

T.C.  
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI  $n$ -UZAYINDAKİ ZAMANSAL  
HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL  
LOKSODROMLARIN KARAKTERİZASYONLARI

ZEHRA ÖGE

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

YOZGAT – 2021

**T.C.**  
**YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MINKOWSKI  $n$ -UZAYINDAKİ ZAMANSAL HELİKOİDAL**  
**YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL**  
**LOKSODROMLARIN KARAKTERİZASYONLARI**

**ZEHRA ÖGE**

**Tez Danışmanı**

**Doç. Dr. Murat BABAARSLAN**

**İkinci Tez Danışmanı**

**Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ**

**YOZGAT – 2021**

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zehra ÖGE

22/10/2021

## ÖZET

### YÜKSEK LİSANS

#### MINKOWSKI $n$ – UZAYINDAKİ ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL LOKSODROMLARIN KARAKTERİZASYONLARI

ZEHRA ÖGE

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Murat BABAARSLAN  
İKİNCİ DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

Bu tez çalışmasında; Minkowski  $n$  – uzayındaki I. tip, II. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların karakterizasyonları çalışılmıştır. Bu çalışmanın birinci bölümünde; loksodromların tanımından, öneminden ve tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. Ayrıca loksodromlarla ilgili yapılan bazı çalışmaların tarihsel özeti verilmiştir. İkinci bölümde; Minkowski  $n$  – uzayındaki eğri ve yüzeyler ile ilgili bazı temel tanımlar ve formüller verilmiştir. Ayrıca Minkowski  $n$  – uzayındaki üç tip helikoidal yüzeyin parametrizasyonları verilmiş ve birinci temel form katsayıları hesaplanmıştır. Üçüncü bölümde; uzaysal meridyene sahip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki zamansal loksodromların diferansiyel denklemleri elde edilerek genel çözümleri oluşturulmuştur. Minkowski  $n$  – uzayında uzaysal meridyene sahip sadece I. tip zamansal dik helikoidal yüzeyler vardır. Bu nedenle yalnızca bu yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların parametrizasyonları ve yay uzunlukları elde edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde; benzer şekilde zamansal meridyene sahip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki zamansal loksodromları belirleyen diferansiyel denklemlerin genel çözümleri bulunmuştur. Minkowski  $n$  – uzayında zamansal meridyene sahip sadece II. tip zamansal dik helikoidal yüzeyler vardır. Bu nedenle yalnızca bu yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların parametrizasyonları belirlenmiştir ve yay uzunlukları elde edilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçların daha iyi anlaşılabilmesi için bir örnek verilmiştir.

2021, 34 SAYFA

**ANAHTAR KELİMELER:** Loksodrom, Dönel Yüzey, Helikoidal Yüzey, Dik Helikoidal Yüzey, Minkowski Uzayı

## **ABSTRACT**

### **MASTER THESIS**

#### **THE CHARACTERIZATIONS OF TIME-LIKE LOXODROMES ON TIME-LIKE HELICOIDAL SURFACES IN MINKOWSKI $n$ – SPACE**

**ZEHRA ÖGE**

**YOZGAT BOZOK UNIVERSITY  
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. Murat BABAARSLAN**

**CO-SUPERVISOR: Assist. Prof. Dr. Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ**

In this thesis; the characterizations of space-like loxodromes on type I, type II and type III on time-like helicoidal surfaces in Minkowski  $n$  – space are studied. In the first part of this study; the definition, importance and historical development of loxodromes are given. In addition, a historical summary of some studies on loxodromes is given. In the second chapter; some basic definitions and formulas about curves and surfaces in Minkowski  $n$  – space are given. In addition, the parametrizations of three types of helicoidal surfaces in Minkowski  $n$  – space are given and the coefficients of first fundamental form are calculated. In the third part; the differential equations of the timelike loxodromes on the timelike helicoidal surface with the spacelike meridian are obtained and their general solutions are obtained. In Minkowski  $n$  – space, there are only timelike right helicoidal surfaces of type I which have spacelike meridians. Therefore, only the parametrizations and arc-lengths of the timelike loxodromes on these surfaces have been obtained. In the fourth part of the thesis; similarly, general solutions of differential equations determining timelike loxodromes on timelike helicoidal surface which have timelike meridians are found. In Minkowski  $n$  – space, there are only timelike right helicoidal surfaces of type II which have timelike meridians. Therefore, only the parametrizations of the timelike loxodromes on these surfaces are determined and the arc-lengths are obtained. Finally, an example is given to better understand the results which are obtained.

2021, 34 PAGE

**KEYWORDS:** Loxodrome, Rotational Surface, Helicoidal Surface, Right Helicoidal Surface, Minkowski Space

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, Minkowski  $n$  – uzayındaki zamansal helikoidal yüzey üzerindeki zamansal loksodromların parametrizasyonları araştırılmıştır.

Yüksek lisans ve tez çalışmam sürecinde bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve yapıcı eleştirileriyle emeğini hiç esirgemedi her koşulda bana destek olan çok kıymetli danışman hocalarım Sayın Doç. Dr. Murat BABAARSLAN (Yozgat Bozok Üniversitesi)'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ (Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi)'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca eğitim süresince ders aldığım bütün hocalarıma minnettarım.

Sevgi ve destekleriyle beni bugünlere getiren çok kıymetli anne ve babam Huriye ve Sadettin ERCİYAS'a, çalışkanlığı ve azmiyle bana örnek olup desteğini benden hiç esirgemeyen sevgili eşim Haşim ÖGE'ye ve bu süreçte sabır ve anlayışlarıyla bana moral veren biricik kızım ve oğlum Yağmur ve Taha ÖGE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans ders arkadaşlarım Rukiye GENÇ'e ve Yasin KÜÇÜKARIKAN'a kıymetli desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İMZA

ZEHRA ÖGE

22/10/2021

## İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası.....	ii
Tez Beyanı.....	iii
Özet.....	iv
Abstract.....	v
Önsöz.....	vi
İçindekiler.....	vii
Simgeler ve Kısaltmalar Listesi.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. $E_1^n$ DE UZAYSAL MERİDYENE SAHİP ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL LOKSODROMLAR.....	12
3.1. Uzaysal Meridyene Sahip I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	12
3.2. Uzaysal Meridyene Sahip II. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	15
3.3. Uzaysal Meridyene Sahip III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	16
4. $E_1^n$ DE ZAMANSAL MERİDYENE SAHİP ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL LOKSODROMLAR.....	18
4.1. Zamansal Meridyene Sahip I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	18
4.2. Zamansal Meridyene Sahip II. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	20
4.3. Zamansal Meridyene Sahip III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar.....	22

5. KAYNAK.....	25
6. ÖZGEÇMİŞ.....	27



## SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklamalar</b>
$E_1^n$	Minkowski $n$ – uzayı
$E^n$	Euclid $n$ – uzayı
$R$	Reel sayılar kümesi
$V$	Vektör uzayı
$\langle \otimes \rangle$	Skalar çarpım
$\  \cdot \ $	Norm
$\beta_i$	Profil eğrisi
$P_i$	Düzlem
$H$	Hiperdüzlem
$M_i$	Helikoidal yüzey
$M_{i_\perp}$	Dik helicoidal yüzey
$\Phi$	İşaret matrisi
$E, F, G$	Birinci temel form katsayıları
$a_i$	Helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrileri
$\alpha_{i_\perp}$	Dik helicoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrileri
$l$	Yay uzunluğu

# 1. GİRİŞ

Loksodrom diğer adıyla kerte hattı (ing. rhumb line) dünya üzerindeki tüm meridyenleri sabit açı ile kestiği varsayılan eğrilerdir. Bu eğri üzerindeki her noktanın kuzeyle yaptığı açı sabit kaldığı için bu eğriye “sabit pusula açısı altında gidilen yol” da denir. Loksodrom; kerte hattının Latince’de ki karşılığıdır ve geometride kullanılan isimdir (Alexander, 2004). Gemiler seferlerini bu loksodrom eğrisi üzerinde yani sabit kuzey açısı yönünde yaparlar. Seyrüseferde özellikle denizcilikte rotanın güncellenmesini gerektirmediğinden loksodromlar sıkça kullanılır ve navigasyon için çok önemlidir. Dolayısıyla uçak pilotları ve gemi kaptanları tarafından bilinmelidir (Alexander, 2004).

