

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LIGHTLIKE (NULL) KONİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN
KARAKTERİZASYONLARI**

Esra Selcen YAKICI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2012**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LIGHTLIKE (NULL) KONİ ÜZERİNDEKİ EĞRİLERİN KARAKTERİZASYONLARI

Esra Selcen YAKICI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında bir lightlike (null, ışıksı) yüzey için eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, lightlike koni üzerindeki eğriler incelenmiş ve bu eğrilerle ilgili çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir.

Son bölümde ise 2-boyutlu ve 3-boyutlu lightlike koni üzerindeki eğilim çizgileri (helisler) incelenmiştir.

Haziran 2012, 110 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eğri, Lightlike koni, Konformal dönüşüm, Frenet formülleri, Eğrilik Fonksiyonu, Altmanifold.

ABSTRACT

Master Thesis

CHARACTERIZATIONS OF CURVES IN THE LIGHTLIKE (NULL) CONE

Esra Selcen YAKICI

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter, basic definitions and concepts are given.

In the third chapter, curve-surface curvatures are investigated for a lightlike surface in 3-dimensional Minkowski space.

In the fourth chapter, curves in the lightlike cone are investigated and various characterizations related to these curves are given.

The last chapter, helices in the 2-dimensional lightlike cone and 3-dimensional lightlike cone are investigated.

June 2012, 110 pages

Key Words: Curve, Lightlike cone, Conformal map, Frenet formulas, Curvature Function, Submanifold.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, bana her konuda yardımcı ve destek olan danışman hocam Doç. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ye, çalışmalarına verdikleri katkı ve desteklerinden dolayı değerli hocalarım Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya ve Yard. Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ne ve haftalık seminerlerimizde benimle birlikte olan arkadaşlarıma en derin duygularıyla minnetlerimi ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, matematik ve geometri bilimine büyük katkısı olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu (Bilecik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı)'ya da verdiği manevi desteklerinden dolayı şükranlarımı arz ederim.

Yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren başta kardeşlerim olmak üzere aileme ve dostlarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra Selcen YAKICI

Ankara, Haziran 2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	4
2.1 Yarı-Öklidyen Uzaylar	4
2.2 Yarı-Riemann Manifoldlar ve Lightlike Manifoldlar	13
2.3 Öklid ve Minkowski Uzayında Bir Eğrinin Eğrilikleri ve Frenet Çatıları	18
3. LIGHTLIKE YÜZEY İÇİN EĞRİ-YÜZEY İKİLİSİNİN EĞRİLİKLERİ.....	24
4. LIGHTLIKE KONİ ÜZERİNDE EĞRİLER	37
4.1 E_1^3 Minkowski Uzayında İki Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler.....	40
4.2 E_1^4 Minkowski Uzayında Üç Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler.....	62
4.3 E_1^{n+2} Minkowski Uzayında (n+1)-Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler	75
5. LIGHTLIKE KONİ ÜZERİNDE EĞİLİM ÇİZGİLERİ	82
5.1 E_1^3 Minkowski Uzayında İki Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğilim Çizgileri.....	82
5.2 E_1^4 Minkowski Uzayında Üç Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğilim Çizgileri.....	101
KAYNAKLAR	108
ÖZGEÇMİŞ.....	110

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{E}^n$	n –boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	3–boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	4–boyutlu yarı-Öklidyen (Minkowski) uzay
$\mathbb{E}_1^{n+2}$	$(n + 2)$ –boyutlu yarı-Öklidyen (Minkowski) uzay
Q^2	2–boyutlu lightlike koni
Q^3	3–boyutlu lightlike koni
Q^{n+1}	$(n + 1)$ –boyutlu lightlike koni
α	Eğri
$\{T, Z, Y\}$	Lightlike yüzey için eğri-yüzey çatısı
$\kappa_z, \kappa_y, \tau_y$	Eğri-yüzey eğrilikleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Lightlike koni (lightlike yüzey örneği)	2
Şekil 2.1 Yarı-Riemann küresi üzerinde geodezikler	12
Şekil 3.1 (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı	24
Şekil 4.1 Lightlike koni (Q^2) üzerinde koni eğriliği sıfır olan bir eğri	47
Şekil 5.1 Q^2 üzerinde lightlike eksenli eğilim çizgisi	92
Şekil 5.2 Q^2 üzerinde spacelike eksenli eğilim çizgisi	94
Şekil 5.3 Q^2 üzerinde timelike eksenli eğilim çizgisi	96



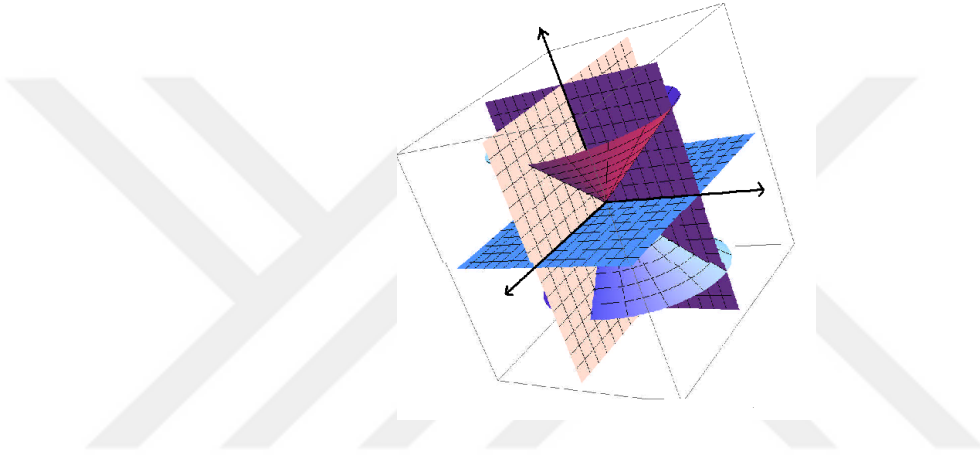
1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride manifoldlar, altmanifoldlar ve bunlar üzerinde eğriler teorisi oldukça önemli bir yer tutar. Eğer bir manifoldun tanjant demeti üzerinde pozitif tanımlı, simetrik, bilineer tensör varsa bu durumda manifolda Riemann manifoldu adı verilir. 1970 li yıllarda manifold üzerindeki metrik tensör alanının pozitif veya negatif olma durumu göz önüne alınmış ve Riemann manifoldlara ait özellikler bu manifoldlarda incelenmiş, ayrıca bu tür manifoldlara yarı-Riemann manifold denilmiştir. Bu tür manifoldlara ait çalışmalar B. O'Neill tarafından "Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity" adlı kitabında derlenmiştir. Yarı-Riemann manifold üzerinde indirgenen metrik tensör alanı altmanifoldun tanjant demeti üzerinde pozitif ise spacelike altmanifold, negatif ise timelike altmanifold olarak adlandırılır. Bir yarı-Riemann manifold üzerindeki metrik tensör alanı, bu manifoldun keyfi bir altmanifoldu üzerine her zaman nondejenere bir metrik tensör indirgemez, yarı-Riemann manifold, altmanifold üzerine sadece simetrik, bilineer bir dönüşüm indirger. Eğer indirgenen bilineer dönüşüm dejenere ise altmanifold, lightlike (null, ışıksı) altmanifold olarak adlandırılır (Duggal ve Şahin 2010).

E^n , n -boyutlu Öklid uzayı, üzerinde simetrik, bilineer, nondejenere ve indeksi 1 olan metrik ile birlikte Minkowski n -uzayı adını alır. Bu uzayda sıfırdan farklı bir vektörün uzunluğu sıfır ise vektör lightlike (null, ışıksı) olarak adlandırılır. Minkowski uzayındaki bir yüzeyin normal vektörü lightlike ise yüzey lightlike yüzey olarak bilinir.

Yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir eğrinin karakteri o eğriye ait hız vektörüne göre spacelike, timelike ve lightlike eğri olarak adlandırılır. Bu yüzden yarı-Riemann manifoldu üzerindeki altmanifoldlar gibi eğriler de tek tip değildirler.

Lightlike yüzeye ait güzel bir örnek olan lightlike koni (Şekil 1.1) ile ilgili; L.L. Kong ve D.H.Pei tarafından "On spacelike curve in nullcone 3-space" isimli makalede lightlike koni üzerindeki spacelike eğriler incelenmiştir; C.Takizawa ve K. Tsukada tarafından "Horocyclic Surfaces In Hyperbolic 3-Space" adlı çalışmada $\mathbb{R}_1^4$ de lightlike koni üzerindeki spacelike eğri için Frenet formülleri verilmiştir; ayrıca H. Liu lightlike koni üzerindeki koni eğrilerini inceleyerek 2 ve 3-boyutlu lightlike koni üzerinde eğri örnekleri vermiştir.



Şekil 1.1 Lightlike koni (lightlike yüzey örneği)

Bir hiperyüzeyin normali bir lightlike koniye teğet ise lightlike hiperyüzey olarak adlandırılır. Lightlike hiperyüzeyler için indirgenmiş metrik her yerde degeneredir (Kossowski 1989). Lightlike hiperyüzeyler 1961 yılında R. Penrose tarafından fiziksel açıdan ele alınarak, lightlike hiperyüzeyler için başlangıç değer problemleri verilmiştir. Minkowski uzayında lightlike hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisi üzerine ilk çalışmalar 1972 yılında Rosca ve Bonnor tarafından yapılmıştır. Minkowski uzayında "The Intrinsic Conformal Structure and Gauss Map of a Light-like Hypersurface in Minkowski Space" adlı çalışmasında Kossowski (1989), fiziksel matematikle ilgilenmiş ve daha önce bu konu ile ilgili çalışmaları olan R. Bryant, R. Harvey, R. Penrose, R. O. Wells den ilham alarak lightlike koni ve lightlike hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisi üzerine geniş bilgiler vermiştir.

Lightlike hiperyüzeyin normali, hiperyüzeyin teğet düzlemindedir. Burada temel problem, tanjant demete tümleyen olan bir vektör alanının Riemann geometrideki yolla elde edilememesidir. Böyle bir vektör alanının varlığı Bejancu ve Duggal (1996) tarafından ortaya koyulmuştur.

Lightlike hiperyüzeylerin geometrisi spacelike ve timelike hiperyüzeylerin geometrisinden oldukça farklıdır. Lightlike geometri genel olarak, Özel ve Genel Rölativite teorisinde olduğu kadar elektromagnetizma teorisine, Kerr karadelikleri ve Kruscal'ın olay horizonları gibi bazı özel konularda da gerekli olan matematiksel altyapıyı oluşturduğu için oldukça önemlidir.

Bu çalışmada lightlike koni üzerindeki eğriler incelenmiş ve çeşitli karakterizasyonlar elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamıza esas olan kavramlarla ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1 Yarı-Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

- i. $g(u, v) = g(v, u)$,
- ii. $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$
 $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$,

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2 V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form g , $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

- i. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) > 0$ ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde pozitif tanımlı,
- ii. $\forall v \in V, v \neq 0$ için $g(v, v) < 0$ ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde negatif tanımlı,
- iii. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde yarı-pozitif tanımlı,
- iv. $\forall v \in V$ için $g(v, v) \leq 0$ ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde yarı-negatif tanımlı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.3 V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilinear form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere $\forall v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

ise g simetrik bilinear formuna V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye nondejeneredir denir. Yani, g nin nondejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in V$ için

$$g(u, v) = 0 \text{ iken } v = 0$$

olmasıdır (Duggal ve Bejancu 1996).

V nin bir alt uzayı W alınrsa, g bu altuzay üzerine kısıtlanabilir. g nin W üzerine kısıtlanmış da bir simetrik bilinear formdur, $g|_W$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.4 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde tanımlı

$$g : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve nondejenere ise g ye V üzerinde bir skalar çarpım denir. V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpım g ise (V, g) ikilisine de skalar çarpım uzayı denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.5 V vektör uzayının bir altuzayı W olsun.

$$W^\perp = \{v \in V \mid v \perp W\}$$

uzayı da V nin bir alt uzayıdır. $W^\perp$ altuzayına W nin diki denir. Her zaman $W^\perp$, W nin ortogonal tümleyeni olmayabilir (O'Neill 1983).

Lemma 2.1.1 V vektör uzayının bir altuzayı W nondejeneredir ancak ve ancak V , W ve $W^\perp$ altuzaylarının direkt toplamı şeklinde yazılabilir (O'Neill 1983). Yani, $V = W \oplus W^\perp$ için $V = W + W^\perp$ ve $W \cap W^\perp = \{0\}$ şartları sağlanır.

Lemma 2.1.2 (V, g) bir g nondejenere metriği ile bir metrik uzay olsun.

- i. Eğer $W \subset V$ bir altuzay ise $\text{boy}(W^\perp) = \text{boy}(V) - \text{boy}(W)$ dir.
- ii. Eğer $W \subset V$ bir alt uzay ise $(W^\perp)^\perp = W$ dir.
- iii. Eğer $W \subset V$ nondejenere altuzay ise $(W^\perp)$ de bir nondejenere altuzaydır (O'Neill 1983, Lopez 2008).

Tanım 2.1.6 V bir skalar çarpım uzayı, W da üzerindeki skalar çarpım $g|_W$ negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu alt uzayı olsun. Bu durumda W nin boyutuna g skalar çarpımın indeksi denir. g skalar çarpımın indeksi q ise $0 \leq q \leq \text{boy}V$ olduğu açıktır. Ayrıca V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı g skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.7 V vektör uzayı üzerindeki skalar çarpım g olmak üzere g nin indeksi q olmak üzere $q = 1$ ve $\text{boy}V \geq 2$ ise g ye Lorentz metriği V skalar çarpım uzayına bir Lorentz uzayı denir.

Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.8 V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilinear form olsun. V nin

$$\text{Rad}V = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzayına, g simetrik bilinear formuna göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.9 V bir lightlike vektör uzayı ve $\text{Rad}V$, V vektör uzayının radikali olsun. Radikal uzaya tümleyen olan nondejenere altuzaya perde uzay denir ve SV ile gösterilir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.10 V bir reel vektör uzayı ve W da V nin altuzayı olsun. $g|_W$ dejenere ise W ya lightlike (dejenere) altuzay denir ve

$$W \cap W^\perp \neq \{0\}$$

dır. Burada,

$$W^\perp = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W uzayının dike denir (Duggal ve Bejancu 1996).

Teorem 2.1.1 V bir yarı-Öklidyen uzay ve W , V nin bir altuzayı olsun. O zaman,

$$RadW = RadW^\perp = W \cap W^\perp$$

dır (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.11 V bir Lorentz uzayı ve g , V üzerinde bir skalar çarpım olsun. $\forall v \in V$ için,

- i. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v ye spacelike vektör,
- ii. $g(v, v) < 0$ ise v ye timelike vektör,
- iii. $v \neq 0$ iken $g(v, v) = 0$ ise v ye lightlike vektör

denir (O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.12 V bir skalar çarpım uzayı ve $v \in V$ olsun.

$$\|v\| = \sqrt{|g(v, v)|} \tag{2.1.1}$$

eşitliği ile tanımlı $\|v\|$ reel sayısına v vektörünün normu denir. Normu 1 olan vektöre de birim vektör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.13 V bir Lorentz uzayı ve W , V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda

- i. $g|_W$ pozitif tanımlı ise W ya spacelike alt uzay,
- ii. $g|_W$ nondejenere ve indeksi 1 ise W ya timelike alt uzay,
- iii. $g|_W$ dejenere ise W ya lightlike alt uzay

denir (O'Neill 1983).

Lemma 2.1.3 V bir Lorentz uzayı, V nin bir alt uzayı W ve $\text{boy}W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler:

- i. W timelike alt uzay ise W bir Lorentz vektör uzayıdır.
- ii. W alt uzayı iki tane lineer bağımsız lightlike vektör içerir.
- iii. W uzayı bir tane timelike vektör içerir (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.1 V bir Lorentz uzayı, V nin bir alt uzayı W ve $\text{boy}W \geq 2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler birbirine denktirler:

- i. W lightlike altuzayıdır.
- ii. W lightlike vektör içerir, ancak timelike vektör içermez.
- iii. $W \cap Q = L - \{0\}$ ve $\text{boy}L = 1$. Burada L bir-boyutlu altuzay ve Q , V nin lightlike konisidir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.14 M , n boyutlu reel diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0, 2)$ -tipinden g tensör alanına bir metrik tensör denir. Başka bir deyişle g , M manifoldunun her p noktasına T_pM tanjant uzayı üzerinde, bir

$$g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

skalar çarpımı karşılık getirir ve g skalar çarpımın indeksi her $p \in M$ için aynıdır

(O'Neill 1983, Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.1.15 $\mathbb{E}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı üzerinde

$$g(u, v) = \langle u, w \rangle = - \sum_{i=1}^q u_i w_i + \sum_{j=q+1}^n u_j w_j, \quad 0 \leq q \leq n \quad (2.1.2)$$

eşitliğiyle verilen q -indeksli metrik tensörle birlikte elde edilen $(\mathbb{E}^n, \langle, \rangle)$ ikilisine yarı-Öklidyen uzay denir ve $\mathbb{E}_q^n$ ile gösterilir. $q = 0$ ise $\mathbb{E}^n$ e indirgenir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.16 Eğer $\mathbb{E}_q^n$ uzayında $n \geq 2$ ve $q = 1$ ise $\mathbb{E}_1^n$ yarı-Öklidyen uzayına Minkowski n -uzayı denir.

Özel olarak $n = 3$ ve $q = 1$ alınır, $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{E}^3, \langle, \rangle)$ olup $u = (u_1, u_2, u_3)$,
 $w = (w_1, w_2, w_3)$ için

$$g(u, w) = \langle u, w \rangle = -u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanır (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.2 V skalar çarpım uzayı ve $v \in \mathbb{E}_1^3$ vektörü alınsın.

- i. v bir timelike vektördür ancak ve ancak $\langle v \rangle^\perp$ spacelike altuzaydır ve böylece $\mathbb{E}_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde, spacelike vektörler için de v bir spacelike vektördür ancak ve ancak $\langle v \rangle^\perp$ timelike vektördür yani $\mathbb{E}_1^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ şeklinde yazılabilir.
- ii. $W \subset V$, bir altuzay olsun. W spacelike altuzaydır ancak ve ancak $W^\perp$ timelike altuzaydır.
- iii. W bir altuzay olsun. W lightlike altuzaydır ancak ve ancak $W^\perp$ lightlike altuzaydır (Lopez 2008).

Önerme 2.1.3 V skalar çarpım uzayı olmak üzere $W \subset V$ altuzayı ve $u, v \in \mathbb{E}_1^3$ vektörleri alınsın.

- i. u ve v iki lightlike vektör olmak üzere, u ve v lineer bağımlıdır ancak ve ancak $\langle u, v \rangle = 0$ dır.
- ii. Eğer u ve v , $\langle u, v \rangle = 0$ eşitliği ile iki timelike veya lightlike vektör ise bunlar lightlike vektörlerdir.
- iii. Eğer W lightlike altuzay ise $\text{boy}(W \cap W^\perp) = 1$ dir (Lopez 2008).

Önerme (2.1.2) ve (2.1.3), $\mathbb{E}_1^3$ özel halinin yanısıra $\mathbb{E}_1^n$ Minkoski n -uzayı için de geçerlidir.

Tanım 2.1.17 $u, v, w \in \mathbb{E}_1^3$ olsun. $u \times v$ ile gösterilen vektör eğer,

$$\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \quad (2.1.4)$$

şartını sağlarsa bu vektöre u ile v nin Lorentz anlamında vektörel çarpımı adı verilir.

Burada $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere

$$u \times v = (u_3v_2 - u_2v_3, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

dır (Lopez 2008).

Önerme 2.1.4 $\mathbb{E}_1^3$ de Lorentz anlamındaki vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar (Lopez 2008):

- i. $u \times v = -v \times u$.
- ii. $u \times v$ u ve v ye ortogonaldır.
- iii. $u \times v \neq 0$, $P = \langle u, v \rangle$ düzleminde yatar ancak ve ancak P lightlike düzlemdir.

Önerme 2.1.5 $\mathbb{E}_1^3$ de bir P düzlemi ele alınsın. P düzlemine dik olan vektör n ile gösterilsin. O halde P bir spacelike (sırasıyla timelike, lightlike) düzlemdir ancak ve ancak n bir timelike (sırasıyla spacelike, lightlike) vektördür (Lopez 2008).

Tanım 2.1.18 M , düzgün, bağlantılı bir yüzey ve $x : M \rightarrow \mathbb{E}_1^3$ bir immersiyon olsun. Yani; $dx_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ türev dönüşümü birebir olan diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. M yüzeyinin bir p noktasındaki $T_p M$ tanjant düzlemi $dx_p(T_p M)$ ile birlikte tanımlanır. g_p tanjant düzleminde tanımlı metrik olmak üzere,

$$g_p = \langle u, v \rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v) \rangle$$

$(T_p M, \langle \cdot, \cdot \rangle_p)$ uzayındaki metrik x dönüşümünün durumuna göre değişir.

- i. $T_p M$ spacelike bir düzlem yani, g_p pozitif tanımlı,
- ii. $T_p M$ timelike bir düzlem yani, g_p indeksi 1 olan bir metrik,
- iii. $T_p M$ lightlike bir düzlem yani, g_p dejenere bir metriktir (Lopez 2008).

Tanım 2.1.19 $\mathbb{E}_1^{n+1} - \{0\}$ de bir vektör n ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, normal vektörü n ile birlikte bir hiperdüzlem

$$HP(n, c) = \{x \in \mathbb{E}_1^{n+1} \mid \langle x, n \rangle = c\}$$

şeklindedir. Eğer;

- i. n normal vektörü timelike ise, $HP(n, c)$ spacelike hiperdüzlem,
- ii. n normal vektörü spacelike ise, $HP(n, c)$ timelike hiperdüzlem,
- iii. n normal vektörü lightlike ise, $HP(n, c)$ lightlike hiperdüzlem olarak adlandırılır (Izumiya ve Yıldırım 2011).

Tanım 2.1.20 $\mathbb{E}_q^n$, q indeksli yarı-Öklidyen uzayda sabit bir nokta c ve $r > 0$ bir sabit olsun. $n \geq 2$ ve $0 \leq q \leq n$ için;

i) $\mathbb{E}_q^{n+1}$ de yarıçapı r olan,

$$S_q^n(c, r) = \{x \in \mathbb{E}_q^{n+1} \mid \langle x - c, x - c \rangle = r^2\}$$

şeklinde tanımlı n boyutlu q indeksli hiperkuadriğe yarı-Riemann küre denir.

ii) $\mathbb{E}_{q+1}^{n+1}$ de yarıçapı r olan,

$$H_q^n(c, r) = \{x \in \mathbb{E}_{q+1}^{n+1} \mid \langle x - c, x - c \rangle = -r^2\}$$

şeklinde tanımlı n - boyutlu q -indeksli hiperquadriğe yarı-Riemann hiperbolik uzay denir (O'Neill 1983).

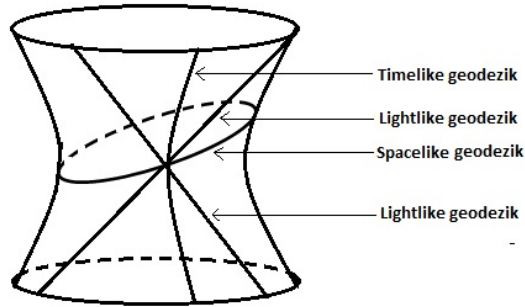
Tanım 2.1.21 $\mathbb{E}_q^n$, q indeksli yarı-Öklidyen uzayda sabit bir nokta c ve $r > 0$ bir sabit olsun. $n \geq 2$ ve $0 \leq q \leq n$ için,

$$Q_q^n(c) = \{x \in \mathbb{E}_{q+1}^{n+1} \mid \langle x - c, x - c \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlı n - boyutlu q -indeksli hiperyüzeye yarı-Riemann lightlike koni denir (O'Neill 1983).

Önerme 2.1.6 $\gamma, S_q^n(r) \subset \mathbb{E}_q^{n+1}$ de sabit olmayan bir geodezik eğri olsun;

- (1) Eğer γ timelike ise $\mathbb{E}_q^{n+1}$ de bir hiperbolün bir dalının parametrizasyonudur.
- (2) Eğer γ lightlike ise bu bir (lightlike) doğru olup, $\mathbb{E}_q^{n+1}$ de bir geodeziktir.
- (3) Eğer γ spacelike ise $\mathbb{E}_q^{n+1}$ de bir elipsin periyodik parametrizasyonudur (O'Neill 1983).



Şekil 2.1 Yarı-Riemann küresi üzerinde geodezikler (O'Neill 1983)

2.2 Yarı-Riemann Manifoldlar ve Lightlike Manifoldlar

Tanım 2.2.1 M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki (C^∞) vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye (C^∞) fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$\langle, \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, bilinear $\langle, \rangle$ fonksiyona M üzerinde bir iç çarpım, metrik tensör, diferensiyellenebilir metrik veya Riemann metriği denir. $(M, \langle, \rangle)$ ikilisine de bir Riemann manifoldu denir (Hacısalıhoğlu 2004).

