



**(1,1)-TİPLİ TENSÖR DEMETTE
VRANCEANU KONNEKSİYONLARI**

Elanur DOĞAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Aydın GEZER
2017
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**(1,1)-TİPLİ TENSÖR DEMETTE VRANCEANU
KONNEKSİYONLARI**

Elanur DOĞAN

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
TEZ ONAY FORMU



(1,1) TİPLİ TENSÖR DEMETTE VRANCEANU KONNEKSİYONLARI

Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Elanur DOĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 08/09/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Kürşat AKBULUT

İmza :

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21.09/2017 tarih ve 37.../...78... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(1,1)-TIPLİ TENSÖR DEMETTE VRANCEANU KONNEKSİYONLARI

Elanur DOĞAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

Bu tezde, (1,1)-tipli tensör demet üzerindeki Sasaki ve Cheeger-Gromoll tipli metriklerin Levi-Civita konneksiyonlarıyla birleşen Vranceanu konneksiyonları ele alınmıştır. Sasaki tipli metriğin Levi-Civita konneksiyonuyla birleşen Vranceanu konneksiyonunun baz manifoldun metriğinin Levi-Civita konneksiyonuyla çakışması nedeniyle daha çok Cheeger-Gromoll tipli metriğin Levi-Civita konneksiyonuyla birleşen Vranceanu konneksiyonuna odaklanılmış ve bu konneksiyonun bazı diferensiyel geometrik özellikleri verilmiştir.

2017, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tensör demet, Sasaki metriği, Cheeger-Gromoll metriği, metrik konneksiyon, Vranceanu konneksiyonu.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

GEOMETRY OF TENSOR BUNDLES OF ARBITRARY TYPE

Elanur DOĞAN

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Geometry

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın GEZER

In this thesis, Vranceanu connections associated with the Levi-Civita connections of the Sasaki type and Cheeger-Gromoll type metrics are considered on $(1,1)$ -type tensor bundle. Because of coinciding the Vranceanu connection associated with the Levi-Civita connection of the Sasaki type metric and the horizontal lift of the Levi-Civita connection of the base manifold's metric, it is focused especially on the Vranceanu connection associated with the Levi-Civita connection of the Cheeger-Gromoll type metric and some differential geometric properties of this connection is given.

2017, 38 pages

Keywords: Tensor bundle, Sasakian metric, Cheeger-Gromoll metric, special Vranceanu connection.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan ve çalışmanın yürütülmesinde değerli bilgileri ve önerileri ile beni yönlendirerek destek olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanış sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın tüm dönemlerinde kendilerinden görmüş olduğum destek, güven ve sonsuz sevgiden dolayı her zaman yanımda olan aileme gönülden teşekkür ederim.

Elanur DOĞAN

Temmuz - 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar	3
2.2. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları	5
2.3. Kotanjant Vektörler	8
2.4. Tensör Alanları.....	9
2.5. Lie Parantezi ve Lie Türevi	13
2.6. Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerinde Afin Konneksiyon	15
2.7. Burulma ve Eğrilik Tensörleri.....	16
2.8. Riemann Manifoldu.....	18
3. MATERYAL YÖNTEM.....	23
3.1. (1,1)- Tipli Tensör Demet	23
3.2. Tensör Alanlarının Tensör Demete Liftleri ve γ Operatörü.....	24
3.3. Baz Manifoldun Afin Konneksiyonunun Tensör Demete Yatay Lifti	27
3.4. Tensör Demette ∇ Konneksiyonuna Adapte Olmuş Çatı.....	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1. (1,1)-Tipli Tensör Demette Sasaki Metriği	30
4.2. (1,1) - tipli tensör demette Cheeger-Gromoll tipli metriğin Levi-Civita konneksiyonu	31
4.3. (1,1) - Tipli Tensör Demette Özel Vranceanu Konneksiyonları.....	32
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER DİZİNİ

- $T_p M$: M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı
- $T_1^1(M)$: M manifoldunun (1,1)- tipli tensör demeti
- $C^\infty(M, \mathbb{R})$: $M \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her mertebeden sürekli türevlere sahip olan fonksiyonların kümesi
- $F(M)$: M üzerindeki C^∞ fonksiyonların cebiri
- $[X, Y]$: X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımları
- L_X : X vektör alanı yönünde Lie türev operatörü
- Γ_{ij}^k : 2. Tür Christoffel sembolleri (konneksiyon katsayıları)
- ∇ : Afin konneksiyon
- ${}^c \nabla$: Afin konneksiyonun demete tam lifti
- t_p : Bir t tensörünün p noktasındaki değeri
- ${}^H A$: A tensör alanının yatay lifti
- ${}^V A$: A tensör alanının dikey lifti
- ${}^{CG} g$: Cheeger-Gromoll metriği
- π : Doğal izdüşüm fonksiyonu
- $R_{ijk}{}^l$: Eğrilik tensörünün koordinatları
- \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
- ${}^S g$: Sasaki metriği
- $\mathfrak{S}_s^r(M)$: (1,1)-tipli tensörlerin $F(M)$ üzerindeki modülü

1. GİRİŞ

“Konneksiyon” fikrinin ortaya çıkışı, Christoffel’in 1869 yılındaki *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* makalesine dayanmasına rağmen, matematikçilerin bu kavramı tam manasıyla kavrayabilmesi yaklaşık yarım asır sonra gerçekleşmiştir. Christoffel bu çalışmasında, meşhur Γ_{ij}^k sembollerini ilk kez kullanmış ancak bunların bir “konneksiyon” belirttiğinin farkına varamamıştır.

Gregorio Ricci-Curbastro, Riemann metriğinden elde edilen bu Christoffel sembollerinin "koordinatsız" diferansiyel hesap oluşturmak için kullanılabileceğini fark etmiştir. Diferansiyel hesabın bu şekilde genişletilmesi, kısmî türevlerin eğrilikli (yani, Öklid dışı) uzaylarda kovaryant türev vasıtasıyla bir değişikliğine izin vermiştir. Öklid uzayında ise kovaryant türev ile kısmî türev çakışmaktadır. Ricci, bir koordinat sisteminde yazılan bir denklemin başka bir koordinat sisteminde geçerli olmasına büyük önem vermiştir. Bu koordinat bağımsızlığı, diferansiyel hesabın bu şekildeki genişletilmesinin “mutlak diferansiyel hesap” olarak anılmasına neden olmuştur. Mutlak diferansiyel hesap, birçok yeniliği beraberinde getirmesine rağmen, tamamen biçimseldi ve geometrik yorumları barındırmamaktaydı.

Gelinen bu noktada, 1917 yılına kadar tamamen analitik bir algoritma olarak kalan “konneksiyon”, kovaryant türev olarak matematikçilerin önündeydi. Levi-Civita, bir Riemann manifoldu üzerindeki paralellik kavramını 1917’de yayınlattığı *Nozione di parallelismo in una variet`a qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana* adlı çalışmasında tanımlamıştır. Levi-Civita’nın bu makalesinin önemi, kovaryant türev hakkında verdiği geometrik bilgiydi. Buna göre, kovaryant türev, izometrik olarak Öklid uzayına gömülü olan bir manifold verildiğinde, bir tanjant vektör boyunca alınan Öklid türevinin manifoldun tanjant uzayına izdüşümü olarak görülebiliyordu. Levi Civita’nın kovaryant türev operatörüne özgü paralellikten bahsetmesinden kısa bir süre sonra konneksiyon teorisi gerçekten doğmuştu.

“Konneksiyon” kavramı ilk kez Herman Weyl’in *Reine Infinitesimal Geometrie* isimli çalışmasında yer almıştır. Bu çalışmanın üçüncü bölümünde Weyl bir afin konneksiyonu “ P noktasındaki bir vektörü, P ye sonsuz yakın olan P' noktasındaki bir vektöre taşıyan dönüşüm” olarak belirlemiştir. Weyl’in böyle belirlediği paralel taşımadaki şart “vektörlerin tümünün P den P' noktasına transferi bir afin dönüşüm üretmelidir” şeklindedir. Buradaki “afin”den kasıt, dönüşümün doğrusallığı ve uzaklık oranlarını korumasına rağmen, açıları ve uzunlukları koruma zorunluluğunun olmamasıdır. Weyl afin konneksiyonun bileşenlerini $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ olarak belirlemiştir. Dördüncü bölümde ise Weyl, bir afin konneksiyonun bir metrik manifoldda tanımlanmış olması durumunu göz önüne almıştır. (Burada Weyl’in kastettiği günümüzde Riemann manifoldu olarak bilinmektedir) (Freeman 2006).

Levi-Civita’nın paralel taşınmasıyla kovaryant türev operatörü Weyl’in “konneksiyon” kavramıyla tam olarak uyduğu için, Levi-Civita’nın paralel taşıma sistemiyle birleşen kovaryant türev operatörü bugün Levi-Civita konneksiyonu olarak bilinmektedir.