Geometri alanında birçok matematikçi farklı uzaylarda farklı yüzeyler üzerinde tanımlanan loksodromlar üzerinde çalışmışlardır ve literatürde bu konuyla alakalı çok sayıda çalışma bulunmaktadır. 1905 yılında Noble, Euclid 3– uzayında dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemini bulmuştur. Ayrıca küre üzerindeki loksodromların stereografik ve merkatör izdüşümünü kullanarak sırasıyla logaritmik spirallere ve doğrulara karşılık geldiğini göstermiştir (Noble, 1905). Kos, Vranic ve Zec, küre üzerindeki loksodromların yay uzunluklarını hesaplamıştır (Kos vd., 1999). Dönel elipsoid (ing. spheroid) üzerindeki loksodromların yay uzunlukları ise Petrovic tarafından bulunmuştur (Petrovic, 2007). Minkowski 3– uzayında dönel yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların parametrisasyonları Babaarslan ve Yaylı (Babaarslan ve Yaylı, 2014), zamansal loksodromların parametrisasyonları ise Babaarslan ve Munteanu tarafından elde edilmiştir (Babaarslan ve Munteanu, 2015).

Minkowski 3– uzayında helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromlar Babaarslan ve Kayacık tarafından çalışılmıştır (Babaarslan ve Kayacık, 2017). Ayrıca, Babaarslan ve Kayacık, Minkowski 3– uzayında helikoidal yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların diferansiyel denklemini bulmuştur (Babaarslan ve Kayacık, 2020).

Babaarslan, Euclid 4– uzayında helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini hesaplamıştır (Babaarslan, 2019). Daha sonra Babaarslan tarafından bu problem yüksek boyutlu Euclid uzayındaki helikoidal yüzeyler için çalışılmıştır (Babaarslan, 2020).

Selvi, Minkowski 4– uzayındaki uzaysal dönel yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromların denklemlerini bulmuştur (Selvi, 2020). Ayrıca, Babaarslan ve Gümüş, Minkowski 4– uzayındaki zamansal dönel yüzeyler üzerinde uzaysal ve zamansal loksodromların parametrizasyonlarını elde etmiştir (Babaarslan ve Gümüş, 2021). Bu alışmalar sayesinde Minkowski 4–uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların karakterizasyonu tamamiyle elde edilmiştir.

Minkowski 4– uzayındaki dönel yüzeyler kullanılarak Babaarslan ve Sönmez tarafından helikoidal yüzeylerin yer vektörleri elde edilmiştir. Ayrıca, bu çalışmada dejenere olmayan helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri bulunmuştur (Babaarslan ve Sönmez, 2021).

Babaarslan, Demirci ve Genç, (Babaarslan ve Sönmez, 2021) alışmasından yararlanarak Minkowski  $n$ – uzayındaki helikoidal yüzeylerin denklemlerini elde etmişlerdir. Ayrıca dejenere olmayan bu yüzeyler üzerindeki uzaysal loksodromları belirleyen denklemleri elde etmişlerdir (Babaarslan, Demirci ve Genç, 2020).

Bu tez çalışmasında, Babaarslan, Demirci ve Genç tarafından 2020 yılında yapılan çalışmada elde edilen Minkowski  $n$ – uzayındaki I. tip, II. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların belirlenmesi problemi üzerine çalışılacaktır. Bu amaçla ilk olarak uzaysal meridyene sahip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromlara ait diferansiyel denklemler belirlenmiştir. Daha sonra bu denklemler kullanılarak zamansal loksodromların parametrizasyonları elde edilmiştir. Ayrıca zel bir durum olarak zamansal dik helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların yer vektörleri belirlenerek uzunlukları hesaplanmıştır. Çalışmanın geri kalan kısmında da zamansal meridyene sahip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromlar çalışılmıştır ve çalışmayı desteklemek için bir örnek verilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Minkowski  $n$ - uzayı  $E_1^n$  deki bazı temel tanım ve teoremler verildikten sonra  $E_1^n$  deki helikoidal yüzeylerin parametrizasyonları elde edilecektir.

**Tanım 2.1.**  $V$ , sonlu boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear fonksiyonu  $\forall u, v \in V$  için  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  eşitliğini sağlıyorsa  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ye  $V$  üzerinde bir simetrik bilinear form denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.2.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  fonksiyonu  $V$  vektör uzayında bir simetrik bilinear form olsun. Bu durumda,

- i.  $\forall v \in V, v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle > 0$  ise  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bilinear formuna pozitif tanımlı,
- ii.  $\forall v \in V, v \neq 0$  için  $\langle v, v \rangle < 0$  ise  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bilinear formuna negatif tanımlı,
- iii.  $\forall u \in V, v = 0$  için  $\langle u, v \rangle = 0$  ise  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bilinear formuna dejenere olmayan form denir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.3.**  $V$  bir reel vektör uzayı olmak üzere  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlanan simetrik, bilinear ve dejenere olmayan dönüşüme  $V$  üzerinde skalar çarpım ve  $V$  vektör uzayına da skalar çarpım uzayı denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.4.**  $V$  bir skalar çarpım uzayı olsun. Bu durumda  $\langle \cdot, \cdot \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  olacak şekilde negatif tanımlı en büyük boyutlu  $W$  alt uzayının boyutuna  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalar çarpımının indeksi denir. Buradaki  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalar çarpımının indeksi,  $0 \leq v \leq \text{boy}V$  olmak üzere  $v$  değerine eşittir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.5.**  $0 \leq v \leq n$  olmak üzere  $n \in \mathbb{N}$  için,  $\mathbb{R}^n$  üzerinde,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n-v} x_i y_i - \sum_{j=n-v+1}^n x_j y_j \quad (2.1)$$

eşitliğiyle verilen metrik tensör ile elde edilen uzaya yarı-Euclid uzayı denir ve  $E_v^n$  ile gösterilir (O'Neill, 1983).

