

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KLASİK MEKANİKTE EYLEM FONKSİYONELİNİN İKİNCİ
VARYASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Feriha GÜRMAN
DANIŞMAN: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

VAN-2017

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KLASİK MEKANİKTE EYLEM FONKSİYONELİNİN İKİNCİ
VARYASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Feriha GÜRMAN

VAN-2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ danışmanlığında, Feriha GÜRMAN tarafından sunulan “**Klasik Mekanikte Eylem Fonksiyonelinin İkinci Varyasyonu**” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 14/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Bülent KARAKAŞ

Üye: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

Üye: Yrd. Doç. Dr. Şükran KONCA




Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .../.../..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

.....
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yaptığımı bildiririm.



Feriha GÜRMAN

ÖZET

KLASİK MEKANİKTE EYLEM FONKSİYONELİNİN İKİNCİ VARYASYONU

GÜRMAN, Feriha
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ
Haziran 2017, 59 sayfa

Klasik mekanikteki eylem fonksiyonelinin birinci ve ikinci varyasyonlarının incelendiği bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tezin amacı ve önemi anlatılmıştır. İkinci bölümde literatür bildirişine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tek değişkenli ve çok değişkenli fonksiyonların ekstremum şartları, fonksiyonel tanımı, birinci varyasyon, Euler-Lagrange denklemi, iki bağımsız değişkenli durum ve yüksek mertebeden türevler içeren fonksiyoneller için Euler-Lagrange denklemi verilmiştir. Ayrıca bir fonksiyonelin ekstremum üretmesi için gerekli şartın, birinci varyasyonunun sıfıra eşitliği veya buna eşdeğer olan Euler-Lagrange denkleminin sağlanması gerektiği gösterilmiş ve bu şartları kolaylaştıran özel durumlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde klasik mekanik ve varyasyonlar hesabı incelenmiştir. Bu bölümde eylem fonksiyoneli, birkaç bağımlı değişken durumu, varyasyonlar hesabının başlangıç problemi Brachystochrone problemi, Fermat ilkesi, zincir problemi ve çeşitli problemler verilir ve bu problemler çözülmüştür.

Beşinci bölümde ele alınan eylem (etki) fonksiyonelinin varyasyonlar hesabı ile ikinci varyasyonu verilmiştir. Daha sonra eylem fonksiyoneli üzerine Legendre şartı uygulanmış ve eylem fonksiyonelinin minimum yapan şartlar oluşturulmuştur. Ayrıca gösterilmiştir ki eylem fonksiyonelinin minimum olma şartı kütlemin pozitif olma şartını doğurur. Altıncı bölümde sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Birinci ve İkinci Varyasyon, Klasik Mekanikte Eylem Fonksiyoneli



ABSTRACT

SECOND VARIATION OF ACTION FUNCTIONAL IN CLASSICAL MECHANICS

GÜRMAN, Feriha
M. Sc. Thesis, Mathematics Science
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Şenay BAYDAŞ
June 2017, 59 pages

This thesis which investigates first and second variations of the action functional in classical mechanics consists of six parts.

In the first chapter, the purpose and importance of the thesis are explained, and in the second chapter, literature notice is given.

In the third chapter, extreme conditions of univariate and multivariate functions, description of functional, first variation, Euler-Lagrange equation, the case of two independent variables and Euler-Lagrange equation for functionals with higher order derivatives are given. In addition, it is denoted that the necessary condition for generating an extremum value of a functional is that the first variation is equal to zero or equivalently, it's showed that Euler-Lagrange equation must be provided and special cases facilitating these conditions are included.

In the fourth chapter, classical mechanics and calculus of variations are examined. In this chapter, action functional, cases of several dependent variables, initial problem of calculus of variations, that is Brachystochrone problem, Fermat principle, chain problem and various problems are given and these problems are solved.

In the fifth chapter, second variations of the action functional with calculus of variations are given. After that, the Legendre condition is applied on the action functional and the conditions which minimize the action functional are established. It has been demonstrated that the condition of action functional to be minimum leads to the condition of the mass tensor being positive. In the sixth chapter, conclusion is given.

Keywords: Action Functional in Classical Mechanics, First and Second Variation



ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında, her türlü ilgi ve yardımlarını esirgemeyen bana her zaman destek olan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Bülent Karakaş'a ve danışmanım Sayın Doç. Dr. Şenay Baydaş'a yine tez çalışmalarım boyunca fizik konusunda her konuda bana yol gösteren, bana yardımlarını esirgmeden her zaman destek olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Harun Akkuş'a teşekkür ederim. Ayrıca verdikleri desteklerinden ötürü aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

2017

Feriha Gürman



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞİ.....	2
3. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3.1. Tek Değişkenli Fonksiyonların Ekstreum Problemi.....	3
3.2. Çok Değişkenli Fonksiyonların Ekstreum Problemi.....	5
3.3. Fonksiyonel	6
3.4. Euler-Lagrange Denkleminin Değişmezliği	10
3.5. Özel Durumlar	13
3.5.1. Özel Durum 1	13
3.5.2. Özel Durum 2	13
3.6. Örnekler.	14
3.7. İki Bağımsız Değişken.....	22
3.8. Yüksek Mertebeden Türevler İçeren Fonksiyoneller	26
4. KLASİK MEKANİKTE VARYASYONLAR HESABI	30
4.1. Klasik Mekanik	30
4.2. Eylem Fonksiyoneli ve Lagrange Fonksiyonu	30
4.3. Birkaç Bağımlı Değişken Durumu	31
4.3.1. Serbest düşme hareketi	34
4.4. Varyasyonlar Hesabının Başlangıcı: Brachystochrone Problemi	35
4.5. Örnekler.	37
5. İKİNCİ VARYASYON.....	41
5.1. Sonlu Boyutlu Durum.....	41
5.2. Morse Lemması	44

5.3. Sylvester Kriteri.....	44
5.4. İkinci Varyasyon	45
5.5. Legendre Şartı.....	46
5.6. Eylem Fonksiyonelinin İkinci Varyasyonu.....	49
5.7. Eylem Fonksiyoneli İçin Legendre Şartı	52
6. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	55
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3. 1. $\varepsilon > 0$ komşuluğunda y fonksiyonun komşu fonksiyonları	7
Şekil 3. 2. Bir Σ yüzeyi üzerinde herhangi iki nokta	17
Şekil 4. 1. Brachystochrone problemi	35
Şekil 4. 2. Zincir eğrisi.	38





1. GİRİŞ

Varyasyonlar hesabı temel olarak fonksiyonelleri ekstremum yapan fonksiyonları bulmayla ilgilidir. Bu genel olarak integralleri minimum yapan fonksiyonları bulmayı gerektirir. Varyasyonlar hesabı bu anlamda optimizasyonun bir dalı olarak düşünülebilir. Varyasyonlar hesabının en önemli uygulama alanlarından biri klasik mekaniktir. Klasik mekanik ve varyasyonlar hesabı birbirinden ayrı düşünülemez. Varyasyonlar hesabının gelişmesine en büyük katkıyı klasik mekanikteki problemler sağlamıştır.

Jacobi, diferansiyel denklemlerin varyasyonlar hesabı içinde bulunduğunu keşfettikten sonra önemli birçok bilim adamı varyasyonlar hesabının kısmi diferansiyel denklemler ile olan bağıllığını incelemiş ve varyasyonlar hesabına çok önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Bir fonksiyonelin yerel ekstremumlarını bulmanın yöntemi, tek veya birden fazla değişkenli bir fonksiyonun ekstremumlarını bulma yöntemiyle aynı olmasa da benzerdir. Tek değişkenli bir fonksiyonu ekstremum yapan noktalar, fonksiyonun değişkene göre birinci türevinin sıfıra eşitliğinden elde edilir. Bir fonksiyoneli ekstremum yapan fonksiyonlar ise fonksiyonelin birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden bulunur. Bu işlemin, Euler-Lagrange denklemini çözmeye eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yüksek mertebeden türevler ve birden fazla bağımlı değişken içeren fonksiyoneller için Euler-Lagrange denklemleri türetilmiştir. Fonksiyonelin ikinci varyasyonunu hesaplayarak, ekstremal fonksiyonların türünü belirleme yöntemi verilmiştir. Son olarak klasik mekanikte, fiziksel bir sistemin eylem fonksiyonelinin birinci ve ikinci varyasyonları hesaplanarak, eylem fonksiyonelinin ekstremum yapan fonksiyonları ve türlerini bulma hesapları yapılarak eylemin minimum olma şartı ele alınmıştır.

2. KAYNAK BİLDİRİŞİ

Varyasyonlar hesabının 1696'da Johann Bernoulli'nin ortaya attığı Brachystochrone problemiyle başladığı bugün herkes tarafından kabul edilmektedir. Literatürdeki klasik mekanik kitaplarında, hareket için yazılan eylem fonksiyonelinin sadece birinci varyasyonunun sıfıra eşitliğinden Euler-Lagrange denklemlerine gidilir (Argyris ve Kelsey, 1960; Arnold, 1989; Dym ve Shames, 2013; Goldstein, 1980; Lanczos, 1970; Landau ve Lifshitz, 1976; Oden ve Reddy, 1973).

Bu denklemler çözülerek eylem fonksiyonelinin ekstremalleri bulunur. Varyasyonlar hesabı üzerine yapılan çalışmalarda, tek bağımlı ve tek bağımsız değişken içeren bir fonksiyonel için ikinci varyasyon hesapları yapılmıştır (Gelfand ve Fomin, 1963; Lanczos, 1970; Massa ve Pagani, 2016; Van Brunt, 2004).

3. TEMEL KAVRAMLAR

3.1. Tek Değişkenli Fonksiyonların Ekstreum Problemi

Tanım 3.1.1. (Kritik Nokta) Açık aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonun türevinin olmadığı veya sıfıra eşit olduğu noktalara kritik noktalar denir (Halilov ve ark., 1999; Olmsted, 1961).

Tanım 3.1.2. (Kararlı Nokta) Fonksiyonun birinci mertebeden türevinin sıfır olduğu noktalara kararlı noktalar denir (Halilov ve ark., 1999; Olmsted, 1961).

Teorem 3.1.1. $f, I \subseteq \mathbb{R}$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi bir

$$\hat{x} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$$

$f(\hat{x}) \leq f(x)$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x te bir yerel maksimumu vardır denir. Eğer $-f, x$ te bir yerel maksimuma sahip ise $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x te bir yerel minimumu vardır denir. Bir fonksiyon verilen bir aralıkta birkaç ekstreuma sahip olabilir.

Bir fonksiyon tüm aralık için bir maksimum veya minimuma ulaşabilir. Eğer tüm $\hat{x} \in I$ için $f(\hat{x}) \leq f(x)$ ise $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde $x \in I$ da bir global maksimuma sahiptir. Eğer $-f, x$ te bir global maksimuma sahipse I üzerinde $x \in I$ da f fonksiyonu bir global minimuma sahiptir denir. Eğer I , bir sınır noktasına sahipse o zaman I üzerinde yerel maksimum veya minimum varlığı birinci türevle karakterize edilir (Kaplana, 1991; Olmsted, 1961; Van Brunt, 2004).

Teorem 3.1.2. f, I açık aralığında türevlenebilir bir reel değerli fonksiyon olsun. Eğer $f, x \in I$ da bir yerel ekstreuma sahip ise o zaman $f'(x) = 0$ olur.

İspat: Bu teoremin ispatı aslında bir yerel maksimum veya minimum için olanla aynıdır. Varsayalım ki x bir yerel maksimumdur. Bu durumda herhangi bir

$$\hat{x} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset I$$

için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $f(x) \geq f(\hat{x})$ eşitsizliği sağlanır. Şimdi f nin x deki türevi

$$f'(x) = \lim_{\hat{x} \rightarrow x} \frac{f(\hat{x}) - f(x)}{(\hat{x} - x)}$$

ile verilir. Bu limitin payı asla pozitif değildir. Çünkü $f(x)$ bir maksimumdur. Fakat payda, $\hat{x} > x$ olduğunda pozitif ve $\hat{x} < x$ olduğunda negatiftir. f fonksiyonu x te türevlenebilir olduğundan sağdan ve soldan limitler vardır ve eşittir. Bu ancak $f'(x) = 0$ ise gerçektir.

Düzgün terimi burada fonksiyonun yeteri kadar sürekli türevlere sahip olması anlamında kullanılır. Düzgün fonksiyonlar için bu durum: Varsayalım ki f , $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ aralığında ($\varepsilon > 0$ için) düzgündür. $\hat{x} - x = \varepsilon\eta$ olsun. Taylor teoremine göre yeterince küçük ε için f ,

$$f(\hat{x}) = f(x) + \varepsilon\eta f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \eta^2 f''(x) + O(\varepsilon^3) \quad (3.1)$$

ile temsil edilebilir. Eğer $f'(x) \neq 0$ ve ε yeterince küçük ise $f(\hat{x}) - f(x)$ in işaretini $\eta f'(x)$ belirler. Varsayalım ki $f'(x) \neq 0$ dır.

Eğer f , x de bir yerel ekstremuma sahip ise o zaman $f(\hat{x}) - f(x)$ in işareti $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ da değişmez. Böylece $\eta f'(x)$, tüm η lar için aynı işarete sahip olmak zorundadır. Fakat açıktır ki η , pozitif veya negatif olabilir ve böylece $\eta f'(x)$ de pozitif veya negatif olabilir. Bu nedenle $f'(x) = 0$ olmak zorundadır. Eğer $f'(x) = 0$ ise yukarıdaki açılım gösterir ki farkın işareti karesel terimin yani $f''(x)$ in işaretidir. Eğer bu türev negatif ise o zaman $f(x)$ bir yerel maksimumdur. Eğer pozitif ise o zaman $f(x)$ bir yerel minimumdur. $f''(x) = 0$ da olabilir. Bu durumda farkın işareti, bir η^3 çarpanı içeren kübik terime bağlıdır. Ancak lineer terim gibi bu çarpan η nın seçimine bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir. Dolayısıyla eğer $f'''(x) \neq 0$ ise, $f(x)$ bir yerel ekstremum olamaz. Bu anlamda $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ da f , gerekli türevlere sahip olana kadar devam edebiliriz.

Türevlenebilir bir fonksiyon için $f'(x) = 0$ şartının neden yerel ekstremum için şart olduğunu görmek kolaydır. Bir düzgün fonksiyon için Taylor açılımı gösterir ki birinci türevin sıfır olduğu herhangi bir x noktasında bağımsız değişkendeki bir $O(\varepsilon)$ değişimi, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğundan fonksiyonda bir $O(\varepsilon^2)$ değişimi üretir (Van Brunt, 2004).