Levi-Civita konneksiyonu, bir Riemann manifoldu üzerindeki metriği paralel bırakan ve burulmasız (yani, Christoffel sembolleri simetrik) olan bir tek afin konneksiyon vardır. Bu konneksiyon yardımıyla manifold üzerinde eşlenik konneksiyon, hemen hemen çarpım konneksiyonu, Schouten-Van Kampen konneksiyonu gibi yeni konneksiyonlar tanımlanabilir. Bunlardan biri de Vranceanu konneksiyonudur.

Vranceanu konneksiyonu, holonomik olmayan manifoldları çalışmak için 1926 yılında Vranceanu tarafından tanımlanmıştır. Bu konudaki en kapsamlı çalışma, Bejancu and Farran (2006)’ın kitabıdır.

Bu tezin amacı ise (1,1)-tipli tensör demette iyi bilinen Sasaki ve Cheeger-Gromoll metriklerinin Levi-Civita konneksiyonları ile birleşen iki farklı Vranceanu konneksiyonunu tanımlamak ve bu konneksiyonlara göre demetin temel diferensiyel geometrik özelliklerini incelemektir. (Tensör demetlerin tarihçesi için Altunbaş (2014)’ın doktora tezine bakılabilir)

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifolddar

Tanım 2.1.1: M bir Hausdorff uzayı olsun. Eğer $\forall p \in M$ için p noktasının \mathbb{R}^n deki bir açık kümeye homeomorf olacak şekilde bir U açık komşuluğu varsa M ye bir topolojik manifold veya kısaca manifold adı verilir.

Bu durumda $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu n olarak tanımlanır ve n –boyutlu manifold M_n ile ifade edilir (Şahin 2013).

Tanım 2.1.2: Tanım 2.1.1’de bahsedilen homeomorfizm $\varphi: U \rightarrow V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise (U, φ) ikilisine bir harita adı verilir..

Tanım 2.1.3: $x = \varphi(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $g^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ sürekli fonksiyonları $g^i(x) = x^i$ şeklinde verilsin. Bu durumda $\varphi^i = g^i \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ reel değerli fonksiyonlarına $p \in M$ noktasının (U, φ) haritasının $\varphi^i(p) = x^i$ dönüşümünü sağlayan koordinat fonksiyonları, (x^1, x^2, \dots, x^n) reel sayılarına ise $p \in M$ noktasının (U, φ) haritasındaki koordinatları adı verilir (Şuhubi 2008).

Tez boyunca manifoldun lokal koordinatları ifadesi geçtiğinde bu anlaşılacaktır.

$\varphi^{-1}: \varphi(U) = V \rightarrow U$ ters dönüşümü U kümesinin bir parametrelemesi adını alır ve x^1, x^2, \dots, x^n koordinatlarına U nun parametreleri denir.

Tanım 2.1.4: M, n –boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerindeki haritaların bir ailesi olan $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in I\}$ kümesi aşağıdaki şartlar sağlıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde C^k sınıfı bir atlas adı verilir:

- (i) $\{U_\alpha\}$ açık kümelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.
- (ii) $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) gibi iki farklı haritayı göz önüne alalım. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olsun. φ_α ile φ_β altındaki görüntüleri genellikle farklı olan bu küme üzerinde

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha\beta}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) &\rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) &\rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\end{aligned}$$

dönüşümleri tanımlandığı zaman bu dönüşümlerin k . mertebeye kadar türevleri var ve süreklidir (Şuhubi 2008).

İkinci şarta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı adı verilir.

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarındaki koordinatları sırasıyla (x^i) ve (y^i) ile ifade edersek, $\varphi_{\alpha\beta}$ dönüşümü aynı $p \in M$ noktasının birbiri üzerine binen iki harita altında görüntüleri olan x ve $y = \varphi_{\alpha\beta}(x) \in \mathbb{R}^n$ noktalarının koordinatları arasında

$$y^i = f^i(x^j); i, j = 1, \dots, n; x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.1)$$

şeklinde bir bağıntıyı meydana getirir. Doğal olarak, $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ dönüşümü bu bağıntının tersini ortaya çıkarır:

$$x^i = g^i(y^j); i, j = 1, \dots, n; y \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta). \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) bağıntılarının manifoldun $U_\alpha \cap U_\beta$ açık kümesi üzerinde bir koordinat dönüşümüne karşılık geldiği açıktır. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşır olması, f^i fonksiyonlarının x^j değişkenlerine göre k . mertebeye kadar türevlerinin var ve sürekli olması anlamına gelmektedir. C^k sınıfı bir atlas tüm haritaları C^k uzlaşır olan bir atlasır. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ ise bu haritalar uzlaşır kabul edilir.

Tanım 2.1.5: İki C^k atlas A_1 ve A_2 olsun. Eğer $A_1 \cup A_2$ de bir C^k atlas ise, başka bir ifadeyle A_1 deki her harita A_2 deki her harita ile C^k uzlaşır ise, bu iki atlas C^k uzlaşır veya denk atlaslar denir (Şuhubi 2008).

Atlasların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısı olur ve bu, C^k atlaslar kümesini denklik sınıflarına ayırır.

Tanım 2.1.6: M manifoldu üzerindeki C^k atlaslarının bir denklik sınıfına bir C^k yapı adı verilir. C^k yapısının içindeki atlasların birleşimi de bu sınıfın içinde kalmak zorundadır. Yani her denklik sınıfı bir tane en büyük atlası ihtiva eder ki bu atlası maksimal atlas denir (Şuhubi 2008).

Tanım 2.1.7: M manifoldu Tanım 2.1.5'teki gibi bir maksimal atlası sahipse bu manifolda C^k diferensiyellenebilir manifold adı verilir.

Eğer (2.1) ve (2.2) reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların her mertebeden türevi var ve sürekli ise C^∞ atlas ve C^∞ diferensiyellenebilir manifold elde edilir. C^∞ diferensiyellenebilir manifoldlara kısaca düzgün manifoldlar denir (Şuhubi 2008).

Bundan sonra bütün manifoldlar düzgün kabul edilecektir.

2.2. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

M n -boyutlu bir manifold, $p \in M$ bir nokta, p noktasındaki düzgün fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olarak alınsın. p noktasındaki bir harita (U, φ) ise $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ den $p = \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ olur. Buradan

$$y = f(p) = f(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n)) = g(x^1, \dots, x^n)$$

elde edilir. Burada $g = f \circ \varphi^{-1}$ olarak tanımlanmıştır. Aşağıdaki gibi yazılan

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p := \frac{\partial g}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(p)}$$

gösterimi kabul edelim. Bazen $\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p$ yerine $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p(f)$ de yazılır. n tane olan $\xi^i \in \mathbb{R}$ sayılarını göz önüne alalım ve

$$X_p(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p, C^\infty(M, \mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanan $X_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonu

$$X_p = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

biçiminde ve bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesini de $T_p M$ ile gösterelim. $T_p M$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini sırasıyla

$$\begin{aligned} (X_{1p} + X_{2p})(f) &= X_{1p}(f) + X_{2p}(f), \\ (aX_p)(f) &= aX_p(f) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa $T_p M$ kümesi bu işlemlerle beraber \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.2.1: M manifoldu ve $p \in M$ noktası olsun. Yukarıda anlatılan $T_p M$ vektör uzayına M nin p noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına ise M nin p noktasındaki tanjant vektörleri adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Teorem 2.2.2: M, n –boyutlu bir manifold, $T_p M$ onun p noktasındaki tanjant uzayı ve p nin (U, φ) haritasında koordinatları (x^1, \dots, x^n) olsun. Bu durumda $T_p M$ vektör uzayının bir bazı $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ dır.

Tanım 2.2.3: Teorem 2.3.2’de geçen $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ bazına M nin p noktasındaki doğal çatısı adı verilir. Genellikle bu baz, karışma tehlikesi olmadığı durumlarda nokta vurgusu yapılmaksızın, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ yazılımı ile $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ şeklinde gösterilir.

Sonuç 2.2.4: M manifoldunun boyutu ile $T_p M$ nin boyutu eşittir.

Tanım 2.2.5: M, n –boyutlu bir manifold ve $T_p M$ onun p noktasındaki tanjant uzayı olarak verilsin. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_p M$ uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren C^∞ sınıfından bir fonksiyona bir vektör alanı adı verilir (Şahin 2013).

Böylece M manifoldu üzerinde bir X vektör alanı

$$X: M \rightarrow \cup_{p \in M} T_p M$$

şeklinde tanımlı bir C^∞ dönüşümdür. Burada vektör alanının C^∞ sınıfından olması her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$Xf: M \rightarrow \mathbb{R}, Xf(p) = X_p(f)$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olmasıdır.

Vektör alanlarının kümesi şimdilik $\chi(M)$ ile ifade edilecektir. Bir lokal koordinat sisteminde bir X vektör alanı $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ile ifade edilebilir. $g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $X, Y \in \chi(M)$ verildiğinde, keyfi $p \in M$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(gX + hY)_p f = g(p)X_p f + h(p)Y_p f$$

şeklinde tanımlanırsa $X + Y$, M üzerinde yeni bir vektör alanı olur. Bu şekilde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\chi(M)$, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modüldür.

