

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

PERİODOGRAM TABANLI MEVSİMSEL BİRİM KÖK TESTLERİ

Elif GÖLVEREN

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2021**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

PERİODOGRAM TABANLI MEVSİMSSEL BİRİM KÖK TESTLERİ

Elif GÖLVEREN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ

Bu çalışmada periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin teorik yapısının sunulması, teste ilişkin simülasyon çalışmalarının yapılması ve gerçek bir veri seti üzerinde uygulamasının gösterilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla her şeyden önce zaman serileri analizine ilişkin temel kavramlar ve temel zaman serisi modelleri hem zaman alanı hem frekans alanı kapsamında incelenmiştir. Daha sonra periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin -temelde zaman serilerin spektral analizine ve ilk olarak Akdi (1995) tarafından tanıtılan periodogram tabanlı birim kök testine dayanan- teorik çerçevesi $SAR_4(1)$ modeli için sunulmuştur. Teorik çerçevenin sunulmasının ardından yapılan simülasyon çalışmaları ile teste yönelik kritik değerler üretilmiş, farklı örnek büyüklüklerine ve farklı parametre değerlerine ilişkin testin gücü hesaplanmıştır. Son olarak 24 serilik bir veri seti üzerinde testin uygulaması gerçekleştirilmiş ve sonuçlar HEGY mevsimsel birim kök testinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir.

Aralık 2021, 179 sayfa

Anahtar Kelimeler: Mevsimsel birim kök testi, zaman serileri analizi, periodogram

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

PERIODOGRAM BASED SEASONAL UNIT ROOT TESTS

Elif GÖLVEREN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz AKDİ

This study, it is aimed to present the theoretical structure of the periodogram based seasonal unit root test, to carry out simulation studies of the test, and to show its application on a real data set. For this purpose, first of all, the basic concepts of time series analysis and basic time series models are examined in both time domain and frequency domain. Then, the theoretical framework of the periodogram based seasonal unit root test -mainly based on the spectral analysis of time series and the periodogram based unit root test first introduced by Akdi (1995)- is presented for the $SAR_4(1)$ model. After the theoretical framework is presented, critical values for the test are produced, and the power of the test is calculated for different sample sizes and different parameter values. Finally, the test is applied on a dataset of 24 series, and the results are evaluated comparatively with the results obtained from the HEGY seasonal unit root test.

December 2021, 179 pages

Key Words: Seasonal unit root test, time series analysis, periodogram

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen, bilgilerini cömertçe paylaşan, yol gösteren, sürekli motive eden değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Yılmaz Akdi ile sayın Doç. Dr. Eray Yücel'e ve komite toplantılarında kıymetli görüşlerini paylaşarak çalışmalarına katkıda bulunan değerli hocam sayın Prof. Dr. Cemal Atakan'a, her şeyden önce bana kazandırdıkları akademik bakış ve çalışma ahlakı için en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca doktora eğitimim süresince kendilerinden ders aldığım Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümünün tüm öğretim üye ve elemanlarına, doktora sürecime destek olan Atatürk Üniversitesindeki tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma ve son olarak bu süreçte desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Elif GÖLVEREN

Ankara, Aralık 2021

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	2
2. TEMEL KAVRAMLAR	11
2.1 Zaman Serisi ve Durağanlık.....	11
2.2 Zaman Alanı Yaklaşımı ve Periyodiklik	14
2.2.1 Otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları	14
2.2.2 Beyaz gürültü serisi.....	17
2.2.3 Periyodik fonksiyonlar ve periyodik zaman serileri	18
2.3 Frekans Alanında Durağan Süreçlerin İncelenmesi	26
2.3.1 Ortogonal fonksiyonlar sistemi	27
2.3.2 Sonlu dizilerin ve periyodik dizilerin Fourier gösterimi	31
2.3.3 Periyodik olmayan dizilerin Fourier gösterimi: Kesikli-zamanlı Fourier dönüşümü.....	34
2.3.4 Fourier dönüşümü.....	36
2.3.5 Spektrum ve özellikleri	37
2.3.6 Periodogram	43
2.4 Durağan Süreçler	48
2.4.1 Genel lineer süreçler	49
2.4.2 Otoregresif (AutoRegressive-AR) süreçler	54
2.4.3 Hareketli ortalama (Moving Average-MA) süreçleri	67
2.4.4 Karma otoregresif hareketli ortalama (AutoRegressive Moving Average-ARMA) süreçleri	74
2.5 Durağan Olmayan Süreçler	81
2.5.1 Deterministik trend modelleri.....	82
2.5.2 Stokastik trend modelleri	83
2.5.3 Otoregresif bütünleşik hareketli ortalama (AutoRegressive Integrated Moving Average-ARIMA) Modelleri	84
2.6 Mevsimsel Süreçler	88
2.6.1 Mevsimsel (durağan) ARMA süreçleri	90
2.6.2 Çarpımsal mevsimsel (durağan) ARMA süreçleri.....	98
2.6.3 Durağan olmayan mevsimsel ARIMA (SARIMA) süreçleri.....	100
2.6.4 Mevsimsel süreçlerin spektrumu	106
3. MEVSİMSEL BİRİM KÖK TESTLERİ.....	110
3.1 Simetrik En Küçük Kareler (DHF) Yöntemi	110
3.2 HEGY Yöntemi	114
3.3 Franses Yöntemi.....	118
4. PERİODOGRAM TABANLI MEVSİMSEL BİRİM KÖK TESTİ	122
4.1 Periodogram Ordinatinın Dağılımı	123

4.2 Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi	125
4.3 Mevsimsel Zaman Serileri için Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi	127
5. SİMÜLASYON VE UYGULAMA ÇALIŞMALARI	134
5.1 Kritik Değerlerin Üretilmesi	134
5.2 Teorik Güç için Elde Edilen Hesaplamalar	135
5.3 Uygulama	140
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	146
KAYNAKLAR.....	149
EKLER.....	155
EK 1 (DÜZEY İÇİN GRAFİKLER)	155
EK 2 (BİRİNCİ MEVSİMSEL FARKLAR İÇİN GRAFİKLER).....	167
ÖZGEÇMİŞ	179



SİMGELER DİZİNİ

a_k, b_k	Fourier katsayıları
B	Gecikme operatörü
e_t	Beyaz gürültü süreci
$f(\omega)$	Spektral yoğunluk fonksiyonu
$I_n(\omega_k)$	k -ıncı periodogram ordinatı
ω_k	Fourier frekansları
∇	Fark alma operatörü
$\theta(B)$	Hareketli ortalama operatörü
$\varphi(B)$	Genelleştirilmiş otoregresif operatör
$\phi(B)$	Otoregresif operatör
$\gamma(B)$	Otokovaryans üreten fonksiyon
$\gamma(h)$	Otokovaryans fonksiyonu
$\rho(h)$	Otokorelasyon fonksiyonu
$\phi(h)$	Kısmi otokorelasyon fonksiyonu
$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$	Hareketli ortalama parametreleri
$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$	Otokorelasyonlar
$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$	Otoregresif parametreler
$\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{hh}$	Kısmi otokorelasyonlar
σ_e^2	Beyaz gürültü sürecinin varyansı
$\Theta_Q(B^S)$	Mevsimsel hareketli ortalama operatörü
$\Phi_P(B^S)$	Mevsimsel otoregresif operatör

Kısaltmalar

ACF	Otokorelasyon fonksiyonu
AR	Otoregresif
ARIMA	Otoregresif bütünleşik hareketli ortalama
ARMA	Otoregresif hareketli ortalama
DHF	Dickey, Hasza ve Fuller
HEGY	Hylleberg, Engle, Granger ve Yoo
iid	Birbirinden bağımsız aynı dağılımlı
MA	Hareketli ortalama
PACF	Kısmi otokorelasyon fonksiyonu
SARIMA	Mevsimsel otoregresif bütünleşik hareketli ortalama

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $R = 1$, $f = 0.1$, $\phi = \pi/4$ olan bir sinüzoid	19
Şekil 2.2 Beyaz gürültü sürecinin spektrumu	43
Şekil 2.3 AR(1) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu	57
Şekil 2.4 Farklı ϕ_1 değerlerine sahip AR(1) modellerine ilişkin grafikler, $n = 100$	58
Şekil 2.5 AR(1) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu	60
Şekil 2.6 AR(1) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu, $\sigma_e^2 = 1$	61
Şekil 2.7 AR(2) modeli için durağanlık bölgeleri	63
Şekil 2.8 AR(2) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu	64
Şekil 2.9 AR(2) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu	66
Şekil 2.10 AR(2) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu	67
Şekil 2.11 MA(1) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu	69
Şekil 2.12 MA(1) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu	70
Şekil 2.13 MA(1) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu	71
Şekil 2.14 MA(2) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu	72
Şekil 2.15 MA(2) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu	73
Şekil 2.16 MA(2) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu	74
Şekil 2.17 ARMA(1,1) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu	80
Şekil 2.18 ARMA(1,1) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu	80
Şekil 2.19 ARMA(1,1) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu	81
Şekil 2.20 $\sigma_e^2 = 1$ olmak üzere $\hat{X}_t = 2\hat{X}_{t-1} + e_t$ durağan olmayan birinci dereceden otoregresif sürecinin bir realizasyonu	85
Şekil 2.21 Aylık havayolu yolcu trafiği verisi, 2007-2019, Türkiye	89
Şekil 2.22 Aylık sembollerle havayolu yolcu trafiği verisi	90
Şekil 2.23 MA(1) ₁₂ süreci için teorik otokorelasyon fonksiyonu	92
Şekil 2.24 AR(1) ₁₂ süreci için teorik otokorelasyon fonksiyonu	95
Şekil 2.25 Hava yolu yolcu trafiği verisi	102
Şekil 2.26 Örnek ACF'leri	104
Şekil 2.27 $(1-\Phi B^{12})X_t = e_t$ süreci için spektrum, $\Phi = 0.5$, $\sigma_e^2 = 1$	107
Şekil 2.28 $(1-\phi B)(1-\Phi B^{12})X_t = e_t$ süreci için spektrum, $\phi = 0.5$, $\Phi = 0.9$ ve $\sigma_e^2 = 1$	108
Şekil 2.29 $X_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})e_t$ süreci için spektrum, $\theta = 0.4$, $\Theta = 0.9$, $\sigma_e^2 = 1$	109
Şekil 5.1 Farklı n değerleri için testin gücü (Üst: $\alpha = 0.05$, alt: $\alpha = 0.10$)	138
Şekil 5.2 Farklı ρ değerleri için testin gücü (Üst: $\alpha = 0.05$, alt: $\alpha = 0.10$)	139
Şekil 5.3 Slovakya serisi için zaman serisi, ACF ve PACF grafikleri	142
Şekil 5.4 Portekiz serisi için zaman serisi, ACF ve PACF grafikleri	145

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1 (Mevsimsel) birim kök testlerinde kullanılan veri setleri.....	7
Çizelge 2.1 Bazı fonksiyonların Fourier dönüşümleri (Fuller 1996).....	38
Çizelge 2.2 $n = 2m + 1$ örnek büyüklüğü için varyans analizi tablosu (Fuller 1996)	44
Çizelge 2.3 Durağan olmayan birinci dereceden bir otoregresif sürecin ilk 11 değeri	85
Çizelge 4.1 $Z_1^2 + 3Z_2^2$ 'nin yüzdellikleri (Akdi ve Dickey 1998).....	126
Çizelge 5.1 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testine ilişkin kritik değerler	135
Çizelge 5.2 Testin gücü ($\alpha = 0.05$)	137
Çizelge 5.3 Testin gücü ($\alpha = 0.10$)	137
Çizelge 5.4 Düzey için test istatistikleri ve p-değerleri	141
Çizelge 5.5 Slovakya serisi için hesaplanan öngörü değerleri.....	143
Çizelge 5.6 Birinci mevsimsel farklar için test istatistikleri ve p-değerleri.....	144

1. GİRİŞ

Zaman serisi, zaman içerisinde belirli aralıklarla alınan gözlemlerin bir kümesidir. Ekonomide üç aylık gayrisafi millî hasıla serisi, aylık işsizlik oranı, faiz oranları ve fiyat endeksleri; sosyal bilimlerde yıllık doğum, ölüm, kaza ve suç oranları; meteorolojide saatlik rüzgâr hızı, günlük sıcaklık ve yıllık yağış miktarı gibi seriler zaman serilerine örnek olarak verilebilir. Bunlar dışında doğal bilimler, mühendislik, işletme ve tıp bilimleri gibi alanlarda da saatlik, günlük, haftalık, aylık, üç aylık, yıllık gibi çeşitli zaman aralıklarına göre alınmış zaman serilerine çokça rastlanmaktadır (Box vd. 1994, Fuller 1996, Wei 2006).

Zaman serisi verisi aylık veya üç aylık gibi mevsimsel temelde gözlendiğinde başlangıçta ele alınması gereken birtakım modelleme hususları vardır. Bunlar mevsimselliğin yapısının deterministik mi yoksa stokastik mi olduğu ve eğer stokastik ise uygun dönüşümün ne olması gerektiğidir. Mevsimsel düzeltme yapılmamış verilerde mevsimselliğin geleneksel ele alınışı, deterministik mevsimselliği temsil eden gölge değişkenlerin kullanılmasıdır. Bununla birlikte gözlenen mevsimsellik bir stokastik süreçle açıklanabilecekken, deterministik mevsimsel gölge değişkenlerin kullanılmış olması sahte regresyonlara sebep olacaktır. Ayrıca eğer bu stokastik süreç durağan değilse, sadece sıfır frekansta (uzun dönemde) değil, tüm frekanslarda birim kökün varlığının araştırılması önemlidir. Mevsimselliğin modellenmesinde yapılabilecek bir tanımlama hatası sebebiyle, değişkenler arasındaki dinamik ilişkiler ortaya çıkmayabilecek ve sonuçta öngörü performansı zayıf olacaktır (Abeyasinghe 1994, Alexander ve Jorda 1997). Bu nedenle mevsimsellik içeren zaman serilerinde mevsimselliğin yapısının iyi belirlenmesi ve mevsimsel birim köklü serilerde sıfır frekansın yanı sıra bütün mevsimsel frekanslardaki birim kökleri inceleyen bir test stratejisinin kullanılması oldukça önemlidir.

Zaman serileri analizine yönelik prosedürler zaman alanı (time domain) ve frekans alanı (frequency domain) olmak üzere iki ana kapsamda geliştirilmiştir (Brandes vd. 1968). Zaman alanı kapsamında seriyi karakterize etmek için kullanılan önemli araçlardan biri otokorelasyon fonksiyonudur. Frekans alanı kapsamında ise zaman serisi spektral yoğunluk fonksiyonu ile karakterize edilir (Akdi 1995). Mevsimsel birim köklerin test

edilmesine yönelik çoğu yaklaşım zaman alanı prosedürlerine dayanmaktadır ve sıfır frekansta tek bir birim kökü test etmek için kullanılan metotların uygun genişletmelerinden oluşmaktadır (Choi ve Phillips 1993). Bununla birlikte mevsimsel birim köklerin test edilmesinde kullanılan frekans alanı yaklaşımları da mevcuttur. Bu kapsamda periodogram tabanlı testlerin, sunduğu çeşitli avantajlar sebebiyle, ön plana çıktığı görülmektedir.

Bu çalışmada mevsimsel birim kökler frekans alanı kapsamında ele alınmıştır. Bu doğrultuda $s = 4$ mevsimsel periyotlu birinci dereceden mevsimsel otoregresif zaman serisi modeli için periodogram tabanlı birim kök testi sunulmuş, teste ilişkin simülasyon çalışmaları gerçekleştirilmiş ve gerçek bir veri seti üzerinde testin uygulamasına yer verilmiştir. Uygulama kısmında teste ilişkin sonuçlar, bir diğer mevsimsel birim kök testi olan HEGY testinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Bu karşılaştırmadan yola çıkılarak periodogram tabanlı testin mevsimsel serilerdeki yapıyı daha gerçeğe uygun bir şekilde yakalayabildiği ve bu nedenle mevsimsel serilerde birim kökün araştırılmasında periodogram tabanlı testin kullanımının üzerinde durulması gerektiği sonucuna varılmıştır.

1.1 Literatür Taraması

Tek değişkenli birim kök süreçleri ile ilgili ilk teorik çalışmalara Dickey (1976), Fuller (1976) ve Dickey ve Fuller (1979)'de rastlanmaktadır. İlk uygulamalı çalışmalar arasında ise Nelson ve Plosser (1982)'in konunun makroekonomik verilere uygulandığı çalışması gösterilmektedir. Nelson ve Plosser (1982) çalışmasında deterministik trend modeline kıyasla rasgele yürüyüş (birim kök) modelinin ele alınan ekonomik zaman serilerindeki trende daha iyi bir yaklaşımda bulunduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra Nelson ve Kang (1981, 1984) rasgele yürüyüşün zaman üzerine regresyonundan elde edilen artıkların beklenen örnek otokorelasyon fonksiyonunun, trendden arındırılmış serilerde sahte periyodik davranışa yol açacağını ortaya koymuştur. Bu çalışmalar zaman serilerinde birim kökün incelenmesi konusunda motivasyon oluşturmuştur.

Dickey (1976) tarafından, $X_0 = 0$ ve $\{e_t\}_{t=1}^{\infty}$ 0 ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere, $X_t = \rho X_{t-1} + e_t$ şeklindeki birinci dereceden otoregresif süreç ele alınmıştır. Modelde yer alan ρ için en çok

olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\rho}$ tartışılmış ve $|\rho| = 1$ olduğunda tahmin edicinin dağılımı incelenmiştir. $n(\hat{\rho} - 1) \xrightarrow{D} 0.5(T^2 - 1)/\Gamma$ olduğu gösterilmiştir. Burada $T = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\gamma_k Z_k$, $\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 Z_k^2$, $\gamma_k = 2(-1)^{k+1}/[(2k-1)\pi]$ ve Z_k 0 ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılımlı bağımsız rasgele değişkenlerin bir dizisidir. Ayrıca çalışmada $H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezine iki alternatif olarak, $|\rho| < 1$ olmak üzere, zaman serisinin $X_t = \alpha + \rho X_{t-1} + e_t$ ve $X_t = \alpha + \beta t + \rho X_{t-1} + e_t$ süreçlerine göre üretildiği durumlar için ρ 'nun iki tahmin edicisi araştırılmıştır: Ortalamanın bilinmediği ve tahmin edilmesi gerektiği durum için $n(\hat{\rho}_\mu - 1)$ test istatistiğinin ve modelin lineer bir trend içerdiği durum için ise $n(\hat{\rho}_\tau - 1)$ test istatistiğinin dağılımı verilmiştir. Ek olarak, üç tahmin edici için t -türü istatistikler $(\tau, \tau_\mu, \tau_\tau)$ sunulmuştur. Monte Carlo metodu ile $\rho = 1$ için tahmin edicilerin dağılımlarına ilişkin yüzdeler üretilmiştir. $\rho = -1$ olduğunda en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\rho}$ 'nın dağılımının, $\rho = 1$ durumu için elde edilen tahmin edicinin dağılımının bir yansıması olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\rho = -1$ durumunda ρ 'nun diğer iki tahmin edicisinin limit dağılımının, $\rho = -1$ durumu için $\hat{\rho}$ 'nın limit dağılımıyla aynı olduğu bulunmuştur. Son olarak, sonuçları daha yüksek dereceden süreçlere genişleten bir teorem verilmiş ve bu sonuçların kullanımı örneklendirilmiştir. Dickey ve Fuller (1981), Dickey vd. (1986) ve Phillips ve Perron (1988) tarafından konu ile ilgili çalışmalar sürdürülmüştür. Chan ve Wei (1988) bir otoregresif sürecin karakteristik polinomunun bütün köklerinin birim çemberin üzerinde veya dışında bulunması durumunda parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisini elde etmişler ve bunu süreçteki e_t terimi üzerinde $2 + \delta$ moment varsayımında bulunarak stokastik integrallerin bir fonksiyonu olarak karakterize etmişlerdir. Sowell (1990) tarafından serinin, $-1/2 < d < 1/2$ olmak üzere, $1 + d$ dereceden kesikli olarak bütünleşik olması durumunda birinci dereceden otoregresyonun sıradan en küçük kareler tahmini için asimptotik dağılımlar türetilmiş, ayrıca kesikli birim kök dağılımı tanıtılmıştır.

