

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI ÖZEL DİYOFANT DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Merve GÜNEY DUMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Refik KESKİN

Şubat 2018

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL DİYOFANT DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİ

DOKTORA TEZİ

Merve GÜNEY DUMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

Bu tez 01/02/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.


Prof. Dr.
Refik KESKİN
Jüri Başkanı


Doç. Dr.
Gökhan SOYDAN
Üye


Doç. Dr.
Neşe ÖMÜR
Üye


Doç. Dr.
Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Üye


Yrd. Doç. Dr.
Bahar DEMİRTÜRK BİTİM
Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Merve GÜNEY DUMAN

01.02.2018

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında engin bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, destek olan, yardımlarını ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Refik KESKİN'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Doğduğum günden itibaren sonsuz sevgi ve şefkatlerini hiçbir zaman eksik etmeyen, bana güvenip her zaman destek olan, beni bugünlere getiren babam ve annem Alaattin ve Ümran GÜNEY'e, kardeşim Tolga GÜNEY'e, araştırmalarım sırasında ve her zaman yanımda olan, yardımlarıyla beni yalnız bırakmayan, destek olan eşim Araş. Gör. Mehmet DUMAN'a çok teşekkür ederim.

Yetişmemde emeği geçen bütün öğretmenlerime, mezunu olduğum Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve son olarak da doktora öğrenimim boyunca desteğinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	iv
TABLolar LİSTESİ.....	v
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	12
BÖLÜM 3.	
BAZI İKİNCİ DERECEDEDEN DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	18
3.1. Bazı Özel Sürekli Kesir Açılımları ve Bazı Pell Denklemlerinin Çözümleri.....	19
3.2. Bazı İkinci Dereceden Özel Diyofant Denklemlerinin Çözümleri.	27
BÖLÜM 4.	
BAZI DÖRDÜNCÜ DERECEDEDEN DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ.....	45
4.1. $x^2 = V_n(k, -1) \mp V_{n-1}(k, -1)$ ve $x^2 = U_n(k, -1) \mp U_{n-1}(k, -1)$ Denklemlerinin Çözümleri.....	48

4.2. Bazı Dördüncü Dereceden Özel Diyofant Denklemlerinin Çözümleri.....	59
---	----

BÖLÜM 5.

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN FARKLI BİRKAÇ DİYOFANT DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ.....	67
5.1. $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ Denklemlerinin Çözümleri.	69
5.2. $cz^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ Denkleminin Çözümleri.....	74
5.3. Dördüncü Dereceden Farklı Birkaç Diyofant Denkleminin Çözümü.....	75

BÖLÜM 6.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	81
KAYNAKLAR.....	83
ÖZGEÇMİŞ.....	88

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$a b$: a, b yi böler
$a \equiv b \pmod{n}$: a sayısı b sayısına m modülüne göre denktir
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\in	: Elemanıdır
F_n	: Fibonacci sayısı
U_n	: Genelleştirilmiş Fibonacci sayısı
V_n	: Genelleştirilmiş Lucas sayısı
(\cdot)	: Jacobi sembolü
L_n	: Lucas sayısı
$[]$: Sürekli kesir
$\lfloor \rfloor$: Tamdeğer
\square	: Tamkare sayılar
\mathbb{Z}	: Tamsayılar kümesi

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1.1.	Bazı ikinci dereceden Diyofant denklemleri ve çözümleri.....	8
Tablo 1.2.	Bazı tamkare ve tamkarenin katları olan Fibonacci, Lucas ve Pell sayıları.....	9
Tablo 5.1.	Bazı c değerleri için $cz^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ denkleminin çözümleri.....	74
Tablo 5.2.	Bazı c değerleri için $cz^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ denkleminin çözümleri.....	75
Tablo 5.3.	$k \geq 3$ olmak üzere bazı c değerleri için $(cx^2 - 1)^2 - k(cx^2 - 1)y + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin çözümleri.....	76
Tablo 5.4.	$k \geq 3$ olmak üzere bazı c değerleri için $x^2 - (k^2 - 4)(cy^2 - 1)^2 = -4(k - 2)$ denkleminin çözümleri.....	77
Tablo 5.5.	$k \geq 1$ olmak üzere bazı c değerleri için $x^2 - (k^2 + 4)(cy^2 - 1)^2 = -4$ denkleminin çözümleri.....	78
Tablo 5.6.	Bazı c değerleri için $(cx^2 - 1)^2 + k(cx^2 - 1)y - y^2 = 1$ denkleminin çözümleri.....	78

ÖZET

Anahtar kelimeler: Diyofant denklemleri, Pell denklemleri, sürekli kesirler, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları

Bu çalışmanın ilk bölümünde Diyofant denklemleri ile ilgili literatür bilgisi ve Fibonacci ve Lucas sayıları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının temel özellikleri verildi.

İkinci bölümde ise sürekli kesirler ve Pell denklemleri hakkında temel tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde, ilk olarak bazı sayıların sürekli kesir açılımları hesaplandı. Daha sonra bu sürekli kesir açılımları kullanılarak bazı Pell denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri verilerek ikinci dereceden bazı Diyofant denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri belirlendi.

Çalışmanın dördüncü bölümünde k tek tamsayı iken Jacobi sembolü ve kongürans özellikleri kullanılarak, $x^2 = V_n(k, -1) \pm V_{n-1}(k, -1)$ ve $x^2 = U_n(k, -1) \pm U_{n-1}(k, -1)$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri elde edildi. Sonrasında ise dördüncü dereceden bazı Diyofant denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri tespit edildi.

Beşinci bölümde bazı özel a değerleri için $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ ve $az^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ denklemlerinin tüm tamsayı çözümleri bulunarak dördüncü dereceden bazı Diyofant denklemlerinin tüm pozitif tamsayı çözümleri belirlendi.

SOLUTIONS OF SOME SPECIAL DIOPHANTINE EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Diophantine equations, Pell equations, continued fractions, generalized Fibonacci and Lucas numbers

In the first section of this work, literature information about Diophantine equations, Fibonacci numbers, Lucas numbers, generalized Fibonacci numbers and generalized Lucas numbers is given.

In the second section, basic theorems and definitions about continued fractions and Pell equations are given.

In the third section, firstly, continued fraction expansions of the some numbers are calculated. Later, all positive integer solutions to some Pell equations are given by using this continued fraction expansions and all positive integer solutions to some quadratic Diophantine equations are determined.

In fourth section of this work, when k is an odd integer, all integer solutions to the equations $x^2 = V_n(k, -1) \pm V_n(k, -1)$ and $x^2 = U_n(k, -1) \pm U_n(k, -1)$ are obtained by using Jacobi symbol and congruence. Later, all positive integer solutions to some quartic Diophantine equations are given.

In the fifth section, for some special values of a , all integer solutions to the equations $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ and $az^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ are found. Finally, all positive integer solutions to some quartic Diophantine equations are determined.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Değişkenleri ve katsayıları tamsayı olan iki veya daha fazla bilinmeyenli denklemlere “Diophantus denklemi” diğer bir adıyla “Diophantine (Diyofant) denklemi” denir. Diyofant denklemleri, adını 3. yüzyılda yaşadığı tahmin edilen Antik Yunan matematikçi Diophantus’tan almıştır. Diyofant denklemleri ile ilgili üç temel soru vardır:

1. Denklem çözülebilir mi?
2. Denklem çözülebilir ise çözümlerin sayısı sonlu çoklukta mıdır? Yoksa sonsuz çoklukta mıdır?
3. Denklem çözülebilir ise tüm çözümleri nelerdir?

Diophantus, ikinci dereceden

$$ax^2 + bx = c$$

denklem tipini ele aldı. Tarih boyunca birçok matematikçi, Diophantus’un denklemlerinin özellikle aşağıdaki biçimleriyle ilgilenmişlerdir.

$$ax + by = c \text{ (Doğrusal Diyofant denklemi)}$$

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ (Pisagor denklemi)}$$

$$x^n + y^n = z^n \text{ (Fermat’ın son teoremi)}$$

$$x^2 - dy^2 = N \text{ (Pell denklemi)}$$

$$y^2 = x^3 + ax + b \text{ (Biçimindeki eliptik eğri)}$$

Bu denklemleri Fermat, Euler, Lagrange, Gauss gibi ünlü matematikçiler de çalışmıştır ve bu matematikçiler bazı Diyofant denklemlerinin çözümünü değişik yöntemler kullanarak bulmuştur. Bu yöntemlerden bazıları; çarpanlara ayırma, matematiksel tümevarım, modüler aritmetik, sürekli kesirler, parametre kullanma, eşitsizlikler, Fermat'ın sonsuz iniş yöntemidir. Daha sonraları ise denklem çözümlerini bulmak için cebirsel sayılar teorisi bilgileri kullanıldı. Yakın zamanda da Sidney Üniversitesindeki bir grup tarafından geliştirilen MAGMA programı kullanılarak birçok eliptik eğrinin rasyonel çözümleri kolaylıkla hesaplanmaya başlandı. Bu metotlar ve Diyofant denklemleri ile ilgili daha fazla bilgi için [1-9] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Tarihte Fibonacci dizilerinin ortaya çıkması ve bazı özel Diyofant denklemlerinin çözümleri ile bu dizilerin ilişkisinin keşfi Diyofant denklemlerini daha ilginç bir hale getirmiştir. Liber Abaci'de (1202) Fibonacci, "Modus Indium (Hintlilerin Yöntemi)" adını verdiği ve günümüzde Arap-Hint sayıları diye bilinen modern ondalık sayı sistemini tanıtmıştır. Bu kitap gündelik hayatta ticari defter tutma, ölçü birimlerini çevirme, faiz hesaplama, para bozma ve değiştirme vb. işlemlerde, bu sistemin kullanımının önemini göstermiştir. Bu kitap Avrupa'da tahsilli insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmış ve Avrupa'nın müspet bilimde ilerlemesine önemli katkıları olmuştur. Liber Abaci'de ayrıca kapalı bir ortamdaki bir tavşan ailesinin artışının, her tavşan çiftinin bir ay sonra bir yavru yapıp onun da bir ay sonra bir yavru yapacağı gibi ideal varsayımlar altında hesaplanmasından bahsedilmiştir. Bu problemin çözümünde tavşan çiftlerinin sayısının artışı gösteren sayı dizisi Fibonacci dizisi olarak adlandırılmıştır. 6. yüzyıldan beri Hintli matematikçiler tarafından bilinen bu dizi Avrupa'ya ilk olarak Fibonacci tarafından tanıtılmıştır [10,11].

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip ve $n \geq 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan (F_n) dizisine Fibonacci dizisi ve F_n sayısına da n .

Fibonacci sayısı adı verilir. $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere n . Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

formülü ile hesaplanır. Fransız matematikçi Sacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856) 1843 yılında F_n için bu formülü bulduktan sonra, bu formül Binet formülü olarak adlandırıldı. Aslında bu formül ilk önce 1718'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre (1667-1754) tarafından genel fonksiyonlar kullanılarak bulundu. Ayrıca bu formül, bunlardan bağımsız olarak 1844'de Fransız mühendis ve matematikçi Gabriel Lamé (1795-1870) tarafından da elde edildi.

İtalya'da doğan Fransız astronom ve matematikçi Giovanni Domenico Cassini'nin 1680'de ve bundan bağımsız olarak 1753'te Robert Simson'ın (1687-1768) Glasgow Üniversitesinde bulunduğu

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (n \geq 1)$$

formülü bazı yeni özdeşliklerin elde edilmesinde kullanıldı.

Fibonacci dizisinin başlangıç şartları değiştirilerek Lucas dizisi denilen yeni bir dizi oluşturuldu. Bu dizi, $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip ve $n \geq 1$ için

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlıdır. Bu dizinin Binet Formülü, $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

biçimindedir.

Fibonacci ve Lucas dizileri birbiriyle ilişkilidir. Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili aşağıda verilen özellikler çok iyi bilinmektedir.

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n,$$

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,$$

$$F_{2n} = L_n F_n,$$

ve

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n.$$

Fibonacci ve Lucas sayılarının

$$F_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} F_r \pmod{F_m},$$

$$L_{2mn+r} \equiv (-1)^{mn} L_r \pmod{F_m},$$

$$F_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} F_r \pmod{L_m}$$

ve

$$L_{2mn+r} \equiv (-1)^{(m+1)n} L_r \pmod{L_m}$$

kongürans özellikleri bu sayılarla ilgili yeni özelliklerin bulunmasında önemli bir rol oynar [12].

Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilgili daha fazla bilgi için [10-20] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Daha sonra Fibonacci ve Lucas dizilerinin genel formu olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri tanımlanmıştır ve bu dizilerle ilgili bazı yeni özdeşlikler bulunmuştur. k ve t tamsayılar olmak üzere $k^2 + 4t > 0$ olsun. Bu durumda genelleştirilmiş Fibonacci dizisi

$$U_0(k, t) = 0, U_1(k, t) = 1$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$U_n(k, t) = kU_{n-1}(k, t) + tU_{n-2}(k, t)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır. Benzer biçimde genelleştirilmiş Lucas dizisi

$$V_0(k, t) = 2, V_1(k, t) = k$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$V_n(k, t) = kV_{n-1}(k, t) + tV_{n-2}(k, t)$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanır. $k = t = 1$ için (U_n) ve (V_n) dizileri sırasıyla Fibonacci ve Lucas dizilerine dönüşür. $k = 2$ ve $t = 1$ için (U_n) ve (V_n) dizileri sırasıyla Pell ve Pell-Lucas dizilerine dönüşür ve bu diziler sırasıyla (P_n) , (Q_n) ile gösterilir. $x^2 - kx - t = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4t}}{2} \text{ ve } \beta = \bar{\alpha} = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4t}}{2}$$

olmak üzere

$$U_n(k, t) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } V_n(k, t) = \alpha^n + \beta^n$$

formülleri geçerlidir. Ayrıca $\alpha + \beta = k$ ve $\alpha\beta = -t$ dir.

Özel olarak, $t = 1$ için $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ olmak üzere

$$U_n(k, 1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } V_n(k, 1) = \alpha^n + \beta^n$$

ve $t = -1$ için $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$ ve $\bar{\alpha} = \beta = \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ olmak üzere

$$U_n(k, -1) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ ve } V_n(k, -1) = \alpha^n + \beta^n$$

dir. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için negatif terimli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları

$$U_{-n} = -(-t)^{-n} U_n \text{ ve } V_{-n} = (-t)^{-n} V_n$$

ile tanımlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bölünebilme özellikleri bu dizilerle ilgili yeni özellikler elde edilmesinde kullanılabilir. $U_m \neq 1$ ve $V_m \neq 1$ olmak üzere bölünebilme özelliklerinden bazıları

$$U_m | U_n \Leftrightarrow m | n,$$

$$V_m | V_n \Leftrightarrow m | n \text{ ve } \frac{n}{m} \text{ tek tamsayı}$$

ve

$$V_m | U_n \Leftrightarrow m | n \text{ ve } \frac{n}{m} \text{ çift tamsayı}$$

biçimindedir [17-20].

Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili ayrıntılı bilgi için [17-28] numaralı kaynaklara bakılabilir.

2. dereceden

$$ax^2 + bxy + cy^2 = k$$

genel denklemini "Gauss's Disquisitiones Arithmeticae" kitabının ana konularından biridir. Diyofant denklemlerinin özel bir biçimi olan Pell denklemlerinin bazılarının çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile verilebildiğinden bu denklemler matematikçilerin ilgisini çekmiştir.

d tamkare olmayan bir doğal sayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = \pm 1$$

Diyofant denklemlerine Pell denklemleri denir. d tamkare olmayan bir doğal sayı ve N tamsayı olmak üzere

$$x^2 - dy^2 = N$$

Diyofant denklemine ise genel-Pell denklemini denir.

Eğer u ve v tamsayıları için $u^2 - dv^2 = N$ ise $u + v\sqrt{d}$ 'ye (veya (u, v) 'ye) $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin bir çözümüdür denir.

d tamkare olmayan bir pozitif tamsayı ve u, u', v, v' pozitif tamsayılar olmak üzere $u + v\sqrt{d}$ ve $u' + v'\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin herhangi iki çözümü ise

a. $u = u'$ ve $v = v'$ dir $\Leftrightarrow u + v\sqrt{d} = u' + v'\sqrt{d}$ dir.

b. $u > u'$ ise $v > v'$ dir $\Leftrightarrow u + v\sqrt{d} > u' + v'\sqrt{d}$ dir.

Bu yüzden $x^2 - dy^2 = N$ Pell denkleminin çözümleri arasında bir sıralama vardır. Böylece Pell denklemlerinin her zaman bir en küçük çözümü bulunabilir. d tamkare

olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasından x 'in en küçük değerini aldığı (x, y) çözümüne denklemin temel çözümü denir. x tamsayısı en küçük değeri aldığıda, y ve $x + y\sqrt{d}$ tamsayıları da en küçük değerini alır. Bu yüzden birinin alabileceği en küçük tamsayı değerini alması temel çözümü bulmak için yeterli olur. Pell denklemleri ile ilgili daha fazla bilgi edinmek için [29-36] numaralı kaynaklar incelenebilir. Aşağıdaki tabloda ikinci dereceden bazı Diyofant denklemlerinin çözümleri verildi.

Tablo 1.1. Bazı İkinci Dereceden Diyofant Denklemleri ve Çözümleri

Özel durumlar	Denklemler	Çözümler ($n \geq 1$ olmak üzere)
	$x^2 - 5y^2 = 1$	$(x, y) = (L_{6n}/2, F_{6n}/2)$
	$x^2 - 5y^2 = -1$	$(x, y) = (L_{6n-3}/2, F_{6n-3}/2)$
	$x^2 - 2y^2 = 1$	$(x, y) = (Q_{2n-2}/2, P_{2n-2})$
	$x^2 - 2y^2 = -1$	$(x, y) = (Q_{2n-1}/2, P_{2n-1})$
	$x^2 - 7y^2 = -1$	Denklemin tamsayı çözümü yoktur.
	$x^2 - 5y^2 = 4$	$(x, y) = (L_{2n}, F_{2n})$
	$x^2 - 5y^2 = -4$	$(x, y) = (L_{2n-1}, F_{2n-1})$
	$x^2 - xy - y^2 = 1$	$(x, y) = (F_{2n+1}, F_{2n})$
	$x^2 - xy - y^2 = -1$	$(x, y) = (F_{2n}, F_{2n-1})$
	$x^2 - 3xy + y^2 = 1$	$(x, y) = (F_{2n+2}, F_{2n})$
	$x^2 - 3xy + y^2 = -1$	$(x, y) = (F_{2n-1}, F_{2n-3})$
	$x^2 - 3xy + y^2 = -5$	$(x, y) = (L_{2n}, L_{2n-2})$
	$x^2 - 3xy + y^2 = 5$	$(x, y) = (L_{2n-1}, L_{2n-3})$
$k \geq 1$ olmak üzere	$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4$	$(x, y) = (V_{2n}(k, 1), U_{2n}(k, 1))$
	$x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4$	$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$
	$x^2 - kxy - y^2 = -1$	$(x, y) = (U_{2n}(k, 1), U_{2n-1}(k, 1))$
$k \geq 3$ olmak üzere	$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4$	$(x, y) = (V_n(k, -1), U_n(k, -1))$
	$x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4$	Tamsayı çözümü yoktur.
	$x^2 - kxy + y^2 = -1$	Tamsayı çözümü yoktur.
	$x^2 - kxy + y^2 = 1$	$(x, y) = (U_{n+1}(k, -1), U_n(k, -1))$
$k^2 + 4$ karesiz tamsayı	$x^2 - kxy - y^2 = -(k^2 + 4)$	$(x, y) = (V_{2n-1}(k, 1), V_{2n-2}(k, 1))$
	$x^2 - kxy - y^2 = k^2 + 4$	$(x, y) = (V_{2n}(k, -1), V_{2n-1}(k, -1))$
$k > 3$ ve $k^2 - 4$ karesiz tamsayı	$x^2 - kxy + y^2 = -(k^2 - 4)$	$(x, y) = (V_n(k, -1), V_{n-1}(k, -1))$
	$x^2 - kxy + y^2 = k^2 - 4$	Tamsayı çözümü yoktur.

Tablo 1.1'deki denklemlerin ispatlarını incelemek ve bu denklemlerle ilgili daha fazla bilgi için [1,34,37-41] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Tablo 1.1'deki denklemlerin çözümlerinden yararlanarak, çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri olan başka ilginç Diyofant denklemlerinin çözümleri de bulunabilir.

Literatürde

$$ax^4 + bx^2y + cy^2 - d = 0$$

biçimindeki denklemlerinin çözümlerini inceleyen çok sayıda makale bulunmaktadır. Çözümleri genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları olan ikinci dereceden Diyofant denklemleri çalışıldıktan sonra aynı denklemlerin 4. dereceden olanlarının da çözümleri bulunmuştur. Bunun için önce tamkare biçimindeki Fibonacci ve Lucas sayıları daha sonra da genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları çalışılmıştır.

Moser [42] ve Rollett [43], tamkare biçimindeki Fibonacci sayıları ile ilgili bir konjektür ortaya atmıştır. Cohn [44-45], Burr [46] ve Wylie [47] bu konjektörü ispatladı. Daha sonra benzer sonuçları Lucas sayıları için Cohn [45] ve B. Alfred [48] elde etmiştir. Aşağıdaki tabloda bunlar verilmiştir.