3.2. Çok Değişkenli Fonksiyonların Ekstreum Problemi

Teorem 3.2.1. n - boyutta yerel ve global ekstremumlar için tanımlar formal olarak tek değişkenli durum ile aynıdır. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun ve varsayalım ki $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dir. Yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ ve $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ için,

$$B(\vec{x}; \varepsilon) = \{\hat{\vec{x}} \in \mathbb{R}^n: |\hat{x}_1 - x_1|^2 + |\hat{x}_2 - x_2|^2 + \dots + |\hat{x}_n - x_n|^2 < \varepsilon\}$$

olsun. Tüm $\hat{\vec{x}} \in \Omega$ için eğer $f(\hat{\vec{x}}) \leq f(\vec{x})$ (veya $f(\hat{\vec{x}}) \geq f(\vec{x})$) ise $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Ω üzerinde \vec{x} de bir global maksimuma (veya global minimuma) sahiptir. Herhangi bir $\hat{\vec{x}} \in B(\vec{x}; \varepsilon) \subset \Omega$, $f(\hat{\vec{x}}) \leq f(\vec{x})$ ($f(\hat{\vec{x}}) \geq f(\vec{x})$) olacak şekilde eğer yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu \vec{x} de bir yerel maksimuma (yerel minimuma) sahiptir. Tek değişkenli durumda olduğu gibi eğer Ω sınır noktalarına sahipse f fonksiyonu sınır üzerinde bir global maksimuma veya minimuma sahip olabilir.

İki bağımsız değişkenli düzgün bir fonksiyonun yerel ekstremuma sahip olma şartı, tek değişkenli durumda kullanılan benzer düşüncelerden türetilir. Varsayalım ki $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ bölgesi üzerinde düzgün bir fonksiyondur ve $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ da f , bir yerel ekstremuma sahiptir. O zaman öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki tüm

$$\hat{\vec{x}} \in B(\vec{x}; \varepsilon)$$

için $f(\hat{\vec{x}}) - f(\vec{x})$ işaretini değiştirmez. $\hat{\vec{x}} = \vec{x} + \varepsilon\eta$ olsun. Burada $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ dir. Yeteri kadar küçük ε için Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} f(\hat{\vec{x}}) &= f(\vec{x}) + \varepsilon \left\{ \eta_1 \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} \right\} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left\{ \eta_1^2 \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} + 2\eta_1\eta_2 \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2^2} \right\} + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

olur ve $f(\hat{\vec{x}}) - f(\vec{x})$ in işareti, Taylor açılımındaki lineer terim ile verilir (= 0 hariç). Fakat eğer $\vec{x} + \varepsilon\eta \in B(\vec{x}; \varepsilon)$ ise o zaman $\vec{x} - \varepsilon\eta \in B(\vec{x}; \varepsilon)$ olur ve bu noktalar lineer terim ($\neq 0$) için farklı işaretler üretir. Eğer \vec{x} bir yerel ekstremum ise tüm $\eta \in \mathbb{R}^2$ için,

$$(\eta_1, \eta_2) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = 0 \quad (3.2)$$

olmak zorundadır. (3.2) denklemi özellikle $\vec{e}_1 = (1,0)$ ve $\vec{e}_2 = (0,1)$ özel seçimleri için sağlanmak zorundadır. İlk seçime göre $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, ikinci seçime göre $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ olur. Böylece eğer f , \vec{x} de bir yerel ekstremuma sahip ise,

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}) = 0 \quad (3.3)$$

olur. Geometrik olarak (3.2) denklemine göre f in eğrisine teğet düzlem bir yerel ekstremumda yataydır. $\vec{\nabla}f(\vec{x}) = 0$ olan noktalara kararlı noktalar denir. Eğer \vec{x} bir kararlı nokta ve $\hat{x} = \vec{x} + \varepsilon\eta$ ise o zaman $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda $f(\hat{x}) - f(\vec{x})$, $O(\varepsilon^2)$ dir (Van Brunt, 2004).

3.2.2. Teorem $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bölgesinde bir düzgün fonksiyon olsun. Eğer f , bir $\vec{x} \in \Omega$ noktasında bir yerel ekstremuma sahip ise o zaman

$$\vec{\nabla}f(\vec{x}) = 0 \quad (3.4)$$

olur (Kaplan, 1991; Rund, 1966).

3.3. Fonksiyonel

Tanım 3.3.1. (Fonksiyonel): Bir fonksiyonel bir aralıkta tanımlanmış her fonksiyona, belli bir kural uyarınca, bir sayı karşılık getirir (Rızaoğlu ve Sünel, 2008).

Tanım 3.3.2. (Birinci Varyasyon): $[x_0, x_1]$ üzerinde sürekli ikinci türevlere sahip fonksiyonlardan oluşan bir $C^2[x_0, x_1]$ fonksiyon uzayı olsun. $J: C^2[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

ile tanımlanan bir fonksiyonel olsun. Burada $y' = dy/dx$ ve f , x e, y ye ve y' ye göre en azından ikinci dereceden sürekli kısmi türevleri olan bir fonksiyondur. Verilmiş iki $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ için düzlemde sabit uç noktalı bir varyasyonel problem, $y(x_0) = y_0$ ve $y(x_1) = y_1$ şartları altında J yi ekstremum yapan bir $y \in C^2[x_0, x_1]$ fonksiyonunu bulmaktır. $y(x_0) = y_0$ ve $y(x_1) = y_1$ şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesi,

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0 \text{ ve } y(x_1) = y_1\}$$

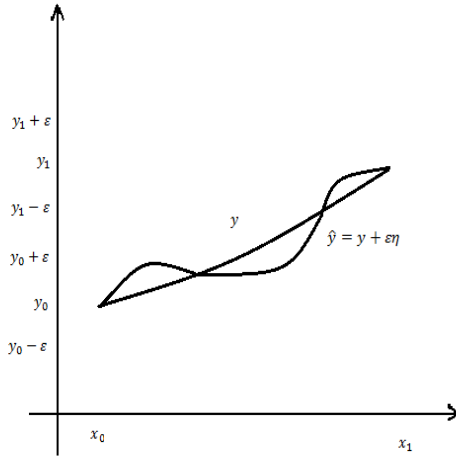
ile tanımlanır. Bu küme içinde y nin yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ komşuluğundaki komşu fonksiyonları,

$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta$$

ile tanımlayalım. Burada $\eta(x)$ fonksiyonlar kümesi,

$$H = \{\eta \in C^2[x_0, x_1]: \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. $\varepsilon > 0$ komşuluğunda y fonksiyonunun komşu fonksiyonları.

Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} f(x, \hat{y}, \hat{y}') &= f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') \\ &= f(x, y, y') + \varepsilon(\eta f_y + \eta' f_{y'}) + \frac{\varepsilon^2}{2}(\eta^2 f_{yy} + 2\eta\eta' f_{yy'} + \eta'^2 f_{y'y'}) \\ &\quad + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

olur ki burada; $f_y = \partial f / \partial y$, $f_{y'} = \partial f / \partial y'$, $\eta' = \partial \eta / \partial x$, $f_{yy} = \partial^2 f / \partial y^2$, $f_{yy'} = \partial^2 f / \partial y \partial y'$, $f_{y'y'} = \partial^2 f / \partial y'^2$ ve $O(\varepsilon^3)$ serinin üçüncü mertebeden terimleridir.

Dolayısıyla komşu \hat{y} fonksiyonu boyunca J fonksiyoneli,

$$\begin{aligned}
J[\hat{y}] &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, \hat{y}, \hat{y}') dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (\eta f_y + \eta' f_{y'}) dx \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\eta^2 f_{yy} + 2\eta\eta' f_{yy'} + \eta'^2 f_{y'y'}) dx + O(\varepsilon^3) \\
&= J[y] + \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (\eta f_y + \eta' f_{y'}) dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\eta^2 f_{yy} + 2\eta\eta' f_{yy'} + \eta'^2 f_{y'y'}) dx \\
&\quad + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$J[\hat{y}] - J[y] = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (\eta f_y + \eta' f_{y'}) dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\eta^2 f_{yy} + 2\eta\eta' f_{yy'} + \eta'^2 f_{y'y'}) dx + O(\varepsilon^2)$$

olur. Burada

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (\eta f_y + \eta' f_{y'}) dx$$

ifadesine, J fonksiyonelinin birinci varyasyonu denir.

Açıkça eğer $\eta \in H$ ise $-\eta \in H$, $\delta J[\eta, y] = -\delta J[-\eta, y]$ olur. Yeterince küçük ε için $J[\hat{y}] - J[y]$ nin işareti, tüm $\eta \in H$ için $\delta J[\eta, y] = 0$ olmadıkça birinci varyasyonun işareti ile belirlenir. Ancak $J[y]$ nin S de bir yerel maksimum olma şartı şunu gerektirir: Herhangi bir $\hat{y} \in S$ (öyle ki $\|\hat{y} - y\| < \varepsilon$) için $J[\hat{y}] - J[y]$ işaret değiştirmez. Sonuç olarak eğer $J[y]$ bir yerel maksimum ise tüm $\eta \in H$ için

$$\delta J[\eta, y] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \quad (3.5)$$

olur. Benzer argümanlar zinciri, eğer J, y de bir yerel minimuma sahip ise tüm $\eta \in H$ için (3.5) denkleminin sağlanması gerektiğini göstermek için kullanılabilir.

Buraya kadar gösterildi ki eğer J, S deki y de bir yerel ekstremuma sahip ise tüm $\eta \in H$ için (3.5) denklemi sağlanmak zorundadır. Sonlu boyutlu durumda olduğu gibi tersi doğru değildir. (3.5) denkleminin sağlanması, y nin J için bir yerel ekstremum üretmesi zorunluluğu anlamına gelmez. Eğer y , tüm $\eta \in H$ için (3.5) denklemini

sağlıyorsa J nin y de kararlı olduğunu söyleyebiliriz. y , J için bir yerel ekstremum üretmese de bir ekstremal olabilir.

(3.5) denklemi, (3.4) denkleminin sonsuz boyutlu benzeridir. Hatırlayalım ki $\vec{\nabla}f = 0$ şartı, tüm $\eta \in \mathbb{R}^n$ için sağlamak zorunda olan $\eta \cdot \vec{\nabla}f = 0$ şartından türetilir. \mathbb{R}^n deki uygun vektörlerin seçimi ile gösterildi ki $\vec{\nabla}f$ in her bir bileşeni ayrı ayrı sıfır olmak zorundadır. Benzer bir strateji, (3.5) gerekli şartını keyfi η fonksiyonundan ayırmak için kullanılabilir. (3.5) denklemindeki integrant sadece η yı değil η' nü de içerir ki bu da durumu daha karmaşıklaştırır. (3.5) denklemdeki η' terimi, kısmi integrasyon kullanılarak yok edilebilir.

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

Burada $\eta(x_0) = 0$ ve $\eta(x_1) = 0$ şartlarını kullandık. Böylece (3.5) denklemi

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0 \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Bu taktirde,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y''$$

olur ve f , en az iki sürekli türeve sahip olduğunda görürüz ki herhangi bir sabit $y \in C^2[x_0, x_1]$

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)$$

şeklinde tanımlanan $E: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[x_0, x_1]$ aralığında süreklidir. Burada, verilmiş bir y fonksiyonu için E yi tanımlayan kısmi türevler $(x, y(x), y'(x))$ noktasında değer alabilirler (Arnold, 1989; Bliss, 1946; Bolza, 1904; Forsyth, 1927; Gelfand ve Fomin, 1963; Goldstein, 1980).

Teorem 3.3.1. $J: C^2[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

formunda bir fonksiyonel olsun. Burada f , x, y ve y' ye göre sürekli ikinci dereceden kısmi türevlere sahiptir ve $x_0 < x_1$ dir.

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0 \text{ ve } y(x_1) = y_1\}$$

olsun. Burada y_0 ve y_1 verilmiş reel sayılardır. Eğer $y \in S$, J için bir ekstremal ise o zaman tüm $x \in [x_0, x_1]$ için,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

dır.

(3.7) denklemi bir ikinci dereceden (genellikle non-lineer) adi diferansiyel denklemdir ve herhangi bir (düzgün) y ekstremali bu denklemi sağlamak zorundadır. Bu diferansiyel denkleme “Euler-Lagrange” denklemi denir. Sabit uç noktalı problem için bu denklemle beraber olan sınır değerleri,

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (3.8)$$

ile belirlenir.

Euler-Lagrange denklemi, $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$ denkleminin sonsuz boyutlu benzeridir. Sonlu boyuttan sonsuz boyuta geçişte $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ noktalarının belirlenmesi için bir cebirsel şart (ki bu şart yerel ekstremumlara götürür), ikinci dereceden bir diferansiyel denklem içeren bir sınır-değer problemi ile yer değiştirir (Bolza, 1904; Van Brunt, 2004).

3.4. Euler-Lagrange Denkleminin Değişmezliği

Fizikte varyasyonel formülasyonlara götüren ilkeler koordinat sistemlerine bağlı değildir. Jeodezikleri belirleme gibi problemler de aynı şekilde koordinattan bağımsız karakterdedir. Örneğin, bir parçacığın yörüngesi, onu tanımlamak için gözlemcinin kullandığı koordinat sisteminden bağımsızdır veya bir jeodezik, yüzeyin bir özel parametrisasyonuna bağlı değildir. Bu tip problemler fonksiyonların maksimize edilmesi cinsinden ifade edilebilir ve sonunda bir Euler-Lagrange denkleminin çözümlerine gidilir. Euler-Lagrange denkleminin koordinat dönüşümlerine göre değişmez kalması beklenir ve Euler-Lagrange denkleminin değişmezliğine bakılır.