Bu çalışmaların ardından, otoregresif süreçlerde birim kök testi problemi zaman serisinin çeşitli türlerine genişletilmiştir. Said ve Dickey (1985) Box ve Jenkins (1976)'da tanıtilen bilinmeyen dereceli $ARIMA(p, 1, q)$ modellerinde birim kökün testi için bir test prosedürü vermiştir. Bu test prosedürü literatürde *ADF (Augmented Dickey-Fuller) testi* olarak bilinmektedir. Dickey ve Pantula (1987) yüksek dereceden fark

almanın gerekli olabildiği durumlar için bir dizi test önermiştir. Literatürde *ardışık birim kök testi* (*sequential unit root test*) olarak bilinen bu yöntemde, test prosedürü $AR(p)$ modelinde i tane birim kök olup olmadığını sınamak için $H_i: i$ birim kök hipotezinin $H_{i-1}: (i - 1)$ birim kök alternatifine karşı test edilmesi ile başlar. $H_1: bir birim kök$ hipotezinin durağan olmama alternatifine karşı tet edilmesine kadar bir dizi test ardışık olarak gerçekleştirilir. Test istatistiklerine ilişkin kritik değerler yazarlar tarafından verilmiştir.

Literatürde zaman serilerindeki dalgalanmalar üzerinde yapılan çalışmaların veriyi mevsimsellikten arındırma boyutundan, verideki mevsimselliği ayrıca dikkate alma ve veriyi içerdiği mevsimsellikte birlikte analiz etme boyutuna geçtiği bir geçiş döneminin söz konusu olduğunu söylemek mümkündür. Bu dönemin çalışmaları arasında Miron ve Zeldes (1987), Barsky ve Miron (1989), Beaulieu ve Miron (1990), Miron (1990), Osborn (1990) ve Hylleberg vd. (1993) tarafından yapılan çalışmalar gösterilebilir. Makroekonomik zaman serilerinin mevsimsel karakteristiklerini analiz eden bu çalışmalardan sonra, zaman serilerinde mevsimselliğin stokastik bir yapıda modele dâhil edilmesi gerektiği hususuna özellikle önem verildiği söylenebilir. Özellikle bu geçiş döneminden sonra zaman serisi modellerinde mevsimsel birim kök testi problemi de araştırmacıların ilgi odağı olmaya başlamıştır. Tek değişkenli zaman serisi modellerinde mevsimsel birim kök testi problemini ele alan çalışmaların, diğerlerinin yanı sıra, Dickey vd. (1984) ile başladığı söylenebilir. Dickey vd. (1984) tarafından $X_t = \alpha_d X_{t-d} + e_t$ modeli için $\alpha_d < 1$ alternatifine karşı $\alpha_d = 1$ hipotezinin testi (*DHF testi*) önerilmiştir. Modelde yer alan α_d 'nin simetrik en küçük kareler tahmin edicisi dikkate alınmış ve tahmin edicinin asimptotik dağılımı bulunmuştur. $\alpha_d = 1$ hipotezi altında d 'nin birkaç değeri için tahmin edicilerin dağılımlarına ilişkin yüzdelikler hesaplanmıştır. Bu test mevsimsel frekansların tamamında değil bazılarında birim köke izin vermektedir. Osborn vd. (1988) tüketimin durağan olmayan yapısını periyodik veya mevsimsel olarak değişen bir özellik bağlamında incelemiş ve literatürde *OCSB testi* olarak anılan bir test prosedürü önermiştir. Hylleberg vd. (1990) önerdikleri bir yardımcı regresyon modelini dikkate alarak çeyreklik serilerde sıfır frekansın yanı sıra bütün mevsimsel frekanslardaki birim kökleri ele alan bir test (*HEGY testi*) geliştirmiştir. Franses (1990) ve Beaulieu ve Miron (1993) ise bu testi aylık serilere uyarlamıştır. Bu çalışmaların yanı sıra Canova ve Hansen (1995) tek bir mevsimsel

frekanstaki ya da mevsimsel frekansların bir kümesindeki birim kök alternatifine karşı mevsimsel frekanslarda birim kök olmadığı yokluk hipotezinin testine ilişkin Lagrange çarpanı testlerini tanıtmıştır. Testler için asimptotik dağılım çıkarılmıştır. Yine Caner (1998) tarafından bireysel mevsimsel frekanslardaki ya da mevsimsel frekansların tamamındaki mevsimsel birim kökler alternatifine karşı, mevsimsel durağanlığın yokluk hipotezine dair bir test önerilmiş ve asimptotik dağılım çıkarılmıştır. Bu çalışmalarda mevsimsel durağanlık, mevsimsel birim köklerin alternatifine karşı test edilmektedir.

Birçok araştırmacı yukarıda bahsedilen testlerden yola çıkarak bu testlere ilişkin birtakım genişletmeler içeren yeni testler önermişlerdir. Ghysels vd. (1994) mevsimsel frekanslarda birim köke sahip mevsimsel zaman serilerinde Dickey-Fuller tipi testlerin özelliklerini incelemiş ve yeni test istatistikleri önermiştir. Rodriguez (2000) Dickey ve Fuller (1979) tarafından önerilen birim kök testinin mevsimsel olarak düzeltilmemiş veride uygulanması üzerine bir inceleme ele almıştır. Bu incelemede Dickey-Fuller testi mevsimsel verilerde kullanıldığında ortaya çıkabilecek olası sorunlar vurgulanmış, bu testin mevsimsel olarak düzeltilmemiş veriye uygulanmasında kullanılabilecek iki olası metot karşılaştırılmış ve mevsimsel zaman serilerinde Dickey-Fuller testinin asimptotik özellikleri çıkarılmıştır. Taylor (1995) çalışmasında aylık tek değişkenli zaman serilerinde mevsimsel kökler için testlerle ilgilenmiştir. Çalışmada Beaulieu ve Miron (1993) tarafından önerilen prosedür genişletilmiştir. Her bir frekanstaki birim kökü ve mevsimsel frekansların her birindeki birim kökü eşanlı olarak test eden test istatistikleri geliştirilmiş ve önerilen test istatistiklerinin her birinin limit dağılımları türetilmiştir. Çalışmanın çıkış noktası, regresyon bağlamında, mevsimsel birim köklerin yokluk hipotezi altında, diferansiyel mevsimsel sürüklenme olasılığına izin veren testler önermektir. Franses ve Hobijn (1997) tarafından mevsimsel zaman serilerinde birim kökün testine yönelik prosedürler sunan HEGY ve OCSB testlerinin genişletmelerine dair kritik değerler sunulmuştur. Bu genişletmelerde mevsimsel ortalamalarda yapısal kırılmalara sahip zaman serileri ve artan mevsimsel değişime sahip zaman serileri ile ilgilenilmiştir. Her bir durum için uygun yardımcı test regresyonu, test istatistikleri ve belirli örnek büyüklükleri için karşılık gelen kritik değerler verilmiştir. Franses vd. (1997) tarafından mevsimsel birim kök testleri için HEGY modelinin yeniden parametrelendirilmesine dayanan bir Bayesyen yaklaşım önerilmiştir. Rubia (2001) tarafından HEGY mevsimsel birim kök testi günlük olarak toplanmış seriler için

haftalık mevsimsellik durumuna uyarlanmıştır. Rodrigues ve Taylor (2004b) mevsimsel birim kök yokluk hipotezini test etmek için yeni bir dizi regresyon-tabanlı test önermiştir. Önerilen testler HEGY mevsimsel birim kök test regresyonunun basit simetrik ve ağırlıklı en küçük kareler tahminine dayanmaktadır. Ayrıca Smith vd. (2009) ve del Barrio Castro vd. (2012) de HEGY testinin genişletmelerini ele almıştır. Meng ve He (2012) verideki mevsimsel birim kökleri herhangi bir frekansta test etmek için bir HEGY tipi test önermiştir. Dickey ve Zhang (2010) DHF testini mevsimsel periyodun daha uzun olduğu, örneğin günde 1440 dakika, yılda 52 hafta, yılda 365 gün vb. olduğu durumlara genişletmiştir. Son olarak, del Barrio Castro ve Rossello (2015) tarafından Franses testinin bir genişletmesi ele alınmıştır.

Bunların yanı sıra, Smith ve Taylor (1999) mevsimsel birim kök hipotezi için regresyon-tabanlı olabilirlik oran ve F testlerini önermiştir. Psaradakis (2000) tarafından mevsimsel otoregresif bir modelde birim köklerin varlığı için bootstrap testleri önerilmiş ve testlerin asimptotik geçerlilikleri belirlenmiştir. Eroğlu vd. (2018) kesirli bütünleşme (fractional integration) operatörünü kullanarak mevsimsel birim kökler için güçlü bir non-parametrik test prosedürü geliştirmiştir.

(Mevsimsel) birim kök testlerini konu alan bazı uygulamalı çalışmalarda kullanılan veri setleri Çizelge 1.1’de özetlenmektedir.

Şimdiye kadar bahsedilen çalışmaların tümünün ortak özelliği zaman alanı yaklaşımına dayanmalarıdır. Şimdi konu ile ilgili frekans alanı yaklaşımına dayanan çalışmalardan bahsedilecektir.

Frekans alanı yaklaşımını ele alan ilk çalışmalar arasında Brandes vd. (1968) gösterilebilir. Brandes vd. (1968) ekonomik zaman serileri analizinde biri otokovaryans aracılığıyla zamana dayalı, diğeri spektral analiz aracılığıyla döngüsel frekanslara dayalı olmak üzere iki tamamlayıcı yaklaşıma dikkat çekmiştir. Daha sonra Espasa ve Sargan (1977) ve Engle (1980)’da spektral regresyon yöntemi dinamik regresyonlu regresyon modellerine uygulanmıştır. Choi ve Phillips (1993) tarafından birim kökün varlığı için spektral regresyon yöntemine dayanan frekans alanı testleri önerilmiştir. Önerilen testlerin gücü Monte Carlo simülasyonları ile incelenmiştir. Simülasyon sonuçları, önerilen testlerin sonlu örneklerde iyi güç ve makul örnek büyüklüğü özelliklerine sahip

Çizelge 1.1 (Mevsimsel) birim kök testlerinde kullanılan veri setleri

Yıl	Yazarlar	Veri seti	Yöntem
1982	Nelson, Plosser	Makroekonomik seriler ¹ (ABD, 1860-1970, yıllık)	Dickey-Fuller testi
1990	Osborn	Makroekonomik seriler ² (İngiltere, 1955-1988 çeyreklik)	OCSB testi, HEGY testi
1991a	Franses	Sanayi üretim endeksi (Hollanda, 1969-1987, aylık) Yeni araç kayıtları (Hollanda, 1978-1988, aylık)	Franses testi
1993	Beaulieu, Miron	Makroekonomik seriler ³ (ABD, 1948-1988, çeyreklik ve aylık)	HEGY testi, Beaulieu ve Miron testi
1997	Alexander, Jorda	Makroekonomik seriler ⁴ (Almanya, Fransa, İngiltere, İtalya, 1975-1993, çeyreklik ve aylık)	HEGY testi, Franses testi, Beaulieu ve Miron testi
1997	Leong	Makroekonomik seriler ⁵ (Avustralya, 1960-1993, çeyreklik)	HEGY testi
1999	Smith, Taylor	Reel sanayi üretimi (Kanada, 1960-1986, aylık)	Regresyon-tabanlı olabilirlik oran testi
2001	Rubia	Elektirik talebi (İspanya, 1998-2000, günlük Arjantin, 1997-2001, günlük Avustralya, 1999-2000, günlük)	Haftalık verilere uyarlanmış HEGY testi
2006	Coşar	Tüketici fiyat endeksi (Türkiye, 1994-2003, aylık)	Beaulieu ve Miron testi, Canova-Hansen testi
2007	Reininger, Fingerlos	Reel GDP (Belçika, 1980-2006, çeyreklik)	DHF testi, HEGY testi
2012	Gürel, Tiryakioğlu	İmalat sanayi serileri ⁶ (Türkiye, 1977-2008, çeyreklik)	HEGY testi
2012	Zimmermann	GDP (Almanya, 1991-2012, çeyreklik)	ADF testi, HEGY testi, (ayrıca Phillips-Perron, DF-GLS ve KPSS testleri)
2015	Demir, Mert	Sanayi üretim endeksi (Türkiye, 1986-2014, aylık)	Beaulieu ve Miron testi
2017	Tiwari vd.	Çeşitli tarım ürünlerine ilişkin fiyat endeksleri (Hindistan, 2000-2013, aylık)	HEGY testi, Beaulieu ve Miron testi

¹GNP, sanayi üretimi, istihdam, işsizlik oranı, tüketici fiyatları, stok fiyatları, dolaşım hızı, tahvil getirisi, ücretler.

²GDP, tüketim, kamu harcamaları, yatırım, stok oluşturma, ticaret dengesi, faktör maliyetleri, reel gelir, istihdam, açık kadrolar, işgücü, verimlilik, stok fiyatları, para stoğu, faiz oranı, döviz kuru

³Çeyreklik seriler: reel GNP, tüketim, sabit yatırım ve hükümet alımları. Aylık seriler: nominal para stoğu, fiyat düzeyi, reel ve nominal faiz oranları, sanayi üretimi, reel perakende satışlar, reel ücretler ve işsizlik oranı.

⁴Çeyreklik seriler: her ülke için ticaret dengesi, reel efektif döviz kuru, GDP. Aylık seriler: her ülke için ticaret dengesi, reel efektif döviz kuru ve sanayi üretimi.

⁵Toplam ihracat, toplam ithalat, nominal GDP, perakende ticaret hacmi, toplam işsiz kişi sayısı, üreticilerin gerçek giyim ve ayakkabı satışları.

⁶Toplam sanayi üretim endeksi, imalat sanayi, madencilik ve taşocakçılığı ve elektrik, gaz ve su.

olduğunu göstermiştir. Robinson (1994) frekans alanı çerçevesinde birim kök testi problemine ilişkin bir skor testi önermiştir. Fan ve Gençay (2010) tarafından stokastik

bir süreçte birim kökün varlığını test etmek için bir dalgacık (spektral) yaklaşımı geliştirilmiştir.

Chambers vd. (2014) tarafından mevsimsel birim kökler için spektral (frekans alanı) regresyon tahmin edicilerine dayanan regresyon tabanlı testler geliştirmiştir. Önerilen frekans alanı regresyon tabanlı testlerin güç özellikleri araştırılmış ve çeyreklik veriler için simülasyon denemeleri yapılarak HEGY testi ile karşılaştırılmıştır.

Zaman serilerinde frekans alanı yaklaşımını ele alan detaylı çalışmalar için, diğerleri arasında, Bloomfield (1976), Fuller (1976), Brockwell ve Davis (1987) ve Wei (1990) tarafından hazırlanan kapsamlı kitaplar referans gösterilebilir. Zaman serilerinde periodogramın kullanımına bakıldığında ise ilk olarak, diğerlerinin yanı sıra, Geweke ve Porter-Hudak (1983) ve Hurvich ve Beltrao (1993) dikkat çekmektedir. Geweke ve Porter-Hudak (1983) uzun hafıza (long memory) zaman serisi modellerinde uzun hafıza parametresinin periodograma dayalı yeni bir tahmincisini önermiştir. Hurvich ve Beltrao (1993) uzun hafıza zaman serilerinin periodogram ordinatının dağılımını incelemiş ve normalize edilmiş periodogram ordinatının asimptotik dağılımının her biri bir serbestlik dereceli iki bağımsız ki-kare rasgele değişkenin eşit olmayan ağırlıklı lineer bir birleşimi olduğunu ortaya koymuştur. Periodogram tabanlı birim kök testine dair çalışmaların ise Akdi (1995) ile başladığı bilinmektedir. Akdi (1995) tarafından $Y_t = \rho Y_{t-1} + e_t, t = 0, 1, 2, 3, \dots$ şeklindeki birinci dereceden otoregresif zaman serisi modeli ele alınmış, ρ 'nun mutlak değerce bir olması durumunda periodogram ordinatının dağılımı çıkarılmış ve periodogram ordinatının exact dağılımının eşit olmayan ağırlıklı, birbirinden bağımsız, bir serbestlik dereceli ki-kare rasgele değişkenlerinin bir birleşimi olduğu ortaya koyulmuştur. Ayrıca yüksek dereceden süreçler ve çok değişkenli zaman serisi modelleri için de incelemelerde bulunulmuştur. Söz konusu çalışma daha sonra Akdi ve Dickey (1998, 1999) tarafından sürdürülmüştür. Bhattacharyya ve Richardson (1996) $Y_t - \mu = \alpha_n(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, 1 \leq t \leq n$ şeklindeki, $\{\alpha_n\}$ dizisinin bire yakınsadığı neredeyse non-durağan birinci dereceden otoregresif modeli ele almış ve $\{e^{c/n}\}$ formundaki yerel Pitman-tipi alternatifler altında Akdi (1995) tarafından önerilen frekans alanındaki birim kök testinin limit dağılımını tanımlamıştır. Öyle ki $\alpha_n = e^{c/n}$ şeklinde yeniden parametrelendirme yapıldığında, bu modele uyan bir zaman serisinin normalize edilmiş periodogram ordinatının limit

dağılımının, katsayılarının c 'ye bağlı olduğu iki bağımsız ki-kare rasgele değişkeninin lineer bir birleşimi olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Bhattacharyya vd. (2000) tarafından $Z_{st} = \alpha Z_{s-1,t} + \beta Z_{s,t-1} - \alpha\beta Z_{s-1,t-1} + \varepsilon_{st}$ şeklindeki birinci dereceden otoregresif modeldeki (mekânsal-spatial model) birim köklerin testi için normalize edilmiş periodogram ordinatının limit dağılımı kullanılmıştır. Yerel Pitman-tipi alternatiflerin $\alpha_n = e^{c/n}$ ve $\beta_n = e^{d/n}$ dizisi için, normalize edilmiş periodogram ordinatının limit dağılımının, katsayılarının c ve d 'ye bağlı olduğu iki bağımsız ki-kare rasgele değişkenlerinin lineer bir birleşimi olduğu gösterilmiştir. Evans ve Dickey (2002) tarafından sıfırdan farklı ortalamalara göre ve hata serisindeki (nuisance) parametrelere göre invaryant olan periodogram tabanlı birim kök testi incelenmiş, trend ve deterministik mevsimsel bileşenler için modifikasyonlar sunulmuştur. Bhattacharyya vd. (2006) tarafından $Y_t = \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ modeline ilişkin $H_0: \alpha = 1$ yokluk hipotezinin $H_A: |\alpha| < 1$ alternatif hipotezine karşı testi için periodogram ordinatı kullanılarak asimptotik bir test tanımlanmıştır. Akdi vd. (2010) tarafından periodogram tabanlı kointegrasyon testinin mal ve hizmet sektörü üzerinde uygulaması ele alınmıştır. Yazarlar periodogram tabanlı testin modelden bağımsız, mevsimsel olarak robust ve ortalama invaryant olduğunu vurgulamışlardır.