**Tanım 2.6.**  $E_v^n$  yarı-Euclid uzayında  $v=0$  olursa bu uzaya Euclid  $n$  – uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir. Eğer  $n \geq 2$  ve  $v=1$  ise bu uzaya Minkowski  $n$  – uzayı denir ve  $E_1^n$  ile gösterilir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.7.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dönüşümü Minkowski  $n$  – uzayında skalar çarpımı ifade ederken,  $E_1^n$  deki herhangi bir  $u$  vektörünün koszul karakteri aşağıdaki şekilde belirlenir. Eğer,

- i.  $u=0$  ya da  $\langle u, u \rangle > 0$  ise  $u$  vektörüne uzaysal,
- ii.  $\langle u, u \rangle < 0$  ise  $u$  vektörüne zamansal,
- iii.  $u \neq 0$  iken  $\langle u, u \rangle = 0$  ise  $u$  vektörüne ışıksal vektör denir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.8.**  $u$  ve  $v$   $E_1^n$  de herhangi iki vektör olmak üzere bu iki vektör için,  $\langle u, v \rangle = 0$  oluyorsa bu iki vektör Lorentz anlamında birbirine diktir denir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.9.**  $u$  vektörünün  $E_1^n$  deki normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\| = |\langle u, u \rangle|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Burada  $\|u\| = 1$  olursa  $u$  ya birim vektör denir (O’Neill, 1983).

**Açıklama 2.1.**  $E_1^n$  uzayının bir ortonormal bazı  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  olmak üzere aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \xi_{ij} \mu_i. \quad (2.3)$$

Burada;  $\xi_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  ve  $\mu_i = \langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 1, & \langle e_i, e_i \rangle > 0 \\ -1, & \langle e_i, e_i \rangle < 0 \end{cases}$  dir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.10.**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^n$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin her noktasında  $\alpha'(t) \neq 0$  ise bu eğriye düzgün eğri denir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.11.**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^n$  olmak üzere düzgün bir eğri olsun. Bu durumda,

- i.  $\alpha'(t)$  uzaysal vektör ise  $\alpha(t)$  eğrisi uzaysal,
- ii.  $\alpha'(t)$  zamansal vektör ise  $\alpha(t)$  eğrisi zamansal ,
- iii.  $\alpha'(t)$  ışıksal vektör ise  $\alpha(t)$  eğrisi ışıksaldır denir (O’Neill, 1983).

**Tanım 2.12.**  $\varphi: M \rightarrow E_1^n$ ,  $M$  yarı-Riemann yüzeyinden  $E_1^n$  uzayına giden izometrik bir daldırma olsun.  $M$  yüzeyi üzerindeki bir  $p = \varphi(u, v)$  noktasındaki teğet düzlemi  $T_p M = \text{span}\{\varphi_u, \varphi_v\}$  olmak üzere  $M$  nin birinci temel formu,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (2.4)$$

eşitliğine tanımlanır. Burada

$$E = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \quad \text{ve} \quad G = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle \quad (2.5)$$

$M$  nin birinci temel form katsayılarıdır (O'Neill, 1983).

**Açıklama 2.2.**  $E_1^n$  uzayındaki  $\varphi = \varphi(u, v)$  parametrizasyonu ile verilmiş bir  $M$  yüzeyinin, uzaysal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul  $EG - F^2 > 0$  olması iken, zamansal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul  $EG - F^2 < 0$  olmasıdır.  $EG - F^2 = 0$  ise yüzey dejenere dir. (O'Neill 1983).

Bu tez çalışması boyunca dejenere olmayan yüzeyler üzerinde çalışılacaktır.

**Tanım 2.13.**  $E_1^n$  uzayında  $\varphi = \varphi(u, v)$  parametrizasyonu ile verilmiş  $M$  yarı-Riemann yüzeyi üzerindeki ışıksal olmayan eğrinin  $u_1$  ve  $u_2$  noktaları arasındaki yay uzunluğu aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$l = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E + 2F \frac{dv}{du} + G \left( \frac{dv}{du} \right)^2} du \quad (2.6)$$

(O'Neill, 1983).

**Tanım 2.14.**  $E_1^n$  uzayında  $\varphi = \varphi(u, v)$  parametrizasyonu ile verilmiş bir  $M$  yarı-Riemann yüzeyi ele alınsın. Bu parametrizasyonda,  $u$  sabit fonksiyonsa  $\varphi_{u_0}(v) = \varphi(u_0, v)$  şeklinde tanımlanan eğriye  $v$ -parametre eğrisi (paralel) denir.  $v$  sabit fonksiyonsa  $\varphi_{v_0}(u) = \varphi(u, v_0)$  eğrisine  $u$ -parametre eğrisi (meridyen) denir. (O'Neill 1983).

**Tanım 2.15.**  $E_1^n$  de  $x$  ve  $y$  vektörleri arasındaki açı, bu vektörler ile bunların gerdikleri alt vektör uzayının kozsul karakterine göre aşağıdaki gibi tanımlanır:

**i.** Uzaysal alt vektör uzayını geren  $x$  ve  $y$  uzaysal vektörleri arasındaki  $\theta \in [0, 2\pi]$

Lorentz uzaysal açısı:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta \quad (2.7)$$

eşitliğiyle verilir.

**ii.** Zamansal alt vektör uzayını geren  $x$  ve  $y$  uzaysal vektörleri arasındaki  $\theta \in \mathbb{R}^+$  Lorentz zamansal açısı:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \cosh \theta \quad (2.8)$$

eşitliğiyle verilir.

**iii.**  $x$  zamansal ve  $y$  uzaysal vektörleri arasındaki  $\theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  Lorentz zamansal açısı:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \sinh \theta \quad (2.9)$$

eşitliğiyle verilir.

**iv.**  $x$  ve  $y$  zamansal vektörleri arasındaki  $\theta \in \mathbb{R}^+$  Lorentz zamansal açısı:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cosh \theta \quad (2.10)$$

eşitliğiyle verilir (Ratcliffe, 2006).

**Tanım 2.16.**  $E_1^n$  uzayında  $P$ , düzlem ve  $\Phi$ , işaret matrisi olmak üzere  $P$  düzlemini sabit bırakan  $A$  dönme matrisi aşağıdaki şartları sağlar:

**i.**  $\det A = 1$

**ii.**  $A^t \cdot \Phi \cdot A = \Phi$

**iii.**  $A \cdot P = P$  (Ratcliffe, 2006).

**Tanım 2.17.**  $H \subset E_1^n$  olmak üzere  $H$  hiperdüzleminde,  $\beta: I \rightarrow H$  eğrisi düzgün bir eğri olsun.  $P, H$  hiperdüzleminde  $(n-2)$ -boyutlu bir düzlem olmak üzere,  $\beta$  profil eğrisinin  $P$  düzlemi etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye  $E_1^n$  de bir dönел yüzey denir.  $\beta$  profil eğrisi  $P$  düzlemi etrafında döndürüldüğünde eş zamanlı olarak dönme hızı ile öteleme hızı orantılı olacak şekilde  $P$  düzlemine paralel bir  $l$  eksenini boyunca ötelenirse oluşan yüzeye  $E_1^n$  de bir helikoidal yüzey denir (Babaarslan vd., 2021).

Bu tanıma göre  $E_1^n$  uzayında üç farklı helikoidal yüzey vardır:

## I. Tip Helikoidal Yüzey

$E_1^n$  uzayının standart ortonormal bazı  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  olsun.  $H_1$  hiperdüzlemi  $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_n\}$ ,  $P_1$  düzlemi  $\text{span}\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$  ve  $P_1$  düzlemine paralel  $l_1$  doğrusu  $\text{span}\{e_n\}$  olsun. Bu durumda  $P_1$  zamansal düzlemini sabit bırakan dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq v < 2\pi$$

ile verilir.