Tablo 1.2. Bazı tamkare ve tamkarenin katları olan Fibonacci, Lucas ve Pell sayıları

Denklemler	Çözümler
$F_n = x^2$	$n = 0, \pm 1, 2, 12$
$F_n = 2x^2$	$n = 0, \pm 3, 6$
$L_n = x^2$	$n = 1, 3$
$L_n = 2x^2$	$n = 0, \pm 6$
$P_n = x^2$	$n = 0, 1, 7$
$P_n = 2x^2$	$n = 0, 2$
$P_n = 5x^2$	$n = 0, 3$

[42-54] numaralı kaynaklara bakılarak bu sayılarla ilgili daha fazla bilgi alınabilir.

1962 yılından beri kx^2 biçimindeki genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları araştırılmıştır. Birçok yazar k tek ve $t = \pm 1$ olduğu zaman k tamsayısının özel durumlarını göz önüne alarak $U_n = kx^2$ ve $V_n = kx^2$ denklemlerinin çözümlerini inceledi. Cohn [55,56], k tek ve $t = \pm 1$ olduğu zaman $U_n = \square, 2\square$ ve $V_n = \square, 2\square$ denklemlerinin çözümlerini verdi. $w = \{1,2,3,6\}$ olmak üzere Mignotte ve Pethö [57], $U_n(k, -1) = w\square$ denkleminin çözümlerini verdi. Ribenboim ve McDaniel [18], k ve t tek ve aralarında asal tamsayılar olmak üzere $U_n, 2U_n = \square$ ve $V_n, 2V_n = \square$ denklemlerinin çözümlerini verdi. k çift iken Kagawa ve Terai [50], bazı kabuller altında $U_n(k, 1) = \square, 2U_n(k, 1) = \square, V_n(k, 1) = \square$ ve $2V_n(k, 1) = \square$ olacak şekildeki n tamsayılarını belirledi. Şiar ve Keskin [58], k tek iken $V_n(k, 1) = 3\square$ ve $V_n(k, 1) = 6\square$ denklemlerinin çözümünün olmadığını gösterdi. Keskin ve Karaatlı [59], k 'nın bazı şartları sağlaması durumunda $U_n(k, 1) = 5\square$ ve $U_n(k, 1) = 5U_m(k, 1)\square$ olacak şekildeki n tamsayılarını buldu. Ayrıca k tek iken $V_n(k, 1) = 5\square$ denkleminin çözümünün sadece $n = 1$ olduğunu ve $V_n(k, 1) = 5V_m(k, 1)\square$ denkleminin çözümünün olmadığını gösterdi. Keskin ve Karaatlı [59,60], k 'nın bazı şartları sağlaması durumunda $U_n(k, 1) = 7\square, V_n(k, 1) = 7\square, U_n(k, 1) = 7U_m(k, 1)\square$ ve $V_n(k, 1) = 7V_m(k, 1)\square$ denklemlerinin çözümlerini buldu. Daha fazla sonuç için [44,46,49,51-54,58,61-64] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Alekseyev ve Tengely [65], $a \neq 0$ ve b birer tamsayı iken

$$U_n(k, \pm 1) = ax^2 + b$$

denkleminin sonlu sayıda n çözümünün olduğunu gösterdi. Ayrıca aynı yazarlar $1 \leq a \leq 3$ ve $-3 \leq b \leq 3$ iken $ax^2 + b$ biçimindeki Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas sayılarını buldu. Keskin [66], k tek olduğu zaman $w = 1,2,3,6$ için $V_n(k, -1) = wx^2 + 1$ ve $V_n(k, -1) = wx^2 - 1$ denklemlerinin çözümünü inceledi.

Literatürde kx^2 biçimindeki genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarının çözümlerinden ve çözümleri bu tamsayılar olan 2. dereceden Diyofant denklemlerinden yararlanılarak bazı 4. dereceden Diyofant denklemlerinin çözümleri elde edilmiştir.

Walsh [4], k 'nin çift olması kabulü altında $x^4 - kx^2y + y^2 = 1,4$ denklemlerinin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerini inceledi. Ayrıca $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerinin $k \neq 338$ ve k tamkare değilse $(x, y) = (k, 1), (1, 0)$ veya $(x, y) = (0, 1)$; $k = 338$ ise $(x, y) = (13051348805, 6214)$ veya $(x, y) = (114243, 6214)$ ve k tamkare ise $(x, y) = (1, \sqrt{k})$ veya $(x, y) = (k^2 - 1, \sqrt{k})$ olduğunu gösterdi. İlave olarak aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = 4$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerinin $k = 2v^2$ olacak şekilde v var ise $(x, y) = (2, \sqrt{2k})$ veya $(x, y) = (2k^2 - 2, \sqrt{2k})$ ve aksi halde $(x, y) = (2, 0)$ olduğunu gösterdi. Cohn [3], $c = 1$ veya $c = 4$ olması durumunda k 'nin tek olması kabulü altında $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ iken $x^2 - kxy^2 + y^4 = c$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini inceledi ve $x^2 - kxy^2 + y^4 = 4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olmadığını gösterdi. Ayrıca $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün $y = k^2$ olacak şekilde k tek tamsayısı varsa sadece $y = 1$ aksi takdirde sadece $y = 1$ veya $y = k$ olduğunu gösterdi. Ek olarak, $x^2 - kxy^2 + y^4 = -1$ denkleminin $k = 3$ ise çözümünün olmadığını ve $k > 3$ iken denklemin çözümünün sadece $y = 1$ olduğunu gösterdi. Yine aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = -4$ denkleminin sadece $k = 3$ veya $k = 6$ olduğunda çözümünün olduğunu ve bu denklemin çözümünün $k = 3$ ise $(x, y) = (2, 2)$ veya $(x, y) = (10, 2)$ ve $k = 6$ ise $(x, y) = (1, 1), (5, 1), (29, 13)$ veya $(x, y) = (985, 13)$ olduğunu ispatladı.

4. dereceden denklemler ile ilgili daha fazla bilgi için [4,6,9,67,68] numaralı kaynaklara bakılabilir.

BÖLÜM 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonra kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilecektir.

d tamkare olmayan bir doğal sayı olmak üzere \sqrt{d} 'nin sürekli kesir yaklaşımları $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin pozitif tamsayı çözümlerinin bulunmasında önemli rol oynar. Aşağıda verilen tanımlar, lemmalar ve teoremler için [29,31,32] numaralı kaynaklara bakılabilir.

Tanım 2.1: Her $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere a_0, a_1, a_2, \dots tamsayı dizisi verilsin.

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

biçimindeki ifadeye sonlu sürekli kesir ve

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

şeklindeki bir ifadeye basit sonsuz sürekli kesir ve buradaki a_i değerlerine de kısmi bölenler denir ($i = 0, 1, 2, \dots$). Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n]$ değeri varsa sonsuz sürekli kesire yakınsaktır denir ve bu değer $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ ile gösterilir.

Lemma 2.1: $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\text{a. } [a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, [a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]]$$

$$\text{b. } [a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{[a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]}}}}}$$

dir.

Tanım 2.2: a_0 hariç hepsi pozitif olan a_0, a_1, a_2, \dots tamsayıları ele alınsın. k doğal sayı olmak üzere

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

sürekli kesrine $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinin k . yaklaşımı denir ve bu yaklaşım

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \dots, a_k]$$

ile gösterilir.

Teorem 2.1: Her $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere a_0, a_1, a_2, \dots tamsayı dizisi verilsin. O zaman $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesri irrasyoneldir ve her irrasyonel sayının tek türlü sonsuz sürekli kesir açılımı vardır.

Teorem 2.2: α irrasyonel sayısı verilsin. Bu takdirde

$$\alpha_0 = \alpha, a_k = [\alpha_k] \text{ ve } \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanırsa $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ dir.

Tanım 2.3: Her $k \geq 1$ için $a_k > 0$ olmak üzere a_0, a_1, a_2, \dots tamsayı dizisi verilsin. $n \geq k$ şartını sağlayan tüm tamsayılar için $a_n = a_{n+l}$ eşitliğini sağlayan pozitif $l \in \mathbb{N}$ ve $k \geq 0$ tamsayı varsa $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ sonsuz sürekli kesrine periyodiktir denir. l 'nin en küçük değerine bu sonsuz sürekli kesrin periyodu denir ve periyodik sürekli kesir

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{l+k-1}}]$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3: d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. O zaman \sqrt{d} 'nin sürekli kesir açılımı

$$\alpha_0 = \sqrt{d}, a_k = [\alpha_k] \text{ ve } \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}, k = 0, 1, 2, \dots$$

tekrarlama bağıntısı kullanılarak hesaplanır ve l periyot uzunluğunu göstermek üzere

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

dir.

Teorem 2.4: $p + q\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = \pm 1$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü ise $\frac{p}{q}, \sqrt{d}$ 'nin bir sürekli kesir yaklaşımıdır.

Teorem 2.5: $n \in \mathbb{N}$ olsun. \sqrt{d} 'nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere m çift ise $(x_n, y_n) = (p_{mn-1}, q_{mn-1})$ ve m tek ise $(x_n, y_n) = (p_{2mn-1}, q_{2mn-1})$ biçimindedir. Eğer m çift ise $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur ve m tek ise $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $(x_n, y_n) = (p_{(2n-1)m-1}, q_{(2n-1)m-1})$ biçimindedir [31,32].

Aşağıdaki lemmanın ispatı kolaydır ve sayılar teorisi kitaplarının çoğunda bulunabilir.

Lemma 2.2: d tamkare olmasın. O zaman $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin tamsayı çözümü her zaman vardır.

Lemma 2.3: d tamkare olmayan pozitif tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart \sqrt{d} 'nin sürekli kesir açılımının periyot uzunluğunun tek tamsayı olmasıdır [29].

Lemma 2.4: d tamkare olmayan pozitif tek tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = -4$ denkleminin bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin bir çözümünün olmasıdır [2,30].

$x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü biliniyorsa bu denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri elde edilebilir. Aşağıda verilen teorem temel çözümü bulmak için kullanılabilir.

Tanım 2.4: $x^2 - dy^2 = \pm 4$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri arasında x_1 'in en küçük tamsayı değerini aldığı bir $x_1 + y_1\sqrt{d}$ çözümü vardır. Bu çözüme $x^2 - dy^2 = \pm 4$ denkleminin temel çözümü denir.

Lemma 2.5: d tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Eğer δ ve ξ doğal sayıları $\delta > \frac{1}{2}\xi^2 - 1$ eşitsizliğini sağlıyor ve $\delta + \xi\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise $\delta + \xi\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümüdür [31].

Lemma 2.6: d tamkare olmayan pozitif tamsayı olsun. Eğer a ve b doğal sayıları

$$a > b^2 - 2 \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlıyor ve $a + b\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin bir çözümü ise $a + b\sqrt{d}, x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümüdür.

İspat: $b = 1$ için ispat aşıkardır. $b > 1$ için teoremi ispatlayalım. $x_1 + y_1\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 4$ Pell denkleminin bir çözümü olsun. Ayrıca $1 \leq y_1 < b$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$a^2 - db^2 = x_1^2 - dy_1^2 = 4, d = \frac{x_1^2 - 4}{y_1^2} = \frac{a^2 - 4}{b^2}$$

ve

$$x_1^2 b^2 - y_1^2 a^2 = 4(b^2 - y_1^2) > 0$$

dir. Buradan da

$$\left(\frac{x_1 b + y_1 a}{2}\right) \left(\frac{x_1 b - y_1 a}{2}\right) = b^2 - y_1^2 = m$$

olur. Ayrıca $x_1 b - y_1 a$ ve $x_1 b + y_1 a$ tamsayılarının birer çift tamsayı olduğunu görmek kolaydır. Eğer

$$m_1 = \frac{x_1 b + y_1 a}{2}, m_2 = \frac{x_1 b - y_1 a}{2}$$

olarak alınırsa m_1 ve m_2 birer tamsayı olur. O halde elde edilen bilgiler ışığında

$$a = \frac{m_1 - m_2}{y_1} \leq \frac{m_1 m_2 - 1}{y_1} = \frac{b^2 - y_1^2 - 1}{y_1} \leq b^2 - y_1^2 - 1 \leq b^2 - 2$$

bulunur. Ama bu durum (2.1) eşitsizliği ile çelişir. Şu halde $a + b\sqrt{d}$ temel çözümdür.

Teorem 2.6: d tamkare olmayan pozitif tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü (x_1, y_1) ise $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$\frac{x_n + y_n\sqrt{d}}{2} = \left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

formülü ile elde edilir [69].

Lemma 2.7: d tamkare olmayan pozitif tamsayı ve (a, b) , $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_n(a, -1), bU_n(a, -1))$$

ile verilir.

İspat: (a, b) , $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin temel çözümü olsun. O zaman Teorem 2.6 ya göre $x^2 - dy^2 = 4$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{d} = 2\left(\frac{a + b\sqrt{d}}{2}\right)^n$$

biçimindedir. $\alpha = \frac{a+b\sqrt{d}}{2}$ ve $\beta = \bar{\alpha} = \frac{a-b\sqrt{d}}{2}$ alalım. O zaman $x_n + y_n\sqrt{d} = 2\alpha^n$ ve $x_n - y_n\sqrt{d} = 2\beta^n$ olur. Böylece

$$x_n = \alpha^n + \beta^n \text{ ve } y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{d}}$$

elde edilir. Diğer yandan $\alpha + \beta = a$, $\alpha - \beta = b\sqrt{d}$ ve $\alpha\beta = 1$ olduğundan $x_n = V_n(a, -1)$ ve $y_n = bU_n(a, -1)$ olduğu görülür. ■

BÖLÜM 3. BAZI İKİNCİ DERECEDEKİ DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Fibonacci ve Lucas sayıları ile genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili iyi bilinen bazı özellikler aşağıda verilmiştir:

$$L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n, \quad (3.1)$$

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n, \quad (3.2)$$

$$F_{2n+2}^2 - 3F_{2n+2}F_{2n} + F_{2n}^2 = 1, \quad (3.3)$$

$$V_n(k, -1) = U_{n+1}(k, -1) - U_{n-1}(k, -1) = kU_n(k, -1) - 2U_{n-1}(k, -1), \quad (3.4)$$

$$V_n(k, 1) = U_{n+1}(k, 1) + U_{n-1}(k, 1) = kU_n(k, 1) + 2U_{n-1}(k, 1), \quad (3.5)$$

$$V_{n+1}(k, -1) - V_{n-1}(k, -1) = (k^2 - 4)U_n, \quad (3.6)$$

$$V_n^2(k, -1) - (k^2 - 4)U_n^2(k, -1) = 4, \quad (3.7)$$

$$V_{2n}^2(k, 1) - (k^2 + 4)U_{2n}^2(k, 1) = 4, \quad (3.8)$$

$$V_n(k, -1)V_{n-1}(k, -1) - (k^2 - 4)U_n(k, -1)U_{n-1}(k, -1) = 2k, \quad (3.9)$$

$$U_n^2(k, -1) - kU_n(k, -1)U_{n-1}(k, -1) + U_{n-1}^2(k, -1) = 1, \quad (3.10)$$

$$U_n^2(k, 1) - kU_n(k, 1)U_{n-1}(k, 1) - U_{n-1}^2(k, 1) = (-1)^{n+1}, \quad (3.11)$$

$$V_n^2(k, -1) - kV_n(k, -1)V_{n-1}(k, -1) + V_{n-1}^2(k, -1) = -(k^2 - 4), \quad (3.12)$$

$$U_{2n+1}(k, 1) = U_{n+1}(k^2 + 2, -1) - U_n(k^2 + 2, -1) \quad (3.13)$$

dir.

3.1. Bazı Özel Sürekli Kesir Açılımları ve Bazı Pell Denklemlerinin Çözümleri

Buradan itibaren s ve r pozitif tamsayı olarak kabul edilecektir. $s^2r^2 + 2r, r^2 - 2r, 4r^2 - 2r, s^2r^2 - 2r, s^2r^2 + r, s^2r^2 - r, s^2r^2 - 4r$ ve $s^2r^2 + 4r$ tamsayılarının tamkare olmadığı gösterilebilir. Aşağıda bu sayıların sürekli kesir açılımları verilecektir.

Lemma 3.1.1: $\sqrt{s^2r^2 + 2r} = [sr, \overline{s, 2sr}]$ dir.

İspat: $(sr)^2 < s^2r^2 + 2r < (sr + 1)^2$ olduğundan

$$sr < \sqrt{s^2r^2 + 2r} < sr + 1 \quad (3.14)$$

olur. O zaman

$$a_0 = \left\lfloor \sqrt{s^2r^2 + 2r} \right\rfloor = sr$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{s^2r^2 + 2r} - sr} = \frac{\sqrt{s^2r^2 + 2r} + sr}{2r}$$

olup (3.14) eşitsizliğinin her iki yanına sr eklenip $1/2r$ ile çarpılırsa

$$s < \frac{\sqrt{s^2r^2 + 2r} + sr}{2r} < s + \frac{1}{2r}$$

bulunur. Böylece

$$a_1 = \left\lfloor \left\lceil \frac{\sqrt{s^2 r^2 + 2r} + sr}{2r} \right\rceil \right\rfloor = s$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{\frac{\sqrt{s^2 r^2 + 2r} + sr}{2r} - s} = \frac{2r}{\sqrt{s^2 r^2 + 2r} - sr} \\ &= \frac{2r(\sqrt{s^2 r^2 + 2r} + sr)}{2r} = \sqrt{s^2 r^2 + 2r} + sr \end{aligned}$$

olur. O zaman

$$a_2 = \left\lfloor \left\lceil \sqrt{s^2 r^2 + 2r} + sr \right\rceil \right\rfloor = 2sr = 2a_0$$

bulunur. O halde Teorem 2.3'e göre

$$\sqrt{s^2 r^2 + 2r} = [sr, \overline{s}, 2sr]$$

elde edilir.

$$\mathbf{Lemma\ 3.1.2:} \quad \sqrt{s^2 r^2 - r} = \begin{cases} [s - 1, \overline{1, 2(s - 1)}] & r = 1 \text{ ve } s > 1 \text{ ise,} \\ [sr - 1, \overline{1, 2s - 2, 2(sr - 1)}] & r > 1 \text{ ve } s > 1 \text{ ise,} \\ [r - 1, \overline{2, 2(r - 1)}] & r > 1 \text{ ve } s = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat: $(sr - 1)^2 = s^2 r^2 - 2sr + 1 < s^2 r^2 - r < (sr)^2$ olduğundan dolayı

$$sr - 1 < \sqrt{s^2 r^2 - r} < sr \tag{3.15}$$

olur. O zaman

$$a_0 = \left\lfloor \sqrt{s^2 r^2 - r} \right\rfloor = sr - 1 \rightarrow a_0 = sr - 1$$

ve

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{s^2 r^2 - r} - (sr - 1)} = \frac{\sqrt{s^2 r^2 - r} + sr - 1}{2sr - r - 1}$$

olup (3.15) eşitsizliğinin her iki yanına $sr - 1$ eklenip $1/(2sr - r - 1)$ ile çarpılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{2sr-2}{2sr-r-1} < \frac{\sqrt{s^2 r^2 - r} + sr - 1}{2sr-r-1} < \frac{2sr-1}{2sr-r-1} \quad (3.16)$$

bulunur. Buradan itibaren $r > 1$ ve $r = 1$ durumları ayrı ayrı incelenmelidir.

1. Durum: $r = 1$ olsun. O zaman $\sqrt{s^2 - 1} \neq 0$ olması için $s > 1$ olmalıdır. O halde (3.16) kullanılırsa

$$1 \leq \frac{\sqrt{s^2 - 1} + s - 1}{2s - 2} < 1 + \frac{1}{2s - 2}$$

bulunur. Böylece

$$a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{s^2 - 1} + s - 1}{2s - 2} \right\rfloor = 1 \text{ ve } \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{s^2 - 1} + s - 1}{2s - 2} - 1} = \sqrt{s^2 - 1} + s - 1$$

ve

$$a_2 = \left\lfloor \sqrt{s^2 - 1} + s - 1 \right\rfloor = 2s - 2 = 2a_0$$

olur. Teorem 2.3'e göre

$$\sqrt{s^2 r^2 - r} = \sqrt{s^2 - 1} = [s - 1, \overline{1, 2(s - 1)}]$$

dir.