2.3. Kotanjant Vektörler

Tanım 2.3.1: M , n –boyutlu bir manifold $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. f fonksiyonunun $p \in M$ noktasındaki diferensiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p dx^i$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ise $df + dg$ ifadesi $f + g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere adf ifadesi de $af \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli olur. Buna göre, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonların p noktasındaki diferensiyelleri \mathbb{R} üzerinde T_p^*M uzayını oluşturur. $x^i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $dx^i \in T_p^*M$ olacağı açıktır. $\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\forall df \in T_p^*M$ diferensiyeli dx^i diferensiyellerinin lineer birleşimi olur. dx^i ler bağımsız olan $x^i, i = 1, \dots, n$ değişkenlerinin diferensiyelleri olduğundan, lineer bağımsız olacaktır. Böylece aşağıdaki teorem bulunur:

Teorem 2.3.2: M , n –boyutlu bir manifold ve $p \in M$ olsun. T_p^*M vektör uzayının bir bazı $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$ ve dolayısıyla $boy T_p^*M = n$ dir.

T_p^*M uzayının keyfi df elemanı $df(X) = X(f), \forall X \in T_pM$ lineer dönüşümünü tayin eder. Bu eşitlikte $f = x^k, X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ alınırsa $dx^k(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \delta_i^k$ bulunur. Yani, $\{dx^k\}$ ve $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ bazları dual bazlardır. Buna göre T_p^*M uzayı T_pM uzayının duali olur.

Tanım 2.3.3: M bir manifold ve T_pM onun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. T_pM nin dual uzayı olan T_p^*M uzayına M nin p noktasındaki koteanjant uzayı, T_p^*M nin elemanlarına koteanjant vektör (kovektör) adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.3.4: Teorem 2.4.2’de geçen $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$ bazına M manifoldunun bir p noktasındaki koçatısı adı verilir.

Tanım 2.3.5 M manifoldunun her noktasına bir koteanjant vektör karşılık getiren bir C^∞ fonksiyona 1-form adı verilir.

2.4. Tensör Alanları

Tanım 2.4.1: M , n –boyutlu bir manifold ve T_pM onun p noktasındaki tanjant uzayı olsun.

$$t_p: \underbrace{T_pM \times T_pM \times \dots \times T_pM}_{s \text{ tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her bir bileşene göre lineer olan, yani

$$t_p(v_1, \dots, v_{i-1}, au_i + bv_i, v_{i+1}, \dots, v_s) = at_p(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_s) + bt_p(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_s)$$

eşitliğini sağlayan t_p fonksiyonuna p noktasında s –lineer fonksiyon adı verilir.

$T_p M \times T_p M \times \dots \times T_p M$ den \mathbb{R} ye tanımlı bütün s –lineer fonksiyonların kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla $\forall (v_1, \dots, v_s) \in T_p M \times T_p M \times \dots \times T_p M$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(t_p + u_p)(v_1, \dots, v_s) &= t_p(v_1, \dots, v_s) + u_p(v_1, \dots, v_s), \\ (\lambda t_p)(v_1, \dots, v_s) &= \lambda t_p(v_1, \dots, v_s)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanırsa bu küme \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.4.2: Yukarıda tanımlanan vektör uzayına $T_p^* M$ dual uzaylarının tensörel çarpımı adı verilir ve $T_s^0(p)(M) = \otimes^s T_p^* M = \underbrace{T_p^* M \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{s \text{ tane}}$ ile ifade edilir. Bu kümenin her bir elemanına s . dereceden kovaryant tensör veya $(0, s)$ –tipli tensör adı verilir.

Kovaryant tensör için yapılan tanımda, $T_p M$ yerine $T_p^* M$ alınarak ve $(T_p^* M)^*$ ile $T_p M$ nin izomorf olmasından faydalanılarak aşağıdaki tanım yapılabilir:

Tanım 2.4.3: M , n –boyutlu bir manifold ve $T_p M$ onun p noktasındaki tanjant uzayı olsun.

$$T_0^r(p)(M) = \otimes^r T_p M = \underbrace{T_p M \otimes T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_{r \text{ tane}}$$

vektör uzayına $T_p M$ tanjant uzayının tensörel çarpımı, bu kümenin her bir elemanına r . dereceden kontravaryant tensör veya $(r, 0)$ –tipli tensör adı verilir.

Tanım 2.4.4: M , n –boyutlu bir manifold ve $T_p M$ ile $T_p^* M$ sırasıyla M nin p noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayı olsun.

$$t_p: \underbrace{T_p^*M \times \dots \times T_p^*M}_{rtane} \times \underbrace{T_pM \times \dots \times T_pM}_{stane} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı her bir bileşene göre lineer olan t_p fonksiyonuna $(r + s)$ –lineer fonksiyon adı verilir.

Bu şekildeki $(r + s)$ –lineer fonksiyonların kümesi, üzerinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre \mathbb{R} cismi üzerinde vektör uzayı olur. Bu vektör uzayı $T_{s(p)}^r M$ ile gösterilerek aşağıdaki tanım yazılır:

Tanım 2.4.5: M , n –boyutlu bir manifold ve T_pM ile T_p^*M sırasıyla M nin p noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayı olsun.

$$T_{s(p)}^r(M) = \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{rtane} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{stane}$$

vektör uzayına T_pM ve T_p^*M uzaylarının tensörel çarpımı; bu vektör uzayının her bir elemanına s . dereceden kovaryant, r . dereceden kontravaryant tensör veya kısaca (r, s) –tipli tensör adı verilir.

İki tensörün toplanabilmesi için bu tensörlerin aynı tipli olması gerekir. t_1 ve t_2 (r, s) –tipli iki tensör olsun. Bu tensörlerin toplamı

$$(t_1 + t_2)(\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}, x_1, \dots, x_s) = t_1(\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}, x_1, \dots, x_s) + t_2(\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r}{\xi}, x_1, \dots, x_s)$$

biçiminde tanımlanır.

İki tensörün çarpılabilmesi için bu tensörlerin aynı tipli olması gerekmez. t_1 ve t_2 sırasıyla (r_1, s_1) ve (r_2, s_2) –tipli iki tensör olsun. Bu iki tensörün çarpımı $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ –tipli bir tensördür ve bu çarpım

$$(t_1 \otimes t_2)(\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi}, \overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi}, x_1, \dots, x_{s_1}, x_{s_1+1}, \dots, x_{s_1+s_2}) =$$

$$t_1(\overset{1}{\xi}, \dots, \overset{r_1}{\xi}, x_1, \dots, x_{s_1}) t_2(\overset{r_1+1}{\xi}, \dots, \overset{r_1+r_2}{\xi}, x_{s_1+1}, \dots, x_{s_1+s_2})$$

biçimindedir. Tensör çarpımı değişmeli değildir.

Tensörler üzerinde yapılan işlemlerden biri de kontraksiyondur. $T_s^r(p)M$ tensör uzayı üzerinde

$$C_j^i: T_s^r(p)(M) \rightarrow T_{s-1}^{r-1}(p)(M)$$

$$A \rightarrow C_j^i(A)(\xi^1, \dots, \xi^{s-1}, X_1, \dots, X_{r-1}) = C\{A(\cdot, X_1, \dots, X_{r-1}, \cdot, \xi^1, \dots, \xi^{s-1})\}$$

ve

$$C_j^i(A) = \sum_m A(\xi^m, \xi^1, \dots, \xi^{s-1}, X_m, X_1, \dots, X_{r-1})$$

şeklinde tanımlanan operatöre kontraksiyon operatörü adı verilir. Böylece bir kontraksiyon operatörü (r, s) –tipli bir tensörü $(r - 1, s - 1)$ –tipli bir tensöre taşır, yani kovaryantlık ve kontravaryantlık derecelerini düşürür (Şahin 2013).

$T_1^1(p)(M)$ tensör uzayının bir bazı

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes dx^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \Big|_p \right)_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1, \dots, n}$$

dır. Burada

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes dx^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \Big|_p \right) (dx^{k_1}, \dots, dx^{k_r}, \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{l_s}})$$

$$= \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_s}^{j_s}$$

dır. Bir t_p tensörü, bu baz cinsinden yazılırsa

$$t_p = A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \Big|_p \otimes dx^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \Big|_p$$

t_p nin bu baza göre koordinatları, yani $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t_p(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}})$ dır (Kühnel 2005).

Tanım 2.4.6: M manifoldunun her noktasına bir $T_1^1(M)$ –tipli tensör karşılık getiren C^∞ sınıfından A dönüşümüne (1,1)-tipli bir tensör alanı adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Bundan sonra, bir M manifoldu üzerindeki bir (1,1)-tipli bir t tensör alanı t_1^1 ile ifade edilecektir. M manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından (1,1)-tipli tensör alanlarının, C^∞ sınıfından fonksiyonların cebiri olan $F(M)$ kümesi üzerindeki modülü ise $\mathfrak{S}_1^1(M)$ ile işaretlenecektir. Bu küme aynı zamanda \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayıdır. $\mathfrak{S}_1^1(M)$, $\mathfrak{S}(M)\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur.