$H_1$  hiperdüzleminde  $u \in I \subset \mathbb{R}$  ve  $x_1(u) \neq 0$  olmak üzere profil eğrisi olarak birim hızlı  $\beta_1(u) = (x_1(u), 0, x_3(u), \dots, x_{n-1}(u), x_n(u))$  eğrisi alınsın, yani  $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots + x_{n-1}'^2(u) - x_n'^2(u) = \varepsilon = \pm 1$  şeklindedir. Bu durumda  $c \in \mathbb{R}^+$  ve  $v \in [0, 2\pi)$  olmak üzere I. tip helikoidal yüzeyinin parametrisasyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varphi_1(u, v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(u) \\ 0 \\ x_3(u) \\ \vdots \\ x_{n-1}(u) \\ x_n(u) \end{bmatrix} + cv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$M_1 : \varphi_1(u, v) = (x_1(u) \cos v, x_1(u) \sin v, x_3(u), \dots, x_{n-1}(u), x_n(u) + cv). \quad (2.11)$$

(2.11) denklemi ile verilen  $\varphi_1(u, v)$  nin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$(\varphi_1)_u = (x_1'(u) \cos v, x_1'(u) \sin v, x_3'(u), \dots, x_{n-1}'(u), x_n'(u)), \quad (2.12)$$

$$(\varphi_1)_v = (-x_1(u) \sin v, x_1(u) \cos v, 0, \dots, 0, c). \quad (2.13)$$

Böylece,  $M_1$  yüzeyinin birinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$E = \varepsilon, F = -cx'_n(u), G = x_1^2(u) - c^2. \quad (2.14)$$

(2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  helikoidal yüzeyi zamansal olduğundan,  $EG - F^2 = \varepsilon x_1^2(u) - c^2(\varepsilon + x_n'^2(u)) < 0$  dür. Ayrıca (2.11) denkleminde  $x_n$  sabit fonksiyon olarak alınırsa  $M_1$ , I. tip dik helikoidal yüzey olur (Babaarslan vd., 2021).

## II. Tip Helikoidal Yüzey

$H_2$  hiperdüzlemi  $\text{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-2}, e_n\}$ ,  $P_2$  düzlemi  $\text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}\}$  ve  $P_2$  düzlemine paralel  $l_2$  doğrusu  $\text{span}\{e_1\}$  olsun. Bu durumda  $P_2$  uzaysal düzlemini sabit bırakan hiperbolik dönme aşağıdaki hiperbolik dönme matrisi ile verilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}$$

$H_2$  hiperdüzleminde,  $u \in I \subset \mathbb{R}$  ve  $x_n(u) \neq 0$  olmak üzere profil eğrisi olarak birim hızlı  $\beta_2(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), 0, x_n(u))$  eğrisi ele alınsın, yani  $x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + \dots + x_{n-2}'^2(u) - x_n'^2(u) = \varepsilon = \pm 1$  şeklindedir. Bu durumda  $c \in \mathbb{R}^+$  ve  $v \in \mathbb{R}$  olmak üzere II. tip helikoidal yüzeyinin parametrisasyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\varphi_2(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(u) \\ x_2(u) \\ \vdots \\ x_{n-2}(u) \\ 0 \\ x_n(u) \end{bmatrix} + c v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 : \varphi_2(u, v) = (x_1(u) + cv, x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v, x_n(u) \cosh v). \quad (2.15)$$

(2.15) denklemi ile verilen  $\varphi_2(u, v)$  nin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$(\varphi_2)_u = (x'_1(u), x'_2(u), \dots, x'_{n-2}(u), x'_n(u) \sinh v, x'_n(u) \cosh v), \quad (2.16)$$

$$(\varphi_2)_v = (c, 0, \dots, 0, x_n(u) \cosh v, x_n(u) \sinh v). \quad (2.17)$$

Böylece  $M_2$  nin birinci temel form katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur:

$$E = \varepsilon, \quad F = cx'_1(u), \quad G = x_n^2(u) + c^2 \quad (2.18)$$

(2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  helikoidal yüzeyi zamansal olduğundan,  $EG - F^2 = \varepsilon x_n^2(u) + c^2(\varepsilon - x_1'^2(u)) < 0$  tür. Ayrıca (2.15) denkleminde  $x_1$  sabit fonksiyon olarak alınırsa  $M_2$ , II. tip dik helikoidal yüzey olur (Babaarslan vd., 2021).

### III. Tip Helikoidal Yüzey

$\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ ,  $E_1^n$  uzayının ortonormal bazı olsun. Bu durumda  $E_1^n$  uzayı için  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\}$  yarı-ortonormal bazı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\xi_{n-1} = \frac{e_n - e_{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, \dots, -1, 1) \quad \text{ve} \quad \xi_n = \frac{e_{n-1} + e_n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, \dots, 1, 1). \quad (2.19)$$

Burada  $\langle \xi_{n-1}, \xi_{n-1} \rangle = \langle \xi_n, \xi_n \rangle = 0$  ve  $\langle \xi_{n-1}, \xi_n \rangle = -1$  dir.

$H_3$  hiperdüzlemi  $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}, \xi_n\}$ ,  $P_3$  düzlemi  $\text{span}\{e_1, e_3, \dots, e_{n-2}, \xi_{n-1}\}$  ve  $l_3$  doğrusu  $\text{span}\{\xi_{n-1}\}$  olsun.

$$T(e_1) = e_1, \quad T(e_2) = e_2 + \sqrt{2}v\xi_{n-1}, \quad T(e_3) = e_3, \quad \dots, \quad T(\xi_n) = \sqrt{2}ve_2 + v^2\xi_{n-1} + \xi_n$$

şeklinde tanımlanan  $T$  dönüşümü ortogondir ve  $P_3$  dejenere düzlemini değişmez bırakır.

$$\beta_3(u) = x_1(u)e_1 + x_3(u)e_3 + \dots + \overline{x_{n-1}}(u)e_{n-1} + \overline{x_n}(u)e_n \text{ eğrisi ele alınırsa, } e_{n-1} = \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\sqrt{2}}, \quad e_n = \frac{\xi_{n-1} + \xi_n}{\sqrt{2}}$$

denklemlerinden

$$\beta_3(u) = x_1(u)e_1 + x_3(u)e_3 + \dots + \left( \frac{\overline{x_n}(u) - \overline{x_{n-1}}(u)}{\sqrt{2}} \right) \xi_{n-1} + \left( \frac{\overline{x_n}(u) + \overline{x_{n-1}}(u)}{\sqrt{2}} \right) \xi_n$$

olarak yazılır. Bu ifadede  $\frac{\overline{x_n}(u) - \overline{x_{n-1}}(u)}{\sqrt{2}} = x_{n-1}(u)$  ve  $\frac{\overline{x_n}(u) + \overline{x_{n-1}}(u)}{\sqrt{2}} = x_n(u)$  şeklinde

isimlendirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\beta_3(u) = x_1(u)e_1 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-1}(u)\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n.$$

Profil eğrisi olarak birim hızlı  $\beta_3(u)$ ,  $x_n(u) \neq 0$  eğrisi alınsın yani  $x_1'(u) + x_3'^2(u) + \dots - 2x_{n-1}'(u)x_n'(u) = \varepsilon$  şeklindedir. Bu durumda III. tip helikoidal yüzeyin parametrizasyonu,

$$M_3 : \varphi_3(u, v) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2v}x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2x_n(u) + cv)\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n \quad (2.20)$$

ile verilir ve burada  $c > 0$  dır.