Eğer x ve y , u ve ϑ e göre sürekli kısmi türevlere sahip ise

$$x = x(u, \vartheta), \quad y = y(u, \vartheta) \quad (3.9)$$

koordinat dönüşümüne düzgündür denir. Eğer Jakobiye,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, \vartheta)} = \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_\vartheta & y_\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} \neq 0 \quad (3.10)$$

şartını sağlıyorsa bu düzgün dönüşüme tekil olmayan denir. Burada $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $y_u = \frac{\partial y}{\partial u}$ ve $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$, $y_v = \frac{\partial y}{\partial v}$ notasyonu kullanılacaktır. (3.10) şartına göre dönüşüm tersinirdir: Her bir (x, y) çifti (3.7) şartını sağlayan tek bir (u, ϑ) çiftine karşılık gelir. (3.9) denklemi ile tanımlanan koordinat dönüşümünün düzgün ve tekil olmayan olduğunu varsayalım. J ,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (3.11)$$

formunda bir fonksiyonel olsun ve S ,

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0 \text{ ve } y(x_1) = y_1\}$$

ile tanımlansın. Burada y_0 ve y_1 verilmiş sayılardır. Şimdi, fonksiyoneli (u, ϑ) koordinatları cinsinden yazdığımızı ve ϑ yi u nun bir fonksiyonu olarak gördüğümüzü varsayalım. Bu durumda,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{y_u + y_\vartheta \dot{\vartheta}}{x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}}$$

ve

$$dx = \frac{dx}{du} du = (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}) du$$

olur ki burada $\dot{\vartheta}$, $\frac{d\vartheta}{du}$ yu gösterir. Böylece (3.9) fonksiyoneli,

$$\begin{aligned} J[y] &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \\ &= \int_{u_0}^{u_1} f(x(u, \vartheta), y(u, \vartheta), \frac{y_u + y_\vartheta \dot{\vartheta}}{x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}}) (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}) du = \int_{u_0}^{u_1} F(u, \vartheta, \dot{\vartheta}) du \end{aligned}$$

olur. Burada u_0 ve u_1 sayıları ve $\vartheta(u_0) = \vartheta_0$, $\vartheta(u_1) = \vartheta_1$ yeni sınır değerleri,

$$x_0 = x(u_0, \vartheta_0), \quad x_1 = x(u_1, \vartheta_1)$$

$$y_0 = y(u_0, \vartheta_0), \quad y_1 = y(u_1, \vartheta_1)$$

denklemleri için tek çözümdür. Açıklık için

$$K(\vartheta) = \int_{u_0}^{u_1} F(u, \vartheta, \dot{\vartheta}) du \quad (3.12)$$

olsun ve T ,

$$T = \{\vartheta \in C^2[u_0, u_1]: \vartheta(u_0) = \vartheta_0 \text{ ve } \vartheta(u_1) = \vartheta_1\}$$

şeklinde tanımlı bir küme olsun.

xy -düzleminde bir $y = y(x)$ fonksiyonu ile tanımlı bir eğri verildiğinde, (3.9) dönüşümü, $u\vartheta$ - düzleminde $\vartheta = \vartheta(u)$ fonksiyonu ile tanımlı bir eğriyi tanımlar. Eğer $\vartheta \in T, K$ için bir ekstremal ise $y \in S$ de J için bir ekstremal olur mu? Bir sonraki teorem bu soruyu cevaplar (Van Brunt, 2004).

Teorem 3.3.2. $y \in S$ ve $\vartheta \in T$, düzgün, tekil olmayan (3.9) dönüşümünü sağlayan iki fonksiyon olsun. O zaman y nin J için bir ekstremal olması için gerek ve yeter şart ϑ nin K için bir ekstremal olmasıdır.

İspat: Varsayalım ki $\vartheta \in T, K$ için bir ekstremaldır. O zaman ϑ ,

$$\frac{d}{du} \frac{dF}{d\dot{\vartheta}} - \frac{dF}{d\vartheta} = 0 \quad (3.13)$$

Euler-Lagrange denklemini sağlar.

$$F(u, \vartheta, \dot{\vartheta}) = f(x(u, \vartheta), y(u, \vartheta), \frac{y_u + y_\vartheta \dot{\vartheta}}{x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}}) (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta})$$

olduğundan,

$$\frac{dF}{d\dot{\vartheta}} = \frac{\partial f}{\partial y'} (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} \left(\frac{y_u + y_\vartheta \dot{\vartheta}}{x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}} \right) + x_\vartheta f$$

olur ve

$$\frac{dF}{d\vartheta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} x_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y} y_\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{y_u + y_\vartheta \dot{\vartheta}}{x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}} \right) \right) (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta}) + f \frac{\partial}{\partial \vartheta} (x_u + x_\vartheta \dot{\vartheta})$$

olsun. Hesaplamayla,

$$\frac{d}{du} \frac{dF}{d\dot{\vartheta}} - \frac{dF}{d\vartheta} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,\vartheta)} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (3.14)$$

olduğu görülür. Dönüşüm tekil olmayan olduğundan yani Jacobiyen sıfırdan farklı olduğundan eğer ϑ, K için bir ekstremal ise o zaman (3.13) ve (3.14) denklemlerine göre

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

olur. y, J için bir ekstremaldır. (3.14) denklemi, tersini de ima eder (Van Brunt, 2004).

3.5. Özel Durumlar

3.5.1. Özel Durum 1

Varsayalım ki fonksiyonel,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y') dx$$

formundadır. Burada y , integrantta açık olarak görünmemektedir. Bu durumda Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1 \quad (3.15)$$

denklemine indirgenir ki burada c_1 bir integrasyon sabitidir. Şimdi $\frac{\partial f}{\partial y'}$ x ve y' nün bilinen bir fonksiyonu olduğundan (3.15) denklemi y için birinci dereceden bir diferansiyel denklemdir. Prensip olarak (3.15) denklemi y' için çözülebilir (3.15) denklemi, bir g fonksiyonu için $\left(\frac{\partial f^2}{\partial y'} \neq 0\right)$ ve bu nedenle (3.15) denklemi,

$$y' = g(x, c_1)$$

formu ile yer değiştirebilir. O zaman integre edilebilir. (3.15) denklemini y' için çözmek eğer imkansız değilse de zor olabilir ve birden fazla çözüm mevcut olabilir. Yine de integrantta y nin yokluğu, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemi daha basit bir denkleme dönüştürür (Van Brunt, 2004).

3.5.2. Özel Durum 2

J fonksiyoneli,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(y, y') dx$$

formundadır. Burada x , integrantta açık olarak görünmemektedir.

$$H(y, y') = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f$$

şeklinde tanımlı H , herhangi bir y ekstremali boyunca sabittir.

İspat: Varsayalım ki y , J için bir ekstremaldir. Şimdi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H(y, y') &= \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f \right) = y'' \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \left(y' \frac{\partial f}{\partial y} + y'' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ &= y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

olur. y bir ekstremal olduğundan (3.7) Euler-Lagrange denklemi sağlanır ve böylece,

$$\frac{d}{dx} H(y, y') = 0$$

olur. Sonuç olarak H , bir ekstremal boyunca bir sabit olmak zorundadır. H fonksiyonu sadece y ve y' e bağlıdır. Bundan dolayı,

$$H(y, y') = \text{sabit} \quad (3.16)$$

denklemi, y ekstremali için birinci-dereceden bir diferansiyel denklemdir (Van Brunt, 2004).

3.6. Örnekler

Örnek 3.6.1.

$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$ olsun ve

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 + 2xy) dx$$

ile tanımlanan fonksiyoneli ele alalım. Bu fonksiyonel için Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{d}{dx} (2y') - (-2y + 2x) = 0$$

yani,

$$y'' + y = x$$

olur. Bu denklemin homojen çözümü,

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

olur, burada c_1 ve c_2 sabitlerdir. Özel çözüm, $y_p(x) = x$ olur. Dolayısıyla Euler-Lagrange denklemi için genel çözüm,

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$$

ile verilir. $y(0) = 0$ şartına göre $c_1 = 0$ ve $y(1) = 1$ şartına göre $c_2 = \frac{-1}{\sin(1)}$ olur.

Böylece bu fonksiyonel için tek ekstremal,

$$y(x) = x - \frac{\sin x}{\sin 1}$$

ile verilir.

Örnek 3.6.2.

k , pozitif sabiti gösterebilir ve J ,

$$J[y] = \int_0^\pi (y'^2 - ky^2) dx$$

ile tanımlanan bir fonksiyonel olsun. Sabit uç nokta şartları $y(0) = 0$ ve $y(\pi) = 0$ olsun. Eğer y, J için bir ekstremal ise,

$$\frac{d}{dx}(2y') + 2ky = 0$$

yani,

$$y'' + ky = 0$$

olur. Euler-Lagrange denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{k}x) + c_2 \sin(\sqrt{k}x)$$

şeklindedir. $y(0) = 0$ a göre $c_1 = 0$ ve $y(\pi) = 0$ a göre $c_2 \sin(\sqrt{k}\pi) = 0$ olur. Eğer \sqrt{k} bir tamsayı değilse o zaman $c_2 = 0$ ve tek ekstremal $y = 0$ olur ayrıca c_2 herhangi bir sayı olabilir. Bu ikinci durumda

$$y(x) = c_2 \sin(\sqrt{k}x)$$

formunda sonsuz sayıda ekstrema sahip olunur.

Örnek 3.6.3.

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ile tanımlanan bir fonksiyonel olsun. İntegrant hem x hem de y yi içerdiğinden,

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 + y'^2}} y' \right) - y \sqrt{\frac{1 + y'^2}{x^2 + y^2}} = 0 \quad (3.17)$$

Euler-Lagrange denkleminin ilk integralleri yoktur. Diğer taraftan $\sqrt{x^2 + y^2}$ teriminin varlığı, polar koordinatları akla getirir.

$$x = x(\varphi, r) = r \cos \varphi$$

$$y = y(\varphi, r) = r \sin \varphi$$

olsun. Bu dönüşüm düzgündür ve

$$\frac{\partial(x, u)}{\partial(\varphi, r)} = \det \begin{pmatrix} x_\varphi & y_\varphi \\ x_r & y_r \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -r \sin \varphi & r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = -r$$

olduğundan ($r \neq 0$) dönüşüm tekil olmayandır. Varsayalım ki r, φ nin bir fonksiyonudur. O zaman,

$$y' = \frac{y_\varphi + y_r \dot{r}}{x_\varphi + x_r \dot{r}} = \frac{r \cos \varphi + \sin \varphi \dot{r}}{-r \sin \varphi + \cos \varphi \dot{r}}$$

olduğundan,

$$\sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

elde edilir. Böylece J fonksiyoneli,

$$K[r] = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(r, \dot{r}) d\varphi \quad (3.18)$$

(3.18) şeklindedir. İntegrant φ ye açık bağlı olmadığından karşılık gelen Euler-Lagrange denkleminin bir ilk integrali vardır.

$$H(r, \dot{r}) = r \frac{\partial F}{\partial \dot{r}} - F = \frac{r \dot{r}^2}{\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}} - r \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = \text{sabit}$$

yani,

$$\dot{r} = r \sqrt{c_1 r^4 - 1} \quad (3.19)$$

olur. Burada c_1 , sıfırdan farklı bir sabittir. (3.19) denklemini integre edildiğinde,

$$\int \frac{dr}{r \sqrt{c_1 r^4 - 1}} = -\frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{1}{c_1 r^2} \right) = \varphi + c_2$$

olur, burada c_2 bir sabittir. Böylece $K_1 = \frac{1}{c_1}$, $K_2 = -2c_2$ için $r(\varnothing)$ fonksiyonu,

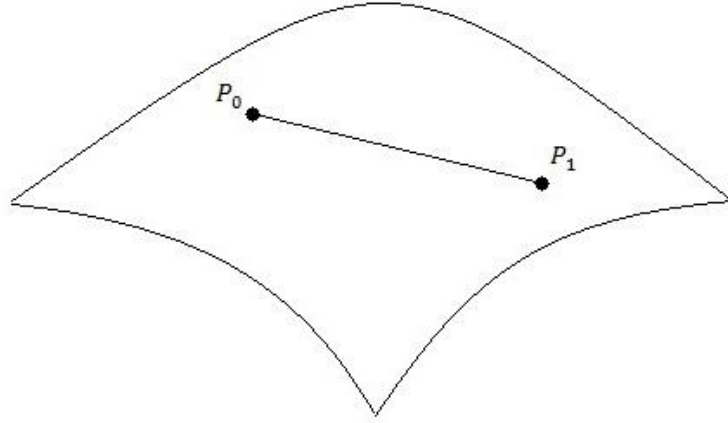
$$\begin{aligned} \frac{K_1}{r^2} &= \sin(-2\varnothing + K_2) \\ &= -\sin(2\varnothing) \cos K_2 \\ &\quad + \cos(2\varnothing) \sin K_2 = -2 \sin \varnothing \cos \varnothing \cos K_2 + (2 \cos^2 \varnothing - 1) \sin K_2 \end{aligned}$$

ile verilir. Kartezyen koordinat sisteminde yukarıdaki ifade,

$$K_1 = x^2 \sin K_2 - 2xy \cos K_2 - y^2 \sin K_2 \quad (3.20)$$

ifadesine eşdeğerdir.

Tanım 3.6.1. (Varyasyonlar Hesabı ile Jeodezik)



Şekil 3.2. Bir Σ yüzeyi üzerinde herhangi iki nokta.

Σ , bir yüzey ve P_0, P_1 Σ üzerinde farklı iki nokta olsun (Şekil 3.2). Jeodezik problemi, yay uzunluğu minimum olan ve uç noktaları P_0, P_1 olan eğri (veya eğriler) bulmaktır. Bu özelliğe sahip olan eğriye jeodezik denir (Van Brunt, 2004). Jeodezikler teorisi, diferansiyel geometride en çok gelişen alanlardan biridir.

Varsayalım ki Σ ,

$$\vec{r}: \sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$$

konum vektörüyle tanımlansın. Burada σ, \mathbb{R}^2 nin boş olmayan, bağlantılı bir açık alt kümesidir. $(u, v) \in \sigma$ için,

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

şeklindedir. Varsayalım ki \vec{r} , σ üzerinde bir düzgün fonksiyondur. Yani x , y ve z , (u, v) nin düzgün fonksiyonlarıdır ve

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \neq 0 \quad (3.21)$$

dır. \vec{r} , σ nın Σ üzerinde birebir haritalamasıdır. Eğer γ , Σ üzerinde bir eğri ise o zaman σ da öyle bir $\tilde{\gamma}$ eğrisi vardır ki \vec{r} altında γ ya haritalanır. Böylece Σ üzerinde herhangi bir eğri, σ da bir eğri olarak görülebilir. Varsayalım ki P_0 ve P_1 noktaları sırasıyla

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0), \quad \vec{r}_1 = \vec{r}(u_1, v_1)$$

\vec{r}_0 ve \vec{r}_1 e denk gelir. \vec{r}_0 dan \vec{r}_1 e herhangi bir γ eğrisi, bir $\tilde{\gamma}$ eğrisini (u_0, v_0) dan (u_1, v_1) e haritalanır.

Jeodezik problemi için dikkatimizi, Σ üzerinde \vec{r}_0 dan \vec{r}_1 e olan düzgün, basit eğrilerle (kendi kendini kesmeyen) sınırlandıralım. Γ , bu tür tüm eğrilerin oluşturduğu küme olsun. Böylece eğer $\gamma \in \Gamma$ ise o zaman,

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(u_t, v_t), t \in [t_0, t_1] \quad (3.22)$$

formunda bir γ parametrizasyonu vardır. Burada $\vec{R}(t_0) = \vec{r}_0$ ve $\vec{R}(t_1) = \vec{r}_1$, u ve v , $[t_0, t_1]$ aralığında düzgün fonksiyonlardır. Öyle ki tüm $t \in [t_0, t_1]$ için

$$u'^2(t) + v'^2(t) \neq 0 \quad (3.23)$$

olur. Parametre uzayı σ da son şart şunu garanti eder. $\tilde{\gamma}$ eğrisi de bir düzgün eğridir ve iyi tanımlı bir birim teğet vektörüne sahiptir. γ boyunca yay uzunluğunun diferansiyeli,

$$\begin{aligned} ds^2 &= |\vec{R}'(t)|^2 dt^2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} v'(t) \right|^2 dt^2 \\ &= (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2) dt^2 \end{aligned}$$

ile verilir. Burada,

$$E = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|^2, F = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, G = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|^2.$$

E , F ve G fonksiyonlarına birinci temel formun veya metrik tensörün bileşenleri denir. Bu bileşenler sadece u ve v ye bağlıdır. Ayrıca

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = EG - F^2$$

özdeşliğine ve (3.21) şartına göre,

$$I = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2$$

kuadratik formu pozitifdir.