Tanım 2.4.7: $\forall p \in M$ noktasında A_p tensörü simetrik ise A tensör alanına M manifoldu üzerinde simetrik tensör alanı, A_p tensörü anti-simetrik ise A tensör alanına M manifoldu üzerinde anti-simetrik tensör alanı adı verilir.

2.5. Lie Parantezi ve Lie Türevi

Tanım 2.5.1: Aşağıdaki şartları sağlayan $D: \mathfrak{S}(M) \rightarrow \mathfrak{S}(M)$ dönüşümüne $\mathfrak{S}(M)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi işlemi adı verilir:

1. D sabit katsayılarla göre lineerdir, yani $a, b \in \mathbb{R}$ için $D(at + bs) = aDt + bDs$ dir.
2. D tipi korur, yani T ile DT aynı tipli tensördür.
3. $D(t \otimes s) = Dt \otimes s + t \otimes Ds$.
4. D işlemi tensörlerin kontraksiyon işlemi ile yer değiştirebilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.5.2: M manifoldunun U açık kümesi üzerinde tanımlı vektör alanları X ve Y ile $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu olsun.

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

eşitliğiyle belirli $[X, Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi (Lie çarpımı) adı verilir. $[X, Y]$ vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j \quad (2.3)$$

şeklindedir. Özel olarak $X = \partial_i, Y = \partial_j$ alınırsa (2.3) ifadesinden

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür. Lie parantezinin aşağıdaki özellikleri vardır:

1. $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$ (Lineerlik)
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$ (Leibniz şartı)
3. $[X, Y] = [-Y, X]$ (Antisimetriklik)
4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

Tanım 2.5.3: Aşağıdaki iki şartı sağlayan $D = L_X, X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ tensör diferensiyelleme işlemine X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir:

1. $L_X f = Xf, \forall f \in \mathfrak{S}_0^0(M),$
2. $L_X Y = [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M).$

(2.3) formülüne göre, $L_X Y$ nin lokal koordinatlardaki ifadesi

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferensiyellemesi sonucunda elde edilen değere Lie türevi adı verilir.

Keyfi $t \in \mathfrak{S}_s^r(M)$ tensör alanı için Lie türev formülü aşağıdaki gibidir:

$$L_X t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \sum_{\lambda=1}^s (\partial_{j_\lambda} X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \sum_{\lambda=1}^r (\partial_k X^{i_\lambda}) t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots k \dots i_r}$$

(Salimov ve Mağden 2008).

2.6. Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerinde Afin Konneksiyon

Tanım 2.6.1: M bir manifold olsun. $T(M)$ cebirinin

$$D = \nabla_X: T(M) \rightarrow T(M), X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$$

diferensiyelleme işlemi $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M), \forall t \in T(M)$ için

$$(i) \nabla_{fX+gY} t = f \nabla_X t + g \nabla_Y t,$$

$$(ii) \nabla_X (ft) = X[f]t + f \nabla_X t$$

şartları sağlanıyorsa ∇_X e X vektör alanı yönünde kovaryant türev adı verilir.

$\nabla: \mathfrak{S}_0^1(M) \times \mathfrak{S}_0^1(M) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(M)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme afin konneksiyon, (M, ∇) çiftine afin konneksiyonlu uzay adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Eğer $t \in \mathfrak{S}_s^r(M)$ ise $\nabla_X t \in \mathfrak{S}_s^r(M)$ olur. Ayrıca $\forall t \in \mathfrak{S}_{s+1}^r(M)$ dir ve bu

$$(\nabla t)(X, \xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s) = (\nabla_X t)(\xi^1, \dots, \xi^r, X_1, \dots, X_s)$$

formülü ile verilir.

Tanım 2.6.2: M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ∇ ve (U, ϕ) M nin $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ lokal koordinatlarına sahip bir haritası olsun. $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ gösterimi ile $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ şeklinde tanımlanan n^3 tane $\Gamma_{ij}^k: U \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ fonksiyonlarına ∇ konneksiyonunun katsayıları ya da 2. tür Christoffel sembolleri adı verilir.

2.7. Burulma ve Eğrilik Tensörleri

Sürekli bir f fonksiyonunun tam diferensiyeli alınarak bir 1-form elde edilebileceği 2.4. alt başlıktan bilinmektedir. $df = \partial_i f dx^i$ olduğundan df ye koordinatları $f_i = \partial_i f$ olan bir kovektör karşılık gelir. f sürekli olduğundan f için ikinci türevler sıraya bağlı değildir, yani $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ dir. f_i nin kovektör olmasından dolayı bu özelliğin kovaryant türevler için de geçerli olup olmadığı sorgulanabilir.

$$\nabla_j f_i - \nabla_i f_j = \partial_j f_i - \Gamma_{ji}^k f_k - \partial_i f_j + \Gamma_{ij}^k f_k = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) f_k = T_{ij}^k f_k \quad (2.4)$$

elde edilir.

Tanım 2.7.1: (2.4) denkleminde oluşan ve kovaryant indislere göre antisimetrik olan (1,2) –tipli $T_{ij}^k = -T_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ tensörüne ∇ konneksiyonunun burulma tensörü adı verilir.

Buradan açıkça görülmektedir ki ancak T_{ij}^k tensörünün sıfır olmasıyla, yani $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ olmasıyla, $\nabla_j f_i = \nabla_i f_j$ eşitliği elde edilebilir. Bu da ∇ konneksiyonunun simetrik

olması anlamına gelmektedir. Burulma tensörü sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar adı verilir.

Burulma tensörünün invaryant yazılımı $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için aşağıdaki gibidir:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M). \quad (2.5)$$

Skaler bir fonksiyon için yapılan yukarıdaki işlemler bir $V = V^i \partial_i$ vektörü için tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j V^i) &= \partial_k(\nabla_j V^i) + \Gamma_{kn}^i \nabla_j V^n + \Gamma_{kj}^n \nabla_n V^i \\ &= \partial_k(\partial_j V^i + \Gamma_{jl}^i V^l) + \Gamma_{kn}^i (\partial_j V^n + \Gamma_{jl}^n V^l) - \Gamma_{kj}^n \nabla_n V^i \\ &= \partial_{kj}^2 V^i + (\partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{jl}^n V^l) - \Gamma_{kj}^l \nabla_l V^i + \Gamma_{jl}^i \partial_k V^l + \Gamma_{kl}^i \partial_j V^l \end{aligned} \quad (2.6)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \nabla_j(\nabla_k V^i) &= \partial_{jk}^2 V^i + (\partial_j \Gamma_{kl}^i + \Gamma_{jn}^i \Gamma_{kl}^n) V^l - \Gamma_{jk}^l \nabla_l V^i + \\ &\quad \Gamma_{kl}^i \partial_j V^l + \Gamma_{jl}^i \partial_k V^l \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.6) eşitliğinden (2.7) eşitliğinin çıkarılmasıyla

$$\begin{aligned} \nabla_k(\nabla_j V^i) - \nabla_j(\nabla_k V^i) &= (\partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_j \Gamma_{kl}^i + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{jl}^n - \Gamma_{jn}^i \Gamma_{kl}^n) V^l + \\ &\quad T_{jk}^l \nabla_l V^i \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitliği bulunur. Burada (2.8) eşitliği

$$\nabla_k(\nabla_j V^i) - \nabla_j(\nabla_k V^i) = R_{kjl}^i V^l + T_{jk}^l \nabla_l V^i \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilirse R_{kjl}^i ile gösterilen bir (1,3) –tipli tensör bulunur.

Tanım 2.7.2: (2.9) denkleminde ortaya çıkan R_{kjl}^i tensörüne ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü adı verilir.

Eğrilik tensörünün invaryant yazılımı $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için aşağıdaki gibidir:

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Eğrilik tensörü ilk iki indise göre antisimetriktir, yani $R_{kjl}^i = -R_{jkl}^i$ dir.

Burulmasız uzaylarda, sırasıyla, 1.Bianchi ve Bianchi-Padov özdeşliği denilen aşağıdaki iki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} R_{kjl}^i + R_{jlk}^i + R_{ljk}^i &= 0. \\ \nabla_{[m} R_{kj]l}^i &= \nabla_m R_{kjl}^i + \nabla_k R_{jml}^i + \nabla_j R_{mkl}^i = 0. \end{aligned}$$

2.8. Riemann Manifoldu

Tanım 2.8.1: M manifoldu üzerinde tanımlanan $g: \mathfrak{S}_0^1(M) \times \mathfrak{S}_0^1(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ bilineer formu için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa g ye Riemann metriği veya metrik tensör, (M, g) ikilisine Riemann manifoldu adı verilir:

1. $g(X, Y) = g(Y, X)$ (simetriklik)
2. $g(X, X) \geq 0$ ve $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (pozitif tanımlılık).

Yukarıdaki tanımda pozitif tanımlılık şartı, ondan daha zayıf olan “ $\forall Y$ için $g(X, Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir” şartı ile değiştirilirse (M, g) ikilisine pseudo-Riemann (yarı-Riemann) manifoldu denir. Bu şarta metriğin yozlaşmama (non-dejenere olma) şartı denir (Kühnel 2005).

