

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİLİ KARŞILAŞTIRMA MATRİSLERİNİN DİFERENSİYEL
GEOMETRİSİ

Ebru YANIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yükseklisans Tezi

İKİLİ KARŞILAŞTIRMA MATRİSLERİNİN DİFERENSIYEL GEOMETRİSİ

Ebru YANIK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde ikili karşılaştırma matrisleri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, ikili karşılaştırma matrisleri ile ilgili bazı temel kavramlar, teorem ve sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, ikili karşılaştırma matrislerinin Lie grubu ve Lie cebiri yapısı verildi. Bu yapılar sayesinde elde edilen üstel dönüşümün özellikleri incelendi. Bölümün sonunda Lie grubu ve Lie cebiri yapısıyla beraber ikili karşılaştırma matrisleri üzerine başka bir bakış açısına yer verildi.

Dördüncü bölümde, $SO(n, \mathbb{R})$ Lie grubu ve $so(n, \mathbb{R})$ Lie cebirinin, ikili karşılaştırma matrislerinin Lie grubu ve Lie cebiri ile olan ilişkisine; non-newtonian veya geometrik aritmetik bakış açısı ile incelenmiştir. Aralarında bulununan ilişki bir teorem ile verilmiştir.

Son bölüm çalışmanın analizine ve tartışmaya ayrılmıştır.

Ocak 2022, 35 sayfa

Anahtar Kelimeler: ikili karşılaştırma matrisleri, kararlı matrisler, kararsız matrisler, Lie grubu, Lie cebiri, diferensiyellenebilir manifoldlar, yaklaşım, iç çarpım, dik izdüşüm, dik tümleyen, geometrik aritmetik

ABSTRACT

Master Thesis

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF PAIRWISE COMPARISON MATRICES

Ebru YANIK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

First chapter is devoted to the introduction. Some fundamentals concepts about pairwise comparison given.

In the second chapter, basic mathematical tools which are used in various pairwise comparison matrices are defined and relations between them are investigated.

In the third chapter, structure of pairwise comparison matrices Lie group and Lie algebra is given. The properties of the exponential transformation obtained from these structures were studied. In addition, along with the structure of the Lie group and the Lie algebra, another point of view on pairwise comparison matrices was given.

In the fourth chapter, the relation of the $SO(n, \mathbb{R})$ Lie group and the $so(n, \mathbb{R})$ Lie algebra with the Lie group and the Lie algebra of pairwise comparison matrices is examined from a non-newtonian or geometric arithmetic point of view. The relationship between them is given by a theorem.

The final chapter is introduced to the discussion and conclusion.

January 2022, 35 pages

Key Words: Pairwise comparison matrices, inconsistent matrices, consistent matrices, Lie group, Lie algebra, differentiable manifolds, approximation, inner product, orthogonal projection, orthogonal compleman, geometric arithmetic

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ders dönemim ve tez yazma sürecim boyunca benden desteklerini emeklerini bir an bile esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI ve Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ, Prof. Dr. İsmail GÖK hocalarıma teşekkürlerimi ve minnetimini sunuyorum.

Son olarak sevgili ailem; annem Nuray YANIK, babam İlhan YANIK ve canım kardeşlerim Ece YANIK ve Ayaz Batın YANIK'a bana verdikleri destekleri için teşekkür ediyorum.

Ebru YANIK
Ankara, Ocak 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	2
3. PC MATRİSLERİN LİE GRUBU VE LİE CEBİRİ	9
3.1 PC Matrisler ve Üstel Dönüşüm	11
3.2 PC Matris Lie Grubu ve İç Direkt Toplam	14
3.3 PC Matrislerin Uygulamaları	21
4. PC MATRİSLER VE ORTOGONAL MATRİS GRUPLARI	26
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	33
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER DİZİNİ

PC	İkili karşılaştırma
$\mathbb{R}$	reel sayılar
$\mathbb{C}$	kompleks sayılar
$\mathbf{G}$	çarpımsal PC matrisler ve PC matris Lie grubu
$\mathfrak{g}$	PC matris Lie cebiri
$\exp$	üstel dönüşüm
$O(n)$	ortogonal grup
$SO(n, \mathbb{R})$	$n \times n$ tipinde reel ortogonal matrisler
$so(n, \mathbb{R})$	$n \times n$ tipinde antisimetrik matris vektör uzayı
$\mathbb{R}(G)$	geometrik reel sayılar
$\mathbb{R}^+(G)$	geometrik pozitif reel sayılar
$\mathbb{R}(G)_n^n$	$n \times n$ tipinde geometrik reel matrisler
Exp	geometrik aritmetik üstel dönüşüm
Ln	geometrik aritmetik logaritmik dönüşüm

1. GİRİŞ

İkili karşılaştırma genellikle karşılaştırmak için seçilen herhangi bir varlığın hangisinin tercih edildiğini veya daha fazla miktarda sayılabilen, ölçülebilen, azalıp çoğalabilen özelliğe sahip olduğunu veya bu iki varlığın aynı olup olmadığını yargılamak için bu varlıkları çiftler halinde karşılaştırma işlemidir. İkili karşılaştırma, tercihlerin, tutumların, oylama sistemlerinin, sosyal seçimin, kamu seçiminin, mühendislik gereksinimlerinin bilimsel çalışmasında kullanılır ve farklı birçok disiplin üzerinde etki alanı vardır. Örneğin; psikoloji literatüründeki çalışmalarda genellikle eşleştirilmiş karşılaştırma adı altında kullanımı vardır.

İkili karşılaştırma yönteminin ilk kullanımı genellikle 13.yüzyıl filozofu Ramon Llull'a eserlerin de daha iyi bir seçim süreci yürütmek için çalıştığından atfedilir. İkili karşılaştırma yönteminin çok kriterli bir karar verme yaklaşımı olan Analitik Hiyerarşi Süreci(AHS) ilk olarak 1968 yılında Myers ve Alpert tarafından ortaya atılmış ve 1977 de ise Saaty tarafından bir model olarak geliştirilerek karar verme problemlerinin çözümünde kullanılabilir hale getirilmiştir. AHS, karar hiyerarşisinin tanımlanabilmesi durumunda kullanılan, kararı etkileyen faktörler açısından karar noktalarının yüzde dağılımlarını veren bir karar verme ve tahminleme yöntemi olarak açıklanabilir. Buradan itibaren ikili karşılaştırma matrisleri için PC matris ifadesini kullanarak devam edeceğiz.

AHS'nin matematiksel temelleri üzerine yapılan günümüze kadar uzanan çalışmalarda ağırlıklı PC matrislerden türetilen ağırlık vektörleri incelenmiş ve bu türetilen ağırlık vektörlerinden elde edilen sonuçlara göre PC matrislerinin kararlılığını ölçmenin methodları üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada, PC matrislerin kararlılığı için kullanılan ağırlık vektörleri üzerinden çalışmalarımızı oluşturacağız. PC matrislerin kümesi üzerinde bu Lie grubunun Lie cebiri yapısının olduğunu gösteren bir teorem vereceğiz ve aynı zamanda geometrik aritmetik yardımı ile birçok probleme farklı bir bakış açısı ile yaklaşacağız.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde; çarpımsal PC matris, karşılıklı çarpımsal PC matris, çarpımsal PC matrisinin ağırlık vektörü, çarpımsal kararlı PC matris, toplamsal PC matris, toplamsal PC matrisinin ağırlık vektörü, toplamsal kararlı PC matris, topolojik uzay, Hausdorff uzayı, topolojik manifold, atlas, diferensiyellenebilir manifold, Lie grubu, Lie cebiri tanımları, teoremleri ve bazı örnekler verilecektir.