Tanım 2.2.2 M bir diferensiyellenebilir (C^∞) manifold olsun. M üzerindeki (C^∞) vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye (C^∞) fonksiyonların uzayı $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, M üzerinde

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

simetrik bilinear form olsun. Eğer g formu

$$\forall X \in \chi(M) \text{ için } g(X, Y) = 0 \Rightarrow Y = 0$$

özelini sağlıyorsa g tensörüne bir yarı-Riemann metriği ve (M, g) ikilisine de yarı-Riemann manifoldu denir (Hacısalıhoğlu 2004, O'Neill 1983). Yarı-Riemann manifoldu kısaca M ile gösterilebilir.

Tanım 2.2.3 Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir. Eğer indeks q ise $0 \leq q \leq \dim M$ dir. Özel olarak, $q = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g|_p, T_p M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir Riemann manifoldu olur. $q = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir Lorentz manifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.4 M , (C^∞) , n boyutlu bir manifold olsun. M nin her p noktasına, $T_p M$ teğet uzayının r boyutlu bir D_p alt uzayını karşılık getiren

$$\begin{aligned} D &: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M \\ p &\rightarrow D(p) = D_p \subset T_p M \end{aligned}$$

dönüşümüne, M üzerinde r -boyutlu dağılım denir.

X , M manifoldunun üzerinde bir vektör alanı olmak üzere her $p \in M$ için $X(p) \in D_p$ oluyorsa, X D nin kesitidir (yani X vektör alanı D ye aittir) denir. $X \in \Gamma(D)$ ile gösterilir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.2.5 M , (C^∞) , n boyutlu bir manifold olsun. Eğer her $p \in M$ noktası için D_p de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D dağılımına diferensiyellenebilirdir denir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.2.6 M reel, n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, g de M üzerinde $(0, 2)$ tipinde simetrik tensör alanı olsun. Ayrıca, $\forall u \in M$ noktasına, $T_u M$ üzerinde karşılık gelen g_u simetrik bilinear formu, sabit q indeksli olsun. Bir $u \in M$ noktasında,

$$RadT_u M = \{\xi \in T_u M : g(\xi, v) = 0, \forall v \in T_u M\}$$

olmak üzere, eğer

$$RadTM : M \rightarrow \bigcup_{u \in M} T_u M$$

dönüşümü M üzerinde $r > 0$ ranklı diferensiyellenebilir bir dağılım tanımlıyorsa, M ye r -lightlike (r -dejenere) manifold, g ye de r -lightlike (r -dejenere) metrik denir. Bu durumda $RadTM$ dağılımına, M manifoldunun radikal dağılımı denir (Duggal ve Şahin 2010).

Tanım (2.2.6) uyarınca

$$g(\xi, X) = 0, \quad \forall \xi \in \Gamma(RadTM), \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

dır.

Lemma 2.2.1 M , n -boyutlu diferensiyellenebilir manifoldunun r -lightlike olması için gerek ve yeter şart, g nin M üzerinde $(n - r)$ rankına sahip olmasıdır (Duggal ve Şahin 2010).

$boyRadTM = r < n$ olduğundan, $RadTM$ demetini TM demetine tümleyen bir $S(TM)$ demeti alınsın. $S(TM)$ nin lifleri, $x \in M$ olmak üzere $T_x M$ uzayının perde altuzayları olduğundan, $S(TM)$ bir dağılımdır ve bu dağılıma M üzerinde perde dağılımı adı verilir (Duggal ve Bejancu 1996).

Tanım 2.2.7 M ve $\bar{M}$, sırasıyla, n ve $(n + d)$ -boyutlu (C^∞) manifoldlar olmak üzere $x : M \rightarrow \bar{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p \in M$ için

$$dx_p : T_p M \rightarrow T_{x(p)} \bar{M}$$

türev dönüşümü bire bir ise x fonksiyonuna bir immersiyon denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.8 M ve $\bar{M}$, sırasıyla, n ve $(m + n)$ -boyutlu (C^∞) manifoldlar ve $x : M \rightarrow \bar{M}$ dönüşümü bir immersiyon olsun. $\bar{M}$ manifoldu bir Riemann yapıya sahip ise x yardımıyla $\bar{M}$ den indirgenen metrik için, $\forall p \in M$ olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle dx_p, dx_p \rangle_{|x(p)}, \quad \forall X, Y \in T_p M$$

eşitliği sağlandığında x e bir izometrik immersiyon denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.9 $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir (C^∞) altmanifoldu M ve $\bar{M}$ deki metrik $\bar{g}$ olsun. $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$, $p \rightarrow \varphi(p)$ immersiyon dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü $T_p M \xrightarrow{\varphi_*|_p} T_{\varphi(p)} \bar{M}$ ve ek dönüşümü de $T_p M^* \xleftarrow{\varphi^*|_p} T_{\varphi(p)}^* \bar{M}^*$ olmak üzere

$$\varphi_{|p}^* (\bar{g}_{|p}) (X_p, Y_p) = \bar{g}(\varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p))_{|p}, \quad \forall X_p, Y_p \in T_p M$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi_{|p}^* (\bar{g}_{|p})$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.10 M , $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için

$$T_p M^\perp = \{V_p \in T_p \bar{M} : \bar{g}_p(V_p, W_p) = 0, \forall W_p \in T_p M\}$$

uzayının boyutuna M nin dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu), $T_p M^\perp$ in indeksine de M nin dik tümleyeninin indeksi denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.10 $\bar{M}$, bir yarı-Riemann manifold olsun. $\bar{M}$ nin dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu) 1 olan yarı-Riemann altmanifolduna, $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi denir (veya n -boyutlu bir yarı-Riemann manifoldunun $(n-1)$ -boyutlu bir $\bar{M}$ yarı Riemann altmanifolduna M nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi denir) (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.11 $(\bar{M}, \bar{g})$ reel $(m+n)$ -boyutlu yarı-Riemann manifoldu ($n > 0$), $\bar{g}$, $q \in \{1, \dots, m+n-1\}$ sabit indeksli yarı-Riemann metrik ve M , $\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. $\bar{g}$ metriğinin altmanifold üzerine indirgenmiş olduğu tensör alanı g ile gösterilsin. $p \in M$ için

$$T_p M^\perp = \{V_p \in T_p \bar{M} : \bar{g}_p(V_p, W_p) = 0, \forall W_p \in T_p M\}$$

ile tanımlanan dik uzay göz önüne alınırsa, $\bar{g}_p$, $T_p M^\perp$ de nondejenere olduğunda

$T_p M$ ve $T_p M^\perp$ uzayları nondejenere ve $T_p \bar{M}$ uzayının tümleyen ortogonal altuzaylarıdır. Diğer durumda $T_p M$, $T_p M^\perp$ ortogonal uzaylar, fakat tümleyen değildirler. Bu durumda

$$RadT_p M = RadT_p M^\perp = T_p M \cap T_p M^\perp$$

dır (Duggal ve Şahin 2010).

Tanım 2.2.12 M , $(m+n)$ -boyutlu $\bar{M}$ yarı Riemann manifoldunun hiperyüzeyi olsun. $RadT_p M \neq \{0\}$ ise M ye $\bar{M}$ nin lightlike (ışıklı) hiperyüzeyi denir.

M bir lightlike (ışıklı) hiperyüzey ise her $p \in M$ için $T_p M^\perp$, teğet uzayın içinde 1 boyutlu lightlike bir doğrultudur. O halde $TM^\perp \subset TM$ dir.

Tanım 2.2.13 $TM^\perp$ vektör demetini TM içinde TM demetine tümleyen $S(TM)$ tümleyen vektör demeti göz önüne alınırsa

$$TM = S(TM) \oplus TM^\perp$$

dir. Her bir $S(TM)_p$, $T_p M$ uzayının altuzayı olduğundan, $S(TM)$ demetine M üzerinde perde vektör demeti denir.

Tanım 2.2.13 $(m+n)$ -boyutlu bir yarı-Riemann $\bar{M}$ manifoldunun eş boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. $\forall p \in M$ için

$$Rad : p \in M \rightarrow RadT_p M$$

dönüşümü, M üzerinde rankı $r > 0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir dağılım tanımlıyorsa M ye r -lightlike altmanifold denir (Duggal ve Bejancu 1996).

Lightlike altmanifoldlar teorisi ile Riemann ve yarı-Riemann altmanifoldlar arasındaki temel fark, lightlike durumda $TM^\perp$ demetinin bir kısmının TM demetinde kalmasıdır.

2.3 Öklid ve Minkowski Uzayında Bir Eğrinin Eğrilikleri ve Frenet Çatıları

Tanım 2.3.1 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ olsun. Buna göre,

$$k_i : I \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i < r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu denir. $\forall s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.3.1 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ve i -yinci eğriliği $k_i(s)$ ise;

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$$

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

dir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.3.2 $n = 3$ özel hali için $\mathbb{E}^3$ de M eğrisi (I, α) komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere;

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$s \rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet üç ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ için

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) &= \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \end{aligned}$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000). Burada $T(s), N(s)$ ve $B(s)$, sırasıyla, eğrinin teğet, asli normal ve binormal vektörü olarak adlandırılır.

Teorem 2.3.3. $\mathbb{E}^3$ de M eğrisi (I, α) komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere;

$$\begin{aligned} \alpha &: I \rightarrow \mathbb{E}^3 \\ s &\rightarrow \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Frenet üç ayaklısı $\{T(s), N(s), B(s)\}$ için bu Frenet vektörlerinin kovaryant türevleri yine kendileri cinsinden ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} T'(s) &= k_1(s)N(s) \\ N'(s) &= -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s) \\ B'(s) &= -k_2(s)N(s) \end{aligned}$$

Yukarıda verilen eşitliklere Frenet formülleri adı verilir. Burada,

$$\begin{aligned} k_1 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow k_1(s) = \|\alpha''(s)\| \end{aligned}$$

eğrinin $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında eğriliği olup, genelde κ ile gösterilir;

$$\begin{aligned} k_2 &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow k_2(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle \end{aligned}$$

eğrinin $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında burulması (torsiyonu) olup, genelde τ ile gösterilir.

Frenet formülleri (eşitlikleri):

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Öklid uzayında olduğu gibi $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında da eğrinin geometrisi herhangi bir noktadaki ortonormal bazı ile tanımlanabilir (Lopez 2008).

Tanım 2.3.4 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir (yani, bir α eğrisi için, her $t \in I \subset \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ oluyorsa α ya regüler eğri denir) (Hacısalıhoğlu 2000).

Önerme 2.3.1 Herhangi timelike ya da lightlike eğri regülerdir (Lopez 2008).

Dolayısıyla spacelike bir eğrinin her zaman regüler olduğu söyleyemeyiz ancak aksi belirtilmedikçe çalışmamız boyunca eğrileri regüler eğri olarak ele alacağız.

Yay parametresi ile parametrelendirilmiş regüler bir α eğrisini göz önüne alalım. s , α eğrisinin yayparametresini göstermek üzere $T(s) = \alpha'(s)$ vektörü $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektörü olarak adlandırılır ve $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ dır. Herbir s için $T'(s) \neq 0$ ve $T'(s)$, $T(s)$ ile orantılı olmadığı kabul edilecektir. Bu eğrinin düz bir doğru olmasından kaçınmak içindir (Lopez 2008).

$\alpha(s)$ eğrisinin timelike olması durumu:

α bir timelike eğri olsun. Bu durumda $T'(s) \neq 0$ $T(s)$ den bağımsız spacelike bir vektördür. α nın s deki eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ile tanımlanır. Normal vektörü $N(s)$, $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ile tanımlanır, ayrıca buradan $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ şeklindedir. Binormal vektör $B(s) = T(s) \times N(s)$ ile ifade edilir, bu şartları sağlayan $B(s)$ vektörü birim spacelike vektördür. Herbir s için, $\{T, N, B\}$ $\mathbb{E}_1^3$ uzayının ortonormal bir bazıdır ve α eğrisinin Frenet üçlüsü (çatısı) olarak adlandırılır. α nın s noktasındaki torsiyonu $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ ile tanımlanır.

Frenet üçlüsündeki herbir vektör fonksiyonunun s ye göre türevleri alınırsa ve türevlerin Frenet üçlüsündeki (çatısındaki) vektörlerle ilgisi ortaya koyulursa, Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir (Lopez 2008). $\alpha(s)$ eğrisinin timelike olması durumu için Frenet üçlüsündeki vektörler T, N, B , sırasıyla, timelike, spacelike, spacelike vektörlerdir. Lightlike koni üzeride spacelike eğri inceleyeceğimiz için α spacelike eğri olmak üzere eğrinin Frenet üçlüsü çalışmamız için önem taşımaktadır.

$\alpha(s)$ eğrisinin spacelike olması durumu:

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili spacelike bir eğri olmak üzere, Frenet eşitlikleri $T(s) = \alpha'(s)$ teğet vektörünün türevinin $T'(s)$ in karakterine bağlı olarak üç durumda verilir (Lopez 2008).

- i. $T'(s)$ spacelike vektör olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin yay parametresi s için eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$, normal vektörü $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$ dir. $\alpha(s)$ eğrisinin yay parametresi s için binormal vektörü de $B(s) = T(s) \times N(s)$ ile ifade edilir. Frenet

eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dır. Burada eğrinin torsiyonu $\tau(s) = -\langle N'(s), B(s) \rangle$ ile tanımlanır. Bu durumda Frenet üçlüsündeki vektörler T, N, B , sırasıyla, spacelike, spacelike, timelike vektörlerdir.

ii. $T'(s)$ timelike vektör olsun. Normal vektörü $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$ olmak üzere, burada α nın eğriliği $\kappa(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$ şeklindedir. Binormal vektör $B(s) = T(s) \times N(s)$ spacelike bir vektördür. Frenet eşitlikleri;

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada α nın torsiyonu $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ dır. Bu durumda Frenet üçlüsündeki vektörler T, N, B , sırasıyla, spacelike, timelike, spacelike vektörlerdir.

iii. $T'(s)$ lightlike vektör olsun herhangi s için $(T'(s) \neq 0$ ve $T(s)$ ile orantılı değildir). Normal vektörü $N(s) = T'(s)$ şeklinde tanımlansın, $N(s), T(s)$ ile lineer bağımsızdır. $B(s), \langle N(s), B(s) \rangle = 1$ şartını sağlayan ve $T(s)$ ile ortogonal tek lightlike vektördür. Bu vektör $B(s), \alpha$ eğrisinin binormal vektörü olarak adlandırılır. Bu durumda Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Burada τ , α nın torsiyonu olup $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ dır. α eğrisi için eğrilik tanımlı değildir. Bu durumda Frenet üçlüsündeki vektörler T, N, B , sırasıyla, spacelike, lightlike, lightlike vektörlerdir.

$\alpha(s)$ eğrisinin lightlike olması durumu:

α yarı-yay parametresi ile parametrelendirilmiş lightlike bir eğri olsun, yani $\alpha''(s)$ birim spacelike vektör olsun. Teğet vektör $T(s) = \alpha'(s)$ ve normal vektör $N(s) = T'(s)$ şeklinde tanımlanır. Binormal vektör $N(s)$ vektörüne ortogonal olan tek lightlike vektör olup, $\langle N(s), B(s) \rangle = 1$ şartını sağlar. Buradan Frenet eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & -1 \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. τ fonksiyonu α eğrisinin torsiyonudur ve α spacelike eğrisinin T' lightlike olması durumundaki gibi α lightlike eğrisi için eğrilik tanımlı değildir.

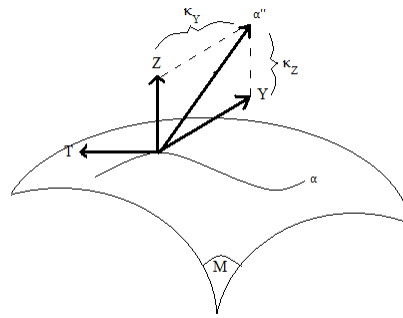
3. LIGHTLIKE YÜZEY İÇİN EĞRİ-YÜZEY İKİLİSİNİN EĞRİLİKLERİ

3-boyutlu Minkowski uzayında, bir başka bakış açısıyla lightlike (null, ışıksı) yüzeyler her bir noktasındaki teğet düzlemi, lightlike koniye teğet olan yüzey olarak görülebilir (Izumiya, Pei ve Sano 2000).

$\mathbb{E}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında M lightlike bir yüzey, M yüzeyi içinde birim hızlı bir $\alpha : I \rightarrow M$ spacelike eğrisi ve yüzeyin normal vektör alanı Z olsun. M lightlike yüzeyin normal vektör alanı Z lightlike vektördür. α spacelike eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$\begin{aligned} \langle Z, Z \rangle = \langle Y, Y \rangle = \langle Z, T \rangle = \langle Y, T \rangle &= 0 \\ \langle Z, Y \rangle = \langle T, T \rangle &= 1 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

şartlarını sağlayacak şekilde Y lightlike vektörü vardır ve tektir. Dolayısıyla $\{T, Z, Y\}$ cümlesi α eğrisi boyunca bir çatı alanı oluşturur. Bu çatı alanına (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı diyeceğiz. Bu kısımda $\mathbb{E}_1^3 = (\mathbb{E}^3, \langle, \rangle)$ olup, vektörlerin çarpımı için (2.1.3) eşitliği kullanılmaktadır.



Şekil 3.1 (α, M) eğri-yüzey ikilisinin çatısı

Tanım 3.1.1 $\alpha : I \rightarrow M, s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili lightlike M yüzeyi üzerinde spacelike birim hızlı bir eğri ve $\{T, Z, Y\}$ cümlesi E_1^3 de α eğrisi için bir çatı olmak üzere

$$\kappa_z(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_z(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki z -eğriliği denir.

κ_z fonksiyonu α'' vektörünün Y lightlike vektörüne paralel izdüşümünün uzunluğunu ölçer.

Tanım 3.1.2 $\alpha : I \rightarrow M, s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili lightlike M yüzeyi üzerinde spacelike birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_y(s) = \langle \alpha''(s), Z(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\kappa_y(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki y -eğriliği denir.

κ_y fonksiyonu α'' vektörünün yüzeyin normali Z vektörüne paralel izdüşümünün uzunluğunu ölçer.

Tanım 3.1.3 $\alpha : I \rightarrow M, s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili lightlike M yüzeyi üzerinde spacelike birim hızlı bir eğri olsun.

$$\tau_y(s) = \langle Z'(s), Y(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\tau_y(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir.

Tanım 3.1.4 $\alpha : I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olmak üzere, $\kappa_z, \kappa_y, \tau_y$ fonksiyonlarına (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri denir.

Aşağıdaki teorem T, Z, Y vektör alanlarının α eğrisi boyunca türevlerinin yine bu çatıya bağlı olarak yazılabileceğini gösterir.

Teorem 3.1.1 α, M lightlike yüzeyi içinde spacelike birim hızlı bir eğri olsun. (α, M) eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri $\kappa_y, \kappa_z, \tau_y$ eğri-yüzey eğrilikleri olmak üzere

$$\begin{cases} T' = \kappa_z Z + \kappa_y Y \\ Z' = -\kappa_y T + \tau_y Z \\ Y' = -\kappa_z T - \tau_y Y \end{cases} \quad (3.1.2)$$

dir.

İspat Her $s \in I$ için $\{T(s), Z(s), Y(s)\}$ cümlesi $T_{\alpha(s)}(E_1^3)$ uzayı için bir baz olduğundan, $T' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ biçimindedir. Şimdi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ katsayılarını (3.1.1) deki eşitliklerden yararlanarak hesaplayalım.

i) $T' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ eşitliğinin her iki yanını T ile çarpılarak, $\lambda_1 = \langle T', T \rangle$ bulunur. $\langle T, T \rangle = 1$ olduğundan, $\lambda_1 = \langle T', T \rangle = 0$ elde edilir.

$T' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ eşitliğinin her iki yanını Z ile çarpılarak, $\lambda_3 = \langle \alpha'', Z \rangle = \kappa_y$ ve benzer şekilde $T' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ eşitliğinin her iki yanını Y ile çarpılarak, $\lambda_2 = \langle T', Y \rangle = \langle \alpha'', Y \rangle = \kappa_z$ elde edilir. Buradan

$$T' = \kappa_z Z + \kappa_y Y$$

dır.

ii) $Z' \in Sp\{T(s), Z(s), Y(s)\}$ olduğundan $Z' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ dir.

$Z' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ eşitliğinin her iki yanını, sırasıyla, T, Z, Y ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle Z', T \rangle = -\langle T', Z \rangle = -\langle \alpha''(s), Z(s) \rangle = -\kappa_y \\ \lambda_3 &= \langle Z', Z \rangle = 0 \\ \lambda_2 &= \langle Z', Y \rangle = \tau_y \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$Z' = -\kappa_y T + \tau_y Z$$

elde edilir.

iii) $Y' \in Sp\{T(s), Z(s), Y(s)\}$ olduğundan $Y' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ dir.

$Y' = \lambda_1 T + \lambda_2 Z + \lambda_3 Y$ eşitliğinin her iki yanı, sırasıyla, T, Z, Y ile çarpılırsa,

$$\lambda_1 = \langle Y', T \rangle = -\langle T', Y \rangle = -\langle \alpha''(s), Y(s) \rangle = -\kappa_z$$

$$\lambda_3 = \langle Y', Z \rangle = -\langle Z', Y \rangle = -\tau_y$$

$$\lambda_2 = \langle Y', Y \rangle = 0$$

bulunur. Böylece,

$$Y' = -\kappa_z T - \tau_y Y$$

dir.

$\kappa_z, \kappa_y, \tau_y$ fonksiyonları, α eğrisinin tanımlandığı I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden reel değerli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar eğriye ve yüzeye bağlıdır. Yani eğri-yüzey eğrilikleri, eğrinin yüzey içindeki konumuna bağlıdır.

Teorem 3.1.2 $\alpha : I \rightarrow M, s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili lightlike M yüzeyi üzerinde spacelike bir eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanı olmak üzere, $\alpha''(s) \in sp\{Z(s), Y(s)\}$ dir.

İspat $\alpha : I \rightarrow M, s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili lightlike M yüzeyi üzerinde spacelike bir eğri olmak üzere $\{Z, T, Y\}$ eğri-yüzey çatısı için $\alpha''(s) \in sp\{Z(s), T(s), Y(s)\}$ dir. O halde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ değerleri için $\alpha''(s) = \lambda_1 Z(s) + \lambda_2 T(s) + \lambda_3 Y(s)$ dir.

(3.1.1) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle \\ \lambda_2 &= \langle \alpha''(s), T(s) \rangle = \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \\ \lambda_3 &= \langle \alpha''(s), Z(s) \rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), Y(s) \rangle Z(s) + \langle \alpha''(s), Z(s) \rangle Y(s)$ olup $\alpha''(s) \in \text{sp}\{Z(s), Y(s)\}$ dir.

Sonuç olarak, $\alpha''(s)$ vektörü $\{Z(s), Y(s)\}$ vektörlerinin gerdiği düzlemdedir. Bu düzleme dik olan vektör $T(s)$ spacelike vektörü olup $\{Z(s), Y(s)\}$ vektörlerinin gerdiği düzlem timelike düzlemdir. Timelike düzlemin içinde üç tip vektör de yatabileceğinden $\alpha''(s)$ vektörü spacelike, timelike, lightlike olabilir.

α spacelike eğrisinin E_1^3 deki Frenet vektörleri $T = \bar{T}, \bar{N}, \bar{B}$ ile gösterilirse, $s \in I$ için $Z(s), Y(s), \bar{B}(s), \bar{N}(s)$ vektörlerinin dördü de $T(s)$ vektörüne dik olduğundan, bu dört vektör düzlemseldir. α spacelike eğrisi için $T'(s) = \alpha''(s)$ vektörü $T(s)$ birim teğet vektör alanının s ye göre türevi olmak üzere bu vektörün spacelike, timelike, lightlike olma durumlarına bağlı olarak üç durum söz konusudur.

α spacelike eğrisinin E_1^3 üzerindeki $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ Frenet çatısı için $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$, sırasıyla, α eğrisinin eğrilik ve burulmasını gösterebilir. α eğrisinin spacelike olma durumuna karşılık gelen Frenet denklemlerinden yararlanarak, $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ ile eğri-yüzey çatısının $\kappa_y, \kappa_z, \tau_y$ eğri-yüzey eğrilikleri arasındaki bağıntıları inceleyelim.

Teorem 3.1.3 $\alpha : I \rightarrow M \subset E_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca eğri-yüzey çatısı $\{T, Z, Y\}$ ve eğri yüzey eğrilikleri $\kappa_z, \kappa_y, \tau_y$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca E_1^3 de yarı-ortonormal çatısı için $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik, torsiyon, asli normal ve binormalleri, sırasıyla, $\bar{\kappa}, \bar{\tau}, \bar{N}, \bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha''(s) = T'(s)$ spacelike olmak üzere,

$$\bar{\kappa} = \sqrt{2\kappa_z\kappa_y} \quad (3.1.3)$$

ve

$$\bar{\tau}^2 = -\frac{\kappa_y' \kappa_z'}{\kappa_y \kappa_z} + \frac{1}{4} \frac{(\kappa_z' \kappa_y + \kappa_z \kappa_y')^2}{(\kappa_z \kappa_y)^2} + \frac{\tau_y (\kappa_z' \kappa_y - \kappa_z \kappa_y')}{\kappa_z \kappa_y} + \tau_y^2 \quad (3.1.4)$$

dır. Ayrıca, burada $\kappa_y, \kappa_z \neq 0, \kappa_z \kappa_y > 0$ dır.