Bu çalışmada ise ilk olarak Akdi (1995) tarafından tanıtılan ve daha sonra Akdi ve Dickey (1998) tarafından geliştirilen periodogram tabanlı birim kök testi prosedürünün $SAR_4(1)$ mevsimsel zaman serisi modeli için kullanımı ele alınmıştır.

Çalışmanın ilerleyen bölümleri şu şekilde düzenlenmiştir: *Temel Kavramlar* başlıklı ikinci bölümde zaman serileri analizine ilişkin temel kavramlar ve temel zaman serisi modelleri hem zaman alanı hem frekans alanı kapsamında detaylıca incelenmiştir. Bu kapsamda *Zaman Serisi ve Durağanlık*, *Zaman Alanı Yaklaşımı ve Periyodiklik*, *Frekans Alanında Durağan Süreçlerin İncelenmesi*, *Durağan Süreçler*, *Durağan Olmayan Süreçler* ve *Mevsimsel Süreçler* başlıkları ele alınmıştır. *Mevsimsel Birim Kök Testleri* başlıklı üçüncü bölümde literatürde yaygın olarak kullanılan mevsimsel birim kök testleri incelenmiştir. Bu kapsamda *Simetrik En Küçük Kareler (DHF) Yöntemi*, *HEGY Yöntemi* ve *Franses Yöntemi* başlıkları altında söz konusu testler tanıtılmıştır. Dördüncü bölüm *Periodogram Tabanlı Mevsimsel Birim Kök Testleri*'ni içermektedir. Bu bölümde *Periodogram Ordinatının Dağılımı*, *Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi*

ve *Mevsimsel Zaman Serileri için Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi* başlıkları altında Akdi (1995)'te ele alınan periodogram ordinatının dağılımı ile Akdi (1995) ve Akdi ve Dickey (1998)'de önerilen periodogram tabanlı birim kök testinin teorik yapısı sunulmuş ve daha sonra bu testin $s = 4$ mevsimsel periyotlu birinci dereceden mevsimsel otoregresif zaman serisi modeline uyarlaması ele alınmıştır. *Simülasyon ve Uygulama Çalışmaları* başlıklı beşinci bölümde *Kritik Değerlerin Üretilmesi*, *Teorik Güç için Elde Edilen Hesaplamalar* ve *Uygulama* isimli alt başlıklar altında periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testine yönelik yapılan simülasyon ve uygulama çalışmaları sunulmuştur. Altıncı ve son bölüm olan *Tartışma ve Sonuç* bölümünde ise uygulamada elde edilen sonuçlar değerlendirilmiş ve gelecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde zaman serisi analizine yönelik iki farklı bakış sunan zaman alanı ve frekans alanı yaklaşımı arasındaki ayrımın belirginleştirilmesi adına bu iki yaklaşıma ilişkin temel altyapının sunulması amaçlanmıştır. Öncelikle *zaman serisi* kavramına ve zaman serisi analizinde önemli bir yeri olan *durağanlık* kavramına değinilmiştir. Ardından zaman alanı kapsamında önemli bir araç olan *otokorelasyon fonksiyonu* tanıtılmış, en temel zaman serisi olarak bilinen *beyaz gürültü serisinin* özelliklerine yer verilmiş ve bir *zaman serisinin periyodik gösteriminin* sunulmasıyla frekans alanı incelemesine geçiş yapılmıştır. Daha sonra zaman serisinin özellikleri frekans alanı kapsamında incelenmiş ve frekans alanında önemli bir araç olan *spektrum* ve *periodogram* kavramları tanıtılmıştır. Sonrasında *genel lineer süreçler* ve *otoregresif, hareketli ortalama* ve *karma otoregresif hareketli ortalama süreçleri* olarak ifade edilen klasik zaman serisi modelleri ele alınmış ve tüm bu modellerin zaman alanı ve frekans alanı karakteristikleri incelenmiştir. Son olarak ise klasik zaman serisi modellerinin daha genel formları olan *durağan olmayan süreçler* ve *mevsimsel süreçler* iki ayrı başlık altında detaylıca ele alınmıştır.

2.1 Zaman Serisi ve Durağanlık

Tanım 2.1 Stokastik süreç. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve T bir indis kümesi olmak üzere $X(t, \omega)$ (basitçe $X_t(\omega)$ veya X_t) ile gösterilen reel değerli bir *stokastik süreç*, $T \times \Omega$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur. Burada t indis kümesinin, ω ise örnek uzayın bir elemanıdır. Her sabit t için $X(t, \omega)$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üzerinde tanımlı bir rasgele değişkendir. Sabit bir ω için ise $X(t, \omega)$, t 'nin reel değerli bir fonksiyonu olup bu fonksiyon *realizasyon (realization)* veya *örnek fonksiyonu* olarak adlandırılır. Tüm mümkün realizasyonların kümesi stokastik süreçlerde *realizasyonlar topluluğu (ensemble of realizations)* olarak bilinir (Fuller 1996).

Tanım 2.2 Zaman serisi. Bir zaman serisi belirli bir stokastik süreçten elde edilen bir realizasyon veya örnek fonksiyonudur. Başka bir deyişle bir zaman serisi stokastik sürecin bir realizasyonu olarak dikkate alınır (Wei 2006). Stokastik süreç tanımında verilen T indis kümesi sayılamayan kümeler olarak seçildiğinde $\{X_t: t \in T\}$ serisine *sürekli zamanlı stokastik süreç* denir. T indis kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi veya $\mathbb{Z}$

tamsayılar kümesi gibi kesikli (sayılabilir) kümeler olarak alındığında ise $\{X_t: t \in T\}$ rasgele değişkenlerinin koleksiyonuna *zaman serisi* adı verilir. Uygulamada zaman serisi denildiğinde T indis kümesinin doğal sayılar kümesi olduğu kabul edilir (Akdi 2012).

Örnek 2.1 (Rasgele faz ve genliğe sahip sinüzoid). $A \geq 0$ ve $\Theta \in [0, 2\pi)$ üzerinde düzgün dağılımlı olmak üzere, A ve Θ bağımsız rasgele değişkenler olsun. Bu durumda $\{X_t: t \in \mathbb{R}\}$ stokastik süreci, verilen herhangi bir $v \geq 0$ ve $r > 0$ için A ve Θ açısından,

$$X_t = r^{-1}A \cos(vt + \Theta)$$

olarak veya daha açık bir biçimde,

$$X_t(\omega) = r^{-1}A(\omega) \cos(vt + \Theta(\omega)) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada ω , A ve Θ 'nın tanımlı olduğu Ω olasılık uzayının bir elemanıdır. (2.1) ile verilen sürecin realizasyonları, ω 'nın sabitlenmesiyle elde edilen t 'nin fonksiyonlarıdır. Yani,

$$x_t = r^{-1}a \cos(vt + \theta)$$

formundaki fonksiyonlardır. Bu formdan elde edilecek her bir realizasyon bir zaman serisidir (Brockwell ve Davis 1987).

Zaman serisi analizindeki en önemli kavramlardan biri *durağanlıktır*. Birçok istatistiki sonuç çıkarım için serilerin durağan olması gerekir. İncelenen zaman serisinin ortalaması ve varyansı simetrik bir değişim gösteriyorsa veya seri periyodik dalgalanmalardan arınmış ise bu durum serinin durağan olduğunu ifade eder. Durağanlık, güçlü durağanlık ve zayıf durağanlık olmak üzere iki başlık altında incelenmektedir. Uygulamada, güçlü durağanlığın geçerliliğinin sınanmasındaki zorluklardan dolayı, durağanlık denildiğinde zayıf durağanlık ele alınır (Akdi 2012).

Tanım 2.3 Güçlü durağanlık. $\{X_t: t \in T\}$ topluluğundan alınan rasgele değişkenlerin sonlu bir $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ kümesinin *ortak dağılım fonksiyonu*,

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_{t_1}, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_{t_n}\} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. Eğer X_t rasgele değişkeninin tanım aralığındaki bütün $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ 'ler ile T indis kümesindeki $t_1, t_2, \dots, t_n$ ve $t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h$ indislerinin tüm mümkün (boş olmayan, sonlu ve ayrık) kümeleri için,

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = F_{X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$$

eşitliği sağlanıyorsa, zaman serisi *güçlü durağan* (*strictly stationary*) olarak adlandırılır. Burada $t_1, t_2, \dots, t_n$ indisleri ardışık olmak zorunda değildir. Bir zaman serisi güçlü durağan ise rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu indis kümesindeki her noktada aynıdır. Ayrıca ortak dağılım indis kümesindeki elemanların değerlerine değil sadece aralarındaki mesafeye bağlıdır. Elbette bu, belirli bir realizasyonun bir diğer realizasyonla aynı görüneceği anlamına gelmez.

Eğer rasgele değişkenlerin sonlu bir kümesi $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\}$ için (2.2)'de verilen kümülatif dağılım biliniyorsa, zaman serisi olasılıksal anlamda tam olarak tanımlanır. Fakat çoğu uygulamada dağılım fonksiyonunun yapısı bilinmez. Bununla birlikte zaman serisinin sadece ilk iki momenti ele alınarak da büyük bir başarı sağlanabilir. Bu yaklaşım doğrultusunda zayıf durağanlık tanımlanmaktadır.

Tanım 2.4 Zayıf durağanlık. Aşağıdaki iki koşul sağlandığında $\{X_t: t \in T\}$ zaman serisi *zayıf durağan* (*weakly stationary*) ya da kısaca *durağan* olarak tanımlanır:

- i. X_t 'nin beklenen değeri her t için sabittir.
- ii. $\text{Cov}(X_t, X_s)$ sadece $|t - s|$ 'nin bir fonksiyonudur.

Burada yine $t_1, t_2, \dots, t_n$ indisleri ardışık olmak zorunda değildir. Kovaryans matrisi tanım gereği sadece gözlemler arasındaki mesafenin bir fonksiyonudur. Bazen zayıf durağan süreci tanımlamak için *kovaryans durağan* veya gerekli koşullar ilk iki moment üzerinde olduğundan *ikinci dereceden durağan* terimleri de kullanılır.

Güçlü durağanlık ile zayıf durağanlık birbirini gerektirmez. Ancak bazı koşullar altında bu gerektirmeler sağlanır. $\{X_t: t \in T\}$, $E\{|X_t|\} < \infty$ olan güçlü durağan bir zaman serisi ise, X_t 'nin dağılım fonksiyonu her t için aynı olduğundan X_t 'nin beklenen değeri her t için sabittir. Benzer şekilde eğer $E\{X_t^2\} < \infty$ ise, bu durumda serinin X_t ile X_{t+h} arasındaki kovaryansı da zamana bağlı değildir. Dolayısıyla ilk iki momenti sonlu olan güçlü durağan bir zaman serisi aynı zamanda zayıf durağandır. Buna karşın zayıf

durağan bir $\{X_t: t \in T\}$ serisi aynı zamanda bir Gaussian zaman serisi ise yani sürecin ortak dağılımı normal ise $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})'$ ve $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})'$ rasgele vektörleri aynı dağılıma sahip olur. Dolayısıyla zayıf durağan bir Gaussian zaman serisi aynı zamanda güçlü durağandır (Brockwell ve Davis 1987, Fuller 1996).

Zayıf durağanlık, güçlü durağanlığa göre durağanlığın çok daha basitleştirilmiş bir formudur. Bununla birlikte ilk iki momenti kontrol etmek nispeten kolay olduğundan zaman serileri analizinde çoğunlukla zayıf durağan süreçlerle çalışılır (Wei 2006). Bundan böyle durağan terimi ile zayıf durağan süreçler kastedilecektir.

2.2 Zaman Alanı Yaklaşımı ve Periyodiklik

Zaman serileri analizinde ilk olarak serisinin izi (*trace*), diğer bir deyişle gözlemlerin zamana karşı grafiği incelenir. Bunun yanı sıra serideki bir gözlemin, serinin diğer (önceki veya sonraki) değerleri ile sistematik olarak ortak bir değişim gösterip göstermediğini yani otokovaryans yapısını inceleyerek de serideki kalıplar hakkında fikir sahibi olmak mümkündür (Brandes vd. 1968). Bununla birlikte, zaman serilerini incelemek ve temel özelliklerini karşılaştırmak için, ölçü birimlerinden etkilenmeyen bir fonksiyon olan otokorelasyon fonksiyonunu kullanmak daha yararlıdır (Fuller 1996).

2.2.1 Otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları

Tanım 2.5 Otokovaryans fonksiyonu. $\{X_t: t \in T\}$ durağan zaman serisi için serinin beklenen değeri μ olmak üzere,

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]$$

şeklinde tanımlanan $\gamma(h)$ fonksiyonu X_t 'nin *otokovaryans fonksiyonu* olarak adlandırılır. Benzer şekilde,

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t+h}) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(X_{t+h})}} = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}$$

olarak ifade edilen $\rho(h)$ fonksiyonu ise X_t 'nin *otokorelasyon fonksiyonu* (*autocorrelation function, ACF*) olarak adlandırılır.

Durağan bir zaman serisinin otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları birtakım ayırt edici özelliğe sahiptir:

- i. Negatif olmayan tanımlıdır. Öyle ki reel sayıların her $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ kümesi için ve $(t_i - t_j) \in T, \forall(i, j)$ olmak üzere her $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ için,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_k - t_j) \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \rho(t_k - t_j) \geq 0.$$

- ii. h 'nin çift fonksiyonudur. Başka bir deyişle $h = 0$ etrafında simetriktir. Öyle ki

$$\gamma(h) = \gamma(-h), \rho(h) = \rho(-h).$$

- iii. $\gamma(0) = \text{Var}(X_t), \rho(0) = 1$.

- iv. $|\gamma(h)| \leq \gamma(0), |\rho(h)| \leq 1$.

X_t ve X_{t+h} arasındaki otokorelasyona ek olarak, bu iki değişkenin arada kalan $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+h-1}$ değişkenleriyle karşılıklı lineer bağımlılığı giderildikten sonra X_t ve X_{t+h} arasındaki korelasyon da incelenebilir.

$$\phi(h) = \text{Corr}(X_t, X_{t+h} | X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$$

şeklinde ifade edilen koşullu korelasyon, zaman serisi analizinde *kısmi otokorelasyon fonksiyonu* (*partial autocorrelation function, PACF*) olarak adlandırılır. Sıfır ortalama durağan süreçten elde edilen X_{t+h} bağımlı değişkeninin $X_{t+h-1}, X_{t+h-2}, \dots, X_t$ şeklindeki h gecikmeli değişkenler üzerine regresyonunu ifade eden regresyon modeli dikkate alınsın:

$$X_{t+h} = \phi_{h1}X_{t+h-1} + \phi_{h2}X_{t+h-2} + \dots + \phi_{hh}X_t + e_{t+h} \quad (2.3)$$

Burada ϕ_{hi} i -inci regresyon parametresini ve e_{t+h} sıfır ortalamalı ve $j = 1, 2, \dots, h$ için X_{t+h-j} ile ilişkisiz hata terimini gösterir. Yukarıdaki regresyon denkleminin her iki tarafı X_{t+h-j} ile çarpılıp, beklenen değerleri alındığında,

$$\gamma_j = \phi_{h1}\gamma_{j-1} + \phi_{h2}\gamma_{j-2} + \dots + \phi_{hh}\gamma_{j-h}$$

ifadesi ve dolayısıyla

$$\rho_j = \phi_{h1}\rho_{j-1} + \phi_{h2}\rho_{j-2} + \dots + \phi_{hh}\rho_{j-h}$$

ifadesi elde edilir. $j = 1, 2, \dots, h$ için aşağıdaki denklem sistemine ulaşılır:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_{h1}\rho_0 + \phi_{h2}\rho_1 + \dots + \phi_{hh}\rho_{h-1} \\ \rho_2 &= \phi_{h1}\rho_1 + \phi_{h2}\rho_0 + \dots + \phi_{hh}\rho_{h-2} \\ &\vdots \\ \rho_h &= \phi_{h1}\rho_{h-1} + \phi_{h2}\rho_{h-2} + \dots + \phi_{hh}\rho_0\end{aligned}$$

$h = 1, 2, \dots$ için Cramer kuralının art arda uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned}\phi_{11} &= \rho_1 \\ \phi_{22} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \\ \phi_{33} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \\ &\vdots \\ \phi_{hh} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \dots & \rho_1 & \rho_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{h-2} & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{h-3} & \rho_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \dots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}\end{aligned}\tag{2.4}$$

elde edilir. X_t ve X_{t+h} arasındaki kısmi otokorelasyon, (2.3) ile verilen regresyon modelinde X_t ile ilişkili regresyon katsayısı olarak da elde edilebilir. $\phi(0) = 1$ ve $\phi(1) = \rho(1)$ olduğu aşıkardır. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu $h < 0$ için benzer bir şekilde tanımlanır. $\rho(h)$ simetrik olduğundan $\phi(h)$ de simetriktir (Fuller 1996, Wei 2006).

$\rho(h)$ değerlerinin h gecikme değerlerine karşı grafikte gösterimi ile *korelogram* elde edilir. Korelogram, zaman alanı yaklaşımında, durağan bir serinin kullanışlı bir

sunumunu vermektedir (Brandes vd. 1968). Örnek olarak, $\rho(h)$ eğer belirli bir gecikmeden sonra kesilirse, zaman serisinin hareketli ortalama sürecinden oluştuğu sonucuna varılır. Bir otoregresif süreç için ise $\rho(h)$ üstel olarak azalır. Bununla birlikte bazı veri setleri için $\rho(h)$ 'deki azalma yavaştır. Bu, verinin bir birim kök sürecinden oluştuğu izlenimini verir (Akdi 1995). Bütün bu sezgisel yargılar, kullanılacak istatistiksel prosedürler için faydalı bir başlangıç noktası oluşturmaktadır (Brandes vd. 1968).

