

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİSKOELASTİK ÇEKİRDEĞE SAHİP EĞRİSEL KOMPOZİT SANDVIÇ  
KİRİŞLERİN DİFERANSİYEL KUADRATÜR YÖNTEMİ İLE TİTREŞİM ANALİZİ

RAHİM CAN PEKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
GEMİ İNŞAATI VE GEMİ MAKİNELERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
GEMİ İNŞAATI VE GEMİ MAKİNELERİ MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN  
YRD. DOÇ. DR. ÖZGÜR DEMİR

İSTANBUL, 2017

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**VİSKOELASTİK ÇEKİRDEĞE SAHİP EĞRİSEL KOMPOZİT SANDVIÇ  
KİRİŞLERİN DİFERANSİYEL KUADRATÜR YÖNTEMİ İLE TİTREŞİM ANALİZİ**

Rahim Can PEKER tarafından hazırlanan tez çalışması 07.12.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Yrd. Doç. Dr. Özgür DEMİR

Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Yrd. Doç. Dr. Özgür DEMİR

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. İsmail BAYER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Aytaç ARIKOĞLU

İstanbul Teknik Üniversitesi



Bu alışma 115M586 numaralı TÜBİTAK 1001 projesi ile desteklenmiştir.

## ÖNSÖZ

---

Tez çalışmam süresince ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, değerli görüş ve önerileri ile çalışmaya büyük katkı sağlayan tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Özgür Demir'e ve çok değerli hocalarım Doç. Dr. Aytaç Arıkoğlu ve Yrd. Doç. Dr. Muzaffer Metin'e ayrıca çalışmalarımnda bana yardımcı olan Arif Ulu'ya teşekkürlerimi sunarım. Bu günlere gelmemi sağlayan, her zaman olduğu gibi yüksek lisans eğitimim süresince de sonsuz sevgi ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim ve her daim yanımda duran çok değerli babama ve anneme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Aralık, 2017

Rahim Can PEKER

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vii
KISALTIMA LİSTESİ.....	viii
ŞEKİL LİSTESİ.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ .....	x
ÖZET .....	xi
ABSTRACT.....	xii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1    Literatür Özeti .....	1
1.2    Tezin Amacı .....	3
1.3    Hipotez .....	3
BÖLÜM 2	
VİSKOELASTİSİTE .....	4
BÖLÜM 3	
DİFERANSİYEL KUADRATÜR YÖNTEMİ.....	7
BÖLÜM 4	
FORMÜLASYON.....	9
4.1    Silindirik Koordinat.....	9
4.1.1    Problemin Geometrik Özellikleri .....	10
4.1.2    Yer Değiştirme İfadelerinin Elde Edilmesi .....	10
4.1.3    Gerinim ve Gerilme İfadelerinin Elde Edilmesi.....	11
4.1.4    Enerji Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	13
4.1.5    Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi .....	13
4.2    Eğrisel Kartezyen Koordinat.....	15
4.2.1    Problemin Geometrik Özellikleri .....	15
4.2.2    Yer Değiştirme İfadelerinin Elde Edilmesi .....	16
4.2.3    Gerinim ve Gerilme İfadelerinin Elde Edilmesi.....	18
4.2.4    Enerji Denklemlerinin Elde edilmesi.....	20

4.2.5	Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi.....	21	
4.3	Bünye Denklemlerinin Çözülmesi .....	24	
BÖLÜM 5			
DOĞRULAMA .....			28
5.1	Yakınsama .....	28	
5.2	Örnek 1.....	29	
5.3	Örnek 2.....	32	
5.4	Örnek 3.....	36	
BÖLÜM 6			
PARAMETRİK ANALİZLER.....			38
6.1	Kirişin Eğriliğine Bağlı Analizler .....	41	
6.2	Viskoelastik Çekirdek Kalınlığına Bağlı Analizler .....	46	
6.3	Viskoelastik Çekirdeğin Konumuna Bağlı Analizler .....	49	
6.4	Laminasyon Açıklarına Bağlı Analizler .....	51	
BÖLÜM 7			
SONUÇ VE ÖNERİLER .....			53
KAYNAKLAR .....			57
ÖZGEÇMİŞ .....			60

## SİMGE LİSTESİ

---

log	Doğal Logaritma
i	Kompleks Sayı ( $\sqrt{-1}$ )
$\delta$	Varyasyonel Yöntem Operatörü
$\varepsilon$	Normal Yöndeki Gerinim
$\gamma$	Kayma Yönündeki Gerinim
$\sigma$	Normal Yöndeki Gerilme
$\tau$	Kayma Yönündeki Gerilme
$\theta$	Laminasyon Açısı
M	Kesitteki Moment
N	Kesitteki Normal Kuvvet
Q	Kesitteki Kesme Kuvveti

## KISALTMA LİSTESİ

---

AA	İki Ucu Ankastre Mesnet Sınır Şartı
AS	Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Mesnet Sınır Şartı
BB	İki Ucu Basit Mesnet Sınır Şartı
DQM	Diferansiyel Kuadratür Yöntemi
EKK	Eğrisel Kartezyen Koordinat
GDQM	Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratür Yöntemi
MSE	Modal Gerinim Enerjisi
SEM	Sonlu Elemanlar Yöntemi
SK	Silindirik Koordinat

## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Elastik(a) ve viskoelastik(b) malzemelerdeki gerilme-gerinim grafiği .....	5
Şekil 2.2 Viskoelastik malzemelerde zamana göre gerinim ile gerilme grafiği .....	5
Şekil 4.1 Silindirik koordinat sistemi .....	9
Şekil 4.2 Silindirik koordinatta geometrik özellikler .....	10
Şekil 4.3 Silindirik koordinatta yer değiştirme ifadeleri .....	10
Şekil 4.4 Eğrisel kartezyen koordinat sistemi .....	15
Şekil 4.5 Eğrisel kartezyen koordinatta geometrik özellikler .....	16
Şekil 4.6 Eğrisel kartezyen koordinatlarda yer değiştirme ifadeleri .....	16
Şekil 4.7 Eğrisel kirişte aksenal yer değiştirme .....	17
Şekil 4.8 Eğrisel kirişte yer değiştirme .....	19
Şekil 4.9 Chebyshev-Gauss-Labatto ağ yapısı .....	24
Şekil 4.10 Basit mesnet sınır şartı .....	26
Şekil 5.1 Sonlu elamanlar çözüm ağı yapısı .....	30
Şekil 5.2 Mod şekilleri (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış) .....	32
Şekil 5.3 Mod şekillerinin gerçek kısmı (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış) .	35
Şekil 5.4 Mod şekillerinin sanal kısmı (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış) ....	35
Şekil 5.5 EKK/GDQM ve ANSYS sonuçları .....	36
Şekil 5.6 SK/GDQM ve ANSYS sonuçları .....	37
Şekil 6.1 3M Y966 malzeme grafiği .....	39
Şekil 6.2 Doğal frekans hesaplama şema .....	40
Şekil 6.3 SK/GDQM doğal frekans sonuçları .....	41
Şekil 6.4 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları .....	42
Şekil 6.5 Mod şekilleri (1. ve 2. modlar) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)	43
Şekil 6.6 Mod şekilleri (3. ve 4. modlar) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)	44
Şekil 6.7 Mod şekilleri (5. mod) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış) .....	45
Şekil 6.8 SK/GDQM doğal frekans sonuçları .....	46
Şekil 6.9 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları .....	47
Şekil 6.10 SK/GDQM doğal frekans sonuçları .....	47
Şekil 6.11 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları .....	48
Şekil 6.12 SK/GDQM doğal frekans sonuçları .....	49
Şekil 6.13 SK/GDQM Kayıp Faktörü Sonuçları .....	50
Şekil 6.14 SK/GDQM doğal frekans sonuçları .....	51
Şekil 6.15 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları .....	52

## ÇİZELGE LİSTESİ

---

	Sayfa
Çizelge 5.1 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler .....	28
Çizelge 5.2 GDQM terim sayısına bağlı analiz sonuçları .....	29
Çizelge 5.3 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler .....	30
Çizelge 5.4 AA mesnet tipinde doğal frekans değerleri .....	31
Çizelge 5.5 AS mesnet tiplerinde doğal frekans değerleri .....	31
Çizelge 5.6 BB mesnet tiplerinde doğal frekans değerleri .....	31
Çizelge 5.7 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler .....	33
Çizelge 5.8 Sönüm katsayısına göre doğal frekans değerleri .....	34
Çizelge 5.9 Sönüm katsayısına göre kayıp faktörü değerleri .....	34
Çizelge 6.1 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler .....	38

## VİSKOELASTİK ÇEKİRDEĞE SAHİP EĞRİSEL KOMPOZİT SANDVIÇ KİRİŞLERİN DİFERANSİYEL KUADRATÜR YÖNTEMİ İLE TİTREŞİM ANALİZİ

Rahim Can PEKER

Gemi İnşaatı ve Gemi Makineleri Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Özgür DEMİR

Bu tez çalışmasında alt ve üst yüzleri elastik, orta katmanı viskoelastik malzeme olan eğrisel kompozit sandviç kirişin titreşim analizleri incelenmiştir. Öncelikle bu kirişe ait bünye denklemleri ve sınır şartları silindirik koordinatlarda ve eğrisel kartezyen koordinatlarda virtüel iş prensibi ile türetilmiştir. Oluşturulan bu denklemler ise genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür (GDQ) yöntemi ile frekans alanında çözdürülmüştür. Elde edilen sonuçlar ANSYS Mechanical paket programının modal gerinim enerjisi (MSE) yönteminin kombinasyonu ve literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Kirişin katman kalınlıkları, katmanların laminasyon açıları ve kompozit sandviç kirişin eğriliğinin silindirik ve eğrisel kartezyen koordinatlarda doğal frekans sonuçlarına etkisi incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Kayıp Faktörü, Viskoelastik Malzeme, Sandviç Eğrisel Kiriş, Kompozit Malzeme, Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratür Yöntemi, DQM, Doğal Frekans Analizi, Silindirik Koordinat, Eğrisel Kartezyen Koordinat

**VIBRATION ANALYSIS OF CURVED COMPOSITE SANDWICH BEAMS WITH  
VISCOELASTIC CORE BY USING DIFFERENTIAL QUADRATURE METHOD**

Rahim Can PEKER

Department of Naval Architecture And Marine Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Ass. Prof. Dr. Özgür DEMİR

This thesis focuses on the vibration analysis of three-layered curved sandwich beams with elastic face layers and viscoelastic core. First, the equations of motion that govern the free vibrations of the curved beams together with the boundary conditions are derived by using the principle of virtual work, in the cylindrical and curvilinear cartesian coordinate system, in the most general form. Then, these equations are solved by using the generalized differential quadrature (GDQ) method in the frequency domain. Verification of the proposed beam model and the GDQ solution are carried out via comparison with the results that already exist in literature and the ANSYS finite element solution combined with the modal strain energy (MSE) method. The effect of system parameters, i.e. layer thicknesses, the lamination angle of layers and the curvature on the vibration and damping characteristics of a curved sandwich beam with laminated composite face layers and a frequency dependent viscoelastic core is investigated in detail in the cylindrical and curvilinear cartesian coordinate system.

**Keywords:** Loss Factor, Viscoelastic Material, Curved Sandwich Beam, Composite Material, Differential Quadrature Method, DQM, Natural Frequency Analysis, Cylindrical Coordinate, Curvilinear Cartesian Coordinate

---

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

#### 1.1 Literatür Özeti

Literatürde düz sandviç kirişlerin dinamik ve titreşim analizine ayrılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu tezde literatürde nispeten az çalışılan eğrisel sandviç kirişlerin titreşim davranışları parametrik olarak incelenecektir. Bu nedenle düz sandviç kirişler üzerine yapılan çalışmalar hakkında kısa bir literatür çalışması sunulacaktır.

1950'lerin sonundan günümüze kadar geçen sürede viskoelastik çekirdeğe sahip sandviç kirişler üzerinde çalışılmıştır. Öncü bir çalışma olarak Kerwin, iki elastik katman arasında viskoelastik çekirdeğe sahip sandviç düz kiriş üzerinde çalışmıştır [1]. Sonrasında Di Taranto, kompleks kayma modülü olan viskoelastik çekirdeğe ve elastik yüzlere sahip sandviç kirişin titreşim analizlerini yaparak kayıp katsayısını ve doğal frekanslarını analitik olarak hesaplamıştır [2]. Mead ve Markus, Di Taranto'nun teorisini düzenleyerek iki uçtan ankastre mesnetli kirişler için teoriyi genişletmiştir [3, 4]. Fasana vd., Rayleigh Ritz yöntemini kullanarak viskoelastik çekirdeğe sahip düz sandviç kirişlerin titreşimini incelemiştir [5]. Galucio vd., viskoelastik çekirdeğe sahip sandviç kirişin dinamik davranışını viskoelastik malzemeyi kesirli merteye operatörleri ile modelleyerek ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak analiz etmiştir [6]. Tang vd., kısmen örtülü kirişleri normal gerinim etkilerininide dahil ederek sınırlandırılmış bir sönüm tabakası ile incelemiştir [7]. Arıkoğlu vd., frekans ve sıcaklıkla özellikleri değişen viskoelastik çekirdeğe sahip üç katmanlı kompozit sandviç kirişin dinamik davranışını diferansiyel transform yöntemi kullanarak incelemiştir [8]. Loja vd., vikoelastik çekirdeğe ve

nanokompozit yüzeylere sahip sandviç kirişin dinamik davranışını kriging interpolasyon temelli sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemiştir [9].

Eğrisel sandviç kirişlerin titreşim analizine yönelik çalışmalar, diferansiyel denklemlerinin türetilmesinde ortaya çıkan karmaşıklıklar nedeniyle literatür nispeten yetersiz ve oldukça sınırlıdır.

Ahmed, yumuşak elastik bir çekirdeğe sahip sandviç kirişin serbest titreşim analizini sonlu elemanlar yöntemi kullanarak incelemiş ve sistem parametrelerinin rezonans frekanslarına etkilerini ortaya koymuştur [10]. Vaswani vd., frekansa bağlı olarak özelliği değişen viskoelastik çekirdeğe sahip sandviç kirişlerin eğrilik, çekirdek kalınlığı ve simetrik katmanın sönümlenme özelliklerine etkilerini incelemiştir [11]. Sakiyama vd., Green fonksiyonlarını kullanarak parabolik ve dairesel sandviç yayların titreşim ve sönüm özelliklerini incelemiştir [12]. Bozhevolnaya vd., eğrisel elastik sandviç kirişin eğriliğinin öz modlara ve doğal frekansa etkisini Galerkin yöntemi kullanarak incelemiştir [13]. Baba, ankastre mesnetli eğrisel sandviç kirişlerin çekirdek ve yüzeylerin bağlantısının ve eğriliğinin titreşim karakteristiği üzerine etkisini deneysel doğrulama ile birlikte ticari bir sonlu elemanlar programı olan ABAQUS kullanarak araştırmıştır [14].

Bu çalışmada elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılacak olan diferansiyel kuadratür yöntemi literatürde belirtildiği gibi hesaplama maliyeti ve doğruluğu ile ilgili yapıların titreşim analizlerinde yaygın olarak kullanılan sonlu elemanlar yöntemine göre büyük bir avantaja sahiptir [15, 16]. Lagrange interpolasyon polinomuna dayanan bu nokta toplama tekniği, 70'li yılların başında Belman vd. tarafından ortaya konulmuştur [17]. Başlangıçta ortaya konulan formda diferansiyel kuadratür yöntemi ağırlık katsayılarının elde edildiği büyük sistemler için kısıtlı matrisler üretebilmekteydi. Bu dezavantaj Shu vd. tarafından genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yönteminin (GDQM) ortaya konulmasıyla aşılmıştır. Ağırlık katsayılarının açık bir cebirsel formül [18] ile elde edildiği ve o zamandan beri yapıların titreşim analizlerinde etkin bir şekilde kullanıldığı görülmektedir [16,19-27].

## 1.2 Tezin Amacı

Elastik yüze sahip, kayma deformasyonu olan viskoelastik çekirdek ile oluşturulan mühendislik yapıları yüksek dayanım-ağırlık oranına, yüksek titreşim emilimine ve gürültü azaltma kapasitesine sahip olduklarından dolayı inşaat, denizcilik ve havacılık endüstrisinde yapısal eleman olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Denizcilik ve havacılık sektöründe kullanılan yapısal elemanlar daha çok eğrisel geometriye sahiptirler. Bu çalışmada viskoelastik çekirdeğe sahip eğrisel kompozit sandviç kirişin dinamik bünye denklemleri silindirik ve eğrisel kartezyen koordinatlarda varyasyonel yöntemler kullanılarak elde edilmiş ve bu denklemler genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür (GDQ) yöntemi kullanılarak çözdürülmüştür. Eğrisel kirişin eğriliğinin, katman kalınlıklarının ve kompozit malzemenin laminasyon açılarının dinamik davranışa etkileri incelenmiştir. Bu çalışmada çıkartılan diferansiyel denklemlerin GDQM ile lineer denklem takımına dönüştürülmesi ve bu denklem takımlarının çözdürülmesi işlemleri Wolfram MATHEMATICA programı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

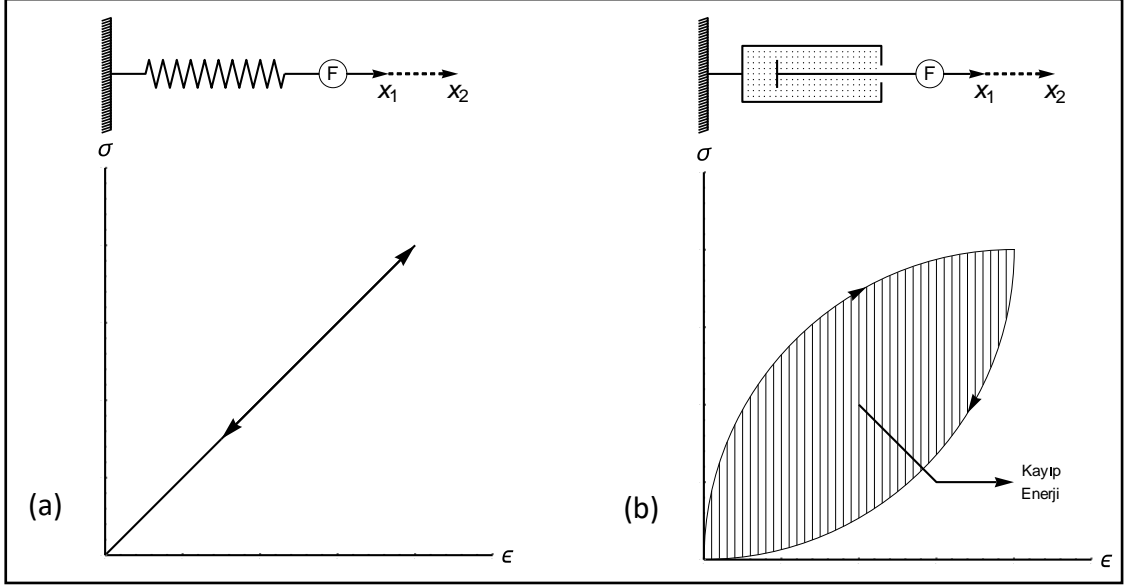
## 1.3 Hipotez

Viskoelastik çekirdeğe ve kompozit yüzlere sahip eğrisel sandviç kirişlerin dinamik davranışının silindirik ve eğrisel kartezyen koordinatlarda oluşturulan diferansiyel denklemleri genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemini kullanarak hesaplamayı hedefliyorum.

### VİSKOELASTİSİTE

İdeal lineer elastik malzemeler Hooke Kanunu'na uygun şekilde davranış göstermektedir ve bu malzemelerde gerinim-gerilme arasında lineer bir ilişki bulunmaktadır. Elastik malzemeler üzerindeki kuvvet arttıkça yer değiştirme ve gerilme orantılı bir şekilde ve aynı anda artmaktadır. Üzerindeki kuvvet kalktığında ise malzeme gerilme ile gerinim aynı oranda enerji kaybı olmadan eski haline geri dönmektedir.

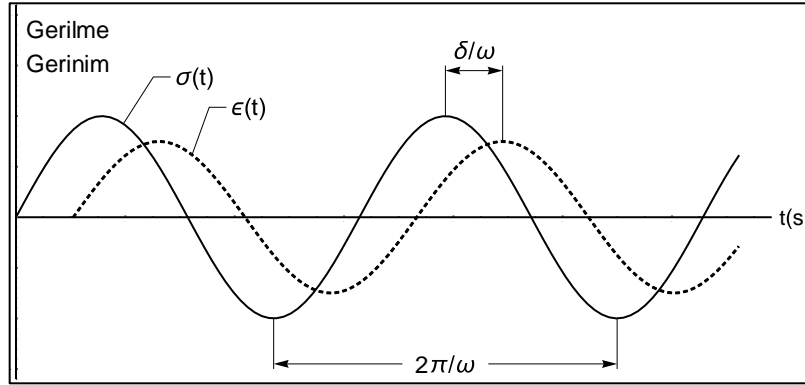
Viskoelastik malzemeler ise katıların ve sıvıların özelliklerini birlikte gösterirler. Akışkanların viskoz özellikleri bu malzemelerde sönüm olarak etki göstermektedir. İdeal bir viskoelastik malzeme ise Newton'un Viskozite Kanunu'na uygun şekilde davranış göstermektedir. Malzeme üzerindeki gerilme, gerinimin zamana göre değişme hızıyla orantılı olarak değişmektedir. Viskoelastik malzeme üzerine uygulanan kuvvet kaldırıldığında malzemenin eski haline geri dönmesi elastik malzemelerde olduğu gibi gerilme ile doğru orantılı bir şekilde gerçekleşmez. Burada bir enerji kaybı oluşmaktadır ve bu da viskoelastik malzemelerin sönüm etkisinden kaynaklanmaktadır [28].



Şekil 2.1 Elastik(a) ve viskoelastik(b) malzemelerdeki gerilme-gerinim grafiği

Bir malzeme üzerine bir kuvvet uygulayıp kuvveti kaldırdığımızda elastik ve viskoelastik malzeme üzerinde oluşan gerilme ve gerinim ilişkisi Şekil 2.1'de gösterilmiştir. Elastik malzemelerde Şekil 2.1 a'da görüldüğü üzere gerilme gerinim arasında orantısal bir ilişki görülmektedir. Fakat viskoelastik malzemelerde Şekil 2.1 b'de görüldüğü üzere gerilme ile gerinim arasında enerji kaybı oluşmaktadır [28].

Viskoelastik malzeme üzerine sinüsoidal bir yük uygulandığında gerilme ve gerinimin zamana göre değişimi Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Viskoelastik malzemelerde zamana göre gerinim ile gerilme grafiği

Şekil 2.2'de görüldüğü üzere viskoelastik bir malzeme üzerine dinamik bir yük uygulandığında gerilme ve gerinim arasında " $\delta$ " kadar bir gecikme oluşmaktadır.

Viskoelastik malzemeler için gerilme ve gerinim aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [28].

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad (2.1)$$

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (2.2)$$

Burada kullanılan “ $\omega$ ” uygulanan yerdeğiştirme frekansını “ $\delta$ ” ise gerinim ile gerilme arasındaki faz farkını ifade etmektedir. Bu ifadeler kullanılarak gerilme saklama modülü ve gerilme kayıp modülü kompleks değişkenler ile 2.3 ve 2.4 numaralı denklemlerde belirtildiği gibi yazılabilmektedir [28].

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)} \quad (2.4)$$

Bu denklemler kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir.

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{e^{i(\omega t + \delta)}}{e^{i\omega t}} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (2.5)$$

$$E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta$$

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta \quad (2.6)$$

$$E^* = E + iE'$$

$$G^* = G + iG' \quad (2.7)$$

Viskoelastik malzemeler için elastisite modülü ve kayma modülü 2.7 ve 2.8 numaralı denklemlerde belirtildiği gibi ifade edilmektedir. Bu modüllerin gerçel olan kısmı depolanan enerjiyi hesaplamada, imajiner kısım ise kayıp enerjinin hesaplanmasında kullanılmaktadır [28].

