

**T.C.  
UŞAK ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI YENİ TÜR KESİRLİ EŞİTSİZLİKLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fatma ÖZKAN**

**KASIM, 2021**

**UŞAK**

**T.C.**  
**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI YENİ TÜR KESİRLİ EŞİTSİZLİKLER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Fatma ÖZKAN**

**UŞAK, 2021**



## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma Özkan



**BAZI YENİ TÜR KESİRLİ EŞİTSİZLİKLER**  
(Yüksek Lisans Tezi)

**Fatma Özkan**

**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**Matematik Anabilim Dalı**

**Kasım 2021**

**ÖZET**

Kesirli analiz kavramının tanıtıldığı ve bazı önemli kesirli eşitsizliklerin incelendiği bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın ilk bölümünde, kesirli analiz kavramı tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremlerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, konveks tipten fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği, Caputo ve k-Caputo kesirli türev tanımları yardımıyla genişletilmiş ve bazı yeni teoremler elde edilmiştir. Dördüncü ve son bölümde ise farklı konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak bazı kesirli eşitsizlikler Caputo ve k-Caputo kesirli türev tanımları yardımıyla genişletilmiş, ilgili teoremler incelenmiş ve ispatlanmıştır. Son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler :** Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyon türleri, Caputo kesirli türevi, k-Caputo kesirli türevi.

**Sayfa Adedi** : 47

**Tez Danışmanı** : Doç. Dr. Deniz UÇAR

# **SOME NEW TYPE FRACTIONAL INEQUALITIES**

**(M. Sc. Thesis)**

**Fatma Özkan**

**UŞAK UNIVERSITY  
GRADUATE EDUCATION INSTITUTE  
Mathematics Department**

**November 2021**

## **ABSTRACT**

In this thesis, in which the fractional calculus is explained and some important fractional inequalities are examined, consists of four sections. In the first chapter, we introduce the fractional calculus and give information about the history of the subject. In the second chapter, we mention basic definitions and theorems. In the third chapter, we extend the Hermite-Hadamard inequality for convex functions using the Caputo and k-Caputo fractional derivatives, obtain some new theorems. In the fourth and the last chapter, we extend some inequalities for different type of convex functions using Caputo and k-Caputo fractional derivatives, we investigate and prove the theorems. Finally we give conclusions and suggestions.

**Keywords** : Hermite-Hadamard inequality, convex function, Caputo fractional derivatives, Caputo k-fractional derivatives.

**Number of pages** : 47

**Advisor** : Doç. Dr. Deniz UÇAR

## TEŞEKKÜR

Tez çalıőmasının ortaya çıkmasında emeği geçen her aőamasında benden destek ve yardımlarını esirgemeyen, göstermiő olduğu hoőgörü ve sabrından dolayı değerli danıőman hocam Sayın Doç. Dr. Deniz UÇAR' a en içten sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm hayatım boyunca yanımda olup baőarılarımın temelini atan her türlü desteği veren aileme yürekte teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIMLAR .....	2
3. BAZI YENİ TİPTEN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ .....	7
4. FARKLI FONKSİYON SINIFLARI İÇİN TEOREMLER .....	24
5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	39
6. KAYNAKLAR .....	40
7. ÖZGEÇMİŞ .....	42

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\Gamma(x)$	Euler-Gamma fonksiyonu
$B(x, y)$	Euler-Beta fonksiyonu
$J^\alpha f(x)$	$\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$J_{a^+}^\alpha$	$\alpha$ . mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali
$J_{b^-}^\alpha$	$\alpha$ . mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
<b>SX</b>	h-konveks sınıfı
<b>SV</b>	h-konkav sınıfı
${}^c D_{a^+}^\alpha$	Sağ taraflı Caputo kesirli türev
${}^c D_{b^-}^\alpha$	Sol taraflı Caputo kesirli türev
${}^c D_{a^+}^{\alpha, k}$	Sağ taraflı k-Caputo kesirli türev
${}^c D_{b^-}^{\alpha, k}$	Sol taraflı k-Caputo kesirli türev
$P(I)$	$P$ konveks fonksiyon sınıfı
$Q(I)$	$Q$ konveks fonksiyon sınıfı

# 1.GİRİŞ

Kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Riemann-Liouville tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavramlar 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville gibi birçok matematikçinin diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Günümüzde kesirli analizin kullanım alanları hızla artmaktadır. Doğadaki olayların matematiksel modellemesinde kullanılan kesirli türevler tamsayı mertebeli türevlere göre daha avantajlıdır.

Kesirli türevler nesnelere mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektro-analitik kimya gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma Hardy ve ark. (1934) tarafından “Inequalities” adlı kitapta toplanmıştır. Bu kitapta yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konular geniş çapta ele alınmaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni farklı türden eşitsizlikleri içeren “Inequalities” adlı bir kitap Beckenbach ve Bellman (1961) tarafından tekrardan yazılmıştır. Daha sonra Mitrinović (1970) “Analytic Inequalities” adlı kitap ile o güne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır. Mitrinović ve ark. (1993) daha genel olan “Classical and New Inequalities in Analysis” adlı kitabı yazmışlardır.