Metrik tensör lokal koordinatlarda gösterilirse, $U = u^i \partial_i, V = v^j \partial_j$ olmak üzere $g(u, v) = g_{ij} u^i v^j$ yazabiliriz. Burada $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ dir. $\{dx^i\}, \{\partial_i\}$ nin dual bazı olduğundan metrik tensör $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ olarak da ifade edilebilir.

Tanım 2.8.2: $(M, g), \nabla$ afin konneksiyonuna sahip olan bir manifold olsun. Eğer $\nabla g = 0$ ise ∇ afin konneksiyonuna, g ye göre metrik konneksiyon adı verilir.

Teorem 2.8.3: (M, g) Riemann manifoldu üzerinde burulmasız bir tek metrik konneksiyon mevcuttur.

Tanım 2.8.4: Teorem 2.8.3’te verilen konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu adı verilir.

Teorem 2.8.5: (M, g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $X, Y, Z \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ için Koszul formülü olarak tanımlanan aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \quad (2.10)$$

(2.10) denkleminde $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_k$ seçilirse

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) &= \partial_i(g(\partial_j, \partial_k)) + \partial_j(g(\partial_k, \partial_i)) - \partial_k(g(\partial_i, \partial_j)) \\
&\quad - \underbrace{g(\partial_i, [\partial_j, \partial_k])}_0 + \underbrace{g(\partial_j, [\partial_k, \partial_i])}_0 + \underbrace{g(\partial_k, [\partial_i, \partial_j])}_0 \\
2g(\Gamma_{ij}^h \partial_h, \partial_k) &= \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \\
2\Gamma_{ij}^h g_{hk} &= \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \\
\Gamma_{ij}^h &= \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})
\end{aligned} \tag{2.11}$$

elde edilir ki bu Γ_{ij}^h fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları adı verilir.

Tanım 2.8.6: (M, g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_0^1(M)$ için

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

denklemiyle belirli (1,3) –tipli R tensörüne ∇ konneksiyonunun Riemann (veya Riemann-Christoffel) eğrilik tensörü adı verilir.

Tanım 2.8.7: Bir (M, g) Riemann manifoldunun R eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır oluyorsa M ye flat (düz) manifold denir.

∇ , Levi-Civita konneksiyonu burulmasız afin konneksiyon olduğundan, burulmasız afin konneksiyonun eğriliği için geçerli olan tüm özellikler Riemann eğrilik tensörü için de geçerli olacaktır.

Herhangi bir afin konneksiyonun eğrilik tensörünün aksine, Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek kovaryant eğrilik tensörü bulunabilir. Yani:

$$R_{ijk}{}^l = g^{ml} R_{ijkm}$$

eşitliği geçerlidir. Benzer şekilde eğrilik tensörünün kovaryant indisleri de yükseltilerek kontravaryant eğrilik tensörü de bulunabilir. Kovaryant eğrilik tensörünün aşağıdaki özellikleri mevcuttur:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl}, R_{ijkl} = -R_{ijlk}, R_{ijkl} = R_{klij}, \\ R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} &= 0. \end{aligned}$$

Tanım 2.8.8: Eğrilik tensörü yardımıyla tanımlanan $(0,2)$ –tipli $R_{jk} = R_{ljk}{}^l$ tensörüne Ricci eğrilik tensörü adı verilir.

Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Gerçekten

$$R_{jk} = R_{ljk}{}^l = g^{ml} R_{ljkm} = g^{ml} R_{kmlj} = g^{ml} R_{mkjl} = R_{mkj}{}^m = R_{kj}$$

dır.

Tanım 2.8.9: Ricci eğrilik tensörünün tam kontraksiyonuna skaler eğrilik adı verilir ve r ile ifade edilir. Yani $r = g^{jk} R_{jk}$ dir.

Tanım 2.8.10: (M, g) , n –boyutlu Riemann manifoldu, $T_p M$ onun p noktasındaki tanjant uzayı ve $T_p M$ nin 2 –boyutlu alt uzayı P verilsin. P düzlemini geren birim vektörler X ve Y olmak üzere

$$K(P) = K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği adı verilir.

Teorem 2.8.11 (Schur Teoremi): n -boyutlu ($n > 2$) M Riemann manifoldunun $K(P)$ kesitsel eğriliği her P düzlemi için aynı oluyorsa manifoldun her noktasında sabittir.

Tanım 2.8.12: Teorem 2.8.11'deki manifoldlara sabit eğrilikli manifoldlar adı verilir.



3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. (1,1)- Tipli Tensör Demet

Tanım 3.1.1: M , n –boyutlu bir manifold ve $T_{1(p)}^1(M)$, M nin bir p noktasındaki (1,1) –tipli tensör uzayı olsun.

$$T_1^1(M) = \bigcup_{p \in M} T_{1(p)}^1(M)$$

ile tanımlanan $T_1^1(M)$ kümesine M manifoldunun (1,1) –tipli tensör demeti adı verilir.

Bu tanımdaki M manifolduna demetin baz manifoldu, $T_{1(p)}^1(M)$ tensör uzaylarına demetin fibreleri (lifleri) denir.

Bir $\tilde{P} = (p, T) \in T_s^r(M)$ noktası verildiğinde $\tilde{P} \rightarrow p$ örten eşlemesi, $\pi: T_1^1(M) \rightarrow M$, $\pi(p, T) = p, T \in T_{1(p)}^1(M)$ şeklinde olan bir π doğal izdüşümü belirler. Bu π izdüşümü, bir tensör uzayındaki her tensörü bağlı bulunduğu p noktasına götürür.

$T_1^1(p) = \pi^{-1}(\{p\})$ olduğu açıktır.

Tanım 3.1.2: $p \in M$ nin U komşuluğundaki koordinatları x^j , T tensörünün $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ bazına göre koordinatları $x^{\bar{j}} = t_j^i$ ise $(x^j, t_j^i) = (x^j, x^{\bar{j}}) = x^J, j = 1, \dots, n; \bar{j} = n + 1, \dots, n + n^2; J = 1, \dots, n + n^2, \pi^{-1}(U)$ komşuluğunda lokal koordinat sistemi olur. Bu koordinat sistemine x^j den indirgenmiş koordinat sistemi adı verilir.

Tanım 3.1.3: $T_1^1(M)$ tensör demetinde lokal gösterimi

$$\alpha = \alpha_i^j \partial_j \otimes dx^i$$

olan bir α tensörü olsun. Bu tensörün tam kontraksiyonu olan 1α ya $T_1^1(M)$ de bir fonksiyon denir. 1α nın lokal gösterimi $1\alpha = \alpha_i^j t_j^i$ şeklindedir.

3.2. Tensör Alanlarının Tensör Demete Liftleri ve γ Operatörü

Tanım 3.2.1: f, M de bir fonksiyon olmak üzere ${}^V f: T_1^1(M) \rightarrow \mathbb{R}, {}^V f = f \circ \pi$ şeklinde tanımlı ${}^V f$ fonksiyonuna f nin dikey lifti denir.

${}^V f$ dikey lifti, $\pi^{-1}(p) = T_1^1(p)$ fibresi boyunca sabittir ve değeri $p = \pi(\tilde{P}) \in M$ olmak üzere $f(p)$ ye eşittir.

Şimdi $T_1^1(M)$ tensör demetindeki vektör alanlarını belirlemeye çalışalım. $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(T_1^1(M))$ verildiğinde \tilde{X} vektör alanının tam olarak belirlenebilmesi için, onun $T_1^1(M)$ deki C^∞ sınıfından fonksiyonlar üzerindeki etkisine bakılmalıdır. Bunun için de aşağıdaki önerme kullanılır:

Önerme 3.2.2: $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(T_1^1(M))$ olsun. Her $\alpha \in T_1^1(M)$ için $\tilde{X}(1\alpha) = \tilde{Y}(1\alpha)$ ise $\tilde{X} = \tilde{Y}$ dir (Cengiz and Salimov 2002).

Tanım 3.2.3: $\alpha \in T_1^1(M)$ ve $A \in T_1^1(M)$ olsun. Bu durumda

$${}^V A(1\alpha) = \alpha(A) \circ \pi = {}^V (\alpha(A))$$

şartını sağlayan ${}^V A \in \mathfrak{S}_0^1(T_1^1(M))$ vektör alanına A tensör alanının $T_1^1(M)$ tensör demetine dikey lifti adı verilir (Ledger and Yano 1967).

$T_1^1(M)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^V A$ vektör alanının bileşenleri

$${}^v A = \begin{pmatrix} {}^v A^j \\ {}^v A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_j^i \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.4: ∇ , M üzerinde bir afin konneksiyon ve ∇_X , $X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ vektör alanına göre kovaryant türev operatörü olsun. Bu durumda $\alpha \in T_1^1(M)$ için

$${}^H X(1\alpha) = 1(\nabla_X \alpha)$$

şartını sağlayan ${}^H X \in \mathfrak{S}_0^1(T_1^1(M))$ vektör alanına X vektör alanının $T_1^1(M)$ tensör demetine yatay lifti denir (Mağden and Salimov 2001).