2.2.2 Beyaz gürültü serisi

Tanım 2.6 Beyaz gürültü serisi. Sıfır ortalamalı ve sonlu σ_e^2 varyanslı ilişkisiz rasgele değişkenlerin dizisine *beyaz gürültü (white noise) serisi* adı verilir. En önemli zaman serilerinden biri olan beyaz gürültü serisi $\{e_t\}$ olarak gösterilir. Tanım gereği beyaz gürültü serisinin

$$\gamma(h) = E[e_t e_{t+h}] = \begin{cases} \sigma_e^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

otokovaryans fonksiyonu,

$$\rho(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

otokorelasyon fonksiyonu ve

$$\phi(h) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

kısmi otokorelasyon fonksiyonu ile durağan olduğu açıktır. Bu serinin en önemli ayırt edici özelliği $h \neq 0$ için serinin hem otokorelasyon hem de kısmi otokorelasyon fonksiyonunun sıfıra eşit olmasıdır. Beyaz gürültü serisi ile uygulamada hemen hemen hiç karşılaşılmasına rağmen, zaman serisi modellerinin oluşumunda temel bir yapı taşı olması sebebiyle, zaman serileri analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Tıpkı Fourier analizinde sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$ oynadığı rol gibi. Daha genel bir ifade ile beyaz gürültü serisi, vektör uzayı ve fonksiyon analizindeki ortogonal baz görevi görmektedir. Beyaz gürültü serisi için $e_t \sim WN(0, \sigma_e^2)$ gösterimi kullanılır. Sonuç olarak bir beyaz gürültü serisi $E(e_t) = 0$, $E(e_t^2) = \sigma_e^2$ ve $t \neq$

s için $E(e_t e_s) = 0$ özelliklerine sahiptir. Eğer e_t 'lerin ortak dağılımı normal ise beyaz gürültü serisi Gaussian'dır (Wei 2006).

2.2.3 Periyodik fonksiyonlar ve periyodik zaman serileri

Tanım 2.7 Periyodik fonksiyon. T bir indis kümesi olmak üzere her $t, t + H \in T$ için $f(t + H) = f(t)$ olacak şekilde bir $H > 0$ varsa, $f(t)$ fonksiyonu H periyotlu *periyodik fonksiyon* olarak tanımlanır.

Periyodik fonksiyonlar zaman serileri analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Öyle ki bazı serilerin otokorelasyon fonksiyonu periyodik formdadır. Örnek olarak, e_1 ve e_2 normal $(0,1)$ kitleden alınan bağımsız rasgele değişkenler olmak üzere, $X_t = e_1 \cos \lambda t + e_2 \sin \lambda t$ şeklinde tanımlanan $\{X_t: t \in (0, \pm 1, \pm 2, \dots)\}$ serisi ele alındığında, serinin otokovaryans fonksiyonunun

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E\{(e_1 \cos \lambda t + e_2 \sin \lambda t)[e_1 \cos \lambda(t + h) + e_2 \sin \lambda(t + h)]\} \\ &= E\{e_1^2 \cos \lambda t \cos \lambda(t + h) + e_2^2 \sin \lambda t \sin \lambda(t + h) \\ &\quad + e_1 e_2 \cos \lambda t \sin \lambda(t + h) + e_2 e_1 \sin \lambda t \cos \lambda(t + h)\} \\ &= \cos \lambda t \cos \lambda(t + h) + \sin \lambda t \sin \lambda(t + h) = \cos \lambda h \end{aligned}$$

şeklinde ve dolayısıyla otokorelasyon fonksiyonunun $\rho(h) = \cos \lambda h$ şeklinde bir periyodik fonksiyon formunda olduğu görülür.

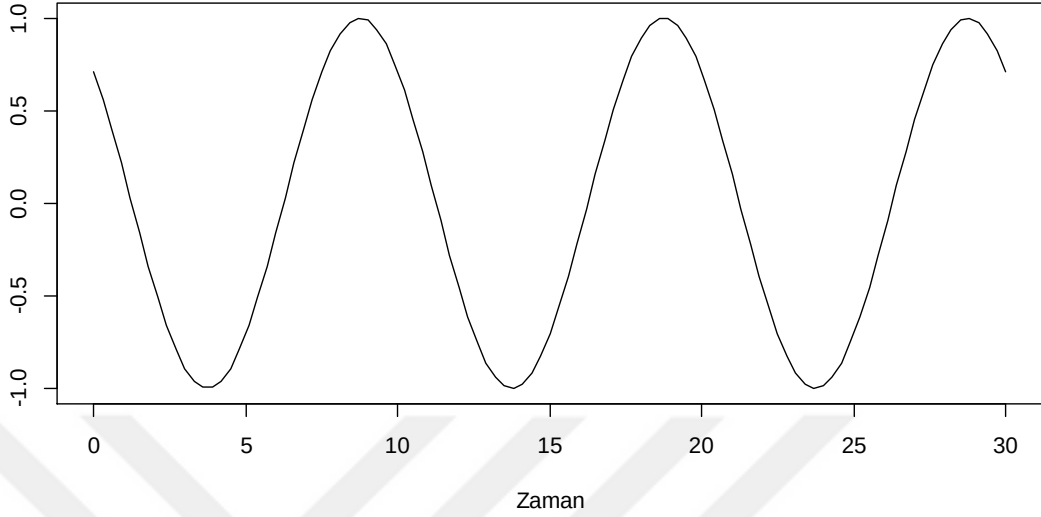
Periyodik fonksiyonlar Fourier serileri olarak bilinen trigonometrik serilerle ifade edilmektedir (Fuller 1996). Fourier serileri, zaman serisindeki dalgalanmaların çeşitli frekanslardaki sinüzoidal davranışlar açısından tanımlanmaya çalışıldığı frekans alanı analizi için esas teşkil etmektedir (Wei 2006).

En basit periyodik fonksiyonlar sinüzoidlerdir. Bir sinüzoidin genel formu aşağıdaki gibidir:

$f(t) = R \cos(2\pi f t + \phi)$	(2.5)
----------------------------------	-------

Örnek olarak $R = 1$, $f = 0.1$ ve $\phi = \pi/4$ değerleri için bu fonksiyonun grafiği Şekil 2.1'de verilmiştir. Burada R , f ve ϕ parametreleri sırasıyla sinüzoidin *genliği*

(amplitude), *frekansı* (frequency) ve *fazı* (phase) olarak adlandırılır. Bu ifadelerin ne anlama geldiğini açıklamak, konunun anlaşılabilirliğine katkıda bulunacaktır.



Şekil 2.1 $R = 1$, $f = 0.1$, $\phi = \pi/4$ olan bir sinüzoid

Genlik, fonksiyonun sıfır düzeyinden tepe noktasına olan ölçüsüdür. Bir sinüzoidin minimum ve maksimum düzeyleri arasındaki fark, genliğin iki katı büyüklüğündedir. Bu açıklamalar dolayısıyla genlik,

$$\max\{f(t)\} = \max\{-f(t)\} = R$$

ve

$$\max\{f(t)\} - \min\{f(t)\} = 2R$$

eşitlikleri ile değerlendirilir.

Sinüzoidin frekansı, birim zaman başına düşen devir (cycle) sayısı ile ölçülür ve sinüzoidal dalganın bir zaman birimi içinde kaç kez tekrarlandığını gösterir. Birimi *devir/zaman*'dır. Genellikle sinüzoidin frekansı yerine frekansın tersi alınarak hesaplanan, sinüzoidin *periyodu* ($1/f$) (verilen örnekte 10) açısından değerlendirme yapmak daha anlaşılırdır.

Faz ise fonksiyonun orijindeki (zaman başlangıcındaki) davranışını gösterir. Genliği ve frekansı bilinen bir sinüzoidin fazı da bilindiğinde, $t = 0$ zamanındaki konumu belirlenmiş olur. Öyle ki

$$f(0) = R \cos(\phi)$$

ve

$$f'(0) = -2\pi f R \sin(\phi)$$

şeklinde dir. Fazı yorumlamanın bir diğ er yolu ise $t_0 = -\phi/2\pi f$ (verilen ö rnekte -1.25) olmak üzere, sinüzoidin

$$f(t) = R \cos\{2\pi f(t - t_0)\}$$

şeklinde yeniden yazılmasıdır. Bu gösterimde fonksiyonun t_0 zamanında bir maksimuma sahip oldu ğ u görölür. Bu durumda faz, bir *zaman kayması (time shift)* olarak da düşünöllebilir.

(2.5) ile verilen fonksiyonun tahmin edilmesinde daha kullanış lı bir parametrelendirme,

$$\cos(2\pi f t + \phi) = \cos(2\pi f t) \cos(\phi) - \sin(2\pi f t) \sin(\phi)$$

şeklindeki trigonometrik özdeşlik kullanılarak elde edilebilir. Bu durumda (2.5) aşığıdaki gibi yazılır:

$$f(t) = A \cos(2\pi f t) + B \sin(2\pi f t) \quad (2.6)$$

(2.5) ve (2.6) gösterimleri arasındaki bağılantı,

$$A = R \cos(\phi), \quad B = -R \sin(\phi)$$

veya alternatif olarak

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan(\phi) = -B/A$$

tanımlamalarıyla ifade edilir. Dolayısıyla A ve B parametreleri bulunduğ unda, asıl modele ilişkin R ve ϕ parametreleri de ters dönüşümler yardımı ile bulunur.

Bu açıklamalardan yola çıkılarak, bir X_t zaman serisinin sinüzoidal davranış açısından aşığıdaki gibi bir model ile modellenenebildiğ i varsayılın:

$$X_t = \mu + R \cos(2\pi f t + \phi) + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

Burada model parametreleri μ , R ve ϕ 'dir. Bununla birlikte yukarıda bahsedildiğ i gibi yeniden parametrelendirme yapıldığında model,

$$Y_t = \mu + A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft) + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durum modelin bir regresyon modeli olarak dikkate alınmasına ve model parametreleri μ , A ve B 'nin en küçük kareler yöntemi ile kolaylıkla tahmin edilebilir hale gelmesine olanak sağlar.

En küçük kareler yöntemi,

$$S(\mu, A, B) = \sum_{t=1}^n e_t^2 = \sum_{t=1}^n (Y_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))^2$$

şeklinde ifade edilen hata kareler toplamının minimizasyonuna dayanır. Bu ifadenin μ , A ve B parametrelerine göre türevleri

$$\frac{\partial S}{\partial \mu} = -2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))$$

$$\frac{\partial S}{\partial A} = -2 \sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) (Y_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = -2 \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) (Y_t - \mu - A \cos(2\pi ft) - B \sin(2\pi ft))$$

olup, bu türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile,

$$n\mu + A \sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) + B \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) = \sum_{t=1}^n Y_t$$

$$\mu \sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) + A \sum_{t=1}^n \cos^2(2\pi ft) + B \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) = \sum_{t=1}^n Y_t \cos(2\pi ft)$$

$$\mu \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) + A \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) + B \sum_{t=1}^n \sin^2(2\pi ft) = \sum_{t=1}^n Y_t \sin(2\pi ft)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemi matris gösterimi ile,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) & \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) \\ \sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) & \sum_{t=1}^n \cos^2(2\pi ft) & \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) \\ \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) & \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) \cos(2\pi ft) & \sum_{t=1}^n \sin^2(2\pi ft) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ A \\ B \end{bmatrix} \underset{\sim}{x} \\
& \underset{A}{=} \\
& \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_t \cos(2\pi ft) \\ \sum_{t=1}^n Y_t \sin(2\pi ft) \end{bmatrix} \underset{\sim}{b}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir. $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ denklem sisteminin çözümünden, $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{b}$ bulunur. Bu sistemin çözülmesi öncelikle $\underset{\sim}{A}$ katsayılar matrisinde yer alan trigonometrik toplamların hesaplanmasını gerektirir. Bu toplamların doğrudan hesaplanması yerine Euler formülü kullanılarak hesaplanması çok daha kolaydır. Bunun için,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

olarak ifade edilen Euler formülü ve

$$\sum_{t=0}^{n-1} e^{2\pi i f t} = \frac{e^{2\pi i f n} - 1}{e^{2\pi i f} - 1}$$

özdeşliği dikkate alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^n \cos(2\pi ft) + i \sum_{t=1}^n \sin(2\pi ft) &= \sum_{t=1}^n e^{i2\pi ft} = \frac{e^{i2\pi f(n+1)} - e^{i2\pi f}}{e^{i2\pi f} - 1} \\
&= \frac{e^{i2\pi f(n+1)} - e^{i2\pi f}}{e^{i\pi f}(e^{i\pi f} - e^{-i\pi f})} = \frac{e^{-i\pi f}(e^{i2\pi f(n+1)} - e^{i2\pi f})}{e^{i\pi f} - e^{-i\pi f}} \\
&= \frac{e^{-i\pi f}(e^{i2\pi f(n+1)} - e^{i2\pi f})}{2i \sin(\pi f)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-i\pi f} (e^{i2\pi f n/2} e^{i2\pi f n/2} e^{i2\pi f} - e^{i2\pi f} e^{i2\pi f n/2} e^{-i2\pi f n/2})}{2i \sin(\pi f)} \\
&= \frac{e^{-i\pi f} [e^{i2\pi f((n/2)+1)} (e^{i2\pi f n/2} - e^{-i2\pi f n/2})]}{2i \sin(\pi f)} \\
&= \frac{e^{-i\pi f} e^{i2\pi f((n/2)+1)} (e^{i\pi f n} - e^{-i\pi f n})}{2i \sin(\pi f)} = \frac{e^{i2\pi f(n+1)/2} 2i \sin(\pi f n)}{2i \sin(\pi f)} \\
&= e^{i2\pi f(n+1)/2} \frac{\sin(\pi f n)}{\sin(\pi f)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{t} = (n+1)/2$ ve $D_n(f) = \sin(\pi f n)/\sin(\pi f)$ tanımlamaları yapılırsa,

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi f t) + i \sum_{t=1}^n \sin(2\pi f t) = e^{i2\pi f \bar{t}} D_n(f)$$

yazılır. Ayrıca

$$e^{i2\pi f \bar{t}} = \cos(2\pi f \bar{t}) + i \sin(2\pi f \bar{t})$$

eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi f t) + i \sum_{t=1}^n \sin(2\pi f t) = (\cos(2\pi f \bar{t}) + i \sin(2\pi f \bar{t})) D_n(f)$$

yazılır. Sonuç olarak kompleks sayıların eşitliğinden,

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi f t) = \cos(2\pi f \bar{t}) D_n(f)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin(2\pi f t) = \sin(2\pi f \bar{t}) D_n(f)$$

elde edilir. Bunun yanı sıra,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

özdeşlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n \cos^2(2\pi f t) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (1 + \cos(4\pi f t)) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos(4\pi f t) \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f \bar{t}) D_n(2f),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^n \sin^2(2\pi f t) &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (1 - \cos(4\pi f t)) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \cos(4\pi f t) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f \bar{t}) D_n(2f)\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{t=1}^n \sin(2\pi f t) \cos(2\pi f t) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \sin(4\pi f t) = \frac{1}{2} \sin(4\pi f \bar{t}) D_n(2f)$$

elde edilir. Bu durumda (2.8)'de verilen $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi,

$$\begin{bmatrix} n & \cos(2\pi f \bar{t}) D_n(f) & \sin(2\pi f \bar{t}) D_n(f) \\ \cos(2\pi f \bar{t}) D_n(f) & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f \bar{t}) D_n(2f) & \frac{1}{2} \sin(4\pi f \bar{t}) D_n(2f) \\ \sin(2\pi f \bar{t}) D_n(f) & \frac{1}{2} \sin(4\pi f \bar{t}) D_n(2f) & \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f \bar{t}) D_n(2f) \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Sinüzoidal fonksiyonların ortogonalliği sağlatılarak bu matris daha basit hale indirgenebilir. j ve k birer tamsayı olmak üzere, kompleks sinüzoidler yardımıyla reel sinüzoidler için aşağıdaki özdeşlikler kolaylıkla elde edilebilir (bkz. Bölüm 2.3.1):

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi j t/n) = \begin{cases} n, & j \equiv 0 \pmod{n} \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^n \sin(2\pi j t/n) = 0, \quad \text{her } j \text{ için}$$

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi j t/n) \cos(2\pi k t/n) = \begin{cases} n, & j \equiv k \equiv 0 \pmod{n} \\ n/2, & j \equiv k, \quad \text{her ikisi de sıfır değil} \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^n \sin(2\pi j t/n) \sin(2\pi k t/n) = \begin{cases} 0, & j \equiv k \equiv 0 \pmod{n} \\ n/2, & j \equiv k, \quad \text{her ikisi de sıfır değil} \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^n \cos(2\pi jt/n) \sin(2\pi kt/n) = 0, \quad \text{her } j \text{ ve } k \text{ için}$$

Bu formüller sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının, belirli bir k tamsayısı için k/n formunda frekanslara sahip olmaları halinde, birbirlerine ortogonal olduklarını göstermektedir. O halde k bir tamsayı olmak üzere $f = k/n$ olarak alındığında A katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n/2 & 0 \\ 0 & 0 & n/2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir köşegen matris formuna dönüşür. Buradan,

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 \\ 0 & 2/n & 0 \\ 0 & 0 & 2/n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \sum_{t=1}^n Y_t \cos(2\pi kt/n) \\ \sum_{t=1}^n Y_t \sin(2\pi kt/n) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{A} \\ \hat{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \cos(2\pi kt/n) \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \sin(2\pi kt/n) \end{bmatrix}$$

elde edilir. Daha genel bir ifadeyle, $\omega_k = 2\pi k/n$ olarak tanımlandığında, Model (2.7)'de yer alan parametrelerin en küçük kareler tahmincileri,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t = \bar{Y}_n$$

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y}_n) \cos(\omega_k t)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y}_n) \sin(\omega_k t)$$

olarak ifade edilir. $\sum_{t=1}^n \cos(\omega_k t) = \sum_{t=1}^n \sin(\omega_k t) = 0$ olduğundan, a_k ve b_k katsayıları,

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \cos(\omega_k t)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \sin(\omega_k t)$$

şeklinde de yazılabilir. Buna göre, Bölüm 2.3.2’de belirtildiği üzere Fourier katsayıları olarak bilinen, a_k ve b_k katsayıları ortalamaya göre değişmezdir (invariant) (Bloomfield 2000).

2.3 Frekans Alanında Durağan Süreçlerin İncelenmesi

Bir zaman serisindeki değişimi incelemek için otokorelasyon fonksiyonunu kullanan zaman alanı analizine alternatif bir yaklaşım, zaman serisindeki dalgalanmayı çeşitli frekanslardaki sinüzoidal davranış açısından tanımlamaya çalışan frekans alanı analizidir. Frekans alanı analizinde durağan süreçler, bu süreçlerin spektral gösterimleri aracılığıyla analiz edilir. Bir $\{X_t: t = 0, \pm 1, \dots\}$ durağan sürecin spektral gösterimi, esasen $\{X_t\}$ ’yi ilişkisiz rasgele katsayılara sahip sinüzoidal bileşenlerin bir toplamına ayırıştırır. Durağan süreçler için bahsedilen bu spektral ayrıştırmada Fourier gösterimi kullanılır. Bu yaklaşım zaman alanı yaklaşımına eşdeğerdir. Zaman alanı yaklaşımı zaman serileri analizinde yeterli bir araç olmasına rağmen, frekans alanı yaklaşımı süreci incelemenin alternatif bir yolunu sunar ve bu bazı uygulamalar için daha açıklayıcı olabilir. Karmaşık süreçlerle oluşturulan bir veri kümesini Taylor serileri ya da Fourier serileri gibi daha basit fonksiyonlarla tahmin etmek genellikle daha yararlıdır. Bu tür tahminler kullanılan fonksiyonların incelenen olaylarla ilişkili olması durumunda özellikle yararlı olmaktadır. Örneğin zaman serilerinde tekrarlanan kalıplar söz konusuysa serileri sinüs ve kosinüslerin bir kombinasyonu olarak düşünmek bu yapıya doğal bir matematiksel yaklaşım sunacaktır (Brandes vd. 1968, Brockwell ve Davis 1987, Wei 2006).