Günümüzde kesirli integral eşitsizlikler üzerine çok sayıda araştırma yapılmaktadır. Bunlardan bazıları ise R. Agarval, G. Anastassiou, G. V. Milovanovic, A. M. Fink, A. W. Roberts ve D. E. Varberg, N. S. Barnett, M. E. Özdemir, U. S. Kırmacı, H. Yıldırım, M. Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir.

## 2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde çalışmamızda kullanılacak gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu):** Gamma fonksiyonu  $x > 0$  için,

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

şeklinde tanımlanır. Bu integral  $n > 0$  için yakınsaktır.

**Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu):** Beta fonksiyonu  $m, n > 0$  için,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.3 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali):**  $f \in C_{\mu}$  ( $\mu \geq -1$ ) olmak üzere,  $\alpha > 0$  ve  $t > 0$  için,  $\alpha \geq 0$  iken  $\alpha$ . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$J^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Riemann-Liouville kesirli integrali operatörü için  $\alpha, \beta \geq 0$  olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^{\alpha} J^{\beta} f(t) = J^{\beta} J^{\alpha} f(t)$$

sağlanır.

**Tanım 2.4:**  $\alpha > 0$  ve  $y > a$  için,

$$J_{a^+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^y (y - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale  $\alpha$ . mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.  $\alpha > 0$  ve  $y < b$  için,

$$J_{b^-}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_y^b (\tau - y)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanan kesirli integrale ise  $\alpha$ . mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

**Tanım 2.5 (Caputo Türev):**  $m$  pozitif bir tam sayı olmak üzere  $m - 1 < \alpha < m$  için Caputo türev

$${}_{\alpha} D_z^{\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_{\alpha}^z (z - t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt$$

şeklinde dir.

$\alpha > 0$  ve  $\alpha \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $n = [\alpha] + 1$ ,  $f \in AC^n[a, b]$ , sürekli  $n$ . mertebeden türevlenebilen fonksiyon olsun. Sağ taraflı ve sol taraflı Caputo kesirli türevleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt, \quad x > a$$

$$({}^C D_{b^-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dt, \quad x < b.$$

**Tanım 2.6 (k-Caputo Türev):**  $\alpha > 0, k \geq 1$  ve  $\alpha \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $n = [\alpha] + 1$ ,  $f \in AC^n$  olsun. Sağ taraflı ve sol taraflı  $\alpha$  üzerinden Caputo  $k$ -kesirli türevleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f)(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} dt, x > a$$

$$({}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f)(x) = \frac{(-1)^n}{k\Gamma_k(n-\frac{\alpha}{k})} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\frac{\alpha}{k}-n+1}} dt, x < b$$

burada  $\Gamma_k$  gamma k fonksiyonunun gösterimidir.

**Tanım 2.7 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği):**  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  konveks bir fonksiyon,  $I$  ise reel sayıların bir alt aralığı,  $u, v \in I$  ve  $u < v$  için,

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v f(x) dx \leq \frac{f(u) + f(v)}{2}$$

şeklinde sağlanan eşitsizliğe Hermite-Hadamard eşitsizliği denir.

**Tanım 2.8 (Konvekslik):**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in [a, b]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $f$  fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eşitsizlik yön değiştirirse fonksiyon konkavdır denir.

**Tanım 2.9:** Negatif olmayan  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $\forall x, y \in I$  ve  $\lambda \in (0, 1)$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda} \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $Q(I)$  sınıfındandır denir.

Tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar bu sınıfa dahildir.

Eğer,  $f \in Q(I)$  ve  $x, y, z \in I$  ise

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0 \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.3) eşitsizliği (2.2) eşitsizliğine denktir. Böylece  $Q(I)$  sınıfının tanımını yerine kullanılabilir.

**Tanım 2.10:**  $f$  negatif olmayan bir fonksiyon ve  $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$  aralığı için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y) \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $P$  fonksiyondur veya  $P(I)$  sınıfına aittir denir.

$x$  ve  $y$  pozitif sayıların  $r$ . mertebeden kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Pearce ve diğerleri bu eşitsizliği,  $\forall x, y \in [a, b]$  ve  $\lambda \in [0,1]$  için

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq M_r(f(x), f(y), \lambda) \\ &= \begin{cases} (\lambda [f(x)]^r + (1 - \lambda)[f(y)]^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$[a, b]$  aralığında tanımlı  $r$ -konveks pozitif  $f$  fonksiyonuna genelleştirmişlerdir.

0-konveks fonksiyonların basitçe log-konveks fonksiyonlar ve 1-konveks fonksiyonların sıradan konveks fonksiyonlar olduğu bilinmektedir.

**Tanım 2.11:**  $h: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bir pozitif fonksiyon olsun.  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyon,  $\forall x, y \in I$  ve  $\lambda \in (0,1)$  için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq h(\lambda)f(x) + h(1 - \lambda)f(y) \quad (2.5)$$

Eşitsizliğini sağlıyorsa  $f$  fonksiyonu  $h$ -konveks fonksiyondur veya  $SX(h, I)$  sınıfındandır denir. Eşitsizlik ters çevrilirse  $f$ ,  $h$ -konkavdır denir ve  $f \in SV(h, I)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.12:** Minkowski eşitsizliği  $p > 1$  için  $f(x), g(x) \geq 0$  ise

$$\begin{aligned} & \left( \int |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq \left( \int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \int |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde verilebilir.