Tanım 2.1 $\forall n > 0$ ve $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere,

$$\mathbf{G} = \{M = [m_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}_n^n : m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}} > 0 \text{ ve } m_{ij} \in \mathbb{R}^+\}$$

cümlesinin elemanı olan bir matrise $n \times n$ tipinde çarpımsal PC matrisi denir. (Saaty,1977)

Tanım 2.2 M bir çarpımsal PC matris ve $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $m_{ij} > 0$ olmak üzere

$$m_{ij} \cdot m_{ji} = 1$$

ise karşılıklıdır ve $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$m_{ii} = 1$$

olur. Burada m_{ij} pozitif reel değeri; w_i 'ler i. satırın geometrik ortalaması ve w_j 'ler j. sütunun geometrik ortalaması olmak üzere,

$$m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

oranının bir tahmini pozitif değeridir. (Saaty,1977)

Tanım 2.3 $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ olmak üzere A ve B sırasıyla $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ile tanımlı $m \times n$ boyutlu iki matris olsun. Her $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ için $[A \cdot B]_{ij} = [A]_{ij} \cdot [B]_{ij}$ şeklinde tanımlanan matris çarpımına Hadamard çarpımı denir. (Million, 2007)

Tanım 2.4 Bir M çarpımsal PC matris için $n \times n$ boyutlu matris formunda gösterimi,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ \frac{1}{m_{12}} & 1 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m_{1n}} & \frac{1}{m_{2n}} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Vektörler ve matrislerin işlemi Hadamard çarpımı ile yani bileşensel olarak (componentwise) gerçekleşmektedir. (Satty, 1977)

Tanım 2.5 n boyutlu bir M çarpımsal PC matris olsun ve

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[n]{(a_{11} \cdot a_{12} \cdots a_{1n})} \\ w_2 &= \sqrt[n]{(a_{21} \cdot a_{22} \cdots a_{2n})} \\ &\vdots \\ w_n &= \sqrt[n]{(a_{n1} \cdot a_{n2} \cdots a_{nn})} \end{aligned}$$

olmak üzere $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörüne M çarpımsal PC matrisinin ağırlık vektörü denir. (Barzilai,1997)

Sonuç 2.1 Bir $M = [m_{ij}]$ çarpımsal PC matrisinin ağırlık vektörü $W = (w_k)$ olmak üzere

$$w_k > 0 \quad \text{ve} \quad \prod_{k=1}^n (w_k) = 1$$

olur. (Barzilai, 1997)

Teorem 2.1 Bir $M = [m_{ij}]$ çarpımsal PC matris ve $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ağırlık vektörü olmak üzere eğer $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

olacak şekilde bir W pozitif değerli ağırlık vektörü mevcut ise M çarpımsal PC matrisi kararlıdır. (Saaty,1977)

Tanım 2.6 M bir çarpımsal PC matris olmak üzere eğer $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$m_{ij} \cdot m_{jk} = m_{ik} \text{ ya da eşdeğer olarak } m_{ij} \cdot m_{jk} \cdot m_{ki} = 1$$

eşitlikleri sağlanıyor ise M çarpımsal PC matrisi kararlıdır denir. (Koczkodaj ve Orłowski;1997)

Tanım 2.7 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ olmak üzere

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

eşitliği sağlanıyorsa A matrisine toplamsal PC matrisi denir. (Barzilai,1997)

Sonuç 2.2 Bir çarpımsal $M = [m_{ij}]_{n \times n}$ PC matrisinin logaritma fonksiyonunun bileşensel dönüşümü altında elde edilen

$$A = [a_{ij}] = [\ln(m_{ij})]$$

matrisi bir toplamsal PC matristir ve $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ve her PC matris karşılıklı olduğundan

$$a_{ij} + a_{ji} = 0 \text{ 'dır.}$$

Buradan da görülmektedir ki; A toplamsal PC matrisi, bir antisimetrik matristir. (Koczkodaj ve Orłowski; 1997)

Tanım 2.8 Bir A toplamsal PC matrisi olsun ve

$$w_1 = \frac{1}{n}(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n})$$

$$w_2 = \frac{1}{n}(a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n})$$

$$\vdots$$

$$w_n = \frac{1}{n}(a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn})$$

olmak üzere $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektörüne A matrisinin toplamsal ağırlık vektörü denir. (Barzilai,1997)

Sonuç 2.3 Bir $A = [a_{ij}]$ toplamsal PC matrisinin toplamsal ağırlık vektörü $W = (w_k)$ olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^n (w_k) = 0$$

olur. (Barzilai,1997)

Tanım 2.9 A bir toplamsal PC matris olmak üzere eğer $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} \text{ ya da eşdeğer olarak } a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$$

eşitliği sağlanıyor ise A toplamsal PC matrisine kararlıdır denir. (Koczkodaj ve Orłowski;1997)

Tanım 2.10 $A = [a_{ij}]$ toplamsal PC matris ve $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ toplamsal ağırlık vektörü olmak üzere $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ için eğer

$$a_{ij} = (w_i - w_j)$$

olacak şekilde bir W toplamsal ağırlık vektörü mevcut ise A toplamsal PC matrisine kararlıdır denir. (Barzilai,1998)

Tanım 2.11 X boştan farklı bir cümle ve τ da X in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise τ sınıfına X üzerinde bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine *topolojik uzay* denir.

$$(T1) \emptyset, X \in \tau$$

$$(T2) G_{k_1}, G_{k_2}, \dots, G_{k_n} \in \tau \text{ ise } \cap_{i=1}^n G_{k_i}, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı sonlu kesişime göre kapalıdır.}$$

$$(T3) \text{ Her } i \in I \text{ için } G_{k_i} \in \tau \cup_{i \in I}, \text{ yani } \tau \text{ sınıfı keyfi birleşime göre kapalıdır.}$$

(Mucuk, 2009)

Tanım 2.12 G grup ve τ da G üzerinde bir topoloji olsun. Eğer G grubundaki

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

işlemi ile

$$\begin{aligned} n : G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto -a \end{aligned}$$

ters fonksiyonu sürekli ise (G, m, n) üçlüsüne bir *topolojik grup* denir. (Mucuk, 2009)

Tanım 2.13 Aşağıdaki şartı sağlayan bir (X, τ) uzayına bir *Hausdorff uzay* denir.

- (i) Farklı noktaların ayrık açık komşulukları, yani $x, y \in X$ noktaları için $x \in G, y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde G ve H açık cümleleri vardır.