$\varphi_3(u, v)$  nin  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevleri sırasıyla:

$$(\varphi_3)_u = x_1'(u)e_1 + \sqrt{2v}x_n'(u)e_2 + x_3'(u)e_3 + \dots + x_{n-2}'(u)e_{n-2} + (x_{n-1}'(u) + v^2x_n'(u))\xi_{n-1} + x_n'(u)\xi_n, \quad (2.21)$$

$$(\varphi_3)_v = \sqrt{2}x_n(u)e_2 + (2vx_n(u) + c)\xi_{n-1} \quad (2.22)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan  $M_3$  ün birinci temel form katsayıları aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$E = \varepsilon, \quad F = -cx_n'(u), \quad G = 2x_n^2(u). \quad (2.23)$$

(2.20) denklemi ile verilen  $M_3$  helikoidal yüzeyi zamansal olduğundan  $EG - F^2 = 2\varepsilon x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) < 0$  dır. Ayrıca (2.20) denkleminde  $x_n$  sabit fonksiyon olarak alınırsa  $M_3$  yüzeyi III. tip dik helikoidal yüzey olur (Babaarslan vd., 2021).

**Açıklama 2.3.** (2.11), (2.15) ve (2.20) yüzey denklemlerinde  $c = 0$  alınırsa helikoidal yüzeyler  $E_1^n$  deki dönel yüzeylere karşılık gelir.

**Tanım 2.18.**  $M$ ,  $E_1^n$  uzayında dejenere olmayan bir helikoidal yüzey olmak üzere,  $M$  yüzeyi üzerindeki bütün dejenere olmayan meridyenleri ( $u$  – parametre eğrileri) sabit açı ile kesen eğriye loksodrom denir.

$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ ,  $M$  yarı-Riemann yüzeyi üzerindeki zamansal bir eğri olsun. Bu durumda  $\alpha'(t) = \varphi_u u'(t) + \varphi_v v'(t)$  olmak üzere aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 < 0, \quad (2.24)$$

$$\langle \alpha'(t), \varphi_u \rangle = E \frac{du}{dt} + F \frac{dv}{dt}. \quad (2.25)$$



### 3. $E_1^n$ DE UZAYSAL MERİDYENE SAHİP ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla uzaysal meridyene sahip I. tip, II. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların diferansiyel denklemleri oluşturulacaktır.

#### 3.1. Uzaysal Meridyene Sahip I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_1$  yüzeyinin uzaysal profil eğrisi  $\beta_1$  in birim hızlı olduğu varsayılınsın. Yani,  $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots + x_{n-1}'^2(u) - x_n'^2(u) = 1$  olur.

Böylece  $M_1$  helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds^2 = du^2 - 2cx_n'(u)dudv + (x_1^2(u) - c^2)dv^2 \quad (3.1.1)$$

şeklindedir.  $M_1$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması için gerek ve yeter şart her  $u \in I \subset \mathbb{R}$  için  $EG - F^2 = x_1^2(u) - c^2(1 + x_n'^2(u)) < 0$  olmasıdır.

**Teorem 3.1.**  $E_1^n$  de (2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  I. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_1(u) = \varphi_1(u, v(u))$  loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_1(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_n(u) + cv(u)). \quad (3.1.2)$$

Burada,  $\theta$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \sinh \theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}} \quad (3.1.3)$$

veya

$\sinh^2 \theta (x_1^2(\xi) - c^2) + c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$  için,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2c \cosh^2 \theta x_n'(\xi) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta (c^2 (x_n'^2(\xi) + 1) - x_1^2(\xi))}}{2 \sinh^2 \theta (x_1^2(\xi) - c^2) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (3.1.4)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  I. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_1(t) = \varphi_1(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile uzaysal meridyenin kesiştiği  $p_1 = \varphi_1(u, v)$  noktasında oluşan  $\theta$  sabit Lorentz açısı için (2.9), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sinh \theta = \pm \frac{\frac{du}{dt} - cx_n'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (c^2 - x_1^2(u)) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (3.1.5)$$

Buradan,  $M_1$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\left(\sinh^2 \theta (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2c \cosh^2 \theta x_n'(u) \frac{dv}{du} + \cosh^2 \theta = 0. \quad (3.1.6)$$

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümüyle ilgili aşağıda verilen iki durum oluşur:

**1. Durum:**  $\sinh^2 \theta (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) = 0$  ise (3.1.6) denklemi  $\frac{dv}{du} = \frac{1}{2cx_n'(u)}$

denklemine indirgenir. Diğer taraftan  $\sinh^2 \theta (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) = 0$  denkleminde

$$x_n'(u) = \pm \frac{\sinh \theta \sqrt{c^2 - x_1^2(u)}}{c}$$

elde edilir.  $M_1$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması

$$c^2 - x_1^2(u) > 0$$

olmasını gerektirir. Bu durumda,  $v(u) = \pm \frac{1}{2 \sinh \theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}}$  olarak

bulunur.

**2. Durum:**  $\sinh^2 \theta (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) \neq 0$  ise uzaysal meridyene sahip I.tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom için (3.1.6) denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2c \cosh^2 \theta x_n'(\xi) \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta (c^2 (x_n'^2(\xi) + 1) - x_1^2(\xi))}}{2 \sinh^2 \theta (x_1^2(\xi) - c^2) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi$$

eşitliğiyle verilir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca (2.11) denkleminde  $x_n$  sabit bir fonksiyon ise  $M_1$  yüzeyi I. tip dik helikoidal yüzey olur. Bu yüzey  $M_{1_\perp}$  ile gösterilecektir.

**Sonuç 3.1.**  $M_{1_\perp}$ ,  $E_1^n$  de yer denklemi (2.11) ile verilen zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Bu durumda bu yüzey üzerindeki  $\alpha_{1_\perp}(u) = \varphi_1(u, v(u))$  zamansal loksodromun denklemi  $\alpha_{1_\perp}(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_n(u) + cv(u))$  ile verilir. Burada  $\theta$ ,  $x_n$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere  $v(u)$  fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$$v(u) = \pm \coth \theta \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}}. \quad (3.1.7)$$

**İspat:** (3.1.4) eşitliği ile verilen denklemde  $x_n'(u) = 0$  ifadesi kullanılırsa,

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \frac{\sinh 2\theta \sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}}{2 \sinh^2 \theta (c^2 - x_1^2(\xi))} d\xi = \pm \coth \theta \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}} \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca  $M_{1_\perp}$  helikoidal yüzeyi zamansal olduğundan  $c^2 - x_1^2(u) > 0$  dür. Böylece istenilen sonuca ulaşılır.

**Sonuç 3.2.**  $M_{1_\perp}$ ,  $E_1^n$  de zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Bu durumda  $M_{1_\perp}$  yüzeyindeki  $u_0$  ve  $u_1$  noktaları arasındaki loksodrom eğrisinin yay uzunluğu aşağıdaki denklemle verilir:

$$l = \left| \frac{u_1 - u_0}{\sinh \theta} \right|. \quad (3.1.8)$$

Burada,  $\theta \neq 0$  sabittir.