Enerji Kayıp faktörü ise aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$\eta = \frac{E'}{E} = \frac{G'}{G} \quad (2.8)$$

Böylece viskoelastik malzemeler için elastisite ve kayma modülleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir [28].

$$E^* = E(1 + \eta i)$$

$$G^* = G(1 + \eta i) \quad (2.9)$$

### DİFERANSİYEL KUADRATÜR YÖNTEMİ

Mühendislik sistemlerinde analitik yöntemlerle çözüme ulaşmak sınır şartlarının karmaşıklığı veya farklı malzeme davranışlarından dolayı her problemde mümkün olmamaktadır. Bundan dolayı bu tip denklemleri çözebilmek için günümüze kadar birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin her birinin birbirine göre avantajları ve dezavantajları bulunmaktadır. Hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktasıyla daha kısa sürede ve daha az bilgisayar gücü gerektirecek yani daha ekonomik çözümlerin elde edilebilmesi, yeni yöntemlerin geliştirilmesine neden olmuştur. Bu yöntemlerden biri olan Diferansiyel Kuadratür Yöntemi (DQM) Bellman tarafından ortaya konulmuş (1971) ve diferansiyel formdaki yönetici denklemlerin sınır ve başlangıç koşullarını da denkleme dahil ederek çözüm önermiştir (1972).

Bu yöntemde parçalara ayrılmış sistemin herhangi bir noktasındaki türevini hesaplamak için lokal bir parça yerine sistemdeki bütün noktalar kullanılmaktadır. Böylece sistem üzerinde sonlu elemanlar yöntemine kıyasla daha az nokta kullanılarak sonuca daha doğru ve daha hızlı ulaşmak mümkün olmaktadır.

GDQ yönteminde  $N$  noktaya bölünmüş bir  $x$  fonksiyonunun  $\varphi_i$  noktasındaki  $m$ . mertebeden türevi 3.1 numaralı eşitlik ile hesaplanmaktadır [29].

$$w^{(m)}(\varphi_i) = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(m)} w(\varphi_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

Bu denklem matris formatında 3.2 numaralı eşitlik ile ifade edilebilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \cdot \\ w'_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(m)} & c_{12}^{(m)} & \cdot & c_{1j}^{(m)} \\ c_{21}^{(m)} & c_{22}^{(m)} & \cdot & c_{2j}^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{i1}^{(m)} & c_{i2}^{(m)} & \cdot & c_{ij}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Yukarıda verilen eşitlikte  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  değerleri sistemin üzerinde belirlenen noktaları,  $c_{11}^{(m)}, c_{12}^{(m)}, c_{22}^{(m)}, \dots, c_{mn}^{(m)}$  değerleri GDQM katsayılarını ve  $w'_1, w'_2, \dots, w'_n$  değerleri ise belirlenen noktalardaki m. mertebeden türev değerlerini göstermektedir.

GDQM katsayıları lagrange interpolasyon fonksiyonunun türevlerinden oluşmaktadır. 1. mertebeden türev katsayılarını hesaplamak için 3.3 numaralı denklem kullanılmaktadır.

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M^{(1)}(\varphi_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(\varphi_j)} & \text{for } i \neq j \text{ and } i, j = 1, 2, \dots, N \\ - \sum_{s=1, s \neq i}^N c_{is}^{(1)} & \text{for } i = j \text{ and } i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.3)$$

3.3 numaralı denklemde kullanılan  $M^{(1)}(\varphi_i)$  ifadesi 3.4 numaralı denklem ile hesaplanmaktadır.

$$M^{(1)}(\varphi_k) = \prod_{s=1, s \neq k}^N (\varphi_k - \varphi_s) \quad (3.4)$$

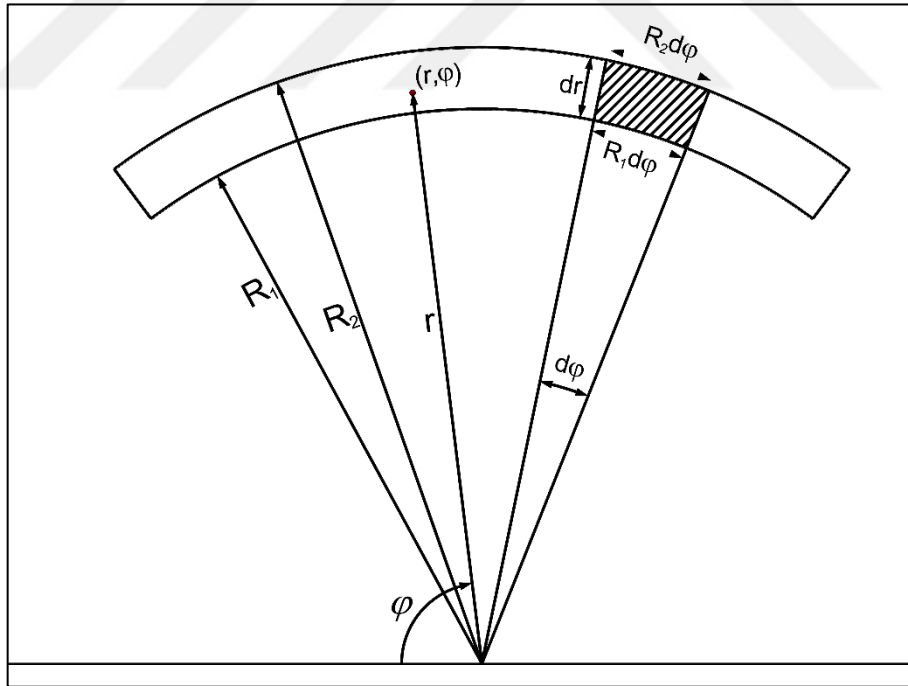
1. mertebeden türev katsayıları hesaplandıktan sonra bu katsayılar kullanılarak m. mertebeden türev katsayıları hesaplanmaktadır (Denklem 3.5).

$$c_{ij}^{(m)} = \begin{cases} m \left( c_{ii}^{(m-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(m-1)}}{\varphi_i - \varphi_j} \right) & \text{for } i \neq j \text{ and } i, j = 1, 2, \dots, N \\ - \sum_{s=1, s \neq i}^N c_{is}^{(m)} & \text{for } i = j \text{ and } i, j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\varphi_i = \frac{L}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad (3.6)$$

#### 4.1 Silindirik Koordinat

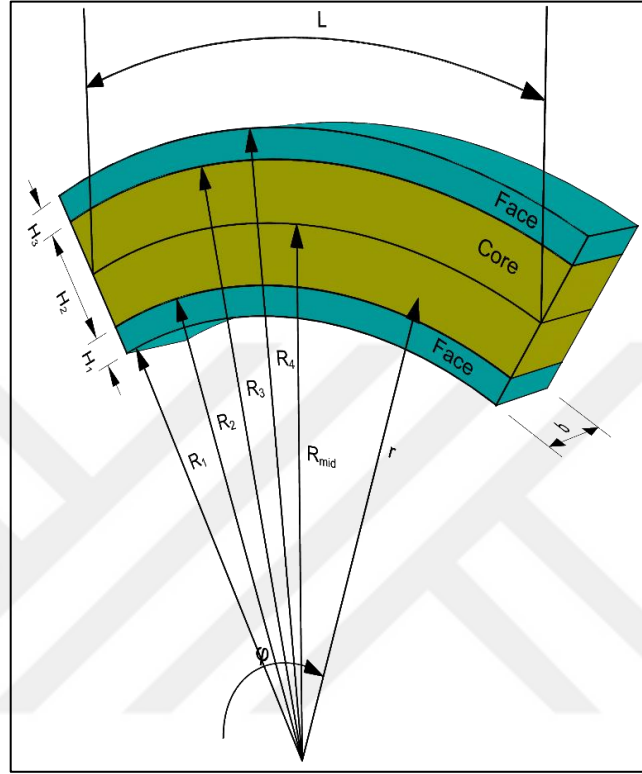
Silindirik koordinatlarda 2 boyutlu uzayda herhangi bir noktanın koordinatları  $P(r, \varphi)$  olarak belirtilmektedir. Bu nokta ve orijin arasındaki vektörün uzunluğu " $r$ ", bu vektörün yatay eksen ile yaptığı açı ise " $\varphi$ " 'dir. Orijin noktası ise Şekil 4.1'de gösterilen eğrisel kirişin merkez noktasıdır.



Şekil 4.1 Silindirik koordinat sistemi

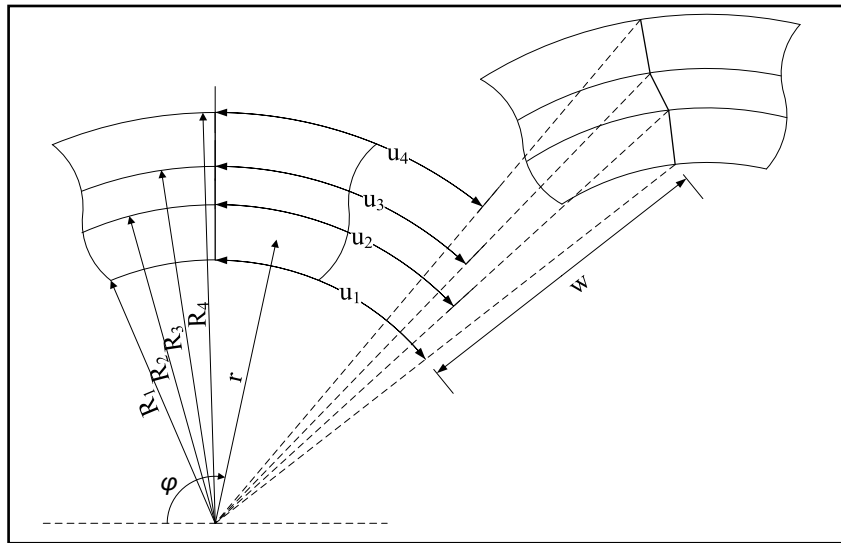
#### 4.1.1 Problemin Geometrik Özellikleri

Analizi yapılacak sistem Şekil 4.2’de gösterildiği üzere  $R_{mid}$  eğrilik yarıçapına sahip,  $H_1$  ve  $H_3$  kompozit katman kalınlıklarına ve  $H_2$  viskoelastik çekirdek kalınlığına sahip ve  $L$  boyunda,  $b$  genişliğindeki eğrisel kiriştir.



Şekil 4.2 Silindirik koordinatta geometrik özellikler

#### 4.1.2 Yer Değişirme İfadelerinin Elde Edilmesi



Şekil 4.3 Silindirik koordinatta yer değişirme ifadeleri

Sandviç kirişte katmanların sınırlarındaki aksenal yer değiştirmeleri Şekil 4.3'te gösterildiği üzere  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , katmanların içerisindeki yer değiştirmeleri  $U_1, U_2, U_3$  katman sınırlarının yarıçapları  $R_1, R_2, R_3, R_4$  ifadeleri ile ve sandviç kiriş üzerindeki herhangi bir nokta  $P(\varphi, r)$  ile temsil edilirse yerdeğiştirmeler arasında 4.1-4.4 numaralı denklemlerde belirtilen ilişki oluşmaktadır.

$$U_1|_{r=R_1} = u_1 \quad (4.1)$$

$$U_2|_{r=R_2} = U_3|_{r=R_2} = u_2 \quad (4.2)$$

$$U_3|_{r=R_3} = U_4|_{r=R_3} = u_3 \quad (4.3)$$

$$U_4|_{r=R_4} = u_4 \quad (4.4)$$

Katmanların i bölgelerindeki yerdeğiştirmeler açısal yönde kalınlık boyunca lineer olarak değiştiği ve radyal yönde değişmediği kabul edilmiştir. Bu kabuller kullanılarak sınırlardaki yer değiştirmeler arasında lineer interpolasyon uygulanmıştır ve her katmana ait yer değiştirme fonksiyonları oluşturulmuştur (Denklemler 4.5-4.8).

$$U_1(r, \varphi, t) = \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} u_1(\varphi, t) + \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} u_2(\varphi, t) \quad (4.5)$$

$$U_2(r, \varphi, t) = \frac{R_3 - r}{R_3 - R_2} u_2(\varphi, t) + \frac{r - R_2}{R_3 - R_2} u_3(\varphi, t) \quad (4.6)$$

$$U_3(r, \varphi, t) = \frac{R_4 - r}{R_4 - R_3} u_3(\varphi, t) + \frac{r - R_3}{R_4 - R_3} u_4(\varphi, t) \quad (4.7)$$

$$W_k(r, \varphi, t) = w(\varphi, t) \quad (4.8)$$

#### 4.1.3 Gerinim ve Gerilme İfadelerinin Elde Edilmesi

Silindirik koordinatlarda lineer elastik yer değiştirmeler iin radyal ve aısal gerinim ifadeleri 4.9 ve 4.10 numaralı denklemlerde verilmiştir.

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{w(\varphi, t)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} U(r, \varphi, t) \quad (4.9)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial}{\partial r} U(r, \varphi, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} w(\varphi, t) - \frac{1}{r} U(r, \varphi, t) \quad (4.10)$$

Yukarıda verilen gerinim ve yer değiştirme ifadeleri kullanılarak her katmandaki gerinim fonksiyonları elde edilmiştir (Denklem 4.11-4.13).

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{I}{r} \left( \frac{R_2 - r}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{r - R_1}{H_1} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + w \right), \quad \gamma_{r\varphi}^{(1)} = \frac{I}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{R_1}{H_1} u_2 - \frac{R_2}{H_1} u_1 \right) \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)} = \frac{I}{r} \left( \frac{R_3 - r}{H_2} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + \frac{r - R_2}{H_2} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + w \right), \quad \gamma_{r\varphi}^{(2)} = \frac{I}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{R_2}{H_2} u_3 - \frac{R_3}{H_2} u_2 \right) \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} = \frac{I}{r} \left( \frac{R_4 - r}{H_3} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + \frac{r - R_3}{H_3} \frac{\partial u_4}{\partial \varphi} + w \right), \quad \gamma_{r\varphi}^{(3)} = \frac{I}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{R_3}{H_3} u_4 - \frac{R_4}{H_3} u_3 \right) \quad (4.13)$$

Denklemlerde kullanılan  $H_k$ , katman kalınlıkları için kullanılmaktadır ve k. katman için kalınlık,  $H_k = R_{k+1} - R_k$  şeklinde ifade edilmektedir.

Gerinim ifadeleri ve malzeme matrisi kullanılarak her k. katman için gerilme vektörü aşağıdaki eşitlik ile bulunmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \\ \tau_{r\varphi}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} \\ \gamma_{r\varphi}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Malzeme matrisindeki  $C_{11}^{(k)}$  ve  $C_{55}^{(k)}$  ifadeleri k. katmanın malzeme özelliklerini ifade etmektedir. Kompozit katmanların malzeme sabitleri 4.15 numaralı eşitlikler kullanılarak bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} C_{11}^{(k)} &= Q_{11}^{(k)} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12}^{(k)} + 2Q_{66}^{(k)}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22}^{(k)} \sin^4 \theta_k \\ C_{55}^{(k)} &= Q_{55}^{(k)} \cos^2 \theta_k + Q_{44}^{(k)} \sin^2 \theta_k \end{aligned} \quad (4.15)$$

Bu denklemlerdeki  $\theta$  laminasyon açısını,  $Q_{mn}$  ise malzeme sabitini belirtmektedir ve bu sabitler 4.16 numaralı denklemler yardımı ile hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{12}^{(k)} E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)}}{1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}}, \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \\ Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, \quad Q_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad \nu_{21}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} \nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Viskoelastik çekirdek için malzeme sabitleri aşağıdaki eşitlikte gösterilmiştir.

$$C_{55}^{(k)} = G^*, \quad C_{11}^{(k)} = 2(1 + \nu)G^* \quad (4.17)$$

Bu ifadelerdeki  $G^*$  terimi kompleks kayma modülünü ifade etmektedir.

#### 4.1.4 Enerji Denklemlerinin Elde Edilmesi

Probleme ait gerinim ve gerilme ifadeleri kullanılarak sisteme ait enerji denklemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \int_0^T \int_0^b \int_0^{R_{k+1}} \int_0^{\varphi_2} \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \epsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + \tau_{r\varphi}^{(k)} \gamma_{r\varphi}^{(k)} \right) r d\varphi dr dz dt \\ & - \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_0^T \int_0^b \int_0^{R_{k+1}} \int_0^{\varphi_2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial t} \frac{\partial W_k}{\partial t} \right) r d\varphi dr dz dt = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Enerji denklemindeki birinci kısım sistemin potansiyel enerjisini ikinci kısım ise kinetik enerjisini ifade etmektedir.

#### 4.1.5 Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Enerji denkleminin fiziğin minimum eylem prensibi ilkesine göre yer değiştirmelere göre varyasyonu alındığında sisteme ait bünye denklemleri elde edilir (Denklem 4.19).

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \int_0^T \int_0^b \int_0^{R_{k+1}} \int_0^{\varphi_2} \left( \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} \delta \epsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} + \tau_{r\varphi}^{(k)} \delta \gamma_{r\varphi}^{(k)} \right) r d\varphi dr dz dt \\ & - \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_0^T \int_0^b \int_0^{R_{k+1}} \int_0^{\varphi_2} \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} \delta \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial t} \delta \frac{\partial W_k}{\partial t} \right) r d\varphi dr dz dt = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Kuvvetler ve momentler cinsinden bünye denklemleri 4.20-4.24 numaralı denklemlerde verilmiştir. Enerji denklemine varyasyon uygulandığında sisteme ait sınır şartları da elde edilmektedir (Denklem 4.25-4.29).

$$\frac{R_2}{H_1} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{R_2}{H_1} Q_{r\varphi}^{(1)} = \rho_1 \left[ \left( \frac{H_1^2}{12} + \frac{H_1 R_1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( \frac{H_1^2}{12} + \frac{H_1 R_1}{6} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_3}{H_2} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{R_1}{H_1} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{R_3}{H_2} Q_{r\varphi}^{(2)} - \frac{R_1}{H_1} Q_{r\varphi}^{(1)} = \\ & \rho_1 \left[ \left( \frac{H_1^2}{12} + \frac{H_1 R_1}{6} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( \frac{H_1^2}{4} + \frac{H_1 R_1}{3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] \\ & + \rho_2 \left[ \left( \frac{H_2^2}{12} + \frac{H_2 R_2}{3} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( \frac{H_2^2}{12} + \frac{H_2 R_2}{6} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_4}{H_3} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(3)}}{\partial \varphi} - \frac{R_2}{H_2} \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(3)}}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{R_4}{H_3} Q_{r\varphi}^{(3)} - \frac{R_2}{H_2} Q_{r\varphi}^{(2)} = \\ & \rho_2 \left[ \left( \frac{H_2^2}{12} + \frac{H_2 R_2}{6} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( \frac{H_2^2}{4} + \frac{H_2 R_2}{3} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] \\ & + \rho_3 \left[ \left( \frac{H_3^2}{12} + \frac{H_3 R_3}{3} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \left( \frac{H_3^2}{12} + \frac{H_3 R_3}{6} \right) \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{H_3} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}^{(3)}}{\partial \varphi} - \frac{R_3}{H_3} \left( \frac{\partial N_{\varphi\varphi}^{(3)}}{\partial \varphi} - Q_{r\varphi}^{(3)} \right) = \rho_3 \left[ \left( \frac{H_3^2}{12} + \frac{H_3 R_3}{6} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \left( \frac{H_3^2}{4} + \frac{H_3 R_3}{3} \right) \frac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} \right] \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{r\varphi}^{(1)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_{r\varphi}^{(2)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_{r\varphi}^{(3)}}{\partial \varphi} - N_{\varphi\varphi}^{(1)} - N_{\varphi\varphi}^{(2)} - N_{\varphi\varphi}^{(3)} \\ & = \left( \frac{\rho_1 H_1^2}{2} + \frac{\rho_2 H_2^2}{2} + \frac{\rho_3 H_3^2}{2} + \rho_1 H_1 R_1 + \rho_2 H_2 R_2 + \rho_3 H_3 R_3 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Varyasyonel yöntem kullanılarak çıkartılan bünye denklemlerine ait sınır şartları geometrik ve doğal sınır şartı olmak üzere iki parçadan oluşmaktadır. Geometrik sınır şartı sınırlardaki yer değiştirmeleri, doğal sınır şartı ise sınırlardaki kuvvet ve moment koşullarını ifade etmektedir. Örneğin 4.25 numaralı denkleme göre kiriş sınırlarında ya “w” yer değiştirmesi ya da o noktalardaki kesme kuvvetleri sıfır olmak zorundadır.

$$\left( Q_{r\varphi}^{(1)} + Q_{r\varphi}^{(2)} + Q_{r\varphi}^{(3)} \right) \delta w \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0 \quad (4.25)$$

$$\left( \frac{R_2}{H_1} N_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{H_1} M_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) \delta u_1 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0 \quad (4.26)$$

$$\left( \frac{R_3}{H_2} N_{\varphi\varphi}^{(2)} - \frac{R_1}{H_1} N_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{1}{H_2} M_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{1}{H_1} M_{\varphi\varphi}^{(1)} \right) \delta u_2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0 \quad (4.27)$$

$$\left( \frac{R_4}{H_3} N_{\varphi\varphi}^{(3)} - \frac{R_2}{H_2} N_{\varphi\varphi}^{(2)} - \frac{1}{H_3} M_{\varphi\varphi}^{(3)} + \frac{1}{H_2} M_{\varphi\varphi}^{(2)} \right) \delta u_3 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0 \quad (4.28)$$

$$\left( \frac{1}{H_3} M_{\varphi\varphi}^{(3)} - \frac{R_3}{H_3} N_{\varphi\varphi}^{(3)} \right) \delta u_4 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = 0 \quad (4.29)$$

Bünye ve sınır şartı denklemlerinde kullanılan kuvvet ve moment ifadeleri 4.30 numaralı denklem kullanılarak hesaplanmış ve 4.31-4.33 numaralı denklemler elde edilmiştir.

$$N_{\varphi\varphi}^{(k)} = \int_{R_k}^{R_{k+1}} \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} dr, \quad M_{\varphi\varphi}^{(k)} = \int_{R_k}^{R_{k+1}} r \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} dr, \quad Q_{r\varphi}^{(k)} = \int_{R_k}^{R_{k+1}} \tau_{r\varphi}^{(k)} dr \quad (4.30)$$

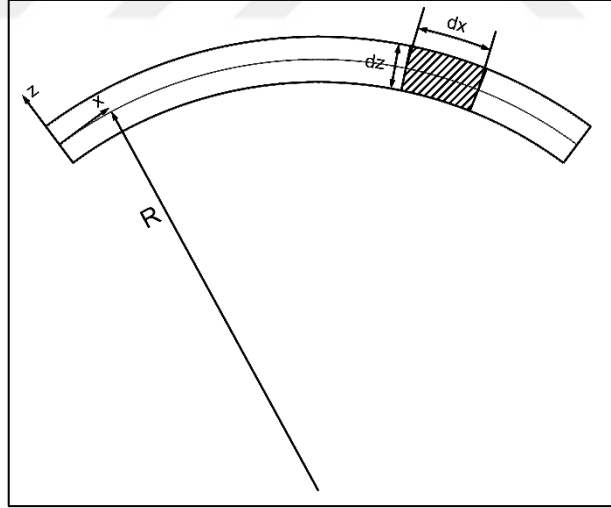
$$M_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{1}{2} C_{11}^{(k)} H_k \left( 2w + \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varphi} \right) \quad (4.31)$$

$$N_{\varphi\varphi}^{(k)} = C_{11}^{(k)} \left( \log \left( \frac{R_{k+1}}{R_k} \right) \left( w + \frac{R_{k+1}}{H_k} \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - \frac{R_k}{H_k} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{k+1}}{\partial \varphi} \right) \quad (4.32)$$

$$Q_{\varphi\varphi}^{(k)} = -C_{55}^{(k)} \frac{1}{H_k} \log \left( \frac{R_{k+1}}{R_k} \right) \left( R_{k+1} u_k - R_k u_{k+1} - H_k \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \quad (4.33)$$

## 4.2 Eğrisel Kartezyen Koordinat

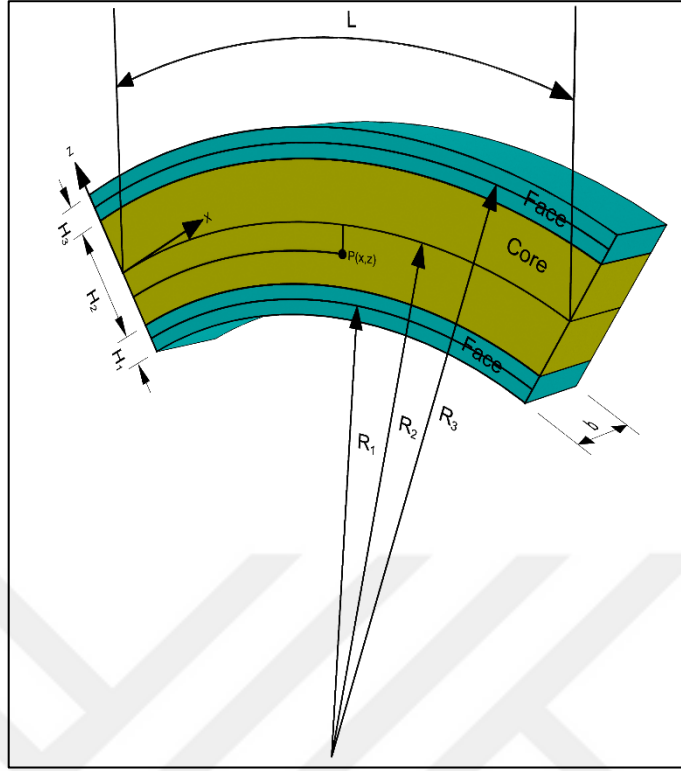
Eğrisel koordinat sisteminde yayın başladığı nokta orijin noktası olarak kabul edilmektedir. X eksenini yayın her noktasında yaya teğet, Z eksenini ise yaya dik vektör olarak belirtmektedir.