(Mucuk, 2009)

Tanım 2.14 X bir Hausdorff uzayı olmak üzere $\forall x \in X$ noktaları için X topolojik uzayından $\mathbb{E}^n$ uzayına homeomorf olan bir U açık komşuluğu bulunabilirse X e bir n boyutlu *topolojik manifold* denir. $n = 0$ ise X i bir tek nokta olarak alırız. Böylece X bir n boyutlu topolojik manifold olmak üzere $\mathbb{E}^n$ uzayında U_α açık cümlelerinin bir $\{U_\alpha\}$ ailesi olacak şekilde X i örtebiliriz. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Tanım 2.15 X bir n boyutlu topolojik manifold ve X nin açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ örtüsü için $\{U_\alpha\}$ $\alpha \in A$ yazalım. $\mathbb{E}^n$ uzayında U_α açığına homeomorf olan bir açık cümle E_α ve

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow E_\alpha$$

homeomorfizim olsun. Koordinat komşuluklarının $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonuna bir *atlas* denir. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Tanım 2.16 X bir n boyutlu topolojik manifold ve X nin bir S atlası C^∞ sınıfından olsun. O zaman X manifolduna bir n boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Tanım 2.17 G bir grup ve

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow ab^{-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan grup işlemi C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir olsun. Eğer G bir diferensiyellenebilir manifold ise G grubuna bir Lie grubu denir. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Örnek 2.1 $A = \{[a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbb{R}_n^n \mid i > j \text{ için } a_{ij} = 0\}$ şeklindeki üst üçgensel matrislerin cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir Lie grubudur. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Tanım 2.18 gl bir reel vektör uzayı olsun ve üzerinde bir Lie operatörü

$$\begin{aligned} [,] : gl \times gl &\longrightarrow gl \\ (x, y) &\longrightarrow [,](x, y) = [x, y] \end{aligned}$$

bilineer dönüşümü

$$\begin{aligned} i) [x, y] &= -[y, x] \\ ii) [[x, y], z] &+ [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \text{ (Jacobi Eşitliği)} \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanırsa gl vektör uzayına yani $(gl, [,])$ ikilisine Lie cebiri denir ve gl ile gösterilir. Her bir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi, Lie cebirleri ile Lie grupları arasındaki bağılılığa önemli bir yer ayırır. Böylece Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirine birer özellik olarak aksettirilir. (Hacısalıhoğlu, 2006)

Örnek 2.2 3 - boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ üzerinde iyi bilinen

$$\begin{aligned} \wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, Y) &\longrightarrow X \wedge Y = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dış çarpım (vektörel çarpım) hem bileerdir hem de $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ için

$$(i) X \wedge Y = -Y \wedge X$$

$$(ii) (X \wedge Y) \wedge Z + (Y \wedge Z) \wedge X + (Z \wedge X) \wedge Y = 0, \quad (\text{Jacobi özdeşliđi})$$

özelliklerine sahiptir. O halde $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı $\wedge$ işlemiyle birlikte bir Lie cebiridir. (Hacısalihoglu, 2006)



3. PC MATRİSLERİN LİE GRUBU VE LİE CEBİRİ

Çarpımsal PC matrislerin, dik izdüşüm ve yaklaşım olarak ayrışması üzerine yapılan çalışmalarda, lineer uzaylarda çalışmak ve lineer cebirin sağladığı özellikleri kullanmak manifoldlarda çalışmaktan çok daha kolaydır. Logaritmik dönüşüm homeomorf bir dönüşüm olduğu içinde matrislerin birçok önem taşıyan özelliğini bir uzaydan diğer uzaya taşır.

Bu bölümde, W.W. Koczkodaj, V.Marek ve Y.Yaylı'nın çalışması olan "Pairwise comparisons matrix decomposition into approximation and orthogonal component using Lie theory" adlı makaleden faydalanılmıştır.

Önerme 3.1 $\forall n > 0$ için

$$\mathbf{G} = \{M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}_n^n \mid M \cdot M^T = I, m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}} > 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

$n \times n$ PC matrislerin grubu

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\longrightarrow \mathbf{G} \\ (M, N) &\longrightarrow M \cdot N = [m_{ij} \cdot n_{ij}] \end{aligned}$$

Hadamard işlemi ile bir Abel grubudur.

İspat. $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\eta_{ij} = 1$ olmak üzere $I = [\eta_{ij}]_{n \times n}$ ve $I \cdot I^{-1} = I$ olacak şekilde $I \in \mathbf{G}$ matrisi bu grubun birim elemanıdır.

Şimdi; $M \in \mathbf{G}$ için grubun tanımından

$$M \cdot M^{-1} = I \quad \text{ve} \quad M^T = M^{-1}$$

olduğu açıktır.

Böylece $(M^T)(M^T)^T = I$ olduğundan $M^{-1} \in \mathbf{G}$ gerçekleşir. Son olarak $M, N \in \mathbf{G}$ için grubunun özelliğinden aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(NM)(NM)^T = (NM)(N^T M^T) = N(MM^T)N^T = N(I)N^T = I$$

Sonuç olarak Hadamard işlemi altında $\mathbf{G}$ grubu $\cdot$ işlemine göre kapalı ve değişmelidir. Dolayısıyla $(\mathbf{G}, \cdot)$ ikilisi bir Abel grubudur. ■

Teorem 3.1 $\mathbf{G}$ Abel grubu bir PC matris Lie grubudur.

İspat. $M, N \in \mathbf{G}$ için $M \cdot N$ Hadamard işlemi diferensiyellenebilirdir ayrıca

$$M \longrightarrow M^{-1} = M^T$$

operatörü de her M PC matrisi için diferensiyellenebilirdir.

Dolayısıyla $\mathbf{G}$, PC matris Lie grubudur. ■

Herhangi bir matris Lie grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$, grubun I noktasındaki tanjant uzayından oluşur ve bir vektör uzayıdır.

n boyutlu bir PC matris Lie grubunun Lie cebiri de antisimetrik matrislerin vektör uzayından oluşacaktır. Bu durumu aşağıdaki teoremle verebiliriz.

Teorem 3.2 PC matris Lie grubu $\mathbf{G}$ nin birim noktasındaki tanjant uzayı; antisimetrik matrislerin vektör uzayıdır.

İspat. Her $A \in \mathbf{G}$ için $A \cdot A^T = I$ olduğunu biliyoruz. Bir $A(t)$ düzgün eğrisi için $A(0) = I$ olduğunu düşünelim. Biliyoruz ki $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$A(t) \cdot A(t)^T = I \tag{3.1}$$

denkleminin t parametresine diferensiyeli alınarak

$$\frac{d}{dt}(A(t)) \cdot A(t)^T + A(t) \cdot \frac{d}{dt}(A(t)^T) = 0 \quad (3.2)$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dt}(A(t)^T) = \left(\frac{d}{dt}(A(t))\right)^T$$

eşitliğini göz önüne alarak (3.2) denklemini

$$A'(t) \cdot A(t)^T + A(t) \cdot A'(t)^T = 0$$

şeklinde yazabiliriz ve $t=0$ için

$$A'(0) + A'(0)^T = 0$$

elde ederiz. $B = A'(0)$ seçersek, $B + B^T = 0$ olacağı görülür. Bu ise B matrisinin antisimetrik bir matris olduğunu gösterir.