### 3. BAZI YENİ TİPTEN HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde, Hermite-Hadamard eşitsizliği Caputo ve k-Caputo türevleriyle genişletilmiş ve ispatlanmıştır.

**Teorem 3.1.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için pozitif,  $(n + 2)$  kez türevlenebilir bir fonksiyon olsun.  $f^{(n+2)}[a, b]$ 'de sınırlı olmak üzere  $\alpha > 0$  için,

$$\begin{aligned} & \frac{m(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \\ & \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [{}^C D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^\alpha f(a)] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\leq \frac{M(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

ve

$$\begin{aligned} & - \frac{M(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \\ & \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [{}^C D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^\alpha f(a)] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\leq - \frac{m(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

yazılabilir. Burada  $m = \inf_{t \in [a, b]} f^{(n+2)}(t)$ ,  $M = \sup_{t \in [a, b]} f^{(n+2)}(t)$ .

**İspat:** Tanım (2.5) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(-\alpha + 1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] \\
&= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \left[ \int_a^b (b-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx + \int_a^b (x-a)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx \right] \\
&= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f^{(n)}(x) [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \\
&= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f^{(n)}(a+b-x) [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \\
& \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] \\
&= \frac{(n-\alpha)}{4(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b [f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x)] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \\
& \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \frac{(n-\alpha)}{4(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} \\
&\quad + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx
\end{aligned}$$

İntegral  $x = \frac{a+b}{2}$  noktasına göre simetriktir.

$$\begin{aligned}
& \frac{(n-\alpha)}{4(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} \\
&\quad + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

olur. Böylece,

$$\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

elde edilir.

$$f^{(n)}(a+b-x) - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - f^{(n)}(x) = \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f^{(n+1)}(t) dt - \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(a+b-t) dt - \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$= \int_x^{\frac{a+b}{2}} [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt$$

$$f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) = \int_t^{a+b-t} f^{(n+2)}(y) dy, t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ için,}$$

$$m(a+b-2t) \leq f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq M(a+b-2t)$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_x^{\frac{a+b}{2}} m(a+b-2t) dt \leq \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq \int_x^{\frac{a+b}{2}} M(a+b-2t) dt$$

$$m \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2 \leq f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)} \left( \frac{a+b}{2} \right) \leq M \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2$$

$$\frac{m(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2 [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

$$\leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_a^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] - f^{(n)} \left( \frac{a+b}{2} \right)$$

$$\leq \frac{M(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2 [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

bulunur Teorem 3.1' deki (3.1) eşitsizliği ispatlanmış olur.

$$\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_a^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2}$$

$$= \frac{(n-\alpha)}{4(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b [f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b))] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

İntegral  $x = \frac{a+b}{2}$  noktasına göre simetriktir.

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \left[ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) \right] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \\ &= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} \\ & \quad + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a+b-x) = \int_{a+b-x}^b f^{(n+1)}(t) dt$$

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \\ &= \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt - \int_{a+b-x}^b f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt - \int_a^x f^{(n+1)}(a+b-t) dt$$

$$= - \int_a^x [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt$$

$$f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) = \int_t^{a+b-t} f^{(n+2)}(y) dy, \quad t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ için,}$$

$$m(a+b-2t) \leq f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq M(a+b-2t)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& - \int_a^x M(a+b-2t)dt \leq - \int_a^x f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq - \int_a^x m(a+b-2t)dt \\
& -M(x-a)(b-x) \leq f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \\
& \leq -m(x-a)(b-x) \\
& - \frac{M(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}]dx \\
& \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_a^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \\
& \leq - \frac{m(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x)[(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}]dx
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanmıştır.

**Teorem 3.2.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için diferensiyellenebilir pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer her  $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$  için  $f^{(n+1)}(a+b-x) \geq f^{(n+1)}(x)$  ise  $\alpha > 0$  için kesirli integraller ile ilgili aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_a^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] \leq \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2}$$

**İspat:**

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_a^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& = \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} \\
& \quad + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ \int_x^{\frac{a+b}{2}} [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \geq 0.$$

$$\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2}$$

$$= \frac{(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ - \int_a^x [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt \right] [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \leq 0.$$

**Teorem 3.3.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için pozitif,  $(n+2)$  kez türevlenebilir bir fonksiyon olsun.  $f^{(n+2)}[a, b]$ 'de sınırlandırılmışsa  $\alpha > 0$  için,

$$\frac{m(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2 [(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}] dx$$

$$\leq \frac{\Gamma(n-\frac{\alpha}{k}+1)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) ] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.3)$$

$$\leq \frac{M(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left( \frac{a+b}{2} - x \right)^2 [(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}] dx$$

ve

$$- \frac{M(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x) [(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}] dx$$

$$\leq \frac{\Gamma(n-\frac{\alpha}{k}+1)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) ] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \quad (3.4)$$

$$\leq -\frac{m(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx$$

vardır, burada  $m = \inf_{t \in [a,b]} f^{(n+2)}(t)$ ,  $M = \sup_{t \in [a,b]} f^{(n+2)}(t)$ .