L bir minimum ve

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0$$

$$u(t_1) = u_1, \quad v(t_1) = v_1$$

olmak üzere, γ nın yay uzunluğu,

$$L[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt$$

ile verilir. Böylece jeodezik problemi, u ve v fonksiyonlarını (yani $\tilde{\gamma}$ eğrisini) bulmaktır (Van Brunt, 2004).

Örnek 3.6.4. Düzlemde jeodezik

$(x_0, y_0) = (0,0)$ ve $(x_1, y_1) = (1,1)$ olsun. $y(x)$ ile tanımlanan ($x \in [0,1]$) bir eğrinin yay uzunluğu,

$$J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx$$

ile verilir. Düzlemde jeodezik problemi, yay uzunluğunu minimum yapan y fonksiyonunu belirlemeyi gerektirir. $C^2[0,1]$ deki fonksiyonlarla sınırlandırıldığında

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

şeklinde olur. Eğer y , J için bir ekstremal ise o zaman Euler-Lagrange denklemi sağlanmalıdır. Böylece,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - 0 = 0$$

yani,

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{Sabit}$$

olmalıdır. Bu son denklem, $y' = c_1$ şartına eşdeğerdir ki burada c_1 bir sabittir. Sonuç olarak J için bir ekstremal,

$$y(x) = c_1 x + c_2$$

formunda olmalıdır. Burada c_2 , bir diğer integrasyon sabitidir. $y(0) = 0$ olduğundan $c_2 = 0$ ve $y(1) = 1$ olduğundan $c_1 = 1$ dir. Dolayısıyla tek ekstremal $y(x) = x$ ile verilir ki bu da düzlemde $(0,0)$ dan $(1,1)$ e olan doğru parçasıdır.

Örnek 3.6.5. Küre yüzeyi üzerinde jeodezik

$u = \theta$ ve $\vartheta = \phi$ olsun. Varsayalım ki $t = u$ olsun. Böylece ϕ, θ nın bir fonksiyonu olarak görebilir. O zaman küre için yay uzunluğu fonksiyoneli,

$$J[\phi] = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (3.24)$$

olur. Burada $\phi', \frac{d\phi}{d\theta}$ ı gösterir. İntegrant ϕ i açıkça içermez. Böylece Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\phi'^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} = c_1 \quad (3.25)$$

denklemini verir, burada c_1 bir sabittir.

$$\phi'^2 \sin^4 \theta \leq \phi'^2 \sin^2 \theta \leq 1 + \phi'^2 \sin^2 \theta$$

böylece $-1 \leq c_1 \leq 1$ olmaktadır. Dolayısıyla $c_1, \sin \alpha$ sabiti ile yer değiştirilebilir.

(3.25) denklemine göre,

$$\phi' = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \alpha}}$$

olur. Böylece,

$$\phi = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin \alpha}{\sin \zeta \sqrt{\sin^2 \zeta - \sin^2 \alpha}} d\zeta + \beta$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\beta = \phi(\theta_0)$ dır. Yukarıdaki denklem

$$\cos(\phi + \beta) = \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} \quad (3.26)$$

bağıntısını üretir veya kartezyen koordinatlarda,

$$x \cos \beta - y \sin \beta = z \tan \alpha \quad (3.27)$$

(3.27) denklemi, kürenin merkezinden geçen bir düzlemin denklemdir. Jeodezik, bu düzlemin küre ile kesişimine karşılık gelir. Böylece jeodezik büyük çemberin bir yayı olmak zorundadır.

Örnek 3.6.6. Dido problemi

Dido problemi, E^2 de sabit uzunluğun belirlediği alanın maksimum olma problemidir.

$$J_1 = \frac{1}{2} \int (ydx - xdy); J_2 = \int \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$J = J_1 - \lambda J_2 = \frac{1}{2} \int (ydx - xdy) - \int \lambda \sqrt{1 + y'^2} dx = \int \left[\frac{1}{2} (y - xy') - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right] dx$$

$$f = \frac{1}{2} (y - xy') - \lambda \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \left(-\frac{x}{2} - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right); \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x}{2} - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = -1$$

$$\int d \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = \int -dx$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -x + c_1$$

$y' = u$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\lambda u}{\sqrt{1 + u^2}} = -x + c_1$$

$$\frac{\lambda^2 u^2}{1 + u^2} = (c_1 - x)^2$$

$$\lambda^2 u^2 = (c_1 - x)^2 + u^2 (c_1 - x)^2$$

$$[\lambda^2 - (c_1 - x)^2]u^2 = (c_1 - x)^2$$

$$u^2 = \frac{(c_1 - x)^2}{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}$$

$$u = \pm \frac{c_1 - x}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{c_1 - x}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}}$$

$$y = \pm \int \frac{(c_1 - x)dx}{\sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}} + c_2$$

$$c_1 - x = t$$

$$-dx = dt$$

$$y = \pm \int \frac{t dt}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} + c_2$$

$$\lambda^2 - t^2 = w, -2t dt = dw$$

$$y = \pm \frac{1}{2} \int \frac{dw}{\sqrt{w}} + c_2 = \pm \frac{1}{2} 2\sqrt{w} + c_2 = \pm \sqrt{w} + c_2$$

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - t^2} + c_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2} + c_2$$

$$y - c_2 = \pm \sqrt{\lambda^2 - (c_1 - x)^2}$$

$$(y - c_2)^2 = \lambda^2 - (c_1 - x)^2$$

$$(y - c_2)^2 + (x - c_1)^2 = \lambda^2$$

(Dym ve Shames, 2013; Lanczos, 1970; Van Brunt, 2004).

3.7. İki Bağımsız Değişken

Çoklu integrallerle tanımlanan fonksiyonlar için birinci varyasyona bakılarak integrantın iki bağımsız değişken içerdiği durum ele alınacaktır.

Ω , $\partial\Omega$ sınırı ve $\bar{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$ kapalılığı ile \mathbb{R}^2 de sınırlandırılmış bir bölge olsun. $C^2(\bar{\Omega})$, tüm $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayını gösterecektir. Öyle ki u , ikinci dereceden kısmi türevlere sahiptir.

$$J[u] = \iint f(x, y, u, p, q) dx dy \quad (3.28)$$

formunda bir $J: C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli düşünelim. Burada $p = u_x, q = u_y$ ve f, x, y, u, p ve q nun bir düzgün fonksiyonudur. Sabit uç noktalı varyasyonel problemin bir benzeri olarak burada ise bir $u \in C^2(\bar{\Omega})$ fonksiyonu bulmaktır. Öyle ki J ,

$$u(x, y) = u_0(x, y); (x, y) \in \partial\Omega \quad (3.29)$$

formundaki bir sınır şartı için bir ekstremumdur. Burada $u_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, verilmiş bir fonksiyondur.

Tek bağımsız değişkenli durumdaki gibi yaklaşabiliriz. Varsayalım ki u, J için (3.29) sınır şartına uyan bir ekstremaldır ve

$$\hat{u}(x, y) = u(x, y) + \varepsilon\eta(x, y)$$

olur. ε yeterince küçük bir parametredir ve $\eta \in C^2(\bar{\Omega})$ dır. İlaveten \hat{u} nın (3.29) sınır şartını sağlaması gerekir ve böylece tüm $(x, y) \in \partial\Omega$ için,

$$\eta(x, y) = 0 \quad (3.30)$$

olur. Aksi durumda η keyfidir. Yeterince küçük bir ε için Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} f(x, y, \hat{u}, \hat{p}, \hat{q}) &= f(x, y, u + \varepsilon\eta, p + \varepsilon\eta_x, q + \varepsilon\eta_y) \\ &= f(x, y, u, p, q) + \varepsilon \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta_x \frac{\partial f}{\partial p} + \eta_y \frac{\partial f}{\partial q} \right\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

olur, burada $\hat{p} = \hat{u}_x = p + \varepsilon\eta_x$ ve $\hat{q} = \hat{u}_y = q + \varepsilon\eta_y$ dir. Böylece,

$$J[\hat{u}] - J[u] = \varepsilon \iint \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta_x \frac{\partial f}{\partial p} + \eta_y \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy + O(\varepsilon^2)$$

elde edilir. Eğer J, u da bir ekstremuma sahip ise, ε mertebeli terimlerin sıfır olması gerektiği gösterilebilir. Böylece (3.31) şartını sağlayan tüm $\eta \in C^2(\bar{\Omega})$ için,

$$\iint \left\{ \eta \frac{\partial f}{\partial u} + \eta_x \frac{\partial f}{\partial p} + \eta_y \frac{\partial f}{\partial q} \right\} dx dy = 0 \quad (3.31)$$

olur. Sabit uç noktalı problemde olduğu gibi ancak (3.31) şartından keyfi fonksiyonun türevlerini elememiz gereklidir.

Herhangi $\phi, \psi: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için (öyle ki $\phi, \psi, \phi_x, \psi_y$ süreklidirler) Green teoremine göre,

$$\iint \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} \phi dy - \psi dx$$

olur.

$$\phi = \eta \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \psi = \eta \frac{\partial f}{\partial q} \quad (3.32)$$

olsun. η ve f , düzgün fonksiyonlar olduğundan (3.32) denklemi keyfi η için sağlanmak zorundadır. $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ve f düzgün olduğundan integrantta η nın katsayısı bir düzgün fonksiyondur. Dolayısıyla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) - \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad (3.33)$$

gerekli şart elde edilebilir. (3.33) denklemi, aynı zamanda (3.29) sınır şartını sağlayan bilinmeyen u fonksiyonu için bir ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklem, $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ denkleminin benzeridir ve (3.33) denklemine de Euler-Lagrange denklemi denir (Van Brunt, 2004).

Örnek 3.7.1.

Ω , $x^2 + y^2 < 1$ ile tanımlı bir disk ve

$$J[u] = \iint (p^2 + q^2) dx dy \quad (3.34)$$

olsun. Sınır şartları için varsayalım ki tüm $(x, y) \in \partial\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ için,

$$u_0(x, y) = 2x^2 - 1 \quad (3.35)$$

olsun. Bu fonksiyonel için Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.36)$$

olur. Eğer J , $u \in C^2(\bar{\Omega})$ de bir ekstremuma sahip ise u , (3.36) kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümü ve (3.29) sınır şartını sağlamak zorundadır (Van Brunt, 2004).

Örnek 3.7.2.

$r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, u(x, y)) \quad (3.37)$$

formunda bir fonksiyon olsun. Bu durumda \vec{r} , bir $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ yüzeyi tanımlar. Σ nın yüzey alanı,

$$J[u] = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy \quad (3.38)$$

ile verilir. Varsayalım ki minimal yüzey problemine bakılsın. Bu problem, (3.29) formundaki sınır şartları altında J için bir minimum bulmaktan ibarettir. Geometrik

olarak problem bir yüzey bulmayı gerektirir. Bu yüzey parametrik olarak (3.37) formunda tanımlanabilir. Öyle ki yüzey (kapalı) γ uzay eğrisini içerir ve $\gamma, \vec{r}_0: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ile tanımlanır. Burada,

$$r_0(x, y) = (x, y, u_0(x, y))$$

yüzey alanı, γ uzay eğrisini içeren diğer düzgün yüzeylerle kıyaslandığında minimumdur. Euler-Lagrange denklemi,

$$(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0 \quad (3.39)$$

denklemine indirgenir. Burada,

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dır. Bir yüzeyin ortalama eğriliği parametrik olarak ((3.37) formunda),

$$\mathcal{H} = \frac{(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ile verilir. Böylece minimal yüzey probleminin çözümleri geometrik olarak,

$$\mathcal{H} = 0$$

şartı ile karakterize edilir.

Eğer J, u da bir ekstremuma sahip ise u ,

$$Ar + 2Bs + Ct + D = 0 \quad (3.40)$$

formundaki bir denklemi sağlamak zorundadır. Burada A, B, C ve D, x, y, u, p ve q değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. Böylece Euler-Lagrange denklemi, u ekstremali için quasi-lineer ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklemdir. Bu tür denklemleri içeren sınır değer problemlerini çözmek oldukça zordur ve belirli problemler için çözümlerin varlığı ve tekliği ile ilgili soruların cevaplanması zor olabilir. Bu problemler için sınır şartları, çözüm metodunda merkezi bir rol oynar ve burada, tek değişkenli durumda kendilerini güçlü bir şekilde ortaya koymayan sorunlar vardır. İyi bir sınır-değer probleminin tek bir çözümü vardır ve çözüm, sınır şartlarının küçük pertürbasyonlarına göre kararlıdır.

Bazı durumlarda Euler-Lagrange denklemini sınıflandırmak mümkündür. (3.40) diferansiyel denklemine,

- a) Hiperbolik, eğer $AC - B^2 < 0$ ise
- b) Parabolik, eğer $AC - B^2 = 0$ ise,
- c) Eliptik, eğer $AC - B^2 > 0$ ise

denir. Sınıflandırma, integral yüzeyindeki karakteristikler bir özel eğri sınıfının varlığına dayanır. Bir karakteristik, integral yüzeyi üzerinde bir egridir. Bu eğri boyunca diferansiyel denklem ve başlangıç/sınır değerleri, tüm ikinci dereceden türevleri tek olarak belirlemez. Hiperbolik denklemler, iki reel karakteristik aileli integral yüzeylere sahiptir. Parabolik denklemlerin, bir karakteristiği olan integral yüzeyleri vardır. Eliptik denklemler, reel karakteristikleri olmayan integral yüzeylere sahiptir. Karakteristiklerin varlığı, problemin tipini güçlü bir şekilde etkiler.

Genelde A, B ve C katsayıları, x, y, u, p ve q değişkenlerine bağlı olduğundan Euler-Lagrange denklemini, yukarıdaki kategorilerden birine sokmaya gerek yoktur. Bu katsayıların işaretleri ve büyüklükleri bir denklemi Ω daki bazı noktalarda hiperboliğe, diğer noktalarda eliptiğe değiştirebilir. Daha da önemlisi, katsayılar çözümün kendisine bağlı olabilir. Gerçekten de sınıflandırma, denkleme, bölgeye ve çözüme bağlıdır. Yine de öyle durumlar vardır ki burada denklem, çözümü bilmeden sınıflandırılabilir. Örneğin eğer katsayıların tamamı sabit ise o zaman sınıflandırma sadece bu sabitlere bağlıdır. (3.36) Laplace denklemi açıkça eliptiktir.

$$r - t = 0$$

dalga denklemi açıkça hiperboliktir. (3.39) denkleminin de eliptik olduğu gösterilebilir (Van Brunt, 2004).