Dolayısıyla birim noktadaki tanjant vektörler antisimetrik matrislerden oluşur. ■

Sonuç 3.1 PC matris Lie cebiri olan $\mathfrak{g} = T_I(\mathbf{G})$, $\mathbf{G}$ Lie grubunun I noktasındaki tanjant vektör uzayıdır. Bu uzay $n \times n$ tipinde antisimetrik matrislerden oluşur ve

$$\text{boy}(\mathbf{G}) = \text{boy}T_I(\mathbf{G}) = \frac{n \cdot (n - 1)}{2}$$

gerçeklenir.

3.1 PC Matrisler ve Üstel Dönüşüm

Bu bölümde bizim için yararlı olan üstel dönüşümden; yani Lie cebirinden Lie grubuna geçişi sağlayan dönüşümden bahsedeceğiz. PC matrisler üzerinde üstel dönüşümünün sağladığı yararlı özelliklere, tanımını verdikten sonra değineceğiz.

Tanım 3.1 PC matrisin Lie grubu $\mathbf{G}$ ve Lie cebiri $\mathfrak{g}$ olmak üzere, $\forall A \in \mathfrak{g}$ için

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbf{G}$$

$$[a_{ij}]_{n \times n} \longrightarrow \exp[A] = [e^{a_{ij}}]$$

dönüşümü üstel dönüşüm olarak adlandırırız.

Bu dönüşüm aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $A \in \mathfrak{g}$ üstel dönüşüm matrisinin elemanlarının kümesi

$$\tilde{G} = \{\gamma(t) = e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}, A \in \mathfrak{g}\}$$

olacak şekilde, $\tilde{G}$ Lie grubunun 1- parametrelili normal alt grubudur. Gerçekten de

$$\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in \tilde{G} \text{ için } \gamma(t_1) \cdot \gamma(t_2) \in \tilde{G} \text{ midir?}$$

$$\gamma(t_1) \cdot \gamma(t_2) = e^{t_1 A} \cdot e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A} \text{ için}$$

$$(t_1 + t_2) = t \text{ olarak alınırsa } e^{tA} \in \tilde{G} \text{ olur.}$$

$$\gamma \in \tilde{G} \text{ için } \gamma^{-1} \in \tilde{G} \text{ midir?}$$

$$(e^{tA})^{-1} = (e^{-tA}) \text{ olduğundan } e^{-tA} \in \tilde{G}' \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $\tilde{G}$ altgruptur. $\mathfrak{g}$ grubu değişmeli olduğundan her altgrubu normal altgruptur.

2. $A, B \in \mathfrak{g}$ ise $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ olur.

Gerçekten de $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ olacak şekilde

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\exp(A + B) = e^{[a_{ij} + b_{ij}]}$$

$$= [e^{a_{ij}}][e^{b_{ij}}]$$

$$= \exp(A) \cdot \exp(B)$$

sağlanır.

3. Verilen herhangi bir $A \in \mathfrak{g}$ için, $\gamma(t) = e^{tA}$ olmak üzere;

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA} = A \cdot e^{tA} \text{ 'dır.}$$

4. Herhangi bir $A \in \mathfrak{g}$ ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için;

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} = e^{A^T}$$

ve ayrıca

$$(e^A)(e^A)^T = e^A \cdot e^{A^T} = e^{A+A^T} = e^0 = I$$

5. Herhangi bir $A \in \mathfrak{g}$ ve

$$\gamma(t) = e^{tA}$$

eğrisi için, PC matrisinin $\mathbf{G}$ Lie grubu boyunca $\gamma(0) = 1$ ise $\gamma(t)$ geodezik eğridir.

6. Herhangi bir $A \in \mathfrak{g}$, $\text{iz}(A)$ A matrisinin iz fonksiyonu olmak üzere;

$$\det(e^A) \neq e^{\text{iz}(A)}$$

olur. Bu özelliği bir örnek ile gösterelim.

Örnek 3.1 $A \in \mathfrak{g}$ matrisini

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alalım. Üstel dönüşüm uygulandığında

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & e^{-1} & e \\ e & 1 & 1 \\ e^{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. e^A matrisinin determinantını hesapladığımızda elde ettiğimiz sonuç

$$\det(e^A) = e^2 + e^{-2} - 2$$

ve e^A matrisinin izini hesapladığımızda

$$iz(A) = \sum_{i=1}^3 (a_{ii}) = 0$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, A matrisi için $\det(e^A) \neq e^{iz(A)}$ olduğu görülür.

3.2 PC Matris Lie Grubu ve İç Direkt Toplam

Bu bölümde, 3×3 PC matris Lie grupları hem geometrik hem de cebirsel bakış açısıyla incelenecektir.

Tanım 3.2 $\mathbf{G}$ bir grup ve normal alt gruplarının ailesi $\{N_i \mid i \in I_n\}$ olsun.

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\{N_i \mid i \in I_n\}$ ve $N_i \cap \{N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_n\} = I$ ise

$\mathbf{G} = N_1 N_2 \cdots N_n$ iç direkt toplamdır, denir. (Mordeson, Sen, Malik, 1997)

Teorem 3.3 $\mathbf{G}$ bir grup ve normal alt gruplarının ailesi $\{N_i \mid i \in I_n\}$ olsun.

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i \in N_i$ olacak şekilde $\forall A \in \mathbf{G}$ ancak ve ancak

$$A = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

şeklinde tek bir yazımla ifade edilirse $\mathbf{G}$, $\{N_i \mid i \in I_n\}$ için bir iç direkt çarpımdır. (Mordeson,

Sen, Malik, 1997)

Teorem 3.4 $\{N_i \mid i \in I_n\}$ normal alt grup ailesinin iç direkt çarpımı $\mathbf{G}$ olsun. O zaman

$$\mathbf{G} \simeq N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$$

(Mordeson, Sen, Malik, 1997)

Sonuç 3.2 Tüm M çarpımsal kararlı PC matrislerinin $M_n = (M_n, \cdot)$ koleksiyonu, $\mathbf{G}$ Lie grubunun çarpımsal bir Lie altgrubudur.

Toplamsal kararlı PC matrisleri için aşağıda verilen tanımın yardımı ile Lie alt cebirini oluşturmak için bu teoremi inceleyelim:

$$T(n) = \{(i, j, k) \in \{1, 2, 3, \dots, n\} : i < j < k\}$$

olmak üzere $\forall (i, j, k) \in T(n)$ için

$$l = C_g = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{g} \mid a_{ik} + a_{kj} = a_{ij}\}$$

ele alalım. Eğer $A, B \in C_g$ ise

$$A + B \in C_g \quad \text{ve} \quad kA \in C_g$$

olur. Böylece $C_g, (\mathbf{g}, \cdot)$ 'nin bir Lie alt cebiridir. Buradan

$$h = (C_g)^\perp = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} \in \mathbf{g} \mid a_{ij} = -a_{ji}\}$$

ile tanımlı h cümlesi ile de aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunda görebiliriz;

$$\mathbf{g} = C_g \oplus (C_g)^\perp$$

Dolayısıyla $(\mathbf{G}, \cdot)$ grubunun bir Lie alt grubu C_G olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\mathbf{G} = C_G \oplus (C_G)^\perp$$

Yukarıda verdiğimiz sonuca bağlı olarak 3×3 boyutlu PC matrisler için geometrik ve cebirsel yorumu vereceğiz. Aşağıdaki önerme yardımıyla gösterebiliriz.