İspat $T'(s) = \alpha''(s)$ spacelike olursa α spacelike birim hızlı eğrisi boyunca E_1^3 de $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ çatısının Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} T' &= \bar{T}' = \bar{\kappa} \bar{N} \\ \bar{N}' &= -\bar{\kappa} \bar{T} + \bar{\tau} \bar{B} \\ \bar{B}' &= \bar{\tau} \bar{N} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

şeklindedir (Lopez 2008). Bu Frenet formüllerine göre eğrilik $\bar{\kappa}(s) = \|T'(s)\|$,

$\bar{\kappa} \neq 0$, normal vektörü $\bar{N}(s) = \frac{T'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ şartlarını sağlarlar.

(3.1.2) eşitliği ve (3.1.5) de verilen birinci eşitlikten,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \\ \bar{\kappa} \bar{N} &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dır. Buradan (3.1.6) denkleminde

$$\langle \bar{\kappa} \bar{N}, \bar{\kappa} \bar{N} \rangle = \langle \kappa_z Z + \kappa_y Y, \kappa_z Z + \kappa_y Y \rangle \quad (3.1.7)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.1) de verilen eşitliklerden ve $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 1$ eşitliğinden (3.1.7) denklemi

$$\bar{\kappa}^2 = 2\kappa_z \kappa_y \quad (3.1.8)$$

halini alır ve sonuç olarak

$$\bar{\kappa} = \sqrt{2\kappa_z \kappa_y}$$

olup, istenilen elde edilir. Burada $\kappa_y, \kappa_z \neq 0, \kappa_z \kappa_y > 0$ olduğu görülür.

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}'}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa_z Z + \kappa_y Y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}} \quad (3.1.9)$$

dır. Buradan her iki tarafın s ye göre türevi alınır,

$$\bar{N}' = \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right) Z' + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right) Y' \quad (3.1.10)$$

(3.1.5) de verilen Frenet formüllerinden

$$(-\bar{\kappa}T + \bar{\tau}\bar{B}) = \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right) Z' + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right) Y' \quad (3.1.11)$$

elde edilir. (3.1.2) denklemlerinden Z' ve Y' yerine yazılırsa, (3.1.11) eşitliğinin sağ tarafı

$$\left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_y T + \tau_y Z) + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_z T - \tau_y Y) \quad (3.1.12)$$

haline dönüştür. (3.1.12) eşitliği (3.1.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (-\bar{\kappa}T + \bar{\tau}\bar{B}) &= \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_y T + \tau_y Z) + \\ &\quad \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_z T - \tau_y Y) \\ &= \left(\frac{\kappa_z' \sqrt{2\kappa_z \kappa_y} - \kappa_z \left(\frac{\kappa_z' \kappa_y + \kappa_z \kappa_y'}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)}{2\kappa_z \kappa_y}\right) Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_y T + \tau_y Z) \\ &\quad \left(\frac{\kappa_y' \sqrt{2\kappa_z \kappa_y} - \kappa_y \left(\frac{\kappa_z' \kappa_y + \kappa_z \kappa_y'}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)}{2\kappa_z \kappa_y}\right) Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{2\kappa_z \kappa_y}}\right)(-\kappa_z T - \tau_y Y) \end{aligned}$$

bulunur.

Eşitliğin sağ tarafında T vektör alanının katsayısı

$$\frac{-2\kappa_y\kappa_z}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} = -\sqrt{2\kappa_z\kappa_y} = -\bar{\kappa}$$

dır. Buradan sağ ve sol taraftaki T teğet vektör alanlarının katsayılarının eşit olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\bar{\tau}\bar{B} = & \left(\frac{\kappa'_z}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_z(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right)Z + \\ & \left(\frac{\kappa'_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right)Y\end{aligned}$$

şeklinde. $\langle Z, Z \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0$, $\langle Z, Y \rangle = 1$ eşitliklerinden ve $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle = -1$ eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\tau}\bar{B}, \bar{\tau}\bar{B} \rangle = & 2 \left(\frac{\kappa'_z}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_z(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right) \cdot \\ & \left(\frac{\kappa'_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right)\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}-\bar{\tau}^2 = & 2 \left(\frac{\kappa'_z}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_z(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right) \cdot \\ & \left(\frac{\kappa'_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{2\kappa_z\kappa_y\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y\tau_y}{\sqrt{2\kappa_z\kappa_y}} \right)\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}-\bar{\tau}^2 = & 2 \left(\frac{\kappa'_y\kappa'_z}{2\kappa_z\kappa_y} + \frac{\kappa'_z\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(2\kappa_z\kappa_y)^2} - \frac{\kappa'_z\kappa_y\tau_y}{2\kappa_z\kappa_y} \right. \\ & - \frac{\kappa_z\kappa'_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(2\kappa_z\kappa_y)^2} - \frac{\kappa_z\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)^2}{(2\kappa_z\kappa_y)^3} + \frac{\kappa_z\kappa_y\tau_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(2\kappa_z\kappa_y)^2} \\ & \left. + \frac{\kappa'_y\kappa_z\tau_y}{2\kappa_z\kappa_y} + \frac{\kappa_y\kappa_z\tau_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(2\kappa_z\kappa_y)^2} - \frac{\kappa_y\kappa_z\tau_y^2}{2\kappa_z\kappa_y} \right)\end{aligned}$$

buradan son eşitlik düzenlenirse,

$$\bar{\tau}^2 = -\frac{\kappa_y' \kappa_z'}{\kappa_y \kappa_z} + \frac{1}{4} \frac{(\kappa_z' \kappa_y + \kappa_z \kappa_y')^2}{(\kappa_z \kappa_y)^2} + \frac{\tau_y (\kappa_z' \kappa_y - \kappa_z \kappa_y')}{\kappa_z \kappa_y} + \tau_y^2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4 $\alpha : I \rightarrow M \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca eğri-yüzey çatısı $\{T, Z, Y\}$ ve eğri yüzey eğrilikleri $\kappa_z, \kappa_y, \tau_y$ olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^3$ de yarı-ortonormal çatısı için $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik, torsiyon, asli normal ve binormalleri, sırasıyla, $\bar{\kappa}, \bar{\tau}, \bar{N}, \bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha'(s) = T'(s)$ timelike olmak üzere,

$$\bar{\kappa} = \sqrt{-2\kappa_z \kappa_y} \quad (3.1.13)$$

ve

$$\bar{\tau}^2 = -\frac{\kappa_y' \kappa_z'}{\kappa_y \kappa_z} + \frac{1}{4} \frac{(\kappa_z' \kappa_y + \kappa_z \kappa_y')^2}{(\kappa_z \kappa_y)^2} + \frac{\tau_y (\kappa_z' \kappa_y - \kappa_z \kappa_y')}{\kappa_z \kappa_y} + \tau_y^2 \quad (3.1.14)$$

dır. Burada $\kappa_y, \kappa_z \neq 0$, $\kappa_z \kappa_y < 0$ dır.

İspat $T'(s) = \alpha''(s)$ timelike olursa α spacelike birim hızlı eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^3$ de $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ çatısının Frenet formülleri,

$$\begin{aligned} T' &= \bar{T}' = \bar{\kappa} \bar{N} \\ \bar{N}' &= \bar{\kappa} \bar{T} + \bar{\tau} \bar{B} \\ \bar{B}' &= \bar{\tau} \bar{N} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

şeklindedir. Bu Frenet formüllerine göre $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{-\langle T'(s), T'(s) \rangle}$, $\bar{\kappa} \neq 0$, normal vektörü için $\bar{N}(s) = \frac{T'(s)}{\bar{\kappa}(s)}$ dır (Lopez 2008). (3.1.2) ve (3.1.15) den,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \\ \bar{\kappa} \bar{N} &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \end{aligned}$$

ve

$$\langle \bar{\kappa} \bar{N}, \bar{\kappa} \bar{N} \rangle = \langle \kappa_z Z + \kappa_y Y, \kappa_z Z + \kappa_y Y \rangle$$

(3.1.1) de verilen eşitliklerden ve $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = -1$ eşitliğinden

$$-\bar{\kappa}^2 = 2\kappa_z \kappa_y$$

şeklinde olup,

$$\bar{\kappa} = \sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{N} = \frac{\bar{T}'}{\bar{\kappa}} = \frac{\kappa_z Z + \kappa_y Y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}}$$

dır. Buradan her iki tarafın s ye göre türevi alınır,

$$\bar{N}' = \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) Z' + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) Y'$$

$$(\bar{\kappa} T + \bar{\tau} \bar{B}) = \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) Z' + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) Y'$$

elde edilir. Z' ve Y' nin eşitini yerine yazılırsa, eşitliğin sağ tarafı

$$\left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_y T + \tau_y Z) + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_z T - \tau_y Y)$$

haline dönüştür. Bu eşitlikten yararlanarak,

$$\begin{aligned} (\bar{\kappa} T + \bar{\tau} \bar{B}) &= \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_y T + \tau_y Z) + \\ &\quad \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)' Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_z T - \tau_y Y) \\ &= \left(\frac{\kappa_z' \sqrt{-2\kappa_z \kappa_y} - \kappa_z \left(\frac{-\kappa_z' \kappa_y - \kappa_z \kappa_y'}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)}{-2\kappa_z \kappa_y} \right) Z + \left(\frac{\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_y T + \tau_y Z) \\ &\quad \left(\frac{\kappa_y' \sqrt{-2\kappa_z \kappa_y} - \kappa_y \left(\frac{-\kappa_z' \kappa_y - \kappa_z \kappa_y'}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right)}{-2\kappa_z \kappa_y} \right) Y + \left(\frac{\kappa_y}{\sqrt{-2\kappa_z \kappa_y}} \right) (-\kappa_z T - \tau_y Y) \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında T vektör alanının katsayısı

$$\frac{-2\kappa_y\kappa_z}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} = \sqrt{-2\kappa_z\kappa_y} = \bar{\kappa}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\bar{\tau}\bar{B} &= \left(\frac{\kappa'_z}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{-2\kappa_z\kappa_y\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z\tau_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}}\right)Z + \\ &\quad \left(\frac{\kappa'_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{-2\kappa_z\kappa_y\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y\tau_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}}\right)Y\end{aligned}$$

(3.1.1) eşitliklerinden ve $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle = 1$ eşitliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^2 &= 2\left(\frac{\kappa'_z}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{-2\kappa_z\kappa_y\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_z\tau_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}}\right) \cdot \\ &\quad \left(\frac{\kappa'_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} + \frac{\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{-2\kappa_z\kappa_y\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}} - \frac{\kappa_y\tau_y}{\sqrt{-2\kappa_z\kappa_y}}\right) \\ (\Rightarrow) \bar{\tau}^2 &= 2\left(-\frac{\kappa'_y\kappa'_z}{2\kappa_z\kappa_y} + \frac{\kappa'_z\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(-2\kappa_z\kappa_y)^2} + \frac{\kappa'_z\kappa_y\tau_y}{2\kappa_z\kappa_y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa_z\kappa'_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(-2\kappa_z\kappa_y)^2} + \frac{\kappa_z\kappa_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)^2}{(-2\kappa_z\kappa_y)^3} + \frac{-\kappa_z\kappa_y\tau_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(-2\kappa_z\kappa_y)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa'_y\kappa_z\tau_y}{2\kappa_z\kappa_y} + \frac{\kappa_y\kappa_z\tau_y(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)}{(-2\kappa_z\kappa_y)^2} + \frac{\kappa_y\kappa_z\tau_y^2}{2\kappa_z\kappa_y}\right)\end{aligned}$$

buradan son eşitlik düzenlenirse,

$$\bar{\tau}^2 = -\frac{\kappa'_y\kappa'_z}{\kappa_y\kappa_z} + \frac{1}{4} \frac{(\kappa'_z\kappa_y + \kappa_z\kappa'_y)^2}{(\kappa_z\kappa_y)^2} + \frac{\tau_y(\kappa'_z\kappa_y - \kappa_z\kappa'_y)}{\kappa_z\kappa_y} + \tau_y^2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 $\alpha : I \rightarrow M \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yarı-ortonormal çatı için $\alpha(s)$ eğrisinin torsiyon, asli normal ve bi-normalleri, sırasıyla, $\bar{\tau}, \bar{N}, \bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha'(s) = T'(s)$ için $T'(s)$ lightlike olmak üzere ve $\alpha(s)$ eğrisinin $\kappa_y, \kappa_z, \tau_y$ eğri-yüzey eğrilikleri için

$$\kappa_y \kappa_z = 0$$

dır.

İspat $T'(s)$ lightlike vektör olsun. Bu durumda α eğrisinin Frenet eşitlikleri,

$$\begin{aligned} T' &= \bar{T}' = \bar{N} \\ \bar{N}' &= \bar{\tau} \bar{N} \\ \bar{B}' &= -\bar{T} - \bar{\tau} \bar{B} \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

şeklindedir. Burada $\bar{\tau}$, α nın torsiyonu olup $\bar{\tau}(s) = \langle \bar{N}'(s), \bar{B}(s) \rangle$ dir. α eğrisi için eğrilik tanımlı değildir (Lopez 2008).

Eğri-yüzey çatısından elde edilen (3.1.2) denkleminde ve T' lightlike olması durumunda (3.1.16) denklemlerinden

$$T' = \bar{N} = \kappa_z Z + \kappa_y Y$$

olup (3.1.1) den

$$\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 2\kappa_z \kappa_y$$

elde edilir. $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 0$ için,

$$\kappa_z \kappa_y = 0 \tag{3.1.17}$$

sağlanır.

(3.1.17) eşitliği $\kappa_z = 0$ veya $\kappa_y = 0$ olması ile sağlanır. Eğer y -eğriliği $\kappa_y = 0$

olursa

$$\begin{aligned}T' &= \kappa_z Z + \kappa_y Y \\Z' &= -\kappa_y T + \tau_y Z \\Y' &= -\kappa_z T - \tau_y Y\end{aligned}$$

denklemleri

$$\begin{aligned}T' &= \kappa_z Z \\Z' &= \tau_y Z \\Y' &= -\kappa_z T - \tau_y Y\end{aligned}$$

halini alır. Yani $T' = \kappa_z Z$ için $\alpha''(s)$ yüzeyin normali Z yönünde olup eğri lightlike yüzey üzerindeki lightlike doğrulardan biri olur. Lightlike doğrular lightlike yüzey için geodezik eğriler olduğu için $\kappa_y = 0$ için geodezik eğriler elde edilir.

4. LIGHTLIKE KONİ ÜZERİNDE EĞRİLER

Tanım 4.1 $\mathbb{E}_q^{n+1}$ de sabit bir nokta c olmak üzere,

$$Q_q^n(c) = \{x \in \mathbb{E}_q^{n+1} \mid g(x - c, x - c) = 0\}$$

şeklinde tanımlı hiperyüzeye yarı-Riemann lightlike koni (kuadrik koni) denir.

$c = 0$ ve $q = 1$ olduğu zaman $Q_1^n(0)$ (n -boyutlu 1 indeksli yarı-Riemann lightlike koni) basitçe Q^n ile gösterilebilir ve lightlike koni olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Önerme 4.1 $\mathbb{R}_q^{n+1}$ (yarı-Öklidyen uzay) daki lightlike koni (Q_v^n) bir skalar çarpım altında invariant kalan bir hiperyüzeydir ve $(\mathbb{R}^q - \{0\}) \times S^{n-q}$ ile diffeomorftur. (O'Neill 1983).

$\mathbb{R}_q^{n+1}$ uzayın yer (pozisyon) vektör alanı lightlike koninin hem teğeti hem de normalidir. Sonuç olarak yarı-Riemann küre ve yarı-Riemann hiperbolik uzay Riemann geometrisi ile benzerlik gösterirken, lightlike koninin geometrisi Riemann geometrisi ile benzerlik göstermez.

Lightlike koninin üreteçleri (yani lightlike vektörler) aynı zamanda koninin normaleridir. Lightlike koninin teğet düzlemi lightlike olarak adlandırılır. Lightlike koninin teğet düzleminde, koninin üreteçlerinden biri ve lightlike vektörlere ortogonal olan spacelike vektörler yatar (Riesz 1988).

Tanım 4.2 $\mathbb{E}_1^{n+2}$, $(n + 2)$ -boyutlu Minkowski uzayı olmak üzere, $\mathbb{E}_1^{n+2}$ de sıfırdan farklı x vektörü eğer;

$\langle x, x \rangle > 0$ ise x spacelike vektör,

$\langle x, x \rangle < 0$ ise x timelike vektör,

$\langle x, x \rangle = 0$ ise x lightlike vektör olarak adlandırılır (Liu 2004).

Tanım 4.3 E_1^{n+2} üzerindeki $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ çatı alanı için

$$\begin{cases} \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+2}, e_{n+2} \rangle = 0; \\ \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle = 1; \\ \langle e_{n+1}, e_i \rangle = \langle e_{n+2}, e_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.1)$$

şartları sağlanıyorsa bu çatı alanına asimptotik çatı alanı denir (Liu 2004).

Tanım 4.4 E_1^{n+2} üzerindeki $\{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ çatı alanı için

$$\begin{cases} \langle e_{n+1}, e_{n+1} \rangle = -\langle e_{n+2}, e_{n+2} \rangle = 1; \\ \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle = 0; \\ \langle e_{n+1}, e_i \rangle = \langle e_{n+2}, e_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

şartları sağlanıyorsa bu çatı alanına yarı-ortonormal çatı alanı denir (Liu 2004).

Tanım 4.5 $I, \mathbb{R}$ nin bir açığı ve M bir Lorentz manifoldu olmak üzere

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

diferensiyellenebilir dönüşümlere eğri adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 4.6 M bir Lorentz manifoldu ve $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

$g(T, T) > 0$ ise α eğrisine spacelike eğri,

$g(T, T) < 0$ ise α eğrisine timelike eğri,

$g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise α eğrisine lightlike eğri denir.

Eğrinin bir özel hali olan doğru gözönüne alınırsa; doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru spacelike doğru, doğrultman vektörü timelike ise doğru timelike doğru, doğrultman vektör lightlike ise doğru lightlike doğrudur (O'Neill 1983).

Aksi belirtilmedikçe $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $t \rightarrow \alpha(t) \in Q^{n+1}$, Q^{n+1} üzerinde regüler bir eğri ($\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$) ve $\forall t \in I$ için $\alpha(t) \# \alpha'(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$ olarak alınacaktır (Liu 2004).

Tanım 4.7 $\mathbb{E}_1^{n+2}$ de $\alpha(t)$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t), \alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t), \alpha^{(n+1)}(t)$ vektör alanları lineer bağımsız ve $\alpha(t), \alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(n)}(t), \alpha^{(n+1)}(t), \alpha^{(n+2)}(t)$ vektör alanları lineer bağımlı olma şartını sağlıyorsa $\mathbb{E}_1^{n+2}$ de $\alpha(t)$ eğrisine Frenet eğrisi denir. Burada $\alpha^{(n)}(t) = \frac{d^n \alpha(t)}{dt^n}$ dır (Liu 2004).

Önerme 4.1 Lightlike koni üzerinde, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $t \rightarrow \alpha(t) \in Q^{n+1}$ eğrisi verilsin. Eğer α ve $d\alpha$ lineer bağımsız ise $d\alpha$ spacelike vektördür (Takizawa ve Tsukada 2009).

İspat $\alpha \in Q^{n+1}$ olduğu için $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ dır. $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ olduğundan, $\langle \alpha, d\alpha \rangle = 0$ elde edilir. Bir lightlike vektör ya kendisiyle lineer bağımlı bir vektöre ya da spacelike bir vektöre ortogonaldır. Dolayısıyla α ve $d\alpha$ lineer bağımsız olduğu için $d\alpha$ spacelike olacaktır.

Lemma 4.1 α spacelike veya timelike bir eğri olsun. O zaman $\|\alpha'(s)\| = 1$ olacak şekilde bir parametre değişimi vardır (Lopez 2008).

Tanım 4.8 α ve $d\alpha$ lineer bağımsız olarak alındığı için, α spacelike eğrisi yay uzunluğu ile parametrelendirilebilir. $\alpha(t)$ eğrisinin yay uzunluğu s

$$ds^2 = \langle d\alpha(t), d\alpha(t) \rangle$$

ile tanımlanır (Liu 2004).

Eğer $\alpha(t)$ eğrisinin yay parametresi s alınırsa ve $\alpha(s) = \alpha(t(s))$ ile gösterilirse

$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$, $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanıdır. O halde

$\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, birim hızlı spacelike bir eğridir. Buradan anlaşıyor ki α lightlike (yer) vektörünün lightlike koni üzerine çizdiği eğri spacelike bir eğridir.

4.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında İki Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler

Bu bölümde iki boyutlu lightlike koni üzerinde bir α eğrisi için asimptotik çatı alanı verilerek ve α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonundan yararlanılarak, α eğrisi için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca α spacelike eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ de $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ Frenet çatısı için $\bar{\kappa}, \bar{\tau}$ (sırasıyla, α eğrisinin eğrilik ve burulması olmak üzere) ile κ koni eğrilik fonksiyonu arasında bağıntılar incelenmiştir.

Bilindiği gibi, $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere, α lightlike koninin hem teğet düzleminde yatar hem de normalidir. Dolayısıyla burada eğri-yüzey çatısındaki lightlike yüzeyin normal vektörü özel olarak $Z = \alpha$ dir. Yani normali aynı zamanda koninin yer vektörü olur.

$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$, $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanıdır. $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$ spacelike eğrisinin $t(s) = \alpha'(s)$ birim teğet vektör alanından yararlanarak α yer vektörünü içine alan bir çatı alanı oluşturmak için

$$\langle y(s), y(s) \rangle = \langle t(s), y(s) \rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), y(s) \rangle = 1 \quad (4.1.1)$$

şartlarını sağlayan $y(s)$ lightlike vektörü bulunmalıdır.

$\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $\alpha(s)$ lightlike koninin teğet düzleminde yatan tek lightlike vektör olduğu için $y(s)$ lightlike vektör teğet düzlemde yatamaz yani $y(s) \notin Sp\{\alpha(s), \alpha'(s)\}$ dır. Ancak α lightlike vektör olup $y(s)$ lightlike vektörü ile arasında ortogonal-lik söz konusu olmadığı için $y(s)$, α nın spacelike normal uzayında da yatamaz. Aşağıdaki Lemma ile $y(s)$ vektörü karakterize edilebilir.

Lemma 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, iki boyutlu lightlike koni (Q^2) üzerinde bir eğri olsun. $\langle y(s), y(s) \rangle = 0$ ve $\langle y(s), \alpha(s) \rangle = 1$ olacak şekilde bir tek $y(s) \in \{\alpha(s), \alpha''(s)\}$ vektörü vardır (Takizawa ve Tsukada 2009).

O halde $y(s)$ lightlike vektörü

$$y(s) = \lambda_1 \alpha(s) + \lambda_2 \alpha''(s) \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.2) eşitliğinin her iki tarafı $\alpha(s)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle y(s), \alpha(s) \rangle &= \lambda_2 \langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle \\ \lambda_2 \langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ olduğu için $\langle \alpha', \alpha \rangle = 0$ dir, buradan

$\langle \alpha'', \alpha \rangle + \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ bulunur. α' spacelike birim teğet vektör olup $\langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$ dir. Böylece $\lambda_2 = -1$ dir.

(4.1.2) eşitliğinin her iki tarafı $y(s)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle y(s), y(s) \rangle &= \lambda_1 \langle \alpha(s), y(s) \rangle + \lambda_2 \langle \alpha''(s), y(s) \rangle \\ (\Rightarrow) \quad \lambda_1 - \langle \alpha''(s), y(s) \rangle &= 0 \\ (\Rightarrow) \quad \lambda_1 &= \langle \alpha''(s), y(s) \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan λ_1 ve λ_2 değerleri (4.1.2) de yerine yazılırsa

$$y(s) = \langle \alpha''(s), y(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s) \quad (4.1.3)$$

elde edilir.

Tanım 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2, s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili spacelike bir eğri olsun.

$$\kappa(s) = \langle \alpha''(s), y(s) \rangle$$

eşitliğiyle belirli $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki koni eğriliği denir (Liu 2004).

Teorem 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ yay parametrelili spacelike bir eğri olmak üzere $\{t, \alpha, y\}$ üçlüsü Q^2 üzerindeki α eğrisi boyunca E_1^3 de asimptotik çatı alanı oluşturur. Ayrıca $\{t, \alpha, y\}$ üçlüsü için

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa(s)\alpha(s) - y(s) \\ y'(s) = -\kappa(s)t(s) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada s , eğrinin yay parametresi, κ koni eğrilik fonksiyonudur.