**İspat:** Tanım (2.6) yardımıyla,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n-\frac{\alpha}{k}+1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \\ &= \frac{(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ \int_a^b (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f^{(n)}(x) dx + \int_a^b (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f^{(n)}(x) dx \right] \\ &= \frac{(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f^{(n)}(x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \\ &= \frac{(n-\frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f^{(n)}(a+b-x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \\ & \frac{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{k}+1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \\ &= \frac{(n-\frac{\alpha}{k})}{4(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \\ & \frac{\Gamma\left(n-\frac{\alpha}{k}+1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{(n-\frac{\alpha}{k})}{4(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \end{aligned}$$

İntegral  $x = \frac{a+b}{2}$  noktasına göre simetriktir.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n - \frac{\alpha}{k})}{4(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \\
&= \frac{(n - \frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx
\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \frac{(n - \frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$f^{(n)}(a+b-x) - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) - f^{(n)}(x) = \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f^{(n+1)}(t)dt - \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(a+b-t)dt - \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \int_x^{\frac{a+b}{2}} [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt
\end{aligned}$$

$$f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) = \int_t^{a+b-t} f^{(n+2)}(y)dy, \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ için,}$$

$$m(a+b-2t) \leq f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq M(a+b-2t).$$

$$\int_x^{\frac{a+b}{2}} m(a+b-2t)dt \leq \int_x^{\frac{a+b}{2}} f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq \int_x^{\frac{a+b}{2}} M(a+b-2t)dt$$

$$m\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \leq f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M\left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2$$

$$\frac{m\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \left[(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\right] dx$$

$$\leq \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leq \frac{M\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right)^2 \left[(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\right] dx$$

(3.3) eşitsizliği ispatlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \\ &= \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{4(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \end{aligned}$$

İntegral  $x = \frac{a+b}{2}$  noktasına göre simetriktir.

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \\ &= \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\ & \quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(b) - f^{(n)}(a+b-x) = \int_{a+b-x}^b f^{(n+1)}(t) dt$$

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt$$

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \\ &= \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt - \int_{a+b-x}^b f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \int_a^x f^{(n+1)}(t) dt - \int_a^x f^{(n+1)}(a+b-t) dt \end{aligned}$$

$$= - \int_a^x [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt$$

$$f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) = \int_t^{a+b-t} f^{(n+2)}(y) dy, \quad t \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ için,}$$

$$m(a+b-2t) \leq f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq M(a+b-2t).$$

$$- \int_a^x M(a+b-2t) dt \leq - \int_a^x f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t) \leq - \int_a^x m(a+b-2t) dt$$

$$\begin{aligned} -M(x-a)(b-x) &\leq f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - (f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)) \\ &\leq -m(x-a)(b-x) \end{aligned}$$

$$- \frac{M(n - \frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx$$

$$\leq \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2}$$

$$\leq - \frac{m(n - \frac{\alpha}{k})}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(b-x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx$$

olup (3.4) eşitsizliği ispatlanır.

**Teorem 3.4.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için diferensiyellenebilir pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer her  $x \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  için  $f^{(n+1)}(a+b-x) \geq f^{(n+1)}(x)$  ise  $\alpha > 0$  için kesirli integraller ile ilgili aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \leq \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2}$$

**İspat:**

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&= \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a+b-x) - 2f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \\
&= \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ \int_x^{\frac{a+b}{2}} [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] - \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} \\
&= \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{2(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ - \int_a^x [f^{(n+1)}(a+b-t) - f^{(n+1)}(t)] dt \right] \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right. \\
&\quad \left. + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \leq 0.
\end{aligned}$$

**Teorem 3.5.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  için  $(a, b)$  üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.  $f \in L[a, b]$  ise kesirli integraller ile ilgili aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n - \alpha + 1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] \\
&= \frac{b-a}{2} \int_0^1 [(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}] f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt.
\end{aligned}$$

**İspat:**

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}] f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \\ &= \left[ \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \right] + \left[ - \int_0^1 t^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \right] \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

yazılabilir. Elde edilen integraller hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \\ &= (1-t)^{n-\alpha} \frac{f^{(n)}(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^1 + \int_0^1 (n-\alpha)(1-t)^{n-\alpha-1} \frac{f^{(n)}(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f^{(n)}(b)}{b-a} - \frac{(n-\alpha)}{b-a} \int_b^a \left( \frac{a-x}{a-b} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f^{(n)}(x)}{a-b} dx \\ &= \frac{f^{(n)}(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha+1}} {}^c D_b^\alpha f(a) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^1 t^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \\ &= - \frac{t^{n-\alpha} f^{(n)}(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^1 + (n-\alpha) \int_0^1 t^{n-\alpha-1} \frac{f^{(n)}(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{b-a} - \frac{(n-\alpha)}{b-a} \int_b^a \left( \frac{b-x}{b-a} \right)^{n-\alpha-1} \frac{f^{(n)}(x)}{a-b} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{f^{(n)}(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha+1}} {}^c D_{a^+}^\alpha f(b)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$I = \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha+1}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a)]$$

yazılabilir.