Önerme 3.2

$$h = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & -x & 0 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

ve

$$l = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & y+z \\ -y & 0 & z \\ -y-z & -z & 0 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

3×3 tipinde ifade özellikte matrislerden oluşan iki PC matris cümlesi olmak üzere aşağıdaki önermeler gerçekleşir;

- (i) h ve l , $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin ,sırasıyla, 1 ve 2 boyutlu Lie alt cebirleridir.
- (ii) h Lie cebiriyle gösterilen vektör uzayı, l Lie cebiri ile gösterilen vektör uzayının ortogonal kompleman uzayıdır.

İspat. (i) Bir vektör uzayının doğrusal geren bazları için sp ifadesi kullanılır. Buna göre h ve l alt cebirleri

$$h = sp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ve

$$l = sp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

h vektör uzayı bir matris ile üretebildiğinden ve bu matris sıfırdan farklı olduğundan lineer bağımsız olur. Dolayısıyla $\text{boy}(h) = 1$ olur. Diğer taraftan bu l uzayı iki lineer bağımsız matris tarafından üretildiğinden $\text{boy}(l) = 2$ olur. h ve l , $\mathfrak{g}$ vektör uzayının alt vektör uzaylarıdır.

(ii) Bu kısımda göstermemiz gereken $\mathfrak{g}$ Lie cebirinin her elemanının, h ve l Lie alt cebirlerinin birer elemanının toplamı olarak yazılabileceğidir.

$\forall A \in \mathfrak{g}$ için $A_h \in h$ ve $A_l \in l$ olmak üzere

$$A = A_h + A_l$$

eşitliğini aşağıdaki şekilde tek türlü yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x & -x \\ -x & 0 & x \\ x & -x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y & y+z \\ -y & 0 & z \\ -y-z & -z & 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği böylece

$$x = \frac{1}{3}(a - b + c)$$

$$y = \frac{1}{3}(2a + b - c)$$

$$z = \frac{1}{3}(2c - a + b)$$

eşitliklerini verir. ■

Önerme 3.3

$$H = \left\{ N \mid N = \begin{bmatrix} 1 & k & \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} & 1 & k \\ k & \frac{1}{k} & 1 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

ve

$$L = \left\{ W \mid W = \begin{bmatrix} 1 & y & yz \\ \frac{1}{y} & 1 & z \\ \frac{1}{yz} & \frac{1}{z} & 1 \end{bmatrix} : y, z \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

cümleleri için aşağıdaki önermeler gerçekleşir.

(i) H ve L , $\mathbf{G}$ Lie grubunun normal altgruplarıdır.

(ii) H ve L normal Lie altgruplarının iç direkt çarpımı $\mathbf{G}$ Lie grubudur ve

$$\mathbf{G} \simeq H \times L$$

olur.

İspat. Biliyoruz ki

$$\mathbf{G} = \left\{ M \mid M = \begin{bmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ \frac{1}{m_{12}} & 1 & m_{23} \\ \frac{1}{m_{13}} & \frac{1}{m_{23}} & 1 \end{bmatrix} : m_{12}, m_{13}, m_{23} \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

ve

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \\ \frac{1}{\xi} & 1 & \gamma \\ \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\gamma} & 1 \end{bmatrix}$$

için logaritma dönüşümü kullanarak

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \ln(\xi) & \ln(\eta) \\ -\ln(\xi) & 0 & \ln(\gamma) \\ -\ln(\eta) & -\ln(\gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

olur ve Önerme 3.2 yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & x & -x \\ -x & 0 & x \\ x & -x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y & y+z \\ -y & 0 & z \\ -y-z & -z & 0 \end{bmatrix} = A_h + A_l$$

eşitliği için x, y, z değerleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$x = \frac{\ln(\xi) - \ln(\eta) + \ln(\gamma)}{3} = \ln\left(\frac{\xi\gamma}{\eta}\right)^{1/3},$$

$$y = \frac{2\ln(\xi) + \ln(\eta) - \ln(\gamma)}{3} = \ln\left(\frac{\xi^2\eta}{\gamma}\right)^{1/3},$$

$$z = \frac{-\ln(\xi) + \ln(\eta) + 2\ln(\gamma)}{3} = \ln\left(\frac{\gamma^2\eta}{\xi}\right)^{1/3}.$$

$\tilde{A} = A_h + A_l$ eşitliği üstel dönüşüm altında

$$\exp(\tilde{A}) = \exp(A_h) \cdot \exp(A_l)$$

olur ve bize aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$A = A_H \cdot A_L$$

■

Önerme 3.4 L ve H , $\mathbf{G}$ Lie grubunun normal alt grupları olmak üzere;

(i) kararlı PC matrislerin Lie grubu L' 'nin Lie cebiri l olur.

(ii) PC matrislerin normal Lie alt grubu H' 'nin Lie cebiri h olur.

Verilen bir PC matrisin kararlı kısmını bulmak için toplamsal PC matrislerin kararlı parçalarından yararlanıyoruz. Bu Önermelerin uygulamasını aşağıdaki örnek ile verelim.

Örnek 3.2 $A \in \mathbf{G}$ için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & e & e^2 \\ e^{-1} & 1 & e^3 \\ e^{-2} & e^{-3} & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir A matrisi alalım. Logaritma dönüşümünü kullanarak

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz ve Önerme 3.2 bize aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{7}{3} & 0 \end{bmatrix} = A_h + A_l$$

Bu eşitliğe üstel dönüşüm uygulanırsa;

$$\exp(\tilde{A}) = \exp(A_h) \cdot \exp(A_l)$$

$$A = A_H \cdot A_L$$

eşitlikleri sağlanır, yani

$$\begin{bmatrix} 1 & e & e^2 \\ e^{-1} & 1 & e^3 \\ e^{-2} & e^{-3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{2/3} & e^{-2/3} \\ e^{-2/3} & 1 & e^{2/3} \\ e^{2/3} & e^{-2/3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{1/3} & e^{8/3} \\ e^{-1/3} & 1 & e^{7/3} \\ e^{-8/3} & e^{-7/3} & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

3.3 PC Matrislerin Uygulamaları

Bu bölümde PC matrislerin; kararlı PC matrisler ve ortogonal kompleman olarak ayrılan parçalarını bulmak için kullanılan yöntemleri örnekler üzerinden ele alacağız. İlk olarak bir çarpımsal PC matrisin ağırlık vektörleri yardımıyla çarpanlara ayrılmasını aşağıdaki örnek inceleyelim.