Bu tez çalışmasının konusuna uygun teknik zeminin oluşturulması amacıyla bu bölümde, frekans alanı yaklaşımı için temel olan Fourier analizine ilişkin bazı temel kavramlar ele alınmıştır. Bu kapsamda öncelikle ortogonal fonksiyonlar sistemi ele alınmış, daha sonra birtakım dizilerin Fourier gösterimine yer verilmiş ve ardından Fourier dönüşümü incelenmiştir. Sonrasında frekans alanı analizinde önemli bir yeri olan spektrum kavramı tanıtılmıştır. Son olarak tez çalışması kapsamında ele alınan mevsimsel birim kök testi için önemli bir yere sahip olan periodogram kavramı incelenmiştir.

2.3.1 Ortogonal fonksiyonlar sistemi

Uygulamalı matematiğin birçok alanında, ele alınan herhangi bir fonksiyona elementer fonksiyonların lineer bir birleşimi ile yaklaşımda bulunmak pratiklik sağlamaktadır. Bu yaklaşımı gerçekleştirmek için *temel (basis)* adı verilen elementer fonksiyonların bir kümesinin oluşturulması uygun olabilir. Böylelikle diğer tüm fonksiyonlar temeldeki elemanların lineer bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Temeldeki elemanlar genellikle ortogonal olacak şekilde oluşturulur. Zaman serisi analizinde üzerinde durulacak elementer fonksiyonlar sinüs-kosinüs fonksiyonlarını ve kompleks üstelleri içerir (Fuller 1996, Wei 2006). Bu sebeple bu bölümde sinüs-kosinüs fonksiyonlarının ve kompleks üstellerin ortogonalite özelliği incelenmiştir. İlerleyen alt başlıklarda ele alınacak Fourier gösterimlerinin çıkarımı bu özelliğe dayanmaktadır.

Tanım 2.8 Ortogonal sistem. Bir $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların bir dizisi $\{\phi_n(x)\}$ olsun. $x \in [a, b]$ için $q(x) \geq 0$ olan bir fonksiyon olmak üzere, eğer

$$\int_a^b q(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

eşitliği sağlanıyor ise $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisine $[a, b]$ aralığında $q(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre *ortogonal (dik) bir sistem* teşkil ediyor denir. Eğer bu integralde $m = n$ alınırsa

$$\|\phi_n\| = \left[\int_a^b q(x)\phi_n^2(x)dx \right]^{1/2}$$

ifadesine $\{\phi_n\}$ *ortogonal sisteminin normu* denir (Altın 2011).

Bu tez çalışmasının konusu gereği burada dizi (sequence) olarak da adlandırılan kesikli-zamanlı (discrete-time) fonksiyonlara odaklanılmıştır. Ayrıca ortogonal fonksiyonların birçok çeşidi olmakla birlikte bu bölümde zaman serisi analizinde faydalı olan iki eşdeğer ortogonal fonksiyonlar sistemi tanıtılmıştır.

$\sin(2\pi kt/n)$ ve $\cos(2\pi kt/n)$ şeklindeki trigonometrik sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının sonlu sayıda n noktası üzerinde yani $t = 1, 2, \dots, n$ için tanımlı olduğu varsayalım. $[x]$, x 'e eşit veya daha küçük en büyük tamsayı olmak üzere $k = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$ için,

$$\left\{ \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right), \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) : k = 0, 1, 2, \dots, [n/2] \right\} \quad (2.9)$$

sistemi hiçbirisi sıfıra eşit olmayan tam olarak n tane fonksiyon içerecektir. Bu, $k = 0$ için ve n 'nin çift olması durumunda $k = [n/2]$ için sinüs fonksiyonunun sıfır olmasından kaynaklanır. Şimdi, $t = 1, 2, \dots, n$ tamsayılarında tanımlı bu fonksiyonlar sisteminin ortogonal olduğu gösterilecektir. Bunun için,

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$$

şeklindeki Euler ilişkisi ve

$$\sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \quad (2.10)$$

$$\cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \quad (2.11)$$

özdeşlikleri kullanılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n e^{i\omega t} &= e^{i\omega} \left(\frac{1 - e^{i\omega n}}{1 - e^{i\omega}} \right) = e^{i\omega} \left(\frac{e^{i\omega n} - 1}{e^{i\omega} - 1} \right) = e^{i\omega} \left[\frac{e^{i\omega n/2} (e^{i\omega n/2} - e^{-i\omega n/2}) / 2i}{e^{i\omega/2} (e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) / 2i} \right] \\ &= e^{i\omega(n+1)/2} \frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} \\ &= \cos\left(\frac{\omega(n+1)}{2}\right) \frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} + i \sin\left(\frac{\omega(n+1)}{2}\right) \frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bununla birlikte,

$$\sum_{t=1}^n e^{i\omega t} = \sum_{t=1}^n \cos \omega t + i \sum_{t=1}^n \sin \omega t$$

olduğundan,

$$\sum_{t=1}^n \cos \omega t = \cos \left(\frac{\omega(n+1)}{2} \right) \frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (2.12)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin \omega t = \sin \left(\frac{\omega(n+1)}{2} \right) \frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} \quad (2.13)$$

elde edilir. $\omega = 2\pi k/n$ olarak alındığında,

$$\frac{\sin(\omega n/2)}{\sin(\omega/2)} = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/n)} = \begin{cases} n, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

olduğundan ve $\omega = 0$ için $\cos \omega = 1$, $\sin \omega = 0$ olduğundan (2.12) ve (2.13),

$$\sum_{t=1}^n \cos \left(\frac{2\pi kt}{n} \right) = \begin{cases} n, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin \left(\frac{2\pi kt}{n} \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [n/2] \quad (2.15)$$

olur. Daha sonra,

$$\cos \omega \cos \lambda = \frac{1}{2} \{ \cos(\omega + \lambda) + \cos(\omega - \lambda) \}$$

$$\sin \omega \sin \lambda = \frac{1}{2} \{ \cos(\omega - \lambda) - \cos(\omega + \lambda) \}$$

$$\sin \omega \cos \lambda = \frac{1}{2} \{ \sin(\omega + \lambda) + \sin(\omega - \lambda) \}$$

trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak (2.14) ve (2.15)'ten,

$$\sum_{t=1}^n \cos\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = \begin{cases} n, & k = j = 0 \text{ veya } n/2 \text{ (} n \text{ çift)} \\ n/2, & k = j \neq 0 \text{ veya } n/2 \text{ (} n \text{ çift)} \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = \begin{cases} 0, & k = j = 0 \text{ veya } n/2 \text{ (} n \text{ çift)} \\ n/2, & k = j \neq 0 \text{ veya } n/2 \text{ (} n \text{ çift)} \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{t=1}^n \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = 0, \text{ her } k \text{ ve } j \text{ için}$$

elde edilir. Bu sonuç, (2.9) sisteminin ortogonal fonksiyonların bir kümesi olduğunu gösterir.

(2.10) ve (2.11)'den, (2.9)'daki trigonometrik fonksiyonlar sisteminin kompleks formda da gösterilebileceği açıktır. Bu form çok daha basittir ve belirli uygulamalarda oldukça faydalıdır. Bu gösterim açısından, karşılık gelen sistem aşağıdaki kompleks üstelleri içerir:

$$\left\{ e^{i2\pi kt/n} : n \text{ çift ise } -\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \text{ ve } n \text{ tek ise } -\frac{(n-1)}{2} \leq k \leq \frac{(n-1)}{2} \right\} \quad (2.17)$$

Bu sistem yine tam olarak n fonksiyondan oluşur. Bu kompleks üstellerin ortogonalliğini göstermek için,

$$\sum_{t=1}^n e^{i2\pi kt/n} = \begin{cases} n, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

eşitliği dikkate alınır. Burada,

$$\sum_{t=1}^n e^{i2\pi kt/n} = e^{i2\pi k/n} \left[\frac{1 - (e^{i2\pi k/n})^n}{1 - e^{i2\pi k/n}} \right]$$

ve $(e^{i2\pi k/n})^n = e^{i2\pi k} = 1$ eşitlikleri kullanılır. (2.18) uygulandığında doğrudan doğruya aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\sum_{t=1}^n e^{i2\pi kt/n} e^{-i2\pi jt/n} = \begin{cases} n, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Bu ise, (2.17)'de verilen kompleks üsteller sisteminin de ortogonal olduğunu gösterir (Wei 2006).

2.3.2 Sonlu dizilerin ve periyodik dizilerin Fourier gösterimi

(2.9) ile verilen n tane sinüs-kosinüs fonksiyonlarının ve alternatif olarak (2.17) ile verilen n tane kompleks üstellerin birer ortogonal temel oluşturdukları gösterildikten sonra, şimdi sonlu sayıda (n tane) terim içeren bir dizinin bu ortogonal temellerdeki fonksiyonların lineer bir birleşimi olarak ifade edilebileceği hususuna değinilecektir.

n sayıda eleman içeren bir $\{X_t\}$ dizisi (veya kesikli zaman serisi) ortogonal sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının lineer bir birleşimi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.19)$$

Burada $\omega_k = 2\pi k/n, k = 0, 1, 2, \dots, [n/2]$ ve

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t, & k = 0 \text{ ve } k = n/2, n \text{ çiftse} \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t, & k = 1, 2, \dots, [(n-1)/2] \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t, \quad k = 1, 2, \dots, [(n-1)/2]$$

şeklinde. (2.19) ile verilen eşitlik X_t 'nin *Fourier serisi* olarak, a_k ve b_k katsayıları ise *Fourier katsayıları* olarak adlandırılır (Fuller 1996, Wei 2006). Çoğu kez tartışmayı basitleştirmek için n tek olarak sınırlandırılır. Özel olarak n 'nin tek olması durumu için,

$$X_t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.20)$$

yazılır. Burada,

$$a_k = \frac{2 \sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)/2$$

$$b_k = \frac{2 \sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, (n-1)/2$$

şeklindedir. (2.20) eşitliğine bakıldığında, burada $a_0/2$ olarak verilen öncü terimin (leading term) yer aldığı görülür. Bu terim verilmediğinde (2.19) eşitliği kullanılır (Fuller 1996).

(2.17)'de verilen kompleks üsteller sistemi kullanılarak X_t 'nin Fourier serisi,

$$X_t = \begin{cases} \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{i\omega_k t}, & n \text{ tekse} \\ \sum_{k=-(n/2)+1}^{n/2} c_k e^{i\omega_k t}, & n \text{ çiftse} \end{cases} \quad (2.21)$$

olarak da yazılabilir. Burada c_k Fourier katsayıları,

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega_k t}$$

olarak verilir. (2.19) ve (2.21) denklemleri X_t 'nin iki eşdeğer gösterimi olduğundan, (2.10) ve (2.11) trigonometrik özdeşlikleri kullanılarak a_k , b_k ve c_k Fourier katsayılarının,

$$\begin{cases} c_0 = a_0; \quad c_{n/2} = a_{n/2} \text{ (çift } n), \\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} = c_k^* = \frac{a_k + ib_k}{2} \end{cases} \quad (2.22)$$

şeklinde ilişkili olduğu kolaylıkla görülür.

Yukarıda verilenler herhangi bir sonlu dizinin (zaman serisinin) sinüs-kosinüs fonksiyonlarının veya kompleks üstellerin lineer bir kombinasyonu olarak yazılabildiğini gösterir.

n pozitif bir tamsayı olmak üzere X_t dizisinin (veya kesikli zaman serisinin) n periyotlu periyodik olduğu varsayalım. Yani her t tamsayısı için,

$$X_{t+n} = X_t$$

olsun. Periyodik bir fonksiyonun temel özelliği, fonksiyonun bir periyot aralığındaki yapısıyla tam olarak (uniquely) tanımlanmasıdır. Fonksiyonun o aralık dışındaki yapısı sadece o aralıktaki yapısının bir tekrarından ibarettir. Dolayısıyla n periyotlu periyodik bir dizi $t = 1, 2, \dots, n$ 'deki değerleriyle tam olarak (uniquely) tanımlanır.

Yukarıda gösterilen sonlu bir dizinin Fourier serisi sonuçlarından, $t = 1, 2, \dots, n$ için X_t periyodik dizisi ortogonal sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının lineer bir birleşimi olarak (2.19)'daki gibi yazılabilir. Benzer şekilde $t = 1, 2, \dots, n$ için X_t dizisi kompleks üstellerin lineer bir birleşimi olarak (2.21)'deki gibi yazılabilir. a_k , b_k ve c_k Fourier katsayıları yine (2.22)'deki gibi ilişkilendirilir. (2.19)'daki $\sin \omega_k t$ ve $\cos \omega_k t$ sinüs-kosinüs fonksiyonları ve (2.21)'deki $e^{i\omega_k t}$ kompleks üsteller n periyotlu periyodiktir. Bu ise, her t ve j tamsayıları için,

$$X_{t+jn} = X_t$$

şeklindeki sonuca götürür. Diğer bir deyişle (2.19) ve (2.21) eşitlikleri her t tamsayısı için geçerlidir.

Böylece n periyotlu keyfi bir periyodik dizinin n sayıda trigonometrik dizinin veya n sayıda kompleks üstelin lineer bir birleşimi olarak nasıl gösterildiği açıklanmış olur. (2.19) ve (2.21)'deki Fourier serisi gösterimini sağlayan n 'nin en küçük pozitif değeri *esas (temel-fundamental) periyot* olarak ve karşılık gelen $2\pi/n$ değeri ise *esas (temel-fundamental) frekans* olarak adlandırılır. Bu gösterimlerin her ikisinde de $k = +1$ ve $k = -1$ için terimler n 'ye eşit olan aynı esas (temel) periyoda (ve dolayısıyla aynı $2\pi/n$ esas (temel) frekansa) sahiptir ve *birinci harmonik bileşenler* olarak adlandırılır. Daha genel bir ifadeyle, her iki gösterimde de $k = +j$ ve $k = -j$ için terimler $j(2\pi/n)$ frekansa sahiptir ve bunlar *j-inci harmonik bileşenler* olarak adlandırılır. Bu yüzden Fourier serisi gösterimindeki tüm terimler aynı esas (temel) frekans $2\pi/n$ 'nin katları olan frekanslara sahiptir ve dolayısıyla harmoniksel olarak ilişkilidir (Wei 2006).

2.3.3 Periyodik olmayan dizilerin Fourier gösterimi: Kesikli-zamanlı Fourier dönüşümü

X_t , $|t| > M$ için $X_t = 0$ olan sonlu süreli genel bir periyodik olmayan dizi veya kesikli-zamanlı bir fonksiyon olsun. $n = (2M + 1)$ olmak üzere,

$$Y_{t+jn} = X_t, \quad -\frac{n-1}{2} \leq t \leq \frac{n-1}{2}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.23)$$

şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlansın. Bu fonksiyonun n periyotlu periyodik olduğu açıktır. Bu yüzden (2.21) kullanılarak (2.23),

$$Y_t = \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} c_k e^{i2\pi kt/n} \quad (2.24)$$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} Y_t e^{-i2\pi kt/n}$$

şeklinde bir Fourier serisi ile ifade edilebilir. Bununla birlikte, $-(n-1)/2 \leq t \leq (n-1)/2$ aralığında $Y_t = X_t$ 'dir. Buna bağlı olarak,

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} X_t e^{-i2\pi kt/n} = \frac{1}{n} \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t e^{-i2\pi kt/n}$$

olur. Burada $t < -(n-1)/2$ veya $t > (n-1)/2$ için $X_t = 0$ olduğu bilgisi kullanılır. Şimdi,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t e^{-i\omega t}$$

olsun. Bu durumda,

$$c_k = \frac{2\pi}{n} f(k\Delta\omega) \quad (2.25)$$

olarak elde edilir. Burada $\Delta\omega = 2\pi/n$, frekansların örneklem aralığıdır (sample spacing). (2.24) ve (2.25) birleştirilerek,

$$Y_t = \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \frac{2\pi}{n} f(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t} \quad (2.26)$$

elde edilir. $\Delta\omega = 2\pi/n$ olduğundan (2.26),

$$Y_t = \sum_{k=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} f(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir. (2.27) toplamındaki her terim $f(k\Delta\omega)e^{ik\Delta\omega t}$ yükseklik ve $\Delta\omega$ genişlikli bir dikdörtgenin alanını gösterir. $n \rightarrow \infty$ olduğunda, $Y_t \rightarrow X_t$ ve $\Delta\omega \rightarrow 0$ olur. Bu yüzden toplamın limiti bir integral olur. Ayrıca toplam, $\Delta\omega = 2\pi/n$ genişliğinin n ardışık değeri üzerinden alındığından, integrasyon aralığı daima 2π genişliğine sahip olacaktır. Buna bağlı olarak,

$$X_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_t = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\omega) e^{ik\Delta\omega t} \Delta\omega = \int_{2\pi} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

yazılır. ω 'nın bir fonksiyonu olan $f(\omega)e^{i\omega t}$ ifadesi 2π periyotlu periyodik olduğundan, integrasyon aralığı 2π uzunluğunun herhangi bir aralığı olarak alınabilir. Özel olarak $-\pi \leq \omega \leq \pi$ alındığında,

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.28)$$

ve

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} X_t e^{-i\omega t}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.29)$$

elde edilir.

(2.29)'da verilen $f(\omega)$ fonksiyonu genellikle X_t 'nin (*kesikli zamanlı-discrete time*) *Fourier dönüşümü* olarak bilinir. (2.28)'de verilen X_t dizisi ise $f(\omega)$ 'nin (*kesikli zamanlı*) *ters Fourier dönüşümü* olarak bilinir (Wei 2006).

2.3.4 Fourier dönüşümü

Kare integrallenebilir (square integrable) türe ve sahip sürekli bir periyodik fonksiyon için Fourier katsayılar dizisi, orijinal fonksiyona yakınsayan bir fonksiyonlar dizisi oluşturmak için kullanılabilir (Fuller 1996)¹. Öyle ki

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos k\omega \cos kx d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \sin k\omega \sin kx d\omega \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos k(\omega - x) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca karşılıklı ilişkilerin iyi tanımlanmış olmasından dolayı farklı bir notasyon kullanılarak (Fuller 1996)²,

$$\rho(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho(h) e^{-ih\omega} d\omega$$

yazılır. $\rho(k)$ ve $f(x)$ bir dönüşüm çifti oluşturur. Dolayısıyla Teorem 2.2'den yola çıkılarak,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho(h) e^{-i\omega h}$$

¹**Teorem 2.1** $f(x)$ fonksiyonu $f'(x)$ kare integrallenebilir (square integrable) türe ve sahip 2π periyotlu sürekli bir periyodik fonksiyon olsun. Bu durumda $f(x)$ 'in Fourier serisi, mutlak ve düzgün olarak (absolutely and uniformly) $f(x)$ 'e yakınsar.

Sonuç 2.1 Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ dizisi yakınsak ise bu durumda,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olarak gösterilen ilgili trigonometrik seri (Fourier serisi) mutlak ve düzgün olarak (absolutely and uniformly) 2π periyotlu sürekli bir periyodik fonksiyona yakınsar.