Eşitliğin her iki tarafı  $\frac{b-a}{2}$  ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a)] \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 [(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}] f^{(n+1)}(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

**Teorem 3.6.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a < b$  için  $(a, b)$  üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.  $|f^{(n+1)}|$   $[a, b]$  üzerinde konveks ise kesirli integraller için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2(n-\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{n-\alpha}}\right) [f^{(n+1)}(a) + f^{(n+1)}(b)]. \end{aligned}$$

**İspat:** Teorem (3.5) ve  $|f^{(n+1)}|$ 'in konveksliğinden yararlanılarak,

$$\left| \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a)] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}| |f^{(n+1)}(ta + (1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}| [t|f^{(n+1)}(a)| + (1-t)|f^{(n+1)}(b)|] dt \\
&= \frac{b-a}{2} \left\{ \int_0^{1/2} [(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}] [t|f^{(n+1)}(a)| + (1-t)|f^{(n+1)}(b)|] dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{1/2}^1 [t^{n-\alpha} - (1-t)^{n-\alpha}] [t|f^{(n+1)}(a)| + (1-t)|f^{(n+1)}(b)|] dt \right\} \\
&= \frac{b-a}{2} (K_1 + K_2) \tag{3.5}
\end{aligned}$$

bulunur.

$K_1$  ve  $K_2$  hesaplanarak,

$$\begin{aligned}
K_1 &= |f^{(n+1)}(a)| \left[ \int_0^{1/2} t(1-t)^{n-\alpha} dt - \int_0^1 t^{n-\alpha+1} dt \right] \\
&\quad + |f^{(n+1)}(b)| \left[ \int_0^{1/2} (1-t)^{n-\alpha+1} dt - \int_0^{1/2} (1-t)t^{n-\alpha} dt \right] \\
&= |f^{(n+1)}(a)| \left[ \frac{1}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \right] \\
&\quad + |f^{(n+1)}(b)| \left[ \frac{1}{n-\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \right] \tag{3.6}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_2 &= |f^{(n+1)}(a)| \left[ \int_{1/2}^1 t^{n-\alpha+1} dt - \int_{1/2}^1 t(1-t)t^{n-\alpha} dt \right] \\
&\quad + |f^{(n+1)}(b)| \left[ \int_{1/2}^1 (1-t)t^{n-\alpha} dt - \int_{1/2}^1 (1-t)t^{n-\alpha+1} dt \right] \\
&= |f^{(n+1)}(a)| \left[ \frac{1}{n-\alpha+2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \right] \\
&\quad + |f^{(n+1)}(b)| \left[ \frac{1}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha+1} \right] \tag{3.7}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.6) ve (3.7) eşitlikleri (3.5) eşitliğinde yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f^{(n)}(a) + f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_b^\alpha f(a) ] \right| \\
&\leq \frac{b-a}{2(n-\alpha+1)} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-\alpha}} \right) [f^{(n+1)}(a) + f^{(n+1)}(b)]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

#### 4. FARKLI FONKSİYON SINIFLARI İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, farklı fonksiyonlar için eşitsizlikleri ve bu önemli eşitsizlikleri Caputo ve k-Caputo türevleriyle kurulmuştur.

**Teorem 4.1.**  $0 \leq a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in Q(I)$  olsun. Burada  $\alpha > 0$  ve kesirli integreller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a)] \quad (4.1)$$

**İspat:**  $f \in Q(I)$  ve  $\forall x, y \in I$  için

$$2(f(x) + f(y)) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

vardır. ((2.2) eşitsizliğinde  $\lambda = \frac{1}{2}$  için)

Yukarıdaki eşitsizlikte  $x = ta + (1-t)b$  ve  $y = (1-t)a + tb$  seçilirse,

$$2[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4.2)$$

yazılabilir.

Sonra (4.2) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve sonuçta ortaya çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınırsa

$$2 \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\alpha-1} dt$$

$$2 \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(x)}{b-a} dx + 2 \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(y)}{b-a} dy \geq \frac{1}{n-\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b (b-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx + \frac{2}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b (y-a)^{n-\alpha-1} f(y) dy \\
& \geq \frac{1}{n-\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \frac{2}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f(x) [(b-x)^{n-\alpha-1} + (x-a)^{n-\alpha-1}] dx \geq \frac{1}{n-\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \frac{2(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f(x) [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \frac{2\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a)] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.**  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in P(I)$  olsun. O zaman  $\alpha > 0$  için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a)] \leq 2(f(a) + f(b)) \quad (4.3)$$

şeklinde kesirli integraller için bir eşitsizlik vardır.

**İspat:** (2.4)' e göre  $x = ta + (1-t)b$ ,  $y = (1-t)a + tb$  ve  $\lambda = \frac{1}{2}$  ile tüm  $t \in [0,1]$  için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \quad (4.4)$$

bulunur. Böylece (4.4) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve  $[0,1]$  üzerinde  $t$ 'ye göre integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\alpha-1} dt \leq \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \\
& \frac{1}{n-\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f(x) [(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx
\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f(x)[(x-a)^{n-\alpha-1} + (b-x)^{n-\alpha-1}] dx$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a)]$$

bulunur ve eşitsizliğin sol tarafı ispatlanmış olur.  $f \in P(I)$  için

$$f(a + (1-t)b) \leq f(a) + f(b)$$

ve

$$f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq 2[f(a) + f(b)] \quad (4.5)$$

elde edilir. Böylece (4.5) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınır

$$\int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \leq 2[f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\alpha-1} dt$$

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(x)}{b-a} dx + \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(y)}{b-a} dy \leq \frac{2}{n-\alpha} [f(a) + f(b)]$$

$$\frac{1}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b [(b-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx + (y-a)^{n-\alpha-1} f(y) dy] \leq \frac{2}{n-\alpha} [f(a) + f(b)]$$

$$\frac{n-\alpha}{(b-a)^{n-\alpha}} \int_a^b f(x)[(b-x)^{n-\alpha-1} + (x-a)^{n-\alpha-1}] dx \leq 2[f(a) + f(b)]$$

$$\frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [{}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a)] \leq 2[f(a) + f(b)]$$

elde edilir ve dolayısıyla eşitsizliğin sağ tarafı ispatlanır.