Örnek 3.3 $M \in \mathbf{G}$ için,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 27 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & 1 \end{bmatrix}$$

Pc matrisini ele alalım. M çarpımsal PC matrisinin $W = (w_1, w_2, w_3)$ ağırlık vektörü olmak üzere;

$$W = (\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{\frac{1}{216}})$$
$$W = (2, 3, \frac{1}{6})$$

elde ederiz. W ağırlık vektörünü kullanarak M çarpımsal PC matrisinin kararlı parçasını elde etmek için,

$$m_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

olacak şekilde $m_{ij} = (m_{12}, m_{13}, m_{23})$ değerlerini aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$m_{12} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{3},$$

$$m_{13} = \frac{w_1}{w_3} = 12,$$

$$m_{23} = \frac{w_2}{w_3} = 18.$$

C kararlı PC matrisini ifade etmek üzere,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} \\ \frac{1}{m_{12}} & 1 & m_{23} \\ \frac{1}{m_{13}} & \frac{1}{m_{23}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 12 \\ \frac{3}{2} & 1 & 18 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. M çarpımsal PC matrisi için kararlı parçası C ve ortogonal komplemanı $C^\perp$ olmak üzere; biliyoruz ki

$$M = C^\perp \cdot C$$

sağlanır. Buradan

$$C^\perp = C^T \cdot M$$

olur. Böylece

$$C^\perp = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{18} \\ 12 & 18 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 27 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & 1 \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$C^\perp = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{27}{18} \\ \frac{3}{2} & \frac{18}{27} & 1 \end{bmatrix}$$

elde ederiz ve böylece bir M çarpımsal PC matrisi için

$$M = C^\perp \cdot C$$

elde edilir.

İkinci yöntem olarak bir M bir çarpımsal PC matrisinin logaritma fonksiyonunun bileşensel dönüşümü altında elde edilen toplamsal PC matrislerinin ağırlık vektörünü kullanarak, kararlı parçasını elde edilmesini aşağıdaki örnek üzerinden inceleyelim.

Örnek 3.4 $M \in \mathbf{G}$ için,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 27 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & 1 \end{bmatrix}$$

çarpımsal PC matrisinin logaritma dönüşümü altında

$$A = \ln(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ln(8) \\ 0 & 0 & \ln(27) \\ -\ln(8) & -\ln(27) & 0 \end{bmatrix}$$

toplamsal PC matrisini elde ederiz. A toplamsal PC matrisinin $W = (w_1, w_2, w_3)$ ağırlık vektörü olmak üzere

$$W = \left(\frac{\ln(8)}{3}, \frac{\ln(27)}{3}, \frac{-\ln(216)}{3} \right)$$

$$W = (\ln(2), \ln(3), -\ln(6))$$

elde ederiz. W ağırlık vektörünü kullanarak A toplamsal PC matrisinin kararlı parçasını elde etmek için,

$$a_{ij} = (w_i - w_j)$$

olacak şekilde $a_{ij} = (a_{12}, a_{13}, a_{23})$ değerlerini aşağıdaki gibi elde ederiz;

$$a_{12} = (w_1 - w_2) = \ln\left(\frac{2}{3}\right),$$

$$a_{13} = (w_1 - w_3) = \ln(12),$$

$$a_{23} = (w_2 - w_3) = \ln(18).$$

B toplamsal kararlı PC matrisini ifade etmek üzere,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \ln(\frac{2}{3}) & \ln(12) \\ -\ln(\frac{2}{3}) & 0 & \ln(18) \\ -\ln(12) & -\ln(18) & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. B toplamsal PC matrisini elde ettikten sonra çarpımsal PC matrisinin kararlı parçasını bulmak için B matrisine üstel dönüşüm uygulanarak, C matrisini elde ederiz.

$$e^B = C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 12 \\ \frac{3}{2} & 1 & 18 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & 1 \end{bmatrix}$$

C çarpımsal kararlı PC matrisini elde ettikten sonra ortogonal kompleman parçasını Örnek 3.3 de verilen yöntem yardımıyla buluruz.

Son olarak Önerme 3.2 ve Önerme 3.3 ile verilen özellikleri kullanarak; toplamsal kararlı PC matris parçalarından, çarpımsal kararlı PC matris parçalarına geçişi aşağıdaki örnek yardımıyla inceleyelim.

Örnek 3.5 $A \in \mathfrak{g}$ için

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ln(8) \\ 0 & 0 & \ln(27) \\ -\ln(8) & -\ln(27) & 0 \end{bmatrix}$$

toplamsal PC matrisini ele alalım. Biliyoruz ki Önerme 3.2 bize $B \in \mathfrak{l}$ olacak şekilde toplamsal kararlı PC matrisin tek türlü yazımını aşağıda verilen şekilde sağlar,

$$A = x \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x & -x \\ -x & 0 & x \\ x & -z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y & y+z \\ -y & 0 & z \\ -y-z & -z & 0 \end{bmatrix}$$

Burada verilen x, y, z değerleri aşağıdaki gibi olacaktır,

$$x = \ln\left(\frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{23}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$y = \ln\left(\frac{(a_{12})^2 \cdot a_{13}}{a_{23}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$z = \ln\left(\frac{(a_{23})^2 \cdot a_{13}}{a_{12}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Böylece $B \in l$ için

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \ln(\frac{2}{3}) & \ln(12) \\ -\ln(\frac{2}{3}) & 0 & \ln(18) \\ -\ln(12) & -\ln(18) & 0 \end{bmatrix}$$

toplamsal kararlı PC matrisini elde ederiz. Önerme 3.3 sayesinde B kararlı toplamsal PC matrisi üstel dönüşüm altında C çarpımsal kararlı PC matrisini aşağıda verilen şekilde elde ederiz,

$$e^B = C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 12 \\ \frac{3}{2} & 1 & 18 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & 1 \end{bmatrix}$$

C çarpımsal kararlı PC matrisini elde ettikten sonra ortogonal kompleman parçasını Örnek 3.3 de verdiğimiz yöntem ile buluruz.

4. PC MATRİSLER VE ORTOGONAL MATRİS GRUPLARI

Bu bölümde çalışmamızın konusu olan $SO(n, \mathbb{R})$ Lie grubu ve $so(n, \mathbb{R})$ Lie cebirinin, PC matrisleri ile olan ilişkisine; non-Newtonian veya geometrik aritmetik bakış açısı ile ele alacağız.

