pi^* : H^i(M/G) \to H^i(M)$ izomorfizmdir. Dolayısıyla $i < n-b$ için $\pi^*(f_i) = e_i$ olacak şekilde $f_1, f_2, ..., f_{n-b-1} \in H^*(M/G)$ vardır. İddia 4.5 den dolayı $k < n-b-1$ ve $n-b-1 < 2k \leq n-1$ olacak şekilde bir k sayısı vardır. $e_k \in \operatorname{Im}\pi^*$ ve π^* halka homomorfizması olduğundan, $\pi^*(f_k^2) = e_k^2 = e_{2k}$ dır. $e_1 e_2 \cdots e_{n-b-1} e_{2k} \neq 0$ olduğundan, $f_1 f_2 \cdots f_{n-b-1} f_k^2 \neq 0$ dır. Fakat $\deg(f_1 f_2 ... f_{n-b-1} f_k^2) > \dim M/G = \frac{(n-b)(n-b-1)}{2}$ olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece, $n \geq 6$ için, φ eşlenik temsildir.

Sonuç 4.7 ($n \geq 6$ için) $SO(n)$ nin kendi üzerine (aşikar ve geçişmeli olmayan), sabit nokta kümesi boş olmayan her etkisi eşlenik-gibi dir.

5. $SU(3)$ ÜN KENDİ ÜZERİNE ETKİSİ

Bilindiği üzere (Borel, 1954) $H^*(SU(n),\mathbb{Q}) = \Lambda_{\mathbb{Q}}(e_3, e_5, ..., e_{2n-1})$ dir.

Teorem 5.1 (Uchida, 1975) φ, $SU(3)$ ün $8-$ boyutlu trivial olmayan reel temsili olsun. (H_φ), bu etkinin esas izotropi alt grubu tipi olsun. Bu durumda sadece aşağıdaki durumlar olasıdır:

(i) $\varphi = Ad_{SU(3)}$, ($SU(3)$ ün eşlenik temsili) $(H_\varphi) = (T)$: $SU(3)$ ün maksimal torusu,

(ii) $\varphi = \mu +$ aşikar temsil, $(H_\varphi) = (SU(2))$, $\mu : SU(3) \to O(6)$ standart temsil.

Teorem 5.2 $SU(3)$ ün kendi üzerine sabit nokta kümesi boş olmayan (ve aşikar olmayan) her etkisi eşlenik-gibi bir etkidir.

İspat: φ, $SU(3)$ ün x sabit noktasındaki izotropi temsili olsun. φ, aşikar bir temsil değildir. (H_φ), φ nin esas izotropi tipi olsun. Kabul edelim ki $\varphi = \mu +$ aşikar olsun. Bu durumda $SU(3)$ ün kendi üzerine etkisinin esas izotropi alt grubu $SU(2)$ dir.
Dolayısıyla bu etkinin esas orbiti $SU(3)/SU(2) \cong S^5$ dir. $S(U(2) \times U(1))$ izotropi altgrubuna sahip hiçbir nokta olmadığını, (böylece $SU(3)/S(U(2) \times U(1)) \simeq \mathbb{C}P^2$ tipinde hiç orbit olmadığını) gösterelim.
Böyle bir orbitin var olduğunu kabul edelim. Hsiang ve Hsiang (1970) Teorem 3.2. de kullandığı aynı notasyonu kullanarak ve benzer işlemlerle gösterelim. K değişmeli ve $S(U(2) \times U(1))$ maksimal ranka sahip olduğu için bizim durumumuz daha kolaydır. T, hem $SU(3)$ ü hem de $S(U(2) \times U(1))$ köşegen matrislerden oluşan maksimal torusu olsun. Kabul edelim ki T nin Lie cebiri, $\mathbb{R}^3$ de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ koşulunu sağlayan vektörler ve x_3, $U(1)$ in Lie cebirinin bir üreteci olsun. $SU(2)$ etkinin esas izotropi alt grubu olduğundan, $SU(2)$, $S(U(2) \times U(1))$ nin izotropi tem-

silinin (normal kısmının) çekirdeğidir. Bu temsilin ağırlıkları $\{\pm k_i x_3\}$ olur. (k_i lerin en az biri sıfırdan farklı) dir. $SU(3)/SU(2)$ is 4-bağlantılı olduğundan (aynı notasyonla): $i^* p_1(T(SU(3))) = p_1(T(\mathbb{C}P^2)) + p_1(\alpha_\eta(\phi)) = 3x_3^2 + (\sum k_i^2)x_3^2 \neq 0$
Bu bir çelişkidir.
Eğer $G_y^0 = SU(2)$ ise G_y/G_y^0 sonludur ve $i < 5$ için $G/G_y = \frac{G/G_y^0}{G_y/G_y^0}$ dir. $i < 5$ için (Teorem 1.46 ile) $H^i(G/G_y^0;\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan, $i < 5$ için tüm orbitler için $\widetilde{H^i}(G/G_y,\mathbb{Q}) = 0$ dır.
$k < 5$ için Vietoris-Begle Teoreminden, $\pi^* : H^k(X/G;\mathbb{Q}) \to H^k(X;\mathbb{Q})$, izomorfizmdir. Bu nedenle $e_3 \in \operatorname{Im}\pi^*$ olup, $H^3(X/G;\mathbb{Q}) \neq 0$ dır. Fakat Teorem 1.47 den dolayı, M/G, $3-$ boyutlu, sınırlı bir manifolddur. Lefschetz Düalitesinden dolayı, $H^3(M/G;\mathbb{Q}) = 0$ dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Teorem 5.1 deki (ii) durumu imkansızdır. Böylece $SU(3)$ ün esas izotropi alt grubu maksimal torus olup, etki eşlenik-gibi bir etkidir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ($n \geq 6$ için) $SO(n)$ nin kendi üzerine (aşikar olmayan) sabit nokta kümesi boş olmayan her etkisinin eşlenik-gibi olduğu ve $SU(3)$ için de, $SU(3)$ ün kendi üzerine sabit nokta kümesi boş olmayan (ve aşikar olmayan) etkisi için bu etkinin de eşlenik-gibi bir etki olduğu gösterildi.
Hsiang'ın sanısı ile ilgili olan aşağıdaki soruların cevabı henüz bulunamamıştır.