3.8. Yüksek Mertebeden Türevler İçeren Fonksiyoneller

Euler-Lagrange denklemine götüren argümanlar, yüksek mertebeden türevler içeren fonksiyonellere genişletilebilir. Doğal olarak fonksiyon uzayları, yüksek mertebeden türevlerden oluşan ilave kısıtlamalar içermelidir.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1$$

formundaki sınır koşulları ile beraber,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', y'') dx$$

formundaki bir fonksiyoneli ele alalım. Burada varsayalım ki f, x, y, y', y'' ne göre sürekli üçüncü mertebeden kısmi türevlere sahiptir ve $y \in C^4[x_0, x_1]$ dir. Dolayısıyla S kümesi,

$$S = \{y \in C^4[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y(x_1) = y_1, y'(x_1) = y'_1\}$$

ve H kümesi de

$$H = \{\eta \in C^4[x_0, x_1]: \eta(x_0) = \eta'(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_1) = 0\}$$

ile tanımlanır.

Varsayalım ki J, S deki $y \in S$ de bir yerel minimuma sahiptir. $\hat{y} = y + \varepsilon\eta$ olsun ve $J[\hat{y}] - J[y]$ farkını ele alalım. Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} f(x, \hat{y}, \hat{y}', \hat{y}'') &= f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', y'' + \varepsilon\eta'') \\ &= f(x, y, y', y'') + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

ve sonuç olarak,

$$J[\hat{y}] - J[y] = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx + O(\varepsilon^2)$$

olur. Böylece bu fonksiyonelin birinci varyasyonu,

$$\delta J[\eta, y] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx$$

elde edilir. Eğer J, y de bir yerel ekstremuma sahip ise tüm $\eta \in H$ için

$$\delta J[\eta, y] = 0 \quad (3.41)$$

birinci varyasyon sifıra eşittir. η nın türevlerini elemek için kısmi integrasyon yapabiliriz. Birinci varyasyonda η'' nün varlığı, iki kere kısmi integrasyon yapılması gerektiğini gösterir.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} dx &= \eta' \frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx \\ &= -\eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx = \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx \end{aligned}$$

olur, burada sınır şartları $\eta(x_0) = 0, \eta'(x_0) = 0, \eta(x_1) = 0, \eta'(x_1) = 0$ dır. $\eta(x_0) = 0$ ve $\eta(x_1) = 0$ sınır şartlarını kullanırsak,

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx$$

elde edilir. Böylece (3.41) şartı,

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right\} dx = 0 \quad (3.42)$$

denklemine indirgenir. Bu denklem tüm $\eta \in H$ için sağlanmak zorundadır. f integrantının üçüncü dereceden sürekli kısmi türevlere sahip olduğunu varsayarsak herhangi bir $y \in C^4[x_0, x_1]$ için,

$$E(x) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right)$$

terimi, $[x_0, x_1]$ aralığında sürekli olmak zorundadır. y , dördüncü dereceden

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.43)$$

Euler-Lagrange denklemini sağlamak zorundadır. Yukarıdaki denklem, bir $y \in S$ fonksiyonunun J fonksiyonelinin bir ekstremali olması için gerekli şarttır (Gelfand ve Fomin, 1963; Van Brunt, 2004).

Örnek 3.8.1.

$$J[y] = \int_0^1 ((y'')^2 - 2\rho y) dx$$

olsun. Burada ρ bir sabittir ve $y(0) = y'(0) = 0$ ve $y(1) = y'(1) = 1$ dir. Bu fonksiyonel için Euler-Lagrange denklemi,

$$y^{iv}(x) = \rho$$

şeklindedir. Bu denklemin genel çözümü,

$$y(x) = \frac{1}{4!} \rho x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

olur, burada c_k lar sabittir. $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ şartlarına göre $c_4 = c_3 = 0$ dir. $y(1) = 1$ ve $y'(1) = 1$ şartlarına göre ise $\frac{\rho}{4!} + c_1 + c_2 = 1$ ve $\frac{\rho}{3!} + 3c_1 + 2c_2 = 1$ dir.

Böylece $c_1 = -1 - \frac{\rho}{12}$ ve $c_2 = 2 + \frac{\rho}{24}$ tür. Dolayısıyla ekstremal

$$y(x) = \frac{\rho}{24} - \left(1 + \frac{\rho}{12}\right) x^3 + \left(2 + \frac{\rho}{24}\right) x^2$$

olur.

(Bölüm 3.5.1) deki gibi sonuçların yüksek dereceden türevler içeren fonksiyoneller için benzerleri vardır. İkinci mertebeden durum için eğer integrant y yi içermiyorsa o zaman açıktır ki Euler-Lagrange denklemi için integral elde edilebilir.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{sabit}$$

eğer integrant x değişkenini içermiyorsa herhangi bir ekstremal boyunca

$$H(y, y', y'') = y'' \frac{\partial f}{\partial y''} - y' \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) - \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - f = \text{sabit} \quad (3.44)$$

olur (Van Brunt, 2004).

4. KLASİK MEKANİKTE VARYASYONLAR HESABI

4.1. Klasik Mekanik

Mekanik, fiziğin en eski dalıdır. Makroskopik ölçekteki cisimlerin, yani gündelik hayatımızda karşılaştığımız boyutlardaki cisimlerin konumlarının zamanla değişmesi veya durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesiyle ilgili problemleri inceler. Üç alt dala ayrılabilir:

- 1) Kinematik: Cisimlerin konumlarının (zamanla) değişimini, yani hareketlerini ele alır.
- 2) Dinamik: Cisimlerin konumlarının değişmesine yol açan nedenler bilindiğinde cisimlerin hareketlerinin özelliklerinin nasıl bulunacağını gösterir.
- 3) Statik: Cisimlerin durum ve yapılarının bozulmadan kalabilmesi, yani dengede olabilmeleri için gerekli koşulları saptar.

İnsanların gündelik gereksinimlerine yanıt veren bazı basit sistemlerle, örneğin kaldıraç veya durağan dengede bulunan akışkanlarla ilgili kurallar milattan önce üçüncü yüzyılda biliniyordu. Bütün bu bilgilere karşılık mekaniğin genel yasalarını ortaya koyan Sir Isaac Newton olmuştur. Newton'a uygun bilgi ortamını sağlayan ise Galilei'nin ve çağdaşı bazı araştırmacıların, yaptıkları deneylerden elde edilen sonuçlara dayanarak, geliştirdikleri fikirlerdir. Newton yasaları adını alan üç temel yasa üzerine kurulan mekanik, 19. yüzyılda başta d'Alembert, Lagrange, Hamilton, Jacobi olmak üzere pek çok araştırmacının katkılarıyla neredeyse kusursuz bir sistematik yapıya kavuşturulmuştur. Newton yasaları üzerine kurulan bütün yapı, bugün Klasik Mekanik olarak; 19. yüzyılda geliştirilen sistematik yapıysa Analitik Mekanik olarak isimlendirilmektedir (Rızaoğlu ve Sünel, 2008).

4.2. Eylem Fonksiyoneli ve Lagrange Fonksiyonu

Mekaniksel sistemin hareket denkleminin genel tanımını Hamilton prensibi olarak adlandırılan en küçük etki prensibi ile belirlenebilir. Bu prensibe göre herhangi bir mekaniksel sistem, belirli bir fonksiyon $L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ ile ifade

edilebilir. Bu L fonksiyonunu $L(q, \dot{q}, t)$ ile göstereceğiz. Sistemin hareketi aşağıdaki şartları sağlamak zorundadır:

Varsayalım ki, $t = t_1$ ve $t = t_2$ zamanlarında sistemin uzaydaki yerini $q^{(1)}$ ve $q^{(2)}$ koordinatları belirtsin. Hamilton prensibine göre sistem bu iki nokta arasında öyle bir yörünge boyunca hareket etmelidir ki,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

integrali en küçük değere sahip olsun. S integraline eylem denir. Sistemin koordinatları ve hızları onu kesinlikle belirttiğinden, sistemin Lagrange fonksiyonu koordinatın daha yüksek mertebeden türevlerine bağlı değildir (Arnold, 1989; Bliss, 1946; Giaquinta ve Hildebrandt, 1996; Goldstein, 1980; Landau ve Lifshitz, 1976).

$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ fonksiyonuna sistemin Lagrange fonksiyonu denir. Burada q_s ler, fiziksel sistemin genelleşmiş koordinatları (sistemin uzaydaki yerini belirleyen, aynı birimde olmak zorunda olmayan nicelikler), \dot{q}_s lar genelleşmiş hızlar (genelleşmiş koordinatların zamana göre tam türevleri), t zaman ve s , sistemin serbestlik derecesidir (sistemi tanımlamak için gerekli bağımsız büyüklüklerin sayısıdır). T , fiziksel sistemin toplam kinetik enerjisi ve U da potansiyel enerjisi olmak üzere Lagrange fonksiyonu,

$$L = T - U$$

şeklinde tanımlanır (Forsyth, 1927; Gelfand ve Fomin, 1963; Landau ve Lifshitz, 1976).

4.3. Birkaç Bağımlı Değişken Durumu

Varyasyonel problemler tipik olarak birkaç bağımlı değişkene bağlı fonksiyonelleri içerir. Örneğin klasik mekanikte bir tek parçacığın konumunu tanımlamak için üç bağımlı değişken $(x(t), y(t), z(t))$ gereklidir. Burada birkaç bağımlı değişkene ve tek bir bağımsız değişkene bağlı fonksiyoneller için Euler-Lagrange denklemleri türetilmiştir.

$C^2[t_0, t_1]$, $\vec{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonlar kümesini gösterebilir. Öyle ki $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ için $q_k \in C^2[t_0, t_1]$ dir ($k = 1, 2, \dots, n$). $C^2[t_0, t_1]$ bir vektör uzayıdır ve

$$\|\vec{q}\| = \max_{k=1,2,\dots,3} \sup_{t \in [t_0, t_1]} |q_k(t)|$$

gibi bir norm, bu uzayda tanımlanabilir. Tek bağımlı değişken durumunda olduğu gibi, normun seçimi uygulamaya bağlıdır.

$$J[\vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt \quad (4.1)$$

formunda bir fonksiyonel alınsın. Burada (\cdot) , t ye göre türevdir ve L , t , q_k , ve \dot{q}_k ya göre sürekli ikinci dereceden kısmi türevlere sahip bir fonksiyondur ($k = 1, 2, \dots, n$). Verilmiş iki $\vec{q}_0, \vec{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ vektörü için sabit uç noktalı problem, $\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0$ ve $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_1$ şartları altında J için yerel ekstremumları belirlemekten ibarettir. Burada,

$$S = \{\vec{q} \in C^2[t_0, t_1]: \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0 \text{ ve } \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1\}$$

şeklindedir. Yine bir $\hat{\vec{q}}$ yakın fonksiyonunu

$$\hat{\vec{q}} = \vec{q} + \varepsilon \eta$$

pertürbasyonu olarak gösterebiliriz. Burada $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$. Bu durum için,

$$H = \{\eta \in C^2[t_0, t_1]: \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0\}$$

olur.

Yeteri kadar küçük ε için, Taylor teoremine göre,

$$L(t, \hat{\vec{q}}, \dot{\hat{\vec{q}}}) = L(t, \vec{q} + \varepsilon \eta, \dot{\vec{q}} + \varepsilon \dot{\eta}) = L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \varepsilon \sum_{k=1}^n \left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + O(\varepsilon^2)$$

olur ve sonuç olarak,

$$\begin{aligned} J[\hat{\vec{q}}] - J[\vec{q}] &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \hat{\vec{q}}, \dot{\hat{\vec{q}}}) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt \\ &= \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu fonksiyonel için birinci varyasyon,

$$\delta J[\eta, \vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^n \left(\eta_k \frac{\partial L}{\partial q_k} + \dot{\eta}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) dt$$

yazılır. Eğer J , \vec{q} da bir yerel ekstremuma sahip ise o zaman \vec{q} nun bir ekstremal olması için gerekli şart, tüm $\eta \in H$ için,

$$\delta J[\eta, \vec{q}] = 0 \quad (4.2)$$

olmasıdır. (4.2) şartı, n tane keyfi fonksiyonun ve bu fonksiyonların türevlerini ihtiva ettiğinden ötürü daha karmaşıktır. Ancak $\eta \in H$ fonksiyonlarını uygun seçmek problemi kolay çözülebilir hale getirebilir. $H_1 = \{(\eta_1, 0, \dots, 0) \in H\}$ ile tanımlanan fonksiyonlar kümesini ele alalım. (4.2) şartı tüm $\eta \in H_1$ için sağlanmak zorundadır ve herhangi bir $\eta \in H_1$ için bu şart,

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\eta_1 \frac{\partial L}{\partial q_1} + \dot{\eta}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) dt = 0 \quad (4.3)$$

şartına indirgenir. Biliyoruz ki bu şart, bir ekstremal için gerekli şart olarak,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

Euler-Lagrange denklemine götürür. Yukarıdaki yaklaşım, J nin, \vec{q} da bir yerel ekstremuma sahip olması için (H nin uygun bir alt kümesinin seçimi ile) uyarlanabilir.

Bu taktirde,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

.

.

.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0$$

olur. Yukarıdaki şart, n tane bilinmeyen q_1, q_2, \dots, q_n fonksiyonları için n tane ikinci dereceden diferansiyel denklemden oluşan bir sistemdir. Belirtmek gerekir ki eğer \vec{q} , bu sistemi sağlarsa o zaman (4.2) şartı, herhangi bir $\eta \in H$ için sağlanır. Özetle aşağıdaki sonucu verebiliriz (Bliss, 1946; Van Brunt, 2004).

Teorem 4.3.1. $J: C^2[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J[\vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt$$

formunda bir fonksiyon olsun. Burada $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ve $L, k = 1, 2, \dots, n$ için t, q_k ve \dot{q}_k ya göre ikinci dereceden kısmi türevleri süreklidir.

$$S = \{ \vec{q} \in C^2[t_0, t_1] : \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0 \text{ ve } \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1 \}$$

olsun. Burada $\vec{q}_0, \vec{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ verilmiş vektörlerdir. Eğer \vec{q}, J için S de bir ekstremal ise $k = 1, 2, \dots, n$ için,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (4.4)$$

yazılır (Lanczos, 1970; Van Brunt, 2004).