İspat Tamam (4.3) den, $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ üçlüsü

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle y, y \rangle = \langle \alpha, t \rangle = \langle y, t \rangle = 0, \\ \langle \alpha, y \rangle &= \langle t, t \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

şartlarını sağladığı için Q^2 üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$, E_1^3 de asimptotik çatı alanıdır.

$\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ için, $t(s) = \alpha'(s)$ spacelike teğet vektördür. Dolayısıyla (4.1.4) deki birinci eşitlik açıktır.

Her $s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ üçlüsü $T_{\alpha(s)}(E_1^3)$ uzayı için $\alpha(s)$ eğrisi boyunca asimptotik çatı alanı olduğundan

$$t' \in Sp\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$$

olup

$$t' = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 y \quad (4.1.6)$$

dır. (4.1.6) eşitliğinin her iki tarafı t ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden $\lambda_1 = 0$ elde edilir. (4.1.6) eşitliğinin her iki tarafı α ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden $\lambda_3 = \langle t', \alpha \rangle = -1$ bulunur. Son olarak (4.1.6) eşitliğinin her iki tarafı y ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden ve koni eğrilik fonksiyonu tanımından $\lambda_2 = \langle t', y \rangle = \kappa$ bulunur. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa (4.1.4) deki ikinci eşitlik ispatlanmış olur.

Her $s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ üçlüsü için $y' \in Sp\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ olduğundan

$$y' = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 y \quad (4.1.7)$$

dır. (4.1.7) eşitliğinin her iki tarafı t ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden ve koni eğrilik fonksiyonu tanımından $\lambda_1 = \langle y', t \rangle = -\langle y, t' \rangle = -\kappa$ bulunur. (4.1.7) eşitliğinin her iki tarafı α ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden $\lambda_3 = \langle y', \alpha \rangle - \langle y, t \rangle = 0$ dır. Son olarak (4.1.7) eşitliğinin her iki tarafı y ile çarpılırsa (4.1.5) eşitliklerinden $\lambda_2 = \langle y', y \rangle = 0$ bulunur. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri (4.1.7) denkleminde yerine yazılırsa (4.1.4) deki son eşitlik de ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere Q^2 üzerinde sıfırdan farklı bazı sabit c ler için koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s) = cs^{-2}$ olan bir eğri olsun. O halde $\alpha(s)$ eğrisi $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

i) $c \neq -\frac{1}{2}$ için $\alpha(s) = a_1 s + a_2 s^{(1+\sqrt{1+2c})} + a_3 s^{(1-\sqrt{1+2c})}$,

ii) $c = -\frac{1}{2}$ için $\alpha(s) = a_1 s + a_2 s \ln s + a_3 s \ln^2 s$ şeklinde yazılır (Liu 2004).

İspat Q^2 üzerinde bir $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisi için (4.1.4) eşitliğinde $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$, Q^2 üzerindeki α eğrisi boyunca E_1^3 deki asimptotik çatı alanı için bunların s ye göre türevleri arasındaki ilişkileri

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa(s)\alpha(s) - y(s) \\ y'(s) = -\kappa(s)t(s) \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. α eğrisi için $t(s) = \alpha'(s)$ olduğundan (4.1.4) deki ikinci eşitlikten y ,

$$y(s) = -\alpha''(s) + \kappa(s)\alpha(s)$$

şeklinde yazabilir. $y(s)$ in s ye göre türevi alınırsa,

$$y'(s) = -\alpha'''(s) + \kappa'(s)\alpha(s) + \kappa(s)\alpha'(s)$$

elde edilir. (4.1.4) formüllerinde üçüncü eşitlik son eşitlikte yerine yazılırsa

$$-\kappa(s)t(s) = -\alpha'''(s) + \kappa'(s)\alpha(s) + \kappa(s)\alpha'(s)$$

olup, buradan

$$\alpha'''(s) - 2\kappa(s)\alpha'(s) - \kappa'(s)\alpha(s) = 0 \quad (4.1.8)$$

elde edilir.

κ , koni eğrilik fonksiyonu (sıfırdan farklı bazı sabit c ler için) $\kappa = cs^{-2}$ olduğundan ve bulduğumuz

$$\alpha'''(s) - 2\kappa(s)\alpha'(s) - \kappa'(s)\alpha(s) = 0$$

eşitliğinden;

$$\alpha'''(s) - 2cs^{-2}\alpha'(s) + 2cs^{-3}\alpha(s) = 0$$

ve son olarak

$$s^3\alpha'''(s) - 2cs\alpha'(s) + 2c\alpha(s) = 0 \quad (4.1.9)$$

(lineer, değişken katsayılı, homogen diferensiyel denklem) elde edilir. (4.1.9) Euler diferensiyel denklemini için $s = e^t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $ds = e^t dt$ olur.

Buradan

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s} \frac{d\alpha}{dt}$$

elde edilir. Yani,

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = e^{-t} \frac{d\alpha}{dt} \quad (4.1.10)$$

dır.

Aynı şekilde $\alpha'(s)$ nün s ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(e^{-t} \frac{d\alpha}{dt} \right) \frac{dt}{ds} \\ &= e^{-2t} \left(-\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

elde edilir.

Son olarak (4.1.11) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\alpha'''(s) &= \frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\left(-\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)\right)\frac{dt}{ds} \\ &= e^{-3t}\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3} - 3\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{d\alpha}{dt}\right)\end{aligned}\quad (4.1.12)$$

(4.1.10) ve (4.1.12) eşitlikleri (4.1.9) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^4\alpha}{dt^3} - 3\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{d\alpha}{dt} - 2c\frac{d\alpha}{dt} + 2c\alpha = 0$$

bulunur, buradan $\frac{d}{dt} = D$ için $(D^3 - 3D^2 + 2(1-c)D + 2c)\alpha = 0$ elde edilir. O halde $r^3 - 3r^2 + 2(1-c)r + 2c = 0$ (4.1.9) diferensiyel denkleminin karakteristik denklemi olup, karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 1$, $r_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1+2c}$ dir. Buradan $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere $c \neq -\frac{1}{2}$ için,

$$\alpha(t) = a_1 e^t + a_2 e^{(1+\sqrt{1+2c})t} + a_3 e^{(1-\sqrt{1+2c})t}$$

olup, $s = e^t$ eşitliğinden,

$$\alpha(s) = a_1 s + a_2 s^{(1+\sqrt{1+2c})} + a_3 s^{(1-\sqrt{1+2c})} \quad (4.1.13)$$

bulunur. $c = -\frac{1}{2}$ için karakteristik denklem $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ olup, karakteristik denklemin kökleri $r_{1,2,3} = 1$ dir. O halde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ için,

$$\alpha(t) = e^t(a_1 + a_2 t + a_3 t^2)$$

olup, $s = e^t$ eşitliğinden,

$$\alpha(s) = a_1 s + a_2 s \ln s + a_3 s \ln^2 s \quad (4.1.14)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ s yay parametrelili ve koni eğrilik fonksiyonu sabit bir eğri olmak üzere $\alpha(s)$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere aşağıdaki şekillerde yazılır:

- i) $\kappa = 0$ için $\alpha(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ (eğri parabol),
- ii) $\kappa > 0$ için $\alpha(s) = a_1 \sinh(\sqrt{2\kappa})s + a_2 \cosh(\sqrt{2\kappa})s + a_3$ (eğri hiperbol),
- iii) $\kappa < 0$ için $\alpha(s) = a_1 \sin(\sqrt{-2\kappa})s + a_2 \cos(\sqrt{-2\kappa})s + a_3$ (eğri elips) (Liu 2004).

İspat Q^2 üzerinde bir $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisinin $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ asimptotik çatı alanı için

$$\alpha'''(s) - 2\kappa(s)\alpha'(s) - \kappa'(s)\alpha(s) = 0$$

eşitliği önceki teoremin ispatında verilmiştir.

O halde (4.1.8) eşitliğinden ve κ , koni eğrilik fonksiyonu sabit olduğundan

$$\alpha'''(s) = 2\kappa(s)\alpha'(s) \quad (4.1.15)$$

elde edilir. (4.1.15) eşitliği κ nın durumlarına göre çözülürse $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

- i) $\kappa = 0$ için

$$\alpha(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (4.1.16)$$

bulunur.

- ii) $\kappa > 0$ için (4.1.15) in karakteristik denklemi $r^3 = 2\kappa r$ olup karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm\sqrt{2\kappa}$ dır. Buradan

$$\alpha(s) = c_1 e^{(\sqrt{2\kappa})s} + c_2 e^{-(\sqrt{2\kappa})s} + c_3$$

bulunur. $\sinh(\sqrt{2\kappa}s) = \frac{e^{(\sqrt{2\kappa})s} - e^{-(\sqrt{2\kappa})s}}{2}$ ve $\cosh(\sqrt{2\kappa}s) = \frac{e^{(\sqrt{2\kappa})s} + e^{-(\sqrt{2\kappa})s}}{2}$ eşitliklerinde yararlanılarak,

$$\alpha(s) = a_1 \sinh(\sqrt{2\kappa})s + a_2 \cosh(\sqrt{2\kappa})s + a_3 \quad (4.1.17)$$

elde edilir.

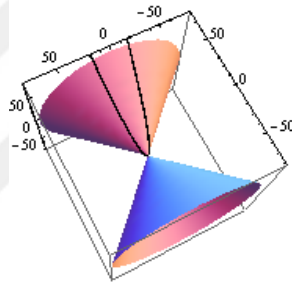
iii) $\kappa < 0$ için (4.1.15) in karakteristik denklemi $r^3 = 2\kappa r$ olup karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm i\sqrt{-2\kappa}$ şeklindedir. Buradan,

$$\alpha(s) = a_1 \sin(\sqrt{-2\kappa})s + a_2 \cos(\sqrt{-2\kappa})s + a_3 \quad (4.1.18)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, koni eğrilik fonksiyonu sabit bir eğri olmak üzere

$\alpha(s) = \frac{1}{2}(s^2 + 1, 2s, s^2 - 1)$ spacelike eğrisi lightlike koni üzerinde yatar. Ayrıca $\alpha''(s) = (1, 0, 1)$ olup, α eğrisinin koni eğriliği $\kappa(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = 0$ dir.



Şekil 4.1 Lightlike koni üzerinde koni eğriliği sıfır olan bir eğri

Teorem 4.1.4 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ in teğet vektör alanı $t(s)$, $\mathbb{E}_1^3$ uzayındaki sabit bir vektör ile sabit bir açı yapsın. Bu durumda $\alpha(s)$ eğrisi Teorem (4.1.2) ve Teorem (4.1.3) de verilen eğrilerden biri gibi yazılabilir (Liu 2004).

İspat d , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit bir vektör ve $\langle t, d \rangle = l$, l sabit olsun. Eğer $l = 0$ ise $\langle t, d \rangle = 0$ olup son eşitlikte s ye göre türev alınırsa, (4.1.4) denklemlerinin ikinci eşitliğinden

$$0 = \langle t', d \rangle = \langle \kappa(s)\alpha(s) - y(s), d \rangle$$

olup, buradan

$$\kappa(s) \langle \alpha(s), d \rangle = \langle y(s), d \rangle$$

bulunur. Son eşitlikte tekrar s ye göre türev alınırsa ve (4.1.4) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \kappa'(s) \langle \alpha(s), d \rangle + \kappa(s) \langle \alpha'(s), d \rangle - \langle y'(s), d \rangle &= 0 \\ (\Rightarrow) \kappa'(s) \langle \alpha(s), d \rangle &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $\kappa'(s) = 0$, κ sabittir. κ koni eğrilik fonksiyonu sabit bulunduğu için $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrisi Teorem (4.1.3) de verilen (4.1.16), (4.1.17) ve (4.1.18) eşitliklerden biri şeklinde yazılabilir.

$\kappa(s)$ sabit olmasın ve $l \neq 0$ sabit olsun. O halde $\langle t, d \rangle = l$ eşitliğinden

$$\kappa(s) \langle \alpha(s), d \rangle - \langle y(s), d \rangle = 0$$

olup eşitliğin s ye göre türev alınırsa,

$$\kappa'(s) \langle \alpha(s), d \rangle + \kappa(s) \langle \alpha'(s), d \rangle - \langle y'(s), d \rangle = 0$$

elde edilir burada (4.1.4) eşitlikleri yerlerine yazılırsa son eşitlik

$$2\kappa(s)l + \kappa'(s) \langle \alpha(s), d \rangle = 0 \quad (4.1.19)$$

halini alır. (4.1.19) eşitliğinden

$$2\kappa'(s)l + \kappa''(s) \langle \alpha(s), d \rangle + \kappa'(s) \langle \alpha'(s), d \rangle = 0 \quad (4.1.20)$$

elde edilir. (4.1.19) eşitliğinden $\langle \alpha(s), d \rangle = -\frac{2\kappa(s)l}{\kappa'(s)}$ olup (4.1.20) eşitliğinde bu eşitlik yerine yazılırsa l sabit olduğu için,

$$2\kappa(s)\kappa''(s) - 3\kappa(s)'^2 = 0 \quad (4.1.21)$$

elde edilir. (4.1.21) (II. basamaktan lineer olmayan) diferensiyel denklemin çözümü için,

$$\kappa'(s) = \frac{d\kappa}{ds} = p \quad (4.1.22)$$

alırsa,

$$\kappa''(s) = \frac{dp}{d\kappa} \frac{d\kappa}{ds} = p \frac{dp}{d\kappa} \quad (4.1.23)$$

olup, (4.1.22) ve (4.1.23) eşitlikleri (4.1.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$2\kappa(s)p \frac{dp}{d\kappa} - 3p^2 = 0$$

elde edilir. Buradan $p = 0$ veya $2\kappa(s) \frac{dp}{d\kappa} - 3p = 0$ bulunur.

Bu durumda $p = 0$ ise (4.1.22) den $\frac{d\kappa}{ds} = 0$ yani $\kappa = \text{sabit}$ olup kabülümüze uymamaktadır. Dolayısıyla

$$2\kappa(s) \frac{dp}{d\kappa} - 3p = 0 \quad (4.1.24)$$

olmalıdır. (4.1.24) değişkenlerine ayrılabilen diferensiyel denklemin çözümünden $c_1 \neq 0$ ve c_2 sabitleri için,

$$\kappa(s) = c_1(s + c_2)^{-2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrisi Teorem (4.1.2) de verilen (4.1.13) ve (4.1.14) eşitliklerden biri şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.5 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca asimptotik çatı $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ ve $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonu olsun. Yarı-ortonormal çatı için $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik, torsiyon, asli normal ve bi-normalleri, sırasıyla, $\bar{\kappa}, \bar{\tau}, \bar{N}$ ve $\bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha'(s) = t(s)$ için $t'(s) = \bar{T}'(s)$ spacelike olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(s) &= \sqrt{-2\kappa(s)}, \\ \bar{\tau}(s) &= -\frac{\kappa'(s)}{2\kappa(s)} = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

dır. Burada $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = 1$, $\langle \bar{N}, \bar{B} \rangle = 0$, $\kappa < 0$ dır (Liu 2004).

İspat $\alpha'(s) = t(s)$ için $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olmak üzere $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$

üçlünün $\bar{T}'(s) = t'(s)$ spacelike olma durumu için Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\bar{T}'(s) &= \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) \\ \bar{N}'(s) &= -\bar{\kappa}(s)\bar{T}(s) + \bar{\tau}(s)\bar{B}(s) \\ \bar{B}'(s) &= \bar{\tau}(s)\bar{T}(s)\end{aligned}$$

şeklindedir (Lopez 2008).

O halde α eğrisi için (4.1.4) eşitliğinden ve $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ çatısının Frenet formüllerinden

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= \kappa(s)\alpha(s) - y(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s)\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$y(s) = \kappa(s)\alpha(s) - \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) \quad (4.1.26)$$

olur.

$$\kappa(s) = \langle t'(s), y(s) \rangle$$

için (4.1.25) ve (4.1.26) eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\kappa(s) = \kappa(s)\bar{\kappa}(s) \langle \bar{N}(s), \alpha(s) \rangle - \bar{\kappa}^2(s) \quad (4.1.27)$$

elde edilir.

$$\langle \bar{N}(s), \alpha(s) \rangle = \left\langle \frac{t'(s)}{\bar{\kappa}(s)}, \alpha(s) \right\rangle = \frac{1}{\bar{\kappa}(s)} \langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle = -\frac{1}{\bar{\kappa}(s)} \quad (4.1.28)$$

şeklinde olup (4.1.27) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\bar{\kappa}(s) = \sqrt{-2\kappa(s)} \quad (4.1.29)$$

istenilen birinci eşitlik elde edilir.

α spacelike eğrisinin yarı-ortonormal çatı alanı için eğriliği $\bar{\kappa}(s) \neq 0$ dır, ayrıca $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{\langle \bar{T}'(s), \bar{T}'(s) \rangle} = \sqrt{\langle t'(s), t'(s) \rangle}$ için $\bar{T}'(s) = t'(s)$ spacelike vektör olduğundan $\bar{\kappa}(s) > 0$ olur ve sonuç olarak (4.1.29) eşitliğinden $-\kappa > 0$ yani $\kappa < 0$ dır. α eğrisi için (4.1.4) eşitliğinden, $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ çatısının Frenet formüllerinden ve (4.1.29) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\bar{N}(s) = \frac{\bar{T}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{t'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{\kappa(s)\alpha(s) - y(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{\kappa(s)\alpha(s) - y(s)}{\sqrt{-2\kappa(s)}} \quad (4.1.30)$$

olduğu görülür. Buradan

$$\bar{N}'(s) = \left(\frac{\kappa(s)}{\sqrt{-2\kappa(s)}}\alpha(s) - \frac{1}{\sqrt{-2\kappa(s)}}y(s) \right)' \quad (4.1.31)$$

olup, $\bar{N}'(s)$ in eşiti yerine yazılırsa,

$$(-\bar{\kappa}(s)t(s) + \bar{\tau}(s)\bar{B}(s)) = \left(\frac{\kappa}{\sqrt{-2\kappa}} \right)' \alpha(s) + \frac{\kappa}{\sqrt{-2\kappa}} \alpha'(s) - \left(\frac{1}{\sqrt{-2\kappa}} \right)' y(s) - \left(\frac{1}{\sqrt{-2\kappa}} \right) y'(s)$$

(burada $\kappa = \kappa(s)$) dır. α eğrisi için (4.1.4) eşitliklerinden

$$-\bar{\kappa}t + \bar{\tau}\bar{B} = \frac{\kappa'}{2\sqrt{-2\kappa}}\alpha + \frac{\kappa}{\sqrt{-2\kappa}}t + \frac{\kappa'}{2\kappa\sqrt{-2\kappa}}y + \frac{\kappa}{\sqrt{-2\kappa}}t$$

dır. Bu eşitlikte (4.1.29) eşitliğinden yararlanılarak her iki tarafta da $t(s)$ in katsayıları eşit olduğu görülür. O halde

$$\bar{\tau}(s)\bar{B}(s) = \frac{\kappa'(s)}{2\sqrt{-2\kappa(s)}}(\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}y(s)) \quad (4.1.32)$$

şeklindedir. $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle = -1$ olduğundan ve (4.1.5) $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle y, y \rangle = 0$, $\langle \alpha, y \rangle = 1$ eşitliklerinden yararlanılarak (4.1.32) eşitliğinden

$$\langle \bar{\tau}\bar{B}, \bar{\tau}\bar{B} \rangle = \left\langle \frac{\kappa'}{2\sqrt{-2\kappa}}\left(\alpha + \frac{1}{\kappa}y\right), \frac{\kappa'}{2\sqrt{-2\kappa}}\left(\alpha + \frac{1}{\kappa}y\right) \right\rangle$$

$$\bar{\tau}^2(s) = \frac{\kappa'^2(s)}{4\kappa^2(s)}$$

dir. Buradan

$$\bar{\tau}(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}\right) = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} \quad (4.1.33)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir: $T = t = \alpha'$, $Z = \alpha$, $Y = y$ olmak üzere, herhangi bir lightlike yüzey için verilen eğri-yüzey (şerid) çatısındaki eğrilikler, yüzeyin lightlike koni olması durumunda $\kappa_z = \langle \alpha'', y \rangle = \kappa$, $\kappa_y = \langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$, $\tau_y = \langle \alpha', y \rangle = 0$ halini alır. Dolayısıyla yüzeyin lightlike koni olması durumunda Teorem (3.1.3) de eğrilikler yerine yazılırsa Teorem (4.1.5) de verilen (4.1.25) eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.6 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca asimptotik çatı $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ ve $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonu olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yarı-ortonormal çatı için $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik, torsiyon, asli normal ve binormalleri, sırasıyla, $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$, $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha'(s) = t(s)$ için $t'(s) = \bar{T}'(s)$ timelike olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(s) &= \sqrt{2\kappa(s)}, \\ \bar{\tau}(s) &= -\frac{\kappa'(s)}{2\kappa(s)} = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

dır. Burada $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = -1$, $\langle \bar{N}, \bar{B} \rangle = 0$, $\kappa > 0$, $\kappa = \pm 1$ dır.

İspat $\alpha'(s) = t(s)$ için $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olmak üzere $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ üçlünün $\bar{T}'(s) = t'(s)$ timelike olma durum için Frenet formülleri

$$\begin{aligned} \bar{T}'(s) &= \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) \\ \bar{N}'(s) &= \bar{\kappa}(s)\bar{T}(s) + \bar{\tau}(s)\bar{B}(s) \\ \bar{B}'(s) &= \bar{\tau}(s)\bar{T}(s) \end{aligned}$$

şeklindedir (Lopez 2008).

O halde α eğrisi için (4.1.4) eşitliğinden ve $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ çatısının Frenet for-

müllerinden

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= \kappa(s)\alpha(s) - y(s) = \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s)\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\langle \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s), \bar{\kappa}(s)\bar{N}(s) \rangle = \langle \kappa(s)\alpha(s) - y(s), \kappa(s)\alpha(s) - y(s) \rangle \quad (4.1.35)$$

olup, $\langle \bar{N}, \bar{N} \rangle = -1$ ve (4.1.5) $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle y, y \rangle = 0$, $\langle \alpha, y \rangle = 1$ eşitliklerinden ve (4.1.35) eşitliğinden

$$\bar{\kappa}^2(s) = 2\kappa(s)$$

olur. Dolayısıyla

$$\bar{\kappa}(s) = \sqrt{2\kappa(s)} \quad (4.1.36)$$

elde edilir.

α spacelike eğrisinin yarı-ortonormal çatı alanı için eğriliği $\bar{\kappa}(s) \neq 0$ dır, ayrıca $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{2\kappa(s)}$ eşitliğinden $\kappa > 0$ olmalıdır.

α eğrisi için (4.1.4) eşitliğinden, $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ çatısının Frenet formüllerinden ve (4.1.36) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\bar{N}(s) = \frac{\bar{T}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{t'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{\kappa(s)\alpha(s) - y(s)}{\bar{\kappa}(s)} = \frac{\kappa(s)\alpha(s) - y(s)}{\sqrt{2\kappa(s)}}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\bar{N}'(s) = \left(\frac{\kappa(s)}{\sqrt{2\kappa(s)}}\alpha(s) - \frac{1}{\sqrt{2\kappa(s)}}y(s) \right)' \quad (4.1.37)$$

olup, $\bar{N}'(s)$ in eşiti yerine yazılırsa,

$$(\bar{\kappa}(s)t(s) + \bar{\tau}(s)\bar{B}(s)) = \left(\frac{\kappa}{\sqrt{2\kappa}} \right)' \alpha(s) + \frac{\kappa}{\sqrt{2\kappa}} \alpha'(s) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \right)' y(s) - \left(\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \right) y'(s)$$

(burada $\kappa = \kappa(s)$) dır. α eğrisi için (4.1.4) eşitliklerinden

$$\bar{\kappa}t + \bar{\tau}\bar{B} = \frac{\kappa'}{2\sqrt{2\kappa}}\alpha + \frac{\kappa}{\sqrt{2\kappa}}t + \frac{\kappa'}{2\kappa\sqrt{2\kappa}}y + \frac{\kappa}{\sqrt{2\kappa}}t$$

dır. Bu eşitlikte (4.1.36) eşitliğinden yararlanılarak her iki tarafta da $t(s)$ in kat-sayıları eşit olduğu görülür. O halde

$$\bar{\tau}(s)\bar{B}(s) = \frac{\kappa'(s)}{2\sqrt{2\kappa(s)}}(\alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}y(s)) \quad (4.1.38)$$

şeklindedir. $\langle \bar{B}, \bar{B} \rangle = 1$ olduğundan ve (4.1.5) $\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle y, y \rangle = 0$, $\langle \alpha, y \rangle = 1$ eşitliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \langle \bar{\tau}(s)\bar{B}(s), \bar{\tau}(s)\bar{B}(s) \rangle &= \frac{\kappa'(s)}{\sqrt{2\kappa(s)}} \frac{1}{\kappa(s)} \\ \bar{\tau}^2(s) &= \frac{\kappa'^2(s)}{4\kappa^2(s)} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{\tau}(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \right) = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} \quad (4.1.39)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Buradan şu sonuç çıkarılabilir: $T = t = \alpha'$, $Z = \alpha$, $Y = y$ olmak üzere, herhangi bir lightlike yüzey için verilen eğri-yüzey (şerid) çatısındaki eğrilikler, yüzeyin lightlike koni olması durumunda $\kappa_z = \langle \alpha'', y \rangle = \kappa$, $\kappa_y = \langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$, $\tau_y = \langle \alpha', y \rangle = 0$ halini alır. Dolayısıyla yüzeyin lightlike koni olması durumunda, Teorem (3.1.4) de eğrilikler yerine yazılırsa, Teorem (4.1.6) de verilen (4.1.34) eşitliği sağlanır.