2. Durum: $r > 1$ olsun. O zaman (3.16)'ya göre iki durum söz konusudur.

a. $s = 1$ olsun. Bu değer (3.16) da yerine konulursa

$$2 \leq \frac{\sqrt{r^2 - r} + r - 1}{r - 1} < 2 + \frac{1}{r - 1}$$

bulunur. Böylece

$$a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{r^2 - r} + r - 1}{r - 1} \right\rfloor = 2$$

ve

$$a_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{r^2 - r} + r - 1}{r - 1} - 2} = \sqrt{r^2 - r} + r - 1$$

bulunur. Buradan

$$a_2 = \left\lfloor \sqrt{r^2 - r} + r - 1 \right\rfloor = 2r - 2 = 2a_1$$

elde edilir. O zaman Teorem 2.3'e göre $r > 1$ ve $s = 1$ için

$$\sqrt{s^2 r^2 - r} = \sqrt{r^2 - r} = [r - 1, \overline{2, 2(r - 1)}]$$

dir.

b. $s > 1$ olsun. O zaman (3.16) kullanılırsa

$$\frac{2sr - 2}{2sr - r - 1} = 1 + \frac{r - 1}{2sr - r - 1} < \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - 1}{2sr - r - 1} < 1 + \frac{r}{2sr - r - 1} < 2$$

olduğu gösterilebilir. O halde

$$a_1 = \left\lceil \left\lfloor \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - 1}{2sr - r - 1} \right\rfloor \right\rceil = 1$$

ve

$$a_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - 1}{2sr - r - 1} - 1} = \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{r}$$

bulunur. Buradan

$$2s - 2 < 2s - 1 - \frac{1}{r} < \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{r} < \frac{2sr - r}{r} = 2s - 1$$

elde edilir. Şu halde

$$a_2 = \left\lceil \left\lfloor \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{r} \right\rfloor \right\rceil = 2s - 2$$

ve

$$a_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{r} - (2s - 2)} = \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{2sr - r - 1}$$

dir. Böylece

$$1 = \frac{sr - 1 + sr - r}{2sr - r - 1} < \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{2sr - r - 1} < 1 + \frac{1}{2sr - r - 1}$$

olduğundan

$$a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{2sr - r - 1} \right\rfloor = 1$$

ve

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{s^2r^2 - r} + sr - r}{2sr - r - 1} - 1} = \sqrt{s^2r^2 - r} + sr - 1$$

bulunur. O zaman

$$a_4 = \left\lfloor \sqrt{s^2r^2 - r} + sr - 1 \right\rfloor = 2(sr - 1) = 2a_0$$

olur. Böylece Teorem 2.3'e göre $r > 1$ ve $s > 1$ için

$$\sqrt{s^2r^2 - r} = [sr - 1, \overline{1,2(s-1)}, 1,2(sr-1)]$$

dir. ■

Yukarıdaki lemmalara benzer şekilde Teorem 2.3 de verilen formül kullanılarak aşağıdaki beş lemmanın doğruluğu gösterilebilir.

Lemma 3.1.3: $r > 2$ olsun. O zaman $\sqrt{r^2 - 2r} = [r - 2, \overline{1,2(r-2)}]$ dir.

Lemma 3.1.4: $r \geq 2$ olsun. Bu durumda $\sqrt{4r^2 - 2r} = [2r - 1, \overline{2,2(2r-1)}]$ dir.

Lemma 3.1.5: $s > 2$ olsun. Bu taktirde $\sqrt{s^2r^2 - 2r} = [sr - 1, \overline{1, s-2, 1, 2sr-2}]$

dir.

$$\text{Lemma 3.1.6: } \sqrt{s^2r^2 + r} = \begin{cases} [sr, \overline{2s}, 2sr] & r > 1 \text{ ise,} \\ [s, \overline{2s}] & r = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Lemma 3.1.7: $\sqrt{s^2r^2 + 4r}$ 'nin sürekli kesir açılımı

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left[sr, \frac{s}{2}, 2sr \right] & s \text{ çift ise,} \\ \left[s, \frac{s-1}{2}, 1, 1, \frac{s-1}{2}, 2s \right] & r = 1 \text{ ve } s > 1 \text{ tek ise,} \\ \left[sr, \frac{s-1}{2}, 1, 1, \frac{sr-1}{2}, 2s, \frac{sr-1}{2}, 1, 1, \frac{s-1}{2}, 2sr \right] & s \geq 2 \text{ tek ve } r > 1 \text{ tek ise,} \\ \left[sr, \frac{s-1}{2}, 1, 1, \frac{sr-2}{2}, 1, 1, \frac{s-1}{2}, 2sr \right] & s \geq 2 \text{ tek ve } r > 1 \text{ çift ise,} \\ \left[r+1, 1, \frac{r-2}{2}, 1, 2(r+1) \right] & s = 1 \text{ ve } r > 2 \text{ çift ise,} \\ \left[r+1, 1, \frac{r-1}{2}, 2, \frac{r-1}{2}, 1, 2(r+1) \right] & s = 1 \text{ ve } r > 1 \text{ tek ise,} \\ \left[2, \overline{4} \right] & s = 1 \text{ ve } r = 1 \text{ ise,} \\ \left[3, \overline{2,6} \right] & s = 1 \text{ ve } r = 2 \text{ ise} \end{array} \right.$$

dir.

Lemma 3.1.8: $\sqrt{s^2r^2 - 4r}$ 'nin sürekli kesir açılımı

$$\left\{ \begin{array}{l}
\left[s-1, 1, \frac{s-3}{2}, 2, \frac{s-3}{2}, 1, 2(s-1) \right] \\
\left[s-1, 1, \frac{s-4}{2}, 1, 2(s-1) \right] \\
\left[3, \overline{2,6} \right] \\
\left[2s-1, 1, \frac{s}{2}-2, 1, 2(2s-1) \right] \\
\left[2, \overline{1,4} \right] \\
\left[5, 3, 2, 3, 10 \right] \\
\left[7, \overline{2,14} \right] \\
\left[2s-1, 1, \frac{s-3}{2}, 2, s-1, 2, \frac{s-3}{2}, 1, 2(2s-1) \right] \\
\left[sr-1, 1, \frac{s}{2}-2, 1, 2(sr-1) \right] \\
\left[2r-2, 1, 2(2r-2) \right] \\
\left[4r-1, 2, 2(4r-1) \right] \\
\left[sr-1, 1, \frac{s-3}{2}, 2, \frac{sr-2}{2}, 2, \frac{s-3}{2}, 1, 2(sr-1) \right] \\
\left[sr-1, 1, \frac{s-3}{2}, 2, \frac{sr-3}{2}, 1, 2s-2, 1, \frac{sr-3}{2}, 2, \frac{s-3}{2}, 1, 2(sr-1) \right] \\
\left[r-3, 1, \frac{r-6}{2}, 1, 2(r-3) \right] \\
\left[r-3, 1, \frac{r-5}{2}, 2, \frac{r-5}{2}, 1, 2(r-3) \right] \\
\left[2, \overline{4} \right] \\
\left[3r-1, 3, \frac{3r-2}{2}, 3, 2(3r-1) \right] \\
\left[3r-1, 3, \frac{3r-3}{2}, 1, 4, 1, \frac{3r-3}{2}, 3, 2(3r-1) \right]
\end{array} \right. \begin{array}{l}
r = 1 \text{ ve } s > 3 \text{ tek ise,} \\
r = 1 \text{ ve } s > 4 \text{ çift ise,} \\
r = 1 \text{ ve } s = 4 \text{ ise,} \\
r = 2 \text{ ve } s > 4 \text{ çift ise,} \\
r = 2 \text{ ve } s = 2 \text{ ise,} \\
r = 2 \text{ ve } s = 3 \text{ ise,} \\
r = 2 \text{ ve } s = 4 \text{ ise,} \\
r = 2 \text{ ve } s > 3 \text{ tek ise,} \\
r > 2 \text{ ve } s > 4 \text{ çift ise,} \\
r > 2 \text{ ve } s = 2 \text{ ise,} \\
r > 2 \text{ ve } s = 4 \text{ ise,} \\
r > 2 \text{ ve } s > 3 \text{ tek ise,} \\
r > 2 \text{ tek ve } s > 3 \text{ tek ise,} \\
r > 6 \text{ çift ve } s = 1 \text{ ise,} \\
r > 5 \text{ tek ve } s = 1 \text{ ise,} \\
r = 5 \text{ ve } s = 1 \text{ ise,} \\
r > 2 \text{ çift ve } s = 3 \text{ ise,} \\
r > 2 \text{ tek ve } s = 3 \text{ ise}
\end{array}$$

dir.

Lemma 3.1.1, Lemma 3.1.2, Lemma 3.1.3, Lemma 3.1.5, Lemma 3.1.6 ve Lemma 2.3 kullanılarak aşağıdaki dört sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1.1: $x^2 - (s^2r^2 + 2r)y^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 3.1.2: $x^2 - (s^2r^2 - r)y^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 3.1.3: $r \geq 2$ olsun. $x^2 - (4r^2 - 2)y^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 3.1.4: $r > 2$ olsun. $x^2 - (r^2 - 2r)y^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 3.1.5: $s > 2$ olsun. $x^2 - (s^2r^2 - 2r)y^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 3.1.6: $x^2 - (s^2r^2 + r)y^2 = -1$ denkleminin bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart $r = 1$ olmasıdır.

3.2. Bazı İkinci Dereceden Özel Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde aksi belirtilmedikçe kolaylık olması açısından $U_n(k, -1)$ ve $V_n(k, -1)$ yerine sırasıyla U_n ve V_n kullanılacaktır. Ayrıca aksi belirtilmedikçe $k \geq 3$ olduğu kabul edilecektir. Bu bölümde denklemlerin simetrik çözümleri ihmal edilmiştir.

Teorem 3.2.1: $k \neq 3$ ve $k \neq 6$ ise $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur. Bu denklemin pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$(x, y) = \begin{cases} (L_{2n+2}, L_{2n}) & k = 3 \text{ ise,} \\ (P_{2n} + P_{2n-1}, P_{2n-1} - P_{2n-2}) & k = 6 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. $x = y$ ise $(2 - k)x^2 = -(k + 2)$ olduğundan bu imkansızdır. O halde

çözümler de simetrik olduğundan genelliği bozmaksızın $x > y$ olduğu kabul edilebilir. Denklem kareye tamamlanırsa

$$(x + y)^2 - (k + 2)xy = -(k + 2)$$

elde edilir. m karesiz bir tamsayı ve s pozitif tamsayı olmak üzere $k + 2 = s^2m$ olarak yazılabilir. Şimdi $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. O zaman

$$u^2 - s^2m \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = -s^2m$$

olur. Bu yüzden $sm|u$ bulunur. O halde $u = sma$ olacak şekilde a tamsayısı vardır. Böylece

$$s^2m^2a^2 - s^2m \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = -s^2m,$$

yani

$$v^2 - (s^2m^2 - 4m)a^2 = -4$$

elde edilir. İlk olarak k bir çift tamsayı olsun. $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)$ olduğundan x ve y aynı anda tek veya çift tamsayı olmalıdır. Bu yüzden v de çift tamsayıdır. Diğer yandan k çift tamsayı olduğundan $k + 2 = s^2m$ de çift tamsayıdır. O zaman s veya m çifttir. Böylece

$$\left(\frac{v}{2} \right)^2 - \left(\frac{s^2m^2 - 4m}{4} \right) a^2 = -1 \tag{3.17}$$

yazılabilir. İlk olarak s 'nin çift tamsayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $s = 2r$ olacak şekilde r tamsayısı vardır. Buradan $\frac{s^2m^2 - 4m}{4} = r^2m^2 - m$ bulunur. (3.17) kullanılarak

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 - (r^2m^2 - m)a^2 = -1$$

elde edilir. Bu ise Sonuç 3.1.2'den dolayı imkansızdır. Şimdi m 'nin çift tamsayı olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $m = 2e$ olacak şekilde e tamsayısı vardır. Böylece $\frac{s^2m^2 - 4m}{4} = s^2e^2 - 2e$ olur. O zaman (3.17) kullanılarak

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 - (s^2e^2 - 2e)a^2 = -1 \quad (3.18)$$

elde edilir. $s = 1$ ve $e > 2$ ise (3.18)'den $\left(\frac{v}{2}\right)^2 - (e^2 - 2e)a^2 = -1$ olur. Bu ise Sonuç 3.1.4'den dolayı imkansızdır. $s = 1$ ve $e = 1$ ise (3.18)'den $\left(\frac{v}{2}\right)^2 + a^2 = -1$ elde edilir. Bu imkansızdır. $s = 1$ ve $e = 2$ ise (3.18) kullanılarak $\left(\frac{v}{2}\right)^2 = -1$ bulunur. Bu ise imkansızdır. $s = 2$ ve $e > 1$ ise (3.18) kullanılarak $\left(\frac{v}{2}\right)^2 - (4e^2 - 2e)a^2 = -1$ elde edilir. Bu ise Sonuç 3.1.4'e göre imkansızdır. $s = 2$ ve $e = 1$ ise $k = 6$ olur ve (3.18) kullanılarak $\left(\frac{v}{2}\right)^2 - 2a^2 = -1$ bulunur. O zaman Tablo 1.1'e göre $\left(\frac{v}{2}, a\right) = \left(\frac{Q_{2n-1}}{2}, P_{2n-1}\right)$, yani $(v, a) = (Q_{2n-1}, P_{2n-1})$ olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Böylece $u = sma = 2 \cdot 2 \cdot P_{2n-1}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$x = \frac{u + v}{2} = \frac{4P_{2n-1} + Q_{2n-1}}{2} = P_{2n} + P_{2n-1}$$

ve

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{4P_{2n-1} - Q_{2n-1}}{2} = P_{2n-1} - P_{2n-2}$$

olduğu görülebilir. $s > 2$ olsun. O zaman Sonuç 3.1.5'e göre (3.18) imkansızdır. Şimdi k tek tamsayı olsun. O zaman $s^2m^2 - 4m$ 'nin de tek tamsayı olduğu görülür. (v, a) , $x^2 - (s^2m^2 - 4m)y^2 = -4$ denkleminin bir tamsayı çözümü olduğundan

Lemma 2.4'e göre $x^2 - (s^2m^2 - 4m)y^2 = -1$ denkleminin de bir tamsayı çözümü vardır. O zaman Lemma 2.3'den dolayı $s^2m^2 - 4m$ 'nin sürekli kesir açılımının periyodu tek tamsayı olmalıdır. O halde Lemma 3.1.8'e göre $m = 5$ ve $s = 1$ dir. Dolayısıyla $k = s^2m - 2 = 3$ olur. Böylece

$$x^2 - 3xy + y^2 = -5$$

denklemini elde edilir. Tablo 1.1'e göre bu denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere $(x, y) = (L_{2n+2}, L_{2n})$ biçimindedir.

Teorem 3.2.2: $k + 2$ tamkare olmayan bir tamsayı olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = k + 2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri, $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{n+1} + U_n, U_n + U_{n-1})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = k + 2$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. $x = y$ ise $(2 - k)x^2 = k + 2$ olduğundan bu durum imkansızdır. O halde çözümler de simetrik olduğundan genelliği bozmaksızın $x > y$ alınabilir. Denklem kareye tamamlanırsa

$$(x + y)^2 - (k + 2)xy = k + 2$$

denklemini elde edilir. e karesiz bir pozitif tamsayı olmak üzere $k + 2 = s^2e$ olarak yazılabilir. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. O zaman

$$u^2 - s^2e \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = s^2e$$

olur. Buradan $se|u$ bulunur. O halde $u = sea$ olacak şekilde a tamsayısı vardır. Böylece

$$s^2 e^2 a^2 - s^2 e \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = s^2 e,$$

yani

$$v^2 - (s^2 e^2 - 4e)a^2 = 4$$

elde edilir. $e > 1$ için $s^2 e - 2 > s^2 - 2$ ve $(s^2 e - 2)^2 - (s^2 e^2 - 4e)s^2 = 4$ olduğundan Lemma 2.6'dan dolayı $X^2 - (s^2 e^2 - 4e)Y^2 = 4$ denkleminin temel çözümü $(X, Y) = (s^2 e - 2, s)$ olur. Lemma 2.7'ye göre $(v, a) = (V_n(s^2 e - 2, -1), sU_n(s^2 e - 2, -1))$ olacak şekilde $n \geq 1$ mevcuttur. Böylece $u = sea = s^2 e U_n(s^2 e - 2, -1) = (k + 2)U_n$ elde edilir. Dolayısıyla (3.4) kullanılarak

$$x = \frac{u + v}{2} = \frac{(k + 2)U_n + V_n}{2} = \frac{(k + 2)U_n + kU_n - 2U_{n-1}}{2} = U_{n+1} + U_n$$

ve

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{(k + 2)U_n - V_n}{2} = \frac{(k + 2)U_n - kU_n + 2U_{n-1}}{2} = U_n + U_{n-1}$$

bulunur. Diğer yandan $(x, y) = (U_{n+1} + U_n, U_n + U_{n-1})$ ise (3.10) kullanılarak $x^2 - kxy + y^2 = k + 2$ olduğu görülebilir.

Teorem 3.2.3: $x^2 - (k^2 - 2)xy + y^2 = k^2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 3$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_n, U_{n-2})$$

ile verilir.

İspat: $s = k^2 - 2$ olsun. (x, y) , $x^2 - sxy + y^2 = s + 2$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ kabul edilebilir. O zaman

$sx - 2y > 0$ olduğu gösterilebilir. $x^2 - sxy + y^2 = s + 2$ denkleminin her iki yanını 4 ile çarpılırsa ve kareye tamamlanırsa $(sx - 2y)^2 - (s^2 - 4)x^2 = 4(s + 2)$, yani

$$(sx - 2y)^2 - (k^2 - 4)k^2x^2 = 4k^2$$

elde edilir. O halde $sx - 2y = ka$ olacak şekilde a tamsayısı vardır. Böylece $k^2a^2 - (k^2 - 4)k^2x^2 = 4k^2$, yani

$$a^2 - (k^2 - 4)x^2 = 4$$

olur. Tablo 1.1'e göre $(a, x) = (V_n, U_n)$ olacak şekilde $n \geq 1$ mevcuttur. O zaman $sx - 2y = ka = kV_n$ ve bu yüzden de

$$y = \frac{sx - kV_n}{2} = \frac{(k^2 - 2)U_n - kV_n}{2} = U_{n-2}$$

bulunur. $n = 1, 2$ ise $y = U_{n-2} < 0$ olur. Dolayısıyla $n \geq 3$ olmalıdır. Tersine $x = U_n$ ve $y = U_{n-2}$ ise (3.10) kullanılarak $x^2 - (k^2 - 2)xy + y^2 = k^2$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.4: $k + 2$ tamkare olmasın. O zaman $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_n + V_{n-1}, U_n + U_{n-1})$$

ile verilir.

İspat: $(x, y), x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman

$$(x + ky)^2 - 2k(x + ky)y + (2y)^2 = 4(k + 2)$$

olur. Buradan $2|(x + ky)$ olduğu görülebilir. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ olsun. O zaman

$$u^2 - kuv + v^2 = k + 2$$

denklemini elde edilir. Teorem 3.2.2'ye göre $(u, v) = (U_{n+1} + U_n, U_n + U_{n-1})$ olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Bu yüzden (3.4) kullanılarak

$$x = 2u - kv = 2(U_{n+1} + U_n) - k(U_n + U_{n-1}) = V_n + V_{n-1}$$

ve

$$y = v = U_n + U_{n-1}$$

bulunur. Eğer $(x, y) = (V_n + V_{n-1}, U_n + U_{n-1})$ ise (3.7) ve (3.9) kullanılarak $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.5: $k + 2$ tamkare olsun. O zaman $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 3$, $U_n = U_n(\sqrt{k+2}, -1)$ ve $V_n = V_n(\sqrt{k+2}, -1)$ olmak üzere

$$(x, y) = (\sqrt{k+2}V_{n-2}, U_{n-2})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman $(x + ky)^2 - 2k(x + ky)y + (2y)^2 = 4(k + 2)$ olur. Buradan $2|(x + 2y)$ olduğu görülebilir. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ olsun. Ayrıca $k + 2$ tamkare olduğundan $s^2 = k + 2$ olacak şekilde s tamsayısı vardır. Böylece

$$u^2 - (s^2 - 2)uv + v^2 = s^2$$

denklemleri elde edilir. Teorem 3.2.3'e göre $u = U_n(s, -1)$ ve $v = U_{n-2}(s, -1)$ olacak biçimde $n \geq 3$ mevcuttur. $s^2 = k + 2$ olduğundan (3.4) kullanılarak $U_n = U_n(s, -1) = U_n(\sqrt{k+2}, -1)$ ve $V_n(s, -1) = V_n(\sqrt{k+2}, -1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= 2u - ky = 2U_n - kU_{n-2} = 2\sqrt{k+2}U_{n-1} - 2U_{n-2} - kU_{n-2} \\ &= \sqrt{k+2}(U_{n-1} + \sqrt{k+2}U_{n-2} - U_{n-3} - \sqrt{k+2}U_{n-2}) \\ &= \sqrt{k+2}(U_{n-1} - U_{n-3}) = \sqrt{k+2}V_{n-2} \end{aligned}$$

ve

$$y = v = U_{n-2}$$

bulunur. Tersine $n \geq 3, U_n = U_n(\sqrt{k+2}, -1)$ ve $V_n = V_n(\sqrt{k+2}, -1)$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k+2}V_{n-2}, U_{n-2})$ ise $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k+2)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.2.6: $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k+2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $k = 3$ veya $k = 6$ iken vardır. Bu denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri

$$(x, y) = \begin{cases} (5F_{2n}, L_{2n}), (n \geq 1) & k = 3 \text{ ise,} \\ (8P_{2n-2}, P_{2n-1} - P_{2n-2}), (n \geq 2) & k = 6 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilir.