Şekil 4.4 Eğrisel kartezyen koordinat sistemi

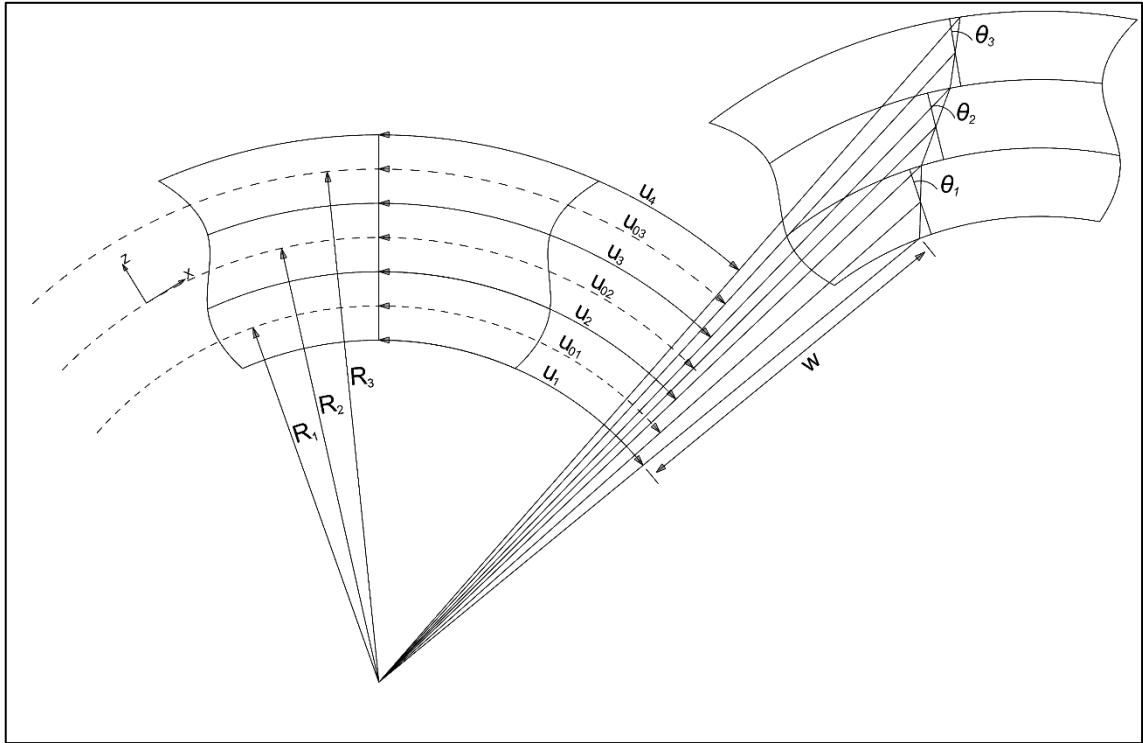
### 4.2.1 Problemin Geometrik Özellikleri

Analizi yapılacak sistem Şekil 4.5'te görüldüğü üzere  $R_1$  ve  $R_3$  yarıçaplarına,  $H_1$  ve  $H_3$  kalınlıklarına sahip kompozit yüzlere ve  $R_2$  yarıçapına ve  $H_1$  kalınlığına sahip viskoelastik çekirdeğe sahip,  $b$  genişliğinde ve  $L$  boyundaki eğrisel kiriştir.



Şekil 4.5 Eğrisel kartezyen koordinatta geometrik özellikler

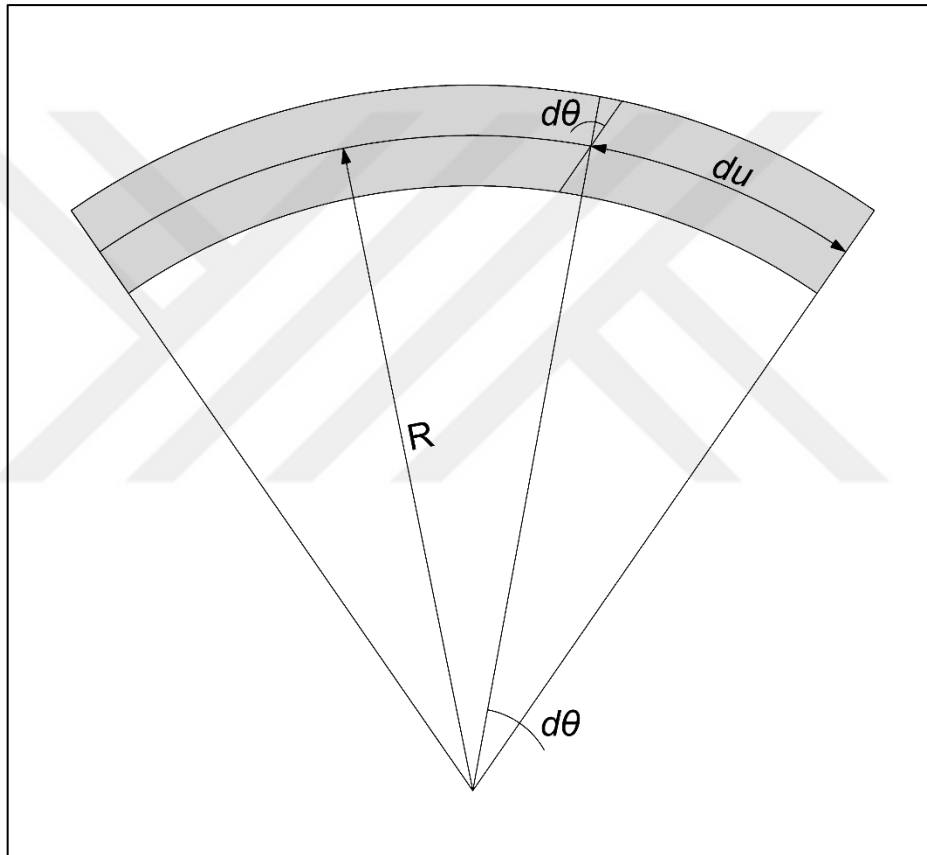
#### 4.2.2 Yer Değiştirme İfadelerinin Elde Edilmesi



Şekil 4.6 Eğrisel kartezyen koordinatlarda yer değiştirme ifadeleri

Sandviç kirişte katmanların sınırlarındaki aksenal yer değiştirmeleri Şekil 4.6'da gösterildiği üzere  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , katmanların tarafsız aksenlerindeki yerdeğiştirmeler  $u_{01}, u_{02}, u_{03}$ , katmanların içerisindeki yer değiştirmeleri  $U_1, U_2, U_3$ , katmanların tarafsız aksenlerinin eğrilik yarıçapları  $R_1, R_2, R_3$  ifadeleri ile ve sandviç kiriş üzerindeki herhangi bir nokta  $P(x,z)$  ile temsil edilmektedir.

Bu bölümde yerdeğiştirme denklemleri yazılırken Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Yerdeğiştirme ifadesinde dönme serbestliğine ek olarak eğrilikten kaynaklanan bir terim gelmektedir.



Şekil 4.7 Eğrisel kirişte aksenal yer değiştirme

Eğrisel kirişlerde " $du$ " büyüklüğünde aksenal bir yer değiştirme olduğunda düz kirişlerin aksine kiriş üzerinde eğrilikten kaynaklanan " $d\theta$ " kadar bir dönme meydana gelmektedir.

$$du=Rd\theta, \theta=\frac{u}{R} \quad (4.34)$$

4.34 numaralı denklemde çıkartılan dönme ifadesi Timoshenko kiriş teorisindeki dönme serbestliğine eklenmiş ve 4.35 numaralı denklem elde edilmiştir.

$$U_k = u_{0k} + z \left( \varphi_k + \frac{u_{0k}}{R_k} \right) \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= U_1 \Big|_{z=H_1/2} = U_2 \Big|_{z=-H_2/2} \\ u_3 &= U_2 \Big|_{z=H_2/2} = U_3 \Big|_{z=-H_3/2} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Katmanlar arasındaki  $u_k$  yer değiştirmeleri arasındaki ilişki kullanılarak 4.36 numaralı denklemde belirtilen eşitlik kurulmuştur. Bu eşitlikler ve her katmana ait yer değiştirme fonksiyonları (Denklem 4.35) kullanılarak 4.37 numaralı eşitlik yazılmıştır.

$$\begin{aligned} u_{01} &= \frac{R_1}{2R_1 + H_1} \left( \frac{2R_2 - H_2}{R_2} u_{02} - H_1 \varphi_1 - H_2 \varphi_2 \right) \\ u_{03} &= -\frac{R_3}{2R_3 - H_3} \left( \frac{2R_2 + H_2}{R_2} u_{02} + H_2 \varphi_2 + H_3 \varphi_3 \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Tarafsız eksenlere ait yer değiştirme fonksiyonları 4.35 numaralı denklemde yerine konulduğunda her katmana ait yer değiştirme fonksiyonları elde edilmektedir (Denklem 4.38-4.41).

$$U_1 = \frac{R_1}{2R_1 + H_1} \left( \frac{2R_2 - H_2}{R_2} \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right) u_{02} - (H_1 - 2z) \varphi_1 - H_2 \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right) \varphi_2 \right) \quad (4.38)$$

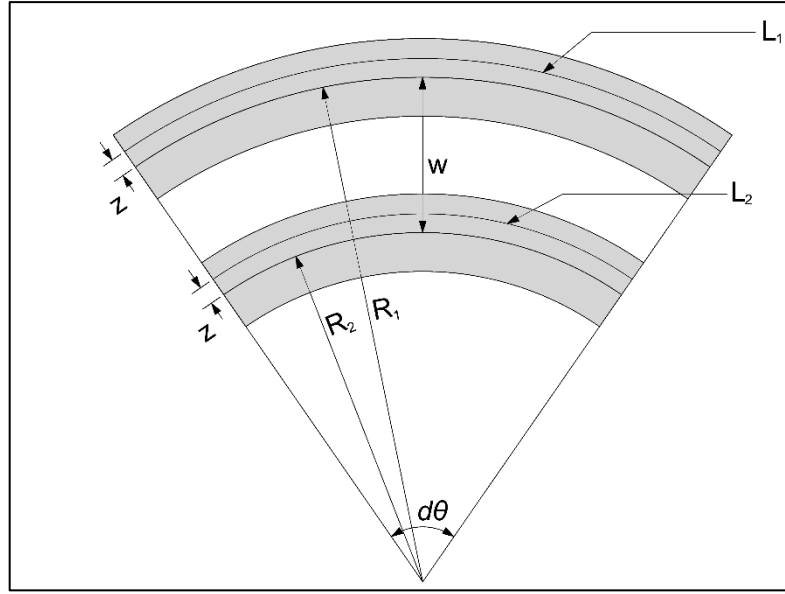
$$U_2 = u_{02} + z \left( \varphi_2 + \frac{u_{02}}{R_2} \right) \quad (4.39)$$

$$U_3 = \frac{R_3}{2R_3 - H_3} \left( \frac{2R_2 + H_2}{R_2} \left( 1 + \frac{z}{R_3} \right) u_{02} + H_2 \left( 1 + \frac{z}{R_3} \right) \varphi_2 + (H_3 + 2z) \varphi_3 \right) \quad (4.40)$$

$$W_k(r, x, t) = w(x, t) \quad (4.41)$$

#### 4.2.3 Gerinim ve Gerilme İfadelerinin Elde Edilmesi

Eğrisel kirişlerde düz kiriş için kullanılan gerinim fonksiyonunun yanında eğrilikten kaynaklanan ek bir gerinim ifadesi oluşmaktadır.



Şekil 4.8 Eğrisel kirişte yer değiştirme

Şekil 4.8’de gösterildiği üzere “ $L_1$ ” boyundaki ve “ $R_1$ ” yarıçaplı bir diferansiyel eğrisel kiriş parçası “ $w$ ” büyüklüğünde yer değiştirme yaptığında kiriş üzerindeki herhangi bir noktada meydana gelen ekstra gerinim ifadesi 4.42 numaralı işlemler ile anlatılmıştır.

$$L_1 = (R_1 + z) d\theta$$

$$L_2 = (R_2 + z) d\theta$$

$$R_2 = R_1 - w$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{L_1 - L_2}{L_1} = \frac{w}{R_1 + z}$$

$$z \ll R_1$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{w}{R_1}$$

(4.42)

Bu gerinim ifadesi Timoshenko kiriş teorisindeki gerinim ifadesine eklendiğinde 4.43 numaralı denklem elde edilmektedir.

$$\varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{\partial U_k}{\partial x} + \frac{w}{R_{mid}}$$

(4.43)

$$\gamma_{xz}^{(k)} = \frac{\partial U_k}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

(4.44)

Yukarıda verilen denklemler ve yer değiştirme ifadeleri kullanılarak her katmana ait gerinim fonksiyonları elde edilmiştir (Denklem 2.45-2.47).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(1)} &= \frac{(2R_2 - H_2)(R_1 + z)}{R_2(2R_1 + H_1)} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} - \frac{R_1(H_1 - 2z)}{2R_1 + H_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{H_2(R_1 + z)}{2R_1 + H_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{w}{R_{mid}} \\ \gamma_{xz}^{(1)} &= \frac{1}{2R_1 + H_1} \left[ \frac{2R_2 - H_2}{R_2} u_{02} + 2R_1 \varphi_1 - H_2 \varphi_2 \right] + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(2)} &= \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right) \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{w}{R_{mid}} \\ \gamma_{xz}^{(2)} &= \varphi_2 + \frac{u_{02}}{R_2} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx}^{(3)} &= \frac{(2R_2 + H_2)(R_3 + z)}{R_2(2R_3 - H_3)} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + \frac{H_2(R_3 + z)}{2R_3 - H_3} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{R_3(H_3 + 2z)}{2R_3 - H_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{w}{R_{mid}} \\ \gamma_{xz}^{(3)} &= \frac{1}{2R_3 - H_3} \left[ \frac{H_2 + 2R_2}{R_2} u_{02} + H_2 \varphi_2 + 2R_3 \varphi_3 \right] + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.47)$$

Denklemlerde kullanılan  $H_k$ , katman kalınlıkları için kullanılmaktadır. Gerinim ifadeleri ve malzeme matrisi kullanılarak her k. katman için gerilme vektörü aşağıdaki eşitlik ile bulunmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(k)} \\ \gamma_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix}\quad (4.48)$$

Malzeme matrisindeki  $C_{11}^{(k)}$  ve  $C_{55}^{(k)}$  ifadeleri k. katmanın malzeme özelliklerini belirtmektedir. Kompozit katmanların malzeme sabitlerinin hesaplanmasına ilişkin eşitlikler "4.1.3" numaralı başlıkta anlatılmıştır.

#### 4.2.4 Enerji Denklemlerinin Elde edilmesi

Probleme ait gerinim ve gerilme ifadeleri kullanılarak sisteme ait enerji denklemi yazılmıştır.

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^3 \int_0^T \int_0^b \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \int_0^L \left( \sigma_{xx}^{(k)} \varepsilon_{xx}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \gamma_{xz}^{(k)} \right) dx dz dy dt \\ & - \sum_{k=1}^3 \int_0^T \int_0^b \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \int_0^L \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial t} \frac{\partial W_k}{\partial t} \right) dx dz dy dt = 0\end{aligned}\quad (4.49)$$

Enerji denklemindeki birinci kısım sistemin potansiyel enerjisini ikinci kısım ise kinetik enerjisini ifade etmektedir.

#### 4.2.5 Diferansiyel Denklemlerin Elde Edilmesi

Enerji denkleminin fiziğin minimum eylem prensibi ilkesine göre yer değiştirmelere göre varyasyonu alındığında sisteme ait bünye denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \int_0^T \int_0^b \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \int_0^L (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \delta \gamma_{xz}^{(k)}) dx dz dy dt \\ & - \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_0^T \int_0^b \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \int_0^L \left( \frac{\partial U_k}{\partial t} \delta \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial t} \delta \frac{\partial W_k}{\partial t} \right) dx dz dy dt = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Kuvvetler ve momentler cinsinden bünye denklemleri 4.51-4.55 numaralı denklemlerde verilmiştir. Enerji denklemine varyasyon uygulandığında sisteme ait sınır şartları da elde edilmiştir (Denklem 4.56-4.60).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_{mid}} \left( N_{xx}^{(1)} + N_{xx}^{(2)} + N_{xx}^{(3)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( Q_{xz}^{(1)} + Q_{xz}^{(2)} + Q_{xz}^{(3)} \right) = - \left( H_1 \rho_1 + H_2 \rho_2 + H_3 \rho_3 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.51) \\ & \frac{2R_2 - H_2}{R_2 (2R_1 + H_1)} \left( Q_{xz}^{(1)} - \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} - R_1 \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} \right) + \frac{1}{R_2} \left( Q_{xz}^{(2)} - \frac{\partial M_{xx}^{(2)}}{\partial x} - R_2 \frac{\partial N_{xx}^{(2)}}{\partial x} \right) + \\ & \frac{2R_2 + H_2}{R_2 (2R_3 - H_3)} \left( Q_{xz}^{(3)} - \frac{\partial M_{xx}^{(3)}}{\partial x} - R_3 \frac{\partial N_{xx}^{(3)}}{\partial x} \right) = \\ & - \left[ \frac{H_1 (H_1^2 + 12R_1^2) (H_2 - 2R_2)^2 \rho_1}{12(H_1 + 2R_1)^2 R_2^2} + \frac{H_2 (H_2^2 + 12R_2^2) \rho_2}{12R_2^2} \right] \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2} \\ & + \frac{H_3 (H_2 + 2R_2)^2 (H_3^2 + 12R_3^2) \rho_3}{12R_2^2 (H_3 - 2R_3)^2} \\ & + \left[ \frac{H_1^2 (H_1 - 6R_1) R_1 (H_2 - 2R_2) \rho_1}{6(H_1 + 2R_1)^2 R_2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \left[ \frac{H_3^2 (H_2 + 2R_2) R_3 (H_3 + 6R_3) \rho_3}{6R_2 (H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \\ & - \left[ \frac{H_2 H_1 (H_1^2 + 12R_1^2) (H_2 - 2R_2) \rho_1}{12(H_1 + 2R_1)^2 R_2} + \frac{H_2^3 \rho_2}{12R_2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ & + \frac{H_2 H_3 (H_2 + 2R_2) (H_3^2 + 12R_3^2) \rho_3}{12R_2 (H_3 - 2R_3)^2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_1}{(2R_1+H_1)} \left[ 2Q_{xz}^{(1)} + H_1 \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} \right] = \left[ \frac{H_1^2 R_1 (6R_1 - H_1)(2R_2 - H_2) \rho_1}{6R_2 (H_1 + 2R_1)^2} \right] \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2} \\ & - \left[ \frac{8H_1^3 R_1^2 \rho_1}{6(H_1 + 2R_1)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \left[ \frac{H_1^2 H_2 (H_1 - 6R_1) R_1 \rho_1}{6(H_1 + 2R_1)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_2}{(2R_1 + H_1)} \left[ -Q_{xz}^{(1)} + R_1 \frac{\partial N_{xx}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x} \right] + Q_{xz}^{(2)} - \frac{\partial M_{xx}^{(2)}}{\partial x} \\ & + \frac{H_2}{(2R_3 - H_3)} \left[ Q_{xz}^{(3)} - R_3 \frac{\partial N_{xx}^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xx}^{(3)}}{\partial x} \right] = \\ & - \left[ \frac{H_2 H_1 (H_1^2 + 12R_1^2)(H_2 - 2R_2) \rho_1}{12(H_1 + 2R_1)^2 R_2} + \frac{H_2^3 \rho_2}{12R_2} \right] \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2} \\ & + \left[ \frac{H_2 H_3 (H_2 + 2R_2)(H_3^2 + 12R_3^2) \rho_3}{12R_2 (H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2} \\ & + \left[ \frac{H_1^2 H_2 (H_1 - 6R_1) R_1 \rho_1}{6(H_1 + 2R_1)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \left[ \frac{H_2 H_3^2 R_3 (H_3 + 6R_3) \rho_3}{6(H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \\ & - \frac{H_2^2}{12} \left[ \frac{H_1 (H_1^2 + 12R_1^2) \rho_1}{(H_1 + 2R_1)^2} + H_2 \rho_2 + \frac{H_3 (H_3^2 + 12R_3^2) \rho_3}{(H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & \frac{R_3}{(2R_3 - H_3)} \left[ 2Q_{xz}^{(3)} - H_3 \frac{\partial N_{xx}^{(3)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial M_{xx}^{(3)}}{\partial x} \right] = - \left[ \frac{H_2 H_3^2 R_3 (H_3 + 6R_3) \rho_3}{6(H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ & - \left[ \frac{H_3^2 (H_2 + 2R_2) R_3 (H_3 + 6R_3) \rho_3}{6R_2 (H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 u_{02}}{\partial t^2} - \left[ \frac{8H_3^3 R_3^2 \rho_3}{6(H_3 - 2R_3)^2} \right] \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Varyasyonel yöntem kullanılarak çıkartılan bünye denklemlerine ait sınır şartları geometrik ve doğal sınır şartı olmak üzere iki parçadan oluşmaktadır. Geometrik sınır şartı sınırlardaki yer değiştirmeleri, doğal sınır şartı ise sınırlardaki kuvvet ve moment koşullarını ifade etmektedir. Örneğin 4.56 numaralı denkleme göre kiriş sınırlarında ya “w” yer değiştirmesi ya da o noktadaki kesme kuvvetleri sıfır olmak zorundadır.