²**Teorem 2.2** Durağan bir zaman serisinin korelasyon fonksiyonu $\rho(h)$ mutlak toplanabilir olsun. Bu durumda sürekli bir $f(\omega)$ fonksiyonu vardır, öyle ki

$$(i) \rho(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos \omega h d\omega$$

$$(ii) f(\omega) \geq 0$$

$$(iii) \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega = 1$$

$$(iv) f(\omega) \text{ çift fonksiyondur.}$$

şeklinde tanımlanan $f(\omega)$ fonksiyonu, $\rho(h)$ 'nin *Fourier dönüşümü* veya $\rho(h)$ ile ilişkili *spektral yoğunluk* olarak adlandırılır. $f(\omega)$ fonksiyonu için *spektrum* veya *spektral fonksiyon* terimleri de kullanılır. Ayrıca,

$$\rho(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega h} d\omega$$

şeklinde tanımlanan korelasyon fonksiyonu, $f(\omega)$ 'nin *ters dönüşümü* ya da *karakteristik fonksiyonudur*. Eğer $f(\omega)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $\rho(h)$ istatistiksel karakteristik fonksiyondur.

Teorem 2.1 periyodik bir fonksiyon için geçerlidir. Bununla birlikte, reel eksen üzerinde tanımlı integrallenebilir fonksiyonlara uygulanabilir bir yığın teoremi vardır. Reel eksen üzerinde tanımlı integrallenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu için Fourier dönüşümü $u \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere,

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

olarak tanımlanır. Fourier integral teoremi $f(x)$ fonksiyonunun, düzgünlük koşullarını sağlaması halinde, Fourier dönüşümünün ters dönüşümünün de yine $f(x)$ fonksiyonunu vereceğini ifade eder (İlgili teoremler ve ispatları için bkz. Tolstov 1962). Örnek olarak farklı fonksiyon türlerine ilişkin Fourier dönüşümleri Çizelge 2.1'de sunulmuştur (Fuller 1996).

2.3.5 Spektrum ve özellikleri

Bir önceki alt başlıklarda verilen gerekli altyapıdan sonra şimdi zaman serisi analizinin frekans alanı yaklaşımı incelenecektir.

Durağan bir sürecin spektrumu basitçe, sürecin mutlak toplanabilir otokovaryans fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür. Daha genel olarak, durağan bir süreç daima bir spektral dağılım fonksiyonu ile gösterilebilir (Wei 2006).

Çizelge 2.1 Bazı fonksiyonların Fourier dönüşümleri (Fuller 1996)

Fonksiyon tipi	Fonksiyonun tanım aralığı	Fourier dönüşümü	Ters dönüşüm
X_t sonlu dizisi	$-(n-1), \dots, 0, \dots, n$	$c_k = \frac{1}{2n} \sum_{t=-(n-1)}^n X_t e^{-i\pi kt/n}$ $k = -(n-1), \dots, 0, \dots, n$	$X_t = \sum_{k=-(n-1)}^n c_k e^{i\pi kt/n}$ $t = -(n-1), \dots, 0, \dots, n$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{'e genişletilebilir})$
Mutlak toplanabilir $\gamma(h)$ sonsuz dizisi	$(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$	$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}$ $\omega \in (-\pi, \pi)$ $f(\omega), 2\pi \text{ periyotlu periyodik}$	$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega h} d\omega$ $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Sürekli, parçalı, düzgün $f(x)$	$[-\pi, \pi]$	$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ $x \in [-\pi, \pi]$ $(\text{reel eksen üzerindeki bir periyodik fonksiyona genişletilebilir})$
Sürekli, periyodik, parçalı, düzgün $f(x) = f(x+T)$	$(-T/2, T/2)$ (reel eksene genişletilebilir)	$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i2\pi kx/T} dx$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/T}$ $x \in (-T/2, T/2)$ $(\text{reel eksene genişletilebilir})$
Sürekli, kare integrallenebilir $f(x)$	$(-\infty, \infty)$	$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$ $u \in (-\infty, \infty)$	$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{iux} du$ $x \in (-\infty, \infty)$

Bir zaman serisinin korelasyon fonksiyonu istatistiksel karakteristik fonksiyona benzerdir ve aşağıdaki formda ifade edilebilir (Fuller 1996)³:

$$\rho(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} dG(\omega)$$

Buradaki integral Lebesgue-Stieltjes integralidir ve $G(\omega)$ bir istatistiksel dağılım fonksiyonudur.

Durağan bir zaman serisinin kovaryans fonksiyonu, sürecin varyansı ile korelasyon fonksiyonunun çarpımı olduğundan,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega h} dF(\omega) \quad (2.30)$$

yazılır. Burada,

$$dF(\omega) = \gamma(0)dG(\omega)$$

şeklindedir. $G(\omega)$ ve $F(\omega)$ fonksiyonlarının her ikisi de zaman serisi analizinde *spektral dağılım fonksiyonu* olarak adlandırılır. Spektral dağılım fonksiyonu azalmayan bir fonksiyondur. (2.30) ile verilen eşitlik spektral dağılım fonksiyonu ve kovaryans fonksiyonu arasındaki tanımsal ilişki olarak ele alınır. Spektral dağılım fonksiyonu bazen *bütünleşik (integrated) spektrum* olarak da adlandırılır (Fuller 1996).

X_t süreci $\gamma(h)$ mutlak toplanabilir otokovaryans fonksiyonuna sahip reel-değerli durağan bir süreç olsun. Bu durumda Bölüm 2.3.3 ve 2.3.4'teki sonuçlardan $\gamma(h)$ 'nin Fourier dönüşümü vardır ve (2.29)'a göre,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h} \quad (2.31)$$

³**Teorem 2.3** $\rho(h)$ reel değerli fonksiyonu, $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ indis kümesine sahip reel değerli bir durağan zaman serisinin korelasyon fonksiyonudur ancak ve ancak $\rho(h)$,

$$\rho(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ixh} dG(x)$$

olarak gösterilir. Burada $G(x)$ simetrik dağılım fonksiyonudur.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \cos \omega h \\
&= \frac{1}{2\pi} \gamma(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h) \cos \omega h, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi
\end{aligned}$$

şeklindeki sürekli reel-değerli negatif olmayan çift fonksiyona eşittir. $\gamma(h)$ dizisi,

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega h} d\omega \quad (2.32)$$

şeklindeki ters Fourier dönüşümü aracılığıyla $f(\omega)$ 'den yeniden bulunabilir. Dolayısıyla mutlak toplanabilir kovaryans fonksiyonuna sahip zaman serisi için $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$ 'dir. Burada $f(\omega)$, Bölüm 2.3.4'te spektral yoğunluk fonksiyonu (spektrum) olarak tanıtılmıştır (Fuller 1996, Wei 2006).

(2.31) ve (2.32) denklemleri $f(\omega)$ spektrumu ve $\gamma(h)$ otokovaryans dizisinin, birinin diğerinden tam olarak belirlenebildiği bir Fourier dönüşüm çifti oluşturduğunu gösterir. Dolayısıyla frekans alanı yaklaşımı ve zaman alanı yaklaşımı teorik olarak eşdeğerdir. Ele alınan olayın yapısı gereği sunum veya yorumlama açısından bu iki yaklaşımdan hangisi diğerine tercih edilebilir durumda ise o yaklaşım kullanılır. Başka bir deyişle model kurmada bir araç olarak kullanılan spektrum ve otokovaryans fonksiyonu arasındaki tercih, uygulamada faydalı olduğu düşünülen modelin yapısına bağlıdır. Yani bu iki araç birbirine rakip olarak görülmemelidir (Box vd. 1994, Wei 2006).

$f(\omega)$ fonksiyonu aşağıdaki önemli özelliklere sahiptir:

- i. $f(\omega)$ sürekli, reel-değerli ve negatif olmayan bir fonksiyondur. Yani $|f(\omega)| = f(\omega)$ 'dir. $f(\omega)$ 'nin sürekli ve reel-değerli bir fonksiyon olduğu açıktır. Negatif olmadığını göstermek için, $\gamma(h)$ otokovaryans fonksiyonunun pozitif yarı tanımlı olduğu yani herhangi c_i, c_j reel sayıları ve herhangi h_i, h_j tamsayıları için,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \gamma(h_i - h_j) \geq 0$$

olduğu bilgisi kullanılır. Özel olarak $c_i = \cos \omega i$, $c_j = \cos \omega j$, $h_i = i$ ve $h_j = j$ alınması durumunda,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \cos \omega i \cos \omega j \geq 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \sin \omega i \sin \omega j \geq 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) [\cos \omega i \cos \omega j + \sin \omega i \sin \omega j] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(i-j) \cos \omega(i-j) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n-|h|) \gamma(h) \cos \omega h \\ &= n \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left[1 - \frac{|h|}{n}\right] \gamma(h) \cos \omega h \geq 0 \end{aligned}$$

olur. Burada $h = (i-j)$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left[1 - \frac{|h|}{n}\right] \gamma(h) \cos \omega h \geq 0 \quad (2.33)$$

elde edilir. $\gamma(h)$ 'nin mutlak toplanabilir olması, verilen herhangi bir $\epsilon > 0$ için,

$$\sum_{h=-\infty}^{-(N+1)} |\gamma(h)| + \sum_{h=(N+1)}^{\infty} |\gamma(h)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $N > 0$ seçilebileceği anlamına gelir. Bu sebeple $n > N$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{h=-n}^n \frac{|h|}{n} |\gamma(h)| &< \sum_{h=-N}^N \frac{|h|}{n} |\gamma(h)| + \sum_{h=-\infty}^{-(N+1)} |\gamma(h)| + \sum_{h=(N+1)}^{\infty} |\gamma(h)| \\ &< \sum_{h=-N}^N \frac{|h|}{n} |\gamma(h)| + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Herhangi bir sabit N için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-N}^N \frac{|h|}{n} |\gamma(h)| = 0$$

olduğu açıktır. ϵ keyfi olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-n}^n \frac{|h|}{n} |\gamma(h)| = 0$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-n}^n \frac{|h|}{n} \gamma(h) \cos \omega h = 0 \quad (2.34)$$

olur. Çünkü $|\gamma(h) \cos \omega h| \leq |\gamma(h)|$ 'dir. Bu sebeple (2.33) ve (2.34) aracılığıyla,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \cos \omega h = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left[1 - \frac{|h|}{n} \right] \gamma(h) \cos \omega h \geq 0$$

olur. Böylece $f(\omega)$ 'nin negatif olmayan bir fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

- ii. $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$ olduğundan, $f(\omega)$ fonksiyonu 2π periyotlu periyodiktir. Ayrıca $f(\omega) = f(-\omega)$ olduğundan yani $f(\omega)$ simetrik çift bir fonksiyon olduğundan, grafiği yalnızca $0 \leq \omega \leq \pi$ için sunulur.
- iii. (2.32)'den,

$$\text{Var}(X_t) = \gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega$$

olarak elde edilir. Bu ise $f(\omega)$ spektrumunun, bir sürecin varyansının ayrıştırması olarak yorumlanabileceğini gösterir. Spektrumdaki bir zirve, karşılık gelen aralıkta yer alan frekanslardaki bileşenlerden varyansa önemli bir katkı olduğunu gösterir (Wei 2006).

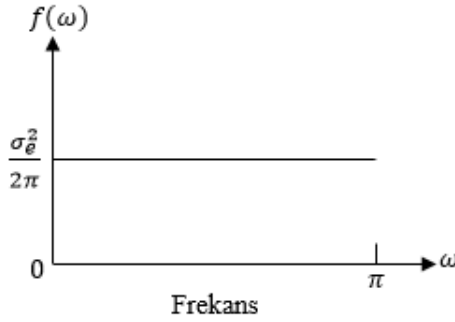
Örnek 2.2 (Beyaz gürültü sürecinin spektrumu). $X_t = e_t$ olarak verilen bir beyaz gürültü süreci,

$$\gamma(h) = \begin{cases} \sigma_e^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

şeklindeki otokovaryans fonksiyonuna sahip ilişkisiz rasgele değişkenlerin bir dizisidir. Dolayısıyla (2.31) aracılığıyla sürecin spektrumu,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h} = \frac{\sigma_e^2}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

olur. Spektrumun Şekil 2.2’de gösterildiği gibi yatay düz bir çizgi olması, tüm frekansların varyansa eşit katkısı olduğu anlamına gelir. Tüm frekanslardaki ışıık spektrumu aynı olduğunda beyaz ışıık üretildiği bilinmektedir. Aslında beyaz gürültü süreci, spektrum açısından beyaz ışıığa benzerliği sebebiyle böyle isimlendirilir (Wei 2006).



Şekil 2.2 Beyaz gürültü sürecinin spektrumu

2.3.6 Periodogram

Bölüm 2.3.2’de tanıtılan a_k ve b_k Fourier katsayıları X_t ’nin $\cos \omega_k t$ ve $\sin \omega_k t$ üzerine regresyonundan elde edilen regresyon katsayıları olarak düşünülebilir. Başka bir deyişle Fourier katsayıları, ω_k ’lar Fourier frekanslarını göstermek üzere,

$$X_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) + e_t$$

şeklindeki regresyon modelinde yer alan katsayıların en küçük kareler tahmincileri olarak düşünülebilir. Böylelikle n gözlem için toplam kareler toplamı ayrıştırılabilir. Toplam kareler toplamı aşağıdaki gibi ifade edilir (Wei 2006):

$$\sum_{t=1}^n X_t^2 = \begin{cases} na_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} (a_k^2 + b_k^2), & n \text{ tek ise} \\ na_0^2 + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} (a_k^2 + b_k^2) + na_{n/2}^2, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

Yine özel olarak n 'nin tek olması ve $2m + 1$ 'e eşit olması durumu dikkate alınsın. Bu durumda X_t 'nin $\cos \omega_k t$ üzerine regresyonundan elde edilen yani a_k 'ya bağlı kareler toplamı,

$$\frac{n}{2} a_k^2 = \frac{2}{n} \left(\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

ve $\cos \omega_k t$ ve $\sin \omega_k t$ tarafından elde edilen kareler toplamı,

$$\frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t \right)^2 \right] \quad (2.35)$$

olur. (2.35)'te verilen nicelik, ω_k frekansı ile ilişkili kareler toplamı olarak adlandırılabilir. Böylece $n = 2m + 1$ gözlem için toplam kareler toplamı $m + 1$ bileşene ayrılabilir. Bir bileşen ortalama ile ilişkilidir. Kalan m bileşenin her biri m tane sıfır olmayan frekans ile ilişkili iki karenin toplamıdır. Ayrışım Çizelge 2.2'de gösterilmektedir.

Çizelge 2.2 $n = 2m + 1$ örnek büyüklüğü için varyans analizi tablosu (Fuller 1996)

Kaynak	Serbestlik derecesi	Kareler toplamı
Ortalama	1	$n\bar{x}_n^2 = \frac{1}{4}na_0^2$
$\omega_1 = 2\pi/n$ frekansı	2	$(n/2)(a_1^2 + b_1^2)$
$\omega_2 = 4\pi/n$ frekansı	2	$(n/2)(a_2^2 + b_2^2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\omega_m = 2\pi m/n$ frekansı	2	$(n/2)(a_m^2 + b_m^2)$
Toplam	n	$\sum_{t=1}^n X_t^2$

Gözlem sayısının çift olması ve $2m$ ile gösterilmesi durumunda m -inci frekansla ilişkili tek bir regresyon değişkeni vardır: $\cos \pi t$. Bu durumda m -inci frekans için kareler toplamı 1 serbestlik derecesine sahiptir ve $n^{-1}(\sum_{t=1}^n X_t \cos \pi t)^2 = \frac{1}{4}na_m^2$ ile verilir.

Çizelge 2.2'deki kareler toplamlarının tamamı serbestlik derecesine bölünebilir ve kareler ortalaması hesaplanabilir. Bununla birlikte 1 serbestlik derecesine sahip kareler toplamlarını ikiyle çarparak kareler toplamlarını incelemek daha yaygındır. Bu

normalize edilmiş kareler toplamı ile verilen frekans fonksiyonu *periodogram* olarak adlandırılır. Böylece ω_k sıklığındaki periodogram,

$$I_n(\omega_k) = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2), \quad k = 1, 2, \dots, m$$

şeklinde tanımlanır. Burada, m daha önce belirtildiği gibi, $(n - 1)/2$ 'ye eşit veya daha küçük en büyük tamsayıdır (Fuller 1996).

Periodogramın örneklem özellikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ iid $N(0, \sigma^2)$ olan rasgele değişkenler olsun. Bu durumda,

$$E(a_k) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n E(X_t) \cos \omega_k t = 0$$

ve

$$Var(a_k) = \frac{4}{n^2} \sum_{t=1}^n \sigma^2 (\cos \omega_k t)^2 = \frac{4\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^n (\cos \omega_k t)^2 = \frac{4\sigma^2}{n^2} \frac{n}{2} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

olur. Burada (2.16)'dan dolayı $k \neq j$ için a_k ve a_j 'nin bağımsız olduğu bilgisi kullanılmıştır. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ için a_k 'lar iid $N(0, 2\sigma^2/n)$ 'dir ve $k = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ için $na_k^2/2\sigma^2$ 'ler bir serbestlik dereceli iid ki-karelerdir. Benzer şekilde $k = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ için $nb_k^2/2\sigma^2$ 'ler bir serbestlik dereceli iid ki-karelerdir. Ayrıca $k = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ ve $j = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ için $na_k^2/2\sigma^2$ ve $nb_j^2/2\sigma^2$ bağımsızdır. Öyle ki a_k ve b_k normaldir ve kosinüs ve sinüs sisteminin ortogonalliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} Cov(a_k, b_j) &= \frac{4}{n^2} E \left(\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t \sum_{u=1}^n X_u \sin \omega_j u \right) = \frac{4}{n^2} \sum_{t=1}^n [E(X_t^2) \cos \omega_k t \sin \omega_j t] \\ &= \frac{4\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^n [\cos \omega_k t \sin \omega_j t] = 0, \quad \text{her } k \text{ ve } j \text{ için} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan $k = 1, 2, \dots, [(n - 1)/2]$ için,

$$\frac{I(\omega_k)}{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2} (a_k^2 + b_k^2)$$

şeklindeki periodogram ordinatlarının iki serbestlik dereceli iid ki-kareler olduğu elde edilir. Benzer şekilde çift n için, $I(0)/\sigma^2$ ve $I(\pi)/\sigma^2$ 'nin her biri bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyar (Wei 2006).