Geometrik aritmetik, Newton ve Leibnitz'in bilinen klasik hesaplarına karşılık bir alternatiftir. Toplama yerine çarpmaya dayalı diferensiyel ve integrasyon araçları sağlar. Newton hesabının sağladığı tüm özelliklere geometrik aritmetikte karşılık gelen benzerleri vardır. 1972 yılında "Non-Newtonian Calculus" adlı çalışmada Micheal Grossman ve Robert Katz; $\mathbb{R}(G)$ geometrik reel sayılar olmak üzere, geometrik reel pozitif sayıları

$$\mathbb{R}^+(G) := \{e^x : x \in \mathbb{R}\} := \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Geometrik aritmetiği aşağıdaki verilen üstel dönüşümü:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+(G) \quad \text{ve} \quad \varphi^{-1} : \mathbb{R}^+(G) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi(x) = e^x \qquad \qquad e^x \longmapsto \varphi^{-1}(e^x) = \ln(e^x) = x \end{aligned}$$

ile tanımladığımızda birebir, örten ve sürekli olduğundan, $\forall a, b, \in \mathbb{R}(G)$ için $a = e^x$ ve $b = e^y$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}$ vardır. Yani üstel dönüşüm geometrik aritmetiği üretir. Dolayısıyla $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ geometrik aritmetik operatörlerini aşağıdaki verilen şekilde tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \oplus(x, y) &\longrightarrow (x \oplus y) = \varphi[\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)] = e^{(\ln x + \ln y)} = x \cdot y \\ \ominus(x, y) &\longrightarrow (x \ominus y) = \varphi[\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)] = e^{(\ln x - \ln y)} = x \div y, (y \neq 0) \\ \odot(x, y) &\longrightarrow (x \odot y) = \varphi[\varphi^{-1}(x) \times \varphi^{-1}(y)] = e^{(\ln x \times \ln y)} = x^{\ln y} \\ \oslash(x, y) &\longrightarrow (x \oslash y) = \varphi[\varphi^{-1}(x)/\varphi^{-1}(y)] = e^{(\ln x \div \ln y)} = x^{\frac{1}{\ln y}}, (y \neq 1) \end{aligned}$$

Burada $(\mathbb{R}^+(G), \oplus, \odot)$ geometrik sıfırı 1 (yani $\varphi(0) = 1$) ve geometrik birimi e (yani $\varphi(1) = e$) olan bir vektör uzayıdır.

Gerçekten $(\mathbb{R}^+(G), \oplus)$ geometrik sıfırı bir olan geometrik toplamsal Abel grubudur, gerçekten $x, y, z \in \mathbb{R}(G)$ için

$$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

olur. $(\mathbb{R}(G), \odot)$ geometrik birimi e olan geometrik çarpansal Abel grubudur, gerçekten

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$$

olur. Son olarak $\odot$ işlemi $\oplus$ işlemi üzerine dağılılabildir gerçekten

$$x \odot (y \oplus z) = (x \oplus y) \odot z$$

sağladığı görülmektedir.

Geometrik aritmetiği üreten üstel dönüşümün aynı zamanda bir diğer kullanım alanı olan ortogonal gruplar için,

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid A^T A = A A^T = I_n\}$$

şeklinde tanımlanan grubun özel bir alt grubu olan

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = +1\}$$

dönme grubu aynı zamanda bir Lie grubudur. $n \times n$ tipinde antisimetrik matrislerin vektör uzayından oluşan yani

$$so(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid A^T = -A\}$$

şeklinde tanımlanan matris grubu, $SO(n, \mathbb{R})$ grubunun Lie cebirini oluşturur ve aralarındaki yapısal ilişkiyi sağlayan üstel dönüşümünü

$$\exp : so(n, \mathbb{R}) \longrightarrow SO(n, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlarız.

Bu bilgiler ile beraber ilk olarak PC matris Lie grubu ve $SO(n, \mathbb{R})$ özel ortogonal matris grubunun arasındaki ilişkinin kurulması için gereken tanım, teoremler ve Bölüm 3.1. de değinilen 6. özellik olarak verdiğimiz, sağlanmayan eşitlik için burada bir çözüm üreteceğiz.

Tanım 4.1 $\mathbb{R}(G)$ geometrik reel sayılar ve $n \times n$ tipinde geometrik reel matrisler $\mathbb{R}(G)_n^n$ olmak üzere;

$\oplus$ operatörü yardımıyla tanımlanan

$$\mathbf{G}_1 = \{A \in \mathbb{R}(G)_n^n \mid A \oplus A^T = I_{\mathbf{G}_1}\}$$

$n \times n$ tipindeki PC matrislerin grubu, $I_{G_1} = [1]_{n \times n}$ birim elemanı olacak şekilde $(G_1, \oplus)$ bir Abel grubudur.

Tanım 4.2 $\mathbb{R}(G)$ geometrik reel sayılar ve $n \times n$ tipinde geometrik reel matrisler $\mathbb{R}(G)_n^n$ olmak üzere;

$\odot$ operatörü yardımıyla tanımlanan

$$\mathbf{G}_2 = \{A \in \mathbb{R}(G)_n^n \mid A \odot A^T = I_{\mathbf{G}_2}\}$$

$n \times n$ tipindeki matrislerin grubu,

$$I_{\mathbf{G}_2} = \begin{bmatrix} e & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & e \end{bmatrix}_{n \times n}$$

birim elemanı olacak şekilde $(G_2, \odot)$ bir Abel grubudur.

Teorem 4.1 $SO(n, \mathbb{R}(G))$ Lie grubunun Lie cebiri

$$\mathbf{G}_1 = \{A \in \mathbb{R}(G)_n^n \mid A \oplus A^T = I_{\mathbf{G}_1}\}'\text{dir.}$$

İspat. $e^{A(t)} = [e^{a_{ij}(t)}] \in SO(n, \mathbb{R}(G))$ olmak üzere, $t = 0$ için $e^{A(0)} = I_{\mathbf{G}_2}$ olan bir eğri olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*}(e^{A(t)} \odot e^{A^T(t)}) &= (e^{A'(t)} \odot e^{A^T(t)}) \oplus (e^{A(t)} \odot e^{(A')^T(t)}) \\ &= (e^{A'(0)} \odot e^{A^T(0)}) \oplus (e^{A(0)} \odot e^{(A')^T(0)}) \\ &= (e^{A'(0)} \odot I_{\mathbf{G}_2}) \oplus (I_{\mathbf{G}_2} \odot e^{(A')^T(0)}) \\ &= e^{A'(0)} \oplus e^{(A')^T(0)} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

$\frac{d}{dt^*}(I_{\mathbf{G}_2}) = I_{\mathbf{G}_1}$ olduğundan $e^{A(t)} \in SO(n, \mathbb{R}(G))$ için

$$e^{A(t)} \odot e^{A^T(t)} = I_{\mathbf{G}_2}$$

eşitliğini sağlar. Burada her iki taraf içinde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*}(e^{A(t)} \odot e^{A^T(t)}) &= \frac{d}{dt^*}(I_{\mathbf{G}_2}) \\ e^{A'(0)} \oplus e^{(A')^T(0)} &= I_{\mathbf{G}_1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eğer $B \in G_1$ için $B = [e^{A'(0)}]$ olacak şekilde seçersek

$$B \oplus B^T = I_{\mathbf{G}_1}$$

elde ederiz. ■

Teorem 4.2

$$SO(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}_n^n \mid A \cdot A^T = I_{n \times n}, \det(A) = +1\}$$

ile tanımlı ortogonal matrisler izometri grubunun Lie cebiri,

$$so(n, \mathbb{R}) := \{B \in \mathbb{R}_n^n \mid B^T + B = 0\}$$

ve

$$SO(n, \mathbb{R}(G)) := \{\mathbb{A} \in \mathbb{R}(G)_n^n \mid \mathbb{A} \odot \mathbb{A}^T = I_{\mathbf{G}_2}\}$$

ile tanımlı ortogonal matrisler izometri grubunun Lie cebiri

$$so(n, \mathbb{R}(G)) := \{\mathbb{B} \in \mathbb{R}(G)_n^n \mid \mathbb{B} \oplus \mathbb{B}^T = I_{\mathbf{G}_1}\}$$

ile tanımlı PC matrisler olmak üzere aşağıdaki diyagram verilebilir;

$$\begin{array}{ccc}
SO(n, \mathbb{R}) & \xrightleftharpoons[e]{e} & SO(n, \mathbb{R}(G)) \\
\uparrow f & \text{Exp} : e \circ f \circ \text{ln} & \uparrow \downarrow \text{Ln} : e \circ f^{-1} \circ \text{ln} \\
so(n, \mathbb{R}) & \xrightleftharpoons[e]{e} & so(n, \mathbb{R}(G))
\end{array}$$