$$\left( Q_{xz}^{(1)} + Q_{xz}^{(2)} + Q_{xz}^{(3)} \right) \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (4.56)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{2R_2+H_2}{2R_1+H_1} \left( \frac{R_1}{R_2} N_{xx}^{(1)} + \frac{I}{R_2} M_{xx}^{(1)} \right) - \left( N_{xx}^{(2)} + \frac{I}{R_2} M_{xx}^{(2)} \right) \\ + \frac{2R_2+H_2}{2R_3+H_3} \left( \frac{R_3}{R_2} N_{xx}^{(3)} + \frac{I}{R_2} M_{xx}^{(3)} \right) \end{array} \right] \delta u_{02} \Big|_0^L = 0 \quad (4.57)$$

$$\left( \frac{R_1 H_1}{2R_1 + H_1} N_{xx}^{(1)} + \frac{2R_1}{2R_1 - H_1} M_{xx}^{(1)} \right) \delta \varphi_1 \Big|_0^L = 0 \quad (4.58)$$

$$\left[ -\frac{H_2}{2R_1 + H_1} \left( R_1 N_{xx}^{(1)} + M_{xx}^{(1)} \right) + M_{xx}^{(2)} + \frac{H_2}{2R_3 - H_3} \left( R_3 N_{xx}^{(3)} + M_{xx}^{(3)} \right) \right] \delta \varphi_2 \Big|_0^L = 0 \quad (4.59)$$

$$\left( \frac{R_3 H_3}{2R_3 - H_3} N_{xx}^{(3)} + \frac{2R_3}{2R_3 - H_3} M_{xx}^{(3)} \right) \delta \varphi_3 \Big|_0^L = 0 \quad (4.60)$$

Bünye ve sınır şartı denklemlerinde kullanılan kuvvet ve moment ifadeleri 4.61 numaralı denklem kullanılarak hesaplanmış ve 4.62 - 4.70 numaralı denklemler elde edilmiştir.

$$N_{xx}^{(k)} = \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad M_{xx}^{(k)} = \int_{-H_k/2}^{H_k/2} z \sigma_{xx}^{(k)} dz, \quad Q_{xz}^{(k)} = \int_{-H_k/2}^{H_k/2} \tau_{xz}^{(k)} dz \quad (4.61)$$

$$M_{xx}^{(1)} = -C_{11}^{(1)} \frac{H_1^3}{12(2R_1 + H_1)} \left[ \frac{H_2 - 2R_2}{R_2} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} - 2R_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (4.62)$$

$$M_{xx}^{(2)} = C_{11}^{(2)} \frac{H_2^3}{12R_2} \left[ \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + R_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] \quad (4.63)$$

$$M_{xx}^{(3)} = -C_{11}^{(3)} \frac{H_3^3}{12(2R_3 - H_3)} \left[ \frac{H_2 + 2R_2}{R_2} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + 2R_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right] \quad (4.64)$$

$$N_{xx}^{(1)} = C_{11}^{(1)} \left[ \frac{H_1}{R_{mid}} w - \frac{H_1 R_1}{H_1 + 2R_1} \left( \frac{H_2 - 2R_2}{R_2} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + H_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) \right] \quad (4.65)$$

$$N_{xx}^{(2)} = C_{11}^{(2)} \frac{H_2}{R_{mid}} \left[ w + R_{mid} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} \right] \quad (4.66)$$

$$N_{xx}^{(3)} = C_{11}^{(3)} \left[ \frac{H_3}{R_{mid}} w + \frac{H_3 R_3}{2R_3 - H_3} \left( \frac{H_2 + 2R_2}{R_2} \frac{\partial u_{02}}{\partial x} + H_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + H_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) \right] \quad (4.67)$$

$$Q_{xz}^{(1)} = C_{55}^{(1)} \left[ \frac{H_1}{H_1 + 2R_1} \left( \frac{2R_2 - H_2}{R_2} u_{02} + 2R_1 \varphi_1 - H_2 \varphi_2 \right) + H_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4.68)$$

$$Q_{xz}^{(2)} = C_{55}^{(2)} H_2 \left[ \frac{1}{R_2} u_{02} + \varphi_2 + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4.69)$$

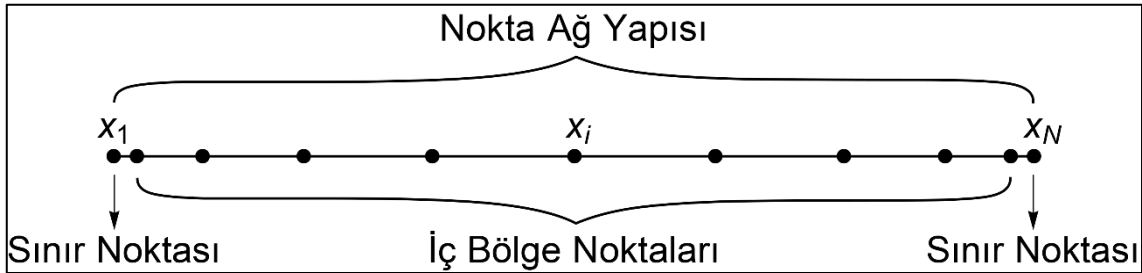
$$Q_{xz}^{(3)} = C_{55}^{(3)} \left[ \frac{H_3}{H_3 + 2R_3} \left( -\frac{2R_2 + H_2}{R_2} u_{02} - H_2 \varphi_2 - 2R_3 \varphi_3 \right) + H_3 \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (4.70)$$

### 4.3 Bünye Denklemlerinin Çözülmesi

Enerji denklemlerinden çıkartılan bünye denklemlerindeki yer değiştirme fonksiyonları zaman ve konuma bağlı fonksiyonlardır. Bu denklemlerin özdeğer forma dönüştürülmesi için yer değiştirme fonksiyonları zaman ve konum olarak ayrıklaştırılmıştır. Özdeğer analizlerinde yerdeğİştİrmeler harmonik olduğundan dolayı zaman alanındaki çözüm harmonik bir fonksiyon ile ifade edilmiştir (Denklem 4.71).

$$u_k(x, t) = e^{i\omega t} \bar{u}_k(x) \quad (4.71)$$

Bu dönüşüm bütün yerdeğİştİrme ifadelerine uygulanmıştır ve bu işlemden sonra yer değİştİrme ifadelerinin hepsi yalnızca konuma bağlı bir fonksiyona dönüştürülmüştür. Sonrasında yerdeğİştİrmeye bağlı fonksiyonlar GDQM ile lineer denklem takımına dönüştürülmüştür.



Şekil 4.9 Chebyshev-Gauss-Labatto ağ yapısı

GDQM ile daha iyi sonuç almak için kirişte eşit aralıklı ağ yapısı kullanmak yerine Şekil 4.9'da görüldüğü üzere Chebyshev-Gauss-Lobatto ağ yapısı kullanılmıştır. Bu noktaları elde etmek için 3.6 numaralı eşitlik kullanılmaktadır. Bu ağ yapısı ile alınan sonuçlar eşit aralıklara göre daha iyi sonuç vermektedir. "N" noktaya bölünen kiriş üzerindeki nokta koordinatları ile 3.3, 3.4 ve 3.5 numaralı denklemler kullanılarak GDQ katsayı matrisleri hesaplanmıştır. Katsayı matrisleri ve diferansiyel denklemler kullanılarak lineer denklem takımı oluşturulmuştur. İki koordinat sisteminde de çıkartılan denklemler 5 serbestlik

derecesine sahiptir. “N” noktaya bölünen kiriş için her bünye denkleminde “N” adet lineer denklem “5N” adet yerdeğiştirme ifadesi oluşmaktadır. Bütün Bünye denklemleri birleştirildiğinde “5N” adet lineer denklem ve “5N” adet yer değiştirme ifadesi oluşmaktadır.

Oluşturulan lineer denklem takımı potansiyel enerji ve kinetik enerji ifadelerinden gelen terimlerden oluşmaktadır. Bu denklem takımı matris ve vektör olarak yazılacak olursa,

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \cdot & k_{1,5N} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \cdot & k_{2,5N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{5N,1} & k_{5N,2} & \cdot & k_{5N,5N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdot & m_{1,5N} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdot & m_{2,5N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{5N,1} & m_{5N,2} & \cdot & m_{5N,5N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.72)$$

şeklinde bir özdeğer form elde edilecektir. Bünye denklemlerinden oluşturulan denklem takımı tek başına sonsuz çözüm vermektedir. Bu denklem takımını çözebilmemiz için bünye denklemlerini oluştururken çıkartılan sınır şartları kullanılacaktır. “N” parçaya bölünen kirişin 1. ve N. noktası için bünye denklemlerinin yerine sınır şartı ifadeleri gelecektir. Bunun için 4.25-4.29 ve 4.56-4.60 numaralı denklemlerde verilen geometrik veya doğal sınır şartları kullanılacaktır.

- **Ankastre Mesnet Sınır Şartı (A)**

Bu sınır şartı için sınır noktalarda kullanılan eşitlikler aşağıda verilmiştir.

Silindirik Koordinatta

$$u_1(t) = 0, u_2(t) = 0, u_3(t) = 0, u_4(t) = 0, w(t) = 0$$

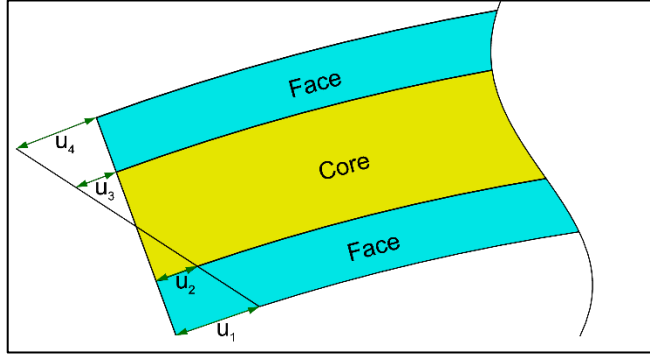
Eğrisel Kartezyen Koordinatta

$$u_0(t) = 0, \varphi_1(t) = 0, \varphi_2(t) = 0, \varphi_3(t) = 0, w(t) = 0$$

- **Serbest Mesnet Sınır Şartı (S)**

Bu sınır şartı için sınır noktalarda silindirik koordinat için 4.25-4.29 numaralı denklemlerdeki doğal sınır şartları ve eğrisel kartezyen koordinat için 4.56-4.60 numaralı denklemlerde verilen doğal sınır şartları kullanılmıştır.

- Basit Mesnet Sınır Şartı (B)



Şekil 4.10 Basit mesnet sınır şartı

Bu sınır şartı için sınır noktalarda silindirik koordinatlarda 4.26 ve 4.29 numaralı denklemlerde verilen doğal sınır şartları ve 4.27 ve 4.28 numaralı sınır şartları kullanılarak aşağıda verilen doğal ve geometrik sınır şartları yazılmıştır.

$$u_2(t) + u_3(t) = 0, \quad w(t) = 0$$

$$\frac{R_1}{H_1} N_{\varphi\varphi}^{(1)} - \frac{R_2 + R_3}{H_2} N_{\varphi\varphi}^{(2)} + \frac{R_4}{H_3} N_{\varphi\varphi}^{(3)} - \frac{1}{H_1} M_{\varphi\varphi}^{(1)} + \frac{2}{H_2} M_{\varphi\varphi}^{(2)} - \frac{1}{H_3} M_{\varphi\varphi}^{(3)} = 0$$

Eğrisel kartezyen koordinatlarda ise 4.58-4.60 numaralı denklemlerde verilen doğal sınır şartları ve aşağıdaki eşitlikler kullanılmıştır.

$$u_0(t) = 0, \quad w(t) = 0$$

Sınır şartları uygulanan matris sisteminin özdeğerleri sistemin doğal frekansını ifade etmektedir. 4.72 numaralı denklemdeki “ $\omega$ ” ifadesi sistemin özdeğerlerini dolayısıyla doğal frekanslarını belirtmektedir.

Sınır şartları uygulandığında matris sisteminde tekillikler meydana gelmektedir. Bu tekilliklerin giderilebilmesi için matrislerde sınır şartı kısımları ve diğer kısımlar ayrılmaktadır (Denklemler 4.73) [26].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bd} \\ \mathbf{K}_{db} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_b \\ \delta_d \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

Matris bölündükten sonra özdeğerlerin bulunması için 4.74 numaralı denklem kullanılmaktadır [26].

$$(\mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{db} \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bd}) \boldsymbol{\delta}_d = \omega^2 \mathbf{M}_{dd} \boldsymbol{\delta}_d \quad (4.74)$$

Özdeğerler bulunduktan sonra 4.75 numaralı denklem kullanılarak sınırlardaki yer değiştirmeler bulunmaktadır [15].

$$\boldsymbol{\delta}_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{bd} \boldsymbol{\delta}_d \quad (4.75)$$



**5.1 Yakınsama**

Silindirik koordinat ve eğrisel kartezyen koordinat kullanılarak çıkartılan denklemler GDQM kullanılarak çözdürülmüştür. Analiz sonuçları değerlendirilmeden önce çözümlerde kaç nokta kullanılacağına karar verilmiştir.

Çizelge 5.1 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler

Yüzey Katmanları (Katman 1 ve 3)	
Elastisite Modülü	$E_1 = E_3 = 68.9 GPa$
Yoğunluk	$\rho_1 = \rho_3 = 2680 kg / m^3$
Kalınlık	$h_1 = h_3 = 0.4572 mm$
Poisson Oranı	$\nu_1 = \nu_3 = 0.28$
Çekirdek Katmanı (Katman 2)	
Kayma Modülü	$G_2 = 82.68 MPa$
Yoğunluk	$\rho_2 = 32.8 kg / m^3$
Kalınlık	$h_2 = 12.7 mm$
Sönüm Faktörü	$\eta_2 = 0$
Bütün Kiriş	
Boy	$L = 711.2 mm$
Orta Yarıçap	$R_{mid} = 4.263 m$
Eğim Açısı	$\varphi_2 - \varphi_1 = 0.1668 rad$

Çizelge 5.1’de verilen malzeme özellikleri ve geometrik özellikler kullanılarak GDQ yönteminde kullanılan terim sayısına göre ilk 8 mod için yakınsama değerleri incelenmiştir.

Çizelge 5.2 GDQM terim sayısına bağlı analiz sonuçları

Mod	f (Hz) GDQM								ANSYS
	N=20		N=40		N=60		N=80		
	EKK	SK	EKK	SK	EKK	SK	EKK	SK	
1	247.433	247.11	247.422	247.1	247.423	247.1	247.423	247.1	247.64
2	486.893	486.51	486.75	486.36	486.764	486.38	486.764	486.38	487.25
3	860.045	859.51	859.567	859.03	859.609	859.07	859.61	859.07	860.41
4	1272.42	1271.8	1271.66	1271	1271.73	1271.1	1271.73	1271.1	1272.8
5	1716.25	1715.4	1714.77	1714	1714.89	1714.1	1714.9	1714.1	1716.3
6	2172.95	2172	2171.41	2170.5	2171.56	2170.6	2171.56	2170.6	2173.3
7	2639.3	2638.2	2637.01	2636	2637.22	2636.2	2637.23	2636.2	2639.3
8	3105.47	3104.3	3104.1	3102.9	3104.32	3103.1	3104.32	3103.1	3106.7

80 noktaya kadar yapılan analiz sonuçları verilen Çizelge 5.2 incelendiğinde sonuçların 20 terim ve 80 terim arasında 1. Modda %0.004, 2.Modda %0.265, 3. Modda %0.0506, 4. Modda %0.0542, 5.Modda %0.0787 6.Modda %0.064, 7.Modda 0.0784, 8.Modda %0.037 fark oluşmaktadır. Sonuçların ise ANSYS’te yapılan 3D analiz sonuçları ile silindirik koordinatta 1.Modda %0.21, 8.Modda %0.09, eğrisel kartezyen koordinatta ise 1.Modda %0.08, 8.Modda %0.05, hata ile yüksek hassasiyette bir doğrulama sağlanmaktadır.

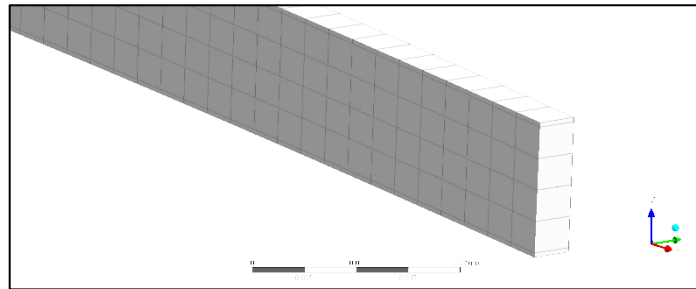
## 5.2 Örnek 1

Bu örnekte alüminyum yüzeylere ve yumuşak köpük çekirdeğe sahip 3 katmanlı ve simetrik kesitli eğrisel sandviç kirişin, iki ucu ankastre mesnet (AA), iki ucu basit mesnet (BB) ve bir ucu ankastre bir ucu serbest mesnet (AS) olan 3 farklı sınır koşullarında bulunan sonuçlar literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Bu bölümde çekirdek malzemesi elastik olarak modelleneceğinden modal kayıp faktörü hesaplanmayacaktır. Çizelge 5.3’te bu örnekte kullanılacak malzemelerin özellikleri ve kirişe ait geometrik özellikler verilmiştir.

Çizelge 5.3 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler

Yüzey Katmanları (Katman 1 ve 3)	
Elastisite Modülü	$E_1 = E_3 = 68.9 GPa$
Yoğunluk	$\rho_1 = \rho_3 = 2680 kg / m^3$
Kalınlık	$h_1 = h_3 = 0.4572 mm$
Poisson Oranı	$\nu_1 = \nu_3 = 0.28$
Çekirdek Katmanı (Katman 2)	
Kayma Modülü	$G_2 = 82.68 MPa$
Yoğunluk	$\rho_2 = 32.8 kg / m^3$
Kalınlık	$h_2 = 12.7 mm$
Sönüm Faktörü	$\eta_2 = 0$
Bütün Kiriş	
Boy	$L = 711.2 mm$
Orta Yarıçap	$R_{mid} = 4.263 m$
Eğim Açısı	$\varphi_2 - \varphi_1 = 0.1668 rad$

Çizelge 5.3'te verilen malzeme özelliklerine ve geometrik özelliklere göre yapılan analizlerde bulunan sonuçlar literatürde bulunan sonuçların yanında sonlu elemanlar paket programı olan ANSYS Workbench'de Modal Analysis modülü kullanılarak bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu analiz için SOLID185 eleman tipi ve 1068 eleman kullanılmıştır.



Şekil 5.1 Sonlu elemanlar çözüm ağı yapısı

Eğrisel kartezyen koordinat sisteminde ve silindirik koordinat sisteminde GDQM kullanılarak hesaplanan sonuçlar ile literatürde bulunan ve ANSYS Workbench'de Modal Analysis modülü kullanılarak hesaplanan iki ucu ankastre mesnetli (AA) senaryonun sonuçları Çizelge 5.4'te, bir ucu ankastre bir ucu serbest (AS) senaryonun sonuçları Çizelge 5.5'te ve iki ucu basit mesnetli (BB) olan senaryonun sonuçları ise Çizelge 5.6'da verilmiştir.

Çizelge 5.4 AA mesnet tipinde doğal frekans değerleri

Mod	f (Hz) GDQM			f (Hz) Literatür		
	EKK	SK	ANSYS	Ref. [13]	Ref. [12]	Ref. [10]
1	247.42	247.1	247.64	237.8	244.6	264.2
2	486.76	486.38	487.25	504	485.6	522
3	859.61	859.07	860.41	866	859.8	889
4	1271.73	1271.06	1272.8	1283	1276	1312
5	1714.9	1714.09	1716.3	1728	1725	1767
6	2171.56	2170.63	2173.3	-	2190	-
7	2637.23	2636.16	2639.3	-	2668	-
8	3104.32	3103.14	3106.7	-	3151	-

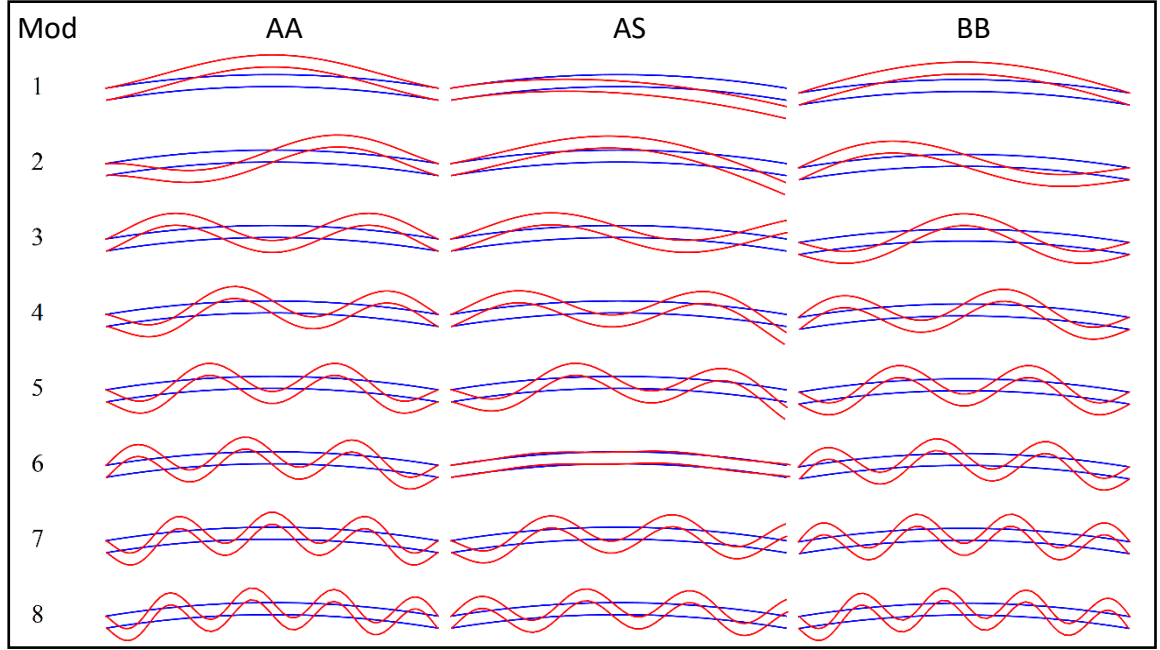
Çizelge 5.5 AS mesnet tiplerinde doğal frekans değerleri

Mod	f (Hz) GDQM			f (Hz) Literatür	
	EKK	SK	ANSYS	Ref. [12]	Ref. [10]
1	33.93	33.98	34.02	33.8	179
2	199.5	199.24	199.47	198.5	266
3	513.48	513.06	513.65	513	546
4	908.36	907.78	908.83	910	934
5	1349.8	1349.05	1350.7	1356	1379
6	1690.66	1690.16	1691.6	1657	-
7	1817.67	1816.79	1819.1	1831	-
8	2292.02	2291.02	2294.1	2316	-

Çizelge 5.6 BB mesnet tiplerinde doğal frekans değerleri

Mod	f (Hz) GDQM			f (Hz) Literatür		
	EKK	SK	ANSYS	Ref. [13]	Ref. [12]	Ref. [10]
1	185.96	185.65	186.12	93.6	182.7	199.5
2	352.77	352.35	352.62	352	351.4	394
3	726.64	726	726.98	724	726.1	746
4	1158.99	1158.31	1160.5	1159	1162	1175
5	1624.45	1623.55	1627.2	1623	1633	1639
6	2100.62	2099.75	2105	-	2118	-
7	2580.88	2579.76	2586.4	-	2611	-
8	3058.34	3057.69	3065.6	-	3104	-

GDQM ile yapılan analiz sonuçları, ANSYS Workbench’de Modal Analysis modülü kullanılarak bulunan sonuçlar ve Sakiyama ve arkadaşlarının [12] bulduğu sonuçlar ile çok iyi bir şekilde uyuşmaktadır. Fakat Ahmed [10] ile Bozhevolnaya ve arkadaşlarının [13] yaptığı çalışmalarda bulunan sonuçlar 1. modda farklılık göstermektedir. İlk sekiz moda ait mod şekilleri Şekil 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5.2 Mod şekilleri (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)

### 5.3 Örnek 2

Bu örnekte alüminyum yüzeylere ve yumuşak viskoelastik köpük çekirdeğe sahip 3 katmanlı ve simetrik kesitli eğrisel sandviç kirişin, iki ucu ankastre mesnet (AA) sınır koşulunda bulunan sonuçlar literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Bu bölümde çekirdek malzemesi viskoelastik olarak modelleneceğinden modal kayıp faktörü hesaplanacak ve literatürde bulunan sonuçlar ve ANSYS Workbench’de Modal Analysis modülü kullanılarak hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

$$f_n = \sqrt{\text{Re}(\omega_n^2)}, \quad \eta_n = \frac{\text{Im}(\omega_n^2)}{\text{Re}(\omega_n^2)} \quad (5.1)$$

Gerçek ve sanal kısım olarak modellenen viskoelastik malzeme kullanılarak doğal frekans analizi yapıldığında gerçek ve sanal kısımlara sahip özdeğerler ve özvektörler

bulunmaktadır. Bulunan özdeğerlerin gerçel kısmı doğal frekans değerlerini, sanal ve gerçel kısımların oranı ise sistemin modal kayıp faktörünü vermektedir (Denklemler 5.1).