**İspat:**  $M_{1_\perp}$  üzerinde alınan bir eğrinin  $u_0$  ve  $u_1$  noktaları arasındaki yay uzunluğu (2.6) denklemi kullanılarak aşağıdaki şekilde verilir:

$$l = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + (x_1^2(u) - c^2) \left( \frac{dv}{du} \right)^2} du. \quad (3.1.9)$$

Bu eşitlikte (3.1.6) denkleminde elde edilen  $\frac{dv}{du} = \frac{\coth \theta}{\sqrt{c^2 - x_1^2(u)}}$  ifadesi yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$l = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\left| 1 + (x_1^2(u) - c^2) \frac{\coth^2 \theta}{c^2 - x_1^2(u)} \right|} du = \left| \frac{u_1 - u_0}{\sinh \theta} \right|.$$

### 3.2. Uzaysal Meridyene Sahip II. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_2$  yüzeyinin uzaysal profil eğrisi  $\beta_2$  nin birim hızlı olduğu varsayalım. Yani  $x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + \dots + x_{n-2}'^2(u) - x_n'^2(u) = 1$  olur. Böylece  $M_2$  helikoidal yüzeyinin indirgenmiş metriği:

$$ds^2 = du^2 + 2cx_1'(u)dudv + (c^2 + x_n^2(u))dv^2 \quad (3.2.1)$$

şeklindedir.

**Teorem 3.2.**  $E_1^n$  de (2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  II. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_2(u) = \varphi_2(u, v(u))$  loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_2(u) = (x_1(u) + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (3.2.2)$$

Burada,  $\theta$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi) \cosh^2 \theta \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta (c^2 (x_1'^2(\xi) - 1) - x_n^2(\xi))}}{2 \sinh^2 \theta (x_n^2(\xi) + c^2) + 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi \quad (3.2.3)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  II. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_2(t) = \varphi_2(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile uzaysal meridyenin kesiştiği  $p_2 = \varphi_2(u, v)$  noktasında oluşan  $\theta$  sabit Lorentz açısı için (2.9), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sinh \theta = \pm \frac{\frac{du}{dt} + cx_1'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2cx_1'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - (c^2 + x_n^2(u)) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (3.2.4)$$

Buradan  $M_2$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\left(\sinh^2 \theta \left(x_n^2(u) + c^2\right) + c^2 x_1'^2(u)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2cx_1'(u) \cosh^2 \theta \frac{dv}{du} + \cosh^2 \theta = 0. \quad (3.2.5)$$

Uzaysal meridyene sahip II. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom için (3.2.5) denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi) \cosh^2 \theta \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta \left(\left(c^2(x_1'^2(\xi) - 1) - x_n^2(\xi)\right)\right)}}{2 \sinh^2 \theta \left(x_n^2(\xi) + c^2\right) + 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi$$

eşitliğiyle verilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Açıklama 3.2.**  $x_1(u)$  fonksiyonu sabit alındığında  $EG - F^2 = x_n^2(u) + c^2 > 0$  olur.  $M_2$  yüzeyi zamansal olduğundan dik helikoidal yüzey oluşmaz.

### 3.3. Uzaysal Meridyene Sahip III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.20) denklemi ile verilen  $M_3$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_3$  yüzeyinin uzaysal profil eğrisi  $\beta_3$  ün birim hızlı olduğu varsayılınsın. Yani  $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots - 2x_{n-1}'(u)x_n'(u) = 1$  olur. Böylece  $M_3$  helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği:

$$ds^2 = du^2 - 2cx_n'(u)dudv + 2x_n^2(u)dv^2 \quad (3.3.1)$$

şeklindedir.  $M_3$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması için gerek ve yeter şart her  $u \in I \subset R$  için  $EG - F^2 = 2x_n^2(u) - c^2 x_n'^2(u) < 0$  olmasıdır.

**Teorem 3.3.**  $E_1^n$  de (2.20) denklemi ile verilen  $M_3$  III. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_3(u) = \varphi_3(u, v(u))$  loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_3(u) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}v(u)x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + \left(x_{n-1}(u) + v^2(u)x_n(u) + cv(u)\right)\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n. \quad (3.3.2)$$

Burada,  $\theta$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \cosh^2 \theta \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta (c^2 x_n'^2(\xi) - 2x_n^2(\xi))}}{4 \sinh^2 \theta x_n^2(\xi) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (3.3.3)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.20) denklemleri ile verilen  $M_3$  III. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_3(t) = \varphi_3(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile uzaysal meridyenin kesiştiği  $p_3 = \varphi_3(u, v)$  noktasında oluşan  $\theta$  sabit Lorentz açısı için (2.9), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sinh \theta = \pm \frac{\frac{du}{dt} - cx_n'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - 2x_n^2(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (3.3.4)$$

Buradan  $M_3$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$(2 \sinh^2 \theta x_n^2(u) + c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2cx_n'(u) \cosh^2 \theta \frac{dv}{du} + \cosh^2 \theta = 0. \quad (3.3.5)$$

Uzaysal meridyene sahip III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom için (3.3.5) denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \cosh^2 \theta \pm \sqrt{\sinh^2 2\theta (c^2 x_n'^2(\xi) - 2x_n^2(\xi))}}{4 \sinh^2 \theta x_n^2(\xi) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi$$

eşitliğiyle verilir.

**Açıklama 3.3.**  $x_n(u)$  fonksiyonu sabit alındığında  $EG - F^2 = x_n^2(u) > 0$  olur.  $M_3$  yüzeyi zamansal olduğundan dik helikoidal yüzey oluşmaz.

## 4. $E_1^n$ DE ZAMANSAL MERİDYENE SAHİP ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ ZAMANSAL LOKSODROMLAR

Bu bölümde sırasıyla zamansal meridyene sahip I. tip, II. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodromların diferansiyel denklemleri oluşturulacaktır.

### 4.1. Zamansal Meridyene Sahip I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_1$  yüzeyinin zamansal profil eğrisi  $\beta_1$  in birim hızlı olduğu varsayılınsın. Yani,  $x_1'^2(u) + x_3'^2(u) + \dots + x_{n-1}'^2(u) - x_n'^2(u) = -1$  olur. Böylece  $M_1$  helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği:

$$ds^2 = -du^2 - 2cx_n'(u) + (x_1^2(u) - c^2)dv^2 \quad (4.1.1)$$

şeklinindedir.  $M_1$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması için gerek ve yeter şart her  $u \in I \subset \mathbb{R}$  için  $EG - F^2 = c^2(1 - x_n'^2(u)) - x_1^2(u) < 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.1.**  $E_1^n$  de (2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  I. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_1(u) = \varphi_1(u, v(u))$  loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_1(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_n(u) + cv(u)). \quad (4.1.2)$$

Burada,  $\phi$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \cosh \phi} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}}. \quad (4.1.3)$$

veya

$\cosh^2 \phi (x_1^2(\xi) - c^2) + c^2 x_n'^2(\xi) \neq 0$  için,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \sinh^2 \phi \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (c^2 (x_n'^2(\xi) - 1) + x_1^2(\xi))}}{2 \cosh^2 \phi (x_1^2(\xi) - c^2) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (4.1.4)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.11) denklemi ile verilen  $M_1$  I. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_1(t) = \varphi_1(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile zamansal meridyenin kesiştiği  $p_1 = \varphi_1(u, v)$  noktasında oluşan  $\phi$  sabit Lorentz açısı için (2.10), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\cosh \phi = - \frac{\frac{du}{dt} + cx_n'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + (c^2 - x_1^2(u)) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (4.1.5)$$