$T_1^1(M)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^H X$ vektör alanının bileşenleri

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^j \\ X^a(-\Gamma_{am}^i t_j^m + \Gamma_{aj}^m t_m^i) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.5: L_V , $V \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Bu durumda $\alpha \in T_1^1(M)$ için

$${}^c V(1\alpha) = 1(L_V \alpha)$$

şartını sağlayan ${}^c V$ vektör alanına V vektör alanının $T_1^1(M)$ tensör demetine tam lifti adı verilir (Ledger and Yano 1967).

$T_1^1(M)$ nin $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre ${}^c V$ vektör alanının bileşenleri

$${}^c V = \begin{pmatrix} V^j \\ t_j^m \partial_m V^i - t_m^i \partial_j V^m \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.6: Lokal koordinatlarla ifadesi $\varphi = \varphi_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ olan $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ tensörünü göz önüne alalım. $T_1^1(M)$ tensör demetinin bir $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına göre

$$\begin{aligned}\gamma\varphi &= \left(\sum_{\lambda=1}^r t_j^m \varphi_m^i \right) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}, \\ \tilde{\gamma}\varphi &= \left(\sum_{\lambda=1}^r t_m^i \varphi_j^m \right) \frac{\partial}{\partial x^{\bar{j}}}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan operatöre γ operatörü adı verilir (Cengiz and Salimov 2002).

(3.3)'ten, $\gamma\varphi$ nin $T_1^1(M)$ tensör demetinde bir dikey vektör alanı olduğu görülür. Bu $\gamma\varphi$ vektör alanına $\varphi \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ tensörünün $T_s^r(M)$ tensör demetine dikey vektör lifti adı verilir.

γ operatörünün yardımıyla, $T_1^1(M)$ tensör demetindeki vektör alanlarının Lie çarpımları aşağıdaki teoremle verilir:

Teorem 3.2.7: M burulmasız ∇ afin konneksiyonuna sahip bir manifold ve $T_1^1(M)$, M nin (1,1) –tipli tensör demeti olsun. $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ ve $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}[{}^H X, {}^H Y] &= {}^H [X, Y] + (\tilde{\gamma} - \gamma)R(X, Y), \\ [{}^H X, {}^V A] &= {}^V (\nabla_X A), \\ [{}^V A, {}^V B] &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Burada $R(X, Y)$, M nin ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörüdür. (Salimov and Gezer 2011)

3.3. Baz Manifoldun Afin Konneksiyonunun Tensör Demete Yatay Lifti

Tanım 3.3.1: M ∇ afin konneksiyonuna sahip bir manifold olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $T_1^1(M)$ –tipli tensör demetinde tanımlı ${}^H\nabla$ konneksiyonuna ∇ afin konneksiyonunun yatay lifti denir:

$${}^H\nabla_{H_X} {}^H Y = {}^H(\nabla_X Y), {}^H\nabla_{H_X} {}^V A = {}^V(\nabla_X A), \quad (3,5)$$

$${}^H\nabla_{V_A} {}^H Y = 0, {}^H\nabla_{V_A} {}^V B = 0.$$

Burada $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ ve $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ dir (Kopuzlu and Salimov 1999).

3.4. Tensör Demette ∇ Konneksiyonuna Adapte Olmuş Çatı

M nin burulmasız ∇ afin konneksiyonu ile $T_1^1(M)$ nin her $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda yeni bir çatı tanımlayabiliriz. Her bir $U(x^h) \subset M$ haritasında

$$X_{(j)} = \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^h \frac{\partial}{\partial x^h} \in \mathfrak{S}_0^1(M), j = 1, \dots, n;$$

$$A^{(\bar{j})} = \partial_i \otimes dx^j = \delta_i^k \delta_h^j \partial_k \otimes dx^h \in \mathfrak{S}_1^1(M), \bar{j} = n + 1, \dots, n + n^2$$

seçilirse, (3.3) ve (3.4)'ten bu vektör alanlarının $T_1^1(M)$ deki $\frac{\partial}{\partial x^H} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^h}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{h}}} \right\}$ doğal çatısına göre lokal gösterimleri

$${}^V A^{(\bar{j})} = \delta_i^k \delta_h^j \partial_{\bar{h}},$$

$${}^H X_{(j)} = \delta_j^h \partial_h + (-\Gamma_{ja}^k t_h^a + \Gamma_{jh}^a t_a^k) \partial_{\bar{h}} \quad (3.6)$$

olarak bulunur. Burada δ_i^j Kronecker deltasıdır. Bu $n + n^2$ tane vektör alanı lineer bağımsızdır ve sırasıyla $T_1^1(M)$ nin dikey dağılımı ile ∇ nın yatay dağılımını gerer.

Böylece $\{{}^H X_{(j)}, {}^V A^{\bar{j}}\}$, $T_S^r(M)$ için bir çatı olur ve bu kümeye $\pi^{-1}(U) \subset T_1^1(M)$ de tanımlı ∇ afin konneksiyonuna adapte olmuş çatı adı verilir (Salimov *et al.* 2009).

$e_{(j)} = {}^H X_{(j)}, e_{\bar{j}} = {}^V A^{\bar{j}}$ gösterimi kabul edilerek, adapte olmuş çatı $\{e_\beta\} = \{e_j, e_{\bar{j}}\}$ şeklinde yazılır. Buradaki β indisleri 1 ile $n + n^2$ arasında değişmektedir.

(3.6) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} {}^H X &= \begin{pmatrix} X^j \delta_j^h \\ -X^j (-\Gamma_{ja}^k t_h^a + \Gamma_{jh}^a t_a^k) \end{pmatrix} \\ &= X^j \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -\Gamma_{ja}^k t_h^a + \Gamma_{jh}^a t_a^k \end{pmatrix} = X^j e_{(j)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} {}^V A &= \begin{pmatrix} 0 \\ A_h^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^k \delta_h^j A_j^i \end{pmatrix} \\ &= A_j^i \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^k \delta_h^j \end{pmatrix} = A_j^i e_{\bar{j}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Böylece ${}^V A e {}^H X$ vektör alanlarının $\{e_\beta\}$ adapte olmuş çatısına göre koordinatları sırasıyla

$${}^V A = ({}^V A^\beta) = \begin{pmatrix} {}^V A^j \\ {}^V A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_j^i \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$${}^H X = ({}^H X^\beta) = \begin{pmatrix} {}^H X^j \\ {}^H X^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^j \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

olarak bulunur. Burada A_j^i , A nın; X^j de X in M deki lokal koordinatlarıdır (Salimov *et al.* 2009).

Lemma 3.4.1: $T_1^1(M)$ nin adapte olmuş çatısının Lie çarpımları aşağıdakileri sağlar:

$$\begin{aligned}
[E_l, E_j] &= (t_s^v R_{ijr}{}^s - t_r^s R_{ijs}{}^v) E_{\bar{r}}, \\
[E_l, E_{\bar{j}}] &= (\delta_r^j \Gamma_{li}^v - \delta_r^j \Gamma_{li}^v) E_{\bar{r}}, \\
[E_{\bar{l}}, E_{\bar{j}}] &= 0.
\end{aligned}$$

Burada $R_{ijr}{}^s$ ile M manifoldunun ${}^H \nabla$ afin konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri gösterilmektedir.

Önerme 3.4.2. $T_1^1(M)$ üzerinde tanımlı olan ${}^H \nabla$ yatay lift konneksiyonunun adapte olunmuş çatıya göre sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$${}^H \Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ij}^r, \quad {}^H \Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{r}} = \Gamma_{li}^v \delta_r^j - \Gamma_{lr}^j \delta_i^v.$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümdeki bulgular (Altunbaş *et al.* 2016) çalışmasında yayınlanmıştır.

4.1. (1, 1) –Tipli Tensör Demette Sasaki Metriği

Tanım 4.1.1: (M, g) bir Riemann manifoldu ve $T_1^1(M)$ onun (1,1) –tipli tensör demeti olsun. $\forall P \in M$ için $\pi^{-1}(P) = T_1^1(P)$ tensör uzayında g skaler çarpımının G ile gösterilen genişlemesi $G(A, B) = g_{it}g^{jl}A_j^iB_l^t$ şeklinde tanımlanır. Burada $A, B \in T_1^1(M)$ dir.