Teorem 4.1.7 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yarı-ortonormal çatı için $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik, torsiyon, asli normal ve binormalleri, sırasıyla, $\bar{\kappa}$, $\bar{\tau}$, $\bar{N}$ ve $\bar{B}$ ile gösterilsin, $\alpha'(s) = t(s)$ için $t'(s) = \bar{T}'(s)$ lightlike olmak üzere α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\kappa = 0$ dır.

İspat $\alpha'(s) = t(s)$ için $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olmak üzere $\{\bar{T}(s), \bar{N}(s), \bar{B}(s)\}$ üçlüsünün $\bar{T}'(s) = t'(s)$ timelike olma durum için Frenet formülleri

$$\begin{aligned}\bar{T}'(s) &= \bar{N}(s) \\ \bar{N}'(s) &= \bar{\tau}(s)\bar{N}(s) \\ \bar{B}'(s) &= -\bar{T}(s) - \bar{\tau}(s)\bar{B}(s)\end{aligned}$$

şeklindedir (Lopez 2008).

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= t(s) \\ t'(s) &= \kappa(s)\alpha(s) - y(s) = \bar{N}(s)\end{aligned}\tag{4.1.40}$$

eşitliğinden

$$\langle \kappa(s)\alpha(s) - y(s), \kappa(s)\alpha(s) - y(s) \rangle = \langle \bar{N}(s), \bar{N}(s) \rangle$$

şeklindedir. Buradan $\langle \bar{N}(s), \bar{N}(s) \rangle = 0$ olduğundan ve (4.1.4) eşitliklerinden,

$$-2\kappa(s) = 0 \text{ yani, } \kappa(s) = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $t' = \alpha''$ lightlike olması durumunda $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrileri Teorem (4.1.3) (i). de verilen şekildeki eğrilere dir. Yani, bu durumda $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{E}_1^3$ için α koni eğrileri $\alpha(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3$ şeklinde ifade edilir.

Burada $T = t = \alpha'$, $Z = \alpha$, $Y = y$ olmak üzere, herhangi bir lightlike yüzey için verilen eğri-yüzey çatısındaki eğrilikler, yüzeyin lightlike koni olması durumunda $\kappa_z = \langle \alpha'', y \rangle = \kappa$, $\kappa_y = \langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$, $\tau_y = \langle \alpha', y \rangle = 0$ halini alır. Dolayısıyla Teorem (3.1.5) de verilen $\kappa_y \kappa_z = 0$ eşitliği yüzeyin lightlike koni olması durumunda $\kappa = 0$ halini alır.

Teorem 4.1.8 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ düzlemsel bir eğridir ancak ve ancak $\alpha(s)$ in koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sabittir

(Liu 2004).

İspat $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$ spacelike eğrisi için $t' = \alpha''$ lightlike olması durumunda $\kappa = 0$ (sabit) olup α düzlemsel eğridir. Aynı şekilde α düzlemsel eğrisi için $\kappa = 0$ dır (yani $t' = \alpha''$ lightlike olması durumu için ispat Teorem (4.1.7) den açıktır).

$\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$ spacelike eğrisi için $t' = \alpha''$ timelike veya spacelike olması durumunda,

($\Rightarrow$) $\alpha(s)$ düzlemsel bir eğri olsun. $\alpha(s)$ düzlemsel bir eğri ise, $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yarı -ortonormal çatı için torsiyon $\bar{\tau} = 0$ dır. Dolayısıyla Teorem (4.1.5) ve Teorem (4.1.6) dan $\bar{\tau}(s) = -\frac{\kappa'(s)}{2\kappa(s)} = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)}$ olup $\kappa'(s) = 0$ dır. Buradan α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu sabit olur.

($\Leftarrow$) Tersine koni eğrilik fonksiyonu sabit olsun. Bu durumda $\kappa'(s) = 0$ dır. Teorem (4.1.5) ve Teorem (4.1.6) dan $\bar{\tau}(s) = -\frac{\kappa'(s)}{2\kappa(s)}$ olduğu biliniyor, bu durumda $\bar{\tau}(s) = 0$ olup α eğrisi düzlemseldir.

Teorem 4.1.9 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametreli, Q^2 üzerinde yarı-ortonormal çatısı için $\bar{N}$ normal vektörü lightlike olmayan bir eğri olsun. $\alpha(s)$ bir Bertrand eğrisidir ancak ve ancak $\alpha(s)$ eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$,

(i) sıfırdan farklı bir sabite

veya

(ii) $\lambda\mu \neq 0$ olmak üzere λ ve μ sabitleri için $\frac{\varepsilon}{2}(\lambda + e^{\frac{s}{\mu}})^{-2}$, $\varepsilon = \pm 1$, fonksiyonuna eşittir (Liu 2004).

İspat ($\Rightarrow$) $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$ yarı-ortonormal çatısı için $\bar{N}$ normal vektörü lightlike olmayan bir Bertrand eğrisi olsun. O halde α eğrisinin $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca yarı -ortonormal çatı için eğriliği $\bar{\kappa}(s)$ ve torsiyonu $\bar{\tau}(s)$ olmak üzere

$$\lambda\bar{\kappa} + \mu\bar{\tau} = 1 \quad (4.1.41)$$

eşitliği bazı $\lambda \neq 0$ ve μ sabitleri için sağlanır (Lopez 2008, Peng, Ying ve Liu 2000). $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha(s)$ eğrisi boyunca α'' nün lightlike olmaması durumunda yarı -ortonormal çatı için eğriligi $\bar{\kappa}(s) \neq 0$ dır.

$\mu = 0$ olursa $\bar{\kappa} \neq 0$ sabit olur. Bu durumda (4.1.29) ve (4.1.36) eşitliklerinden α'' nün spacelike ve timelike olma durumlarına göre, sırasıyla, $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{-2\kappa(s)}$ ve $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{2\kappa(s)}$ olup α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu κ sıfırdan farklı bir sabit olur. Dolayısıyla α eğrisi Teorem (4.1.3) de verilen (4.1.16), (4.1.17) ve (4.1.18) eşitliklerden biri şeklinde yazılabilir.

$\mu \neq 0$ ve $\kappa \neq$ sabit olsun. (4.1.33) ve (4.1.39) eşitliklerinden $\bar{\tau}(s) = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)}$ olup, bu eşitlik (4.1.41) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\lambda \bar{\kappa}(s) - \mu \frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)} = 1 \quad (4.1.42)$$

elde edilir. (4.1.42) eşitliğinden,

$$-\mu \bar{\kappa}'(s) + \lambda \bar{\kappa}^2(s) - \bar{\kappa}(s) = 0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}'(s) &= -\frac{\lambda}{\mu} \bar{\kappa}^2(s) + \frac{1}{\mu} \bar{\kappa}(s) \\ \frac{d\bar{\kappa}(s)}{-\frac{\lambda}{\mu} \bar{\kappa}^2(s) + \frac{1}{\mu} \bar{\kappa}(s)} &= ds \end{aligned}$$

en son olarak

$$\mu \ln(-\lambda \bar{\kappa}(s) + 1) - \ln(\bar{\kappa}(s)) = s + c$$

bulunur, son eşitlik yardımıyla

$$\bar{\kappa}(s) = (\lambda + e^{\frac{s}{\mu} + c})^{-1}$$

elde edilir. (4.1.29) ve (4.1.36) eşitliklerinden α'' nün spacelike ve timelike olma durumlarına göre, sırasıyla, $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{-2\kappa(s)}$ ve $\bar{\kappa}(s) = \sqrt{2\kappa(s)}$ olup α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$, $\kappa(s) = -\frac{1}{2}(\lambda + e^{\frac{s}{\mu} + c})^{-2}$ ve $\kappa(s) = \frac{1}{2}(\lambda + e^{\frac{s}{\mu} + c})^{-2}$

şeklinde elde edilir. Yani α , Bertrand eğrisi için,

$$\kappa(s) = \frac{\varepsilon}{2}(\lambda + e^{\frac{s}{\mu}+c})^{-2} \quad (4.1.43)$$

olup istenilen koni eğrilik fonksiyonu elde edilir.

($\Leftarrow$) $\alpha(s)$ eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı bir sabite eşit olsun.

Dolayısıyla (4.1.29) ve (4.1.36) eşitliklerinden $\bar{\kappa}(s)$ de sıfırdan farklı bir sabit olur dolayısıyla eğri bir Bertrand eğrisidir. $\alpha : I \rightarrow Q^2$ eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu

onu $\kappa(s) = \frac{\varepsilon}{2}(\lambda + e^{\frac{s}{\mu}+c})^{-2}$ olsun. Buradan (4.1.29) ve (4.1.36) eşitliklerinden $\bar{\kappa}(s)$,

$\bar{\kappa}(s) = (\lambda + e^{\frac{s}{\mu}+c})^{-1}$ şeklindedir. (4.1.33) ve (4.1.39) eşitliklerinden $\bar{\tau}(s) = -\frac{\bar{\kappa}'(s)}{\bar{\kappa}(s)}$

olup, $\bar{\tau}(s) = -\frac{1}{\mu}(e^{\frac{s}{\mu}+c}) \frac{1}{\lambda + e^{\frac{s}{\mu}+c}}$ şeklindedir. Dolayısıyla $\bar{\kappa}(s)$ ve $\bar{\tau}(s)$ den $\lambda\bar{\kappa} + \mu\bar{\tau} = 1$

elde edilir. O halde $\alpha(s)$, E_1^3 de bir Bertrand eğrisidir.

Tanım 4.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili, Q^2 üzerinde bir eğri ve $\{t(s), \alpha(s), y(s)\}$ E_1^3 de α eğrisi için asimptotik çatı alanı olmak üzere, $\langle y(s), y(s) \rangle = 0$ olduğundan $\hat{\alpha}(s) = y(s)$ alınır $\hat{\alpha}(s)$ de yine Q^2 üzerinde bir eğridir. $\hat{\alpha}(s)$ eğrisine $\alpha(s)$ eğrisinin **arkadaş eğrisi** denir (Liu 2004).

Teorem 4.1.10 $\hat{\alpha}(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin arkadaş eğrisi olmak üzere $\hat{\alpha}(s)$ eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\hat{\kappa}$ ile $\alpha(s)$ eğrisinin sıfırdan farklı koni eğrilik fonksiyonu κ için

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \quad (4.1.44)$$

eşitliği sağlanır (Liu 2004).

İspat $\hat{\alpha}(s) = y(s)$ olmak üzere, $\hat{\alpha}(s)$ in yay parametresini $\hat{s}$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}'(\hat{s}) &= \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right) \alpha'(s) = \hat{t}(\hat{s}) \\ &= \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right) y'(s) \\ &= \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right) (-\kappa(s)t(s))\end{aligned}\tag{4.1.45}$$

elde edilir. $\hat{\alpha}(s)$ eğrisini yay parametresi $\hat{s}$ için $\langle \hat{\alpha}'(\hat{s}), \hat{\alpha}'(\hat{s}) \rangle = 1$ dir. Bu eşitlikten ve (4.1.45) eşitliğinden;

$$\langle \hat{\alpha}'(\hat{s}), \hat{\alpha}'(\hat{s}) \rangle = \left\langle \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right) (-\kappa(s)t(s)), \left(\frac{ds}{d\hat{s}}\right) (-\kappa(s)t(s)) \right\rangle\tag{4.1.46}$$

olup,

$$\frac{d\hat{s}}{ds} = \pm\kappa(s) = \varepsilon\kappa(s), \quad (\varepsilon = \pm 1)\tag{4.1.47}$$

elde edilir. (4.1.45) ve (4.1.47) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}'(\hat{s}) &= -\varepsilon\alpha'(s) \\ \hat{t}(\hat{s}) &= -\varepsilon t(s)\end{aligned}\tag{4.1.48}$$

elde edilir. (Elde edilen son eşitlik gösterir ki; α eğrisinin birim teğet vektörü ile α nın arkadaş eğrisi olan $\hat{\alpha}$ nın birim teğet vektörü lineer bağımlıdır.)

(4.1.4), (4.1.46), (4.1.48) ve $\hat{\alpha}(s) = y(s)$ eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}-\varepsilon(\kappa(s)\alpha(s) - y(s)) &= \left(\frac{d\hat{s}}{ds}\right)(\hat{\kappa}(\hat{s})\hat{\alpha}(\hat{s}) - \hat{y}(\hat{s})) \\ &= \varepsilon\kappa(s)(\hat{\kappa}(\hat{s})y(s) - \hat{y}(\hat{s}))\end{aligned}\tag{4.1.49}$$

elde edilir. (4.1.49) eşitliğinden $\kappa(s) \neq 0$ için,

$$\hat{\kappa} = \frac{1}{\kappa}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.11 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili, Q^2 üzerinde space-like bir eğri ve α nın koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ olsun. $\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)}\alpha(s)$ konformal eğrisinin koni eğrilik fonksiyonu $\tilde{\kappa}$ olmak üzere $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit ise $\tilde{\kappa} = e^{-2\sigma}\kappa$ dir.

İspat $\alpha : I \rightarrow Q^2$,iki boyutlu lightlike koni üzerinde s yay parametrelili bir eğri ve α nın koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ olmak üzere, koni eğrilik fonksiyonu tanımı ve (4.1.4) eşitliklerinden

$$\kappa = -\frac{1}{2} \langle \alpha'', \alpha'' \rangle$$

olduğu görülmektedir.

$$\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)}\alpha(s) \quad (4.1.50)$$

eğrisi için

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{\alpha}(s), d\tilde{\alpha}(s) \rangle &= \langle \sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s), \sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s) \rangle \\ &= e^{2\sigma(s)} \langle d\alpha(s), d\alpha(s) \rangle \end{aligned}$$

eşitliğinden $\tilde{\alpha}$ ile α eğrisinin konformal olduğu görülür. Ayrıca

$$\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle = e^{\sigma(s)} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle$$

olup $\langle \tilde{\alpha}(s), \tilde{\alpha}(s) \rangle = 0$ dir. Dolayısıyla $\tilde{\alpha}(s)$ de Q^2 üzerinde bir koni eğrisidir.

$\tilde{\alpha}$ eğrisinin yay parametresi $\tilde{s}$ olmak üzere koni eğrilik fonksiyonu,

$$\tilde{\kappa} = -\frac{1}{2} \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle$$

şeklindedir. (4.1.50) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) &= \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \\ &= \left(\frac{d(e^{\sigma(s)}\alpha(s))}{ds} \right) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \\ &= (\sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s)) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

elde edilir.

Ayrıca $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi, $\tilde{s}$ yay parametresi için $\langle \tilde{\alpha}'(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) \rangle = 1$ eşitliğini sağlar.

$$\begin{aligned}\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle &= 1 \\ \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle &= 0\end{aligned}$$

ve eşitliklerinden

$$\frac{ds}{d\tilde{s}} = e^{-\sigma(s)} \quad (4.1.52)$$

bulunur. (4.1.51) ve (4.1.52) eşitliklerinden

$$\tilde{\alpha}'(\tilde{s}) = \sigma'(s)\alpha(s) + \alpha'(s) \quad (4.1.53)$$

olup sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}''(\tilde{s}) &= \frac{d^2\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}^2} = \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}}\right) \\ &= \frac{d}{ds}(\sigma'(s)\alpha(s) + \alpha'(s))\left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right) \\ &= e^{-\sigma(s)}(\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s))\end{aligned} \quad (4.1.54)$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \tilde{\alpha}''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) \rangle = e^{-2\sigma(s)}(\sigma'^2(s) - 2\sigma''(s) + \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle) \quad (4.1.55)$$

bulunur. σ sabit fonksiyonu için $\sigma'(s) = 0$ ve $\sigma''(s) = 0$ dır. Dolayısıyla κ ve $\tilde{\kappa}$ tanımından,

$$\tilde{\kappa} = e^{-2\sigma}\kappa$$

olup istenilen elde edilir.

4.2 $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski Uzayında Üç Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler

Bu bölümde üç boyutlu lightlike koni üzerinde bir α eğrisi için asimptotik çatı alanı verilerek ve α eğrisinin koni eğrilik fonksiyonlarından yararlanılarak α eğrisi için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$, $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanıdır. $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ spacelike eğrisinin $t(s) = \alpha'(s)$ birim teğet vektör alanından yararlanarak α yer vektörünü içine alan bir çatı alanı oluşturmak için $\alpha(s)$ in spacelike normal uzayı V^3 ile gösterilmek üzere

$$\begin{aligned}\langle y(s), y(s) \rangle &= \langle t(s), y(s) \rangle = \langle t(s), \beta(s) \rangle = \langle \alpha(s), \beta(s) \rangle = \langle y(s), \beta(s) \rangle = 0, \\ \langle \alpha(s), y(s) \rangle &= \langle \beta(s), \beta(s) \rangle = 1, \\ V^3 &= \{sp\{\alpha, y, t\}\}^\perp, \quad sp\{\alpha, y, t, V^3\} = \mathbb{E}_1^4\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

şartlarını sağlayan $y(s)$ vektörü ve $\beta \in V^3$ spacelike vektörü bulunmalıdır (Liu 2004).

Tanım 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ yay parametrelili bir eğri olmak üzere

$$\begin{aligned}\kappa_1(s) &= \langle \alpha''(s), y(s) \rangle \\ \kappa_2(s) &= \langle \beta'(s), y(s) \rangle \\ \kappa_3(s) &= \langle \alpha''(s), \beta(s) \rangle\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

eşitlikleriyle belirli sayılara α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki koni eğrilikleri denir (Liu 2004).

Teorem 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ yay parametrelili bir eğri olmak üzere $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörütlü çatısı Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı oluşturur. Ayrıca $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörütlüsü için

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_1(s)\alpha(s) + \kappa_3(s)\beta(s) - y(s) \\ \beta'(s) = -\kappa_3(s)t(s) + \kappa_2(s)\alpha(s) \\ y'(s) = -\kappa_1(s)t(s) - \kappa_2(s)\beta(s) \end{cases} \quad (4.2.3)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada s , α eğrisinin yay parametresi, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ koni eğrilik fonksiyonlarıdır.

İspat Tanım (4.3) den, $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ dörütlüsü,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle = \langle y, y \rangle = \langle t, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle y, \beta \rangle = \langle \alpha, t \rangle = \langle y, t \rangle = 0, \\ \langle \alpha, y \rangle = \langle t, t \rangle = \langle \beta, \beta \rangle = 1 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

şartlarını sağladığı için Q^3 üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi boyunca $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$, $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanıdır.

$\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ için, $t(s) = \alpha'(s)$ spacelike teğet vektördür.

Dolayısıyla (4.2.3) deki birinci eşitlik açıktır.

Her $s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ dörütlüsü $T_{\alpha(s)}(\mathbb{E}_1^4)$ uzayı için $\alpha(s)$ eğrisi boyunca asimptotik çatı alanı olduğundan

$$t' \in Sp\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$$

olup

$$t' = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta + \lambda_4 y \quad (4.2.5)$$

şeklinde yazılır. (4.2.5) eşitliğinin her iki tarafı t ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden

$\lambda_1 = \langle t', t \rangle = 0$ elde edilir. Benzer şekilde (4.2.5) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla,

α, β, y ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden ve Tanım (4.2.1) den

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= \langle t', \alpha \rangle = -1 \\ \lambda_3 &= \langle t', \beta \rangle = \langle \alpha'', \beta \rangle = \kappa_3 \\ \lambda_2 &= \langle t', y \rangle = \langle \alpha'', y \rangle = \kappa_1\end{aligned}$$

bulunur. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ değerleri (4.2.5) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.2.3) de istenilen ikinci eşitlik ispatlanmış olur.

Her $s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ asimptotik çatısı için $\beta' \in Sp\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$,

$$\beta' = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta + \lambda_4 y \quad (4.2.6)$$

dır. (4.2.6) eşitliğinin her iki tarafı t ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden ve koni eğriliği tanımından $\lambda_1 = \langle \beta', t \rangle = -\kappa_3$ elde edilir. Benzer şekilde (4.2.6) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, α, β, y ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden ve Tanım (4.2.1) den

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= \langle \beta', \alpha \rangle = -\langle \beta, \alpha' \rangle = 0 \\ \lambda_3 &= \langle \beta', \beta \rangle = 0 \\ \lambda_2 &= \langle \beta', y \rangle = \kappa_2\end{aligned}$$

bulunur. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ değerleri (4.2.6) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.2.3) de istenilen üçüncü eşitlik ispatlanmış olur.

Son olarak, her $s \in I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ dörtlüsü için

$$y' \in Sp\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$$

olup

$$y' = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta + \lambda_4 y \quad (4.2.7)$$

şeklinde yazılır. (4.2.7) eşitliğinin her iki tarafı t ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden ve koni eğrilikleri tanımından $\lambda_1 = \langle y', t \rangle = -\langle t', y \rangle = -\kappa_1$ elde edilir. Benzer şekilde (4.2.6) eşitliğinin her iki tarafı, sırasıyla, α, β, y ile çarpılırsa (4.2.4) eşitliklerinden ve Tanım (4.2.1) den

$$\lambda_4 = \langle y', \alpha \rangle = -\langle y, \alpha' \rangle = 0$$

$$\lambda_3 = \langle y', \beta \rangle = -\langle \beta', y \rangle = -\kappa_2$$

$$\lambda_2 = \langle y', y \rangle = 0$$

bulunur. Bulunan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ değerleri (4.2.7) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.2.3) de istenilen son eşitlik ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.2 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ s yay parametrelili bir eğri ve koni eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ün herbiri sabit olsun. O halde α eğrisi, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere aşağıdaki şekillerde yazılabilir (Liu 2004):

- i) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ için $\alpha(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3 + a_4$
- ii) $\kappa_2 = \kappa_3 = 0, \kappa_1 > 0$ için $\alpha(s) = a_1 \sinh(\sqrt{2\kappa_1})s + a_2 \cosh(\sqrt{2\kappa_1})s + a_3 + a_4$
- iii) $\kappa_2 = \kappa_3 = 0, \kappa_1 < 0$ için $\alpha(s) = a_1 \sin(\sqrt{-2\kappa_1})s + a_2 \cos(\sqrt{-2\kappa_1})s + a_3 + a_4$
- iv) $\kappa_2 \neq 0$ için $\alpha(s) = a_1 \sinh ls + a_2 \cosh ls + a_3 \sin \mu s + a_4 \cos \mu s$, $l > 0, \mu > 0$, $\pm l$ ve $\pm \sqrt{-1}\mu$ $r^4 - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)r^2 - \kappa_2^2 = 0$ denkleminin reel ve imajiner kökleridir.

İspat (4.2.3) deki eşitliklerden ve $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sabitler olmak üzere,

$$t'(s) = \alpha''(s) = \kappa_1 \alpha(s) + \kappa_3 \beta(s) - y(s)$$

için s ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \kappa_1 t + \kappa_3 (\kappa_2 \alpha - \kappa_3 t) - (-\kappa_1 t - \kappa_2 \beta) \\ &= \kappa_2 \kappa_3 \alpha + (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha' + \kappa_2 \beta \end{aligned}$$

şeklinde olup, tekrar bu eşitlikte s ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}
\alpha'''' &= \kappa_2 \kappa_3 \alpha' + (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha'' + \kappa_2 \beta' \\
&= \kappa_2 \kappa_3 t + (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha'' + \kappa_2 (\kappa_2 \alpha - \kappa_3 t) \\
&= \kappa_2^2 \alpha + (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha''
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\begin{cases} \kappa_2 = 0 & \text{için,} & \alpha''' - (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha' = 0, \\ \kappa_2 \neq 0 & \text{için,} & \alpha'''' - (2\kappa_1 - \kappa_3^2) \alpha'' - \kappa_2^2 \alpha = 0 \end{cases}$$

elde edilir.