Buradan,  $M_1$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\left(\cosh^2 \phi (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2cx_n'(u) \sinh^2 \phi \frac{dv}{du} - \sinh^2 \phi = 0. \quad (4.1.6)$$

Bu durumda diferansiyel denklemin çözümüyle ilgili aşağıda verilen iki durum oluşur:

**1. Durum:**  $\cosh^2 \phi (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) = 0$  ise (4.1.6) denklemi  $\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2cx_n'(u)}$

denklemine indirgenir. Diğer taraftan  $\cosh^2 \phi (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) = 0$  denkleminde

$x_n'(u) = \pm \frac{\cosh \phi \sqrt{c^2 - x_1^2(u)}}{c}$  elde edilir.  $M_1$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması

$c^2 - x_1^2(u) > 0$  olmasını gerektirir. Bu durumda,  $v(u) = \pm \frac{1}{2 \cosh \phi} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - x_1^2(\xi)}}$  olarak

bulunur.

**2. Durum:**  $\cosh^2 \phi (x_1^2(u) - c^2) + c^2 x_n'^2(u) \neq 0$  ise zamansal meridyene sahip I.tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom için (4.1.6) denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \sinh^2 \phi \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (x_1^2(\xi) + c^2 (x_n'^2(\xi) - 1))}}{2 \cosh^2 \phi (x_1^2(\xi) - c^2) + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi,$$

eşitliğiyle verilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Açıklama 4.1.** Zamansal meridyene sahip I. tip zamansal helikoidal yüzey için  $x_n$  sabit olamayacağından I. tip dik zamansal helikoidal yüzey oluşmaz.

#### 4.2. Zamansal Meridyene Sahip II. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_2$  yüzeyinin zamansal profil eğrisi  $\beta_2$  nin birim hızlı olduğu varsaylınsın. Yani,  $x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + \dots + x_{n-2}'^2(u) - x_n'^2(u) = -1$  olur. Böylece  $M_1$  helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği:

$$ds^2 = -du^2 + 2cx_1'(u)dudv + (c^2 + x_n^2(u))dv^2 \quad (4.2.1)$$

şeklindedir.  $M_2$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması için gerek ve yeter şart her  $u \in I \subset \mathbb{R}$  için  $EG - F^2 = -x_n^2(u) - c^2(1 + x_1'^2(u)) < 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.2.**  $E_1^n$  de (2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  II. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_2(u) = \varphi_2(u, v(u))$  loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_2(u) = (x_1(u) + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u)). \quad (4.2.2)$$

Burada,  $\phi$  ve  $c$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi) \sinh^2 \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (x_n^2(\xi) + c^2 (x_1'^2(\xi) + 1))}}{2 \cosh^2 \phi (x_n^2(\xi) + c^2) + 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi \quad (4.2.3)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.15) denklemi ile verilen  $M_2$  II. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_2(t) = \varphi_2(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile zamansal meridyenin kesiştiği  $p_2 = \varphi_2(u, v)$  noktasında oluşan  $\phi$  sabit Lorentz açısı için (2.10), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\cosh \phi = \frac{-\frac{du}{dt} + cx_1'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2cx_1'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - (c^2 + x_n^2(u)) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (4.2.4)$$

Buradan  $M_2$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\left(\cosh^2 \phi (x_n^2(u) + c^2) + c^2 x_1'^2(u)\right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2cx_1'(u) \sinh^2 \phi \frac{dv}{du} - \sinh^2 \phi = 0. \quad (4.2.5)$$

Zamansal meridyene sahip II. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom için (4.2.5) denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{-2cx_1'(\xi) \sinh^2 \phi \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (x_n^2(\xi) + c^2 (x_1'^2(\xi) + 1))}}{2 \cosh^2 \phi (x_n^2(\xi) + c^2) + 2c^2 x_1'^2(\xi)} d\xi$$

eşitliğiyle verilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Açıklama 4.2.** (2.15) denkleminde  $x_1$  sabit bir fonksiyon ise  $M_2$  yüzeyi II. tip zamansal dik helikoidal yüzey olur. Bu yüzey  $M_{2_\perp}$  ile gösterilecektir.

**Sonuç 4.1.**  $M_{2_\perp}$ ,  $E_1^n$  de yer denklemi (2.15) ile verilen zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Bu durumda bu yüzey üzerindeki  $\alpha_{2_\perp}(u) = \varphi_2(u, v(u))$  zamansal loksodromun denklemi  $\alpha_{2_\perp}(u) = (x_1 + cv(u), x_2(u), \dots, x_{n-2}(u), x_n(u) \sinh v(u), x_n(u) \cosh v(u))$  ile verilir. Burada  $\phi$ ,  $x_1$  sıfırdan farklı sabitler olmak üzere  $v(u)$  fonksiyonu aşağıdaki formdadır.

$$v(u) = \pm \tanh \phi \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}}.$$

(4.2.6)

**İspat:** (4.2.3) eşitliği ile verilen denklemde  $x_1'(u) = 0$  ifadesi kullanılırsa,

$$v(u) = \pm \int_{u_0}^u \frac{\sinh 2\phi \sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}}{2 \cosh^2 \phi (x_n^2(\xi) + c^2)} d\xi = \pm \tanh \phi \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{x_n^2(\xi) + c^2}} \text{ elde edilir.}$$

Böylece istenilen sonuca ulaşılır.

**Açıklama 4.3.**  $M_{2_\perp}$ ,  $E_1^n$  de yer denklemi (2.15) ile verilen zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Zamansal loksodrom ile zamansal meridyen arasındaki açı  $\phi = 0$  ise loksodrom ile meridyen çakışır.

**Sonuç 4.2.**  $M_{2_{\perp}}$ ,  $E_1^n$  de zamansal dik helikoidal yüzey olsun. Bu durumda  $M_{2_{\perp}}$  yüzeyindeki  $u_0$  ve  $u_1$  noktaları arasındaki loksodrom eğrisinin yay uzunluğu aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$l = \left| \frac{u_1 - u_0}{\cosh \phi} \right|. \quad (4.2.7)$$

Burada,  $\phi$  sabittir.