Tanım 4.1.2: $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ olmak üzere $T_1^1(M)$ de Sasaki metriği ${}^S g$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}^S g({}^V A, {}^V B) = {}^V (G(A, B)), \quad (4.1)$$

$${}^S g({}^V A, {}^H Y) = 0, \quad (4.2)$$

$${}^S g({}^H X, {}^H Y) = g(X, Y). \quad (4.3)$$

(4.1)-(4.3) eşitlikleriyle (3.9) ve (3.10) eşitliklerinin (1,1) –tipli tensör demetteki yazılımları kullanılarak, ${}^S g$ metriğinin ve tersinin $\{e_\alpha\}$ adapte olmuş çatısına göre bileşenleri

$$({}^S g)_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} ({}^S g)_{j\bar{l}} & ({}^S g)_{j\bar{l}} \\ ({}^S g)_{\bar{j}l} & ({}^S g)_{\bar{j}l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{j\bar{l}} & 0 \\ 0 & g_{it}g^{jl} \end{bmatrix}, x^{\bar{j}} = t_l^j \quad (4.4)$$

$$({}^S g)^{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} ({}^S g)^{j\bar{l}} & ({}^S g)^{j\bar{l}} \\ ({}^S g)^{\bar{j}l} & ({}^S g)^{\bar{j}l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{j\bar{l}} & 0 \\ 0 & g^{it}g_{jl} \end{bmatrix}, x^{\bar{j}} = t_j^i \quad (4.5)$$

şeklinde bulunur. Böylece ${}^S g$ metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları ile ilgili olarak aşağıdaki teorem yazılabilir:

Teorem 4.1.3: (M, g) , bir Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^S g)$ onun Sasaki metrikli $(1,1)$ –tipli tensör demeti olsun. Bu durumda, $T_1^1(M)$ nin Levi- Civita konneksiyonu olan ∇ aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{E_i} E_j &= \Gamma_{ij}^r E_r + \left\{ \frac{1}{2} R_{ljr} {}^s t_s^v - \frac{1}{2} R_{ljs} {}^v t_r^s \right\} E_{\bar{r}}, \\ \tilde{\nabla}_{E_i} E_{\bar{j}} &= \left\{ \frac{1}{2} g_{ia} R_{\cdot l}^{sj} {}^r t_s^a - \frac{1}{2} g^{jb} R_{isl} {}^r t_b^s \right\} E_r + \{ \Gamma_{li}^v \delta_r^j - \Gamma_{lr}^j \delta_i^v \} E_{\bar{r}}, \\ \tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_j &= \left\{ \frac{1}{2} g_{ta} R_{\cdot j}^{sl} {}^r t_s^a - \frac{1}{2} g^{lb} R_{tsj} {}^r t_b^s \right\} E_r, \\ \tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_{\bar{j}} &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Burada $R_{\cdot l}^{sj} {}^r = g^{as} g^{bj} R_{abl} {}^r$ dir (Salimov and Gezer 2011).

4.2. $(1,1)$ - tipli tensör demette Cheeger-Gromoll tipli metriğin Levi-Civita konneksiyonu

Tanım 4.2.1: $A, B \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ ve $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ olmak üzere Cheeger-Gromoll tipli metrik ${}^{CG}g$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}{}^{CG}g({}^H X, {}^H Y) &= {}^V (g(X, Y)), \\ {}^{CG}g({}^V A, {}^H Y) &= 0, \\ {}^{CG}g({}^V A, {}^V B) &= {}^V (aG(A, B) + bG(t, A)G(t, B))\end{aligned}\tag{4.7}$$

Burada, a ve b $a > 0$ and $a + b\tau > 0$ şartlarını sağlayan $\tau = \|t^2\| = g_{it} g^{jl} t_j^i t_t^l$ nun düzgün fonksiyonlarıdır.

Bu metriğin ve tersinin adapte olmuş çatıya göre bileşenleri

$$\begin{aligned}({}^{CG}g)_{\beta\gamma} &= \begin{pmatrix} ({}^{CG}g)_{jl} & ({}^{CG}g)_{j\bar{l}} \\ ({}^{CG}g)_{\bar{j}l} & ({}^{CG}g)_{\bar{j}\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{jl} & 0 \\ 0 & a g_{it} g^{jl} + b \bar{t}_i^j \bar{t}_t^l \end{pmatrix}, x^{\bar{l}} = t_l^t; \\ ({}^{CG}g)^{\beta\gamma} &= \begin{pmatrix} ({}^{CG}g)^{jl} & ({}^{CG}g)^{j\bar{l}} \\ ({}^{CG}g)^{\bar{j}l} & ({}^{CG}g)^{\bar{j}\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{jl} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} g^{it} g_{jl} - \frac{b}{a(a+b\tau)} t_j^i t_t^l \end{pmatrix}, x^{\bar{j}} = t_j^i\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\bar{t}_i^j = g^{jh} g_{ik} t_h^k$ dir.

Teorem 4.2.2: (M, g) , bir Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}g)$ onun Sasaki metrikli $(1,1)$ –tipli tensör demeti olsun. Bu durumda, $T_1^1(M)$ nin Levi- Civita konneksiyonu olan $\widehat{\nabla}$ aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{E_i} E_j &= \Gamma_{ij}^r E_r + \left\{ \frac{1}{2} R_{ljr}{}^s t_s^v - \frac{1}{2} R_{ljs}{}^v t_r^s \right\} E_{\bar{r}}, \\ \widehat{\nabla}_{E_i} E_{\bar{j}} &= \left\{ \frac{a}{2} g_{ia} R_{.l}{}^{sj}{}^r t_s^a - \frac{a}{2} g^{jb} R_{isl}{}^r t_b^s \right\} E_r + \{ \Gamma_{li}^v \delta_r^j - \Gamma_{lr}^j \delta_i^v \} E_{\bar{r}}, \\ \widehat{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_j &= \left\{ \frac{a}{2} g_{ta} R_{.j}{}^{sl}{}^r t_s^a - \frac{a}{2} g^{lb} R_{tsj}{}^r t_b^s \right\} E_r, \\ \widehat{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_{\bar{j}} &= L \left(\bar{t}_t^l \delta_r^j \delta_i^v + \bar{t}_i^j \delta_r^l \delta_t^v \right) + M g^{lj} g_{ti} t_r^v + N t_i^l \bar{t}_i^j t_r^v.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Bu metrikle ilgili daha fazla bilgi için (Peyghan *et al.* 2013) çalışmasına bakılabilir.

4.3. (1,1)- Tipli Tensör Demette Özel Vranceanu Konneksiyonları

Tanım 4.3.1: $\widetilde{\nabla}$, $T_1^1(M)$ üzerinde keyfi bir afın konneksiyon olsun. X ve Y , $T_1^1(M)$ de iki vektör alanı olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X^* \widetilde{Y} = H \widetilde{\nabla}_{H\widetilde{X}} H\widetilde{Y} + V \widetilde{\nabla}_{V\widetilde{X}} V\widetilde{Y} + H[V\widetilde{X}, H\widetilde{Y}] + V[H\widetilde{X}, V\widetilde{Y}]$$

şeklinde tanımlı konneksiyona konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonu denir.

$\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun katsayıları $\widetilde{\Gamma}_{L_j}^R$ ile gösterilirse $\widetilde{\nabla}$ ile birleşen Vranceanu konneksiyonunun sıfırdan farklı bileşenleri

$$\bar{\Gamma}_{lj}^r = \widetilde{\Gamma}_{lj}^r, \bar{\Gamma}_{l\bar{j}}^{\bar{r}} = \widetilde{\Gamma}_{l\bar{j}}^{\bar{r}}, \bar{\Gamma}_{\bar{l}j}^r = \widetilde{\Gamma}_{\bar{l}j}^r, \bar{\Gamma}_{\bar{l}\bar{j}}^{\bar{r}} = \widetilde{\Gamma}_{\bar{l}\bar{j}}^{\bar{r}} \quad (4.9)$$

olarak bulunur.

Şimdi $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu yerine Sasaki ve Cheeger-Gromoll tipli metriklerin Levi-Civita konneksiyonları alınarak, sırasıyla ${}^S\bar{\nabla}$ ve ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonları elde edilecektir.

(4.6) ve (4.8) denklemlerinin (4.9)'da yerine yazılmasıyla, bu konneksiyonların katsayıları sırasıyla

$${}^S\bar{\Gamma}_{lj}^r = \Gamma_{lj}^r, \quad {}^S\bar{\Gamma}_{lj}^{\bar{r}} = \Gamma_{li}^v \delta_r^j - \Gamma_{lr}^j \delta_i^v; \quad (4.10)$$

$${}^{CG}\bar{\Gamma}_{lj}^r = \Gamma_{lj}^r, \quad {}^{CG}\bar{\Gamma}_{lj}^{\bar{r}} = \Gamma_{li}^v \delta_r^j - \Gamma_{lr}^j \delta_i^v,$$

$${}^{CG}\bar{\Gamma}_{lj}^{\bar{r}} = L(\bar{t}_t^l \delta_r^j \delta_i^v + \bar{t}_i^j \delta_r^l \delta_t^v) + M g^{lj} g_{ti} t_r^v + N t_t^l \bar{t}_i^j t_r^v. \quad (4.11)$$

olarak bulunur. (4.10) denklemi ve Önerme 3.4.2'den aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 4.3.2: $T_1^1(M)$ üzerindeki Sasaki metriğiyle birleşen Vranceanu konneksiyonu ${}^S\bar{\nabla}$ ile yatay lift konneksiyonu ${}^H\nabla$ çakışır.

Yukarıdaki teoremden dolayı, bundan sonraki araştırmalar Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonu üzerine olacaktır.