İspat: $(x, y), x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k+2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman $2|(x + ky)$ olduğu gösterilebilir. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ olsun. Buradan

$$u^2 - kuv + v^2 = -(k+2)$$

denklemleri elde edilir. Böylece Teorem 3.2.1'e göre $k = 3$ veya $k = 6$ olur. İlk olarak

$k = 3$ olsun. Teorem 3.2.1'den dolayı $(u, v) = (L_{2n+2}, L_{2n})$ olacak şekilde $n \geq 0$ mevcuttur. Böylece (3.1) kullanılarak

$$x = 2u - kv = 2L_{2n+2} - 3L_{2n} = 5F_{2n} \text{ ve } y = v = L_{2n}$$

bulunur. Eğer $n = 0$ ise $x = 0$ olduğundan $n \geq 1$ olmalıdır. Şimdi de $k = 6$ olsun. O zaman Teorem 3.2.1'e göre $(u, v) = (P_{2n} + P_{2n-1}, P_{2n-1} - P_{2n-2})$ olacak şekilde $n \geq 0$ mevcuttur. O halde

$$x = 2u - kv = 2(P_{2n} + P_{2n-1}) - 6(P_{2n-1} - P_{2n-2}) = 8P_{2n-2}$$

ve

$$y = v = P_{2n-1} - P_{2n-2}$$

bulunur. $n = 0, 1$ olması x ve y 'nin pozitif tamsayı olmasıyla çelişir. Bu yüzden $n \geq 1$ dir. Tersine $25F_{2n}^2 - 5L_{2n}^2 = -20$ ve $64P_{2n-2}^2 - 32(P_{2n-1} - P_{2n-2})^2 = -20$ olduğunu görmek kolaydır. ■

Aşağıdaki teoremin ispatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.2.7: $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k - 2)$ denkleminin bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart $k - 2$ 'nin tamkare olmasıdır. $k - 2$ tamkare ise denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 2$, $U_n = U_n(\sqrt{k-2}, 1)$ ve $V_n = V_n(\sqrt{k-2}, 1)$ olmak üzere

$$(x, y) = (\sqrt{k-2}V_{2n-2}, U_{2n-2})$$

ile verilir.

Teorem 3.2.8: $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{n+1} - U_n, U_n - U_{n-1})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ kabul edilebilir. O zaman $x - y \geq 0$ olur. Denklem kareye tamamlanırsa

$$(x - y)^2 - (k - 2)xy = -(k - 2)$$

elde edilir. m karesiz bir tamsayı olmak üzere $k - 2 = s^2m$ olarak yazılabilir. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olsun. Dolayısıyla

$$v^2 - s^2m \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = -s^2m$$

bulunur. Bu yüzden $sm|v$ olur. O halde $v = sma$ olacak şekilde a tamsayısı vardır. Buradan

$$s^2m^2a^2 - s^2m \left(\frac{u^2 - (sma)^2}{4} \right) = -s^2m,$$

yani

$$u^2 - (s^2m^2 + 4m)a^2 = 4$$

elde edilir. $m \geq 1$ için $(s^2m + 2)^2 - (s^2m^2 + 4m)s^2 = 4$ ve $s^2m + 2 > s^2 - 2$ olduğundan Lemma 2.6'ya göre $X^2 - (s^2m^2 + 4m)Y^2 = 4$ denkleminin temel çözümünün $(X, Y) = (s^2m + 2, s)$ olduğu görülür. Lemma 2.7'den dolayı $(u, a) = (V_n(s^2m + 2, -1), sU_n(s^2m + 2, -1))$ olacak şekilde $n \geq 0$ vardır. Buradan da

$$v = sma = s^2mU_n(s^2m + 2, -1) = (k - 2)U_n$$

olduğu görülebilir. $u = x + y$ ve $v = x - y$ olduğundan (3.4)'ün yardımıyla

$$x = \frac{u + v}{2} = \frac{V_n + (k - 2)U_n}{2} = U_{n+1} - U_n$$

ve

$$y = \frac{u - v}{2} = \frac{V_n - (k - 2)U_n}{2} = U_n - U_{n-1}$$

elde edilir. Ayrıca $(x, y) = (U_{n+1} - U_n, U_n - U_{n-1})$ ise (3.10) kullanılarak $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Sonuç 3.2.1: $k \geq 1$ olsun. O zaman $x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 = -k^2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 0$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n+1}, U_{2n-1})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 = -k^2$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. $s = k^2 + 2$ olsun. O zaman $x^2 - sxy + y^2 = -(s - 2)$ denklemi elde edilir. $s = k^2 + 2 > 2$ olduğundan Teorem 3.2.8'den dolayı $U_n = U_n(s, -1)$ olmak üzere $(x, y) = (U_{n+1}, U_n, U_n - U_{n-1})$ olacak biçimde $n \geq 0$ mevcuttur. Böylece (3.13) özelliği kullanılırsa

$$x = U_{n+1}(k^2 + 2, -1) - U_n(k^2 + 2, -1) = U_{2n+1}(k, 1)$$

ve

$$y = U_n(k^2 + 2, -1) - U_{n-1}(k^2 + 2, -1) = U_{2n-1}(k, 1)$$

bulunur. Ayrıca $n \geq 0$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere $(x, y) = (U_{2n+1}, U_{2n-1})$ ise

$x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 = -k^2$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.2.9: $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_n - V_{n-1}, U_n - U_{n-1})$$

ile verilir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Daha önceki ispatlara benzer şekilde $2|(x + ky)$ olduğu gösterilebilir. $u = \frac{x+ky}{2}$ ve $v = y$ alınırsa

$$u^2 - kuv + v^2 = -(k - 2)$$

denklemini elde edilir. Teorem 3.2.8'e göre $(u, v) = (U_{n+1} - U_n, U_n - U_{n-1})$ olacak şekilde $n \geq 0$ vardır. Böylece (3.4) kullanılırsa $n \geq 0$ olmak üzere

$$x = 2u - kv = 2(U_{n+1} - U_n) - k(U_n - U_{n-1}) = V_n - V_{n-1}$$

ve

$$y = v = U_n - U_{n-1}$$

olduğu görülür. Ayrıca $n = 0$ ise $x = 2 - k$ olur. O zaman $k \geq 3$ olduğundan $n \geq 1$ olmalıdır. Diğer yandan $(x, y) = (V_n - V_{n-1}, U_n - U_{n-1})$ ise (3.7) ve (3.8) kullanılarak $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.10: $k \geq 1$ olsun. $x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 = k^2$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 2$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n}(k, 1), U_{2n-2}(k, 1))$$

ile verilir.

İspat: $s = k^2 + 2$ ve (x, y) , $x^2 - sxy + y^2 = s - 2$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ olduğu kabul edilebilir. O zaman $sx - 2y > 0$ olduğu gösterilebilir. $x^2 - sxy + y^2 = s - 2$ denkleminin her iki yanını 4 ile çarpılırsa ve denklem kareye tamamlanırsa

$$(sx - 2y)^2 - (s^2 - 4)x^2 = 4(s - 2)$$

denklemini elde edilir. O zaman Teorem 3.2.7'ye göre $(sx - 2y, x) = (\sqrt{s - 2}V_{2n}(\sqrt{s - 2}, 1), U_{2n}(\sqrt{s - 2}, 1))$ olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. $sx - 2y = \sqrt{s - 2}a = \sqrt{s - 2}V_{2n}(\sqrt{s - 2}, 1)$ olduğundan (3.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} y &= \frac{sx - kV_{2n}(k, 1)}{2} = \frac{sU_{2n}(k, 1) - kV_{2n}(k, 1)}{2} \\ &= \frac{(k^2 + 2)U_{2n}(k, 1) - k(kU_{2n}(k, 1) + 2U_{2n-1}(k, 1))}{2} \\ &= \frac{2U_{2n}(k, 1) - 2kU_{2n-1}(k, 1)}{2} \\ &= -kU_{2n-1}(k, 1) + U_{2n}(k, 1) = U_{2n-2}(k, 1) \end{aligned}$$

bulunur. $n = 1$ ise $y = 0$ olduğundan $n \geq 2$ dir. Diğer yandan $x = U_{2n}(k, 1)$ ve $y = U_{2n-2}(k, 1)$ ise (3.11) kullanılarak $x^2 - (k^2 + 2)xy + y^2 - k^2 = 0$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.11: $x^2 - kxy + y^2 = k - 2$ denkleminin tamsayı çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart $k - 2$ 'nin tamkare olmasıdır.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = k - 2$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman $x \neq y$ olduğu gösterilebilir. Böylece genelliği bozmaksızın $x > y$ kabul edilebilir. Denklem kareye tamamlanırsa $(x - y)^2 - (k - 2)xy = k - 2$ denklemini bulunur. Ayrıca $k - 2 = s^2e$ olacak şekilde e karesiz tamsayısı vardır. O zaman

$u = x + y$ ve $v = x - y$ alınırsa $v^2 - s^2 e \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right) = s^2 e$ elde edilir. Buradan $se|v$ bulunur. O halde $v = sea$ olacak biçimde a pozitif tamsayısı vardır. Böylece

$$ea^2 - \left(\frac{u^2 - s^2 e^2 a^2}{4} \right) = 1$$

olur. Buradan da

$$u^2 - (s^2 e^2 + 4e)a^2 = -4 \quad (3.19)$$

bulunur. İlk olarak k çift tamsayı olsun. $x^2 - kxy + y^2 = k - 2$ olduğundan x ve y aynı anda tek veya aynı anda çift olmalıdır. O zaman u ve v çift tamsayı olur. Böylece (3.19) kullanılarak

$$\left(\frac{u}{2} \right)^2 - \left(\frac{s^2 e^2 + 4e}{4} \right) a^2 = -1 \quad (3.20)$$

elde edilir. Diğer yandan k çift tamsayı olduğundan $k - 2 = s^2 e$ de çift tamsayıdır. Dolayısıyla s veya e çift tamsayı olmalıdır. İlk olarak s çift tamsayı olsun. O halde $s = 2r$ olacak biçimde r tamsayısı vardır. Böylece $\frac{s^2 e^2 + 4e}{4} = r^2 e^2 + e$ olur. Böylece (3.20) kullanılarak

$$\left(\frac{u}{2} \right)^2 - (r^2 e^2 + e)a^2 = -1$$

elde edilir. O zaman Sonuç 3.1.6'dan dolayı $e = 1$ olur. Dolayısıyla $k - 2$ tamkaredir. Şimdi e çift tamsayı olsun. O halde $e = 2m$ olacak şekilde m tamsayısı vardır. Böylece $\frac{s^2 e^2 + 4e}{4} = s^2 m^2 + 2m$ olur. (3.19) kullanılırsa

$$(u/2)^2 - (s^2 m^2 + 2m)a^2 = -1 \text{ elde edilir.}$$

Ama Sonuç 3.1.1'e göre bu imkansızdır. k tek tamsayı olsun. $k - 2 = s^2e$ ve k tek olduğundan s ve e tek tamsayı olur. O zaman $s^2e^2 + 4e$ de tek tamsayıdır. (3.19)'a göre $x^2 - (s^2e^2 + 4e)y^2 = -4$ denkleminin bir çözümü olduğundan Lemma 2.4'e göre $x^2 - (s^2e^2 + 4e)y^2 = -1$ denkleminin de bir tamsayı çözümü vardır. O zaman Lemma 2.3'den dolayı $\sqrt{s^2e^2 + 4e}$ 'nin sürekli kesir açılımının periyodu tek tamsayı olmalıdır. O halde Lemma 3.1.7'ye göre $e = 1$ bulunur. Böylece $k - 2$ tamkare olur. Diğer yandan $k - 2$ tamkare ise Teorem 3.2.10'a göre $x^2 - kxy + y^2 = k - 2$ denkleminin tamsayı çözümü vardır.

Teorem 3.2.12: $k^2 - 4$ karesiz bir tamsayı olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ kabul edilebilir. Eğer $x = y$ ise $(2 - k)x^2 = -(k - 2)(k^2 - 4)$ olur. $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan bu imkansızdır. Bu yüzden $x > y$ ve $kx - 2y > 0$ olur. Ayrıca $x^2 - kxy + y^2 = -(k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin her iki yanı 4 ile çarpılırsa ve denklem kareye tamamlanırsa

$$(2x - ky)^2 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)(k^2 - 4)$$

ve

$$(2y - kx)^2 - (k^2 - 4)x^2 = -4(k - 2)(k^2 - 4)$$

bulunur. $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan

$$(k^2 - 4)|(kx - 2y) \text{ ve } (k^2 - 4)|(2x - ky)$$

olduğu gösterilebilir. $u = \frac{kx-2y}{k^2-4}$ ve $v = \frac{2x-ky}{k^2-4}$ olsun. O zaman

$$u^2 - kuv + v^2 = k - 2$$

denklemini elde edilir. Böylece Teorem 3.2.11'den dolayı $k - 2$ tamkare olmalıdır. Fakat $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan bu imkansızdır.

Teorem 3.2.13: $k^2 - 4$ karesiz bir tamsayı olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere $(x, y) = (V_n + V_{n-1}, V_{n-1} + V_{n-2})$

ile verilir.

İspat: $(x, y), x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümleri olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ alınabilir. O zaman $kx - 2y > 0$ olduğu gösterilebilir. $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin her iki yanını 4 ile çarpılırsa ve denklem kareye tamamlanırsa

$$(kx - 2y)^2 - (k^2 - 4)x^2 = -4(k + 2)(k^2 - 4) \quad (3.21)$$

bulunur. $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan $(k^2 - 4) | (kx - 2y)$ dir. O halde $kx - 2y = (k^2 - 4)a$ olacak şekilde a pozitif tamsayısı vardır. (3.21) kullanılırsa $(k^2 - 4)^2 a^2 - (k^2 - 4)x^2 = -4(k^2 - 4)(k + 2)$, yani $x^2 - (k^2 - 4)a^2 = 4(k + 2)$ elde edilir. O zaman Teorem 3.2.4'e göre $(x, a) = (V_n + V_{n-1}, U_n + U_{n-1})$ olacak şekilde $n \geq 1$ mevcuttur. (3.6) kullanılırsa

$$y = \frac{kx - (k^2 - 4)a}{2} = \frac{k(V_n + V_{n-1}) - (k^2 - 4)(U_n + U_{n-1})}{2} = V_{n-1} + V_{n-2}$$

olduğu görülür. Eğer $(x, y) = (V_n + V_{n-1}, V_{n-1} + V_{n-2})$ ise (3.6) ve (3.12) kullanılarak $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.2.14: $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = (k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $k = 3$ iken vardır. Bu durumda bu denklemin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 2$ olmak üzere

$$(x, y) = (5F_{2n}, 5F_{2n-2})$$

biçimindedir.

İspat: (x, y) , $x^2 - kxy + y^2 = (k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman genelliği bozmaksızın $x \geq y$ kabul edilebilir. Eğer $x = y$ ise $(2 - k)x^2 = (k + 2)(k^2 - 4)$ olacağından bu imkansızdır. O halde $x > y$ ve bu yüzden de $kx - 2y > 0$ olur. Ayrıca $x^2 - kxy + y^2 = (k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin her iki yanını 4 ile çarpılırsa ve denklem kareye tamamlanırsa

$$(kx - 2y)^2 - (k^2 - 4)x^2 = 4(k + 2)(k^2 - 4) \quad (3.22)$$

elde edilir. $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan $(k^2 - 4)|(kx - 2y)$ bulunur. O halde $kx - 2y = (k^2 - 4)a$ olacak şekilde a pozitif tamsayısı vardır. (3.22) kullanılırsa $(k^2 - 4)^2 a^2 - (k^2 - 4)x^2 = 4(k^2 - 4)(k + 2)$,

yani

$$x^2 - (k^2 - 4)a^2 = -4(k + 2)$$

elde edilir. Teorem 3.2.6'ya göre $k = 3$ ya da $k = 6$ olur. $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan sadece $k = 3$ olmalıdır. Teorem 3.2.6'ya göre $(x, a) = (5F_{2n}, L_{2n})$ olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. Böylece (3.2) kullanılarak

$$\begin{aligned} y &= \frac{kx - (k^2 - 4)a}{2} = \frac{15F_{2n} - 5L_{2n}}{2} = 5 \frac{3F_{2n} - F_{2n+1} - F_{2n-1}}{2} \\ &= 5 \frac{3F_{2n} - F_{2n} - F_{2n-1} - F_{2n-1}}{2} = 5(F_{2n} - F_{2n-1}) = 5F_{2n-2} \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $n = 1$ ise $y = 5F_{2n-2} = F_0 = 0$ olduğundan bu imkansızdır. Çünkü y pozitif tamsayıdır. O halde $n \geq 2$ olmalıdır. Eğer $n \geq 2$ olmak üzere $k = 3$ ve $(x, y) = (5F_{2n}, 5F_{2n-2})$ ise (3.3) kullanılarak $x^2 - kxy + y^2 = (k + 2)(k^2 - 4)$ olduğu gösterilebilir. ■

Aşağıdaki teoremin ispatı diğer teoremlerin ispatına benzer olduğundan verilmeyecektir.

Teorem 3.2.15: $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = (k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 2$ olmak üzere

$$(x, y) = (V_n - V_{n-1}, V_{n-1} - V_{n-2})$$

ile verilir.

BÖLÜM 4. BAZI DÖRDÜNCÜ DERECEDEDEN DİYOFANT DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Buradan itibaren aksi belirtilmedikçe $n \geq 0$, $k \geq 3$ ve k tek tamsayı olduğu kabul edilecektir ve \square ile tamkare biçimindeki sayılar ifade edilecektir. Ayrıca bu bölümde kolaylık olması açısından $U_n(k, -1)$ ve $V_n(k, -1)$ yerine sırasıyla U_n ve V_n kullanılacaktır.

Teorem 4.1: $V_n(k, -1) = \square$ olacak biçimde n tamsayısı varsa $n = 1$ ve k tamkaredir [18].

Teorem 4.2: $V_n(k, -1) = k\square$ biçimindeki bir n doğal sayısı varsa $n = 1$ dir [66].

Teorem 4.3: $q > 1$ ve $q|k$ olmak üzere $V_n(k, -1) = q\square$ olacak şekilde $n \geq 1$ varsa $n = 1$ dir [66].

Teorem 4.4: $U_n(k, -1) = \square$ ise $n \in \{1, 2, 3, 6\}$ dir. O zaman

$$k = \begin{cases} k & n = 1 \text{ ise,} \\ \square & n = 2 \text{ ise,} \\ 3 & n = 6 \text{ ise} \end{cases}$$

dir [8,57].

Aşağıdaki teoremin ispatı [25] de verilmiştir.

Teorem 4.5: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m, r \in \mathbb{Z}$ ve m sıfırdan farklı olsun. O zaman $U_n = U_n(k, -1)$ ve $V_n = V_n(k, -1)$ olmak üzere

$$U_{2mn+r} \equiv U_r \pmod{U_m}, \quad (4.1)$$

$$U_{2mn+r} \equiv (-1)^n U_r \pmod{V_m}, \quad (4.2)$$

$$V_{2mn+r} \equiv V_r \pmod{U_m}, \quad (4.3)$$

$$V_{2mn+r} \equiv (-1)^n V_r \pmod{V_m} \quad (4.4)$$

dir.

$\left(\frac{a}{b}\right)$ Jacobi sembolünü gösterebilir. O zaman her $a \in \mathbb{Z}$ için $\left(\frac{a^2}{k}\right) = 1$ dir. Ayrıca Jacobi sembolünün özellikleri kullanılarak

$$\left(\frac{-1}{k}\right) = 1 \Leftrightarrow k \equiv 1,5 \pmod{8} \quad (4.5)$$

$$\left(\frac{2}{k}\right) = 1 \Leftrightarrow k \equiv 1,7 \pmod{8} \quad (4.6)$$

$$\left(\frac{-2}{k}\right) = 1 \Leftrightarrow k \equiv 1,3 \pmod{8} \quad (4.7)$$

olduğu gösterilebilir. Jacobi sembolü ile ilgili detaylı bilgi için [29,41] numaralı kaynaklara bakılabilir.

k tek olduğu zaman $V_{2^r} \equiv 7 \pmod{8}$ dir. Bu yüzden $r \geq 1$ için

$$\left(\frac{-1}{V_{2^r}}\right) = -1 \quad (4.8)$$

dir ve basit matematiksel işlemler ile

$$\left(\frac{k+1}{V_{2^r}}\right) = \left(\frac{k-1}{V_{2^r}}\right) = 1 \quad (4.9)$$

olduğu gösterilebilir. Ayrıca $k \equiv 1,7 \pmod{8}$ ise $r \geq 1$ için

$$\left(\frac{k+2}{V_{2^r}}\right) = \begin{cases} 1 & k \equiv 1,7 \pmod{8} \\ -1 & k \equiv 3,5 \pmod{8} \end{cases} \quad (4.10)$$

ve

$$\left(\frac{k-2}{V_{2^r}}\right) = \begin{cases} 1 & k \equiv 3,5 \pmod{8} \\ -1 & k \equiv 1,7 \pmod{8} \end{cases} \quad (4.11)$$

olduğu da kolaylıkla gösterilebilir.

Lemma 4.1: $k \equiv 3 \pmod{8}$ ise $\left(\frac{k^2-k-1}{V_{2^r}}\right) = -1$ dir.