**İspat:**  $M_{2_{\perp}}$  üzerinde alınan bir eğrinin  $u_0$  ve  $u_1$  noktaları arasındaki yay uzunluğu (2.6) denklemi kullanılarak aşağıdaki şekilde verilir:

$$l = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{-1 + (x_n^2(\xi) + c^2) \left( \frac{dv}{du} \right)^2} du. \quad (4.2.8)$$

Bu eşitlikte (4.2.5) denklemden elde edilen  $\frac{dv}{du} = \frac{\tanh \phi}{\sqrt{c^2 + x_n^2(u)}}$  ifadesi yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$l = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{-1 + (x_n^2(\xi) + c^2) \frac{\tanh^2 \phi}{(x_n^2(\xi) + c^2)}} du = \left| \frac{u_1 - u_0}{\cosh \phi} \right|.$$

### 4.3. Zamansal Meridyene Sahip III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler Üzerindeki Zamansal Loksodromlar

(2.20) denklemi ile verilen  $M_3$  helikoidal yüzeyi ele alınsın.  $M_3$  yüzeyinin zamansal profil eğrisi  $\beta_3$  ün birim hızlı olduğu varsayalım. Yani,  $x_1'^2(u) + x_2'^2(u) + \dots - 2x_{n-1}'(u)x_n'(u) = -1$  olur. Böylece  $M_3$  helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği:

$$ds^2 = -du^2 - 2cx_n'(u)dudv + 2x_n^2(u)dv^2 \quad (4.3.1)$$

şeklinindedir.  $M_3$  helikoidal yüzeyinin zamansal olması için gerek ve yeter şart her  $u \in I \subset \mathbb{R}$  için  $EG - F^2 = -2x_n^2(u) - c^2x_n'^2(u) < 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.3.**  $E_1^n$  de (2.20) denklemi ile verilen  $M_3$  III. tip zamansal helikoidal yüzey üstündeki  $\alpha_3(u) = \varphi_3(u, v(u))$  loksodromunun parametrisasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\alpha_3(u) = x_1(u)e_1 + \sqrt{2}v(u)x_n(u)e_2 + x_3(u)e_3 + \dots + x_{n-2}(u)e_{n-2} + (x_{n-1}(u) + v^2(u)x_n(u) + cv(u))\xi_{n-1} + x_n(u)\xi_n. \quad (4.3.2)$$

Burada,  $\phi$  ve  $c$  sabit olmak üzere,

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \sinh^2 \phi \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (c^2 x_n'^2(\xi) + 2x_n^2(\xi))}}{4x_n^2(\xi) \cosh^2 \phi + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi \quad (4.3.3)$$

şeklindedir.

**İspat.**  $E_1^n$  de (2.20) denklemi ile verilen  $M_3$ , III. tip zamansal helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom eğrisi  $\alpha_3(t) = \varphi_3(u(t), v(t))$  olsun. Bu durumda zamansal loksodrom ile zamansal meridyenin kesiştiği  $p_3 = \varphi_3(u, v)$  noktasında oluşan  $\phi$  sabit Lorentz açısı için (2.10), (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\cosh \phi = - \frac{\frac{du}{dt} + cx_n'(u) \frac{dv}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2cx_n'(u) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} - 2x_n^2(u) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}. \quad (4.3.4)$$

Buradan  $M_3$  üzerindeki zamansal loksodromun diferansiyel denklemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$(2x_n^2(u) \cosh^2 \phi + c^2 x_n'^2(u)) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2cx_n'(u) \sinh^2 \phi \frac{dv}{du} - \sinh^2 \phi = 0. \quad (4.3.5)$$

Zamansal meridyene sahip III. tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerindeki zamansal loksodrom denkleminin genel çözümü:

$$v(u) = \int_{u_0}^u \frac{2cx_n'(\xi) \sinh^2 \phi \pm \sqrt{\sinh^2 2\phi (c^2 x_n'^2(\xi) + 2x_n^2(\xi))}}{4x_n^2(\xi) \cosh^2 \phi + 2c^2 x_n'^2(\xi)} d\xi$$

eşitliğiyle verilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Açıklama 4.3.** Zamansal meridyene sahip III. tip zamansal helikoidal yüzey için  $x_n$  sabit olamayacağından III. tip dik zamansal helikoidal yüzey oluşmaz.

**Örnek 4.1.**  $E_1^n$  uzayında  $\beta_l(u) = (x_l(u), 0, x_3(u), \dots, x_n(u))$  birim hızlı uzaysal profil eğrisi olsun. Buradan  $M_l$  zamansal helikoidal yüzeyinin parametrisasyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\varphi_1(u, v) = (x_1(u) \cos v, x_1(u) \sin v, x_3(u), \dots, x_{n-1}(u), x_n(u) + cv).$$

Teorem 3.1 de verilen (3.1.3) denkleminde  $x_1(\xi) = k \sin \xi$  alınırsa

$$v(u) = \pm \frac{1}{2 \sinh \theta} \int_{u_0}^u \frac{d\xi}{\sqrt{c^2 - k^2 \sin^2 \xi}} = F(u, k), \quad 0 < k < 1 \quad (4.3.6)$$

eşitliği elde edilir. (4.3.6) eşitliği birinci tip eliptik integraldir (bkz. Byrd ve Friedman, 1954).

Böylece  $E_1^n$  uzayında  $M_1$  zamansal helikoidal yüzey üstündeki zamansal loksodromunun parametrizasyonu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\alpha_1(u) = (x_1(u) \cos v(u), x_1(u) \sin v(u), x_3(u), \dots, x_{n-1}(u), x_n(u) + cv(u)).$$

Burada  $v(u)$ , (4.3.6) denkleminde verilmiştir.

## 5. KAYNAKLAR

- Alexander, J. (2004). Loxodromes: A Rhumb Way to Go, *Mathematics Magazine*, 77 349-356.
- Babaarslan, M., Yaylı, Y. (2014). Spacelike Loxodromes on Rotational Surfaces in Minkowski 3-Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 409, 288-298.
- Babaarslan, M., Munteanu, M. I. (2015). Timelike Loxodromes on Rotational Surfaces in Minkowski 3-Space. *Annals of the Alexandru Ioan Cuza University-Mathematics* 61, 471-484.
- Babaarslan, M., Kayacık, M. (2017). Timelike Loxodromes on Helicoidal Surfaces in Minkowski 3-Space. *Filomat* 31, 4405-4414.
- Babaarslan, M. (2019). Loxodromes on Helicoidal Surfaces and Tubes with Variable Radius in  $E^4$ . *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* 68, 1950-1958.
- Babaarslan, M., Kayacık, M. (2020). Differential Equations of the Space-Like Loxodromes on the Helicoidal Surfaces İn Minkowski 3-Space. *Differential Equations and Dynamical Systems* 28, 495-512.
- Babaarslan, M. (2020). A Note on Loxodromes on Helicoidal Surfaces in Euclidean N-Space. *Applied Mathematics E-Notes* 20, 458-461.
- Babaarslan, M., Demirci B. B., and Genç, R. (2020) Spacelike Loxodromes on Helicoidal Surfaces in Lorentzian n-Space, <https://arxiv.org/abs/2011.08438>
- Babaarslan, M., Gümüş, M. (2021). On The Parametrizations of Loxodromes on Time-like Rotational Surfaces in Minkowski Space-time. *Asian-European Journal of Mathematics* 14, 2150080.
- Babaarslan, M., Sönmez, N. (2021). Loxodromes on Non-degenerate Helicoidal Surfaces in Minkowski Space-time. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s13226-021-00030-x>.

- Byrd, P. F. and Friedman, M. D., (1954), Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Kos, S., Vranic, D., Zec, D. (1999). Differential Equation of a Loxodrome on a Sphere. Journal of Navigation 52, 418-420.
- Noble, C. A. (1905). Note on Loxodromes. Bulletin of the American Mathematical Society 12, 116-119.
- O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics (New York, 1983).
- Petrovic, M. (2007). Differential Equation of A Loxodrome on the Spheroid. Nase More 54, 87-89.
- Ratcliffe, J. G. (2006). Foundations of Hyperbolic Manifolds. Springer Graduate Texts in Mathematics, 149, Third Edition.
- Selvi M., (2020). Minkowski 4-Uzayında Spacelike Dönel Yüzeyler Üzerindeki Spacelike Loksodromlar, Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Yozgat Bozok Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Yozgat.