Çizelge 5.7’de bu örnekte kullanılacak malzemelerin özellikleri ve kirişe ait geometrik özellikler verilmiştir.

Çizelge 5.7 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler

Yüzey Katmanları (Katman 1 ve 3)	
Elastisite Modülü	$E_1 = E_3 = 68.9 GPa$
Yoğunluk	$\rho_1 = \rho_3 = 2680 kg / m^3$
Kalınlık	$h_1 = h_3 = 0.4572 mm$
Poisson Oranı	$\nu_1 = \nu_3 = 0.28$
Çekirdek Katmanı (Katman 2)	
Kayma Modülü	$G_2 = 82.68 MPa$
Yoğunluk	$\rho_2 = 32.8 kg / m^3$
Kalınlık	$h_2 = 12.7 mm$
Kayıp Faktörü	$\eta_2 = 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$
Bütün Kiriş	
Boy	$L = 711.2 mm$
Orta Yarıçap	$R_{mid} = 0.57395 m$
Eğim Açısı	$\varphi_2 - \varphi_1 = 1.2391 rad$

ANSYS sonuçlarından modal kayıp faktörünün bulunabilmesi için modal gerinim enerjisi (MSE) yöntemi kullanılacaktır [30]. Bu yöntemde elastik olarak modellenen ve doğal frekansı bulunan geometrinin her modda çekirdek malzemenin toplam gerinim enerjisi ( $V_{C,n}$ ) ve bütün modelin toplam gerinim enerjisi ( $V_{T,n}$ ) kullanılmaktadır.

$$\eta_n = \frac{\eta_c V_{C,n}}{V_{T,n}} \quad (5.2)$$

5.2 numaralı denklemde “ $\eta_c$ ” viskoelastik çekirdeğin frekanstan bağımsız modal kayıp faktörünü, “ $\eta_n$ ” ise sandviç yapının n. modal kayıp faktörünü ifade etmektedir.

Çizelge 5.8 Sönüm katsayısına göre doğal frekans değerleri

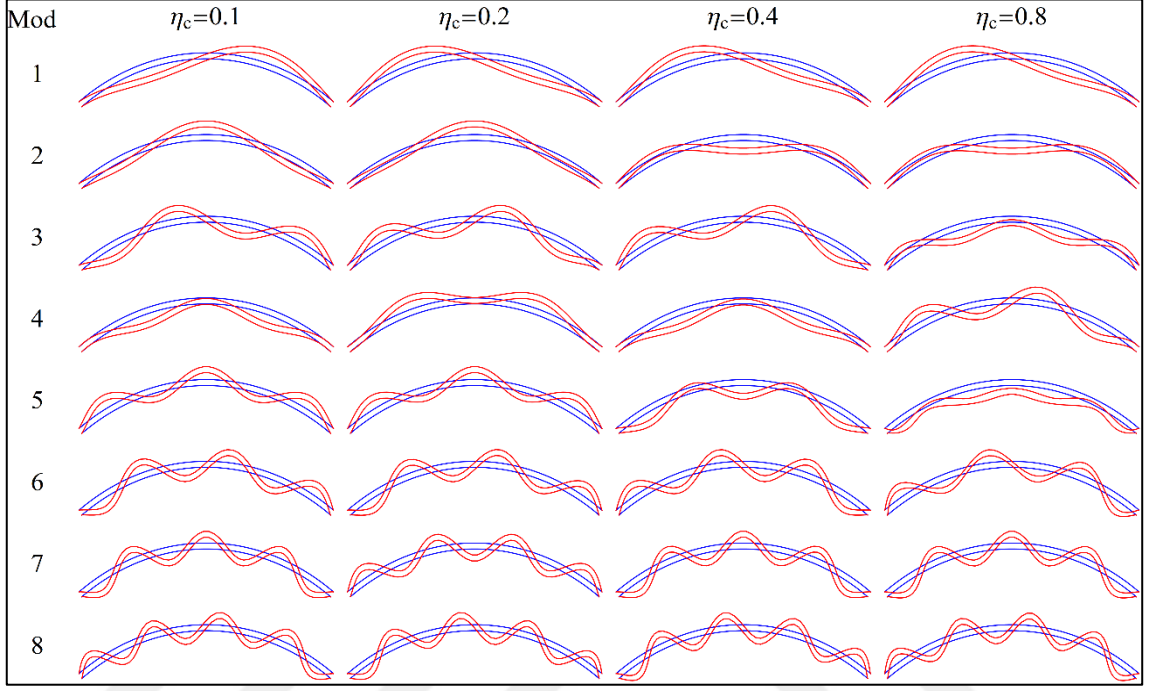
$\eta$		1. Mod	2. Mod	3. Mod	4. Mod	5. Mod	6. Mod	7. Mod	8. Mod
0	EKK	463.79	731.55	1248.79	1269.93	1762.32	2149.34	2640.83	3071.97
	SK	455.16	722.79	1239.76	1266.21	1754.81	2141.01	2633.02	3064.62
	ANSYS	455.57	723.09	1240.40	1267.20	1755.90	2141.90	2634.00	3065.50
	Ref.[12]	459.26	718.47	1200.11	1254.89	1764.60	2183.70	2696.03	3150.12
0.1	EKK	464.29	732.37	1250.21	1270.64	1763.76	2151.51	2643.17	3075.75
	SK	455.66	723.60	1241.17	1266.93	1756.23	2143.17	2635.35	3068.35
	Ref.[12]	459.80	719.31	1200.75	1256.88	1767.22	2187.48	2700.90	3158.87
0.2	EKK	465.79	734.78	1254.41	1272.65	1768.10	2157.97	2650.15	3086.79
	SK	457.14	725.99	1245.35	1268.98	1760.51	2149.60	2642.31	3079.29
	Ref.[12]	461.54	722.15	1202.26	1262.85	1775.09	2199.16	2715.15	3183.43
0.4	EKK	471.37	743.85	1279.36	1270.59	1785.72	2183.16	2677.54	3127.36
	SK	462.63	735.00	1261.44	1275.82	1777.89	2174.68	2669.59	3119.56
	Ref.[12]	467.85	732.57	1207.67	1285.76	1804.88	2242.61	2769.31	3265.51
0.8	EKK	488.81	772.87	1295.80	1326.99	1854.05	2274.86	2779.30	3256.71
	SK	479.79	763.86	1292.37	1317.55	1845.64	2266.01	2771.00	3248.53
	Ref.[12]	486.77	764.45	1222.66	1360.32	1908.50	2388.91	2951.91	3499.93

Çizelge 5.8’de verilen doğal frekans sonuçlarında silindirik koordinatlarda ve eğrisel kartezyen koordinatlarda hesaplanan sonuçlar ile ANSYS’te hesaplanan sonuçlar ve Sakiyama ve arkadaşlarının hesapladığı sonuçlar [12] arasında iyi bir uyum bulunmaktadır.

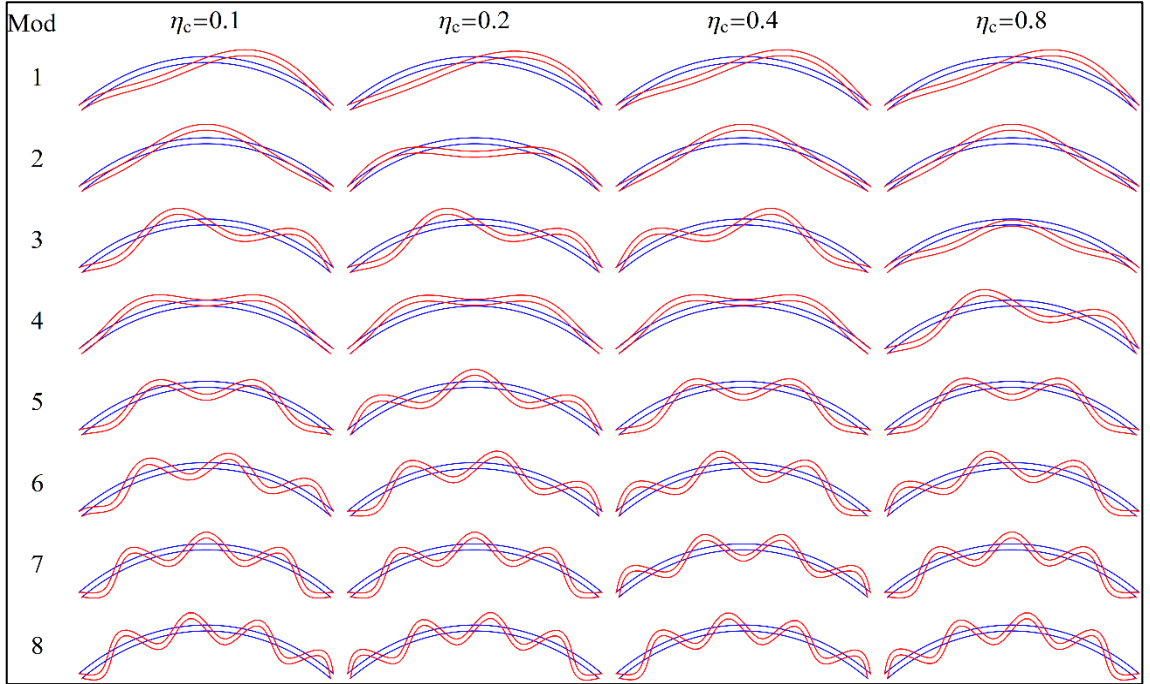
Çizelge 5.9 Sönüm katsayısına göre kayıp faktörü değerleri

$\eta$		1. Mod	2. Mod	3. Mod	4. Mod	5. Mod	6. Mod	7. Mod	8. Mod
0.1	EKK	3.55	3.91	5.57	1.66	5.69	6.81	7.30	7.37
	SK	3.55	3.95	5.58	1.67	5.67	6.81	7.30	7.38
	ANSYS	3.61	4.00	5.63	1.70	5.71	6.87	7.35	7.43
	Ref.[12]	1.70	1.70	0.60	2.70	2.80	3.30	3.60	3.40
0.2	EKK	6.97	7.70	11.01	3.25	11.30	13.50	14.49	14.68
	SK	6.98	7.77	11.03	3.26	11.27	13.51	14.50	14.70
	ANSYS	7.21	8.00	11.27	3.40	11.42	13.73	14.70	14.86
	Ref.[12]	3.30	3.40	1.30	5.30	5.60	6.50	7.10	6.90
0.4	EKK	13.00	14.42	5.98	21.01	21.99	26.07	28.17	28.81
	SK	13.02	14.57	21.05	5.98	21.95	26.09	28.17	28.83
	ANSYS	14.42	16.01	22.54	6.79	22.83	27.46	29.40	29.72
	Ref.[12]	6.10	6.40	2.40	10.10	10.90	12.50	13.60	13.70
0.8	EKK	20.53	23.09	9.80	35.65	39.15	45.98	50.67	53.21
	SK	20.54	23.35	9.73	35.71	39.11	46.02	50.70	53.23
	ANSYS	28.85	32.02	45.08	13.59	45.66	54.93	58.81	59.45
	Ref.[12]	9.60	10.00	4.00	16.90	18.80	21.60	23.70	24.80

Çizelge 5.9’da verilen sonuçlara göre ANSYS ve MSE yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlar ile silindirik ve eğrisel kartezyen koordinat sistemi kullanılarak bulunan sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu görünmektedir. Fakat bu sonuçlar ile Sakiyama ve arkadaşlarının hesapladığı sonuçlar [12] arasında uyum yoktur.



Şekil 5.3 Mod şekillerinin gerçek kısmı (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)

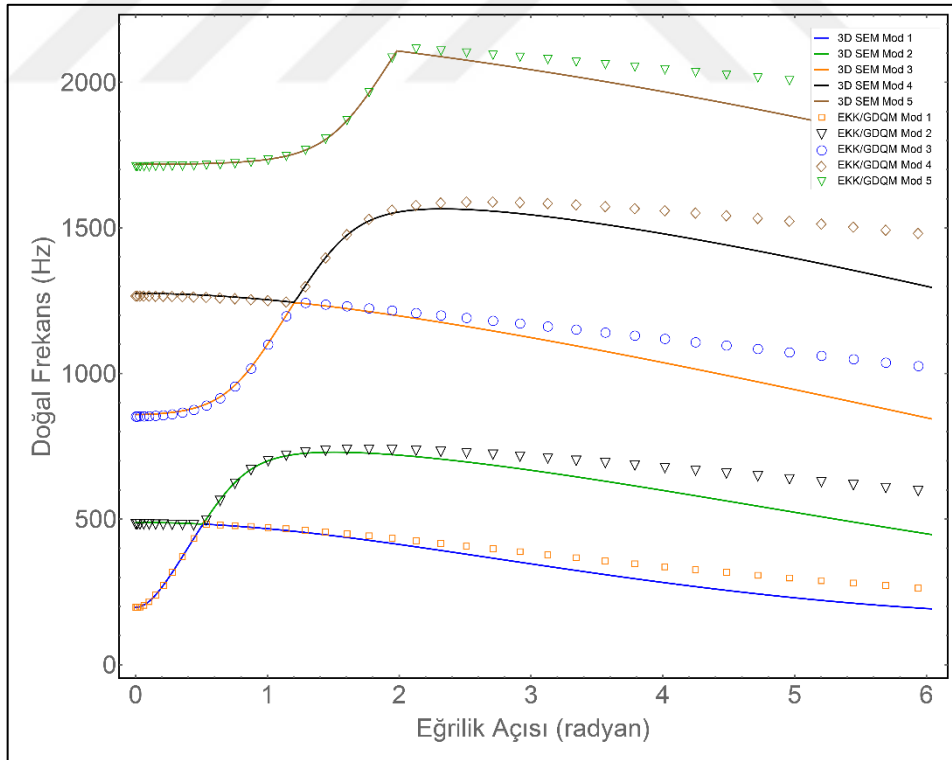


Şekil 5.4 Mod şekillerinin sanal kısmı (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)

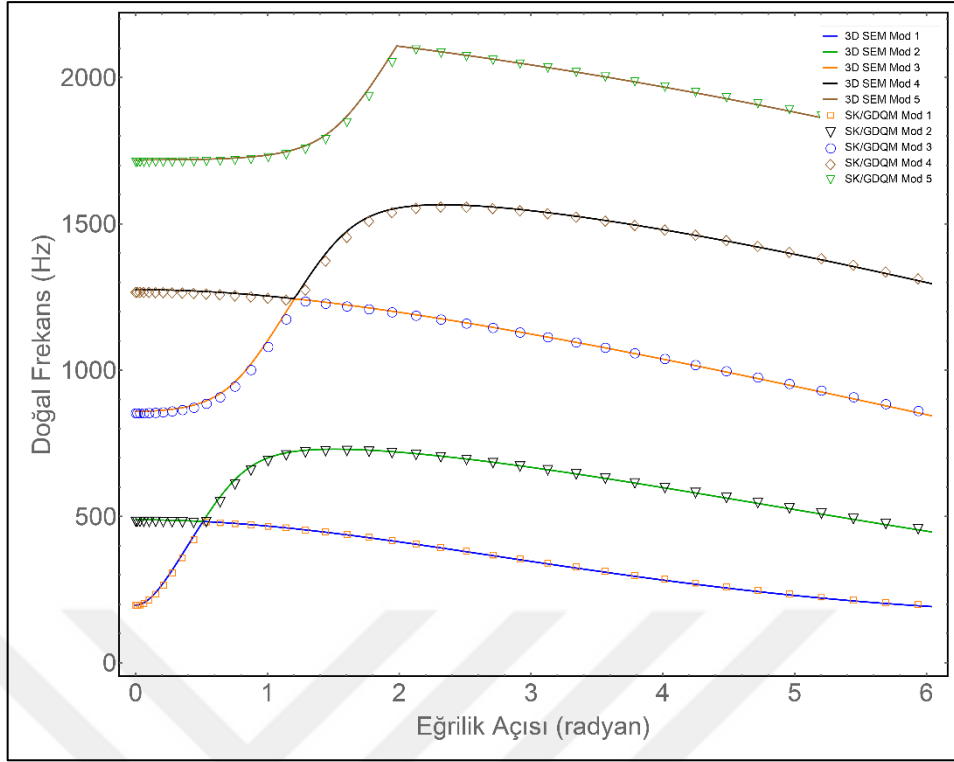
Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te viskoelastik çekirdeğin farklı sönüm oranlarına ait mod şekillerinin gerçek ve sanal kısımları gösterilmiştir. Bu problemde 3. ve 4. mod şekli 0.1, 0.2 ve 0.4 kayıp faktörüne sahip malzemelerde aynı çıkarken 0.8 ile en yüksek kayıp faktörüne sahip malzeme ile yapılan analiz sonucu oluşan mod şekli diğerlerinden farklı çıkmaktadır. Bu mod şekillerinde göze çarpan diğer şekil ise 1. modda eğrisel kirişin aldığı şekildir. Birinci modda eğrilik arttığından dolayı 1 tepe yerine 2 tepe meydana gelmiştir. Bozhovelnoya ve arkadaşlarına göre, eğrilik arttığında dikey ve boyuna olan mod şekilleri çakışıp birlikte hareket etmekte ve mod şekli değişmektedir [13].

#### 5.4 Örnek 3

Bu kısımda Çizelge 5.1'de verilen malzeme özellikleri ile eğim açısı 0 ile  $2\pi$  arasında değişen analizler yapılacaktır. Bu analizlerde kiriş boyu sabit tutularak yarıçap ve eğrilik açısı değiştirilecektir. Bu analizler silindirik koordinat sisteminde ve eğrisel kartezyen koordinat sisteminde GDQM kullanılarak yapılacak ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.5 EKK/GDQM ve ANSYS sonuçları



Şekil 5.6 SK/GDQM ve ANSYS sonuçları

Yapılan analizler sonucunda Şekil 5.5'e bakıldığında eğrisel kartezyen koordinat sistemi kullanılarak alınan çözüm sonuçları eğrilik arttıkça ANSYS sonuçlarından uzaklaşmaktadır. Öte yandan Şekil 5.6'ya bakıldığında silindirik koordinatta alınan sonuçlar ile ANSYS sonuçları birbirleri ile mükemmel şekilde uyum sağladığı görülmektedir. Bu sonuçlara bakıldığında silindirik koordinat kullanılarak yapılan çözümlerin eğrisel kartezyen koordinat sistemi kullanılarak yapılan çözümlere göre daha uygun sonuç verdiği fakat aynı GDQM terim sayısı kullanıldığında silindirik koordinat sistemi kullanılarak yapılan çözümler eğrisel kartezyen koordinat sistemi kullanılarak yapılan çözümlerden yaklaşık 2 kat daha uzun sürmektedir. Grafıklara bakıldığında analizi yapılan problemin eğrilik açısının 2 radyandan az olması durumunda işlem süresi bakımından eğrisel kartezyen koordinat kullanılması daha uygun olmaktadır. Fakat kirişin eğrilik açısı 2 radyanı geçtiğinde eğrisel kartezyen koordinat kullanılarak alınan sonuçlar doğru sonucu vermemektedir. Bu tip problemlerde ise silindirik koordinat kullanılması daha uygun olmaktadır.

## PARAMETRİK ANALİZLER

Parametrik analizlerde kirişe ait bilgilerin (çekirdek kalınlığı, çekirdeğin yeri, laminasyon açısı, eğrisellik) sistemin doğal frekansı ve kayıp faktörü üzerindeki etkisi incelenecektir. Bu analizlerde yüzlerde kullanılan malzeme karbon elyaf takviyeli plastik, çekirdek malzemesi olarak ise kayma modülü ve elastisite modülü frekansa bağlı olarak değişen literatürde 3M Y966 kodu ile bilinen viskoelastik malzeme kullanılacaktır. Ayrıca kirişin sınırlarında ankastre mesnet sınır şartı kullanılacaktır. Bu malzemelere ve kiriş geometrisine ait bilgiler Çizelge 6.1’de verilmiştir.