İspat: Tümevarım metoduyla

$$V_{2^r} \equiv \begin{cases} k-1 \pmod{k^2-k-1} & r \text{ çift ise,} \\ -k \pmod{k^2-k-1} & r \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir. İlk olarak r çift tamsayı olsun. O zaman yukarıdaki kongürans kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{k^2-k-1}{V_{2^r}}\right) &= (-1)^{\binom{k^2-k-2}{2} \binom{V_{2^r}-1}{2}} \left(\frac{V_{2^r}}{k^2-k-1}\right) \\ &= \left(\frac{k-1}{k^2-k-1}\right) = \left(\frac{2}{k^2-k-1}\right) \left(\frac{(k-1)/2}{k^2-k-1}\right) \\ &= (-1)^{\frac{(k^2-k-1)^2-1}{8}} (-1)^{\binom{k^2-k-2}{2} \binom{k-3}{4}} \left(\frac{k^2-k-1}{(k-1)/2}\right) \\ &= (-1) \left(\frac{-1}{\frac{k-1}{2}}\right) = (-1)(-1)^{\frac{k-3}{4}} = -1 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi r tek tamsayı olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k^2 - k - 1}{V_{2^r}}\right) &= (-1)^{\binom{k^2-k-2}{2}\binom{V_{2^r}-1}{2}} \left(\frac{V_{2^r}}{k^2 - k - 1}\right) \\
&= \left(\frac{-k}{k^2 - k - 1}\right) = \left(\frac{-1}{k^2 - k - 1}\right) \left(\frac{k}{k^2 - k - 1}\right) \\
&= (-1)^{\frac{k^2-k-2}{2}} (-1)^{\binom{k^2-k-2}{2}\binom{k-1}{2}} \left(\frac{k^2 - k - 1}{k}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}} = -1
\end{aligned}$$

olur. ■

Aşağıdaki lemmanın ispatı kolay olduğundan ispatı ihmal edilecektir.

Lemma 4.2: $V_{2^r} \equiv \begin{cases} k \pmod{k^2 + k - 1} & r \text{ çift ise,} \\ -k - 1 \pmod{k^2 + k - 1} & r \text{ tek ise} \end{cases}$

dir.

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki lemmanın ispatı yapılabilir.

Lemma 4.3: $k \equiv 1,5 \pmod{8}$ ise $\left(\frac{k^2+k-1}{V_{2^r}}\right) = 1$ dir.

$$4.1. \quad x^2 = V_n(k, -1) \mp V_{n-1}(k, -1) \quad \text{ve} \quad x^2 = U_n(k, -1) \mp U_{n-1}(k, -1)$$

Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde dördüncü dereceden bazı Diyofant denklemlerinin çözümlerini bulmak için kullanılacak bazı teoremler verilecektir.

Teorem 4.1.1: $k \equiv 1,5,7 \pmod{8}$ olsun. $x^2 = V_n + V_{n-1}$ denkleminin çözümü varsa $n = 0$ veya $n = 1$ dir. Eğer $k \equiv 3 \pmod{8}$ ise $x^2 = V_n + V_{n-1}$ denkleminin çözümü sadece $(n, k) = (3,3)$ veya $(n, k) = (3,43)$ olarak verilir.

İspat: $x^2 = V_n + V_{n-1}$ olacak biçimde x pozitif tamsayısı var olsun. İlk olarak

$k \equiv 1,5,7 \pmod{8}$ ve $n > 2$ olduğunu kabul edelim ve ispatın kalan kısmını dört durumda inceleyelim.

1. Durum: $n = 4q - 1$ olacak şekilde $q > 0$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a - 1$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) kullanılırsa

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv -(V_{-1} + V_{-2}) \equiv -(k^2 + k - 2) \pmod{V_{2r}}$$

ve

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv V_{-1} + V_{-2} \equiv k^2 + k - 2 \equiv -2 \pmod{U_2}$$

bulunur. Bu kongüranslardan $\left(\frac{-(k^2+k-2)}{V_{2r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ elde edilir. $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ ve $k \equiv 1,5,7 \pmod{8}$ olduğundan (4.7)'ye göre $k \equiv 1 \pmod{8}$ bulunur. O halde (4.8), (4.9) ve (4.10) kullanılırsa

$$1 = \left(\frac{-(k^2 + k - 2)}{V_{2r}}\right) = \left(\frac{-1}{V_{2r}}\right) \left(\frac{k+2}{V_{2r}}\right) \left(\frac{k-1}{V_{2r}}\right) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir.

2. Durum: $n = 4q$ olacak şekilde $q \geq 1$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) kullanılırsa

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv -(V_0 + V_{-1}) \equiv -(k + 2) \pmod{V_{2r}}$$

ve

$$x^2 = V_{4q} + V_{4q-1} \equiv V_0 + V_{-1} \equiv k + 2 \equiv 2 \pmod{U_2}$$

bulunur. O halde $\left(\frac{-(k+2)}{V_{2r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{2}{U_2}\right) = \left(\frac{2}{k}\right) = 1$ olur. Bunlar ise (4.6), (4.8) ve

(4.10)'dan dolayı imkansızdır.

3. Durum: $n = 4q + 1$ olacak biçimde $q > 0$ var olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 1$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) kullanılırsa

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv -(V_1 + V_0) \equiv -(k + 2) \pmod{V_{2^r}}$$

ve

$$x^2 = V_{4q+1} + V_{4q} \equiv V_1 + V_0 \equiv k + 2 \equiv 2 \pmod{U_2}$$

bulunur. Bu kongrüanslardan $\left(\frac{-(k+2)}{V_{2^r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{2}{U_2}\right) = \left(\frac{2}{k}\right) = 1$ elde edilir. Bu ise (4.6), (4.8) ve (4.10) özelliklerinden dolayı imkansızdır.

4. Durum: $n = 4q + 2$ olacak biçimde $q > 0$ var olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 2$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) özellikleri kullanılarak

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv -(V_2 + V_1) \equiv -(k^2 + k - 2) \pmod{V_{2^r}}$$

ve

$$x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv V_2 + V_1 \equiv -2 \pmod{U_2}$$

bulunur. Bu kongrüanslardan $\left(\frac{-(k^2+k-2)}{V_{2^r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ elde edilir. $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ ve $k \equiv 1, 5, 7 \pmod{8}$ olduğundan (4.7) kullanılırsa $k \equiv 1 \pmod{8}$ olduğu görülür. (4.8), (4.9) ve (4.10) kullanılarak

$$1 = \left(\frac{k^2 + k - 2}{V_{2^r}}\right) = \left(\frac{-1}{V_{2^r}}\right) \left(\frac{k + 2}{V_{2^r}}\right) \left(\frac{k - 1}{V_{2^r}}\right) = (-1) \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden $n \leq 2$ olmalıdır. $n = 2$ ise $x^2 = V_2 + V_1 = k^2 + k - 2$ olur. Bunun ise sadece $k = 2$ için sağlandığı gösterilebilir. $k \geq 3$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Şimdi $k \equiv 3 \pmod{8}$ olsun. O halde $n = 6q + r$ olacak şekilde $0 \leq r \leq 5$ mevcuttur. O zaman (4.3) kullanılarak

$$V_n = V_{6q+r} \equiv V_r \pmod{U_3}$$

yazılabilir. $8|U_3$ olduğundan $0 \leq r \leq 5$ için $V_n \equiv V_r \pmod{8}$ olur. $k \equiv 3 \pmod{8}$ olduğundan $V_n \equiv V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \equiv 2, 3, 7 \pmod{8}$ olduğu gösterilebilir. Böylece $x^2 = V_n + V_{n-1} \equiv 5, 2, 1 \pmod{8}$ bulunur. $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ olması gerektiğinden $r = 3$ veya $r = 4$ elde edilir.

İlk olarak $r = 3$ olsun. O zaman $n = 6q + 3$ olur. q 'nın tek tamsayı olduğunu kabul edelim. O zaman (4.4) kullanılırsa

$$x^2 = V_n + V_{n-1} = V_{6q+3} + V_{6q+2} \equiv -(V_3 + V_2) \equiv -V_2 \equiv -(k^2 - 2) \pmod{V_3}$$

bulunur. $V_3 = k(k^2 - 3)$ olduğundan

$$x^2 \equiv -(k^2 - 2) \equiv -1 \pmod{k^2 - 3}$$

olur. Bu ise imkansızdır. Çünkü $\frac{k^2-3}{2} \equiv -1 \pmod{4}$ dir.

Şimdi de q çift tamsayı ve $q > 0$ olsun. O zaman a tek tamsayı ve $s \geq 1$ olmak üzere $n = 6q + 3 = 2 \cdot 2^s a + 3$ olarak yazılabilir. (4.4) kullanılırsa

$$x^2 = V_n + V_{n-1} = V_{2 \cdot 2^s a + 3} + V_{2 \cdot 2^s a + 2} \equiv -(V_3 + V_2)$$

$$\equiv -(k + 2)(k^2 - k - 1) \pmod{V_{2^s}}$$

elde edilir. Buradan da $\left(\frac{-(k+2)(k^2-k-1)}{V_{2^s}}\right) = 1$ olduğu görülür. Fakat (4.8), (4.10) ve Lemma 4.1'e göre

$$\left(\frac{-(k+2)(k^2-k-1)}{V_{2^s}}\right) = \left(\frac{-1}{V_{2^s}}\right) \left(\frac{k+2}{V_{2^s}}\right) \left(\frac{k^2-k-1}{V_{2^s}}\right) = (-1)(-1)(-1) = -1$$

olduğundan bu imkansızdır. O halde $q = 0$ olmalıdır. O zaman $n = 3$ olup $x^2 = V_3 + V_2 = k^3 + k^2 - 3k - 2$ olur. MAGMA [70] programı kullanılarak $Y^2 = X^3 + X^2 - 3X - 2$ denkleminin tamsayı çözümlerinin sadece $(X, Y) = (-2, 0), (-1, \pm 1), (3, \pm 5), (2, \pm 2), (43, \pm 285)$ olduğu görülebilir. Böylece $k = 3$ veya $k = 43$ bulunur. Şimdi $r = 4$ olsun. O zaman $n = 6q + 4$ olacak biçimde $q \geq 0$ vardır. Bu yüzden $n = 6(q + 1) - 2 = 6t - 2$ alınabilir ve böylece (4.4) kullanılarak

$$x^2 = V_n + V_{n-1} = V_{6t-2} + V_{6t-3} \equiv -(V_3 + V_2) \equiv -V_2 \equiv -(k^2 - 2) \pmod{V_3}$$

elde edilir. $V_3 = k(k^2 - 3)$ olduğundan

$$x^2 \equiv -(k^2 - 2) \equiv -1 \pmod{k^2 - 3}$$

olur. Bu ise $\frac{k^2-3}{2} \equiv -1 \pmod{4}$ olduğundan imkansızdır.

Teorem 4.1.2: $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ olsun. $x^2 = V_n - V_{n-1}$ denkleminin bir çözümü varsa $n = 1$ veya $n = 2$ dir. $k \equiv 1 \pmod{8}$ ise $x^2 = V_n - V_{n-1}$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ olsun. $x^2 = V_n - V_{n-1}$ denklemini sağlayan x pozitif tamsayısı var olsun. $n > 2$ kabul edelim ve ispatın kalan kısmını dört durumda inceleyelim.

1. Durum : $n = 4q - 1$ olacak biçimde $q > 0$ var olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a - 1$ biçiminde yazılabilir. Böylece (4.3) ve (4.4)

kullanılırsa

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q-1} - V_{4q-2} \equiv -(V_{-1} - V_{-2}) \equiv k^2 - k - 2 \pmod{V_{2r}}$$

ve

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q-1} - V_{4q-2} \equiv V_{-1} - V_{-2} \equiv 2 \pmod{U_2}$$

yazılabilir. Bu konguranslardan $\left(\frac{k^2-k-2}{V_{2r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{2}{k}\right) = 1$ elde edilir. $\left(\frac{2}{k}\right) = 1$ ve $k \equiv 3,5,7 \pmod{8}$ olduğundan (4.6) kullanılarak $k \equiv 7 \pmod{8}$ olduğu görülür. O zaman (4.9) ve (4.11) özellikleri kullanılırsa

$$1 = \left(\frac{k^2 - k - 2}{V_{2r}}\right) = \left(\frac{k-2}{V_{2r}}\right) \left(\frac{k+1}{V_{2r}}\right) = (-1) \cdot 1 = -1$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir.

2. Durum: $n = 4q$ olacak şekilde $q \geq 1$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) özellikleri kullanılarak

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q} - V_{4q-1} \equiv -(V_0 - V_{-1}) \equiv k - 2 \pmod{V_{2r}}$$

ve

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q} - V_{4q-1} \equiv V_0 - V_{-1} \equiv -k + 2 \equiv 2 \pmod{U_2}$$

yazılabilir. Buradan $\left(\frac{k-2}{V_{2r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{2}{k}\right) = 1$ olduğu görülür. O zaman (4.6)'ya göre $k \equiv 3,5,7 \pmod{8}$ olduğundan $k \equiv 7 \pmod{8}$ elde edilir. Bu durumda (4.11)'e göre $\left(\frac{k-2}{V_{2r}}\right) = -1$ dir. Bu ise $\left(\frac{k-2}{V_{2r}}\right) = 1$ olmasıyla çelişir.

3. Durum: $n = 4q + 1$ olacak biçimde $q > 0$ var olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 1$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) özellikleri kullanılırsa

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q+1} - V_{4q} \equiv -(V_1 - V_0) \equiv -(k - 2) \pmod{V_{2^r}}$$

ve

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q+1} - V_{4q} \equiv V_1 - V_0 \equiv -2 \pmod{U_2}$$

elde edilir. Buradan $\left(\frac{-(k-2)}{V_{2^r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ olduğu görülür. $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ ve $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ olduğundan (4.7)'ye göre $k \equiv 3 \pmod{8}$ olur. O zaman (4.8) ve (4.11)'e göre

$$1 = \left(\frac{-(k-2)}{V_{2^r}}\right) = \left(\frac{-1}{V_{2^r}}\right) \left(\frac{k-2}{V_{2^r}}\right) = -1$$

elde edilir. Bu ise olamaz.

4. Durum: $n = 4q + 2$ olacak biçimde $q > 0$ var olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 2$ olarak yazılabilir. (4.4) ve (4.3) kullanılarak

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q+2} - V_{4q+1} \equiv -(V_2 - V_1) \equiv -(k^2 - k - 2) \pmod{V_{2^r}}$$

ve

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{4q+2} - V_{4q+1} \equiv V_2 - V_1 \equiv -2 \pmod{U_2}$$

elde edilir. Bu kongrüanslardan $\left(\frac{-(k^2-k-2)}{V_{2^r}}\right) = 1$ ve $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ olduğu görülür. $\left(\frac{-2}{k}\right) = 1$ ve $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ olduğundan (4.7)'ye göre $k \equiv 3 \pmod{8}$ olur. O halde (4.8), (4.9) ve (4.11) özellikleri kullanılırsa

$$1 = \left(\frac{-(k^2 - k - 2)}{V_{2^r}} \right) = \left(\frac{-1}{V_{2^r}} \right) \left(\frac{k-2}{V_{2^r}} \right) \left(\frac{k+1}{V_{2^r}} \right) = -1$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece $n \leq 2$ olur. $n = 0$ ise $x^2 = V_0 - V_{-1} = 2 - k$ olduğundan imkansızdır. Sonuç olarak $n = 1$ veya $n = 2$ olur.

Şimdi de $k \equiv 1 \pmod{8}$ olsun. $n = 6q + r$ olacak şekilde $0 \leq r \leq 5$ vardır. O zaman (4.3) kullanılırsa

$$V_n = V_{6q+r} \equiv V_r \pmod{U_3}$$

bulunur. $8|U_3$ olduğundan $0 \leq r \leq 5$ olmak üzere $V_n \equiv V_r \pmod{8}$ olur. Ayrıca $k \equiv 1 \pmod{8}$ olduğundan da $V_n \equiv V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 \equiv 2, 1, 7, 6 \pmod{8}$ olduğu gösterilebilir. O zaman $x^2 = V_n - V_{n-1} \equiv 1, 6, 7 \pmod{8}$ olur. Böylece $r = 0$ veya $r = 4$ olmalıdır. İlk olarak $r = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $n = 6q$ olacak şekilde $q \geq 0$ vardır. q tek olsun. O zaman (4.4) kullanılarak

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{6q} - V_{6q-1} \equiv -(V_0 - V_{-1}) \equiv k - 2 \pmod{V_3}$$

elde edilir. $V_3 = k(k^2 - 3)$ olduğundan

$$x^2 \equiv k - 2 \pmod{k^2 - 3},$$

yani $x^2 \equiv k - 2 \pmod{\frac{k^2-3}{2}}$ olur. Buradan $\left(\frac{k-2}{(k^2-3)/2} \right) = 1$ elde edilir. Ayrıca k tek olduğundan $\frac{k^2-3}{2} \equiv 3 \pmod{4}$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{k-2}{(k^2-3)/2} \right) = (-1)^{\left(\frac{k-3}{2} \right) \left(\frac{k^2-5}{4} \right)} \left(\frac{(k^2-3)/2}{k-2} \right) \\ &= (-1)^{\left(\frac{2}{k-2} \right) \left(\frac{k^2-3}{k-2} \right)} = (-1) \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{k-2} \right) = -1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise çelişkidir. Şimdi q çift tamsayı olsun. O halde a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 6q = 2 \cdot 2^r a$ biçiminde yazılabilir. O zaman (4.4) kullanılırsa

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{2 \cdot 2^r a} - V_{2 \cdot 2^r a - 1} \equiv -(V_0 - V_{-1}) \equiv k - 2 \pmod{V_{2^r}}$$

bulunur. Buradan $\left(\frac{k-2}{V_{2^r}}\right) = 1$ elde edilir. Bu ise (4.11)'den dolayı imkansızdır. Şimdi $r = 4$ olduğunu kabul edelim. O zaman $n = 6q + 4$ olup buradan $n = 6(q + 1) - 2 = 6m - 2$ olarak yazılabilir. İlk olarak m tek tamsayı olsun. Bu durumda (4.4) kullanılarak

$$x^2 = V_n - V_{n-1} = V_{6m-2} - V_{6m-3} \equiv -(V_{-2} - V_{-3}) \equiv -(k^2 - 2) \pmod{V_3}$$

bulunur. $V_3 = k(k^2 - 3)$ olduğundan

$$x^2 \equiv -(k^2 - 2) \equiv -1 \pmod{k^2 - 3},$$

yani $x^2 \equiv -1 \pmod{\frac{k^2-3}{2}}$ olur. Bu ise $\frac{k^2-3}{2} \equiv 3 \pmod{4}$ olduğundan imkansızdır.

Şimdi m çift tamsayı olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 6m - 2 = 2 \cdot 2^r a - 2$ olarak yazılabilir. (4.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} x^2 &= V_n - V_{n-1} = V_{2 \cdot 2^r a - 2} - V_{2 \cdot 2^r a - 3} \equiv -(V_{-2} - V_{-3}) \\ &\equiv (k - 2)(k^2 + k - 1) \pmod{V_{2^r}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\left(\frac{(k-2)(k^2+k-1)}{V_{2^r}}\right) = 1$ olduğu görülür. (4.11) ve Lemma 4.3'e göre

$$1 = \left(\frac{k-2}{V_{2^r}}\right) \left(\frac{k^2+k-1}{V_{2^r}}\right) = -1$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.3: $x^2 = U_{n+1} + U_n$ denkleminin çözümü varsa $n = 0$ veya $n = 1$ dir.

İspat: $x^2 = U_{n+1} + U_n$ olacak şekilde bir x tamsayısı mevcut olsun. $n > 2$ olduğunu kabul edelim ve ispatın kalan kısmını dört durumda inceleyelim.

1. Durum: $n = 4q - 1$ olacak biçimde $q > 0$ mevcut olsun. O zaman (4.1) kullanılarak

$$x^2 = U_{n+1} + U_n = U_{4q} + U_{4q-1} \equiv U_0 + U_{-1} \equiv -1 \pmod{U_2}$$

yazılabilir. Buradan $\left(\frac{-1}{k}\right) = 1$ olduğu görülür. (4.5) kullanılırsa $k \equiv 1,5 \pmod{8}$ elde edilir.

İlk olarak $q = 3u - 1$ olacak biçimde $u > 0$ mevcut olsun. O zaman $n = 12u - 5$ olur. (4.1) kullanılırsa

$$x^2 = U_{n+1} + U_n = U_{12u-4} + U_{12u-5} \equiv U_{-4} + U_{-5} \equiv -(k+1) \pmod{U_3}$$

elde edilir. $8|U_3$ olduğundan $x^2 \equiv -k - 1 \pmod{8}$ olur. Böylece $k \equiv 1,5 \pmod{8}$ olduğundan $x^2 \equiv -2,2 \pmod{8}$ bulunur. Bu ise imkansızdır.

$q = 3u$ olacak şekilde $u > 0$ mevcut olsun. O zaman $n = 12u - 1$ olur. (4.1) kullanılarak

$$x^2 = U_{12u-1} + U_{12u} \equiv U_{-1} + U_0 \equiv -1 \pmod{U_3}$$

elde edilir. $8|U_3$ olduğundan $x^2 \equiv -1 \pmod{8}$ olur. Bu ise imkansızdır.

$q = 3u + 1$ olacak şekilde $u \geq 0$ mevcut olsun. O zaman $n = 12u + 3$ olur. (4.1) kullanılarak

$$x^2 = U_{12u+4} + U_{12u+3} \equiv U_4 + U_3 \equiv -k \pmod{U_3}$$

yazılabilir. $8|U_3$ olduğundan $x^2 \equiv -k \pmod{8}$ elde edilir. Bu ise $k \equiv 1,5 \pmod{8}$ olduğundan imkansızdır.

2. Durum: $n = 4q$ olacak biçimde $q \geq 1$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a$ olarak yazılabilir. (4.2) kullanılarak

$$x^2 = U_{4q+1} + U_{4q} \equiv -(U_1 + U_0) \equiv -1 \pmod{V_{2^r}},$$

yani $\left(\frac{-1}{V_{2^r}}\right) = 1$ bulunur. Bu ise (4.8)'den dolayı imkansızdır.