4.3.1. Serbest düşme hareketi

Yerden h kadar yüksekten serbest bırakılan m kütleli bir cismin hareketini ele alalım. Bu hareketi önce Newton ile sonra da Lagrange formülasyonu ile inceleyelim. Cismin hareket yönü, $+y$ yönü olarak seçilsin. Cisim ilk hızsız olarak sadece yerçekiminin etkisi altında \vec{g} ivmesi ile hareket edecektir. Bu durumda cismin ivmesi Newton formülasyonuna göre (bir boyutlu hareket için vektörel denkleme yazmaya gerek olmadığı hatırlanarak),

$$a = g = \frac{dv}{dt} \quad (4.5)$$

olarak yazılır. Bu denklemin çözümü,

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$$

şeklindedir. Cisim, ilk hızsız serbest bırakıldığı için, $c_1 = 0$ ve $c_2 = h$ olmalıdır. Bu durumda çözüm,

$$y(t) = h + \frac{1}{2}gt^2$$

olur.

Aynı problemi Lagrange formülasyonu ile çözelim. Cismin Lagrange fonksiyonu, $L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$ yani kinetik enerji ile potansiyel enerjinin farkıdır. Bu taktirde Euler-Lagrange denklemi,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü

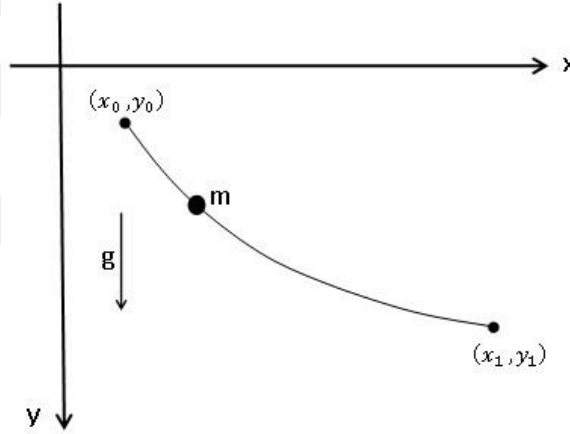
$$\dot{y} = g \quad (4.6)$$

olur, bu da (4.5) denkleminin kendisidir.

4.4. Varyasyonlar Hesabının Başlangıcı: Brachystochrone Problemi

Bir tel boyunca durgun halden sadece kütle çekiminin etkisi ile kayan bir boncuğun başlangıç noktasından bitiş noktasına en kısa zamanda varabilmesi için yörüngenin geometrik formu ne olmalıdır (Şekil 4.1)?

Brachystochrone problemi bu sorunun cevabını arar. Brachystochrone en kısa zaman demektir. Burada toplam mekanik enerji sürtünme olmadığından kaybolmayacaktır.



Şekil 4.1. Brachystochrone problemi.

$$T + U = E = \text{sabit}$$

olduğundan, potansiyel enerjideki değişim, kinetik enerjideki değişimin negatifine eşit olacaktır. Yani,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

Buradan,

$$v = \sqrt{2gy}$$

yazılabileceği hemen görülür. İniş zamanını, iniş eğrisinin bir fonksiyoneli olarak yazarsak,

$$T = J[y] = \int \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

olur ($1/2g$ çarpanı sabit olduğundan, fonksiyonele dahil edilmemiştir). (Bölüm 3.5.2) deki özel durum göz önüne alındığında,

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{(1 + y'^2)}} = c$$

veya

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{c^2} = c_1$$

olur. Burada $y' = \tan \theta$ dönüşümü yapıldığında

$$y(1 + \tan^2 \theta) = c_1$$

$$y = c_1 \cos^2 \theta$$

$$y = c_1 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

denklemden $c_3 = \frac{c_1}{2}$ olarak alındığında

$$y = c_3 + c_3 \cos 2\theta$$

$$dy = -2c_3 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$dx = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} dy = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-2c_3 \cos \theta \sin \theta d\theta)$$

$$x = c_4 - \frac{2c_3}{2} - c_3 \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$x = c_4 - 2c_3 \theta - c_3 \sin 2\theta$$

$x(\theta)$ ve $y(\theta)$ çözümleri, cycloid eğrisinin parametrik denklemleri elde edilir (Caratheodory, 1999; Goldstein, 1980; Van Brunt, 2004).

4.5. Örnekler

Örnek 4.5.1.

$$J[\vec{q}] = \int_0^1 \left(\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2^2 - 1)^2 + q_1^2 + q_1 q_2 \right) dt$$

ve $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$, $\vec{q}(1) = \vec{q}_1$ olsun. Bu fonksiyonel için Euler-Lagrange denklemleri,

$$\ddot{q}_1 - q_1 - \frac{1}{2}q_2 = 0 \quad (4.7)$$

$$\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}q_1 = 0 \quad (4.8)$$

denklem sistemine karşılık gelir. (4.8) denklemi, q_1 i (4.7) denkleminde elemek için kullanılabilir ve bu dördüncü dereceden bir denklem verir:

$$2q_2^{(iv)} - 2\ddot{q}_2 - \frac{1}{2}q_2 = 0 \quad (4.9)$$

Bu lineer diferansiyel denklem için karakteristik denklem,

$$2\mu^4 - 2\mu^2 - \frac{1}{2} = 0$$

yukarıdaki gibidir ve bu denklemin kökleri,

$$\mu_1, \mu_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \in \mathbb{R},$$

$$\mu_3, \mu_4 = \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm im, m \in \mathbb{R}$$

şeklindedir. Böylece (4.9) denkleminin genel çözümü,

$$q_2(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} + c_3 \cos(mt) + c_4 \sin(mt)$$

olur, burada c_k lar, $\vec{q}(0) = \vec{q}_0$, $\vec{q}(1) = \vec{q}_1$ sınır şartları ile belirlenen sabitlerdir. $q_1(t)$ fonksiyonu da (4.8) denklemi kullanılarak $q_2(t)$ den çıkarılabilir. Eğer L , t ye açık bağlı değilse gösterilebilir ki herhangi bir ekstremal boyunca,

$$H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \text{sabit}$$

elde edilir (Van Brunt, 2004).

Örnek 4.5.2. İki boyutta Fermat ilkesi

Klasik mekanik varyasyonel ilkelerle doludur ve bunlardan biri olan Fermat ilkesi şunu ifade eder: Işık uzayda herhangi iki nokta arasında hareket ederken en az zaman harcayacağı yolu tercih eder. İki boyutlu uzayda Fermat ilkesini varyasyonel formda yazarsak,

$$T = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} ds \quad (4.10)$$

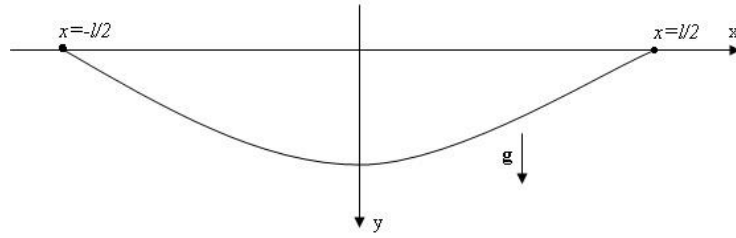
olur. Burada c , ışığın boşluktaki hızıdır ve bu hız sabit olduğundan (4.10) deki fonksiyonel

$$J[y(x)] = \int ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y_x^2} dx \quad (4.11)$$

formunda yeniden yazabilir (Gelfand ve Fomin, 1963; Lanczos, 1970; Van Brunt, 2004).

Örnek 4.5.3. Zincir problemi

Aynı yükseklikte ve aralarında h kadar mesafe olan iki noktaya uçları sabitlenmiş olarak asılmış bir esnek zincir düşünölsün (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Zincir eğrisi.

Zincirin aldığı şekli bulmak isteyelim. (Şekil 4.2) de göröldüğü gibi zincir 2-boyutlu uzayda yukarıdaki gibi bir biçim alacaktır. Zincirin kesit alanı ve kütle yoğunluğu ρ , sabit olsun.

Zincir sadece kendi ağırlığının etkisi altındadır. Bu durumda zincirin denge durumunda alacağı şekli bulmak için potansiyel enerjisini minimum yapmamız gerekir (Van Brunt, 2004). Zincirin ds birim uzunluğunun potansiyel enerjisi,

$$dU = \rho g y$$

olacaktır. Burada g yerçekimi ivmesi, y ise seçilen birim uzunluğun, potansiyel enerjinin sıfır noktasından olan yüksekliğidir. Toplam potansiyel enerji, yüksekliğin fonksiyoneli olarak yazılabilir.

$$U[y] = \int_{-l/2}^{l/2} \rho g y ds = \int_{-l/2}^{l/2} \rho g y \sqrt{1 + y_x^2} dx$$

Burada $y_x = dy/dx$. ρg bir sabit olduğundan, potansiyel enerji için fonksiyoneli aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$J[y] = \int_{-l/2}^{l/2} y \sqrt{1 + y_x^2} dx$$

Bu fonksiyoneli minimum yapan $y(x)$ fonksiyonunu bulmak için varyasyonun sıfıra eşitlenmesi gerekir. Bu durumda

$$\delta J[y] = 0,$$

olur.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Euler denkleminde eşdeğerdir. Burada $f(x, y, y_x) = y \sqrt{1 + y_x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y_x} = \frac{y y_x}{\sqrt{1 + y_x^2}}$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{1 + y_x^2}$$

ifadelerini Euler denkleminde yerine yazarak,

$$y y_{xx} - y_x^2 - 1 = 0$$

denkleminde ulaşırız. Bu denklem, ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemdir ve burada $y_{xx} = d^2 y / dx^2$ dir. Bu diferansiyel denklemi çözmek için

$$y_x = u(x, y)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{udu}{u^2 + 1} = \frac{dy}{y}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem, değişkenlerine ayrılabilir formdadır ve denklemin her iki tarafının integrali alınabilir. İntegrasyon sonucunda,

$$u = \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}$$

denklemine ulaşılır. Burada c_1 integrasyon sabitidir. $y_x = u(x, y)$ dönüşümünü kullanırsak,

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1}} = dx$$

denklemini elde ederiz. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$x + c_2 = c_1 \ln \left(\frac{y}{c_1} + \sqrt{\frac{y^2}{c_1^2} - 1} \right) = c_1 \cosh^{-1} \left(\frac{y}{c_1} \right)$$

sonucuna ulaşılır. Burada c_2 , başka bir integrasyon sabitidir. Bu denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$y = c_1 \cosh \left(\frac{x}{c_1} + c_3 \right)$$

Burada $c_3 = c_2/c_1$ dir. $x = 0$ da $y_x = 0$ olduğundan $c_3 = 0$ olur. Böylece esnek kablunun alacağı şekli belirleyen fonksiyon,

$$y(x) = c_1 \cosh \left(\frac{x}{c_1} \right)$$

elde edilir.

5. İKİNCİ VARYASYON

Euler-Lagrange denklemi, bir fonksiyonelin bir ekstremuma sahip olması için gerekli şartların en önemli kısmını oluşturur. Euler-Lagrange denklemi, sonlu boyuttaki optimizasyon problemleri olan birinci türev testine benzerdir. Temel analizden bilindiği üzere sıfıra eşit olan ilk türev, yerel minimum / maksimum için yeterli şart değildir. Aynı şekilde Euler-Lagrange denkleminin sağlanması, fonksiyonelin yerel minimumu için yeterli şart değildir. Euler-Lagrange denkleminin bir çözümünün yerel minimum ürettiğini iddia etmek için ikinci türev testine benzer bir sonuca ihtiyaç vardır. Bu bölümde yerel minimumlar / maksimumlar için gerekli şartlar ele alınmıştır.

5.1. Sonlu Boyutlu Durum

Bir kararlı noktanın tek değişkenli bir fonksiyonda bir yerel ekstremum olup olmadığını belirlemek için ikinci türev testi gereklidir.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ bölgesinde bir düzgün fonksiyon ve $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\hat{x} = x + \varepsilon \eta$ olsun. Eğer ε yeteri kadar küçük ise Taylor teoremine göre,

$$f(\hat{x}) = f(x) + \varepsilon \left\{ \eta_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right\} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left\{ \eta_1^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + 2\eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \right\} + O(\varepsilon^3)$$

olur. Eğer f , x te bir kararlı noktaya sahip ise o zaman $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = 0$ ve denklem

$$f(\hat{x}) = f(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \varphi(\eta) + O(\varepsilon^3) \quad (5.1)$$

formuna indirgenir. Burada,

$$\varphi(\eta) = \eta_1^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + 2\eta_1 \eta_2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + \eta_2^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$$

ile verilmiştir. Bir kararlı noktanın doğası, x te sıfır olmayan en küçük mertebeli türevler ile belirlenir. Eğer ikinci türevlerden biri sıfırdan farklı ise o zaman $f(\hat{x}) - f(x)$ in işareti φ nin işareti ile kontrol edilir.

Sıfırdan farklı $\eta \in \mathbb{R}^2$ için karesel terimler daima pozitif veya daima negatif olabilir fakat bu terim bazı η lar için pozitif bazıları için negatiftir. Ekstreumun

karakteri, φ nin (η nın seçimine bağlı olarak) işaretinin etrafında döner. $\varphi(\eta) = 0$ olduğunda işaret değişimleri takip edilebilir. Eğer $\eta \neq 0$ ise o zaman ya η_1 ya da η_2 sıfırdan farklıdır. Genelliği kaybetmemek için $\eta_2 \neq 0$ olarak alalım. φ , η nın sürekli bir fonksiyonudur ve eğer φ işaret değiştirir ise bazı η lar için $\eta \neq 0$ olmalıdır ki $\varphi(\eta) = 0$ olsun. Böylece,

$$\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} = 0$$

karesel denklemi için bir reel çözüm olmak zorundadır. Bu denklemin çözümlerinin doğası, x te φ kuadratik formunun,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

diskriminantı ile belirlenir. Bu karesel denklemin en fazla iki çözümü olabilir. Eğer reel çözümler var ise o zaman φ işaret değiştirebilir. Eğer karesel denklemin reel çözümleri yok ise o zaman bir sürekli fonksiyon olarak φ , asla işaret değiştirmez. $\varphi = 0$ in aşıkâr olmayan çözüme sahip olup olmadığı Δ nın işaretine bağlıdır. Eğer $\Delta(x) < 0$ ve $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \neq 0$ (veya $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \neq 0$) ise o zaman φ belirsizdir ve iki farklı çizgi boyunca sıfır olur. Bu durum için x in bir küçük komşuluğu $B(x; \varepsilon)$, dört kısma ayrılabilir. Bu kısımların ikisinde $\varphi > 0$ ve diğer ikisinde ise $\varphi < 0$ dır. Bu durumda φ ye belirsiz denir. Açıkça görüldüğü gibi x , yerel ekstremum üretmez çünkü $f(\hat{x}) - f(x)$ in işareti, η nın seçimine bağlıdır. $\Delta(x) < 0$ için olan kararlı noktalara semer noktaları denir.