Burada ilk defa

$$\text{Exp} : so(n, \mathbb{R}(G)) \longrightarrow SO(n, \mathbb{R}(G))$$

$$\text{Ln} : SO(n, \mathbb{R}(G)) \longrightarrow so(n, \mathbb{R}(G))$$

olacak şekilde dönüşümlerini diyagram yardımı ile tanımlamış olduk.

Ayrıca, $B \in so(n, \mathbb{R})$ için Cayley Formülü yardımıyla

$$A = f(B) = (I_n - B)^{-1}(B + I_n) \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir $A \in SO(n, \mathbb{R})$ elde ederiz. Yani her $n \times n$ tipinde reel antisimetrik matrise (4.1) denklemi ile verilen Cayley formülü yardımıyla bir $n \times n$ tipinde bir A ortogonal matrisi karşılık gelir. Burada

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Şimdi bölüm 3.1 de verilen üstel dönüşüm özelliklerden sağlanmayan 6. özelliğin aşağıdaki önermede sağlandığını gösterelim.

Önerme 4.1 PC matris Lie cebiri $\mathbb{B} \in so(n, \mathbb{R}(G))$ olmak üzere $\mathbb{A} \in SO(n, \mathbb{R}(G))$ için

$$\exp(\mathbb{B}) = \mathbb{A} \quad \text{olacak şekilde} \quad \det_{\mathbb{R}(G)}(\exp(\mathbb{B})) = e^{iz_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{B})} \text{ 'dir.}$$

İspat. $\mathbb{A} \in SO(n, \mathbb{R}(G))$ için

$$\mathbb{A} \odot \mathbb{A}^T = I_{\mathbf{G}_2}$$

eşitliği sağlanır. Burada eşitliğin iki tarafınında determinantı alınarak

$$\det_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{A}) \odot \det_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{A}^T) = e$$

$$\det_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{A}) \odot \det_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{A}) = e$$

$$\det_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{A}) = e$$

ve

$$\mathbb{B} \in so(n, \mathbb{R}(G)) \quad \text{ için } \quad iz_{\mathbb{R}(G)}(\mathbb{B}) = 1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1 = 1$$

olup istenilen sonuç elde edilir. ■

Aşağıda vereceğimiz örnek ile verdiğimiz teoremlerin uygulamasını görelim.

Örnek 4.1 PC matris Lie cebirinin 3×3 tipinde $\mathbb{B} \in so(3, \mathbb{R}(G))$ olmak üzere;

$$\mathbb{B} = e^{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 1 & e & e \\ e^{-1} & 1 & 1 \\ e^{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde seçelim. İn dönüşümü altında

$$\ln(e^{\mathbb{B}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrik matrisini elde ederiz.

Şimdi aşağıda verilen Cayley Formülü ile $\mathbb{A} \in SO(3, \mathbb{R}(G))$ ortogonal matrisini hesaplayalım:

$$\mathbb{A} = f(\mathbb{B}) = (I_3 - \mathbb{B})^{-1}(\mathbb{B} + I_3)$$

olacak şekilde

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

bu şekilde elde edilir ve üstel dönüşüm altında

$$e^{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} e^{-1/3} & e^{2/3} & e^{2/3} \\ e^{-2/3} & e^{1/3} & e^{2/3} \\ e^{2/3} & e^{-1/3} & e^{1/3} \end{bmatrix} \in SO(3, \mathbb{R}(G))$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} Exp : so(3, \mathbb{R}(G)) &\longrightarrow SO(3, \mathbb{R}(G)) \\ \mathbb{B} &\longrightarrow Exp(\mathbb{B}) = \mathbb{A} \end{aligned}$$

elde edilmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

PC matrislerin en yoğun uygulama alanı olan mühendislik konuları ile ilgili yapılan çalışmalarda genellikle PC matrislerinin kararlılığı ile ilgili çeşitli hipotezler, indeks değerleri ve teoremler verilmiştir. Biz çalışmamızda ilk defa PC matrislerin diferansiyel geometri tekniklerini kullanarak inceledik. Lie grubu ve Lie cebiri yapıları arasındaki ilişkiyi verdik. Geometrik aritmetiğide ilk defa burada kullanarak yeni bir bakış açısı kazandırdık. Exp ve Ln dönüşümlerinin PC matrislerindeki kazanımları ve uygulaması gelecek çalışmalarda araştırılacaktır.



KAYNAKLAR

- Barzilia, J., 1997. *Deriving Weights from Pairwise Comparison Matrices*, Journal of the Operational Research Society , Vol. 48, No. 12, pp. 1226-1232.
- Barzilia, J., 1998. *Consistency measures for pairwise comparison matrices*, J.Multi-Criteria Decis. Anal. 7(3),123-132.
- Gallier, J., 2001. *Geometric Methods and Applications* Geometric Methods and Applications pp 367-414, Springer-Verlag New York, Inc.
- Grossman, M., Katz, R. 1972. *Non-Newtonian Calculus*, Lee Press: Pigeon Cove, MA, USA, 1972
- Hacısalihoğlu, H.H., 2006. *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş* Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat-No:2, 2006
- J. N. Mordeson, M. K. Sen, D. S., Malik, 1997.*Fundamentals Of Abstract Algebra*. The McGraw-HILL Companies, Inc. New York st. Louis, San Francisco, printed in Singapore.
- Million E., 2007. *The Hadamard Product*, April 12 ,1 *Introduction and Basic Results*
- Mucuk, O. 2009. *Topoloji*, Nobel Bilim ve Araştırma Merkezi Yayın No:45, ISBN 978-605-395-186-5, Şubat 2009
- Saaty, T.L,1977. *A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structure* , Journal of Mathematical Psychology 15(3): 234–281
- Türkmen, C., Başar, F. 2012. *Some Basic Result On The Sets Of Sequences With Geometric Calculus*, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1 Volume 61, Number 2, Pages 17-34, ISSN 1303-5991.
- W.W. Koczkodaj, V.W. Marek, Y. Yayli, 2021. *Pairwise comparisons matrix decomposition into approximation and orthogonal component using Lie theory*, International Journal of Approximate Reasoning,139 (2021),201-210.
- W.W. Koczkodaj, M. Orłowski, 1997. *An Orthogonal Basis for Computing a Consistent Approximation to a Pairwise Comparisons Matrix*, Computers Math. Applic. Vol 34, No. 10, pp. 41-47, 1997.