3. Durum: $n = 4q + 1$ olacak biçimde $q > 0$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 1$ olarak yazılabilir. (4.2) kullanılarak

$$x^2 = U_{4q+2} + U_{4q+1} \equiv -(U_2 + U_1) \equiv -(k + 1) \pmod{V_{2^r}}$$

elde edilir. Buradan $\left(\frac{-(k+1)}{V_{2^r}}\right) = 1$ olduğu görülür. Bu ise (4.8) ve (4.9)'dan dolayı imkansızdır.

4. Durum: $n = 4q + 2$ olacak biçimde $q > 0$ mevcut olsun. O zaman a tek tamsayı ve $r \geq 1$ olmak üzere $n = 2 \cdot 2^r a + 2$ biçiminde yazılabilir. (4.1) kullanılırsa

$$x^2 = U_{4q+3} + U_{4q+2} \equiv U_3 + U_2 \equiv -1 \pmod{U_2},$$

yani $\left(\frac{-1}{k}\right) = 1$ elde edilir. Böylece (4.5)'e göre $k \equiv 1,5 \pmod{8}$ bulunur. Diğer yandan (4.2) kullanılırsa

$$x^2 = U_{4q+3} + U_{4q+2} \equiv -(U_3 + U_2) \equiv -(k^2 + k - 1) \pmod{V_{2^r}}$$

olduğu görülür. Buradan $\left(\frac{-(k^2+k-1)}{V_{2^r}}\right) = 1$ elde edilir. O zaman

$$\left(\frac{-(k^2 + k - 1)}{V_{2^r}}\right) = \left(\frac{-1}{V_{2^r}}\right) \left(\frac{k^2 + k - 1}{V_{2^r}}\right) = 1$$

ve $\left(\frac{-1}{V_{2r}}\right) = -1$ olduğundan $\left(\frac{k^2+k-1}{V_{2r}}\right) = -1$ bulunur. Bu ise Lemma 4.3'e göre imkansızdır. Böylece $n \leq 2$ olmalıdır. $n = 2$ ise $x^2 = U_3 + U_2 = k^2 + k - 1$ dir. Bu denklemin çözümünün sadece $k = 1$ iken doğru olduğu gösterilebilir. Bu ise $k \geq 3$ kabulüyle çelişir. Sonuç olarak $n = 0$ veya $n = 1$ dir. ■

Aşağıdaki teoremin ispatı diğer teoremlerin ispatına benzer olduğundan ispatı ihmal edilmiştir.

Teorem 4.1.4: $x^2 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin çözümü varsa $n = 0$ veya $n = 1$ dir.

4.2. Bazı Dördüncü Dereceden Özel Diyofant Denklemlerinin Çözümleri

Literatürde $ax^4 + bx^2y + cy^2 - d = 0$ biçimindeki denklemlerinin çözümlerini inceleyen çok sayıda makale bulunmaktadır. Walsh [4], k 'nın çift olması kabulü altında $x^4 - kx^2y + y^2 = 1,4$ denklemlerinin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerini inceledi. Ayrıca aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerinin $k \neq 338$ ve k tamkare değilse $(x, y) = (k, 1), (1, 0)$ veya $(x, y) = (0, 1)$; $k = 338$ ise $(x, y) = (13051348805, 6214)$ veya $(x, y) = (114243, 6214)$ ve k tamkare ise $(x, y) = (1, \sqrt{k})$ veya $(x, y) = (k^2 - 1, \sqrt{k})$ olduğunu gösterdi. İlave olarak aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = 4$ denkleminin tüm negatif olmayan tamsayı çözümlerinin $k = 2v^2$ olacak şekilde v var ise $(x, y) = (2, \sqrt{2k})$ veya $(x, y) = (2k^2 - 2, \sqrt{2k})$ aksi halde $(x, y) = (2, 0)$ olduğunu gösterdi. Cohn [3], $c = 1$ veya $c = 4$ olması durumunda k 'nın tek olması kabulü altında $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ için $x^2 - kxy^2 + y^4 = c$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini inceledi ve $x^2 - kxy^2 + y^4 = 4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün olmadığını gösterdi. Ayrıca aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = 1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümünün $y = k^2$ olacak şekilde k tek tamsayısı varsa sadece $y = 1$ aksi takdirde sadece $y = 1$ veya $y = k$ olduğunu gösterdi. İlave olarak $x^2 - kxy^2 + y^4 = -1$ denkleminin $k = 3$ ise çözümünün olmadığını ve aksi takdirde denklemin çözümünün sadece $y = 1$ olduğunu gösterdi. Yine aynı yazar $x^2 - kxy^2 + y^4 = -4$ denkleminin çözümü varsa $k = 3$ veya $k = 6$ olduğunu ve bu denklemin çözümlerinin $k = 3$ ise

$(x, y) = (2, 2)$ veya $(x, y) = (10, 2)$ ve $k = 6$ ise $(x, y) = (1, 1), (5, 1), (29, 13)$ veya $(x, y) = (985, 13)$ olduğunu ispatladı.

Aşağıda 4. dereceden bazı Diyofant denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri verilecektir.

Sonuç 4.2.1: $k + 2$ tamkare olmasın. $k + 1$ tamkare ise $x^4 - kx^2y + y^2 = k + 2$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (\sqrt{k + 1}, 1), (\sqrt{k + 1}, k^2 + k - 1)$ ve $(x, y) = (1, k + 1)$ dir. Aksi halde denklemin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (1, k + 1)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^4 - kx^2y + y^2 = k + 2$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.2'ye göre

$$x^2 = U_{n+1} + U_n, y = U_n + U_{n-1}$$

veya

$$x^2 = U_n + U_{n-1}, y = U_{n+1} + U_n$$

olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. $x^2 = U_{n+1} + U_n$ olsun. O zaman Teorem 4.1.3'e göre $n = 1$ bulunur. O halde $x^2 = U_{n+1} + U_n = U_2 + U_1 = k + 1$ ve $y = U_1 + U_0 = 1$ olur. Böylece $k + 1$ tamkare ise $x = \sqrt{k + 1}$ ve $y = 1$ elde edilir. Şimdi $x^2 = U_n + U_{n-1}$ olsun. O zaman Teorem 4.1.3'e göre $n - 1 = 0$ veya $n - 1 = 1$, yani $n = 1$ veya $n = 2$ olur. $n = 1$ olsun. $x^2 = U_1 + U_0 = 1$ ve $y = U_2 + U_1 = k + 1$ olduğundan $x = 1$ ve $y = k + 1$ bulunur. $n = 2$ olsun. $x^2 = U_2 + U_1 = k + 1$ ve $y = U_3 + U_2 = k^2 + k - 1$ olur. $k + 1$ tamkare ise $x = \sqrt{k + 1}$ ve $y = k^2 + k - 1$ dir.

Sonuç 4.2.2: $k - 1$ tamkare ise $x^4 - kx^2y + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (1, 1), (\sqrt{k - 1}, 1), (\sqrt{k - 1}, k^2 - k - 1)$ veya

$(x, y) = (1, k - 1)$ dir. Aksi takdirde bu denklemin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (1, 1)$ ve $(x, y) = (1, k - 1)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^4 - kx^2y + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.8'e göre

$$x^2 = U_{n+1} - U_n, y = U_n - U_{n-1}$$

veya

$$x^2 = U_n - U_{n-1}, y = U_{n+1} - U_n$$

olacak şekilde $n \geq 0$ mevcuttur. İlk olarak $x^2 = U_{n+1} - U_n$ olsun. O zaman Teorem 4.1.4'e göre $n = 0$ veya $n = 1$ olur. $n = 0$ olsun. $x^2 = U_{n+1} - U_n = U_1 - U_0 = 1$ ve $y = U_0 - U_{-1} = 1$ olduğundan $x = 1$ ve $y = 1$ bulunur. $n = 1$ olsun. $x^2 = U_2 - U_1 = k - 1$ ve $y = U_1 - U_0 = 1$ olur. $k - 1$ tamkare ise $x = \sqrt{k - 1}$ ve $y = 1$ bulunur. Şimdi $x^2 = U_n - U_{n-1}$ olsun. O zaman Teorem 4.1.4'e göre $n = 1$ veya $n = 2$ olur. $n = 1$ olsun. $x^2 = U_1 - U_0 = 1$ ve $y = U_2 - U_1 = k - 1$ olduğundan $x = 1$ ve $y = k - 1$ bulunur. $n = 2$ olsun. $x^2 = U_2 - U_1 = k - 1$ ve $y = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1$ olur. Şu halde $k - 1$ tamkare ise $x = \sqrt{k - 1}$ ve $y = k^2 - k - 1$ olur.

Sonuç 4.2.3: $k \equiv 1, 5, 7 \pmod{8}$ ise $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin çözümünün olması için gerekli ve yeterli şart $k + 2$ 'nin tamkare olmasıdır. Ayrıca $k \equiv 1, 5, 7 \pmod{8}$ ve $k + 2$ tamkare ise bu denklemin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (\sqrt{k + 2}, 1)$ dir. $k \equiv 3 \pmod{8}$ ise $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin çözümü sadece $k = 3$ veya $k = 43$ iken vardır. Bu denklemin tamsayı çözümü $k = 3$ ise sadece $(x, y) = (5, 11)$ ve $k = 43$ ise sadece $(x, y) = (285, 1891)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = 4(k + 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı

çözümü olsun. İlk olarak $k \equiv 1,5,7 \pmod{8}$ ve $k + 2$ tamkare olmasın. Bu durumda Teorem 3.2.4'e göre

$$x^2 = V_n + V_{n-1}$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Dolayısıyla Teorem 4.1.1 gereği $n = 0$ veya $n = 1$ olur. $n = 0$ veya $n = 1$ ise $x^2 = k + 2$ olur. Bu ise $k + 2$ tamkare olmadığından imkansızdır. $k \equiv 1,5,7 \pmod{8}$ ve $k + 2$ tamkare olsun. O zaman Teorem 3.2.5'e göre $x^2 = \sqrt{k+2}V_{n-2}$ olacak şekilde $n > 2$ vardır. Böylece $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = \sqrt{k+2} \square$, $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = \square$ veya $a|\sqrt{k+2}$ olmak üzere $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = a\square$ olur. $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = \sqrt{k+2}\square$ veya $a|\sqrt{k+2}$ olmak üzere $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = a\square$ ise Teorem 4.2 ve Teorem 4.3'e göre $n = 3$ olur. Buradan da $x = \sqrt{k+2}$ ve $y = 1$ bulunur. $V_{n-2}(\sqrt{k+2}, -1) = \square$ ise Teorem 4.1'e göre $n = 3$ ve $k + 2$ tamkaredir. O halde $x = \sqrt{k+2}$ ve $y = 1$ olur. Şimdi $k \equiv 3 \pmod{8}$ olsun. O zaman $k + 2$ tamkare olamaz. Böylece Teorem 3.2.4 ve Teorem 4.1.1'e göre $k = 3$ veya $k = 43$ olur. Dolayısıyla $k = 3$ ise $(x, y) = (5, 11)$ ve $k = 43$ ise $(x, y) = (285, 1891)$ bulunur.

Sonuç 4.2.4: $k + 2$ ve $k + 1$ tamkare değilse $x^2 - (k^2 - 4)y^4 = 4(k + 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (k + 2, 1)$ dir. $\sqrt{k+2}$ tamkare ise denklemin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (k\sqrt{k+2}, \sqrt[4]{k+2})$, $(x, y) = (k + 2, 1)$ veya $(x, y, k, n) = (966, 12, 7, 8)$ dir. $k + 2$ tamkare değilse ve $k + 1$ tamkare ise denklemin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (k^2 + k - 2, \sqrt{k+1})$ ve $(x, y) = (k + 2, 1)$ dir. $k + 2$ tamkare fakat $\sqrt{k+2}$ tamkare değil ise denklemin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (k + 2, 1)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 - 4)y^4 = 4(k + 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. $k + 2$ tamkare olmasın. O zaman Teorem 3.2.4'e göre

$$x = V_n + V_{n-1}, y^2 = U_n + U_{n-1}$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Bu yüzden Teorem 4.1.3'e göre $n = 1$ veya $n = 2$ olur. İlk olarak $n = 1$ olsun. $x = V_1 + V_0 = k + 2$ ve $y^2 = U_1 + U_0 = 1$ olduğundan $(x, y) = (k + 2, 1)$ bulunur. $n = 2$ olsun. $x = V_2 + V_1 = k^2 - 2 - k$ ve $y^2 = U_2 + U_1 = k + 1$ olur. $k + 1$ tamkare ise $x = k^2 + k - 2$ ve $y = \sqrt{k + 1}$ bulunur. Şimdi $k + 2$ tamkare olsun. O zaman Teorem 3.2.5'e göre $x = \sqrt{k + 2}V_{n-2}(\sqrt{k + 2}, -1)$ ve $y^2 = U_{n-2}(\sqrt{k + 2}, -1)$ olur. Böylece Teorem 4.4'e göre $n - 2 = 1, n - 2 = 2$ veya $n - 2 = 6$ olur. $n - 2 = 1$ olsun. $x = \sqrt{k + 2}V_1 = k + 2$ ve $y^2 = U_1 = 1$ olduğundan $(x, y) = (k + 2, 1)$ bulunur. $n - 2 = 2$ olsun. O zaman $\sqrt{k + 2}$ tamkare olmalıdır. O halde $x = \sqrt{k + 2}V_2 = k \cdot \sqrt{k + 2}$ ve $y^2 = U_2 = \sqrt{k + 2}$, yani $(x, y) = (k\sqrt{k + 2}, \sqrt[4]{k + 2})$ olur. $n - 2 = 6$ olsun. Bu durumda $\sqrt{k + 2} = 3$, yani $k = 7$ olur. O halde $x = 3V_6(3, -1) = 966$ ve $y^2 = U_6(3, -1) = 144$ dir. O zaman $(x, y, k, n) = (966, 12, 7, 8)$ dir.

Sonuç 4.2.5: $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ olsun. $k = 3$ ise $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (2, 2)$ veya $(x, y) = (1, 1)$ dir. $k - 2$ tamkare ise $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (\sqrt{k - 2}, 1)$ dir. $k \neq 3$ ve $k - 2$ tamkare değilse denklemin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $(x, y), x^4 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.9'a göre

$$x^2 = V_n - V_{n-1}, y = U_n - U_{n-1}$$

olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ ve $x^2 = V_n - V_{n-1}$ olduğundan Teorem 4.1.2'ye göre $n = 1$ veya $n = 2$ dir. $n = 1$ olsun. O zaman $x^2 = V_1 - V_0 = k - 2$ ve $y = U_1 - U_0 = 1$ olur. O halde $k - 2$ tamkare ise $(x, y) = (\sqrt{k - 2}, 1)$ elde edilir. Şimdi $n = 2$ olsun. O zaman $x^2 = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2$ ve $y = U_2 - U_1 = k - 1$ olur. $x^2 = k^2 - k - 2$ olduğundan $4x^2 = 4k^2 - 4k - 8$, yani $(2k - 1)^2 - (2x)^2 = 9$ elde edilir. Bu denklemin çözümünün sadece $k = 3$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $x = 2$ ve $y = 2$ bulunur.

Sonuç 4.2.6: $k \equiv 1 \pmod{8}$ ise $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: (x, y) , $x^4 - (k^2 - 4)y^2 = -4(k - 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.9'a göre

$$x^2 = V_n - V_{n-1}, y = U_n - U_{n-1}$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Bu ise Teorem 4.1.2'ye göre imkansızdır.

Sonuç 4.2.7: $k - 1$ tamkare değilse $x^2 - (k^2 - 4)y^4 = -4(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (k - 2, 1)$ dir. $k - 1$ tamkare ise denklemin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (k^2 - k - 2, \sqrt{k - 1})$ ve $(x, y) = (k - 2, 1)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 - 4)y^4 = -4(k - 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.9'a göre

$$x = V_n - V_{n-1}, y^2 = U_n - U_{n-1}$$

olacak biçimde $n \geq 1$ vardır. Teorem 4.1.4'e göre $n = 1$ veya $n = 2$ olur. $n = 1$ olsun. O zaman $x = V_1 - V_0 = k - 2$ ve $y^2 = U_1 - U_0 = 1$, yani $(x, y) = (k - 2, 1)$ bulunur. Şimdi $n = 2$ olsun. O zaman $x = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2$ ve $y^2 = U_2 - U_1 = k - 1$ olur. O halde $k - 1$ tamkare olmalıdır. Bu durumda ise $(x, y) = (k^2 - k - 2, \sqrt{k - 1})$ biçimindedir.

Sonuç 4.2.8: $k \equiv 1, 5, 7 \pmod{8}$ ve $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^4 - kx^2y + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: (x, y) , $x^4 - kx^2y + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin bir tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.13'e göre

$$x^2 = V_{n+1} + V_n, y = V_n + V_{n-1}$$

veya

$$x^2 = V_n + V_{n-1}, y = V_{n+1} + V_n$$

olacak şekilde $n \geq 0$ vardır. $x^2 = V_{n+1} + V_n$ olsun. $k \equiv 1, 5, 7 \pmod{8}$ olduğundan Teorem 4.1.1'e göre $n + 1 = 0$ veya $n + 1 = 1$ dir. $n \geq 0$ olduğundan $n = 0$ bulunur. O zaman $x^2 = V_1 + V_0 = k + 2$ ve $y = V_0 + V_{-1} = k + 2$ olur. Bu ise $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan imkansızdır. Şimdi $x^2 = V_n + V_{n-1}$ olsun. O zaman Teorem 4.1.1'e göre $n = 0$ veya $n = 1$ bulunur. O halde $x^2 = k + 2$ olur. Bu ise $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olduğundan imkansızdır. ■

Teorem 3.2.13 ve Teorem 4.1.1 kullanılarak aşağıdaki teoremin ispatı yapılabilir.

Sonuç 4.2.9: $k \equiv 3 \pmod{8}$ ve $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^4 - kx^2y + y^2 = -(k + 2)(k^2 - 4)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 4.2.10: $k \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}$ ve $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^4 - kx^2y + y^2 = (k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $k = 3$ iken vardır. Bu durumda denklemin pozitif tamsayı çözümleri sadece $(x, y) = (2, 1), (1, 4)$ ve $(x, y) = (2, 11)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^4 - kx^2y + y^2 = (k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.15'e göre

$$x^2 = V_{n+1} - V_n, y = V_n - V_{n-1}$$

veya

$$x^2 = V_n - V_{n-1}, y = V_{n+1} - V_n$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. İlk olarak $x^2 = V_{n+1} - V_n$ olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 4.1.2'ye göre $n + 1 = 1$ veya $n + 1 = 2$ olur. $n \geq 1$ olduğundan $n = 1$ olmalıdır. O halde $x^2 = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2$ ve $y = V_1 - V_0 = k - 2$ bulunur. $x^2 = k^2 - k - 2$ olduğundan $4x^2 = 4k^2 - 4k - 8$, yani $(2k - 1)^2 - (2x)^2 = 9$ bulunur. Bu denklemin çözümünün sadece $k = 3$ iken olduğu ve bu durumda da $(x, y) = (2, 1)$ olduğu gösterilebilir. Şimdi $x^2 = V_n - V_{n-1}$ olsun. Teorem 4.1.2'ye göre $n = 1$ veya $n = 2$ olur. $n = 1$ olsun. O zaman $x^2 = V_1 - V_0 = k - 2$ ve $y = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2$ elde edilir. O halde $k - 2$ tamkare olmalıdır. Ama $k^2 - 4$ karesiz bir tamsayı olduğundan $k > 3$ durumunda $k - 2$ tamkare olamaz. O zaman $k = 3$ olur. Böylece $x = 1$ ve $y = 4$ bulunur. Şimdi de $n = 2$ olsun. O zaman $x^2 = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2$ elde edilir. Bu denklemin çözümü var ise $k = 3$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $(x, y) = (2, 11)$ bulunur. ■

Teorem 3.2.15 ve Teorem 4.1.2 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.11: $k \equiv 1 \pmod{8}$ ve $k^2 - 4$ karesiz tamsayı olsun. O zaman $x^4 - kx^2y + y^2 = (k - 2)(k^2 - 4)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

BÖLÜM 5. DÖRDÜNCÜ DERECEDEKİ FARKLI BİRKAÇ DİYOFANT DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

[65] de yazarlar $a \neq 0$ ve $b \neq \pm 2$ olduğunda $U_n(k, \pm 1) = ax^2 + b$ denkleminin sonlu sayıda n çözümünün olduğunu gösterdi. [66] da, Keskin, k tek tamsayı iken $w = 1, 2, 3, 6$ için $V_n(k, -1) = wx^2 + 1$ ve $V_n(k, -1) = wx^2 - 1$ denklemlerinin çözümlerini inceledi. Bu bölümde bazı a değerleri için $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ ve $az^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ denklemlerinin ve bazı dördüncü dereceden Diyofant denklemlerinin çözümleri araştırılacaktır. Bu denklemlerin çözümlerini bulabilmek için önce genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayılarıyla ilgili çok iyi bilinen özellikler aşağıda verilecektir.

$$U_{2n}(k, t) = U_n(k, t)V_n(k, t), \quad (5.1)$$

$$U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1) = \frac{V_{n+1}(k, -1) + V_n(k, -1)}{k+2}, \quad (5.2)$$

$$U_{2n+1}(k, -1) - 1 = U_n(k, -1)V_{n+1}(k, -1) \quad (5.3)$$

ve

$$U_{2n+1}(k, -1) + 1 = U_{n+1}(k, -1)V_n(k, -1) \quad (5.4)$$

dir. Ayrıca, m ve n pozitif tamsayılar ve $d = (m, n)$ olmak üzere

$$(U_n, U_m) = U_d,$$

$\frac{m}{d}$ ve $\frac{n}{d}$ tek tamsayılar ise

$$(V_m(k, -1), V_n(k, -1)) = V_d(k, -1),$$

$$(U_m(k, -1), V_m(k, -1)) = 1 \text{ veya } 2,$$

$$(U_n(k, -1), U_{n-1}(k, -1)) = 1,$$

$$(V_n(k, -1), V_{n-1}(k, -1)) = 1 \tag{5.5}$$

ve

$$\left(\frac{V_n(k, -1) + V_{n-1}(k, -1)}{k+2}, V_n(k, -1) \right) = 1 \tag{5.6}$$

dir. Son özellik hariç diğerlerinin ispatı için [19] numaralı kaynağa bakılabilir.