Soru 1 *Yukarıdaki koşullar altında yalnızca maksimal torusun sabit noktası olması halinde de etkinin eşlenik-gibi bir etki olduğunu göstermek açık bir sorudur.*

Soru 2 *Bredon (1977) un vermiş olduğu, $SU(3) \times SU(3) \to SU(3), (A,B) \mapsto ABA^T$ örneğini incelediğimizde bölüm uzayı simpleks ($I = [0,1]$) olup, Hsiang (1975) in bölüm uzayı simpleks olduğu sanısı doğru çıkmıştı. $SO(n)$, ($n \geq 6$) ya da $SU(3)$ ün kendi üzerine sabit nokta kümesi boş olmayan türevlenebilen etkilerini düşündüğümüzde, bölümün simpleks olup-olmadığı da araştırılabilecek bir soru olarak düşünülebilir. Ayrıca, aynı koşullar altında etkinin sabit nokta sayısının bulunması da cevaplanmamış bir problemdir.*

Soru 3 *Ayrıca $Sp(n)$ nin veya $SU(n), (n > 3$ için) ve G_2 dışındaki sıradışı (exceptional) Lie grupları için kendi üzerinde etkisi içinde aynı durumun geçerli olup olmadığı da halen gösterilememiştir.*

KAYNAKLAR

Borel, A., 1954. Sur L'Homologie et la Cohomologie des Groupes de Lie Compacts Connexes. Journal of Mathematics, 76 (2): 273-342.

Borel, A., Hirzebruch, F., 1958. Characteristic Classes and Homogeneous Spaces I. American Journal of Mathematics, 80(2): 458-538.

Bredon, G.E., 1972. Introduction to Compact Transformation Groups (P. A. Smith ve S. Eilenberg editor). Pure and Applied Mathematics, Volume 46, New York Academic Press, 459s.

Bredon, G.E., 1977. Book Reviews. Bulletin of the American Mathematical Society, 83(4): 711-718.

Bröcker, T., Dieck T., 1985. Representations of Compact Lie Groups (S. Axler, F.W. Gehring, P.R. Halmos editors). Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 313s.

Hatcher, A., 2002. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 550s.

Hsiang, W-Y, 1966. On the Classification of Differentiable SO(n) Actions on Simply Connected π-Manifolds. American Journal of Mathematics, 88(1): 137-153.

Hsiang, W-C, Hsiang, W-Y, 1967. Differentiable Actions of Compact Connected Classical Groups I. American Journal of Mathematics, 89(3): 705-786.

Hsiang, W-C, Hsiang, W-Y, 1970. Differentiable Actions of Compact Connected Classical Groups II. Annals of Mathematics, 92(2): 189-223.

Hsiang, W-Y, 1975. Cohomology Theory of Topological Transformation Groups. Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, New York, 165s.

Kawakubo, K., 1991. The Theory of Transformation Groups. Oxford University Press, 346s.

Lefschetz, S., 1927. Manifolds with a boundary and their transformations. Trans. Amer. Math. Soc., 29: 429-462.

Mamoru, M., Toda, H., 1978. Topology of Lie Groups, I and II. American Mathematical Society, Tokyo, 91, 451s.

Milnor, J., 1956. Construction of Universal Bundles, II. Annals of Mathematics, 63(3): 430-436.

Montgomery, D., Samelson H., ve Yang, C. T., 1956. Exceptional orbits of highest dimension, Ann. of Math. 64: 131-141.

Montgomery, D., Yang C.T., 1957. The existence of a slice, Ann. of Math. 65: 108-116.

Uchida, F., 1975. Smooth Actions of Special Unitary Groups on Cohomology Complex Projective Spaces. Osaka J. Math., 12: 375-400.

Vietoris, L., 1927. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, Math. Ann. 97: 454-472.

Yang, C.T., 1963. The Triangulability of the Orbit Space of a Differentiable Transformation Group. Bull. Amer. Math. Soc., 69: 405-408.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Isparta'da doğdu. İlköğretim ve Lise öğrenimini Isparta'nın Senirkent ilçesinde tamamladı. 2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2008 yılında bölüm 1. olarak mezun oldu. Aynı yıl Afyon Kocatepe Üniversitesinde yüksek Lisans eğitimine başladı ve yine aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Daha sonra Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalına geçiş yaptı. 2011 yılında yüksek lisansını bitirip, aynı yıl Ç.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında doktora çalışmasına başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.