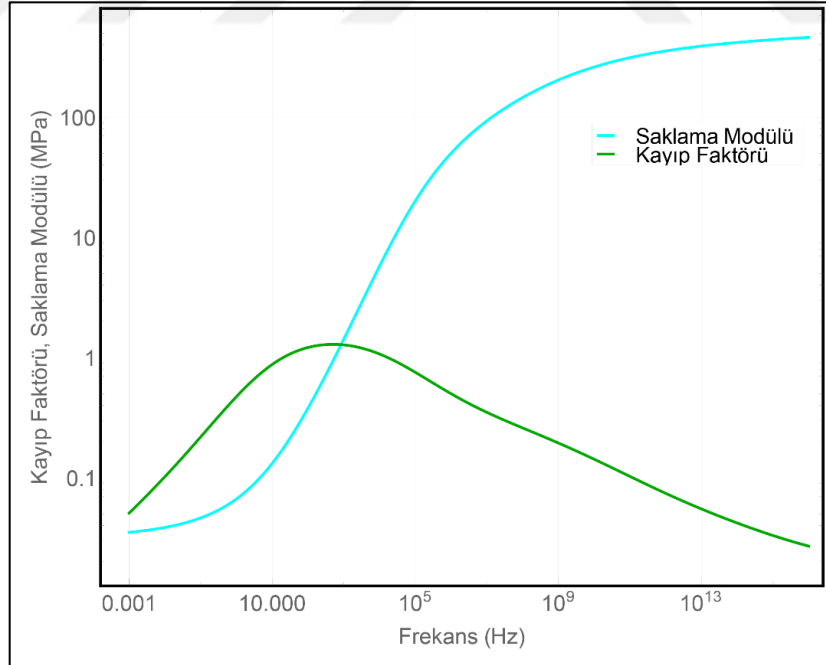
Çizelge 6.1 Malzeme özellikleri ve geometrik özellikler

CFRP kompozit Yüzey Katmanı (Katman 1 ve 3)	
Elastisite Modülü	$E_{11} = 138.6 \text{ GPa}, E_{22} = 8.27 \text{ GPa}$
Kayma Modülü	$G_{12} = 4.12 \text{ GPa}$
Yoğunluk	$\rho = 1824 \text{ kg} / \text{m}^3$
Poisson Oranı	$\nu_{12} = 0.26$
Kalınlık	$H_1 + H_3 = 6 \text{ mm}$
3M Y966 viskoelastik çekirdek katman (Layer 2)	
Kayma Modülü	$G_2(f)$
Yoğunluk	$\rho_2 = 1102 \text{ kg} / \text{m}^3$
Kalınlık	$0 \text{ mm} < H_2 \leq 10 \text{ mm}$
Kayıp Faktörü	$\eta_2 = \eta_2(\omega)$
Poisson Oranı	$\nu_2 = 0.5$
Bütün Kiriş	
Boy	$L = 785.4 \text{ mm}$
Orta Yarıçap	$0.125 \text{ m} \leq R_{mid} \leq \infty$
Eğim Açısı	$0 \text{ rad} < \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi \text{ rad}$

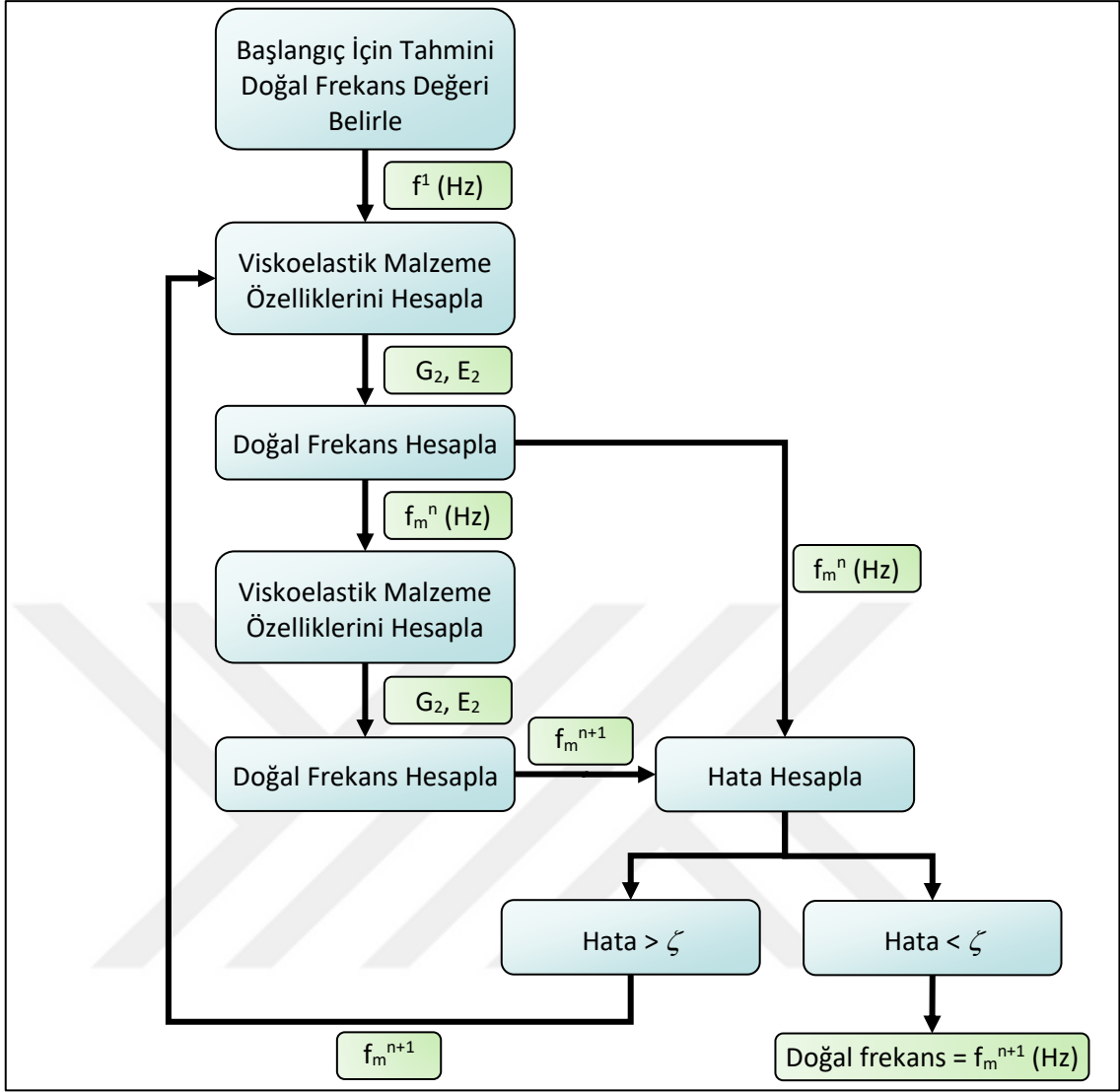
$$G_2(f) = \frac{\lambda_1 (if\tau)^{\gamma+\varphi}}{1 + \lambda_2 (if\tau)^\gamma} + G_0 \left[ 1 + \Omega \frac{(if\tau)^{\alpha+\beta}}{1 + \lambda_3 (if\tau)^\alpha + (if\tau)^{\alpha+\beta}} \right] \quad (6.1)$$

Viskoelastik malzemenin kayma modülü 10 parametrelilik malzeme modeli ile tanımlanmıştır (Denklem 6.1). Bu denklemde bulunan  $f$  hertz cinsinden doğal frekans değerini,  $G_0$  statik kayma modülünü,  $\tau$  gevşeme süresini,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ve  $\varphi$  kesirli zaman türev katsayılarını,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  ve  $\Omega$  düzeltme katsayılarını belirtmektedir. Bu çalışmada 34.65<sup>0</sup> C sıcaklıktaki 3M Y966 kodlu viskoelastik malzeme özellikleri kullanılmıştır. ( $G_0=3.153 \times 10^4$  Pa,  $\Omega=12394$ ,  $\alpha=0.427$ ,  $\beta=0.234$ ,  $\gamma=0.228$ ,  $\varphi=0.0423$ ,  $\lambda_1=1.269 \times 10^6$  Pa,  $\lambda_2=0.0352$ ,  $\lambda_3=4.004$ ,  $\tau=4.535 \times 10^{-7}$ s) [31]

Bu bölümde frekansa bağlı viskoelastik malzeme kullanıldığından dolayı malzemenin özellikleri sistemin titreşim frekansına bağlı olarak değişmektedir. Bundan dolayı sistemin özdeğerleri ve kayıp faktörleri iteratif bir yöntemle bulunacaktır. Örneğin 1. modda titreşen bir sistemdeki viskoelastik malzeme özellikleri ile 2. modda titreşen aynı sistemdeki viskoelastik malzeme özellikleri aynı olmamaktadır. 3M Y966 kodlu viskoelastik malzemenin frekansa bağlı saklama modülü ve kayıp faktörü Şekil 4.1’de verilmiştir.



Şekil 6.1 3M Y966 malzeme grafiği



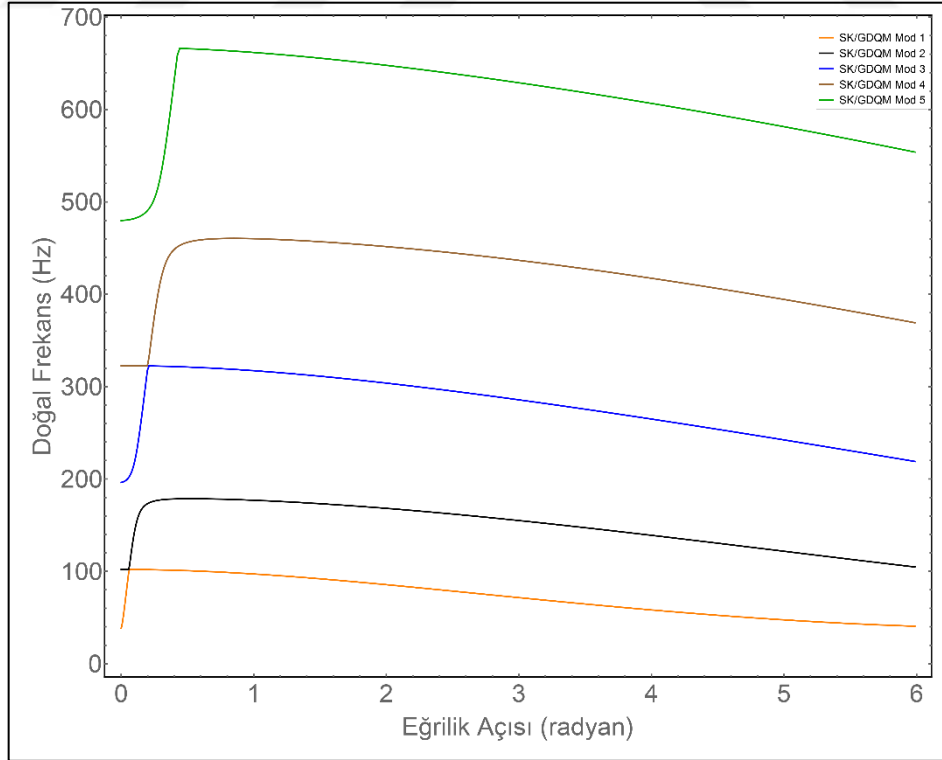
Şekil 6.2 Doğal frekans hesaplama şema

Frekansa bağlı viskoelastik malzeme kullanıldığında doğal frekans iteratif bir yöntemle hesaplanmaktadır. Bu yöntem her doğal frekans için ayrı ayrı uygulanacaktır. Şekil 6.2’de gösterildiği üzere bu yöntemde öncelikle başlangıç için bir frekans değeri belirlenir. Bu frekans ile viskoelastik çekirdeğin elastisite modülü ve kayma modülü hesaplanır. Sonrasında bu özellikler kullanılarak doğal frekans değeri hesaplanır. Hesaplanan doğal frekans değerlerinden m. doğal frekans değeri kullanılarak tekrar viskoelastik çekirdeğin elastisite modülü ve kayma modülü hesaplanır. Sonrasında bu viskoelastik malzeme sabitleri kullanılarak tekrar doğal frekans hesaplanır. Bu şekilde hata değeri ( $\zeta=0.0001$ ) belirlenen hata değerinin altına inene kadar iterasyona devam edilir.

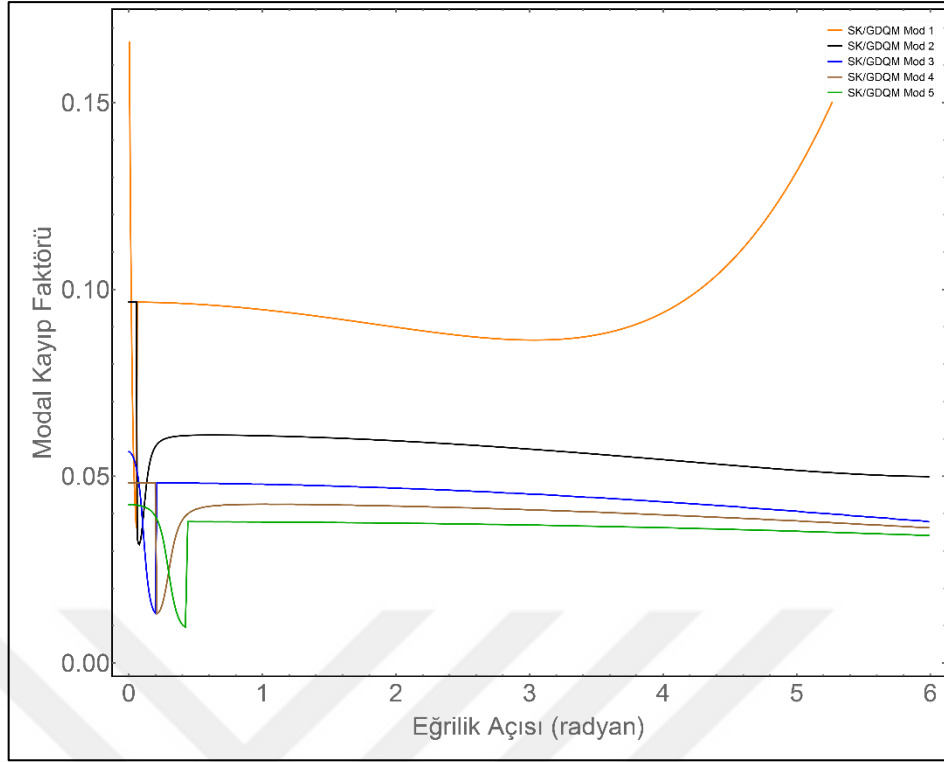
6.4 numaralı başlıkta anlatıldığı üzere eğrilik arttığında silindirik koordinat sistemi kullanılarak alınan sonuçlar eğrisel kartezyen koordinat sistemine nazaran ANSYS sonuçlarına göre daha doğru sonuç vermektedir. Bundan dolayı bu bölümde alınacak sonuçlar silindirik koordinat sisteminde elde edilen diferansiyel denklemler GDQM ile çözdürülerek elde edilecektir. Yapılan analizlerde mod sıralaması doğal frekans değerlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanmasıyla elde edilmiştir. Örneğin 1. mod en küçük doğal frekans değerine sahip mod, 2. mod en küçük 2. doğal frekans değerine sahip moddur.

### 6.1 Kirişin Eğrilğine Bağlı Analizler

Bu kısımda eğrisel kirişin boyu ve malzeme özellikleri sabit tutulup, eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı değiştirilerek parametrik analiz yapılacaktır. Bu analizlerin hesaplamalarında katman kalınlıkları  $H_1=H_3=3$  mm,  $H_2=5$  mm, laminasyon açıları  $\theta_1=\theta_3=0^\circ$  ( $0^\circ$  laminasyon açısı kiriş boyu doğrultusunu belirtmektedir) olarak kullanılacaktır.



Şekil 6.3 SK/GDQM doğal frekans sonuçları



Şekil 6.4 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları

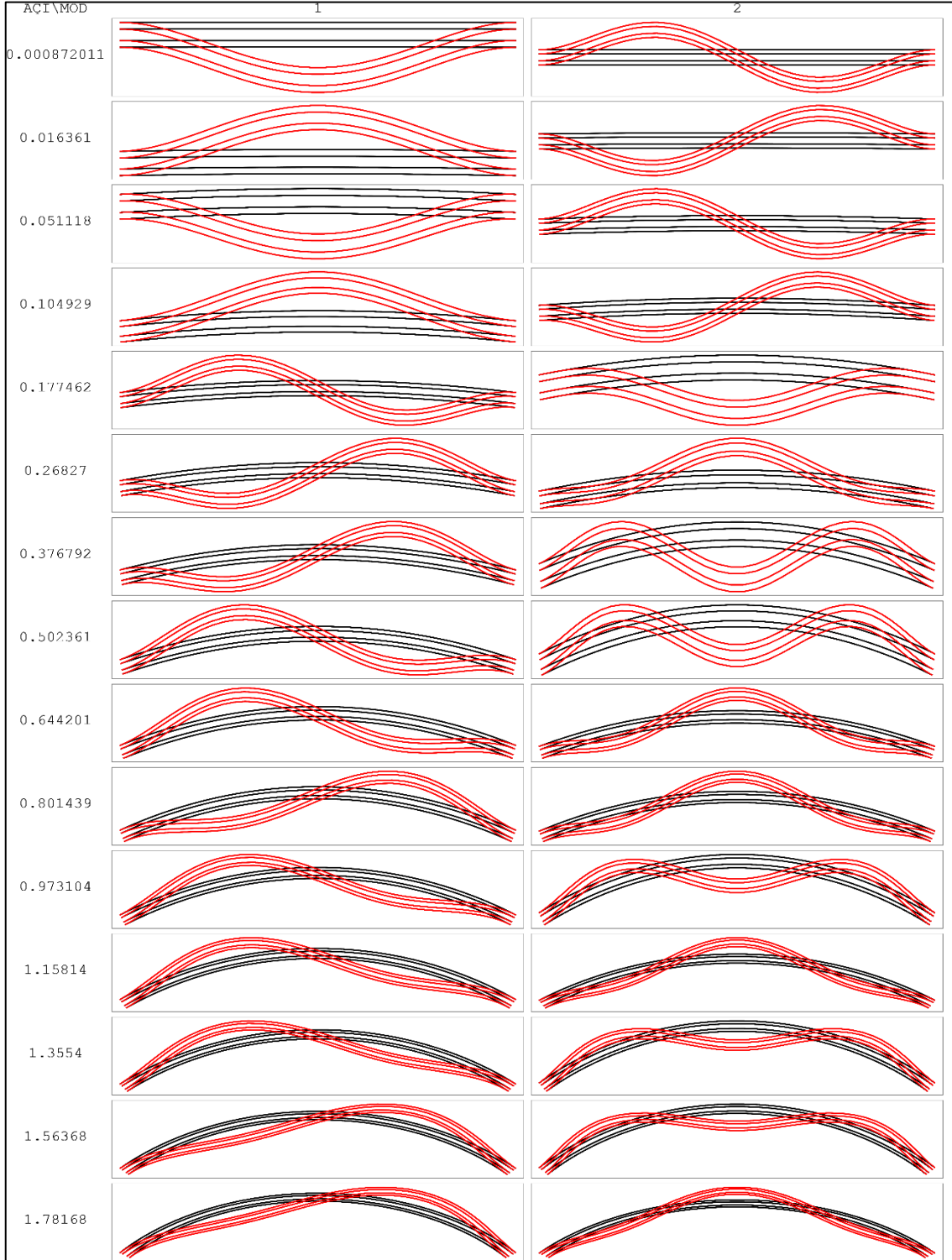
Şekil 6.3'te silindirik koordinat sisteminde eğriliğe bağlı parametrik analizlerin ilk beş moda ait doğal frekans değerleri, Şekil 6.4'te ise sistemin ilk beş moda ait modal sönüm faktörü değerleri gösterilmektedir.

Doğal frekans sonuçları incelendiğinde eğrilik artarken bir noktaya kadar doğal frekans değerlerinin hızlı bir şekilde arttığı görülmektedir. Fakat bir noktadan sonra doğal frekans değerleri daha yavaş bir şekilde azalma eğilimi göstermektedir.

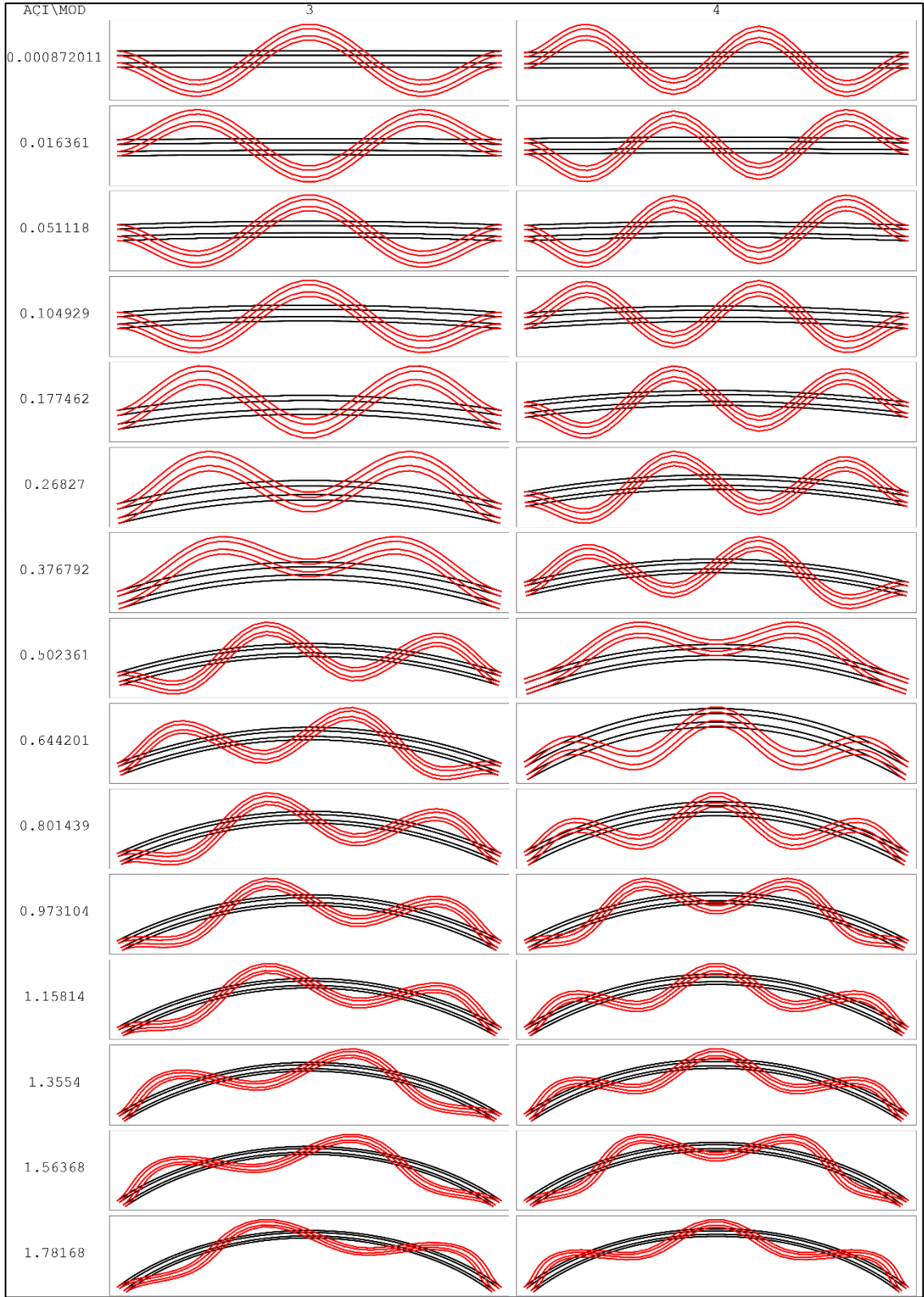
Sistemin modal sönüm faktörleri incelendiğinde mod numarası arttığında modal sönüm faktörünün azaldığı görülmektedir. 1. moddaki modal sönüm faktörü 2.5 radyan eğriliğe kadar diğer modlar gibi azalırken 3 radyandan sonra modal sönüm faktörü hızlı bir artış eğilimi göstermektedir.

Bu sonuçların yanında doğal frekans ve modal sönüm faktörü grafiklerinde eğrilik arttıkça grafiklerde görülen her modda farklı olmak üzere süreksizlikler meydana gelmektedir. Geometrinin eğriliğinin artmasından dolayı sistemin katılığı artmaktadır. Bu katılık her modda farklı eğrilikte olmak üzere mod şekillerinin sırasını değiştirmektedir. Örneğin eğrilik  $\sim 0$  radyan olduğunda 1. mod şekli 1 tepeden oluşurken 2. mod şekli 2 tepeden oluşmaktadır. Eğrilik arttığında 1. mod ile 2. mod şekli bir anda değişmektedir.

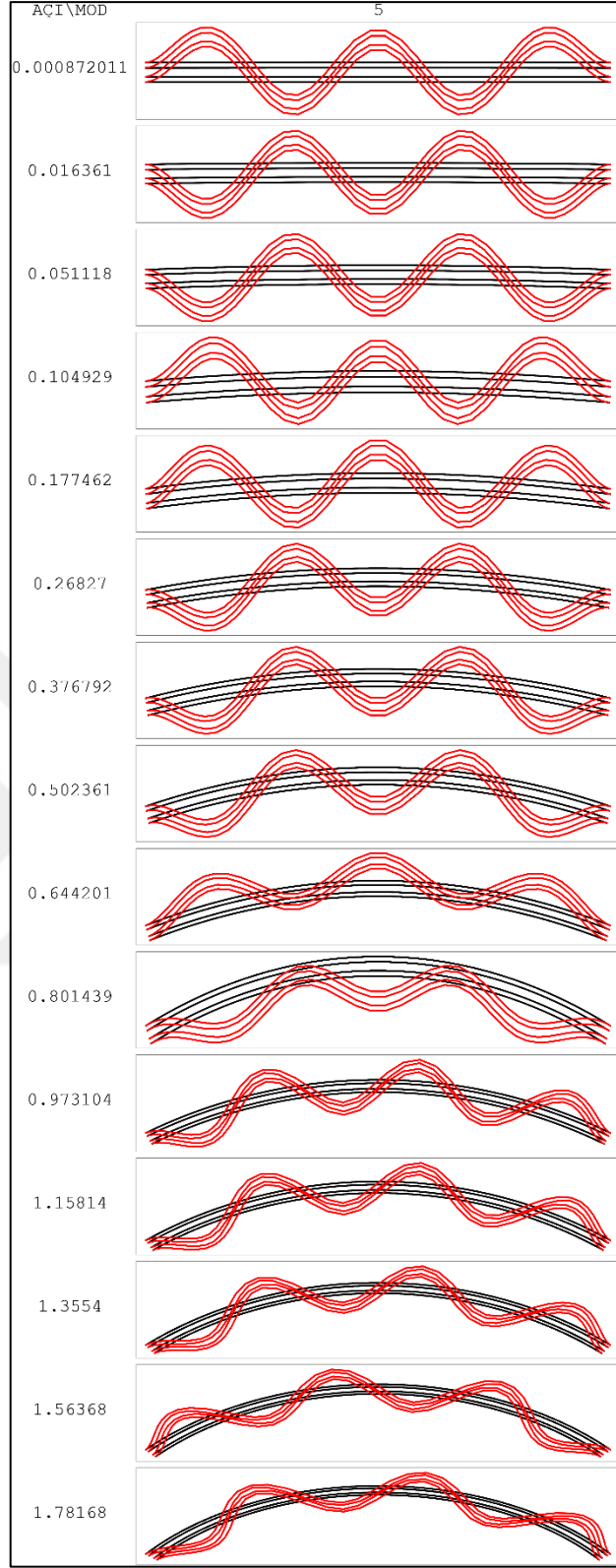
Bu da doğal frekans değerlerinde süreksizliğe neden olmaktadır. Yapılan titreşim analizlerinde oluşan mod şekilleri Şekil 4.5, 4.6 ve 4.7'de verilmiştir. Bu mod şekillerinde 0.104929 radyan ve 0.177462 radyan eğrilikte 1. ve 2. mod şekilleri, 0.376792 ve 0.502361 radyanda 3. ve 4. mod şekilleri yer değiştirmiştir.