Periodogram orijinal gözlemler açısından da tanımlanabilir:

$$I_n(\omega_k) = \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t \right)^2 \right], \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (2.36)$$

Periodogram ayrıca tahmini kovaryans fonksiyonunun Fourier dönüşümünün bir katı olarak da ifade edilebilir. $\omega_k \neq 0$ ise,

$$\sum_{t=1}^n X_t \cos \omega_k t = \sum_{t=1}^n (X_t - \mu) \cos \omega_k t,$$

$$\sum_{t=1}^n X_t \sin \omega_k t = \sum_{t=1}^n (X_t - \mu) \sin \omega_k t$$

yazılabilir. Burada $\mu = E\{X_t\}$ 'dir. Dolayısıyla $k = 1, 2, \dots, m$ için,

$$\begin{aligned} I_n(\omega_k) &= \frac{2}{n} \left[\left(\sum_{t=1}^n (X_t - \mu) \cos \omega_k t \right)^2 + \left(\sum_{t=1}^n (X_t - \mu) \sin \omega_k t \right)^2 \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n (X_t - \mu)(X_j - \mu) \cos \omega_k t \cos \omega_k j \right. \\ &\quad \left. + \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n (X_t - \mu)(X_j - \mu) \sin \omega_k t \sin \omega_k j \right] \\ &= \frac{2}{n} \left[\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n (X_t - \mu)(X_j - \mu) \cos \omega_k (t - j) \right] \end{aligned}$$

olur. Bu çift toplamda $t - j = 0$ olan n kombinasyon, $t - j = 1$ olan $n - 1$ kombinasyon, ... (ve diğerleri) vardır. Bu nedenle, $p = t - j$ diyerek aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.2 k -ıncı periodogram ordinatı aşağıdaki gibi verilir:

$$I_n(\omega_k) = \begin{cases} 2n\bar{x}_n^2, & k = 0, \\ 4\pi\hat{f}(\omega_k), & k = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Burada

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{n-|p|}{n} \tilde{\gamma}(p) \cos \omega p \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi),$$

$$\tilde{\gamma}(-p) = \tilde{\gamma}(p) = \begin{cases} \frac{1}{n-p} \sum_{j=1}^{n-p} (X_j - \mu)(X_{j+p} - \mu), & 0 \leq p \leq n-1 \\ 0, & p > n-1 \end{cases}$$

şeklindedir. $X_t - \bar{x}_n$ kullanılarak hesaplanan a_k ve b_k katsayıları ($k \neq 0$), X_t 'nin kullanılmasıyla hesaplananlarla aynıdır. Bu nedenle (2.36)'da X_t yerine $X_t - \bar{x}_n$ alınarak aşağıdaki ifade de yazılabilir:

$$I_n(\omega_k) = 2 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(p) \cos \omega_k p$$

Burada $k \neq 0$ ve

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{x}_n)(X_{t+h} - \bar{x}_n), & 0 \leq h \leq n-1 \\ 0, & h > n-1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Zaman serisi normal beyaz gürültü olduğunda periodogram ordinatlarının dağılımsal özellikleri kolaylıkla elde edilir. Diğer zaman serileri söz konusu olduğunda, periodogram özelliklerini saptamak için öncelikle mutlak toplanabilir kovaryans fonksiyonuna sahip bir zaman serisi için $I_n(\omega)$ 'nın beklenen değerinin limit değeri elde edilir.

Teorem 2.4 X_t serisi $E\{X_t\} = \mu$ olan ve mutlak toplanabilir kovaryans fonksiyonuna sahip durağan bir zaman serisi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{I_n(\omega)\} &= 4\pi f(\omega), & \omega \neq 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E\{I_n(0) - 2n\mu^2\} &= 4\pi f(0), & \omega = 0 \end{aligned}$$

olur.

Normalize edilmiş katsayılar $2^{-1/2}n^{1/2}a_k$ ve $2^{-1/2}n^{1/2}b_k$ rasgele değişkenler olup, mutlak toplanabilir kovaryans fonksiyonuna sahip bir zaman serisi için bu rasgele değişkenler limit durumunda ilişkisizdir ve ilgili frekansta değerlendirilen spektral yoğunluğun bir katı ile belirlenen varyansa sahiptir.

Teorem 2.5 X_t aşağıdaki gibi tanımlanan bir zaman serisi olsun:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_{t-j}$$

Burada $\{\alpha_j\}$ mutlak toplanabilirdir ve e_t bağımsız aynı dağılımlı $(0, \sigma_e^2)$ rasgele değişkenlerdir. $f_X(\omega)$ her ω için pozitif olsun. Bu durumda $(0, \pi)$ aralığındaki ω ve λ , $\omega \neq \lambda$ için, $[2\pi f(\omega)]^{-1}I_n(\omega)$ ve $[2\pi f(\lambda)]^{-1}I_n(\lambda)$ dizileri, her biri iki serbestlik dereceli bağımsız ki-kare rasgele değişkenlerine dağılımda yakınsar.

Böylelikle birçok normal olmayan süreç için periodogram ordinatları ki-kare rasgele değişkenlerinin katları olarak ele alınabilir. Eğer orijinal zaman serisi bağımsız $(0, \sigma^2)$ rasgele değişkenlerin bir dizisi ise, bu durumda periodogram ordinatlarının tamamı aynı beklenen değere sahiptir. Bununla birlikte sıfır olmayan bir otokorelasyon yapısına sahip bir zaman serisi için, ordinatlar farklı beklenen değerlere sahip olacaktır (Fuller 1996).

İlk olarak Schuster (1898)'de tanıtılan periodogramlar, verideki döngüleri (cycles) veya periyodiklikleri (periodicities) araştırmak için, diğer bir deyişle bir zaman serisi verisinin periyodik bileşen içerip içermediğini test etmek için kullanılır. Bununla birlikte periodogramların asıl amacı zaman serisi verisindeki gizli periyodiklikleri (hidden periodicities) araştırmaktır (Fuller 1996, Wei 2006).

2.4 Durağan Süreçler

Zaman serileri analizinde bir zaman serisini ifade etmek için temel olarak iki gösterim kullanılır. Bunlardan biri X 'in t anındaki değerinin kendi gecikmeli değerleri ve ilave bir rasgele hata terimi üzerine modellendiği otoregresif gösterimdir. Bir diğeri ise X_t sürecinin ilişkisiz rasgele değişkenler dizisinin bir lineer kombinasyonu olarak yazıldığı

hareketli ortalama gösterimidir. Bu iki gösterimin yanı sıra bir zaman serisi, hem otoregresif hem de hareketli ortalama terimlerinin modele dahil edilmesiyle, otoregresif hareketli ortalama gösterimi ile de ifade edilmektedir (Wei 2006). Bu bölümde öncelikle genel lineer süreçler tanıtılmış, daha sonra bir zaman serisinin otoregresif, hareketli ortalama ve otoregresif hareketli ortalama gösterimleri ele alınmış ve ele alınan modellerin özellikleri incelenmiştir.

2.4.1 Genel lineer süreçler

Lineer süreçler için iki eşdeğer gösterim

Genel lineer süreci tanımlamak için bir zaman serisinin, rasgele şokların lineer bir birleşimi ile oluşturulduğu varsayılır. e_t beyaz gürültü süreci olmak üzere,

$$\dot{X}_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j} \quad (2.37)$$

yazılır. Burada $\psi_0 = 1$ ve $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ 'dur. Ayrıca $\dot{X}_t = X_t - \mu$, sürecin ortalamasından sapmasıdır. (2.37) formu, $\dot{X}_t$ serisinin, e_t beyaz gürültü sürecinin şimdiki ve geçmiş değerlerinin ağırlıklı toplamı olarak gösterilmesine olanak sağlar. e_t beyaz gürültü süreci sistemi yönlendiren bir şoklar serisi olarak düşünülebilir. $B^j X_t = X_{t-j}$ olarak tanımlanan B gecikme (geri kaydırma-backshift) operatörünün kullanılması ile (2.37),

$$\dot{X}_t = \psi(B)e_t$$

şeklinde kapalı formda yazılabilir. Burada,

$$\psi(B) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

şeklinde (2.37) gösterimi bir sürecin *hareketli ortalama gösterimi* olarak adlandırılır.

Wold (1938) herhangi bir $\dot{X}_t$ sıfır ortalamalı pür non-deterministik durağan sürecin $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ olmak üzere (2.37) formunda ifade edilebildiğini göstermiştir. Dolayısıyla bu gösterim literatürde *Wold'un gösterimi* olarak da bilinir ve bu formda

gösterilebilen herhangi bir süreç *non-deterministik süreç* olarak adlandırılır. Bazen (2.37)'deki süreçten bahsetmek için *lineer süreç* terimi de kullanılır. Sürecin durağan bir süreci temsil etmesi için, ψ_j katsayılarının mutlak toplanabilir olması yani $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ olması gerekir.

$\dot{X}_t$ serisi ayrıca kendi geçmiş değerlerinin ağırlıklı toplamı ve ilave bir e_t şoku olarak,

$$\dot{X}_t = \pi_1 \dot{X}_{t-1} + \pi_2 \dot{X}_{t-2} + \dots + e_t \quad (2.38)$$

şeklinde veya eşdeğer olarak,

$$\pi(B) \dot{X}_t = e_t \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$$

ve $1 + \sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ şeklindedir. (2.38) alternatif formu bir sürecin *otoregresif gösterimi* olarak adlandırılır ve sürecin μ ortalamasından şimdiki sapmasının ($\dot{X}_t$) geçmiş sapmaları üzerine ($\dot{X}_{t-1}, \dot{X}_{t-2}, \dots$) regresyonu gibi düşünülebilir. π_j ağırlıklarının mutlak toplanabilir olması yani $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ olması, (2.37) ile verilen lineer sürecin *tersinir (invertible)* olduğunu ve (2.38) gösterimi ile ifade edilebileceğini gösterir. Tersinir olmayan bir süreçten elde edilen öngörüler anlamsız olacaktır.

(2.39)'un her iki tarafına $\psi(B)$ operatörünün uygulanmasıyla,

$$\psi(B) \pi(B) \dot{X}_t = \psi(B) e_t = \dot{X}_t$$

ifadesi elde edilir. Böylelikle $\psi(B) \pi(B) = 1$ yani,

$$\pi(B) = \psi^{-1}(B) \quad (2.40)$$

olur. (2.40) ilişkisi kullanılarak ψ ve π ağırlıkları birbirinden elde edilebilir (Box vd. 1994, Wei 2006).

Bir lineer sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu ve spektrumu

e_t bir beyaz gürültü süreci olmak üzere,

$$\dot{X}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j}$$

şeklinde verilen bir lineer sürecin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = E[\dot{X}_t \dot{X}_{t+h}] = E \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k e_{t-j} e_{t+h-k} \right] = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} \quad (2.41)$$

olarak ifade edilir. Özel olarak (2.41)'de $h = 0$ alınarak sürecin varyansının,

$$\gamma_0 = \sigma_X^2 = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad (2.42)$$

olduğu görülür. ψ_j katsayılarının mutlak toplanabilirliği şeklindeki durağanlık koşulu (2.42)'nin sağında yer alan serinin yakınsak olduğunu gösterir ve dolayısıyla bu durum sürecin sonlu bir varyansa sahip olacağını garantiler.

Bir lineer sürecin otokovaryanslarını elde etmenin bir diğer yolu,

$$\gamma(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h B^h \quad (2.43)$$

şeklindeki *otokovaryans üreten fonksiyonun (autocovariance generating function)* kullanılmasıdır. Burada γ_0 sürecin varyansı olup $B^0 = 1$ 'in katsayısıdır ve h gecikmedeki otokovaryans olan γ_h hem B^j 'nin hem de $B^{-j} = F^j$ 'nin katsayısıdır. Burada $F = B^{-1}$ operatörü, $F^j X_t = X_{t+j}$ olarak tanımlanan *ileri kaydırma (forward) operatörüdür*.

(2.41) sonucu (2.43)'te yerine koyulursa,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} B^h = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{h=-j}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h} B^h$$

ifadesi elde edilir. Öyle ki $k < 0$ için $\psi_k = 0$ 'dır. $j + h = k$ alınmasıyla,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k B^{k-j} = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k B^k \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{-j}$$

yani,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \psi(B) \psi(B^{-1}) = \sigma_e^2 \psi(B) \psi(F) \quad (2.44)$$

elde edilir. Sürecin *otokorelasyon üreten fonksiyonu* ise

$$\rho(B) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho_h B^h = \frac{\gamma(B)}{\gamma_0}$$

şeklinde olur (Box vd. 1994).

Eğer γ_h otokovaryans dizisi mutlak toplanabilir ise bu durumda spektrumun (spektral yoğunluk fonksiyonunun) var olduğu ve

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.45)$$

olarak tanımlandığı Bölüm 2.3.5'te ifade edilmişti. (2.43) ile verilen otokovaryans üreten fonksiyonda $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $B = e^{-i\omega}$ ve dolayısıyla $F = B^{-1} = e^{i\omega}$ alınır ve (2.44) ile (2.45) birleştirilirse, bir lineer sürecin *spektrumu*,

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \gamma(e^{-i\omega}) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi} \psi(e^{-i\omega}) \psi(e^{i\omega}), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (2.46)$$

olarak elde edilir (Wei 2006).

Otoregresif ve hareketli ortalama süreçleri

Genel lineer sürecin (2.37) ve (2.38) gösterimleri sonsuz sayıda ψ_j ve π_j parametrelerini içerdiğinden uygulamada kullanışlı değildir. Bu gösterimler özellikle model kurmanın başlangıç aşamasında kullanılan model formları değildir. Bunun yerine modellemede sonlu sayıda parametre içeren modeller tercih edilmektedir.

Otoregresif süreçler. (2.38)'in özel bir formu olan, π ağırlıklarının sadece ilk p tanesinin sıfırdan farklı olduğu,

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + \phi_2 \dot{X}_{t-2} + \dots + \phi_p \dot{X}_{t-p} + e_t \quad (2.47)$$

modeli ele alınsın. Burada ağırlık parametrelerinin sonlu bir kümesini ifade etmek için $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ sembolleri kullanılmıştır. (2.47) ile tanımlanan süreç *p-inci dereceden otoregresif süreç* veya kısaca *AR(p) süreci* olarak adlandırılır. *AR(p) süreci*,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \dot{X}_t = e_t$$

veya

$$\phi(B) \dot{X}_t = e_t$$

şeklinde eşdeğer formda yazılabilir.

Hareketli ortalama süreçleri. Benzer şekilde ψ ağırlıklarının sadece ilk q tanesinin sıfırdan farklı olduğu, (2.37) sürecinin özel bir formu ele alınabilir. Bu durumda süreç,

$$\dot{X}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.48)$$

olarak ifade edilir. Burada ise $-\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$ sembolleri ağırlık parametrelerinin sonlu kümesini ifade etmek için kullanılmıştır. (2.48) ile ifade edilen süreç *q-üncü dereceden hareketli ortalama süreci* veya kısaca *MA(q) süreci* olarak adlandırılır. Süreç eşdeğer olarak,

$$\dot{X}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

veya

$$\dot{X}_t = \theta(B) e_t$$

formunda gösterilir.

Karma otoregresif hareketli ortalama süreçleri. Uygulamada daha az parametre ile çalışmak adına bazen modele hem otoregresif hem de hareketli ortalama terimlerini dahil etmek gerekebilir. Bu durumda,

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \dot{X}_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q}$$

veya

$$\phi(B)\dot{X}_t = \theta(B)e_t$$

şeklinde ifade edilen (p, q) dereceden karma otoregresif hareketli ortalama süreci veya kısaca $ARMA(p, q)$ süreci elde edilir (Box vd. 1994).

İlerleyen alt başlıklarda otoregresif süreçler, hareketli ortalama süreçleri ve karma otoregresif hareketli ortalama süreçlerinin bazı önemli karakteristikleri incelenecektir.

2.4.2 Otoregresif (AutoRegressive-AR) süreçler

Otoregresif süreçler, zaman serisinin şimdiki değerinin önceki değerlerine ve ilave bir rasgele şoka bağlı olduğu olayları modellemede kullanılır. Bu kısımda genel p -inci dereceden otoregresif sürece ve uygulamada önemli bir yere sahip olan birinci ve ikinci dereceden otoregresif süreçlere yer verilecektir.

Otoregresif süreçler için durağanlık koşulları

$$\dot{X}_t = \phi_1\dot{X}_{t-1} + \phi_2\dot{X}_{t-2} + \dots + \phi_p\dot{X}_{t-p} + e_t \quad (2.49)$$

veya alternatif olarak,

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)\dot{X}_t = \phi(B)\dot{X}_t = e_t$$

şeklindeki bir $AR(p)$ süreci ele alınsın. $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| = \sum_{j=1}^p |\phi_j| < \infty$ olduğundan süreç daima tersinirdir, yani tersinirliği sağlamak için sürecin parametreleri ile ilgili herhangi bir kısıtlama gerekmez. Bununla birlikte sürecinin durağan olması için $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ parametrelerinin belirli koşulları yerine getirmesi gerekir. Öyle ki durağanlık için, $\phi(B) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında olmalıdır.

Otoregresif süreçlerin otokorelasyon fonksiyonu ve spektrumu

Otokorelasyon fonksiyonu. Durağan bir otoregresif sürecin otokorelasyon fonksiyonunu elde etmek için öncelikle (2.49)'da verilen eşitlikte her iki tarafın $\dot{X}_{t-h}$ ile çarpılmasıyla,

$$\ddot{X}_{t-h}\ddot{X}_t = \phi_1\ddot{X}_{t-h}\ddot{X}_{t-1} + \phi_2\ddot{X}_{t-h}\ddot{X}_{t-2} + \cdots + \phi_p\ddot{X}_{t-h}\ddot{X}_{t-p} + \ddot{X}_{t-h}e_t \quad (2.50)$$

ifadesi elde edilir. Beklenen değerler alınarak,

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \phi_2\gamma_{h-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{h-p}, \quad h > 0 \quad (2.51)$$

elde edilir. Burada $h > 0$ için $E(\ddot{X}_{t-h}e_t) = 0$ 'dır. Daha sonra (2.51) eşitliğinin her iki tarafının γ_0 'a bölünmesiyle otokorelasyon fonksiyonu için,

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2} + \cdots + \phi_p\rho_{h-p}, \quad h > 0 \quad (2.52)$$

ilişkisi elde edilir. Böylelikle ρ_h 'nin $h > 0$ için $\phi(B)\rho_h = (1 - \phi_1B - \phi_2B^2 - \cdots - \phi_pB^p)\rho_h = 0$ şeklindeki fark denklemi tarafından belirlendiği görülür. Bu durumda,

$$\phi(B) = \prod_{i=1}^p (1 - G_iB)$$

yazılırsa, (2.52)'nin genel çözümü,

$$\rho_h = A_1G_1^h + A_2G_2^h + \cdots + A_pG_p^h \quad (2.53)$$

olur. Burada $G_1^{-1}, G_2^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ değerleri $\phi(B) = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Durağanlık için $|G_i| < 1$ olması gerekir. Sonuç olarak G_i köklerinin ayrık olduğu varsayımı altında uygulamada iki durum ortaya çıkabilir:

- i. G_i kökü reeldir. Bu durumda (2.53)'teki $A_iG_i^h$ terimi, h arttıkça geometrik olarak sıfıra doğru azalır. Bu yapı genellikle *sönümlü üstel (damped exponential)* olarak adlandırılır.
- ii. G_i, G_j kök çifti kompleks eşleniklerdir. Bu durumda ise otokorelasyon fonksiyonunun yapısı *sönümlü sinüs dalgasına* uyar.

Otoregresif parametrelerin otokorelasyonlar açısından gösterimi: Yule-Walker denklemleri. (2.52) denklemi $h = 1, 2, \dots, p$ değerleri için yazılırsa, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ otokorelasyonları açısından $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ parametreleri için bir lineer denklemler kümesi elde edilir. Öyle ki,

ρ_1	$=$	ϕ_1	$+$	$\phi_2\rho_1$	$+$	$\dots$	$+$	$\phi_p\rho_{p-1}$	(2.54)
ρ_2	$=$	$\phi_1\rho_1$	$+$	ϕ_2	$+$	$\dots$	$+$	$\phi_p\rho_{p-2}$	
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\dots$		$\vdots$	
ρ_p	$=$	$\phi_1\rho_{p-1}$	$+$	$\phi_2\rho_{p-2}$	$+$	$\dots$	$+$	ϕ_p	

olur. Bu denklemler *Yule-Walker denklemleri* olarak adlandırılır. Eğer,

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

yazılırsa, $\boldsymbol{\phi}$ parametre vektörü için (2.54)'ün çözümü otokorelasyonlar açısından, $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}_p^{-1} \boldsymbol{\rho}_p$ olarak yazılabilir.