Tersine, eğer $\Delta(x) > 0$ ise o zaman karesel denklemin reel çözümleri yoktur. Sonuç olarak φ , işaretini değiştirmez. Bu durumda φ ye tanımlı denir ve x , bir yerel ekstremuma karşılık gelir. Ekstreum tipine, x ten geçen herhangi bir özel eğrinin incelenmesi ile karar verilebilir. En basit olarak böyle eğriler, $\gamma_1(\eta_1) = (\eta_1, 0)$ ve $\gamma_2(\eta_2) = (0, \eta_2)$ e karşılık gelir. Eğer x , bir yerel maksimum/minimum ise $\eta_1 = 0$, $\gamma_1(\eta_1)$ için bir yerel maksimum/minimum karşılık gelir ($\eta_2 = 0$, $\gamma_2(\eta_2)$ için bir yerel maksimum/minimum karşılık gelir). Böylece eğer $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} < 0$ (veya $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} < 0$) ise $f(x)$ bir yerel maksimum ve eğer $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} > 0$ (veya $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} > 0$) ise $f(x)$ bir yerel

minimumdur. f in, x te ikinci türevlerinin tamamı sıfır olmasa dahi $\Delta(x) = 0$ olabilir. Bu durumda $B(x; \varepsilon)$ da $x = (x_1(0), x_2(0))$ dan geçen bir doğru vardır ve burada φ sıfır olur. Eğer $\Delta(x) = 0$ ise o zaman x e bir dejenere kararlı nokta denir. Kararlı noktanın doğasını belirlemek için açılımdaki kübik terimler incelenmelidir. Eğer x te, f in tüm ikinci türevleri sıfır olursa o zaman $f(\hat{x}) - f(x)$ in işareti üçüncü türevler ile belirlenir. Yerel minimum için bunlar x te sıfır olmak zorundadır. Durum bu şekilde ise dördüncü dereceden terimlerin işaretleri incelenmelidir.

Yukarıdaki yaklaşım üç veya daha fazla bağımsız değişkenli fonksiyonlara uyarlanabilir.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^4$ bölgesinde bir düzgün fonksiyon olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$, bir kararlı noktadır. O zaman, aynı iki değişkenli durumda olduğu gibi, $\nabla f(x) = 0$ dır. $f(x) - f(\hat{x})$ nün işareti, Taylor açılımındaki ikinci dereceden terimler tarafından kontrol edilir. $\hat{x} = x + \varepsilon\eta$ ve $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ olsun. Taylor açılımındaki karesel terimler,

$$\varphi(\eta) = \eta^T H(x) \eta$$

formunda yazılabilir. Burada H , f için x te Hessian matrisidir.

$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Bir kararlı noktanın doğası, H matrisinin tanımlı olup olmadığına bağlıdır. Eğer H tanımlı ise o zaman f , x te bir yerel minimuma sahiptir; eğer H tanımsız ise o zaman x , bazı eğer noktası tiplerine karşılık gelir. Morse Lemması, kararlı noktada Hessian matrisinin bağımsız değişkenlerinin sayısı ile aynı ranka sahip olduğu sürece, kararlı noktaların tipini sınıflandırmak için kullanılabilir. Bu şartı sağlayan kararlı noktalara non-dejenere denir (Van Brunt, 2004).

5.2. Morse Lemması

x_0 , f düzgün fonksiyonu için bir non-dejenere kararlı nokta olsun. O zaman öyle bir düzgün tersinir koordinat dönüşümü $x_j \rightarrow x_j(v)$ vardır ki $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, x_0 ın bir $N(x_0)$ komşuluğunda tanımlıdır

$$f(x) = \hat{f}(v) = f(x_0) - v_1^2 - v_2^2 - \dots - v_\lambda^2 + v_{\lambda+1}^2 + \dots + v_n^2$$

özdeşliği, $N(x_0)$ boyunca sağlanır. λ tamsayısına x_0 da f in indisi denir.

$$v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_\lambda^2 - v_{\lambda+1}^2 - \dots - v_n^2$$

fonksiyonuna bir Morse λ -eyeri denir. İndis, düzgün tersinir koordinat dönüşümleri altında bir değişmezdir. Böylece non-dejenere kararlı noktaları sınıflandırmak için kullanılabilir. Bir Morse n -eyeri bir yerel maksimumdur. Bir Morse 0-eyeri bir yerel minimumdur. Eğer λ , 0 veya n değil ise o zaman Morse λ -eyeri gösterir ki $f(x) - f(\hat{x})$ farkı, x in seçimine bağlı olarak pozitif veya negatif olabilir. Morse lemmasının bir diğer sonucu ise şudur: Kararlı eyer noktaları izoledirler ve düzgün tersinir koordinat dönüşümleri izole kararlı noktaları izole bıraktığından tüm non-dejenere kararlı noktalar izole olmak zorundadır (Van Brunt, 2004).

5.3. Sylvester Kriteri

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ olsun ve A , bileşenleri a_{ij} olan bir $n \times n$ simetrik matrisi gösterebilir. Bir $X^T A X$ kuadratik formun pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart şudur: A nın her bir ana minör determinanı pozitif olmalıdır. Özel olarak, $\det A > 0$ ve her bir köşegen elemanı a_{jj} pozitifdir.

Varsayalım ki x , f için bir kararlı noktadır ve

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

x teki Hessian matrisini gösterebilir. $h_{11} > 0$ ise kuadratik form pozitif tanımlıdır ve

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & h_{kk} \end{pmatrix}$$

matrislerinin determinantları, $k \in \mathbb{N}, k \leq n$ için pozitifdir. Eğer $X^T(-H)X$ pozitif tanımlıysa kuadratik form negatif tanımlıdır (Van Brunt, 2004).

5.4. İkinci Varyasyon

Temel, sabit uç noktalı varyasyonel problem ele alınsın. Burada $y: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ şartı ile

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx \quad (5.2)$$

fonksiyoneli ekstremum yapan fonksiyon olsun. Varsayalım ki herhangi bir y ekstremali için $f(x, y(x), y'(x))$, x_0 in ve x_1 in bir komşuluğunda düzgündür. J, y de bir ekstremuma sahiptir. $\hat{y}, \hat{y}' = y + \varepsilon \eta$ formunda yakın bir fonksiyondur. Burada $\varepsilon > 0$ yeterince küçüktür ve $\eta, [x_0, x_1]$ üzerinde bir düzgün fonksiyondur. Öyle ki $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ olmak üzere $J[\hat{y}] - J[y]$ nin $O(\varepsilon^2)$ terimlerine bakmamız gereklidir. Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} f(x, \hat{y}, \hat{y}') &= f(x, y, y') + \varepsilon \left(\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\varepsilon}{2!} \left(\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\eta\eta' \frac{\partial^2 f}{\partial y y'} + \eta'^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right) \\ &+ O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

olur. Burada kısmi türevler (x, y, y') de değer almıştır.

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{yy'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y y'}, \quad f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$$

Dolayısıyla,

$$J[\hat{y}] - J[y] = \varepsilon \delta J[\eta, y] + \frac{\varepsilon}{2!} \delta^2 J[\eta, y] + O(\varepsilon^3)$$

olur, burada $\delta J[\eta, y]$ birinci varyasyondur ve ikinci varyasyon

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} (\eta^2 f_{yy} + 2\eta\eta_x f_{yy'} + \eta_x^2 f_{y'y'}) dx$$

şeklindedir. y, J için bir ekstremal olduğundan, $\delta J[\eta, y] = 0$ dır. Böylece

$$J[\hat{y}] - J[y] = \frac{\varepsilon}{2!} \delta^2 J[\eta, y] + O(\varepsilon^3)$$

olur. Dolayısıyla $J[\hat{y}] - J[y]$ nin işareti, $\delta^2 J[\eta, y]$ e bağlıdır. Sonuç olarak ekstremalin doğası, η nın farklı seçimleri için ikinci varyasyonun işaret değiştirip değiştirmediğine bağlıdır. Bu aşamada çözülmüş Euler-Lagrange denklemi vardır ve böylece y bilinmektedir. Dolayısı ile $f_{yy}, f_{yy'}$ ve $f_{y'y'}$ fonksiyonları da x cinsinden bilinmektedir. Bu durum, sonlu boyutlu durumdakine paraleldir ve sonlu boyutlu durumda Hessian matrisinin bileşenlerinin sayısal değerleri bilinir (Forsyth, 1927; Gelfand ve Fomin, 1963; Bliss, 1946; Bolza, 1904).

Teorem 5.4.1. $[x_0, x_1]$ üzerindeki düzgün y fonksiyonlarının kümesi,

$$S = \{y \in C^2[x_0, x_1]: y(x_0) = y_0 \text{ ve } y(x_1) = y_1\}$$

ile gösterilsin. Öyle ki $y(x_0) = y_0$ ve $y(x_1) = y_1$ olsun. H ise $[x_0, x_1]$ üzerindeki düzgün η fonksiyonlarının kümesi

$$H = \{\eta \in C^2[x_0, x_1]: \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}$$

ile gösterilsin. $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ olmak üzere yukarıdaki argümanlar şu gerekli şartı üretir. Varsayalım ki J, S deki y de bir yerel ekstremuma sahiptir. Eğer y bir yerel minimum ise o zaman tüm $\eta \in H$ için

$$\delta^2 J[\eta, y] \geq 0 \quad (5.3)$$

olur ve eğer y bir yerel maksimum ise o zaman tüm $\eta \in H$ için

$$\delta^2 J[\eta, y] \leq 0 \quad (5.4)$$

olur (Rund, 1966; Van Brunt, 2004).

5.5. Legendre Şartı

Bir fonksiyonelin bir yerel ekstremuma sahip olma şartının geliştirilmesi sonucu Legendre şartını verir. Bir yerel minimum veya yerel maksimum üretmeyen ekstremalleri filtrelemek için kullanışlı bir şarttır.

İkinci varyasyon, integrantta η terimlerini η' terimlerinden ayıran daha uygun bir formda yazılabilir.

$$2\eta\eta'f_{yy'} = (\eta^2)'f_{yy'}$$

olduğundan,

$$\int_{x_0}^{x_1} 2\eta\eta'f_{yy'}dx = \eta^2f_{yy'}\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta^2 \frac{d}{dx}(f_{yy'})dx = - \int_{x_0}^{x_1} \eta^2 \frac{d}{dx}(f_{yy'})dx$$

olur. Burada, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ şartlarını kullandık. Böylece ikinci varyasyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\delta^2 J[\eta, y] = \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta^2 \left(f_{yy} - \frac{d}{dx}(f_{yy'}) \right) + \eta'^2 f_{y'y'} \right) dx$$

Legendre şartının esası: Eğer $f_{y'y'}$, işaret değiştiriyor ise belirli $\eta \in H$ seçimleri için ikinci varyasyon işaret değiştirmek zorundadır. Bu ispatı vermeden önce ispatı destekleyen birkaç yorum verilmelidir. η^2 ve η'^2 nin katsayıları x in bilinen fonksiyonlarıdır. A ve B , $x \in [x_0, x_1]$ için,

$$A(x) = f_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \quad (5.6)$$

$$B(x) = f_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}(f_{yy'}(x, y(x), y'(x))) \quad (5.7)$$

ile tanımlanan fonksiyonlar olsun. f ve y düzgün olduklarından, hem A hem de B , $[x_0, x_1]$ aralığında sürekli fonksiyonlardır. A nın işareti önemli bir rol oynar çünkü tüm $x \in [x_0, x_1]$ için $|\eta(x)|$ in küçük olduğu fakat $|\eta'(x)|$ in olmadığı $\eta \in H$ fonksiyonları vardır. Tersine, eğer tüm $x \in [x_0, x_1]$ için $|\eta'(x)|$ küçük ise o zaman, η nın düzgün olması ve $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ şartlarını sağlaması gerektiğinden (H nin elemanı olabilmesi için), $|\eta(x)|$ de tüm $x \in [x_0, x_1]$ için küçüktür.

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma - (x-c)^2}\right), & \text{eğer } x \in [c - \gamma, c + \gamma] \\ 0, & \text{eğer } x \notin [c - \gamma, c + \gamma] \end{cases}$$

yaklaşımı yukarıdaki durumu gerektirir. Bu fonksiyonun düzgün olduğu ve x_0 ve x_1 de sıfır olduğu gösterilebilir. Böylece H kümesindedir. η nın maksimum değeri $\frac{1}{e}$ dir. Fakat ortalama değer teoremi gösterir ki $x \in (-\gamma, c + \gamma)$ nın en küçük değeri vardır ki $\eta'(x) = \frac{1}{(\gamma\eta)}$ dir ve türevlerin sürekliliğine göre, bir $I \subset (c - \gamma, c)$ alt aralığı vardır ki bu aralıkta tüm $x \in I$ için $\eta'(x) > \frac{1}{(2\gamma\eta)}$ dir.

Burada bahsedilen konu $|\eta'(x)|$ in nokta davranışı değil, daha çok bu fonksiyonun, ikinci varyasyonunu tanımlayan integrale etkisidir. Yine de alt aralık I oldukça küçük olabilir ve $x \in I$ için $\eta'^2(x)$, $\eta^2(x)$ ile kıyaslandığında çok büyük olsa da integralin değeri üzerindeki toplam etkisi küçük olabilir. Net etki ise H deki fonksiyonların türev terimleri daima ikinci varyasyona baskın olacak şekilde bulunabilir (Van Brunt, 2004).

5.5.1. Teorem (Legendre Şartı) J ,

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx$$

formunda bir fonksiyonel olsun. Burada f ; x , y ve y' nün düzgün fonksiyonudur. Varsayalım ki J , S deki y de bir yerel minimuma sahiptir. O zaman tüm $x \in [x_0, x_1]$ için

$$f_{y'y'} \geq 0 \quad (5.8)$$

olur.

İspat: Yukarıdaki notasyonu kullanarak varsayalım ki bir $c \in [x_0, x_1]$ vardır ki $A(c) < 0$ dir. J , y de bir yerel minimuma sahip olduğundan Teorem 5.4.1 e göre tüm $\eta \in H$ için $\delta^2 J[\eta, y] \geq 0$ dir. Eğer $\delta^2 J[v, y] < 0$ olacak şekilde bir $v \in H$ olduğu gösterilebilir ise teorem ispatlanmış olur.