$\kappa_2 = 0$ için (4.2.3) eşitliklerinden $\kappa_3 = 0$ olur. κ_1 sabit olmak üzere yukarıdaki eşitlik çözümlerse,

$\kappa_2 = \kappa_3 = 0$ için;

i) $\kappa_1 = 0$ olması halinde, $\alpha''' = 0$ dır. Buradan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{E}_1^4$ için,

$$\alpha(s) = a_1 s^2 + a_2 s + a_3 + a_4$$

şeklinde yazılır.

ii) $\kappa_1 > 0$ olması halinde $\alpha''' - 2\kappa_1 \alpha' = 0$ olup karakteristik denklemi $r^3 = 2\kappa_1 r$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 0, r_{2,3} = \pm \sqrt{2\kappa_1}$ dır. Buradan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{E}_1^4$ için,

$$\alpha(s) = a_1 \sinh(\sqrt{2\kappa_1})s + a_2 \cosh(\sqrt{2\kappa_1})s + a_3 + a_4, \quad 2\kappa_1 > 0$$

şeklindedir.

iii) $\kappa_1 < 0$ olması halinde $\alpha''' - 2\kappa_1 \alpha' = 0$ olup karakteristik denklemi $r^3 = 2\kappa_1 r$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri $r_1 = 0, r_{2,3} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{-2\kappa_1}$ dır. Buradan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{E}_1^4$ için,

$$\alpha(s) = a_1 \sin(\sqrt{-2\kappa_1})s + a_2 \cos(\sqrt{-2\kappa_1})s + a_3 + a_4, \quad 2\kappa_1 < 0$$

şeklindedir.

iv) $\kappa_2 \neq 0$ olmak üzere (4.2.8) $\alpha'''' - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)\alpha'' - \kappa_2^2\alpha = 0$ denklemi çözümlerse α eğrisi diğer durumlar da olduğu gibi karakterize edilebilir. $\alpha'''' - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)\alpha'' - \kappa_2^2\alpha = 0$ diferensiyel denkleminin karakteristik denklemi $r^4 - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)r^2 - \kappa_2^2 = 0$ şeklindedir. Karakteristik denklemin kökleri,

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} + (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2}},$$

$$r_{3,4} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2}}$$

şeklinde olup α eğrisini daha rahat ifade edebilmek için,

$$l^2 = \frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} + (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2}$$

$$\mu^2 = \frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2}$$

alınırsa $\pm l$ ve $\pm \sqrt{-1}\mu$, $r^4 - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)r^2 - \kappa_2^2 = 0$ denkleminin reel ve imajiner kökleridir. Buradan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{E}_1^4$ için

$$\alpha(s) = a_1 \sinh ls + a_2 \cosh ls + a_3 \sin \mu s + a_4 \cos \mu s$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ s yay parametrelili bir eğri ve koni eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olsun. Teorem (4.2.2) den yararlanılarak $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sabitlerinin durumlarına göre $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha(s)$ eğri örnekleri verilebilir (Liu 2004):

i) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, s, \frac{1}{2}s^2, 1\right),$$

Q^3 üzerinde s yay parametrelili spacelike bir eğri örneği olarak verilebilir.

Gerçekten $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0$ dir. α eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$t(s) = \alpha'(s) = (s, 1, s, 0)$$

olup $\langle t(s), t(s) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ dir. Ayrıca

$$\langle y(s), y(s) \rangle = \langle t(s), y(s) \rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), y(s) \rangle = 1$$

şartlarını sağlayan tek türlü belli olan lightlike y vektör alanı $y = (-1, 0, -1, 0)$ ve

$$\langle t, \beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \langle y, \beta \rangle = 0, \quad \langle \beta, \beta \rangle = 1$$

şartlarını sağlayan β vektör alanı $\beta = (1, 0, 1, 1)$ şeklindedir. Dolayısıyla

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, s, \frac{1}{2}s^2, 1\right), t(s) = (s, 1, s, 0), y(s) = (-1, 0, -1, 0), \beta(s) = (1, 0, 1, 1)$$

olmak üzere $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlü çatısı Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı oluşturur.

ii) $\kappa_2 = \kappa_3 = 0, \kappa_1 > 0$ olmak üzere, $a^2 + b^2 \neq 0$ için

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_1(a^2 + b^2)}}(\sqrt{a^2 + b^2} \cosh(\sqrt{2\kappa_1})s, \sqrt{a^2 + b^2} \sinh(\sqrt{2\kappa_1})s, a, b),$$

Q^3 üzerinde s yay parametrelili spacelike eğri örneği olarak verilebilir. Eğrinin birim spacelike teğet vektörü

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_1(a^2 + b^2)}}(\sqrt{2\kappa_1(a^2 + b^2)} \sinh(\sqrt{2\kappa_1})s, \sqrt{2\kappa_1(a^2 + b^2)} \cosh(\sqrt{2\kappa_1})s, 0, 0)$$

şeklindedir.

iii) $\kappa_2 = \kappa_3 = 0, \kappa_1 < 0$ olmak üzere, $a^2 - b^2 > 0$ için

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_1(b^2 - a^2)}}(a, b, \sqrt{a^2 - b^2} \cos(\sqrt{-2\kappa_1})s, \sqrt{a^2 - b^2} \sin(\sqrt{-2\kappa_1})s),$$

Q^3 üzerinde s yay parametrelili spacelike eğri örneği olarak verilebilir. Eğrinin birim

spacelike teğet vektörü

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_1(b^2 - a^2)}}(0, 0, -\sqrt{2\kappa_1(b^2 - a^2)} \sin(\sqrt{-2\kappa_1}s), -\sqrt{2\kappa_1(b^2 - a^2)} \cos(\sqrt{-2\kappa_1}s))$$

şeklindedir.

iv) $\kappa_2 \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{l^2 + \mu^2}}(\cosh(ls), \sinh(ls), \sin(\mu s), \cos(\mu s)) ,$$

Q^3 üzerinde s yay parametrelili spacelike eğri örneği olarak verilebilir. Eğrinin birim spacelike teğet vektörü

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{l^2 + \mu^2}}(l \sinh(ls), l \cosh(ls), \mu \cos(\mu s), \mu \sin(\mu s))$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} + (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2}, \\ \mu^2 &= \frac{\sqrt{(2\kappa_1 - \kappa_3^2)^2 + 4\kappa_2^2} - (2\kappa_1 - \kappa_3^2)}{2} \end{aligned} \quad \text{dir.}$$

$\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ $\alpha(s)$ lightlike koninin teğet düzleminde yatan tek lightlike vektör olduğu için $y(s)$ lightlike vektör teğet düzlemde yatamaz yani $y(s) \notin Sp\{\alpha(s), \alpha'(s)\}$ dir. Ancak α lightlike vektör olup $y(s)$ lightlike vektörü ile arasında ortogonalite söz konusu olmadığı için $y(s)$, α nın spacelike normal uzayında da yatamaz.

Aşağıdaki Lemma ile $y(s)$ vektörünü karakterize edilebilir.

Lemma 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, üç boyutlu lightlike koni (Q^3) üzerinde bir eğri olsun. $\langle y(s), y(s) \rangle = 0$ ve $\langle y(s), \alpha(s) \rangle = 1$ olacak şekilde bir tek $y(s) \in \{\alpha(s), \alpha''(s)\}$ vektörü vardır (Takizawa ve Tsukada 2009).

O halde $y(s)$ lightlike vektörü

$$y(s) = \lambda_1 \alpha(s) + \lambda_2 \alpha''(s) \quad (4.2.8)$$

şeklinde yazılabilir.

$$y(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s) \quad (4.2.9)$$

almırsa $\langle y(s), y(s) \rangle = \langle \alpha'(s), y(s) \rangle = 0$, $\langle \alpha(s), y(s) \rangle = 1$ eşitlikleri elde edilir. Buradan $t(s) = \alpha'(s)$ olmak üzere $\det(t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)) = 1$ şartını sağlayacak şekilde $\beta(s)$ seçilmelidir. (4.2.9) dan

$$t'(s) = \alpha''(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - y(s) = \kappa(s)\alpha(s) - y(s)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\alpha = \alpha(s) : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa(s)\alpha(s) - y(s) \\ \beta'(s) = \tau(s)\alpha(s) \\ y'(s) = -\kappa(s)t(s) - \tau(s)\beta(s) \end{cases} \quad (4.2.10)$$

şeklindedir (Liu 2011).

Tanım 4.2.2 $\alpha = \alpha(s) : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, Q^3 de spacelike bir eğri olmak üzere (4.2.10) daki $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ fonksiyonlarına, sırasıyla, Q^3 üzerindeki α eğrisinin (birinci) koni eğriliği ve koni torsiyonu (veya ikinci koni eğriliği) denir. $\{t(s), \alpha(s), \beta(s), y(s)\}$ çatı alanına da $\alpha(s)$ eğrisinin koni Frenet çatısı denir (Liu 2011).

Önerme 4.2.1 $\alpha = \alpha(s) : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, s yay parametreli bir eğri olmak üzere, α nın koni eğriliği $\kappa(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle$ ve koni torsiyonu $\tau(s) = \sqrt{\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2}$ ile verilir. Ayrıca α nın koni Frenet çatı alanı

$$\begin{aligned} y(s) &= -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s) \\ \tau(s)\beta(s) &= \alpha'''(s) + \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha'(s) + \langle \alpha'''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

eşitlikleri ile bellidir (Liu 2011).

Uyarı 4.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ yay parametrelili bir eğri olmak üzere Teorem (4.2.1) den biliniyor ki $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlü çatısı Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı oluşturur. Ayrıca $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlüsü için Frenet formülleri

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_1(s)\alpha(s) + \kappa_3(s)\beta(s) - y(s) \\ \beta'(s) = -\kappa_3(s)t(s) + \kappa_2(s)\alpha(s) \\ y'(s) = -\kappa_1(s)t(s) - \kappa_2(s)\beta(s) \end{cases}$$

şeklinde dir. Kolayca görülüyor ki $\kappa_3 = 0$ dır ancak ve ancak $y(s)$;

$$y(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s)$$

(4.2.9) eşitliğini sağlar.

$\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ s yay parametrelili bir eğri ve koni eğrilik fonksiyonları $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olsun. Örnek (4.2.1) de verilen eğri örnekleri $y(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s)$ olması durumuna göre incelenirse, $\kappa_3 = 0$ olur. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ fonksiyonları α eğrisinin koni eğriligi ve koni torsiyonunu gösterebilirler. Bu durumda aşağıdaki koni eğri örnekleri verilebilir;

Örnek 4.2.2 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere,

i)

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}s^2 + 1, s, \frac{1}{2}s^2, 1 \right),$$

Q^3 de s yay parametrelili spacelike bir eğridir ve α nın koni eğriligi $\kappa(s) = 0$, koni torsiyonu $\tau(s) = 0$ dır. Gerçekten $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0$, α eğrisinin birim teğet vektör alanı

$$t(s) = \alpha'(s) = (s, 1, s, 0)$$

dır. $\langle t(s), t(s) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ dir. $\kappa(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle$ olmak üzere $\alpha''(s) = (1, 0, 1, 0)$ olup, $\kappa(s) = 0$ dir. $\tau(s) = \sqrt{\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2}$ için de $\alpha'''(s) = (0, 0, 0, 0)$ olup $\tau(s) = 0$ dir.

ii) $a^2 + b^2 \neq 0$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = (\sqrt{a^2 + b^2} \cosh(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}), \sqrt{a^2 + b^2} \sinh(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}), a, b)$$

Q^3 de s yay parametrelili spacelike bir eğridir ve α nın koni eğriliği $\kappa(s) = \kappa(\text{sabit}) \neq 0$, koni torsiyonu $\tau(s) = 0$ dır.

iii) $a^2 - b^2 > 0$ olmak üzere,

$$\alpha(s) = (a, b, \sqrt{a^2 - b^2} \cos(\frac{s}{\sqrt{a^2 - b^2}}), \sqrt{a^2 - b^2} \sin(\frac{s}{\sqrt{a^2 - b^2}})) ,$$

Q^3 de s yay parametrelili spacelike bir eğridir ve α nın koni eğriliği $\kappa(s) = \kappa(\text{sabit}) < 0$, koni torsiyonu $\tau(s) = 0$ dır.

iv) $ab \neq 0$ olmak üzere

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\cosh(as), \sinh(as), \sin(bs), \cos(bs))$$

koni eğriliği $\kappa(s) = \kappa(\text{sabit}) \neq 0$, koni torsiyonu $\tau(s) = \tau(\text{sabit}) \neq 0$, olan Q^3 de s yay parametrelili spacelike bir eğridir (Liu 2011).

Teorem 4.2.3 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^3 de s yay parametresi ile bir Frenet eğrisi olsun,

$$\sqrt{\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2} \langle d\alpha, d\alpha \rangle \quad (4.2.12)$$

bir konformal değişmezdir (Liu 2004). Konformal invariant $\alpha(s)$ eğrisinin koni torsiyonudur (ikinci koni eğriliğidir).

İspat $\alpha(s)$, Q^3 üzerinde spacelike bir eğri olsun. $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0$ olduğundan, $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)} \alpha(s)$ de Q^3 üzerinde bir eğri belirtir.

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{\alpha}(s), d\tilde{\alpha}(s) \rangle &= \langle \sigma'(s) e^{\sigma(s)} \alpha(s) + e^{\sigma(s)} \alpha'(s), \sigma'(s) e^{\sigma(s)} \alpha(s) + e^{\sigma(s)} \alpha'(s) \rangle \\ &= e^{2\sigma(s)} \langle d\alpha(s), d\alpha(s) \rangle \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

eşitliğinden $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\alpha(s)$ eğrilerinin konformal olduğu görülür. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin yay parametresini $\tilde{s}$ ile gösterelim. O halde,

$$\tilde{\alpha}'(\tilde{s}) = (\sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s))\left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi, $\tilde{s}$ yay parametresi için $\langle \tilde{\alpha}'(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) \rangle = 1$ eşitliğini sağlar.

$$\langle \tilde{\alpha}'(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \quad \text{ve} \quad \langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$$

eşitliklerinden

$$\frac{ds}{d\tilde{s}} = e^{-\sigma(s)} \quad (4.2.15)$$

dir. (4.2.14) ve (4.2.15) eşitliklerinden

$$\tilde{\alpha}'(\tilde{s}) = \sigma'(s)\alpha(s) + \alpha'(s) \quad (4.2.16)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) &= \frac{d^2\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}^2} = \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}}\right) \\ &= e^{-\sigma(s)}(\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s)) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

dır. Sonuç olarak, elde edilir. Buradan

$$\langle \tilde{\alpha}''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) \rangle = e^{-2\sigma(s)}(\sigma'^2(s) - 2\sigma'(s) + \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle) \quad (4.2.18)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}) &= \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{d^2\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}^2}\right) \\ &= \frac{d(e^{-\sigma(s)}(\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s)))}{ds}\left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right) \\ &= e^{-2\sigma(s)}\left[(\sigma'''(s) - \sigma'(s)\sigma''(s))\alpha(s) + (2\sigma''(s) - \sigma'^2(s))\alpha'(s) + \alpha'''(s)\right] \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

ve

$$\begin{aligned}\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = \langle \alpha'''(s), \alpha(s) \rangle = 0, \\ \langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle &= -1, \quad \langle \alpha'''(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle\end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\langle \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}) \rangle = e^{-4\sigma} \left[(2\sigma'' - \sigma'^2)^2 + 2(\sigma'^2 - 2\sigma'') \langle \alpha'', \alpha'' \rangle + \langle \alpha''', \alpha''' \rangle \right] \quad (4.2.20)$$

elde edilir. Burada σ diferensiyellenebilir fonksiyonu ve türevleri, ayrıca α nın türevleri s yay parametresine bağlıdır.

Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler yardımı ile

$$\langle \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}) \rangle - \langle \tilde{\alpha}''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) \rangle^2 = e^{-4\sigma} (\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2) \quad (4.2.21)$$

bulunur. Önerme (4.2.1) den koni torsiyonu $\tau(s) = \sqrt{\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2}$ şeklindedir, dolayısıyla (4.2.21) eşitliği kullanılarak,

$$\tilde{\tau}^2(\tilde{s}) = e^{-4\sigma} \tau^2(s)$$

elde edilir.

$$\langle d\tilde{\alpha}(s), d\tilde{\alpha}(s) \rangle = e^{2\sigma(s)} \langle d\alpha(s), d\alpha(s) \rangle \quad (4.2.22)$$

eşitliği sayesinde, $\tilde{\alpha}(\tilde{s})$ ve $\alpha(s)$ Frenet eğrileri için

$$\tilde{\tau}^2(\tilde{s}) \langle d\tilde{\alpha}, d\tilde{\alpha} \rangle = e^{-4\sigma} \tau^2(s) \langle d\alpha, d\alpha \rangle \quad (4.2.23)$$

sağlanır. (4.2.22) ve (4.2.23) eşitliklerinden,

$$\tilde{\tau} = e^{-\sigma} \tau$$

elde edilir.

4.3 $\mathbb{E}_1^{n+2}$ Minkowski Uzayında $(n+1)$ –Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğriler

Eğer $\alpha(t)$ eğrisinin yay parametresi s alınır ve $\alpha(s) = \alpha(t(s))$ ile gösterilirse $\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds}$, $\alpha(s)$ eğrisinin spacelike birim teğet vektör alanıdır. Buna göre $\alpha(s)$ eğrisinin space-like normal uzayı V^{n-1} ve öyle bir vektör alanı $y(s)$ seçilsin ki;

$$\langle \alpha(s), y(s) \rangle = 1, \quad \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \langle y(s), y(s) \rangle = \langle \alpha'(s), y(s) \rangle = 0,$$

$$V^{n-1} = \left\{ \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \alpha, y, \alpha' \right\} \right\}^{\perp}, \quad \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \alpha, y, \alpha', V^{n-1} \right\} = \mathbb{E}_1^{n+2}$$

şartlarını sağlasınlar. Bu şartlar altında aşağıdaki tanım ve teoremler verilebilir.

Tanım 4.3.1 $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisi verilsin. $\alpha'(s) = t(s) = \alpha_1(s)$ olmak üzere $\alpha_2(s), \alpha_3(s), \dots, \alpha_n(s) \in V^{n-1}$ seçilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet $(n+2)$ – ayaklısı,

$$\{t(s) = \alpha_1(s), \alpha(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s), y(s)\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \kappa_j &: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq n \\ s &\rightarrow \kappa_j(s) = \langle \alpha'_j(s), y(s) \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tau_i &: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < n \\ s &\rightarrow \tau_i(s) = \langle \alpha'_i(s), \alpha_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar Q^{n+1} $((n+1)$ –lightlike koni) üzerindeki koni eğrilik fonksiyonları olarak adlandırılır.

$\kappa_j(s)$ ve $\tau_i(s)$ reel sayılarına da j –yinci ve i –yinci koni eğrilikleri denir (Liu 2004).

Teorem 4.3.1 $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğrilik $\tau_i(s)$, j -yinci eğrilik $\kappa_j(s)$ ve Frenet $(n+2)$ -ayaklısı $\{t(s) = \alpha_1(s), \alpha(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s), y(s)\}$ ise

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \alpha_1(s) \\
\alpha'_1(s) &= \kappa_1(s)\alpha(s) + \tau_1(s)\alpha_2(s) - y(s) \\
\alpha'_2(s) &= -\tau_1(s)\alpha_1(s) + \kappa_2(s)\alpha(s) + \tau_2(s)\alpha_3(s) \\
\alpha'_3(s) &= \kappa_3(s)\alpha(s) - \tau_2(s)\alpha_2(s) + \tau_3(s)\alpha_4(s) \\
&\vdots \\
\alpha'_i(s) &= \kappa_i(s)\alpha(s) - \tau_{i-1}(s)\alpha_{i-1}(s) + \tau_i(s)\alpha_{i+1}(s), \quad 2 \leq i \leq n \\
&\vdots \\
\alpha'_{n-1}(s) &= \kappa_{n-1}(s)\alpha(s) - \tau_{n-2}(s)\alpha_{n-2}(s) + \tau_{n-1}(s)\alpha_n(s) \\
\alpha'_n(s) &= \kappa_n(s)\alpha(s) - \tau_{n-1}(s)\alpha_{n-1}(s) \\
y'(s) &= -\sum_{i=1}^n \kappa_i(s)\alpha_i(s)
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

dir. Burada $\alpha_2(s), \alpha_3(s), \dots, \alpha_n(s) \in V^{n-1}$ ve $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n$ dir. Yani, $\{t(s) = \alpha_1(s), \alpha(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s), y(s)\}$ çatısı Q^{n+1} üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^{n+2}$ de asimptotik çatıdır (Liu 2004).

Frenet vektörlerinin türevlerini yine kendileri cinsinden yazmaya yarayan bu teorem

yardımla Frenet vektörleri ile türevleri arasındaki ilişki matris formda:

$$\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ y'(s) \\ \alpha'_1(s) \\ \alpha'_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_i(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha'_{n-1}(s) \\ \alpha'_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\kappa_{n-1} & -\kappa_n \\ \kappa_1 & -1 & 0 & \tau_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\tau_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \kappa_i & 0 & 0 & 0 & -\tau_{i-1} & 0 & \tau_i & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \kappa_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\tau_{n-2} & 0 & \tau_{n-1} \\ \kappa_n & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\tau_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ y(s) \\ \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{i-1}(s) \\ \alpha_i(s) \\ \alpha_{i+1}(s) \\ \cdot \\ \alpha_{n-1}(s) \\ \alpha_n(s) \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

şeklindedir. Burada κ_j ($1 \leq j \leq n$) ve τ_i ($1 \leq i < n$) $s \in I$ yay parametresine bağlı koni eğrilik fonksiyonlarıdır.

Tanım 4.3.2 M ve $\widetilde{M}$ iki Riemann manifold olmak üzere, $F : M \rightarrow \widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her p ($p \in M$) noktası ve X, Y ($X, Y \in T_p M$) tanjant vektörleri için $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\tilde{g}_{|F(p)}(F_*(X), F_*(Y)) = \lambda^2(p)g_p(X, Y)$$

ise F dönüşümü konformal dönüşüm olarak adlandırılır (Kühnel, W., 2002).

Teorem 4.3.2 $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $s \rightarrow \alpha(s)$ ($n \geq 2$), Q^{n+1} de s yay parametresi ile bir Frenet eğrisi olsun,

$$\sqrt{\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2} \langle d\alpha, d\alpha \rangle \quad (4.3.3)$$

α eğrisinin konformal eğrisi $\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)}\alpha(s)$ için bir konformal değişmezdir (Liu 2004).

İspat $\alpha(s)$, Q^{n+1} üzerinde bir eğri olsun. $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = 0$ olduğundan, $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)}\alpha(s)$ de Q^{n+1} üzerinde bir eğri belirtir.

$$\begin{aligned} \langle d\tilde{\alpha}(s), d\tilde{\alpha}(s) \rangle &= \langle \sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s), \sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s) \rangle \\ &= e^{2\sigma(s)} \langle d\alpha(s), d\alpha(s) \rangle \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

eşitliğinden $\tilde{\alpha}(s)$ ve $\alpha(s)$ eğrilerinin konformal olduğu görülür. $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisinin yay parametresini $\tilde{s}$ ile gösterilsin. O halde,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) &= \frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds} \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \\ &= \left(\frac{d(e^{\sigma(s)}\alpha(s))}{ds} \right) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \\ &= (\sigma'(s)e^{\sigma(s)}\alpha(s) + e^{\sigma(s)}\alpha'(s)) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $\tilde{\alpha}(s)$ eğrisi, $\tilde{s}$ yay parametresi için $\langle \tilde{\alpha}'(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) \rangle = 1$ eşitliğini sağlar.

$\langle \tilde{\alpha}'(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'(\tilde{s}) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$ ve $\langle \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ eşitliklerinden

$$\frac{ds}{d\tilde{s}} = e^{-\sigma(s)} \quad (4.3.6)$$

elde edilir. (4.3.5) ve (4.3.6) eşitliklerinden

$$\tilde{\alpha}'(\tilde{s}) = \sigma'(s)\alpha(s) + \alpha'(s) \quad (4.3.7)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) &= \frac{d^2\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}^2} = \frac{d}{d\tilde{s}} \left(\frac{d\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}} \right) \\ &= \frac{d}{ds} (\sigma'(s)\alpha(s) + \alpha'(s)) \left(\frac{ds}{d\tilde{s}} \right) \\ &= e^{-\sigma(s)} (\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s)) \end{aligned}$$

olup sonuç olarak,

$$\tilde{\alpha}''(\tilde{s}) = e^{-\sigma(s)}(\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s)) \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Buradan

$$\langle \tilde{\alpha}''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) \rangle = e^{-2\sigma(s)}(\sigma'^2(s) - 2\sigma'(s) + \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle) \quad (4.3.9)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}) &= \frac{d}{d\tilde{s}}\left(\frac{d^2\tilde{\alpha}}{d\tilde{s}^2}\right) \\ &= \frac{d(e^{-\sigma(s)}(\sigma''(s)\alpha(s) + \sigma'(s)\alpha'(s) + \alpha''(s)))}{ds} \left(\frac{ds}{d\tilde{s}}\right) \\ &= e^{-2\sigma(s)} \left[(\sigma'''(s) - \sigma'(s)\sigma''(s))\alpha(s) + (2\sigma''(s) - \sigma'^2(s))\alpha'(s) + \alpha'''(s) \right] \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle \alpha'(s), \alpha(s) \rangle = \langle \alpha'''(s), \alpha(s) \rangle = 0, \\ \langle \alpha''(s), \alpha(s) \rangle &= -1, \quad \langle \alpha'''(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \end{aligned}$$

eşitliklerinden,

$$\langle \tilde{\alpha}''', \tilde{\alpha}''' \rangle = e^{-4\sigma} \left[(2\sigma'' - \sigma'^2)^2 + 2(\sigma'^2 - 2\sigma'') \langle \alpha'', \alpha'' \rangle + \langle \alpha''', \alpha''' \rangle \right] \quad (4.3.11)$$

elde edilir. Burada σ diferensiyellenebilir fonksiyonu ve türevleri, ayrıca α nın türevleri s yay parametresine bağlıdır.

Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikler yardımı ile

$$\langle \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}'''(\tilde{s}) \rangle - \langle \tilde{\alpha}''(\tilde{s}), \tilde{\alpha}''(\tilde{s}) \rangle^2 = e^{-4\sigma} (\langle \alpha'''(s), \alpha'''(s) \rangle - \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle^2) \quad (4.3.12)$$

elde edilir.

$$\langle d\tilde{\alpha}(s), d\tilde{\alpha}(s) \rangle = e^{2\sigma(s)} \langle d\alpha(s), d\alpha(s) \rangle$$

eşitliği ve (4.3.12) eşitliği sayesinde, $\tilde{\alpha}(\tilde{s})$ ve $\alpha(s)$ Frenet eğrileri için

$$\sqrt{\langle \tilde{\alpha}''', \tilde{\alpha}''' \rangle - \langle \tilde{\alpha}'', \tilde{\alpha}'' \rangle^2} \langle d\tilde{\alpha}, d\tilde{\alpha} \rangle = \sqrt{\langle \alpha''', \alpha''' \rangle - \langle \alpha'', \alpha'' \rangle^2} \langle d\alpha, d\alpha \rangle \quad (4.3.13)$$

sağlanır. (4.3.13) eşitliği,

$$\sqrt{\langle \alpha''', \alpha''' \rangle - \langle \alpha'', \alpha'' \rangle^2} \langle d\alpha, d\alpha \rangle$$

ifadesinin $e^{\sigma(s)}$ dönüşümü altında invariant kaldığını gösterir.

Sonuç 4.3.1 $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $s \rightarrow \alpha(s)$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğrilik $\tau_i(s)$, j -yinci eğrilik $\kappa_j(s)$ olmak üzere, $\tilde{\alpha}(s) = e^{\sigma(s)}\alpha(s)$ $[\sigma(s) : I \rightarrow \mathbb{R}]$, Q^{n+1} üzerinde $\alpha(s)$ eğrisinin konformal eğrisi olsun. $n \geq 2$ için

$$e^{-4\sigma} \left[(\kappa_2 + \tau_1')^2 + (\kappa_3 + \tau_1\tau_2)^2 + \sum_{i=4}^n \kappa_i^2 \right] \quad (4.3.14)$$

ifadesi konformal dönüşüm altında değişmez kalır.

Önerme 4.3.1 $\alpha : I \rightarrow Q^{n+1} \subset \mathbb{E}_1^{n+2}$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^{n+1} üzerinde yay parametrelili, regüler bir eğri olsun. Biliniyor ki (4.2.9) eşitliği $y(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s)$ ve $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = \langle y(s), y(s) \rangle = \langle t(s), y(s) \rangle = 0$, $\langle \alpha(s), y(s) \rangle = 1$ eşitlikleri 3 ve 4-boyutlu lightlike koni için sağlandığı gibi herhangi bir boyutta da sağlanır.

$t(s) = \alpha_1(s) = \alpha'(s)$, $\alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s) \in \{span_{\mathbb{R}} \{\alpha, y, \alpha'\}\}^\perp$ ve $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $y(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \alpha(s) - \alpha''(s)$ sağlansın. O halde Q^{n+1} üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^{n+2}$ de asimptotik çatı vektörlerinin türevlerinin bu vektörler tarafından yazılmasını sağlayan (4.1.3) eşitliği,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(s) = \alpha_1(s), \\ \alpha_1'(s) = \kappa_1(s)\alpha(s) - y(s), \\ \alpha_2'(s) = \kappa_2(s)\alpha(s), \\ \alpha_3'(s) = \kappa_3(s)\alpha(s), \\ \vdots \\ \alpha_i'(s) = \kappa_i(s)\alpha(s), \quad 2 \leq i \leq n \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}'(s) = \kappa_{n-1}(s)\alpha(s) \\ \alpha_n'(s) = \kappa_n(s)\alpha(s) \\ y'(s) = -\sum_{i=1}^n \kappa_i(s)\alpha_i(s) \end{array} \right. \quad (4.3.15)$$

halini alır.

Frenet vektörlerinin türevlerini yine kendileri cinsinden yazmaya yarayan bu önerme yardımıyla Frenet vektörleri ile türevleri arasındaki ilişki matris formda da yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ y'(s) \\ \alpha_1'(s) \\ \alpha_2'(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_i'(s) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}'(s) \\ \alpha_n'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1 & -\kappa_2 & \cdot & \dots & -\kappa_{n-1} & -\kappa_n \\ \kappa_1 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \kappa_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \kappa_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_n & 0 & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ y(s) \\ \alpha_1(s) \\ \alpha_2(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_i(s) \\ \cdot \\ \alpha_{n-1}(s) \\ \alpha_n(s) \end{bmatrix}. \quad (4.3.16)$$

5. LIGHTKLIKE KONİ ÜZERİNDE EĞİLİM ÇİZGİLERİ

Bu bölümde 2–boyutlu ve 3–boyutlu lightlike koni üzerindeki eğilim çizgileri ile ilgili bazı tanımlar ve karakterizasyonlar vereceğiz. Bu tanımları ve karakterizasyonları verirken 4. bölümdeki notasyonları ve kavramları kullanacağız.

Tanım 5.1 $M \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa, M ye bir eğilim çizgisi ve $Sp\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim eksenini denir (Hacısalıhoğlu 2000).

5.1 $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında İki Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğilim Çizgileri

Bu bölümde 2–boyutlu lightlike koni üzerindeki eğilim çizgileri ile ilgili tanımları ve karakterizasyonları, bunların yansıra $\mathbb{E}_1^3$ de lightlike koni üzerindeki eğilim çizgisi için harmonik eğrilik fonksiyon tanımını vereceğiz. Ayrıca bu harmonik eğrilik fonksiyonundan yararlanarak eğilim çizgisinin eğilim eksenini ve Darboux vektör alanını tanımlayacağız. Bu kısımda kullanacağımız g metriği (2.1.3) de verilen $\mathbb{E}_1^3$ yarı-Öklidyen uzayın metriğidir.

Tanım 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı bir eğri olsun. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathbb{E}_1^3$ deki sabit bir vektör ile sabit açı oluşturursa $\alpha(s)$ eğrisine lightlike koni üzerinde eğilim çizgisi denir. Yani eğri boyunca,

$$g(\alpha'(s), u) = \langle \alpha'(s), u \rangle = \langle t(s), u \rangle = f(\varphi) = \text{sabit} \quad (5.1.1)$$

dır. Burada u , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit birim vektör ve $f(\varphi)$ sabit açı fonksiyonudur.

Tanım 5.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere Q^2 üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α koni eğrisinin sıfırdan farklı koni eğrilik fonksiyonu

$\kappa(s)$ ise

$$\begin{aligned} H &: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow H(s) = -\frac{2\kappa(s)}{\kappa'(s)} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, α koni eğrisinin s noktasındaki **harmonik eğriliği** denir.

Önerme 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri ve u , E_1^3 de sabit birim eksen olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı ve H , α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonu olmak üzere, eğer α , u sabit eksenini ile birlikte eğilim çizgisi ise

$$\begin{cases} \langle \alpha(s), u \rangle = H(s) \langle t(s), u \rangle \\ \langle y(s), u \rangle = \kappa(s) H(s) \langle t(s), u \rangle \end{cases} \quad (5.1.3)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat α , Q^2 lightlike koni üzerinde eğilim çizgisi olsun. (5.1.1) eşitliğinden biliniyor ki,

$$\langle t(s), u \rangle = f(\varphi) = \text{sabit}$$

bu eşitlikte s ye göre türev alınırsa,

$$\langle t'(s), u \rangle = 0 \quad (5.1.4)$$

bulunur. Asimptotik çatıya göre (3.1.4) Frenet denklemlerinden (5.1.4) eşitliği

$$\langle \kappa(s)\alpha(s) - y(s), u \rangle = 0$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$\langle y(s), u \rangle = \kappa(s) \langle \alpha(s), u \rangle \quad (5.1.5)$$

elde edilir. (5.1.5) eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$\langle y'(s), u \rangle = \kappa'(s) \langle \alpha(s), u \rangle + \kappa(s) \langle t(s), u \rangle \quad (5.1.6)$$

bulunur. (5.1.6) denklemin asimptotik çatıya göre (3.1.4) Frenet denklemleri yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} \langle \alpha(s), u \rangle = -\frac{2\kappa(s)}{\kappa'(s)} \langle t(s), u \rangle \\ \quad = H(s) \langle t(s), u \rangle \end{cases} \quad (5.1.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (5.1.5) eşitliğine uygulanırsa

$$\langle y(s), u \rangle = \kappa(s)H(s) \langle t(s), u \rangle$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını ve H , α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonunu gösterebilirsin. Eğer α eğilim çizgisinin eğilim eksenini u ise

$$u = \{t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)\} \langle t(s), u \rangle \quad (5.1.8)$$

veya

$$u = \{t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)\} f(\varphi) \quad (5.1.9)$$

şeklinde yazılır.

İspat u , $\mathbb{E}_1^3$ deki lightlike koni üzerindeki α eğilim çizgisinin eksenini ise, $\{t, \alpha, y\}$

lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı olmak üzere

$$u = \lambda_1(s)t(s) + \lambda_2(s)\alpha(s) + \lambda_3(s)y(s) \quad (5.1.10)$$

şeklinde yazılabilir. Önerme (5.1.1) ve (3.1.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{cases} \lambda_1(s) = \langle t(s), u \rangle = f(\varphi) = \text{sabit} \\ \lambda_2(s) = \langle y(s), u \rangle = \kappa(s)H(s) \langle t(s), u \rangle \\ \lambda_3(s) = \langle \alpha(s), u \rangle = H(s) \langle t(s), u \rangle \end{cases} \quad (5.1.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlikler (5.1.10) da yerlerine yazılırsa

$$u = \{t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)\} \langle t(s), u \rangle$$

veya

$$u = \{t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)\} f(\varphi)$$

elde edilir.

Tanım 5.1.3 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^2 de birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ eğrinin asimptotik çatısını; $H(s)$ eğrinin harmonik eğrilik fonksiyonunu gösterebilir.

$$D = t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s) \quad (5.1.12)$$

vektörüne α eğilim çizgisinin Darboux vektörü denir.

Uyarı 5.1.2 Buradaki Darboux vektörü de $\alpha(s)$ eğilim çizgisi için bir eksendir.

Teorem 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını ve H , α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonunu gösterebilir. α eğrisi bir eğilim çizgisidir ancak ve ancak D sabit vektördür.

İspat ($\Rightarrow$) α , Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olmak üzere α nın eksenini u olsun. Sonuç (5.1.1) de (5.1.9) eşitliği

$$u = \{t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)\} f(\varphi)$$

şeklindedir. Burada $f(\varphi)$ sabit açı fonksiyonu olmak üzere Tanım (5.1.3) den

$$u = Df(\varphi) \quad (5.1.13)$$

yazılabilir. u , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit birim hızlı vektör alanıdır dolayısıyla D sabit vektör alanıdır.

($\Leftarrow$) Tersine $\mathbb{E}_1^3$ de D sabit vektör alanı olsun. D vektör alanının tanımı ve Sonuç (5.1.1) de verilen (5.1.9) eşitliğinden

$$u = Df(\varphi)$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle u, t(s) \rangle = \langle Df(\varphi), t(s) \rangle = f(\varphi) \langle D, t(s) \rangle \quad (5.1.14)$$

elde edilir. (5.1.12) D Darboux eksenini tanımından

$$\langle D, t(s) \rangle = 1$$

olup (5.1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\langle u, t(s) \rangle = f(\varphi) = \text{sabit}$$

elde edilir. Dolayısıyla α , Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisidir.

Teorem 5.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^2 üzerinde birim hızlı bir eğri ve $H(s)$, $\alpha(s)$ noktasındaki harmonik eğrilik fonksiyonu olsun. α eğrisi lightlike ol-

mayan $u \in \mathbb{E}_1^3$ ekseniiyle bir eğilim çizgisi ise $\kappa H^2 = \text{sabittir}$.

İspat α, Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olsun. O halde α nın sabit lightlike olmayan birim eksenii u için $\|u\|^2 = 1$ dir. Yani (2.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{|g(u, u)|} \\ \|u\|^2 &= |g(u, u)| = 1\end{aligned}$$

dır. Burada (5.1.9) eşitliği kullanılırsa

$$\|u\|^2 = |\kappa H^2 f^2(\varphi) + f^2(\varphi)|$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\varepsilon \kappa H^2 f^2(\varphi) + f^2(\varphi) = 1, \quad \varepsilon = \pm 1$$

olup, buradan

$$\varepsilon \kappa H^2 = \frac{1 - f^2(\varphi)}{f^2(\varphi)}$$

elde edilir. α eğilim çizgisi olduğu için $f(\varphi)$ sabittir. Sonuç olarak, $\kappa H^2 = \text{sabit}$ olduğu görülür.

Sonuç 5.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili, Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını, sıfırdan farklı $\kappa(s)$ eğrinin koni eğrilik fonksiyonunu ve D, α eğrisinin Darboux vektörünü gösterebilir. D Darboux vektörünün karakteri koni eğrilik fonksiyonuna bağlıdır.

İspat α, Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olsun. Darboux vektörün tanımından

$$D = t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s)$$

dır. Ayrıca

$$\langle D, D \rangle = \langle t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s), t(s) + \kappa(s)H(s)\alpha(s) + H(s)y(s) \rangle$$

olup (3.1.5) eşitliklerinden

$$\langle D, D \rangle = 2\kappa H^2 + 1$$

elde edilir. H eğrinin Harmonik fonksiyonu olmak üzere, Tanım (5.1.2) den

$$\langle D, D \rangle = \frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} + 1 \quad (5.1.15)$$

olup, son eşitlikten D vektörünün karakterinin κ ya bağlı olduğu görülür.

Sonuç olarak $\kappa \neq 0$ için aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir:

- i. $D \in \mathbb{E}_1^3$ lightlike vektör ise $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} = -1$,
- ii. $D \in \mathbb{E}_1^3$ spacelike vektör ise $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} > -1$,
- iii. $D \in \mathbb{E}_1^3$ timelike vektör ise $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} < -1$ şeklindedir.

Teorem 5.1.3 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını ve H , α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonunu gösterebilir. α eğilim çizgisidir ancak ve ancak

$$H'(s) = 1 \quad (5.1.16)$$

sağlanır.

İspat ($\Rightarrow$) Q^2 üzerindeki α eğrisi boyunca Darboux vektörünün s ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} D' &= t'(s) + (\kappa(s)H'(s) + \kappa'(s)H(s))\alpha(s) + \kappa(s)H(s)\alpha'(s) + H'(s)y(s) + H(s)y'(s) \\ &= (\kappa'(s)H(s) + \kappa(s)H'(s) + \kappa(s))\alpha(s) + (H'(s) - 1)y(s) \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

bulunur. α eğilim çizgisi olduğu için D , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit vektör alanıdır, yani $D' = 0$ dır. Dolayısıyla (5.1.17) eşitliğinden $\alpha(s)$ ve $y(s)$ vektörleri lineer bağımsız olduğu için

$$\kappa'(s)H(s) + \kappa(s)H'(s) + \kappa(s) = 0 \quad (5.1.18)$$

ve

$$H'(s) = 1 \quad (5.1.19)$$

elde edilir. Buradan $H'(s) = 1$ eşitliği $\kappa'(s)H(s) + \kappa(s)H'(s) + \kappa(s) = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$2\kappa(s) + \kappa'(s)H(s) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik harmonik eğrilik fonksiyonu tanımından $\forall s \in I$ için sağlanır.

($\Leftarrow$) Tersine $H'(s) = 1$ olursa $2\kappa(s) + \kappa'(s)H(s) = 0$ eşitliği sağlanır. D Darboux vektörü tanımından $D' = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla D sabit vektör alanıdır, Teorem (5.1.1) uyarınca α , Q^2 de bir eğilim çizgisidir.

Tanımladığımız D Darboux vektörü yardımıyla Teorem (3.1.4) de verilen eğriler için yeni bir ispat yöntemi aşağıdaki sonuç ve teorem ile elde edilmiştir.

Sonuç 5.1.3 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$ yay parametrelili regüler bir eğri olsun.

$\{t, \alpha, y\}$ üçlüsü Q^2 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^3$ de asimptotik çatı alanını ve $\kappa(s)$, α eğrisinin sıfırdan farklı koni eğrilik fonksiyonu olmak üzere, eğer α bir eğilim çizgisi ise $0 \neq c_1, c_2$ sabitleri için

$$\kappa(s) = c_1(s + c_2)^{-2} \quad (5.1.20)$$

dır.

İspat α, Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olsun. O halde $D' = 0$ olup

$$\begin{aligned} H'(s) &= 1 \\ 2\kappa(s) + \kappa'(s)H(s) &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikler sağlanır. $H'(s) = 1$ eşitliğinden c sabiti için $H(s) = s + c$ bulunur. $2\kappa(s) + \kappa'(s)H(s) = 0$ eşitliğinde $H(s)$ yerine yazılırsa,

$$2\kappa(s) + \kappa'(s)(s + c) = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Denklemin çözümünden $\kappa(s) = c_1(s + c_2)^{-2}$ elde edilir.

Teorem 5.1.4 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını gösterebilir. α eğilim çizgisidir ancak ve ancak

$$3\kappa'^2 - 2\kappa\kappa'' = 0 \quad (5.1.21)$$

dır.

İspat $(\Rightarrow)$ α, Q^2 üzerinde bir eğilim çizgisi olsun. Tanım (5.1.2) ve Tanım (5.1.3) den, α eğrisinin ekseni

$$D = t - \frac{2\kappa^2}{\kappa'}\alpha - \frac{2\kappa}{\kappa'}y$$

şeklindedir. α eğrisi boyunca D nin s ye göre türevi alınır, (3.1.4) eşitliklerinden yararlanılarak

$$D' = \left(\frac{-3\kappa\kappa'^2 + 2\kappa^2\kappa''}{\kappa'^2} \right) \alpha + \left(\frac{-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa''}{\kappa'^2} \right) y \quad (5.1.22)$$

elde edilir. α bir eğilim çizgisi olduğu için, D sabit bir vektördür, yani $D' = 0$ dır.

Dolayısıyla (5.1.18) eşitliğinden,

$$\left(\frac{-3\kappa\kappa'^2 + 2\kappa^2\kappa''}{\kappa'^2}\right)\alpha + \left(\frac{-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa''}{\kappa'^2}\right)y = 0$$

bulunur. α, y lineer bağımsız vektörler oldukları için $\frac{-3\kappa\kappa'^2 + 2\kappa^2\kappa''}{\kappa'^2} = 0$ ve

$\frac{-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa''}{\kappa'^2} = 0$ dır. Bu durumda bulunan son iki denklemden $-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa'' = 0$ olup istenilen elde edilir.

($\Leftarrow$) Tersine α, Q^2 üzerinde bir eğri olsun ve α nın koni eğrilik fonksiyonu κ , $3\kappa'^2 - 2\kappa\kappa'' = 0$ şartını sağlasın. α koni eğrisinin harmonik eğriliği $H = -\frac{2\kappa}{\kappa'}$ şeklinde tanımlanmıştır dolayısıyla

$$H' = 2\left(-1 + \frac{\kappa\kappa''}{\kappa'^2}\right) \quad (5.1.23)$$

dır. (5.1.21) eşitliğinden $\kappa\kappa'' = \frac{3\kappa'^2}{2}$ olduğu görülür bu eşitlik (5.1.23) de yerine yazılırsa $H' = 1$ elde edilir. $H' = 1$ olması durumunda $2\kappa(s) + \kappa'(s)H(s) = 0$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla α , bir eğilim çizgisidir.

Örnek 5.1.1 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3, s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili bir eğri olmak üzere,

$$\alpha(s) = s\left(\frac{1 + \ln^2 s}{2}, \ln s, \frac{1 - \ln^2 s}{2}\right) \quad (5.1.24)$$

iki boyutlu lightlike koni üzerinde bir eğilim çizgisidir.

α eğrisinin teğet vektör alanı

$$t(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{1 + \ln^2 s}{2} + \ln s, \ln s + 1, \frac{1 - \ln^2 s}{2} - \ln s\right)$$

dir. Buradan

$$\alpha''(s) = \frac{1}{s}(\ln s + 1, 1, -\ln s - 1)$$

bulunur. O halde bu eğrinin koni eğrilik fonksiyonu

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= -\frac{1}{2} \left\langle \alpha''(s), \alpha''(s) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle \frac{1}{s}(\ln s + 1, 1, -\ln s - 1), \frac{1}{s}(\ln s + 1, 1, -\ln s - 1) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} s^{-2}\end{aligned}$$

dır. $\kappa(s)$, Sonuç (5.1.3) de elde edilen $\kappa(s)$ karakterizasyonuna uymaktadır.

Ayrıca eğrinin koni eğriliği $\kappa(s) = -\frac{1}{2} s^{-2}$

$$-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa'' = 0$$

şartını sağlar. Dolayısıyla Teorem (5.1.3) den α bir eğilim çizgisidir.

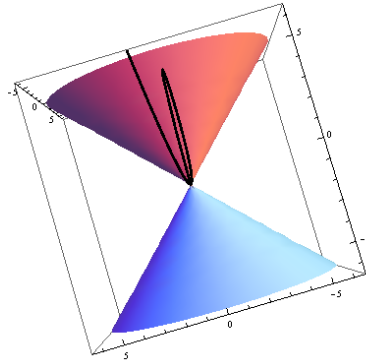
Verilen α eğilim çizgisinin Darboux vektörü, aynı zamanda eğilim eksenli olan vektör

$$D = t - \frac{1}{2s}\alpha + sy$$

şeklindedir. Eğrinin $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonundan $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} = -1$ bulunur. Dolayısıyla Sonuç (5.1.2) den eğrinin D Darboux eksenli lightlike vektördür. O halde,

$$\alpha(s) = s\left(\frac{1 + \ln^2 s}{2}, \ln s, \frac{1 - \ln^2 s}{2}\right),$$

Q^2 üzerinde lightlike eksenli, birim hızlı bir eğilim çizgisidir.



Şekil 5.1 Q^2 üzerinde lightlike eksenli eğilim çizgisi

Genel haliyle bu eğri (Liu 2011) de

$$\alpha(s) = \frac{s \ln s}{2} \left(\frac{c}{\ln s} + \frac{\ln s}{c}, 2, \frac{c}{\ln s} - \frac{\ln s}{c} \right) \quad (5.1.25)$$

şeklinde verilmiştir.

Örnek 5.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili bir eğri olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{s}{6} ((s^3 + s^{-3}), 2, (s^3 - s^{-3})) \quad (5.1.26)$$

iki boyutlu lightlike koni üzerinde bir eğilim çizgisidir.

α eğrisinin teğet vektör alanı

$$t(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{3} ((2s^3 - s^{-3}), 1, (2s^3 + s^{-3}))$$

dir. Buradan

$$\alpha''(s) = (2s^2 + s^{-4}, 0, 2s^2 - s^{-4})$$

bulunur. O halde bu eğrinin koni eğrilik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle (2s^2 + s^{-4}, 0, 2s^2 - s^{-4}), (2s^2 + s^{-4}, 0, 2s^2 - s^{-4}) \rangle \\ &= 4s^{-2} \end{aligned}$$

dır. $\kappa(s)$ Sonuç (5.1.3) de elde edilen $\kappa(s)$ karakterizasyonuna uymaktadır. Ayrıca eğrinin koni eğriliği $\kappa(s) = 4s^{-2}$

$$-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa'' = 0$$

şartını sağlar. Dolayısıyla Teorem (5.1.3) den α bir eğilim çizgisidir.

Verilen α eğilim çizgisinin Darboux vektörü, aynı zamanda eğilim eksenini olan vektör

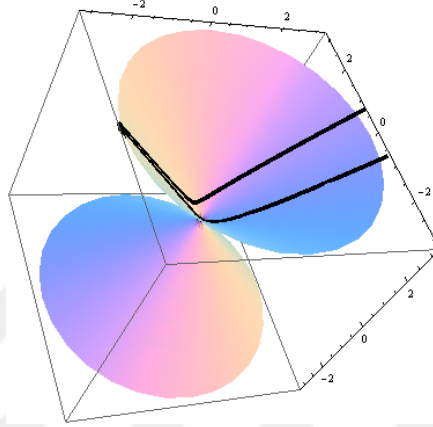
$$D = t + \frac{4}{s}\alpha + sy$$

şeklindedir. Eğrinin $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonundan $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} = 8 > -1$ bulunur. Dolayısıyla Sonuç (5.1.2) den eğrinin D Darboux eksenli spacelike vektördür.

O halde,

$$\alpha(s) = \frac{s}{6}((s^3 + s^{-3}), 2, (s^3 - s^{-3})), \quad (5.1.27)$$

Q^2 üzerinde spacelike eksenli, birim hızlı bir eğilim çizgisidir.