Aşağıdaki lemmaların ispatı için [18,58,64] numaralı referanslara bakılabilir.

Lemma 5.1: k tek tamsayı olsun. Eğer $V_n(k, -1) = 2\Box$ ise $n = 3$ dir ve bu durumda $k = 3$ veya $k = 27$ dir.

Lemma 5.2: k tek tamsayı olsun. Eğer $V_n(k, -1) = 3\Box$ ise $n = 1$ ve $k = 3\Box$ dir.

Lemma 5.3: k tek tamsayı olsun. Eğer $V_n(k, -1) = 5\Box$ ise $n = 1$ ve $k = 5\Box$ dir.

Lemma 5.4: k tek tamsayı olsun. Eğer $m|k$ ve $m > 1$ olmak üzere $V_n(k, -1) = 5m\Box$ ise $n = 1$ ve $k = 5m\Box$ dir.

Lemma 5.5: k tek tamsayı olsun. O zaman $V_n(k, -1) = 6\Box$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur.

Lemma 5.6: k tek tamsayı olsun. Eğer $V_n(k, -1) = 7\Box$ ise $n = 1$ ve $k = 7\Box$ dir.

Lemma 5.7: k tek tamsayı olsun. Eğer $m|k$ ve $m > 1$ olmak üzere $V_n(k, -1) = 7m\Box$ ise $n = 1$ ve $k = 7m\Box$ dir.

[38] numaralı kaynaktan aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 5.1: $x^2 + kxy - y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 0$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{2n+1}(k, 1), U_{2n+2}(k, 1))$$

ile verilir.

Teorem 5.2: $k > 3$ olsun. O zaman $x^2 - kxy + y^2 = 1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ olmak üzere

$$(x, y) = (U_{n+1}(k, -1), U_n(k, -1))$$

ile verilir.

5.1. $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ Denklemlerinin Çözümleri

Buradan itibaren $k \geq 3$ tek tamsayı ve $n \geq 0$ olarak kabul edilecektir. Ayrıca kısalık olması açısından aksi söylenmedikçe $U_n(k, -1)$ ve $V_n(k, -1)$ yerine sırasıyla U_n ve V_n kullanılacaktır.

Teorem 5.1.1: $z^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin tamsayı çözümü sadece a tamsayı olmak üzere $(n, k, z) = (1, a^2, a)$ dır.

İspat: $z, z^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin herhangi bir tamsayı çözümü olsun. İspatı dört durumda inceleyelim.

1. Durum: $n = 4q$ olsun. O zaman (5.4), (5.1) ve (5.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
z^2 &= U_{4q+1} + 1 - U_{4q} = U_{2q+1}V_{2q} - U_{2q}V_{2q} \\
&= V_{2q}(U_{2q+1} - U_{2q}) = V_{2q} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2} \right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

bulunur ve (5.5) kullanılırsa $(V_{2q+1}, V_{2q}) = 1$ olduğundan $\left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2}, V_{2q} \right) = 1$ elde edilir. O halde (5.7) kullanılırsa $V_{2q} = \square$ olur. Bu ise Teorem 4.1'e göre imkansızdır.

2. Durum: $n = 4q + 1$ olsun. O zaman (5.1), (5.3) ve (5.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
z^2 &= U_{4q+2} + 1 - U_{4q+1} = U_{2q+1}V_{2q+1} - U_{2q}V_{2q+1} \\
&= V_{2q+1}(U_{2q+1} - U_{2q}) = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.6) kullanılırsa $V_{2q+1} = \square$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla Teorem 4.1'e göre $q = 0$ ve k tamkare bulunur. Böylece $z^2 - 1 = U_2 - U_1 = k - 1$, yani $z^2 = k$ olur. O halde a tamsayı olmak üzere $(n, k, z) = (1, a^2, a)$ bulunur.

3. Durum: $n = 4q + 2$ olsun. O zaman (5.2), (5.4) ve (5.1) kullanılırsa

$$z^2 = U_{4q+3} - U_{4q+2} + 1 = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k+2} \right)$$

elde edilir. Buradan $V_{2q+1} = \square$ olduğu gösterilebilir. Böylece Teorem 4.1'e göre $q = 0$ ve k tamkare olur. Dolayısıyla $z^2 - 1 = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1$, yani $z^2 = k(k - 1)$ bulunur. Bu ise k tamkare olduğundan imkansızdır.

4. Durum: $n = 4q + 3$ olsun. O zaman (5.1), (5.3) ve (5.2) kullanılırsa

$$z^2 = U_{4q+4} - U_{4q+3} + 1 = V_{2q+2} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k+2} \right)$$

elde edilir. Buradan $V_{2q+2} = \square$ olduğu gösterilebilir. Bu ise Teorem 4.1'e göre imkansızdır.

Teorem 5.1.2: $2z^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin tamsayı çözümü sadece $m > 0$ olmak üzere $(n, z, k) = \left(2, \frac{P_{4m}^2}{2}, \frac{Q_{2m}^2}{4}\right)$ biçimindedir.

İspat: $2z^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ olacak biçimde $z \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 0$ mevcut olsun. İspatı dört durumda inceleyelim.

1. Durum: $n = 4q$ olsun. O zaman (5.4), (5.2) ve (5.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2z^2 &= U_{4q+1} + 1 - U_{4q} = U_{2q+1}V_{2q} - U_{2q}V_{2q} \\ &= V_{2q}(U_{2q+1} - U_{2q}) = V_{2q} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.5) kullanılırsa $\left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2}, V_{2q}\right) = 1$ dir. O halde $V_{2q} = \square$ veya $V_{2q} = 2\square$ olur. Bunlar ise Lemma 5.1 ve Teorem 4.1'e göre imkansızdır.

2. Durum: $n = 4q + 1$ olsun. O zaman (5.1), (5.3) ve (5.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2z^2 &= U_{4q+2} + 1 - U_{4q+1} = U_{2q+1}V_{2q+1} - U_{2q}V_{2q+1} \\ &= V_{2q+1}(U_{2q+1} - U_{2q}) = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $V_{2q+1} = \square$ veya $V_{2q+1} = 2\square$ olduğu gösterilebilir. İlk olarak $V_{2q+1} = \square$ olsun. O zaman Teorem 4.1'e göre $q = 0$ ve k tamkare olur. Dolayısıyla $2z^2 - 1 = U_2 - U_1 = k - 1$, yani $2z^2 = k$ bulunur. Bu ise k tamkare olduğundan imkansızdır. Şimdi $V_{2q+1} = 2\square$ olsun. O zaman Lemma 5.1'e göre $q = 1$ ve $k = 3$ veya $k = 27$ olur. Bu durumda $2z^2 - 1 = U_6(3, -1) - U_5(3, -1) = 89$ veya $2z^2 - 1 = U_6(27, -1) - U_5(27, -1) = 1374100$ bulunur. Bu ise imkansızdır.

3. Durum: $n = 4q + 2$ olsun. O zaman (5.2), (5.3) ve (5.1) kullanılırsa

$$2z^2 = U_{4q+3} - U_{4q+2} + 1 = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k+2} \right)$$

bulunur. Böylece $V_{2q+1} = \square$ veya $V_{2q+1} = 2\square$ olduğu gösterilebilir. İlk olarak $V_{2q+1} = 2\square$ olsun. O zaman Lemma 5.1'e göre $q = 1$ ve $k = 3$ veya $k = 27$ bulunur. Böylece $2z^2 - 1 = U_7(3, -1) - U_6(3, -1) = 233$ veya $2z^2 - 1 = U_7(27, -1) - U_6(27, -1) = 370497401$ olur. Bunlar ise imkansızdır. Şimdi $V_{2q+1} = \square$ olsun. O zaman Teorem 4.1'e göre $q = 0$ ve k tamkaredir. Bu durumda $2z^2 - 1 = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1$, yani $2z^2 = k(k - 1)$ olur. Böylece k tamkare olduğundan $k - 1 = 2\square$ biçimindedir. O zaman $k = s^2$ ve $k - 1 = 2r^2$ olacak şekilde s ve r tamsayıları vardır. Buradan $s^2 - 2r^2 = 1$ elde edilir. Tablo 1.1'e göre $s = \frac{Q_{2m}}{2}$ ve $r = P_{2m}$ olacak biçimde $m \geq 0$ vardır. Bu yüzden $k = s^2 = Q_{2m}^2/4$ ise $2z^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin çözümü vardır.

4. Durum: $n = 4q + 3$ olsun. O zaman (5.1), (5.2) ve (5.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2z^2 &= U_{4q+4} + 1 - U_{4q+3} = U_{2q+2}V_{2q+2} - U_{2q+1}V_{2q+2} \\ &= V_{2q+2}(U_{2q+2} - U_{2q+1}) = V_{2q+2} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k + 2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $V_{2q+2} = \square$ veya $V_{2q+2} = 2\square$ olduğu gösterilebilir. Bu durum ise Teorem 4.1 ve Lemma 5.1'e göre imkansızdır. ■

Teorem 5.1.3: $kz^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin tamsayı çözümleri sadece a tamsayı olmak üzere $(n, k, z) = (1, k, 1), (2, a^2 + 1, a)$ dir.

İspat: $kz^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ olacak biçimde $z \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 0$ mevcut olsun. İspatın geri kalan kısmını dört durumda inceleyelim.

1. Durum: $n = 4q$ olsun. O zaman (5.4), (5.1) ve (5.2) kullanılarak

$$kz^2 = U_{4q+1} + 1 - U_{4q} = U_{2q+1}V_{2q} - U_{2q}V_{2q} = V_{2q} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k + 2} \right)$$

bulunur. Buradan (5.6) kullanılırsa $V_{2q} = \square$ veya $m > 1$ bir tamsayı ve $m|k$ olmak

üzere $V_{2q} = m\Box$ olduğu gösterilebilir. Bunlar ise Teorem 4.1 ve Teorem 4.3'e göre imkansızdır.

2. Durum: $n = 4q + 1$ olsun. O zaman (5.3), (5.1) ve (5.2) kullanılırsa

$$kz^2 = U_{4q+2} + 1 - U_{4q+1} = U_{2q+1}V_{2q+1} - U_{2q}V_{2q+1} = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+1} + V_{2q}}{k+2} \right)$$

elde edilir. Böylece (5.6) kullanılırsa $V_{2q+1} = \Box$ veya $m > 1$ bir tamsayı ve $m|k$ olmak üzere $V_{2q+1} = m\Box$ olur. O zaman Teorem 4.1 ve Teorem 4.3'e göre $q = 0$ bulunur. Böylece $kz^2 - 1 = U_2 - U_1 = k - 1$, yani $z = 1$ olur. Sonuç olarak $(n, k, z) = (1, k, 1)$ dir.

3. Durum: $n = 4q + 2$ alalım. O zaman (5.4), (5.1) ve (5.2) kullanılarak

$$kz^2 = U_{4q+3} - U_{4q+2} + 1 = V_{2q+1} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k+2} \right)$$

bulunur. Buradan $V_{2q+1} = \Box$ veya $m > 1$ bir tamsayı ve $m|k$ olmak üzere $V_{2q+1} = m\Box$ olur. İlk olarak $m|k$ olmak üzere $V_{2q+1} = m\Box$ olsun. O zaman Teorem 4.3'e göre $q = 0$ dır. Böylece $kz^2 - 1 = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1$, yani $kz^2 = k(k - 1)$ bulunur. O halde $k - 1$ tamkare ise $z = \sqrt{k-1}$ olur. Şimdi $V_{2q+1} = \Box$ olsun. O zaman Teorem 4.1'e göre $q = 0$ ve k tamkare olur. Bu durumda $kz^2 - 1 = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1$, yani $z^2 = k - 1$ elde edilir. Bu ise k tamkare olduğundan imkansızdır.

4. Durum: $n = 4q + 3$ olsun. O zaman (5.3), (5.1) ve (5.2) kullanılarak

$$kz^2 = U_{4q+4} - U_{4q+3} + 1 = V_{2q+2} \left(\frac{V_{2q+2} + V_{2q+1}}{k+2} \right)$$

bulunur. Buradan (5.6)'ya göre $V_{2q+2} = \Box$ veya $m > 1$ bir tamsayı ve $m|k$ olmak

üzere $V_{2q+2} = m\Box$ elde edilir. Bunlar ise Teorem 4.1 ve Teorem 4.3'e göre imkansızdır. ■

Benzer şekilde aşağıdaki tablodaki denklemlerin çözümleri bulunabilir.

Tablo 5.1. Bazı c değerleri için $cz^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ denkleminin çözümleri

c değerleri	(n, k) çözümleri var ise
$c = 3$	$n = 1$ ve $k = 3\Box$ veya $n = 2$ ve $k = \Box$
$c = 5$	$n = 1$ ve $k = 5\Box$ veya $n = 2$ ve $k = \Box, 5\Box$
$c = 6$	$n = 2$ ve $k = \Box$ veya $k = 3\Box$
$c = 7$	$n = 1$ ve $k = 7\Box$ veya $n = 2$ ve $k = 7\Box + 1$
$c = k$	$(n, k, z) = (1, k, 1), (2, a^2 + 1, a)$
$c = 5k$	$n = 2$ ve $k = (L_{6n}/2)^2$
$c = 7k$	$(n, k, z) = (2, 7a^2 + 1, a)$

5.2. $cz^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ Denkleminin Çözümleri

Buradan itibaren k tek tamsayı ve $n \geq 0$ olarak kabul edilecektir.

Sonuç 5.2.1: $z^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: $z^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ olacak biçimde bir z tamsayısı ve $n \geq 0$ mevcut olsun.

O zaman (3.13) kullanılırsa

$$z^2 - 1 = U_{n+1}(k^2 + 2, -1) - U_n(k^2 + 2, -1)$$

bulunur. O halde Teorem 5.1.1'e göre $n = 1$ ve $k^2 + 2$ tamkare şeklindedir. Bu ise $k^2 + 2 = s^2$ olacak şekilde s tamsayısı olmadığından imkansızdır. ■

Benzer şekilde aşağıdaki tablodaki denklemlerin çözümleri (3.13) kullanılarak bulunabilir.

Tablo 5.2. Bazı c değerleri için $cz^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ denkleminin çözümleri

c değerleri	(n, k) çözümleri var ise
$c = 1$	Tamsayı çözümü yoktur.
$c = 3$	$n = 1$
$c = 6$	$n = 2$
$c = k^2 + 2$	$(n, k, z) = (1, k, 1)$
$c \in \{2, 5, 6, 7, 5(k^2 + 2), 7(k^2 + 2)\}$	Tamsayı çözümü yoktur.

5.3. Dördüncü Dereceden Farklı Birkaç Diyofant Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde bir önceki bölümlerde elde edilen bilgiler kullanılarak bazı 4. dereceden Diyofant denklemlerinin çözümleri bulunacaktır.

Sonuç 5.3.1: $k \geq 3$ olsun. O zaman $(x^2 - 1)^2 - k(x^2 - 1)y + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri sadece a tamsayı olmak üzere $(x, y, k) = (a, 1, a^2)$ veya $a > 1$ tamsayı olmak üzere $(x, y, k) = (a, a^4 - a^2 - 1, a^2)$ biçimindedir.

İspat: (x, y) , $(x^2 - 1)^2 - k(x^2 - 1)y + y^2 = -(k - 2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.8'e göre

$$x^2 - 1 = U_{n+1} - U_n \text{ ve } y = U_n - U_{n-1}$$

veya

$$x^2 - 1 = U_n - U_{n-1} \text{ ve } y = U_{n+1} - U_n$$

olacak biçimde $n \geq 0$ mevcuttur. İlk olarak

$$x^2 - 1 = U_{n+1} - U_n \text{ ve } y = U_n - U_{n-1}$$

olsun. O zaman Teorem 5.1.1'e göre $(n, k, x) = (1, a^2, a)$ biçimindedir. Şu halde $x = a$ ve $y = U_1 - U_0 = 1$ bulunur. Şimdi de

$$x^2 - 1 = U_n - U_{n-1} \text{ ve } y = U_{n+1} - U_n$$

olsun. Teorem 5.1.1'e göre $(n-1, k, x) = (1, a^2, a)$ olur. Böylece $x = a$ ve $y = U_3 - U_2 = k^2 - k - 1 = a^4 - a^2 - 1$ elde edilir. Aynı zamanda $y > 0$ olduğundan $a > 1$ olmalıdır. ■

Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin çözümleri benzer şekilde bulunabilir.

Tablo 5.3. $k \geq 3$ olmak üzere bazı c değerleri için $(cx^2 - 1)^2 - k(cx^2 - 1)y + y^2 = -(k-2)$ denkleminin çözümleri

c	(x, y, k) çözümleri var ise
$c = 1$	$(x, y, k) = (a, 1, a^2)$ veya $a > 1$ olmak üzere $(x, y, k) = (a, a^4 - a^2 - 1, a^2)$
$c = 2$	$m \geq 0$ ve $k = Q_{2m}^2/4$ olmak üzere $(x, y) = (P_{4m}, 2P_{2m}^2), (P_{4m}, U_4 - U_3)$
$c = 3$	$k = \square$ ve $\sqrt{k(k-1)/3}$ tamsayı olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k(k-1)/3}, k-1), (\sqrt{k(k-1)/3}, k^3 - k^2 - 2k + 1)$ veya $k = 3$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k/3}, 1), (\sqrt{k/3}, k^2 - k - 1)$
$c = 5$	$k = (L_{6n}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (F_{12n}/4, k-1), (F_{12n}/4, k^3 - k^2 - 2k + 1)$; $k = 5(F_{6n-3}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (F_{12n-6}/4, k-1), (F_{12n-6}/4, k^3 - k^2 - 2k + 1)$ veya $k = \square$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k/5}, 1), (F_{12n}/4, k-1), (F_{12n}/4, k^3 - k^2 - 2k + 1), (F_{12n-6}/4, k^3 - k^2 - 2k + 1)$
$c = 6$	$k = \square$ veya $k = 3\square$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k(k-1)/6}, k-1), (\sqrt{k(k-1)/6}, k^3 - k^2 - 2k + 1)$
$c = 7$	$k = 7\square$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k/7}, 1), (\sqrt{k/7}, k^2 - k - 1)$ veya $k(k-1) = 7\square$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k(k-1)/7}, k-1), (\sqrt{k(k-1)/7}, k^3 - k^2 - 2k + 1)$
$c = k$	$k = \square$ olmak üzere $(x, y) = (1, 1), (1, k^2 - k - 1)$ veya $k-1 = \square$ olmak üzere $(x, y) = (\sqrt{k-1}, k-1), (\sqrt{k-1}, k^3 - k^2 - 2k + 1)$

Sonuç 5.3.2: $k \geq 3$ olsun. O zaman $x^2 - (k^2 - 4)(y^2 - 1)^2 = -4(k-2)$ denkleminin tamsayı çözümü sadece a tamsayı olmak üzere $(x, y, k) = (a^4 - a^2 - 2, a, a^2)$ biçimindedir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 - 4)(y^2 - 1)^2 = -4(k-2)$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 3.2.9'a göre

$$x = V_n - V_{n-1} \text{ ve } y^2 - 1 = U_n - U_{n-1}$$

olacak biçimde $n \geq 0$ vardır. Böylece Teorem 5.1.1'e göre $(n-1, k, y) = (1, a^2, a)$

olacak biçimde a tamsayısı vardır. Şu halde $x = V_2 - V_1 = k^2 - k - 2 = a^4 - a^2 - 2$ ve $y = a$ bulunur. ■

Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin çözümleri benzer şekilde bulunabilir.