A , $[x_0, x_1]$ de sürekli olduğundan öyle bir $\gamma > 0$ vardır ki tüm $x \in (c - \gamma, c + \gamma)$ için $A(x) < \frac{A(c)}{2}$ dir. H de öyle bir fonksiyon oluşturalım ki $(c - \gamma, c + \gamma)$ da olmayan tüm x ler için A ve B nin etkisini filtrelesin ve türevlerin katkısını büyütsün.

$$v(x) = \begin{cases} \sin^4\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right), & \text{eğer } x \in [c - \gamma, c + \gamma] \\ 0, & \text{eğer } x \notin [c - \gamma, c + \gamma] \end{cases}$$

olsun. Şimdi $v \in H$ olduğu ve

$$v'(x) = \begin{cases} \frac{4\pi}{\gamma} \sin\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right) \cos\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right), & \text{eğer } x \in [c - \gamma, c + \gamma] \\ 0, & \text{eğer } x \notin [c - \gamma, c + \gamma] \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir. İkinci varyasyona katkı yapan v' üzerine bir üst sınır koyarsak:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} A(x)v'^2(x)dx &= \int_{c-\gamma}^{c+\gamma} A(x)v'^2(x)dx \\
&= \int_{c-\gamma}^{c+\gamma} \frac{16\pi^2}{\gamma^2} \sin\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right) \cos^2\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right) dx < \frac{A(c)4^2\pi^2}{2\gamma^2} 2\gamma \\
&= \frac{16A(c)\pi^2}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

B , $[c - \gamma, c + \gamma]$ da sürekli olduğundan öyle bir $N > 0$ vardır ki tüm $x \in [c - \gamma, c + \gamma]$ için $|B(x)| < N$ dir. Böylece ikinci varyasyona katkı yapan v için de bir üst sınır yazılabilir.

$$\int_{x_0}^{x_1} B(x)v^2(x)dx = \int_{c-\gamma}^{c+\gamma} B(x)v^2(x)dx = \int_{c-\gamma}^{c+\gamma} B(x) \sin^8\left(\frac{\pi(x-c)}{\gamma}\right) dx < 2N\gamma$$

ve

$$\delta^2 J[v, \gamma] < \frac{16A(c)\pi^2}{\gamma} + 2N\gamma$$

olduğundan ikinci varyasyon, eğer seçilen γ keyfi küçük ise v için negatiftir. γ yı küçük seçme özgürlüğümüz olduğundan, H de öyle fonksiyonlar vardır ki ikinci varyasyonu negatif yapar. Bu Teorem 5.4.1 ile çelişir ve şu sonuca varılır. Tüm $x \in [x_0, x_1]$ için $A(x) \geq 0$ dır. Yukarıdaki sonuç kolayca J nin y de bir yerel ekstremuma sahip olduğu duruma uyarlanabilir. (5.8) eşitsizliğine Legendre şartı denir (Bliss, 1946; Bolza, 1904; Courant ve Hilbert, 1966; Van Brunt, 2004).

5.6. Eylem Fonksiyonelinin İkinci Varyasyonu

Varyasyonlar hesabının problemlerinden biri de birkaç bağımlı ve tek bir bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonelin ekstremumlarını belirleme problemidir. Bu tür fonksiyonellere klasik mekanikte bolca rastlanır.

Klasik mekanikte bir parçacık veya bir parçacıklar sistemi için eylem fonksiyoneli

$$S[\vec{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt \quad (5.9)$$

formundadır. Burada $L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$, t ye, q_k ya ve \dot{q}_k ya göre ikinci dereceden sürekli türevleri olan fonksiyondur. Parçacığın (veya parçacıklar sisteminin) Lagrange fonksiyonu olarak adlandırılır ve

$$L = T - U \quad (5.10)$$

şeklinde yazılır, burada T sistemin kinetik enerjisi, U ise sistemin potansiyel enerjisidir.

$$\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

sistemin genelleşmiş koordinatları ve

$$\dot{\vec{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

ise sistemin genelleşmiş hızlarıdır. Burada n , sistemin serbestlik derecesidir.

$V^2[t_0, t_1]$, $\vec{q}: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar kümesini gösterebiliriz. Öyle ki $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ için $q_k \in V^2[t_0, t_1]$ dir, burada $k = 1, 2, \dots, n$ dir.

$\vec{q}_0, \vec{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için sabit uç noktalı problem,

$$\vec{q}(t_0) = \vec{q}_0, \quad \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1 \quad (5.11)$$

şartları altında eylem fonksiyoneli S için yerel ekstremumları belirlemekten ibarettir.

$$S_\eta = \{\vec{q} \in C^2[t_0, t_1]: \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0 \text{ ve } \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1\} \quad (5.12)$$

şeklinde tanımlanan bir küme olsun. Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ komşuluğunda \vec{q} nun komşu fonksiyonlarını

$$\vec{\tilde{q}} = \vec{q} + \varepsilon \eta \quad (5.13)$$

ile gösterelim. Burada,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

ve η_n lerin tanımlı olduğu küme

$$H = \{\eta \in C^2[t_0, t_1]: \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0\} \quad (5.14)$$

olur. Taylor teoremine göre,

$$\begin{aligned} L(t, \vec{\tilde{q}}, \dot{\vec{\tilde{q}}}) &= L(t, \vec{q} + \varepsilon \eta, \dot{\vec{q}} + \varepsilon \dot{\eta}) \\ &= L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\eta_i \eta_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} + 2\eta_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

olur. Burada $O(\varepsilon^3)$, seri açılımının üçüncü mertebeden terimleridir. Böylece,

$$\begin{aligned}
S[\vec{q}] - S[\vec{q}] &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \left(\eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,k=1}^n \left(\eta_i \eta_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} + 2\eta_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) + O(\varepsilon^3) \right] dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt = \varepsilon \delta S[\eta, \vec{q}] + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta^2 S[\eta, \vec{q}] + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{\eta}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \quad (5.15)$$

eylem fonksiyonelinin birinci varyasyonu ve

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n \left(\eta_i \eta_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} + 2\eta_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) dt \quad (5.16)$$

eylem fonksiyonelinin ikinci varyasyonudur. Böylece,

$$S[\vec{q}] - S[\vec{q}] = \varepsilon \delta S + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta^2 S + O(\varepsilon^3) \quad (5.17)$$

olur. Eğer \vec{q} , eylem fonksiyoneli S için bir ekstremlal ise

$$\delta S = 0 \quad (5.18)$$

olmak zorundadır. (5.18) denkleminin eşdeğeri olan Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (5.19)$$

olur ki burada $k = 1, 2, \dots, n$ dir.

Bu durumda $S[\vec{q}] - S[\vec{q}]$ nun işaretini ikinci varyasyon belirler. Yani ekstremlalın türünü ikinci varyasyon tayin eder. (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerine benzer olarak, eğer

$$\delta^2 S \geq 0 \quad (5.20)$$

ise tüm $\eta \in H$ için \vec{q} , S fonksiyoneli için bir yerel minimumdur. Eğer

$$\delta^2 S \leq 0 \quad (5.21)$$

ise tüm $\eta \in H$ için \vec{q} , S fonksiyoneli için bir yerel maksimumdur.

5.7. Eylem Fonksiyoneli İçin Legendre Şartı

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} = L_{q_i q_k}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} = L_{q_i \dot{q}_k}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} = L_{\dot{q}_i \dot{q}_k} \quad (5.22)$$

olsun. Bu tanımları (5.16) ile verilen ikinci varyasyon ifadesinde yerine yazarsak o zaman ikinci varyasyon,

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n \left(\eta_i \eta_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_k} + 2\eta_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_k} + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \right) dt \quad (5.23)$$

olur. (5.23) denkleminin integrantındaki ikinci terim,

$$\sum_{i,k=1}^n 2\eta_i \dot{\eta}_k = \sum_{i,k=1}^n \frac{d}{dt} (\eta_i \eta_k)$$

olarak yazılabilir. Kısmi integrasyonla,

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n 2\eta_i \dot{\eta}_k L_{q_i \dot{q}_k} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n \frac{d}{dt} (\eta_i \eta_k) L_{q_i \dot{q}_k} dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n \eta_i \eta_k \frac{d}{dt} L_{q_i \dot{q}_k} dt$$

elde edilir. Burada,

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$$

şartları kullanılmıştır. Böylece ikinci varyasyon,

$$\delta^2 J[\eta, \vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,k=1}^n \left[\eta_i \eta_k \left(L_{q_i q_k} - \frac{d}{dt} L_{q_i \dot{q}_k} \right) + \dot{\eta}_i \dot{\eta}_k L_{\dot{q}_i \dot{q}_k} \right] dt \quad (5.24)$$

olur. (5.8) ile verilen Legendre şartına benzer olarak eylem fonksiyoneli için de

$$\sum_{i,k} L_{\dot{q}_i \dot{q}_k} \geq 0 \quad (5.25)$$

şartını yazabiliriz. Yani eğer tüm $t \in [t_0, t_1]$ için (5.25) şartı sağlanıyor ise (5.12) ile tanımlanan S kümesindeki \vec{q}, J fonksiyoneli için bir yerel minimumdur.

(5.25) ile verilen şartın kullanılması için fiziksel sistemin kinetik enerjisi ve potansiyel enerjisi (dolayısıyla Lagrange fonksiyonunu), kartezyen koordinatlardan genelleştirilmiş koordinatlara dönüştürülmelidir.

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.26)$$

Bu dönüşümler altında kartezyen koordinatlardaki hızlar da genelleşmiş hızlara kolayca dönüştürülebilir.

$$\vec{v}_i = \frac{dx_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (5.27)$$

Eğer sistemin potansiyel enerjisi hızların fonksiyonu değilse o zaman (5.25) şartı için sadece kinetik enerjiyi dönüştürmek yeterlidir.

Yukarıdaki dönüşümler altında kinetik enerji aşağıdaki gibi dönüşecektir:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$

Burada toplam, sistemdeki parçacıklar üzerindedir. Bu açılırsa kinetik enerji,

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (5.28)$$

şeklinde üç terimin toplamı olacaktır, burada

$$M_j = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

olmak kaydıyla,

$$T_0 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2$$

$$T_1 = \sum_j M_j \dot{q}_j$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

biçimindedir.

Görüldüğü gibi T_0 genelleşmiş hızlardan bağımsız, T_1 genelleşmiş hızlara lineer bağlı, T_2 ise genelleşmiş hızlara karesel bağlıdır. Eğer (5.26) ile verilen dönüşümler zamana açık bağlı değilse kinetik enerjinin sadece son terimi T_2 sıfırdan farklı olacaktır. Bu durumda sistemin kinetik enerjisi,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (5.29)$$

olur. Yukarıda tanımı verilen simetrik M_{jk} tensörü kütle tensörüdür.

Sonuç olarak (5.25) ile verilen, eylem fonksiyonelinin minimum olma şartı,

$$\sum_{j,k} L_{\dot{q}_j \dot{q}_k} = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} (M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k) \geq 0$$

olur. Buradan,

$$M_{jk} \geq 0 \quad (5.30)$$

koşuluna ulaşılır.

Örnek 5.7.1.

(5.30) koşulu, (Bölüm 4.3.1) de verilen serbest düşme hareketine uygulandığında, yukarıda verilen

$$M_{jk} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k}$$

ifadesinde, $i, j, k = 1$ olur. Çünkü fiziksel sistem tek bir cisim ($i = 1$) ve hareket tek bir kartezyen koordinat içerir ($x_1 = y$). Hareket için genelleştirilmiş koordinat da tektir ($j, k = 1$). Dolayısıyla $x_1 = q_1 = y$ alınırsa,

$$M_{11} = m_{11} = m \geq 0$$

bulunur. Sonuç olarak, (4.6) denkleminin çözümünden bulunan ekstremalin, hareketin eylem fonksiyonelini minimum yapması için gerekli koşul

$$m \geq 0 \quad (5.31)$$

olur.

6. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu tezde elde edilen (5.30) bulgusu şunu ifade eder: Bir mekanik sistemin eylem fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitlenmesiyle (veya Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleriyle) elde edilen ekstremallerin, sistemin eylem fonksiyonelinin minimum yapması için gerekli şart, sistemi oluşturan parçacıkların kütleleriyle ilişkili bir şarttır. Eğer sistemin kütle tensörü pozitif tanımlı ise sistemin eylem fonksiyonelinin birinci varyasyonunun sıfıra eşitlenmesinden bulunan ekstremler, eylem fonksiyonelinin minimum yapar.





KAYNAKLAR

- Argyris, J. H., Kelsey, S., 1960. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Springer Science Business Media, LLC. 85.
- Arnold, V. I., 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Second edition, Springer-Verlag, New York. 516.
- Bliss, G. A., 1946. *Lectures on the Calculus of Variations*. Phoenix Science Series The University of Chicago Press, Chicago. 292.
- Bolza, O., 1904. *Lectures on the Calculus of Variations*. Second Series, The University of Chicago Press, Chicago. 271.
- Caratheodory, C., 1999. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order*. Third edition, AMS Chelsea Publishing, Rhode Island. 402.
- Courant, R., Hilbert, D., 1966. *Methods of Mathematical Physics*. Third printing, Interscience Publishers, New York. 811.
- Dym, C. L., Shames, I. H., 2013. *Solid Mechanics A Variational Approach*. Springer Science Business Media, New York. 685.
- Forsyth, A. R., 1927. *Calculus of Variations*. Cambridge University Press, London. 656.
- Gelfand, I. M., Fomin, S. V., 1963. *Calculus of Variation*. Prentice Hall, Inc., New Jersey. 232.
- Giaquinta, M., Hildebrandt, S., 1996. *Calculus of Variations II*. Springer Verlag, Berlin. 652.
- Goldstein, H., 1980. *Classical Mechanics*. Second edition, Addison Wesley Publishing Company, California. 672.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M., 1999. *Yüksek Matematik Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi*. Literatür Yayıncılık, İstanbul. 470.
- Kaplan, W., 1991. *Advanced Calculus*. Fourth edition, Addison Wesley Publishing Company, New York. 746.
- Lanczos, C., 1970. *The Variational Principles of Mechanics*. Fourth edition, University of Toronto Press, Toronto. 418.
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M., 1976. *Mechanics*. Third edition, Butterworth-Heinemann, Oxford. 170.
- Massa, E., Pagani, E., 2016. On the notion of Jacobi fields in constrained calculus of variations. *Communications in Mathematics*, **24**, 91-113.

- Oden, J. T., Reddy, J. N., 1973. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*,
Second edition, Springer-Verlag, Berlin. 301.
- Olmsted, J. M. H., 1961. *Advanced Calculus*. Appleton Century Crofts, Inc., New York.
706.
- Rızaoğlu, E., Sünel, N., 2008. *Klasik Mekanik*. İkinci baskı, Okutman Yayıncılık, Ankara.
510.
- Rund, H., 1966. *The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations*. D. Van
Nostrand Company Ltd., London. 404.
- Van Brunt, B., 2004. *The Calculus of Variations*. Springer Verlag, New York. 305.



ÖZGEÇMİŞ

10.04.1990 yılında Mersin ili Tarsus ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Tarsus'ta tamamladı. 2009 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve 2013'de mezun oldu. 2014'te Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.



YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 14/06/2017

Tez Başlığı / Konusu:

Klasik Mekanikte Eylem Fonksiyonelinin İkinci Varyasyonu

Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 59 sayfalık kısmına ilişkin, 14/06/2017 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 10 (On) dur.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimededen daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.

14.06.2017

Adı Soyadı: Feriha Gürman

Öğrenci No: 149102001

Anabilim Dalı: Matematik

Program: Matematik

Statüsü: Y. Lisans

Doktora

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR

Doç. Dr. Şenay BAYDAŞ

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)