**Teorem 4.3.**  $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ ,  $a < b$  ve  $0 < r \leq 1$  için  $[a, b]$  üzerinde  $r$ -konveks fonksiyon olsun. Buradan kesirli integral eşitsizlikler için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(-\alpha + 1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^C D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^C D_b^\alpha f(a) ] \\ & \leq \left[ \left( \frac{1}{n-\alpha + \frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \\ & + \left[ \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n-\alpha + \frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r}. \end{aligned}$$

**İspat:**  $f, r > 0$  ve  $r$ -konveks fonksiyon olduğundan her  $t \in [0,1]$  için

$$f(ta + (1-t)b) \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r}$$

ve

$$f((1-t)a + tb) \leq ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r}$$

vardır. Bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$\begin{aligned} & f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \\ & \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} + ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t'$  ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \\ & \leq \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} dt \\ & \quad + \int_0^1 t^{n-\alpha-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] \end{aligned}$$

eşitliği kolaylıkla bulunabilir.

Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} dt \\ & \leq \left[ \left( \int_0^1 t^{n-\alpha+\frac{1}{r}-1} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (1-t)^{1/r} f(b) dt \right)^r \right]^{1/r} \\ & = \left[ \left( \frac{1}{n-\alpha+\frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{n-\alpha-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} dt \\ & \leq \left[ \left( \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (1-t)^{1/r} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 t^{n-\alpha+\frac{1}{r}-1} f(b) dt \right)^r \right]^{1/r} \\ & = \left[ \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n-\alpha+\frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] \\
& \leq \left[ \left( \frac{1}{n-\alpha+\frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \\
& + \left[ \left( \beta \left( n-\alpha, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n-\alpha+\frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r}.
\end{aligned}$$

Bu ispat tamamlandı.

**Teorem 4.4.**  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in SX(h, I)$  olsun. Bu durumda, kesirli integraller aracılığıyla h-konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n-\alpha)h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) & \leq \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} [ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) ] (4.6) \\
& \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [h(t) + h(1-t)] dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** (2.5)' e göre  $n-\alpha = \frac{1}{2}$  ve  $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$  için

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right) & \leq h\left(\frac{1}{2}\right) f(ta + (1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f((1-t)a + tb) \\
& \leq h\left(\frac{1}{2}\right) [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.7) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$ ' ye göre  $[0,1]$  üzerinde integralini alınırsa

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\alpha-1} dt \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$\frac{1}{(n-\alpha)h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} \left[ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) \right] \quad (4.8)$$

elde edilir ve (4.6) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik ispatlanır.

$f \in SX(h, I)$  için

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

ve

$$f((1-t)x + ty) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y)$$

vardır. Bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) \leq [h(t) + h(1-t)][f(x) + f(y)] \quad (4.9)$$

olur.

$x = a$  ve  $y = b$  ile (4.9) kullanılırsa

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)] \quad (4.10)$$

bulunur. Sonra (4.10) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\alpha-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$  ye göre  $[0,1]$  üzerinde integralini alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \\ & \leq \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)] dt \\ & \frac{\Gamma(n-\alpha)}{(b-a)^{n-\alpha}} \left[ {}^c D_{a^+}^\alpha f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^\alpha f(a) \right] \\ & \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\alpha-1} [h(t) + h(1-t)] dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir ve böylece ikinci eşitsizlik ispatlanır.

(4.11) ve (4.8) eşitsizliklerinden (4.6) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.5.**  $0 \leq a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in Q(I)$  olsun. Burada  $\alpha > 0$  ve kesirli integraller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha, k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha, k} f(a) \right] \quad (4.12)$$

**İspat:**  $f \in Q(I)$  ve  $\forall x, y \in I$  için

$$2(f(x) + f(y)) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

vardır. ((2.2) eşitsizliğinde  $\lambda = \frac{1}{2}$  için)

Yukarıdaki eşitsizlikte  $x = ta + (1-t)b$  ve  $y = (1-t)a + tb$  seçilirse,

$$2[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (4.13)$$

yazılabilir.

Sonra (4.13) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçta ortaya çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integralini alınırsa

$$2 \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} dt$$

$$2 \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \frac{f(x)}{b-a} dx + 2 \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \frac{f(y)}{b-a} dy \geq \frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f(x) dx + \frac{2}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b (y-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f(y) dy \\ & \geq \frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f(x) \left[ (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \geq \frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{2\left(n-\frac{\alpha}{k}\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f(x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{2\Gamma\left(n-\frac{\alpha}{k}+1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.6.**  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in P(I)$  olsun. O zaman  $\alpha > 0$  için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma\left(n-\frac{\alpha}{k}+1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \\ &\leq 2(f(a) + f(b)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde kesirli integraller için bir eşitsizlik vardır.