Önerme 4.3.3: (M, g) , Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}\bar{\nabla})$ manifoldun, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonuna sahip (1,1)-tipli tensör demeti olsun. ${}^{CG}\bar{\nabla}$ nin simetrik olması için gerek ve yeter şart (M, g) nin lokal flat olmasıdır.

İspat: ${}^{CG}\bar{\nabla}$ nin burulma tensörü ${}^{CG}\bar{T}$, ${}^{CG}\bar{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = {}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - {}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X} - [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ denklemi ile bulunur. (4.11) eşitlikleri kullanılırsa ${}^{CG}\bar{T}$ nin tensörünün $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatısına

göre sıfırdan farklı bileşenleri ${}^{CG}\bar{T}_{lj}^{\bar{r}} = -R_{ljr}{}^s t_s^v + R_{ljs}{}^v t_r^s$, ${}^{CG}\bar{T}_{ij}^r = \frac{a}{2}(g_{ta}R_{.j}^{sl}{}^r t_s^a - g^{lb}R_{tsj}{}^r t_b^s)$ olarak bulunur. Bu eşitliklerdeki tüm terimler baz manifoldun eğrilik tensörüne bağlı olduğu için ispat tamamlanır.

Bir $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun ${}^{CG}g$ metriğine göre metrik konneksiyonu olması için gerek ve yeter şart

$${}^{CG}g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) = {}^{CG}g(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}) + \frac{1}{2}({}^{CG}g({}^{CG}\bar{T}(\bar{X}, \bar{Y}), \bar{Z}) - {}^{CG}g({}^{CG}\bar{T}(\bar{Y}, \bar{Z}), \bar{X}) - {}^{CG}g({}^{CG}\bar{T}(\bar{Z}, \bar{X}), \bar{Y}))$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. (4.8), (4.11) ve Önerme 4.3.3 ile aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.3.4: (M, g) Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}g)$ manifoldun, Cheeger-Gromoll metriğine sahip (1,1)-tipli tensör demeti olsun. Bu durumda ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonu, burulma tensörü Önerme 4.3.3'teki gibi olan tek metric konneksiyondur.

Önerme 4.4.4: (M, g) Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}\bar{\nabla})$ manifoldun, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonuna sahip (1,1)-tipli tensör demeti olsun. ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörünün tensörünün $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatısına göre sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$${}^{CG}\bar{R}_{mlj}{}^r = R_{mlj}{}^r,$$

$${}^{CG}\bar{R}_{mlj}{}^{\bar{r}} = R_{mli}{}^v \delta_r^j - R_{mlr}{}^j \delta_v^i + M(g_{ki}R_{.m}^{sjl} t_s^k - g^{hj}R_{mlis} t_h^s) t_r^v + L(R_{mls}{}^v t_r^s - R_{mlr}{}^s t_s^v) \bar{t}_i^j,$$

$${}^{CG}\bar{R}_{mlj}{}^{\bar{r}} = F_1(\bar{t}_n^m \bar{t}_i^j \delta_r^l \delta_t^v - \bar{t}_t^l \bar{t}_i^j \delta_r^m \delta_n^v) + F_2(g^{mj} g_{ni} \delta_r^l \delta_t^v - g^{lj} g_{ti} \delta_r^m \delta_n^v) + F_3(g^{lj} g_{ti} \bar{t}_n^m t_r^v - g^{mj} g_{ni} \bar{t}_t^l t_r^v),$$

olarak bulunur. Burada $F_1 := 2L' - L^2 - N(1 - L\tau)$,

$$F_2 := L - M(1 + L\tau) \quad \text{ve}$$

$$F_3 = 2M' + M^2 - N(1 - \tau M) \text{ dır.}$$

İspat: ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü

${}^{CG}\bar{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = {}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{X}}{}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - {}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{Y}}{}^{CG}\bar{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} - {}^{CG}\bar{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}\tilde{Z}$ eşitliği ile bulunur.

$\tilde{X} = (E_m, E_{\bar{m}}), \tilde{Y} = (E_l, E_{\bar{l}}), \tilde{X} = (E_j, E_{\bar{j}})$ alınır ve (4.11) eşitlikleri kullanılırsa istenen elde edilir.

${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörü ${}^{CG}\bar{R}_{\alpha\beta} = {}^{CG}\bar{R}_{\delta\alpha\beta}{}^{\delta}$ eşitliği ile bulunur. Yukarıdaki önerme göz önüne alınarak aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 4.4.5: (M, g) Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}\bar{\nabla})$ manifoldun, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonuna sahip (1,1)-tipli tensör demeti olsun. ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun Ricci tensörünün $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatısına göre sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$${}^{CG}\bar{R}_{lj} = R_{lj},$$

$${}^{CG}\bar{R}_{\bar{l}\bar{j}} = ((1 - n^2)F_1 - F_3)\bar{t}_i^j\bar{t}_t^l + ((1 - n^2)F_2 + \tau F_3)g^{lj}g_{ti}.$$

Sonuç 4.4.6: ${}^{CG}\bar{\nabla}$, konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart $(1 - n^2)F_1 - F_3 = 0$ olmasıdır.

${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun skaler eğriliği ${}^{CG}\bar{r} = {}^{CG}g^{\alpha\beta}{}^{CG}\bar{R}_{\alpha\beta}$ eşitliği ile bulunur. Böylece aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.4.7. (M, g) Riemann manifoldu ve $(T_1^1(M), {}^{CG}\bar{\nabla})$ manifoldun, Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonuna sahip (1,1)-tipli tensör demeti olsun. ${}^{CG}\bar{\nabla}$ konneksiyonunun skaler eğriliği aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\begin{aligned} {}^{CG}\bar{r} &= r + \left(\frac{\tau}{a} - \frac{b(trt^2)}{a(a+b\tau)} (1-n^2)F_1 - F_3 \right) \\ &+ \left(\frac{n^2}{a} - \frac{b\tau}{a(a+b\tau)} (1-n^2)F_2 + \tau F_3 \right). \end{aligned}$$

Burada r ile (M, g) nin skaler eğriliği gösterilmektedir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde, (1,1)-tipli tensör demette, daha önceden iyi bilinen Sasaki ve Cheeger-Gromoll tipli metriklerin Levi-Civita konneksiyonlarından yararlanılarak iki farklı Vranceanu konneksiyonu tanımlanmıştır. Sasaki metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonunun, baz manifoldun metriğinin Levi-Civita konneksiyonunun yatay lifti ile çakıştığı gösterilmiştir. Yatay lift konneksiyonun özellikleri önceden araştırıldığından daha çok Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ile birleşen Vranceanu konneksiyonu ile ilgilenilmiştir. Bu konneksiyonun katsayıları hesaplandıktan sonra bunlara bağlı olarak, burulma tensörü, eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğriliği hesaplanmıştır.

KAYNAKLAR

- Altunbaş, M., Gezer, A. and Doğan, E., 2016. The Vranceanu connections on the Riemannian $(1, 1)$ -tensor bundle. AIP Conference Proceedings, 1726, 020059 1-4.
- Altunbaş, M., 2014. Keyfi tpli tensör demetlerin geometrisi. Doktora tezi, Erzurum.
- Bejancu A. and Farran H.R., Foliations and Geometric structures, Springer, New York, 2006.
- Bishop, R. L. and Goldberg, S.I., 1968. Tensor analysis on manifolds. Dover Publications Inc, New York.
- Cengiz, N. and Salimov, A., 2002. Geodesics in the tensor bundle of diagonal lifts. Hacettepe J. of Math. and Stat., 31, 1-11
- Freeman, K., 2008. A historical overview of connections in geometry, Msc Thesis, Wichita State University.
- Kopuzlu, A. and Salimov, A., 1999. Geodesics in a tensor bundle. Turkish J. Math. 23 (2), 281-286.
- Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.
- Ledger, A. J. and Yano, K., 1967. Almost complex structures on tensor bundles. J. Diff. Geom., 1, 355-368.
- Mağden, A. and Salimov, A., 2001. Horizontal lifts of tensor fields to sections of tensor bundle. Russian Math. (Iz. Vuz.), 45 (3), 73-76.
- Peyghan, E., Tayebi, A. and Nourmohammadifar, L., 2013. Cheeger-Gromoll type metrics on the $(1,1)$ -tensor bundles. J. of Cont. Mat. Anal., 48 (6), 247- 258.
- Salimov, A. and Gezer, A., 2011. On the geometry of the $(1,1)$ -tensor bundle with Sasaki type metric. Chin. Ann. Math. Ser. B 32 (3), 369-386.
- Salimov, A., Gezer, A. and Akbulut, K., 2009. Geodesics of Sasakian metrics on tensor bundles. Mediterr. J. Math. 6 (2), 135-147.
- Salimov, A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel geometri. Aktif yayıncılık, Erzurum.
- Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel yayıncılık, Ankara.
- Şuhubi, E., 2008. Dış form analizi. TÜBA ders kitapları dizisi, Ankara.
- Yano, K. and Ishihara, S., 1973. Tangent and cotangent bundles. Marcel-Dekker Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

Elanur DOĞAN 1989 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2011 yılında mezun oldu. 2015 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü öğrenimine devam etmektedir.