Şekil 5.2 Q^2 üzerinde spacelike eksenli eğilim çizgisi

Genel haliyle bu eğri (Liu 2011) de

$$\alpha(s) = \frac{s}{2c}(s^c + s^{-c}, 2, s^c - s^{-c}) \quad (5.1.28)$$

şeklinde verilmiştir.

Örnek 5.1.3 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametrelili bir eğri olmak üzere,

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{7}}(s, s \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}), s \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}})) \quad (5.1.29)$$

iki boyutlu lightlike koni üzerinde bir eğilim çizgisidir.

α eğrisinin teğet vektör alanı

$$t(s) = \alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{7}}(1, -\sqrt{7} \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}) + \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}), \sqrt{7} \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}) + \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}))$$

dir. Buradan

$$\alpha''(s) = \frac{1}{s}(0, -\sqrt{7} \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}) - 1 \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}), \\ -\sqrt{7} \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}) + 1 \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}))$$

bulunur. O halde bu eğrinin koni eğrilik fonksiyonu

$$\kappa(s) = -\frac{1}{2} \langle \alpha''(s), \alpha''(s) \rangle = -4s^{-2}$$

dır. $\kappa(s)$ Sonuç (5.1.3) de elde edilen $\kappa(s)$ karakterizasyonuna uymaktadır. Ayrıca eğrinin koni eğriliği $\kappa(s) = -4s^{-2}$

$$-3\kappa'^2 + 2\kappa\kappa'' = 0$$

şartını sağlar. Dolayısıyla Teorem (5.1.3) den α bir eğilim çizgisidir.

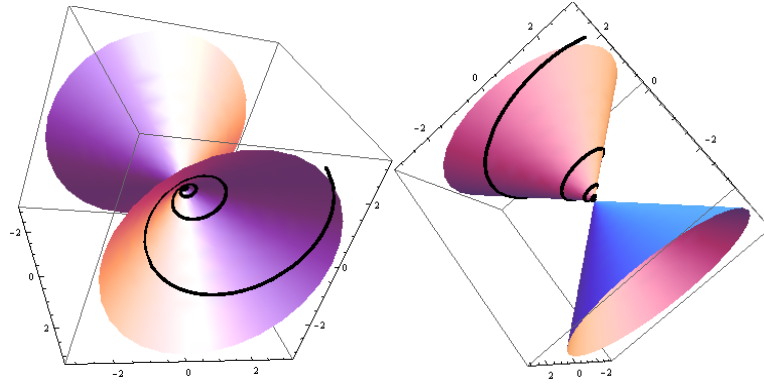
Verilen α eğilim çizgisinin Darboux vektörü, aynı zamanda eğilim eksenini olan vektör

$$D = t - \frac{4}{s}\alpha + sy$$

şeklindedir. Eğrinin $\kappa(s)$ koni eğrilik fonksiyonundan $\frac{8\kappa^3}{\kappa'^2} = -8 < -1$ bulunur. Dolayısıyla Sonuç (5.1.2) den eğrinin D Darboux eksenini timelike bir vektördür. O halde,

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{7}}(s, s \cos(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}}), s \sin(\sqrt{7} \ln \frac{s}{\sqrt{7}})),$$

Q^2 üzerinde timelike eksenli, birim hızlı bir eğilim çizgisidir.



Şekil 5.3 Q^2 üzerinde timelike eksenli eğilim çizgisi

α eğrisinin teğet vektör alanı $t(s)$ ile $\mathbb{E}_1^3$ deki sabit bir vektör alanı sabit açı yapması durumunun yanısıra, α eğrisinin $y(s)$ ve $\alpha(s)$ vektör alanlarının da $\mathbb{E}_1^3$ deki sabit bir vektör alanı ile sabit açı yapması durumu incelenebilir:

Tanım 5.1.4 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^2 üzerinde s yay parametrelili regüler bir eğri olsun. Eğer $\alpha(s)$ eğrisinin $y(s)$ vektör alanı $\mathbb{E}_1^3$ deki sabit bir vektör ile sabit açı oluşturursa $\alpha(s)$ eğrisine lightlike koni üzerinde y -slant helis denir. Yani α eğrisi boyunca,

$$g(y(s), u_y) = \langle y(s), u_y \rangle = c = \text{sabit} \quad (5.1.30)$$

dır. Burada u_y , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit birim vektördür.

Önerme 5.1.2 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu (κ) sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri ve u , E_1^3 de sabit birim eksen olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanı olmak üzere, eğer α , u_y sabit eksenini ile birlikte y -slant helis ise

$$\langle t(s), u_y \rangle = 0$$

ve

$$\langle \alpha(s), u_y \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \langle y(s), u_y \rangle$$

dir. Burada her $s \in I$ için α eğrisinin eksenini olarak adlandırılan $u_y \in \mathbb{E}_1^3$ de sabit birim vektördür.

İspat α, y -slant helis olsun, o halde $\langle y(s), u_y \rangle = c = \text{sabit}$ dir. Eşitliğin s ye göre türevini alınırsa $\forall s \in I$ için,

$$\langle y'(s), u_y \rangle = 0$$

bulunur. $\{t, \alpha, y\}$ asimptotik çatısı için (3.1.4) denklemlerinden $\kappa \langle t(s), u_y \rangle = 0$ elde edilir. Yani

$$\langle t(s), u_y \rangle = 0 \quad (5.1.31)$$

dir. (5.1.31) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa (3.1.4) denklemlerinden,

$$\langle \alpha(s), u_y \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \langle y(s), u_y \rangle$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.4 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını gösterebilir. Eğer α y -slant helisin eksenini u_y ise c sıfırdan farklı sabit olmak üzere,

$$u_y = \left\{ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \right\} \langle y(s), u_y \rangle \quad (5.1.32)$$

veya

$$u_y = c \left\{ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \right\} \quad (5.1.33)$$

şeklinde yazılır.

İspat $u_y, \mathbb{E}_1^3$ deki lightlike koni üzerindeki α, y -slant helisin eksenini ise, $\{t, \alpha, y\}$

lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanı olmak üzere,

$$u_y = \lambda_1(s)t(s) + \lambda_2(s)\alpha(s) + \lambda_3(s)y(s) \quad (5.1.34)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.5) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{cases} \lambda_1(s) = \langle t(s), u_y \rangle = 0 \\ \lambda_2(s) = \langle y(s), u_y \rangle = c \\ \lambda_3(s) = \langle \alpha(s), u \rangle = \frac{1}{\kappa(s)} \langle y(s), u_y \rangle \end{cases} \quad (5.1.35)$$

elde edilir. Son eşitlikler (5.1.34) da yerine yazılırsa

$$u = \left\{ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \right\} \langle y(s), u_y \rangle$$

veya

$$u = c \left\{ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \right\}$$

elde edilir.

Tanım 5.1.5 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^2 de birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ eğrinin asimptotik çatı alanı olsun.

$$D = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \quad (5.1.36)$$

vektörüne α, y -slant helisin Darboux vektörü denir.

Uyarı 5.1.3 (5.1.36) ile tanımlanan Darboux vektörü de $\alpha(s)$ y -slant helis için bir eksendir.

Teorem 5.1.5 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^2 üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.

$\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını gösterebilir. α eğrisi bir y -slant helisdir ancak ve ancak D sabit bir vektördür.

İspat ($\Rightarrow$) α , Q^2 üzerinde bir y -slant helis olmak üzere α nın eksenini u_y olsun. Sonuç (5.1.4) de (5.1.33) eşitliği

$$u_y = c \left\{ \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} y(s) \right\}$$

şeklindedir. Burada c sabit olmak üzere Tanım (5.1.5) den

$$u_y = cD \quad (5.1.37)$$

yazılabilir. u , $\mathbb{E}_1^3$ de sabit birim hızlı vektör alanıdır dolayısıyla D sabit vektör alanıdır.

($\Leftarrow$) Tersine $\mathbb{E}_1^3$ de D sabit vektör alanı olsun. D vektör alanının tanımı ve Sonuç (5.1.4) de verilen (5.1.33) eşitliğinden

$$u_y = cD$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle u_y, y(s) \rangle = \langle cD, y(s) \rangle = c \langle D, y(s) \rangle \quad (5.1.38)$$

elde edilir. (5.1.36) eşitliğiyle verilen D Darboux eksenini tanımından

$$\langle D, y(s) \rangle = 1$$

olup (5.1.38) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\langle u_y, y(s) \rangle = c = \text{sabit}$$

elde edilir. Dolayısıyla α , Q^2 üzerinde bir y -slant helisdir.

Sonuç 5.1.5 $\alpha : I \rightarrow Q^2 \subset \mathbb{E}_1^3$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere, Q^2 üzerinde koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sıfırdan farklı birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, y\}$ lightlike koni üzerindeki asimptotik çatı alanını fonksiyonunu gösterebilir. α , y -slant helisdir ancak ve ancak κ sabittir.

İspat ($\Rightarrow$) Q^2 üzerindeki α , y -slant helis eğrisi boyunca Darboux vektörünün s ye göre türevi alınırsa,

$$D' = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}y \quad (5.1.39)$$

bulunur. α , Q^2 üzerinde bir y -slant helis olduğu için D vektörü sabittir.

Dolayısıyla $D' = 0$ olur. (5.1.39) eşitliğinden

$$\kappa' = 0; \text{ yani, } \kappa = \text{sabittir.}$$

α , y -slant helis için $\kappa = \text{sabit}$ olduğundan, α eğrisi Teorem (4.1.3) de verilen (4.1.17) ve (4.1.18) eşitlikleri şeklinde yazılabilir.

($\Leftarrow$) Tersine, α nın koni eğrilik fonksiyonu $\kappa(s)$ sabit olsun. Buradan $D' = 0$ olur. Dolayısıyla Teorem (5.1.1) uyarınca α , y -slant helis olur.

5.2 $\mathbb{E}_1^4$ Minkowski Uzayında Üç Boyutlu Lightlike Koni Üzerinde Eğilim Çizgileri

Bu bölümde 3-boyutlu lightlike koni üzerindeki eğilim çizgisini tanımlayarak, $\mathbb{E}_1^4$ de lightlike koni üzerindeki eğilim çizgisi için harmonik eğrilik fonksiyonları tanımlayacağız. Ayrıca bu harmonik eğrilik fonksiyonundan yararlanarak eğilim eksenini ve Darboux vektör alanını tanımlayacağız. Bu eksen yardımıyla koni üzerindeki eğilim çizgisi için bazı karakterizasyonlar vereceğiz.

$\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^3 üzerinde yay parametrelili eğri, $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlü sistemi Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı olmak üzere (4.2.10) dan

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = \kappa_1(s)\alpha(s) + \kappa_3(s)\beta(s) - y(s) \\ \beta'(s) = -\kappa_3(s)t(s) + \kappa_2(s)\alpha(s) \\ y'(s) = -\kappa_1(s)t(s) - \kappa_2(s)\beta(s) \end{cases}$$

dır.

Tanım 5.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, s yay parametresi olmak üzere $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlüsü Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı olsun. $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı $t(s)$, $\mathbb{E}_1^4$ deki sabit bir vektör ile sabit açı oluşturursa $\alpha(s)$ eğrisine lightlike koni üzerinde eğilim çizgisi denir. Yani eğri boyunca,

$$g(\alpha'(s), U) = \langle \alpha'(s), U \rangle = \langle t(s), U \rangle = g(\varphi) = \text{sabit} \quad (5.2.1)$$

dır. Burada U , $\mathbb{E}_1^4$ de sabit birim vektör ve $f(\varphi)$ sabit açı fonksiyonudur.

Uyarı 5.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ Q^3 üzerinde birim hızlı spacelike eğridir. Dolayısıyla α eğrisinin birim teğet vektör alanı $t(s) = \alpha'(s)$ spacelike vektördür. $t(s)$ spacelike vektörü ile $U \in \mathbb{E}_1^4$ sabit birim vektörü arasında bir sabit açı fonksiyonu vardır.

Tanım 5.2.2 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^3 üzerinde birim hızlı bir eğri ve sıfırdan farklı $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ koni eğrilik fonksiyonları olsun.

$$H_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2$$

$$\begin{cases} H_0 = \kappa_1 H_2 + \kappa_3 H_1 \\ H_1 = -\frac{(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)((\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)' + (\kappa_3' + \kappa_2)\kappa_2) - \frac{3}{2}(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)'(\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)}{(\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)(\kappa_3' + \kappa_2)' - (\kappa_3' + \kappa_2)((\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)' + (\kappa_3' + \kappa_2)\kappa_2)} \\ H_2 = \frac{(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)(\kappa_3' + \kappa_2)' - \frac{3}{2}(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)'(\kappa_3' + \kappa_2)}{(\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)(\kappa_3' + \kappa_2)' - (\kappa_3' + \kappa_2)((\kappa_1' + \kappa_3\kappa_2)' + (\kappa_3' + \kappa_2)\kappa_2)} \end{cases} \quad (5.2.2)$$

şeklinde tanımlı H_i fonksiyonlarına, Q^4 üzerinde α koni eğrisinin s noktasındaki harmonik eğrilikleri denir.

Önerme 5.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$ Q^3 üzerinde yay uzunluğu s olan birim hızlı bir eğri olsun. $\mathbb{E}_1^4$ de U sabit bir vektör alanı, $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dördümlü sistemi Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı ve $\{H_0, H_1, H_2\}$, α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonları olmak üzere; eğer α , U eksenine bir eğilim çizgisi ise

$$\begin{cases} \langle y, U \rangle = H_0 \langle t, U \rangle = H_0 g(\varphi) \\ \langle \alpha, U \rangle = H_2 \langle t, U \rangle = H_2 g(\varphi) \\ \langle \beta, U \rangle = H_1 \langle t, U \rangle = H_1 g(\varphi) \end{cases} \quad (5.2.3)$$

dır.

İspat α, Q^3 üzerinde sabit $U \in \mathbb{E}_1^4$ eksenine birlikte eğilim çizgisi olsun. O halde Tanım (5.2.1) den,

$$\langle t(s), U \rangle = g(\varphi) = \text{sabit}, \quad \forall s \in I.$$

Eşitliğin s ye göre türevi alınır,

$$\langle t', U \rangle = 0$$

$$\langle \kappa_1 \alpha + \kappa_3 \beta - y, U \rangle = 0$$

$\kappa_1, \kappa_3 \neq 0$ olmak üzere,

$$\langle y, U \rangle = \kappa_1 \langle \alpha, U \rangle + \kappa_3 \langle \beta, U \rangle \quad (5.2.4)$$

dır. Buradan,tekrar s ye göre türev alınırsa

$$(\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2) \langle \alpha, U \rangle + (\kappa_3' + \kappa_2) \langle \beta, U \rangle = (\kappa_3^2 - 2\kappa_1) \langle t, U \rangle \quad (5.2.5)$$

ve

$$(\kappa_1'' + 2\kappa_3' \kappa_2 + \kappa_3 \kappa_2' + \kappa_2^2) \langle \alpha, U \rangle + (\kappa_3'' + \kappa_2') \langle \beta, U \rangle = 3(\kappa_3 \kappa_3' - \kappa_1') \langle t, U \rangle. \quad (5.2.6)$$

Son eşitlik,

$$((\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)' + (\kappa_3' \kappa_2 + \kappa_2^2)) \langle \alpha, U \rangle + (\kappa_3' + \kappa_2)' \langle \beta, U \rangle = \frac{3}{2}(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)' \langle t, U \rangle \quad (5.2.7)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (5.2.5) ve (5.2.7) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \langle \alpha, U \rangle &= \frac{(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)(\kappa_3' + \kappa_2)' - \frac{3}{2}(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)'(\kappa_3' + \kappa_2)}{(\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)(\kappa_3' + \kappa_2)' - (\kappa_3' + \kappa_2)((\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)' + (\kappa_3' \kappa_2 + \kappa_2^2))} \langle t, U \rangle, \\ \langle \beta, U \rangle &= -\frac{(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)((\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)' + (\kappa_3' \kappa_2 + \kappa_2^2)) - \frac{3}{2}(\kappa_3^2 - 2\kappa_1)'(\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)}{(\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)(\kappa_3' + \kappa_2)' - (\kappa_3' + \kappa_2)((\kappa_1' + \kappa_3 \kappa_2)' + (\kappa_3' \kappa_2 + \kappa_2^2))} \langle t, U \rangle \end{aligned}$$

dır. α nın harmonik eğrilik fonksiyonları tanımından,

$$\langle \alpha, U \rangle = H_2 \langle t, U \rangle$$

$$\langle \beta, U \rangle = H_1 \langle t, U \rangle$$

$$\langle y, U \rangle = H_0 \langle t, U \rangle$$

elde edilir.

Sonuç 5.2.1 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, Q^3 üzerinde birim hızlı bir eğri olmak üzere $U \in \mathbb{E}_1^4$ sabit vektör alanı, $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlüsü Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı ve $\{H_0, H_1, H_2\}$, α eğrisinin harmonik eğrilikleri olsun. α , Q^3 üzerinde bir eğilim çizgisi olmak üzere, eğrinin eğilim eksenini

$$U = \{t + H_0\alpha + H_1\beta + H_2y\} \langle t, U \rangle \quad (5.2.8)$$

dir.

İspat U , $\mathbb{E}_1^4$ de lightlike koni üzerindeki α eğilim çizgisinin eksenini ise, $\{t, \alpha, \beta, y\}$ Q^3 üzerindeki asimptotik çatı olmak üzere,

$$U = \lambda_1 t + \lambda_2 \alpha + \lambda_3 \beta + \lambda_4 y$$

dir. Önerme (5.2.1) ve (4.2.1) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle t, U \rangle = c = \text{sabit}, \\ \lambda_2 &= \langle y, U \rangle = H_0 \langle t, U \rangle, \\ \lambda_3 &= \langle \beta, U \rangle = H_1 \langle t, U \rangle, \\ \lambda_4 &= \langle y, U \rangle = H_2 \langle t, U \rangle. \end{aligned}$$

Buradan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ değerleri (5.2.8) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} U &= \{t + H_0\alpha + H_1\beta + H_2y\} \langle t, U \rangle \\ &= \{t + H_0\alpha + H_1\beta + H_2y\} g(\varphi) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.2.3 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^3 de birim hızlı bir eğri olsun.

$\{t, \alpha, \beta, y\}$ dörtlüsü Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanını

ve $\{H_0, H_1, H_2\}$, α eğrisinin harmonik eğriliklerini gösterebilir.

$$D = t + H_0\alpha + H_1\beta + H_2\gamma \quad (5.2.9)$$

vektörüne α eğilim çizgisinin Darboux vektörü denir.

Uyarı 5.2.2 (5.1.9) eşitliğiyle tanımlı Darboux vektörü de $\alpha(s)$ eğilim çizgisi için bir eksenidir.

Teorem 5.2.1 $\alpha : I \rightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $s \rightarrow \alpha(s)$, Q^3 üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $\{t, \alpha, \beta, \gamma\}$ lightlike koni (Q^3) üzerindeki asimptotik çatı alanını ve $\{H_0, H_1, H_2\}$, α eğrisinin harmonik eğrilik fonksiyonlarını gösterebilir. α eğrisi bir eğilim çizgisidir ancak ve ancak D sabit vektördür.

İspat ($\Rightarrow$) α , Q^3 üzerinde bir eğilim çizgisi olmak üzere α nın ekseni U olsun. Sonuç (5.2.1) den

$$U = \{t + H_0\alpha + H_1\beta + H_2\gamma\} g(\varphi)$$

dir. Burada $g(\varphi)$ sabit açı fonksiyonu olmak üzere Tanım (5.2.3) den

$$U = Dg(\varphi) \quad (5.2.10)$$

olur. U , $\mathbb{E}_1^4$ de sabit vektör alanıdır dolayısıyla D sabit vektör alanıdır.

($\Leftarrow$) Tersine $\mathbb{E}_1^4$ de D sabit vektör alanı olsun. D vektör alanının tanımı ve Sonuç (5.2.1) den

$$U = Dg(\varphi)$$

şeklindedir. Buradan

$$\langle U, t(s) \rangle = \langle Dg(\varphi), t(s) \rangle = g(\varphi) \langle D, t(s) \rangle \quad (5.2.11)$$

elde edilir. D Darboux ekseninin tanımından ve (4.2.1) eşitliklerinden,

$$\langle D, t(s) \rangle = 1$$

olup (5.2.11) eşitliğinden,

$$\langle U, t(s) \rangle = g(\varphi) = \text{sabit}$$

elde edilir. Dolayısıyla α , Q^3 üzerinde bir eğilim çizgisidir.

Teorem 5.1.3 $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{E}_1^4$, s yay parametresi olmak üzere, Q^3 üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. $U \in \mathbb{E}_1^4$ sabit vektör alanı, $\{t, \alpha, \beta, y\}$ dördlüsü Q^3 üzerindeki α eğrisi boyunca $\mathbb{E}_1^4$ de asimptotik çatı alanı ve $\{H_0, H_1, H_2\}$, α eğrisinin harmonik eğrilikleri olsun. α eğilim çizgisidir ancak ve ancak

$$\begin{aligned} H'_0 + \kappa_1 + \kappa_2 H_1 &= 0 \\ H'_2 &= 1 \\ H'_1 - \kappa_2 H_2 + \kappa_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

dır.

İspat ($\Rightarrow$) Q^3 üzerinde α eğilim çizgisi olsun. α eğrisi boyunca Darboux vektörünün s ye göre türevi alınrsa,

$$\begin{aligned} D' &= t' + H'_0 \alpha + H_0 \alpha' + H'_1 \beta + H_1 \beta' + H'_2 y + H_2 y' \\ &= \kappa_1 \alpha + \kappa_3 \beta - y + H'_0 \alpha + H_0 t + H'_1 \beta + H_1 (-\kappa_3 t + \kappa_2 \alpha) + H'_2 y + H_2 (-\kappa_1 t - \kappa_2 \beta) \\ &= (H_0 - \kappa_3 H_1 - \kappa_1 H_2) t + (H'_0 + \kappa_1 + \kappa_2 H_1) \alpha + (H'_1 - \kappa_2 H_2 + \kappa_3) \beta + (H'_2 - 1) y \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

bulunur.

α eğilim çizgisi olduğu için D , $\mathbb{E}_1^4$ de sabit vektör alanıdır, yani $D' = 0$ dır. Dolayısıyla (5.2.13) eşitliğinden t, α, β, y lineer bağımsız vektörleri için,

$$\begin{aligned} H_0' + \kappa_1 + \kappa_2 H_1 &= 0 \\ H_2' &= 1 \\ H_1' - \kappa_2 H_2 + \kappa_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) Tersine $H_0' + \kappa_1 + \kappa_2 H_1 = 0$, $H_2' = 1$, $H_1' - \kappa_2 H_2 + \kappa_3 = 0$ sağlansın. D Darboux vektörü tanımından $D' = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla D sabit vektör alanı olup α , Q^3 de bir eğilim çizgisidir.

KAYNAKLAR

- Duggal, K.L. and Bejancu, A. 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 300.
- Duggal, K.L. and Şahin, B. 2010. Differential Geometry of Lightlike Submanifolds", Birkhauser Verlag AG, Germany, pp. 475.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri Cilt I., Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 4. Baskı , 272 s., Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2004. Diferensiyel Geometri 3. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, 4. Baskı , 206 s., Ankara.
- Izumiya, S., Pei, D. and Sano, T. 2000. The Lightcone Gauss Map and The Lightcone Developable of a Spacelike Curve In Minkowski 3-Space, Glasgow Math. J. Vol.42, pp. 75-89.
- Izumiya, S. and Yıldırım, H. 2011. Slant Geomery of Spacelike Hypersurfaces in the Lightcone, J. Math. Soc. Japan Volume 63, Number 3, pp. 715-752.
- Kong, L.L. and Pei, D.H. 2009. On spacelike curve in nullcone 3-space, School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024, P.R.China, 68-70.
- Kossowski, M. 1989. The Intrinsic Conformal Structure and Gauss Map of a Lightlike Hypersurface in Minkowski Space, Transactions of the American Mathematical Society Volume 316, Number 1, 369-383.
- Kühnel, W. 2006. Diferential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds. Second edition pp. 380, USA.

- Liu, H. 2004. Curves in the Lightlike Cone. Beitrage zur Algebra and Geometrie Volume 45, Number.1, 291–303.
- Liu, H. and Meng, Q. 2011. Representation Formulas of Curves in a Two- and Three-Dimensional Lightlike Cone. Results. Math. 59, pp. 437-451.
- Lopez, R. 2008. "Diferential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space". Mini-Course taught at the Instituto de Mathematica e Estatistica (IME-USP) University of Sao Paulo, Brasil.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, NewYork, pp. 468.
- Riesz, M. 1988. Collected Papers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.
- Sabuncuoğlu, A. 2004. Diferensiyel Geometri, 2. Baskı, 556 s.
- Takizawa, C. and Tsukada, K. 2009. Horocyclic Surfaces in Hyperbolic 3-Space. Kyushu J.Math. 63, pp. 269-284.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra Selcen YAKICI

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 01.11.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Alparslan Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi (2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2006)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2010-Temmuz 2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları
Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi (2012 – ...)