**İspat:** (2.4)' e göre  $x = ta + (1-t)b$ ,  $y = (1-t)a + tb$  ve  $\lambda = \frac{1}{2}$  ile tüm  $t \in [0,1]$  için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece (4.15) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçtaki eşitsizliğin  $[0,1]$  üzerinde  $t$ 'ye göre integralini alırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} dt \leq \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$\frac{1}{n-\frac{\alpha}{k}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f(x) \left[ (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f(x) \left[(x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1}\right] dx$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right]$$

eşitsizliğin sol tarafı ispatlanır.  $f \in P(I)$  için

$$f(ta + (1-t)b) \leq f(a) + f(b)$$

ve

$$f((1-t)a + tb) \leq f(a) + f(b)$$

vardır. Bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq 2[f(a) + f(b)] \quad (4.16)$$

elde edilir. Böylece (4.16) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliği  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınır,

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt \leq 2[f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} dt$$

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \frac{f(x)}{b-a} dx + \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \frac{f(y)}{b-a} dy \leq \frac{2}{n-\frac{\alpha}{k}} [f(a) + f(b)]$$

$$\frac{1}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b \left[ (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f(x) dx + (y-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} f(y) dy \right] \leq \frac{2}{n-\frac{\alpha}{k}} [f(a) + f(b)]$$

$$\frac{n-\frac{\alpha}{k}}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \int_a^b f(x) \left[ (b-x)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} + (x-a)^{n-\frac{\alpha}{k}-1} \right] dx \leq 2[f(a) + f(b)]$$

$$\frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^C D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^C D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \leq 2[f(a) + f(b)]$$

elde edilir ve dolayısıyla eşitsizliğin sağ tarafı ispatlanır.

**Teorem 4.7:**  $f: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ ,  $a < b$  ve  $0 < r \leq 1$  için  $[a, b]$  üzerinde r-konveks fonksiyon olsun. Buradan kesirli integral eşitsizlikler için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k} + 1\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha, k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha, k} f(a) \right] \\ & \leq \left[ \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta \left( n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \\ & \quad + \left[ \left( \beta \left( n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r}. \end{aligned}$$

**İspat:**  $f, r > 0$  ve r-konveks fonksiyon olduğundan her  $t \in [0, 1]$  için

$$f(ta + (1-t)b) \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r}$$

ve

$$f((1-t)a + tb) \leq ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r}$$

vardır. Bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$\begin{aligned} & f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \\ & \leq (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} + ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0, 1]$  üzerinde integrali alınır,

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} dt$$

$$+ \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} dt$$

elde edilir.

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) ]$$

eşitliği kolayca bulunur.

Minkowski eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} (t[f(a)]^r + (1-t)[f(b)]^r)^{1/r} dt$$

$$\leq \left[ \left( \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}+\frac{1}{r}-1} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} (1-t)^{1/r} f(b) dt \right)^r \right]^{1/r}$$

$$= \left[ \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta\left(n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r}\right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r}$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} ((1-t)[f(a)]^r + t[f(b)]^r)^{1/r} dt$$

$$\leq \left[ \left( \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} (1-t)^{1/r} f(a) dt \right)^r + \left( \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}+\frac{1}{r}-1} f(b) dt \right)^r \right]^{1/r}$$

$$= \left[ \left( \beta \left( n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma \left( n - \frac{\alpha}{k} + 1 \right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) ] \\ & \leq \left[ \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(a)]^r + \left( \beta \left( n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \\ & \quad + \left[ \left( \beta \left( n - \frac{\alpha}{k}, \frac{r+1}{r} \right) \right)^r [f(a)]^r + \left( \frac{1}{n - \frac{\alpha}{k} + \frac{1}{r}} \right)^r [f(b)]^r \right]^{1/r} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**Teorem 4.8.**  $a < b$  ve  $f \in L_1[a, b]$  için  $a, b \in I, f \in SX(h, I)$  olsun. Bu durumda, kesirli integraller aracılığıyla  $h$ -konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left( n - \frac{\alpha}{k} \right) h \left( \frac{1}{2} \right)} f \left( \frac{a+b}{2} \right) & \leq \frac{\Gamma \left( n - \frac{\alpha}{k} \right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) ] \quad (4.17) \\ & \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [h(t) + h(1-t)] dt \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

**İspat:** (2.5)' e göre  $n - \frac{\alpha}{k} = \frac{1}{2}$  ve  $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb$  için

$$\begin{aligned} f \left( \frac{a+b}{2} \right) & \leq h \left( \frac{1}{2} \right) f(ta + (1-t)b) + h \left( \frac{1}{2} \right) f((1-t)a + tb) \\ & \leq h \left( \frac{1}{2} \right) [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] \quad (4.18) \end{aligned}$$

bulunur. (4.18) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} dt \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$\frac{1}{\left(n-\frac{\alpha}{k}\right) h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma\left(n-\frac{\alpha}{k}\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} [{}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a)] \quad (4.19)$$

elde edilir ve (4.17) eşitsizliğindeki birinci eşitsizlik ispatlanır.