Şekil 6.5 Mod şekilleri (1. ve 2. modlar) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)



Şekil 6.6 Mod şekilleri (3. ve 4. modlar) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)

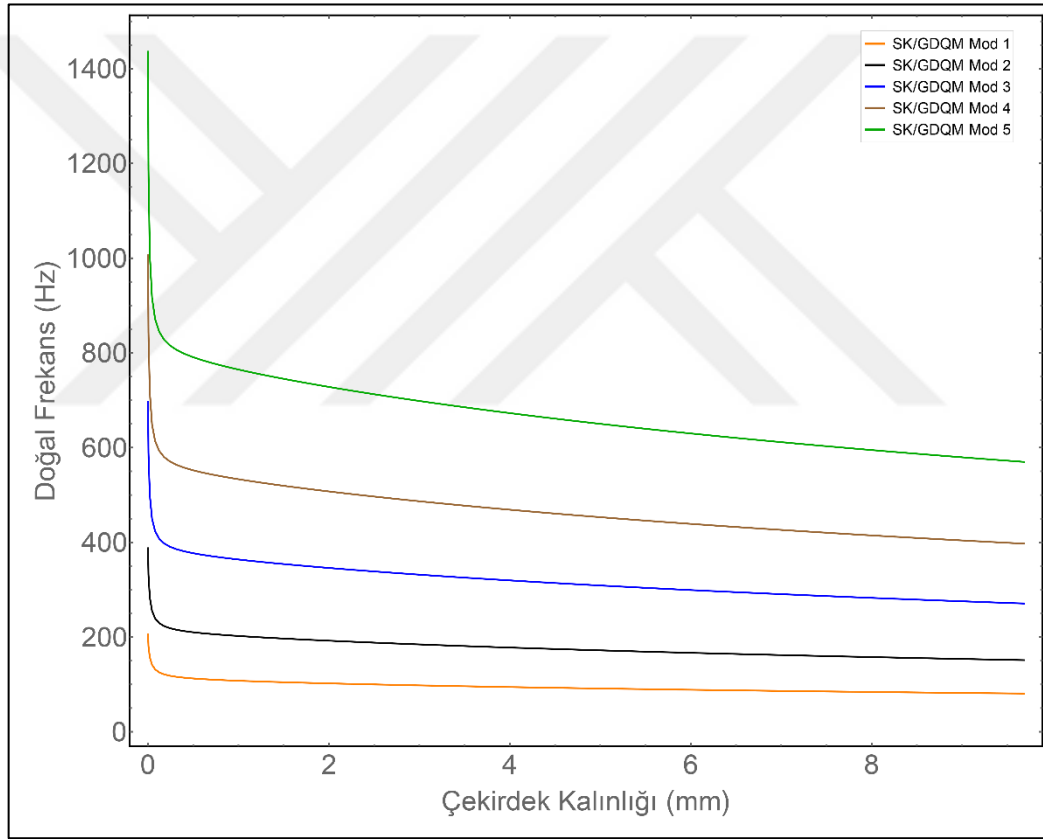


Şekil 6.7 Mod şekilleri (5. mod) (—: Deforme Olmuş, —: Deforme Olmamış)

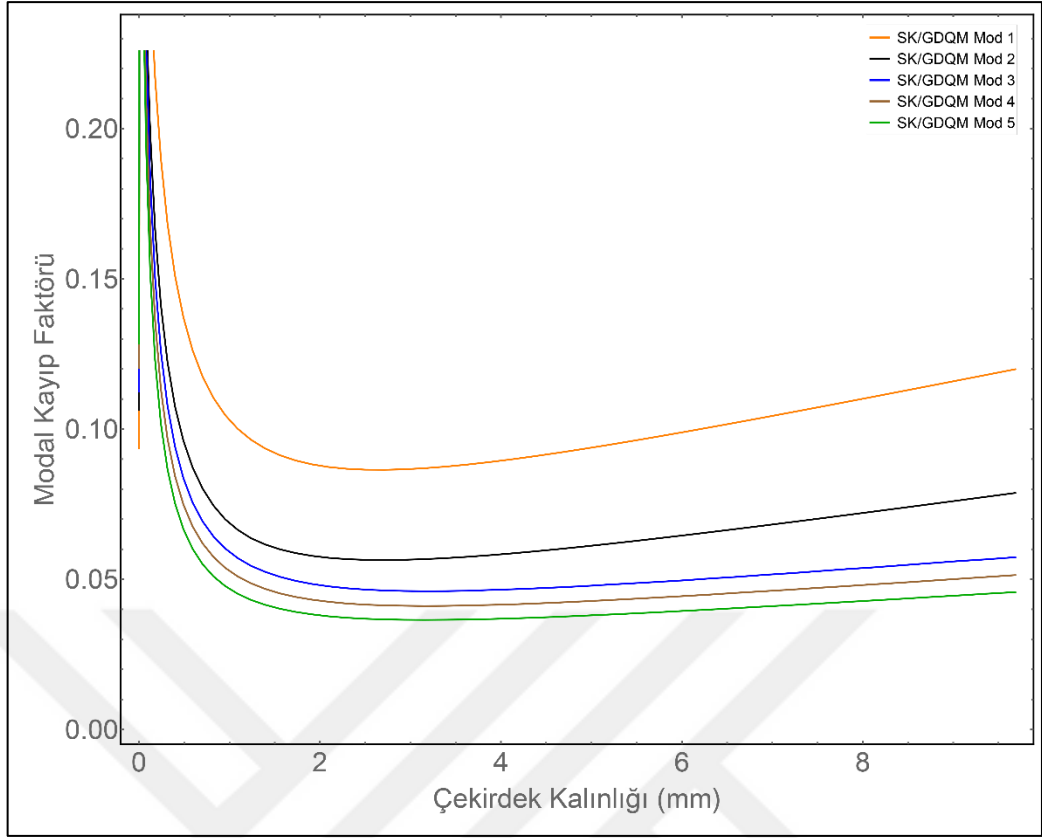
## 6.2 Viskoelastik Çekirdek Kalınlığına Bağlı Analizler

Bu kısımda eğrisel kirişin boyu, malzeme özellikleri, eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı sabit tutulup, viskoelastik çekirdek kalınlığı değiştirilerek parametrik analiz yapılacaktır. Bu analizlerin hesaplamalarında katman kalınlıkları  $H_1=H_3=3$  mm, laminasyon açıları  $\theta_1=\theta_3=0^\circ$ , eğrilik yarıçapı  $R_{mid}=0.5$  m, eğrilik açısı  $=\pi/2$  radyan olarak kullanılacaktır.

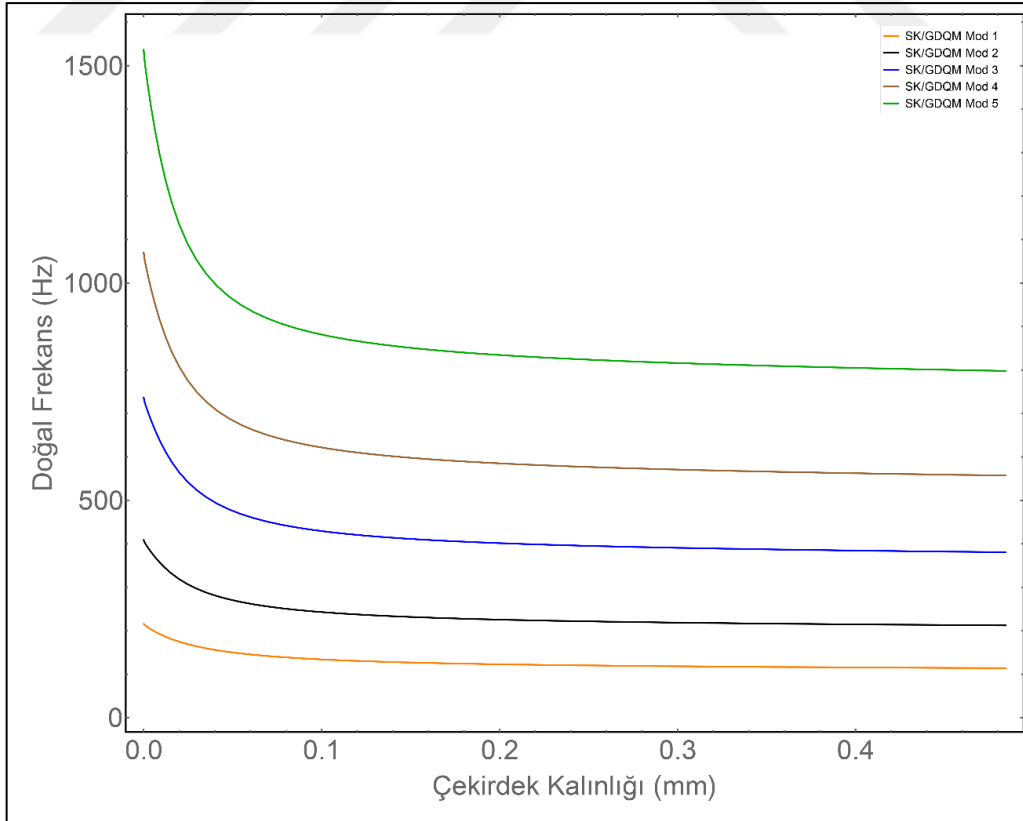
Viskoelastik çekirdek kalınlığına bağlı analizlerde çekirdek kalınlığı 0 mm'den 0.5 mm değerine kadar doğal frekans ve modal kayıp faktörünü hızlı bir şekilde değiştirirken 0.5 mm değerinden sonra doğal frekans ve modal kayıp faktörü değerleri çok yavaş bir şekilde değişmektedir.



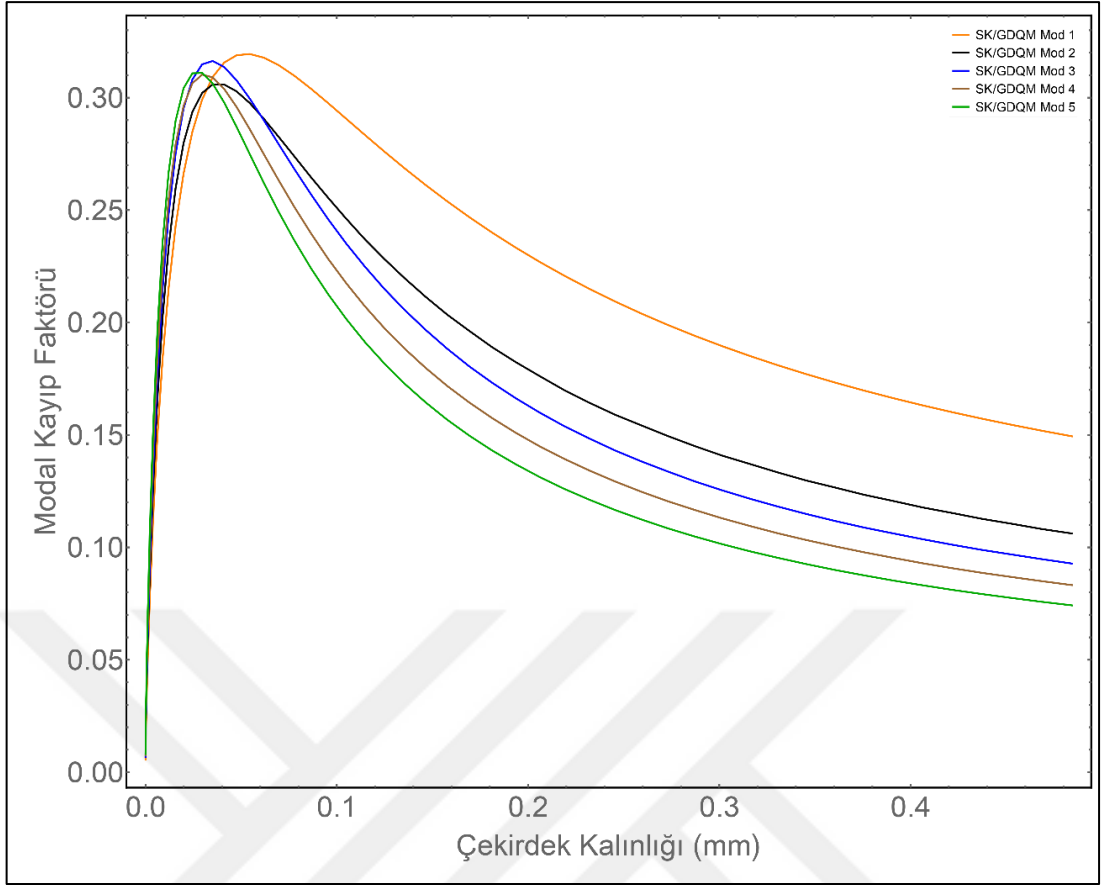
Şekil 6.8 SK/GDQM doğal frekans sonuçları



Şekil 6.9 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları



Şekil 6.10 SK/GDQM doğal frekans sonuçları



Şekil 6.11 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları

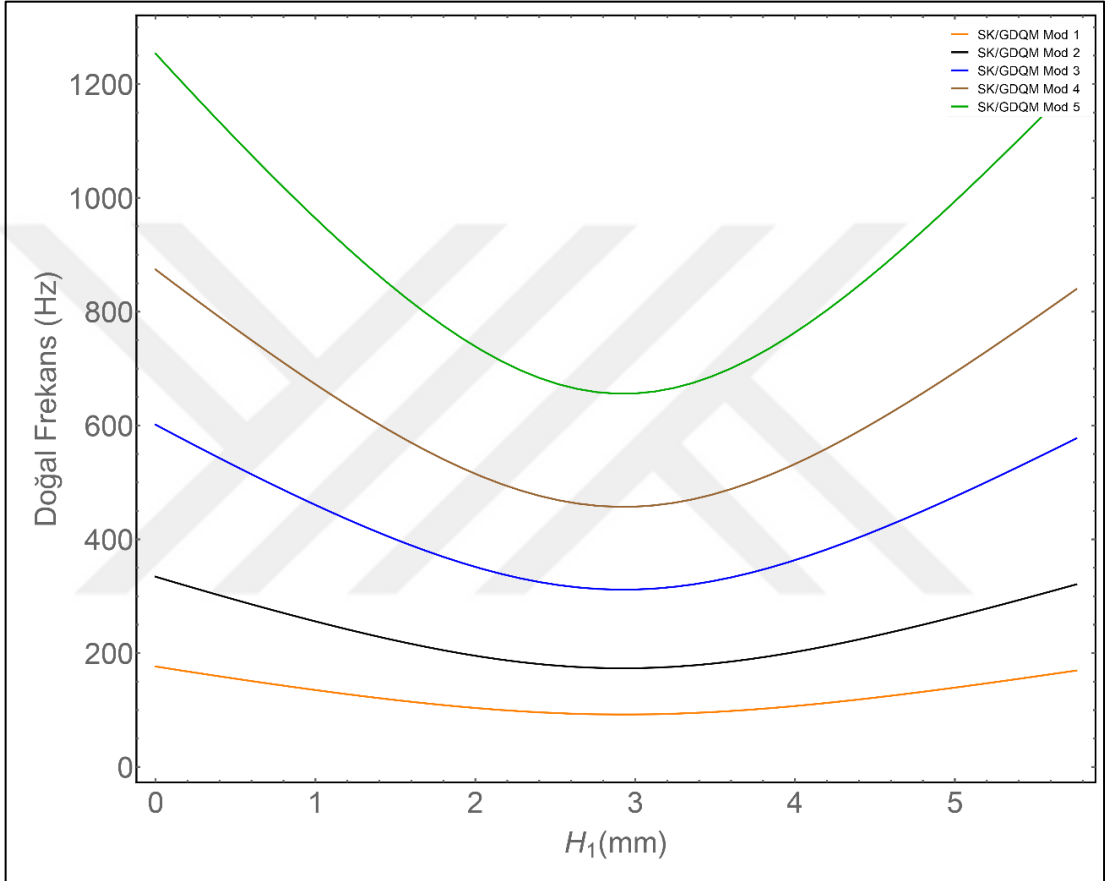
Şekil 6.8 ve 6.10'da silindirik koordinat sisteminde eğriliğe bağlı parametrik analizlerin ilk beş moda ait doğal frekans değerleri, Şekil 6.9 ve 6.11'de ise sistemin ilk beş moda ait modal sönüm faktörü değerleri gösterilmektedir.

Doğal frekans sonuçları incelendiğinde viskoelastik çekirdek kalınlığı artarken bir noktaya kadar doğal frekans değerleri hızlı bir şekilde azaldığı görülmektedir. Fakat bir noktadan sonra doğal frekans değerleri daha yavaş bir şekilde azalma eğilimi göstermektedir.

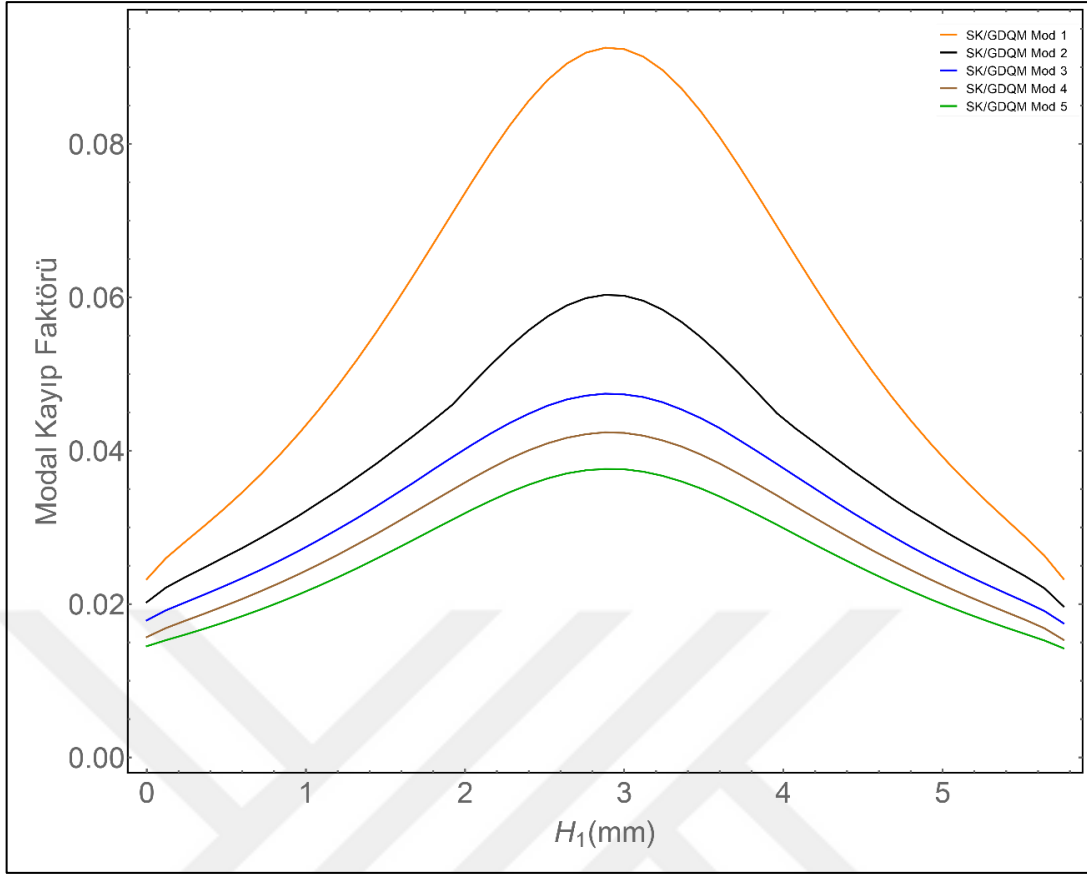
Sistemin modal sönüm faktörleri incelendiğinde mod numarası arttığında modal sönüm faktörünün azaldığı görülmektedir. Bunun yanında viskoelastik çekirdek kalınlığı artarken bir noktaya kadar modal sönüm faktörü hızlı bir şekilde artmaktadır. Fakat çekirdek kalınlığının artması bir noktadan sonra sistemin modal sönüm faktörünü azaltmaktadır.

### 6.3 Viskoelastik Çekirdeğin Konumuna Bağlı Analizler

Bu kısımda eğrisel kirişin boyu, malzeme özellikleri, eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı sabit tutulup, viskoelastik çekirdeğin yeri değiştirilerek parametrik analiz yapılacaktır. Bu analizlerin hesaplamalarında yüzlerdeki katman kalınlıkları toplamı  $H_1+H_3=6$  mm, viskoelastik çekirdek kalınlığı  $H_2 =5$  mm, laminasyon açıları  $\theta_1=\theta_3=0^\circ$ , eğrilik yarıçapı  $R_{mid}=0.5$  m, eğrilik açısı= $\pi/2$  radyan olarak kullanılacaktır.



Şekil 6.12 SK/GDQM doğal frekans sonuçları



Şekil 6.13 SK/GDQM Kayıp Faktörü Sonuçları

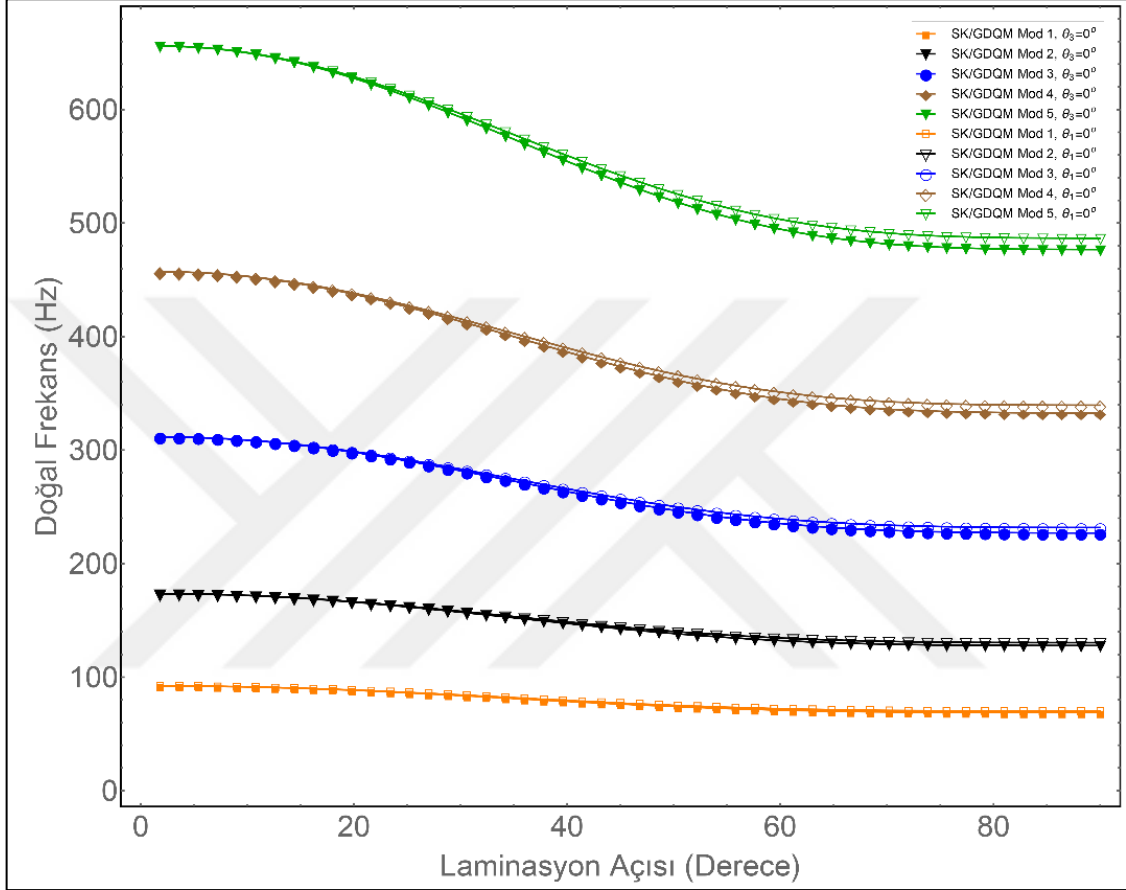
Şekil 6.12’de silindirik koordinatta eğriliğe bağlı parametrik analizlerin ilk beş moda ait doğal frekans değerleri, Şekil 6.13’te ise sistemin ilk beş moda ait modal sönüm faktörü değerleri gösterilmektedir.