Tablo 5.4. Bazı c değerleri için $x^2 - (k^2 - 4)(cy^2 - 1)^2 = -4(k-2)$ denkleminin çözümleri

c	(x, y, k) çözümleri var ise
$c = 1$	$(x, y, k) = (a^4 - a^2 - 2, a, a^2)$
$c = 2$	$m \geq 0$ olmak üzere $k = Q_{2m}^2/4$ ve $(x, y) = (k^3 - k^2 - 3k + 2, \sqrt{k(k-1)/2})$
$c = 3$	$k = 3\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^2 - k - 2, \sqrt{k/3})$ veya $k(k-1) = 3\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, \sqrt{k(k-1)/3})$
$c = 5$	$k = 5\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^2 - k - 2, \sqrt{k/5})$; $k = 5(F_{6n-3}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, F_{12n-6}/4), (k^2 - k - 2, \sqrt{k/5})$ veya $k = (L_{6n}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, F_{12n}/4)$
$c = 6$	$k = \Box$ veya $k = 3\Box$ ve $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, \sqrt{k(k-1)/6})$
$c = 7$	$k = 7\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - k^2 - 3k + 2, \sqrt{k/7})$ veya $k(k-1) = 7\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - k^2 - 3k + 2, \sqrt{k(k-1)/7})$
$c = k$	$k = \Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^2 - k - 2, 1)$ veya $k-1 = \Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - k^2 - 3k + 2, \sqrt{k-1})$
$c = 5k$	$k = 5\Box$ olmak üzere $(x, y) = (k^2 - k - 2, \sqrt{k/5})$; $n > 0$ ve $k = 5(F_{6n-3}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, F_{12n-6}/4), (k^2 - k - 2, \sqrt{k/5})$ veya $n > 0$ ve $k = (L_{6n}/2)^2$ olmak üzere $(x, y) = (k^3 - 3k - k^2 + 2, F_{12n}/4)$
$c = 7k$	Denklemin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 5.3.3: $k \geq 1$ olsun. O zaman $x^2 - (k^2 + 4)[(k^2 + 2)y^2 - 1]^2 = -4$ denkleminin pozitif tamsayı çözümü sadece $(x, y) = (k^3 + 3k, 1)$ dir.

İspat: (x, y) , $x^2 - (k^2 + 4)[(k^2 + 2)y^2 - 1]^2 = -4$ denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Tablo 1.1'e göre

$$x = V_{2n+1}(k, 1) \text{ ve } (k^2 + 2)y^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$$

olacak şekilde $n \geq 0$ vardır. Böylece Tablo 5.3'e göre $(n, k, y) = (1, k, 1)$ olur. O halde

$$x = k^3 + 3k \text{ ve } y = 1$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki tabloda verilen denklemlerin çözümleri benzer şekilde bulunabilir.

Tablo 5.5. $k \geq 1$ olmak üzere bazı c değerleri için $x^2 - (k^2 + 4)(cy^2 - 1)^2 = -4$ denkleminin çözümleri

c değerleri	(x, y, k) çözümleri var ise
$c \in \{1, 2, 5, 7, 5(k^2 + 2), 7(k^2 + 2)\}$	Pozitif tamsayı çözümü yoktur.
$c = 3$	$k^2 + 3 = \square$ ve $(x, y) = (k^3 + 3k, \sqrt{(k^2 + 2)/3})$
$c = 6$	$k^2 + 2 = 3\square$ ve $(x, y) = (k^5 + 5k^3 + 5k, \sqrt{(k^4 + 3k^2 + 2)/6})$
$c = k^2 + 2$	$(x, y) = (k^3 + 3k, 1)$

Teorem 5.1 ve Tablo 5.2 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Tablo 5.6. Bazı c değerleri için $(cx^2 - 1)^2 + k(cx^2 - 1)y - y^2 = 1$ denkleminin çözümleri

c değerleri	(x, y, k) çözümleri var ise
$c \in \{1, 2, 5, 7\}$	Pozitif tamsayı çözümü yoktur.
$c = 3$	$k^2 + 2 = 3\square$ ve $(x, y) = (\sqrt{(k^2 + 2)/3}, k^3 + 2k)$
$c = 6$	$k^2 + 2 = 3\square$ ve $(x, y) = (\sqrt{(k^4 + 3k^2 + 2)/6}, k^5 + 4k^3 + 3k)$
$c = k^2 + 2$	$(x, y) = (1, k^3 + 2k)$
$c \in \{5(k^2 + 2), 7(k^2 + 2)\}$	Pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 5.3.4: $t > 1$ ve $m > 0$ olsun. O zaman

$$(tx^2 + m)^2 - k(tx^2 + m)[(t - 1)x^2 + m + 1] + [(t - 1)x^2 + m + 1]^2 = 1$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

İspat: x ,

$$(tx^2 + m)^2 - k(tx^2 + m)[(t-1)x^2 + m + 1] + [(t-1)x^2 + m + 1]^2 = 1$$

denkleminin herhangi bir pozitif tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 5.2'ye göre

$$tx^2 + m = U_{n+1} \text{ ve } (t-1)x^2 + m + 1 = U_n \quad (5.8)$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Buradan $x^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.1.1'e göre a tamsayı olmak üzere $(n, k, x) = (1, a^2, a)$ elde edilir. O zaman (5.8) kullanılırsa $tx^2 + m = ta^2 + m = U_2(k, 1) = a^2$ bulunur. Bu ise $t > 1$ ve $m > 0$ olduğundan imkansızdır.

Sonuç 5.3.4'e benzer şekilde aşağıdaki üç sonuç ispatlanabilir.

Sonuç 5.3.5: $a \in \{2,3,5,7\}$ olmak üzere $t > a$ ve $m > 0$ olsun. O zaman

$$(tx^2 + m)^2 - k(tx^2 + m)[(t-a)x^2 + m + 1] + [(t-a)x^2 + m + 1]^2 = 1$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur.

Sonuç 5.3.6: $t > 6$ ve $m > 0$ olsun. O zaman

$$(tx^2 + m)^2 - k(tx^2 + m)[(t-6)x^2 + m + 1] + [(t-6)x^2 + m + 1]^2 = 1$$

denkleminin tamsayı çözümü sadece $(t, m, x) = (7,1,1)$ dir.

İspat: x , $(tx^2 + m)^2 - k(tx^2 + m)[(t-6)x^2 + m + 1] + [(t-6)x^2 + m + 1]^2 = 1$ denkleminin herhangi bir tamsayı çözümü olsun. O zaman Teorem 5.2'ye göre

$$tx^2 + m = U_{n+1} \text{ ve } (t - 6)x^2 + m + 1 = U_n \quad (5.9)$$

olacak şekilde $n \geq 1$ vardır. Buradan $6x^2 - 1 = U_{n+1} - U_n$ elde edilir. O halde Teorem 5.1.5'e göre $n = 2$ bulunur. Bu değer (5.9) denklemlerinde yerine konulursa

$$(t - 6)x^2 + m + 1 = U_2 = k \quad (5.10)$$

ve

$$tx^2 + m = U_3 = k^2 - 1 \quad (5.11)$$

elde edilir. (5.10), (5.11)'de yerine konulursa da

$$(t - 6)^2x^4 + [2(t - 6)(m + 1) - t]x^2 + m^2 + m = 0 \quad (5.12)$$

olur. Bu ise $m > 2$ iken $2(t - 6)(m + 1) - t \geq 0$ olduğundan imkansızdır. O zaman $m = 1$ olur. Bu değer (5.12)'de yerine konulursa $(t - 6)^2x^4 + (3t - 24)x^2 + 2 = 0$ bulunur. Bu ise $t > 7$ iken imkansızdır. O zaman $t = 7$ elde edilir. Böylece $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ olur. Bu denklemin tamsayı çözümü ise sadece $x = 1$ dir. Dolayısıyla (5.10)'dan $k = 3$ elde edilir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Tezin birinci bölümünde, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları ile ilgili literatür bilgisine yer verildi. İkinci bölümde bu sayılarla ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde bazı sayıların sürekli kesir açılımları ve bazı Pell denklemlerinin pozitif tamsayı çözümleri elde edildi. Bu bölümde elde edilen bilgiler kullanılarak $x^2 - kxy + y^2 = -(k + 2)$ denkleminin çözümünün olması için gerekli ve yeterli şartın $k = 3$ veya $k = 6$ olması gerektiği gösterildi. Ayrıca $x^2 - kxy + y^2 = k - 2$ denkleminin çözümünün olması için gerekli ve yeterli şartın $k - 2$ 'nin tamkare olması gerektiği gösterildi. Dördüncü bölümde $x^2 = V_{n+1}(k, -1) \mp V_n(k, -1)$ ve $x^2 = U_{n+1}(k, -1) \mp U_n(k, -1)$ denklemlerinin çözümleri varsa $n = 0, 1, 2$ olduğu gösterildi. Bundan faydalanarak dördüncü dereceden bazı Diyofant denklemlerinin çözümleri tespit edildi. Tezin 5. bölümünde $a = 1, 2, 3, 6$ için $az^2 - 1 = U_{n+1}(k, -1) - U_n(k, -1)$ ve $az^2 - 1 = U_{2n+1}(k, 1)$ sayılarının denklemlerinin çözümleri bulundu. Ayrıca bu sayılarla ilgili olan bazı dördüncü dereceden denklemlerin çözümleri verildi.

Bu tezin 3. bölümü “An. Ştiint. Univ. Al. Cuza Iaşi Mat. (N.S.)” dergisinde yayına kabul edildi [71] ve 4. bölümü “Miskolc Mathematical Notes” adlı dergide yayınlandı [68].

k tamsayısı $k > 1$ şartını sağlamak üzere $x^2 - kxy - y^2 = k$ denklemleri verildiğinde $n \geq 1$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere $(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$ ve $(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$ pozitif tamsayılarının bu denklemin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Aynı biçimde k tamsayısı $k > 1$ şartını sağlamak üzere $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$ denklemleri verildiğinde $n \geq 0$, $U_n = U_n(k, 1)$ ve $V_n = V_n(k, 1)$ olmak üzere $(x, y) = (V_{2n-1} + V_{2n-2}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$ ve $(x, y) = (V_{2n} - V_{2n-1}, U_{2n} - U_{2n-1})$ pozitif tamsayılarının bu denklemin bir çözümü olduğu

gösterilebilir. k 'nın asal sayı olması durumunda $x^2 - kxy - y^2 = k$ denkleminin tüm çözümlerinin $n \geq 1$ ve $U_n = U_n(k, 1)$ olmak üzere $(x, y) = (U_{2n} + U_{2n-1}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$ ve $(x, y) = (U_{2n+1} - U_{2n}, U_{2n} - U_{2n-1})$ ile verildiği gösterilebilir. Aynı biçimde k asal tamsayı olmak üzere $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = 4k$ denkleminin tüm çözümlerinin $n \geq 0$, $U_n = U_n(k, 1)$ ve $V_n = V_n(k, 1)$ olmak üzere $(x, y) = (V_{2n-1} + V_{2n-2}, U_{2n-1} + U_{2n-2})$ ve $(x, y) = (V_{2n} - V_{2n-1}, U_{2n} - U_{2n-1})$ ile verildiği gösterilebilir. Ayrıca k 'nın asal olmaması durumunda bu denklemlerin çözümleri araştırılabilir. Yine benzer şekilde $x^2 - kxy - y^2 = -k$ ve $x^2 - (k^2 + 4)y^2 = -4k$ denklemlerinin çözümleri araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Keskin, R., Demirtürk, B., Solutions of some Diophantine equations using generalized Fibonacci and Lucas sequences, *Ars Combin.*, 111: 161-179, 2013.
- [2] Mollin, R. A., van der Poorten, A. J., Continued fractions, Jacobi symbols, and quadratic Diophantine equations, *Canad. Math. Bull.*, 43 (2): 218-225, 2000.
- [3] Cohn, J. H. E., Twelve Diophantine equations, *Arch. Math.*, 65: 130-133, 1965.
- [4] Walsh, G., A note on a theorem of Ljunggren and the Diophantine equations $x^2 - kxy^2 + x^4 = 1$, *Arch. Math.*, 73: 119-125, 1999.
- [5] Andreescu, T., Andrica, D., Cucurezeanu, I., An introduction to Diophantine equations. A problem-based approach, Birkhauser Verlag, New York, 2010.
- [6] Ljunggren, W., Über die Gleichung $x^4 - Dy^2 = 1$, *Arch. Math. Naturvid*, 45 (5): 61-70, 1942.
- [7] Alaca, S., Williams, K. S., Introductory algebraic number theory. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [8] Cohn, J. H. E., Some quartic Diophantine equations, *Pacific J. Math.*, 26: 233-243, 1968.
- [9] Mordell, L. J., The Diophantine equation $y^2 = Dx^4 + 1$, *J. London Math. Soc.*, 39: 161-164, 1964.
- [10] Dunlap, R. A., The Golden ratio and Fibonacci numbers, WSPC, 1997.
- [11] Vajda, S., Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications, Ellis Horwood Ltd., Chichester; Halsted Press, New York, 1989.
- [12] Keskin, R., Demirtürk, B., Fibonacci and Lucas congruences and their applications, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 27 (4): 725-736, 2011.
- [13] Kalman, D., Mena, R., The Fibonacci numbers-exposed, *Math. Mag.*, 76 (3): 167-181, 2003.

- [14] Robinowitz, S., Algorithmic manipulation of Fibonacci identities, In: Application of Fibonacci numbers, 6: 389-408, Ed A. N. Philippou et al. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- [15] Wylie, O., Solution of problem. In the Fibonacci series $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ the first, second and twelfth terms are squares. Are there any others?, Amer. Math. Monthly, 71: 220-222, 1964.
- [16] Koshy, T., Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley & Sons, Proc., New-York Toronto, 2001.
- [17] Hilton, P., Pedersen, J., Somer, L., On Lucasian numbers, Fibonacci Quart., 35 (1): 43-47, 1997.
- [18] Ribenboim, P., McDaniel, W. L., The square terms in Lucas sequences, J. Number Theory, 58 (1): 104-123, 1996.
- [19] Ribenboim, P., My numbers, my friends, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [20] Ribenboim, P., McDaniel, W. L., Squares in Lucas sequences having one even first parameter, Colloq. Math., 78 (1): 29-34, 1998.
- [21] Lucas, E., Theorie des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques, Amer. J. Math., 1 (4): 289-321, 1878.
- [22] Lucas, E., Sur la theorie des nombres premiers, Atti R. Acad. Sc. Torino Math., 11: 928-937, 1875/76.
- [23] Carmichael, R. D., On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$, Ann. of Math., 15 (1-4): 30-70, 1913/14.
- [24] McDaniel, W. L., The g.c.d. in Lucas sequences and Lehmer number sequences, Fibonacci Quart., 29 (1): 24-39, 1991.
- [25] Şiar, Z., Keskin, R., Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers, Hacet. J. Math. Stat., 42 (3): 211-222, 2013.
- [26] Şiar, Z., Keskin, R., The square terms in generalized Lucas sequence with parametres P and Q , Math. Scand., 118 (1): 13-26, 2016.
- [27] Ismail, M. E. H., One parameter generalizations of the Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci Quart., 46-47 (2): 167-180, 2008/09.
- [28] Lehmer, D. H., On the multiple solutions of the Pell equation, Ann. of Math. (2), 30 (1-4) : 66-72, 1928/29.
- [29] Redmond, D., Number Theory: An Introduction, Markel Dekker, Inc, New York, 1996.

- [30] Robertson, J. P., Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$, <http://hometown.aol.com/jpr2718/pell.pdf>, May, 2003. (Description of LMM Algorithm for solving Pell's equation).
- [31] Nagell, T., Introduction to number theory. Second edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1964.
- [32] Pekasil, M., Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri. Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Yüksek Lisans Tezi, 2006.
- [33] Burton, D. M., Elementary number theory. Second edition, W. C. Brown Publishers, Dubuque, IA., 1989.
- [34] Jones, J. P., Representation of solutions of Pell equations using Lucas sequences, *Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.)*, 30: 75-86, 2003.
- [35] Robertson, J. P., On D so that $x^2 - Dy^2$ represents m and $-m$ and not -1 , *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.)*, 25 (2): 155-164, 2009.
- [36] Jacobson, M. J., Williams, H. C., Solving the Pell Equation, Springer, New York, 2009.
- [37] Demirtürk, B., Keskin, R., Integer solutions of some Diophantine equations via Fibonacci and Lucas numbers, *J. Integer Seq.*, 12 (8), 2009.
- [38] Keskin, R., Solutions of some quadratic Diophantine equations, *Comput. Math. Appl.*, 60 (8): 2225-2230, 2010.
- [39] Melham, R., Conics which characterize certain Lucas sequences, *Fibonacci Quart.*, 35 (3): 248-251, 1997.
- [40] McDaniel, W. L., Diophantine representation of Lucas sequences, *Fibonacci Quart.*, 33 (1): 59-63, 1995.
- [41] Adler, A., Coury, J. E., The Theory of Numbers: A Text and Source Book of Problems, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1995.
- [42] Moser, L., Carlitz, L., Advanced problem H-2, *Fibonacci Quart.*, 1 (1), 1963.
- [43] Briggs, W. E., Newman, D. J., Erdos, P., Zassenhaus, H., Kenyon, H., Suvorov, F., Rollett, A. P., Adorno, D. S., Advanced Problems and Solutions: Problem for Solution: 5072-5081, *Amer. Math. Monthly*, 70(2): 215-216, 1963.
- [44] Cohn, J. H. E., On square Fibonacci numbers, *J. Lond. Math. Soc.*, 39: 537-540, 1964.
- [45] Cohn, J. H. E., Square Fibonacci numbers, etc., *Fibonacci Quart.*, 2: 109-113, 1964.

- [46] Burr, S. A., On the occurrence of squares in Lucas sequences, Amer. Math. Soc. Notices (Abstract 63T-302), 10: 11-12, 1963.
- [47] Rollett, A. P., Wyler, O., Advanced Problems and Solutions: Solutions 5080, Amer. Math. Monthly, 71 (2): 220-222, 1964.
- [48] Alfred, B. U., On square Lucas numbers, Fibonacci Quart., 2: 11-12, 1964.
- [49] Robbins, N., On Fibonacci numbers of the form px^2 , where p is prime, Fibonacci Quart., 21: 266-271, 1983.
- [50] Kagawa, T., Terai, N., Squares in Lucas sequences and some Diophantine equations, Manuscripta Math., 96 (2): 195-202, 1998.
- [51] Ribenboim, P., Square classes of Fibonacci and Lucas numbers, Portugal. Math. 46 (2): 159-175, 1989.
- [52] Wyler, O., Squares in the Fibonacci Series, Amer. Math. Monthly, 7: 220-222, 1964.
- [53] Keskin, R., Yosma, Z., On Fibonacci and Lucas numbers of the form cx^2 , J. Integer Seq., 14 (9): 1-12, 2011.
- [54] Robbins, N., Fibonacci numbers of the form cx^2 , where $1 \leq c \leq 1000$, Fibonacci Quart., 28 (4): 306-315, 1990.
- [55] Cohn, J. H. E., Eight Diophantine equations, Proc. London Math. Soc., 16 (3): 153-166, 1996.
- [56] Cohn, J. H. E., Five Diophantine equations, Math. Scand., 21: 61-70, 1967.
- [57] Mignotte, M., Pethö, A., Sur les carrés dans certaines suites de Lucas, J. Theor. Nombres Bordeaux, 5 (2): 333-341, 1993.
- [58] Şiar, Z., Keskin, R., The square terms in generalized Lucas sequences, Mathematika, 60 (1): 85-100, 2014.
- [59] Keskin, R., Karaatlı, O., Generalized Fibonacci And Lucas numbers of the form $5x^2$, Int. J. Number Theory 11 (3) : 931-944, 2015.
- [60] Karaatlı, O., Keskin, R., Generalized Lucas numbers of the form $5kx^2$ and $7kx^2$, Bull. Korean Math. Soc., 52 (5): 1467-1480, 2015.
- [61] Pethö, A., Full cubes in the Fibonacci sequence, Publ. Math. Debrecen, 80 (1-2): 117-127, 1983.
- [62] Ribenboim, P., McDaniel, W. L., On Lucas sequences terms of the form kx^2 . Number theory (Turku, 1999), de Gruyter, Berlin, 293-303, 2001.

- [63] Cohn, J. H. E., Lucas and Fibonacci numbers and some Diophantine equations, Proc. Glasgow Math. Assoc., 7: 24-28, 1965.
- [64] Karaatlı, O., Keskin, R., On the equations $U_n = 5\Box$ and $V_n = 5\Box$, Miskolc Math. Notes, 16 (2): 925-938, 2015.
- [65] Alekseyev, M. A., Tengely, S., On integral points on biquadratic curves and near-multiples of squares in Lucas sequences, J. Integer Seq., 17 (6):1-15, 2014.
- [66] Keskin, R., Generalized Fibonacci and Lucas numbers of the form wx^2 and $wx^2 \pm 1$, Bull. Korean Math. Soc., 51 (4): 1041-1054, 2014.
- [67] Ljunggren, W., Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$, Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, 1 (5): 1-27, 1942.
- [68] Keskin, R., Güney Duman, M., A note on some Diophantine equations, Miskolc Math. Notes, 18 (1): 235-249, 2017.
- [69] Leveque, J. W., Topics in Number Theory, Volume 1 and 2, Dover Publications, Inc, Mineola, NY, 2002.
- [70] Bosma, W., Cannon, J., Playoust, C., The Magma algebra system. I: The user language. Computational algebra and number theory (London, 1993), J. Symbolic Comput., 24 (3-4): 235-265, 1997.
- [71] Keskin, R., Güney Duman, M., Positive integer solutions of some second-order Diophantine equations, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Mat. (N.S.), 63 (3): 649-664, 2017.

ÖZGEÇMİŞ

Merve GÜNEY DUMAN, 23.11.1988 tarihinde Sakarya'da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Sakarya'da tamamladı. 2005 yılında Sakarya Mithatpaşa Şükrü Ayna Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2009 yılında bitirdi. 2010-2011 yılları arasında Sakarya Üniversitesinde formasyon eğitimi aldı. 2010-2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi bilim dalında yüksek lisans eğitimi aldı. 2012 yılında Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Cebir ve Sayılar Teorisi bilim dalında doktora eğitimine başladı.