$f \in SX(h, I)$  için

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y)$$

ve

$$f((1-t)x + ty) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y)$$

vardır. Bu eşitsizlikler toplanırsa,

$$f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) \leq [h(t) + h(1-t)][f(x) + f(y)] \quad (4.20)$$

elde edilir.

$x = a$  ve  $y = b$  ile (4.20) eşitsizliği kullanılırsa,

$$f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb) \leq [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)] \quad (4.21)$$

bulunur. Sonra (4.21) eşitsizliğinin her iki tarafı  $t^{n-\frac{\alpha}{k}-1}$  ile çarpılır ve sonuçta çıkan eşitsizliğin  $t$ 'ye göre  $[0,1]$  üzerinde integrali alınırsa,

$$\int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)] dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [h(t) + h(1-t)][f(a) + f(b)] dt$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(n - \frac{\alpha}{k}\right)}{(b-a)^{n-\frac{\alpha}{k}}} \left[ {}^c D_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + (-1)^n {}^c D_{b^-}^{\alpha,k} f(a) \right] \\ & \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{n-\frac{\alpha}{k}-1} [h(t) + h(1-t)] dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

elde edilir ve böylece ikinci eşitsizlik ispatlanır.

(4.19) ve (4.22) eşitsizliklerinden (4.17) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı önemli kesirli türev ve integral tanımlarına yer verilmiştir. Bu tanımlar yardımıyla özel tipten fonksiyonlar için Caputo ve k-Caputo kesirli türevi yardımıyla bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir.

Tezde elde edilen yeni tipten eşitsizlikler farklı kesirli integral ve farklı kesirli türev tanımları kullanılarak genişletilip yeni araştırma alanları oluşturulabilir.



## KAYNAKLAR

- Alkan, S. (2015). A new solution method for nonlinear fractional integro-differential equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-S*, 8, 1065-1077.
- Alkan, S., Yıldırım, K., Secer, A. (2016). An efficient algorithm for solving fractional differential equations with boundary conditions, *Open Physics*, 14, 6-14.
- Beckanbach E. F., Bellman R. (1961). Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.
- Caputo, M. (1967). Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent- II, *The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 13, 529-539.
- Chen, F. (2016). Extensions of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions via fractional integrals, *Journal of Mathematical Inequalities*, 10, 75-81.
- Diethelm, K. (2010). The analysis of fractional differential equations, Springer, Berlin.
- Dragomir, S. S., Pecaricand, J., Persson, L. E. (1995). Some inequalities of Hadamard Type, *Soochow Journal of Mathematics*, 21(3): 335-341.
- Farid, G., Javedand, A., Naqvi, S. ( 2017). Hadamard and Fejer-Hadamard inequalities and related results via Caputo fractional derivatives, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 9, 16-30.
- Faridand, G., Javed, A. (2018). On Hadamard and Fejer-Hadamard inequalities for Caputo k-fractional derivatives, *Int. J. Nonlinear Anal. App.*, 9, 69-81.
- Gill, P. M., Pearceand, C. E. M., Pecaric, J. (1997). Hadamard's inequality for r-convex functions, *Journal of Math. Analysis and Appl.*, 215, 461- 470.
- Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1934). Inequalities, Cambridge University Press, London.
- Kilbas, A. A., Srivastavaand, H. M., Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam.
- Mitrinovic D. S. (1970). Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin.

- Mitrinovic D.S., Pecaric J. E., Fink A. M. (1993). Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Ngoc, N. P. G., Vinhand, N. V., Hien, P. T. T. (2009). Integral inequalities of Hadamard-type for r-convex functions, *International Mathematical Forum*, 4, 1723-1728.
- Sarikaya, M. Z., Set, E., Özdemir, M. E. (2010). On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions, *Acta Math. Univ. Comenianae*, Vol. LXXIX (2), 265- 272.
- Sarikaya, M. Z., Set, E., Yıldız, H., Başak, N. (2013). Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities, *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 2403-2407.
- Uçar, D., Özkan, F. (2021). Inequalities for a derivative with a new parameter, *Tbilisi Mathematical Journal, Special Issue*, 7, 125- 138.
- Waheed, A., Rehman, A. U., Qureshi, M. I., Shahand, F. A., Farid, G. (2019). On Caputo k-fractional derivatives and associated inequalities, *IEEEAccess*, 7, 32137-32145.
- Yıldız, Ç., Özdemir, M. E., Kavurmacı Önelan, H. (2015). Fractional integral inaequalities for different functions, *New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI*, 3(2), 110-117.
- Zhao, C. J., Cheung, W.S. (2011). On Minkowski's inequality and its application, *Journal of Inequalities and Applications*, 71.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Ad Soyadı : Fatma Özkan

Doğum tarihi ve yeri :

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2021
Lisans	Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2019
Lise	Orhan Deniz Anadolu Lisesi	2015

### Mesleki Deneyim

Yıl	Yer	Görev
2019-	Başarı Yabancı Dil Kursu	Öğretmen

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

Inequalities for a derivative with a new parameter, Tbilisi Mathematical Journal, Special Issue, 7, 125- 138.(2021)