Doğal frekans sonuçları incelendiğinde viskoelastik çekirdeğin yeri en üst veya en alttayken doğal frekans değeri maksimum, çekirdek iki kompozit malzemenin tam ortasında olduğunda doğal frekans değeri minimum olduğu görülmektedir.

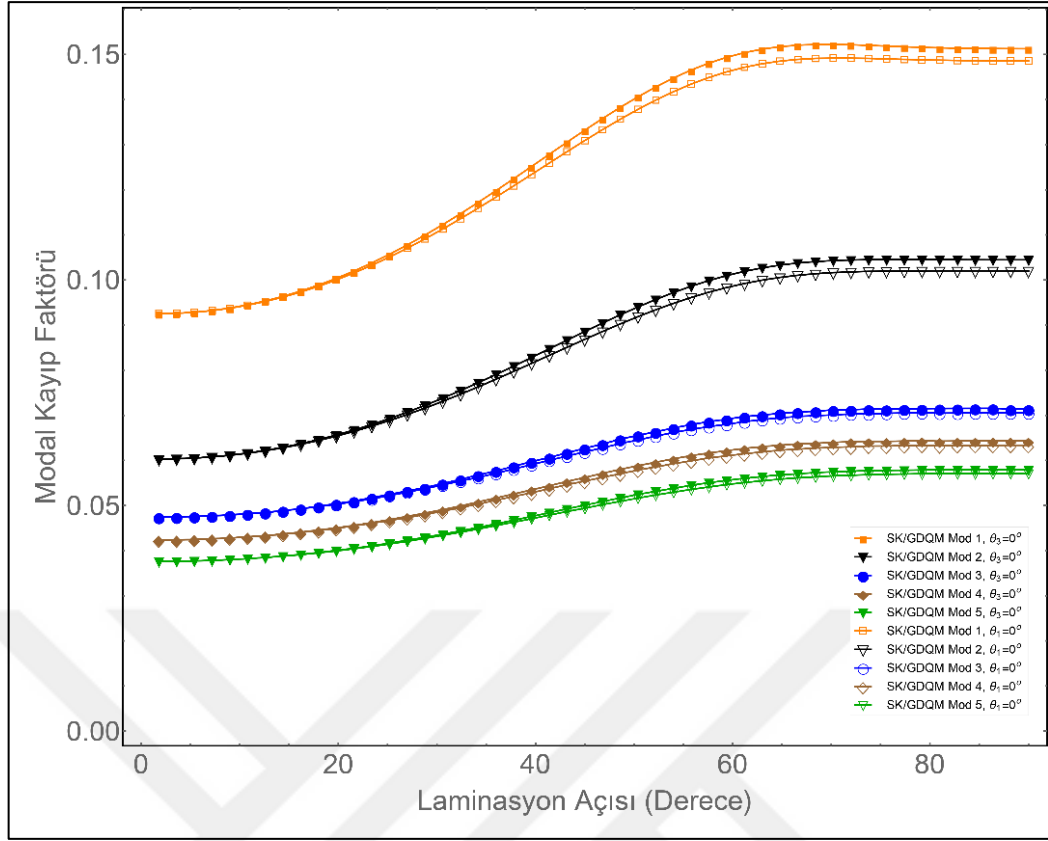
Sistemin modal sönüm faktörleri incelendiğinde mod numarası arttığında modal sönüm faktörü azalmaktadır. Bunun yanında viskoelastik çekirdeğin yeri incelendiğinde çekirdeğin yeri en üst veya en alttayken modal sönüm faktörü değeri minimum, çekirdek iki kompozit malzemenin tam ortasında olduğunda modal sönüm faktörü değeri maksimum olmaktadır.

#### 6.4 Laminasyon Açıklarına Bağlı Analizler

Bu kısımda eğrisel kirişin boyu, malzeme özellikleri, eğrilik açısı ve eğrilik yarıçapı sabit tutulup, kompozit malzemelerin laminasyon açısı değiştirilerek parametrik analiz yapılacaktır. Bu analizlerin hesaplamalarında  $H_1=H_3=3$  mm,  $H_2=5$  mm,  $R_{mid}=0.5$  m, eğrilik açısı= $\pi/2$  radyan olarak kullanılacaktır.



Şekil 6.14 SK/GDQM doğal frekans sonuçları



Şekil 6.15 SK/GDQM kayıp faktörü sonuçları

Şekil 6.14'te silindirik koordinat sisteminde eğrilğe bağlı parametrik analizlerin ilk beş moda ait doğal frekans değerleri, Şekil 6.15'te ise sistemin ilk beş moda ait modal sönüm faktörü gösterilmektedir.

Yapılan analizlerde alt yüzdeki kompozit katmanın laminasyon açısı sabit tutularak ( $0^\circ$ ) üst yüzdeki kompozit katmanın laminasyon açısı, üst yüzdeki kompozit katmanın laminasyon açısı sabit tutularak ( $0^\circ$ ) alt yüzdeki kompozit katmanın laminasyon açısı değiştirilerek kompozit katmanların laminasyon açılarına bağlı parametrik analizler gerçekleştirilmiştir.

Doğal frekans sonuçları incelendiğinde kompozit katmanların laminasyon açısı  $0$  derece olduğunda doğal frekans değeri maksimum, kompozit katmanların laminasyon açısı  $90$  derece olduğunda doğal frekans değeri minimum olmaktadır.

Sistemin modal sönüm faktörü sonuçları incelendiğinde kompozit katmanların laminasyon açısı  $0$  derece olduğunda modal sönüm faktörü değeri minimum, kompozit katmanların laminasyon açısı  $90$  derece olduğunda modal sönüm faktörü değeri maksimum olmaktadır.

### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yer değiştirme fonksiyonlarındaki ve bünye denklemlerindeki karmaşıklıklardan dolayı literatürde çok az çalışılan, alt ve üst yüzleri elastik, orta katmanı viskoelastik malzeme olan eğrisel kompozit sandviç kirişin titreşim analizleri incelenmiştir. Öncelikle bu kirişe ait bünye denklemleri ve sınır şartları silindirik koordinatlarda ve eğrisel Kartezyen koordinatlarda virtüel iş prensibi ile türetilmiştir. Oluşturulan bu denklemler genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür (GDQ) yöntemi ile frekans alanında çözdürülmüştür. Öncelikle GDQ terim sayısına göre doğal frekans sonuçlarının yakınsama değerleri incelenmiştir. Bu değerlere göre 20 terim ile 60 terim arasında maksimum %0.3 fark oluşmaktadır. 60 terimden sonra değerler değişmemektedir. Bunun yanında bu sonuçlar ile ANSYS Mechanical programında bulunan sonuçlar oldukça yakın çıkmaktadır. Terim sayılarına göre yakınsama değerleri incelendikten sonra silindirik koordinat sisteminde ve eğrisel kartezyen koordinat sisteminde bulunan sonuçlar, ANSYS Mechanical paket programının modal gerinim enerjisi (MSE) yöntemiyle kombinasyonu ve literatürde bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Örnek 1’de verilen karşılaştırmada viskoelastik malzeme özellikleri kullanılmamıştır. Bu örnekte GDQM ile yapılan analiz sonuçları, ANSYS’de bulunan sonuçların Sakiyama ve arkadaşlarının [12] bulduğu sonuçlar ile çok iyi bir şekilde uyumaktadır. Fakat Ahmed [10] ile Bozhevlnaya ve arkadaşlarının [13] yaptığı çalışmalarda bulunan sonuçlar 1. modda farklılık göstermektedir. Örnek 2’de viskoelastik çekirdek olarak kayıp faktörüne sahip, gerçel ve sanal kısımlardan oluşan elastisite modülü ve kayma modülü kullanılmıştır. Bu örnekte verilen sonuçlara göre ANSYS ve MSE yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlar ile silindirik ve eğrisel kartezyen

koordinatları kullanılarak bulunan sonuçlar çok iyi bir şekilde uyuşmaktadır fakat bu sonuçlar Sakiyama ve arkadaşlarının hesapladığı sonuçlardan [12] çok farklı çıkmaktadır. Örnek 3'te eğrisel kartezyen koordinatta ve silindirik koordinatta eğriliğe bağlı olarak hesaplanan sonuçlar ANSYS Mechanical programında alınan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Bu analizlere göre eğrisel kartezyen koordinatlarda eğrilik arttıkça GDQM ile alınan sonuçlar ANSYS Mechanical'da alınan sonuçlardan uzaklaştığı görülmektedir. Fakat silindirik koordinat kullanılarak GDQM ile alınan sonuçlar ile ANSYS Mechanical'da alınan sonuçlar her eğrilikte çok yakın çıkmaktadır. Genel olarak silindirik koordinat kullanılarak alınan sonuçlar eğrisel kartezyen koordinat kullanılarak alınan sonuçlara göre daha dengeli ve literatürde bulunan ve ANSYS'te alınan sonuçlar baz alındığında daha doğru sonuçlar vermektedir. Bu çıkarımlara göre silindirik koordinatta çıkartılan bünye denklemleri GDQM kullanılarak parametrik analizler gerçekleştirilmiştir. Bu analizler;

- Kirişin eğriliğine bağlı analizler
- Çekirdek kalınlığına bağlı analizler
- Viskoelastik çekirdeğin konumuna bağlı analizler
- Laminasyon açılarına bağlı analizler

olmak üzere 4 başlık altında toplanmıştır.

Parametrik analizlerde elastisite modülü ve kayma modülü frekansa bağlı olan literatürde 3M Y966 koduyla bilinen viskoelastik çekirdek kullanılmıştır. Her frekansta ayrı malzeme sabitine sahip bu malzeme kullanılarak doğal frekans hesaplayabilmek için iteratif bir yöntem kullanılmıştır.

**Kirişin eğriliğine bağlı parametrik analizlerin sonucunda aşağıda sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.**

- Eğrilik arttığında sistemin mod şekilleri değişmektedir. Bu da doğal frekans sonuçlarında ve modal kayıp faktörü grafiklerinde süreksizliklere neden olmaktadır. Eğrilik arttıkça kirişin orta noktasının radyal yöndeki sertliği diğer bölgelere göre daha çok artmaktadır. Bu da kirişin eğriliği arttıkça mod şeklinin değişmesine sebep olmaktadır.

- Eğrilik arttıkça bir noktaya kadar doğal frekans değeri hızlı bir şekilde artarken bir noktadan sonra doğal frekans değerleri daha yavaş bir şekilde azalma eğilimi göstermektedir.
- Sistemin mod şekillerinin değiştiği nokta civarlarında modal kayıp faktörü minimum olmaktadır. Genel olarak eğrilik artarken 1. mod dışındaki modlarda modal kayıp faktörü azalma eğilimi göstermektedir. 1. modda eğrilik 3 radyana kadar azalma eğilimi gösterirken 3 radyandan sonra hızlı bir artış göstermektedir.
- Mod numarası arttıkça sistemin modal sönüm faktörü azalmaktadır.

**Çekirdek kalınlığına bağlı parametrik analizlerin sonucunda aşağıda sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.**

- Çekirdek kalınlığının yaklaşık 0 mm'den 0.1 mm değerine kadar artması sistemin doğal frekans değerini çok hızlı bir şekilde düşürmektedir. Viskoelastik çekirdeğin alınlığının 0.1 mm değerinden sonra artması sistemin doğal frekans değerlerini daha yavaş bir şekilde düşürmektedir. Viskoelastik çekirdeğin kompozit katmanlara oranla çok ince olması bu katman üzerindeki kayma deformasyonlarını artırmaktadır. Bu da doğal frekans değerinin viskoelastik çekirdek kalınlığının minimum olduğu noktada maksimum olmasına yol açmaktadır. Viskoelastik çekirdek kalınlığının artması bu katmandaki kayma deformasyonlarını azalttığından dolayı bu katmanın kalınlığı arttıkça sistemin doğal frekans değeri azalmaktadır.
- Çekirdek kalınlığının yaklaşık 0 mm'den 0.1 mm değerine kadar artması sistemin modal sönüm faktörü değerini çok hızlı bir şekilde artırmaktadır. Çekirdek kalınlığının yaklaşık 0.1 mm'den sonra artması sistemin modal sönüm faktörünü azaltmaktadır.
- Mod numarası arttıkça sistemin modal sönüm faktörü azalmaktadır.

**Viskoelastik çekirdeğin konumuna bağlı parametrik analizlerin sonucunda aşağıda sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.**

- Viskoelastik çekirdek en üst veya en alt konumdayken sistemin doğal frekans değeri maksimum, iki kompozit katmanın tam ortasında minimum değere sahip olmaktadır. Bu da viskoelastik katman üzerindeki kayma deformasyonlarının bu çekirdeğin kirişin orta bölgesindeyken minimum en üst veya en alt bölgesindeyken maksimum olduğunu göstermektedir.
- Viskoelastik çekirdek en üst veya en alt konumdayken sistemin modal kayıp faktörü değeri doğal frekansın tersine minimum, iki kompozit katmanın tam ortasında maksimum değere sahip olmaktadır.
- Mod numarası arttıkça sistemin modal sönüm faktörü azalmaktadır.

**Kompozit malzemelerin laminasyon açısına bağlı parametrik analizlerin sonucunda aşağıda sıralanan sonuçlar elde edilmiştir.**

- Genel olarak alt veya üst katmanın laminasyon açısının 0 dereceden farklı bir değere sahip olması sistemin katılığını azalttığından dolayı laminasyon açısı 0 dereceden farklı bir değere sahip olduğunda sistemin doğal frekans değerini azaltmaktadır.
- Modal kayıp faktörü incelendiğinde 0 derece laminasyon açısına sahip sistemin modal kayıp faktörü minimum değere sahiptir. Herhangi bir katmanın laminasyon açısının değişmesiyle modal kayıp faktörü artmakta ve laminasyon açısı 90 derece olduğunda maksimum değere ulaşmaktadır.
- Alt katmanın laminasyon açısının değişmesinin sistemin katılığına etkisiyle üst katmanın laminasyon açısının değişmesinin etkisi aynı olmamaktadır. Alttaki katmanın laminasyon açısının 0 derece olması sistemin katılığını üstteki katmanın 0 derece olmasından daha fazla artırmaktadır.
- Mod numarası arttıkça sistemin modal sönüm faktörü azalmaktadır.

## KAYNAKLAR

---

- [1] Kerwin, E.M., (1959). "Damping of Flexural Waves by a Constrained Viscoelastic Layer", *The Journal of The Acoustical Society of America*, 31:952-962.
- [2] Ditaranto, R.A., (1965). "Theory of Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Layered Finite-Length Beams", *Journal of Applied Mechanics*, 32:881-886.
- [3] Mead, D.J. ve Markus, S., (1969). "Forced Vibration of a 3-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, 10:163-175.
- [4] Mead, D.J. ve Markus, S., (1970). "Loss Factors and Resonant Frequencies of Encastre Damped Sandwich Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 12:99-112.
- [5] Fasana, A. ve Marchesiello, S., (2001). "Rayleigh-Ritz Analysis of Sandwich Beams", *Journal of Sound and Vibration*, 241:643-652.
- [6] Galucio, A.C., Deu, J.F. ve Ohayon, R., (2004). "Finite Element Formulation of Viscoelastic Sandwich Beams Using Fractional Derivative Operators", *Computational Mechanics*, 33:282-291.
- [7] Tang, S.J. ve Lumsdaine, A., (2008). "Analysis of Constrained Damping Layers, Including Normal-Strain Effects", *Aiaa Journal*, 46:2998-3011.
- [8] Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ., (2010). "Vibration Analysis of Composite Sandwich Beams with Viscoelastic Core by Using Differential Transform Method", *Composite Structures*, 92:3031-3039.
- [9] Loja, M.A.R., Barbosa, J.I. ve Soares, C.M.M., (2015). "Dynamic Behaviour of Soft Core Sandwich Beam Structures Using Kriging-Based Layerwise Models", *Composite Structures*, 134:883-894.
- [10] Ahmed, K.M., (1971). "Free Vibration of Curved Sandwich Beams by Method of Finite Elements", *Journal of Sound and Vibration*, 18:61-74.
- [11] Vaswani, J., Asnani, N.T. ve Nakra, B.C., (1988). "Vibration and Damping Analysis of Curved Sandwich Beams with a Viscoelastic Core", *Composite Structures*, 10:231-245.

- [12] Sakiyama, T., Matsuda, H. ve Morita, C., (1997). "Free Vibration Analysis of Sandwich Arches with Elastic or Viscoelastic Core And Various Kinds of Axis-Shape and Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, 203:505-522.
- [13] Bozhevolnaya, E. ve Sun, J.Q., (2004). "Free Vibration Analysis of Curved Sandwich Beams", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 6:47-73.
- [14] Baba, B.O., (2012). "Free Vibration Analysis of Curved Sandwich Beams with Face/Core Debond Using Theory and Experiment", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 19:350-359.
- [15] Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ., (2012). "Vibration Analysis of Composite Sandwich Plates by the Generalized Differential Quadrature Method", *Aiaa Journal*, 50:620-630.
- [16] Tornabene, F. ve Viola, E., (2008). "2-D Solution for Free Vibrations of Parabolic Shells Using Generalized Differential Quadrature Method", *European Journal of Mechanics A-Solids*, 27:1001-1025.
- [17] Bellman, R., Casti, J. ve Kashef, B.G., (1972). "Differential Quadrature-Technique for Rapid Solution of Nonlinear Partial Differential Equations", *Journal of Computational Physics*, 10:40-52.
- [18] Shu, C. ve Richards, B.E., (1992). "Application of Generalized Differential Quadrature to Solve 2-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 15:791-798.
- [19] Bacciocchi, M., Eisenberger, M., Fantuzzi, N., Tornabene, F. ve Viola, E., (2016). "Vibration Analysis of Variable Thickness Plates and Shells by the Generalized Differential Quadrature Method", *Composite Structures*, 156:218-237.
- [20] De Rosa, M.A., Auciello, N.M. ve Lippiello, M., (2008). "Dynamic Stability Analysis and DQM for Beams with Variable Cross-Section", *Mechanics Research Communications*, 35:187-192.
- [21] Eftekhari, S.A., (2016). "Differential Quadrature Procedure for In-Plane Vibration Analysis of Variable Thickness Circular Arches Traversed by a Moving Point Load", *Applied Mathematical Modelling*, 40:4640-4663.
- [22] Liu, B., Ferreira, A.J.M., Xing, Y.F. ve Neves, A.M.A., (2016). "Analysis of Composite Plates Using a Layerwise Theory and a Differential Quadrature Finite Element Method", *Composite Structures*, 156:393-398.
- [23] Moradi, S. ve Taheri, F., (1998). "Differential Quadrature Approach for Delamination Buckling Analysis of Composites with Shear Deformation", *Aiaa Journal*, 36:1869-1873.
- [24] Parashar, S.K. ve Sharma, P., (2016). "Modal Analysis of Shear-induced Flexural Vibration of FGPM Beam Using Generalized Differential Quadrature Method", *Composite Structures*, 139:222-232.
- [25] Sharma, P. ve Parashar, S.K., (2016). "Free Vibration Analysis of Shear-Induced Flexural Vibration of FGPM Annular Plate Using Generalized Differential Quadrature Method", *Composite Structures*, 155:213-222.

- [26] Tornabene, F. ve Viola, E., (2007). "Vibration Analysis of Spherical Structural Elements Using the GDQ Method", *Computers & Mathematics with Applications*, 53:1538-1560.
- [27] Wang, C., Ewing, M. ve A'arabi, S.Y., (2001). "In Vitro Susceptibility of Avian Mycoplasmas to Enrofloxacin, Sarafloxacin, Tylosin, and Oxytetracycline", *Avian Diseases*, 45:456-460.
- [28] Marc, M., (2009). "Mechanical Behavior of Materials, Second Edition, Cambridge University Press, 120, New York.
- [29] Shu, C. ve Du, H., (1997). "Implementation of Clamped and Simply Supported Boundary Conditions in the GDQ Free Vibration Analysis of Beams and Plates", *International Journal of Solids and Structures*, 34:819-835.
- [30] Ungar, E.E. ve Kerwin, E.M., (1962). "Loss Factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts", *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34:954-957.
- [31] Arikoglu, A., (2014). "A New Fractional Derivative Model for Linearly Viscoelastic Materials and Parameter Identification via Genetic Algorithms", *Rheologica Acta*, 53:219-233.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Rahim Can PEKER  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 17.03.1992 - Rize  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : rcpeker@gmail.com

### ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Gemi İnş. ve Mak. Müh.	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lise	Fen Bilimleri	Bahçelievler And. Lisesi	2010

### İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2016-2017	Yıldız Teknik Üniversitesi	Bursiyer Öğrenci
2014-2016	Milper Pervane Teknolojileri A.Ş	Tasarım Mühendisi

## YAYINLARI

### Bildiri

1. Bal, H., Şamşul, B. ve Peker R. C., (2015). "Structural Analysis of a Composite Marine Propeller by Finite Element Method", 4 Th International Polymeric Composites Symposium, 7-9 May 2015, İzmir.
2. Metin, M., Ulu, A., Demir, Ö., Peker, R.C. ve Arıkoğlu, A., (2016). "Comparing Dynamic Response of an Euler-Bernoulli Beam under a Concentrated Moving Load on Linear Viscoelastic Foundation between FEM and Galerkin Method", ICENS 2016: 2nd International Conference on Engineering and Natural Sciences, 24-28 May 2016, Sarajevo, Bosnian and Herzegovinian.
3. Metin, M., Ulu, A., Demir, Ö., Peker, R.C. ve Arıkoğlu, A., (2016). "Dynamic Analysis of Railway Superstructures Acting on Moving Load", ISERSE 2016: 3rd International Symposium on Railway Systems Engineering, 13-15 October 2016, Karabük.
4. Peker, R.C., Metin, M., Ulu, A., Demir, Ö. ve Arıkoğlu, A., (2016). "3d Analysis of Vibrations Due to Railway Superstructures on a Real Line", ISERSE 2016: 3rd International Symposium on Railway Systems Engineering, 13-15 October 2016, Karabük.
5. Peker, R.C., Metin, M., Ulu, A., Demir, Ö. ve Arıkoğlu, A., (2016). "Hareketli Yük Etkisi Altında Euler-Bernoulli ve Timoshenko Kirişlerinin Elastik Zemin Üzerindeki Dinamik Davranışlarının İncelenmesi", UMTS 2017: 18. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu, 5-7 Temmuz 2017, Trabzon.