Varyans. (2.50) eşitliğinde $h = 0$ durumu için beklenen değerler alındığında $E(X_{t-h}e_t)$ teriminin katkısı $E(e_t^2) = \sigma_e^2$ olur. Dolayısıyla $h = 0$ olduğunda,

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_{-1} + \phi_2\gamma_{-2} + \dots + \phi_p\gamma_{-p} + \sigma_e^2$$

elde edilir. Her iki tarafın $\gamma_0 = \sigma_X^2$ 'e bölünmesi ve $\gamma_{-h} = \gamma_h$ alınmasıyla σ_X^2 varyansı,

$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2 - \dots - \rho_p\phi_p}$	(2.55)
--	--------

olarak elde edilir.

Spektrum. Bir $AR(p)$ süreci için $\psi(B) = 1/\phi(B)$ olduğundan sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{1}{\phi(B)\phi(B^{-1})}$$

olup, sürecin spektrumu ise (2.46)'dan,

$f(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})}$ $= \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \dots - \phi_p e^{-ip\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega} - \dots - \phi_p e^{ip\omega})}$	(2.56)
--	--------

olarak elde edilir.

Birinci dereceden otoregresif süreç

Birinci dereceden otoregresif süreç,

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + e_t$$

şeklinde veya eşdeğer olarak,

$$(1 - \phi_1 B) \dot{X}_t = e_t$$

şeklinde gösterilir. Sürecin durağan olması için $(1 - \phi_1 B) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. Yani durağan bir süreç için $|\phi_1| < 1$ elde edilmelidir. $\dot{X}_{t-1}, \dot{X}_{t-2}, \dot{X}_{t-3}, \dots$ verildiğinde $\dot{X}_t$ 'nin dağılımı, $\dot{X}_{t-1}$ verildiğinde $\dot{X}_t$ 'nin dağılımı ile aynı olduğundan $AR(1)$ süreci bazen *Markov süreci* olarak adlandırılır.

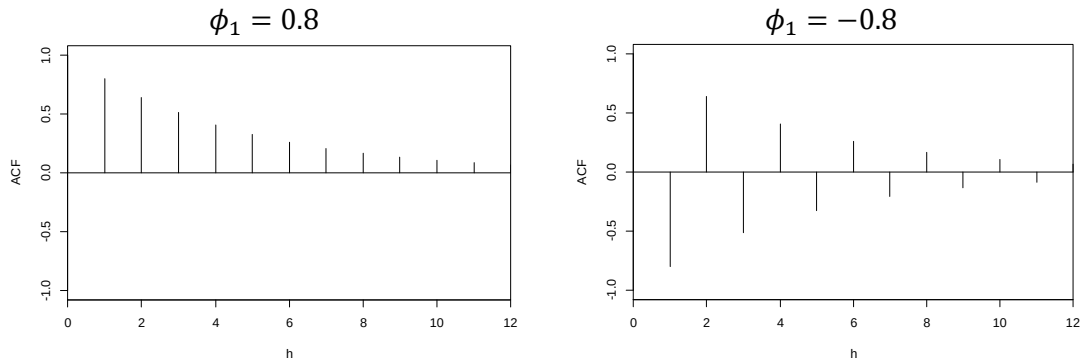
Otokorelasyon fonksiyonu. (2.52)'nin kullanılmasıyla sürecin otokorelasyon fonksiyonu $\rho_0 = 1$ olmak üzere,

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1}, \quad h > 0$$

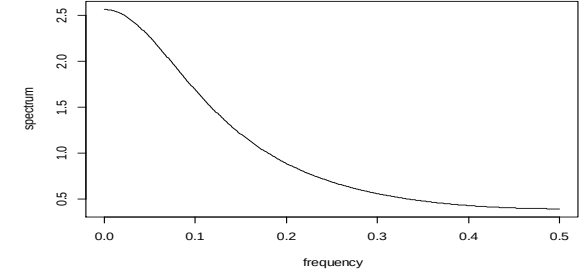
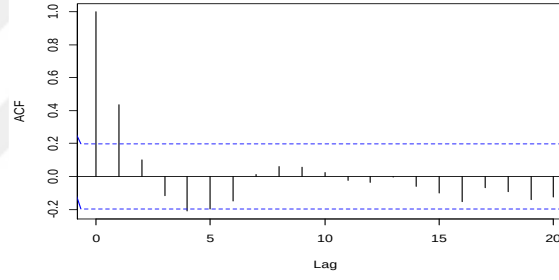
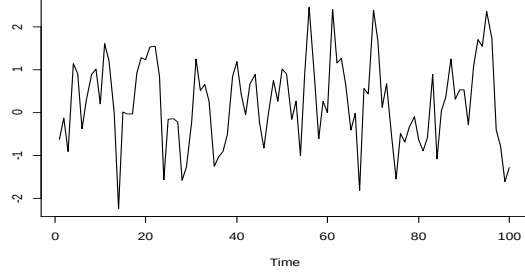
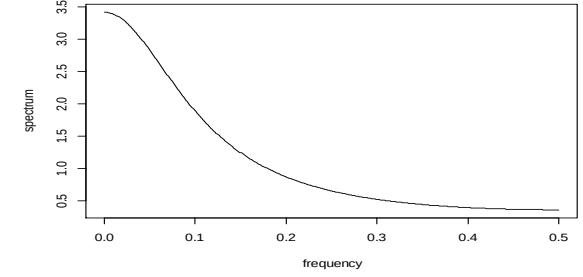
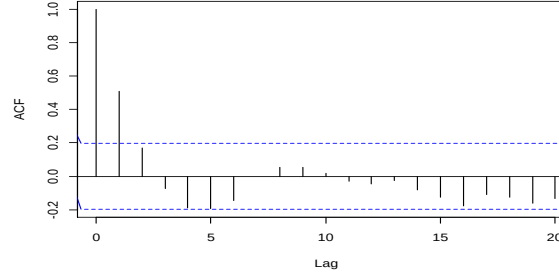
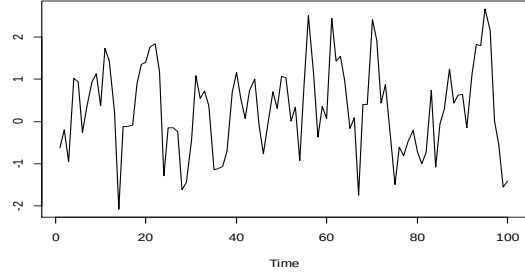
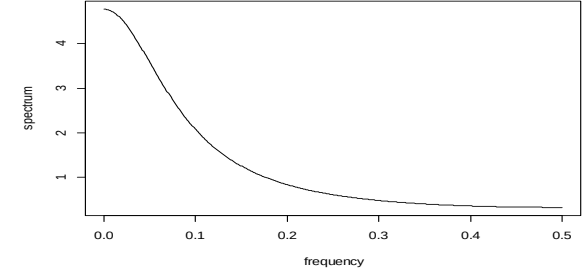
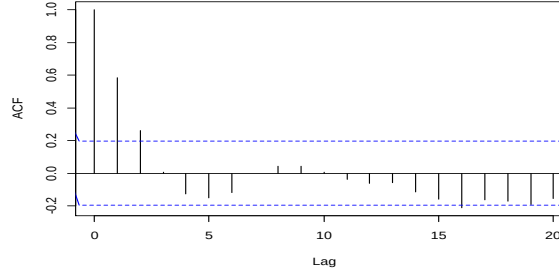
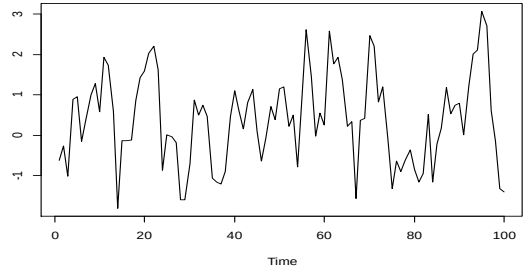
şeklindeki birinci dereceden fark denklemini sağlar ve bu,

$$\rho_h = \phi_1^h, \quad h \geq 0$$

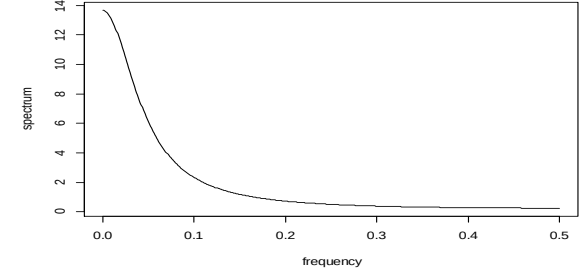
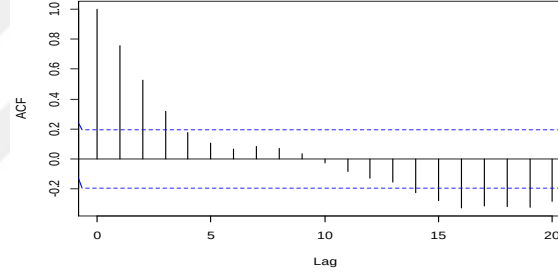
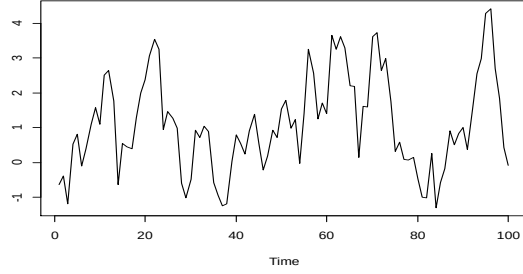
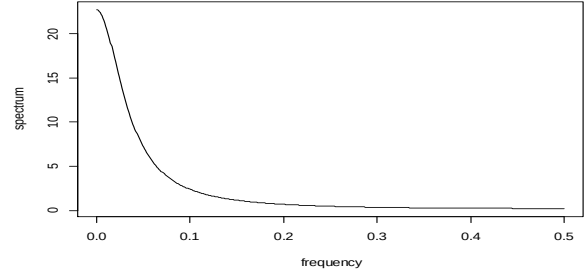
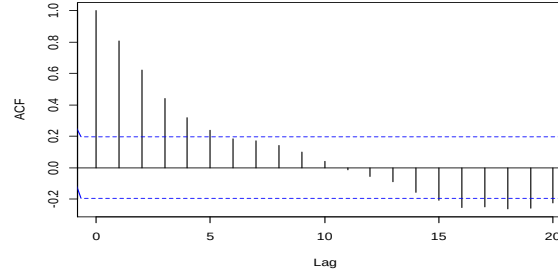
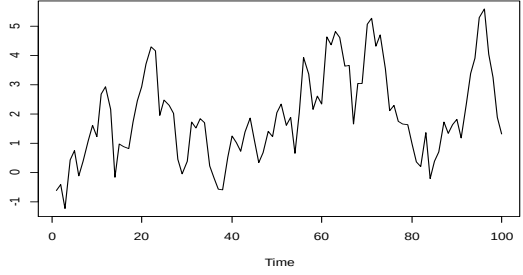
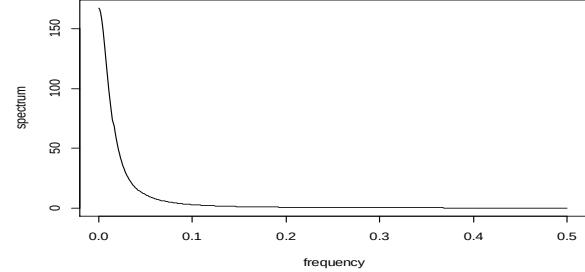
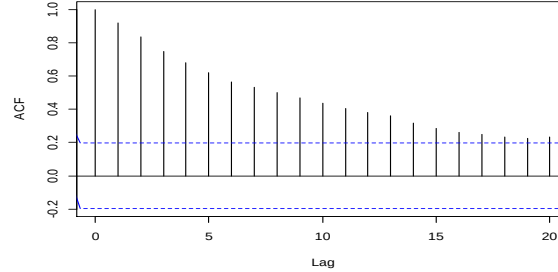
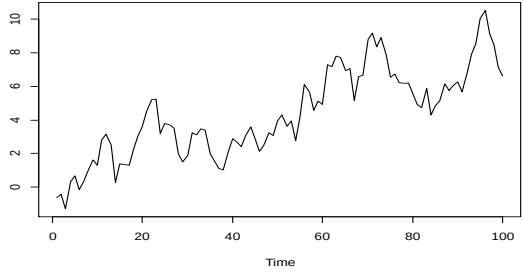
çözümüne sahiptir. Otokorelasyon fonksiyonu ϕ_1 'in işaretine bağlı olan iki farklı forma sahiptir. ϕ_1 pozitif ise bütün otokorelasyonlar pozitiftir. ϕ_1 negatif olduğunda ise otokorelasyonlar negatif bir değerle başlar ve sıfır etrafında salınım yapan bir kalıp sergiler. Her iki durumda da otokorelasyonlar üstel olarak sıfıra doğru azalır (Şekil 2.3). ϕ_1 arttıkça bu azalma yavaşlar (Şekil 2.4). Özel olarak $\rho_1 = \phi_1$ 'dir.



Şekil 2.3 $AR(1)$ modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu

$\phi_1 = 0.5$  $\phi_1 = 0.6$  $\phi_1 = 0.7$ 

Şekil 2.4 Farklı ϕ_1 değerlerine sahip $AR(1)$ modellerine ilişkin grafikler, $n = 100$

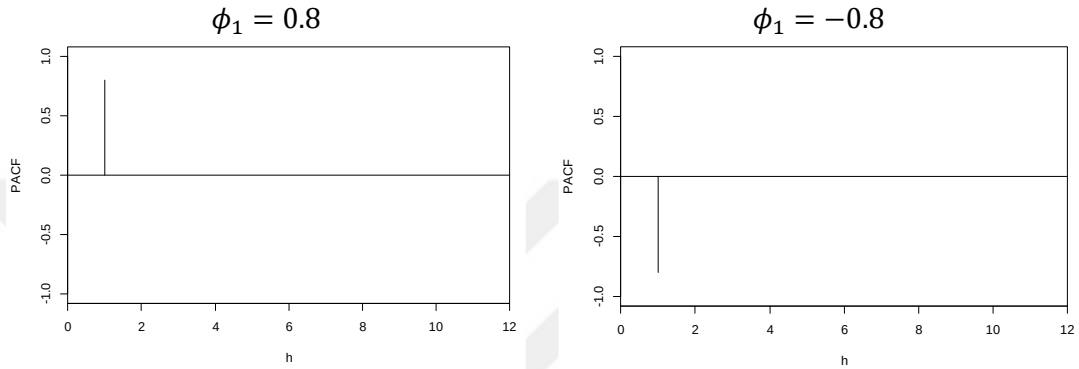
$\phi_1 = 0.9$  $\phi_1 = 0.95$  $\phi_1 = 0.99$ 

Şekil 2.4 (devam) Farklı ϕ_1 değerlerine sahip AR(1) modellerine ilişkin grafikler, $n = 100$

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. $AR(1)$ süreci için (2.4)'ten elde edilen kısmi otokorelasyon fonksiyonu,

$$\phi_{hh} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & h = 1 \\ 0, & h \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde. PACF, 1 gecikmede ϕ_1 'in işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif bir sivri uç gösterir ve daha sonra kesilir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 $AR(1)$ modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu

Varyans. (2.55)'in kullanılması ve $\rho_1 = \phi_1$ alınmasıyla sürecin varyansı,

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho_1 \phi_1} = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1^2}$$

olur.

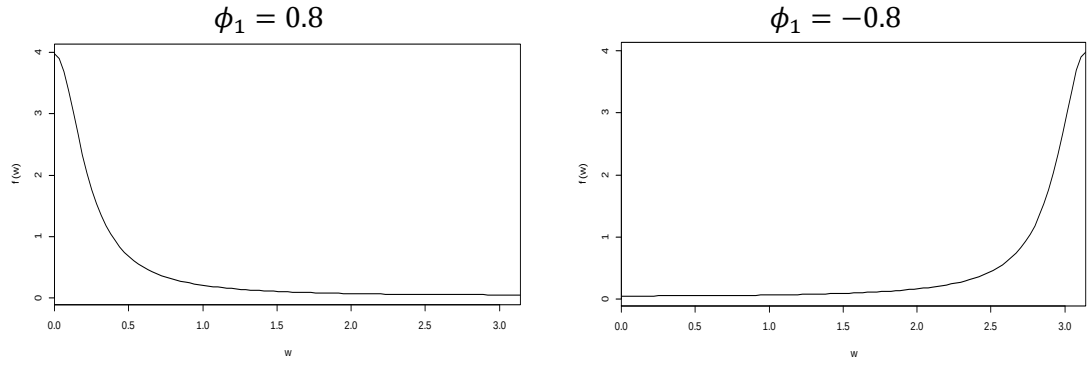
Spektrum. Son olarak sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{1}{(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1 B^{-1})}$$

olup, (2.56)'nın kullanılmasıyla sürecin spektrumu,

$$f(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega})} = \frac{\sigma_e^2}{(1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos \omega)}$$

olarak elde edilir. Spektral yoğunluk fonksiyonu pozitif ϕ_1 için ω 'nın ve dolayısıyla frekansın düşük değerlerinde, negatif ϕ_1 için ise frekansın yüksek değerlerinde baskındır (Şekil 2.6).



Şekil 2.6 AR(1) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu, $\sigma_e^2 = 1$

İkinci dereceden otoregresif süreç

İkinci dereceden otoregresif süreç,

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + \phi_2 \dot{X}_{t-2} + e_t$$

veya eşdeğer olarak,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \dot{X}_t = e_t$$

şeklinde gösterilir. Sürecin durağan olması için $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. AR(2) modelinin durağanlık koşulu modelin parametre değerleri açısından da ifade edilebilir. $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ 'ın veya eşdeğer olarak $\phi_2 B^2 + \phi_1 B - 1 = 0$ 'ın kökleri B_1 ve B_2 olsun. Bu durumda,

$$B_1 = \frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

ve

$$B_2 = \frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\frac{1}{B_1} = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

ve

$$\frac{1}{B_2} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

olur. $i = 1,2$ için $|B_i| > 1$ gerekli koşulu $|1/B_i| < 1$ anlamına gelir. Dolayısıyla,

$$\left| \frac{1}{B_1} \cdot \frac{1}{B_2} \right| = |\phi_2| < 1$$

ve

$$|\phi_1| = \left| \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right| < 2$$

olur. Böylelikle köklerin reel veya kompleks olmasına bakılmaksızın durağanlık için aşağıdaki gerekli koşul elde edilir:

$$\begin{cases} -1 < \phi_2 < 1 \\ -2 < \phi_1 < 2 \end{cases}$$

Reel kökler için $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ olması gerekir. Bu,

$$-1 < \frac{1}{B_2} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \leq \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} = \frac{1}{B_1} < 1$$

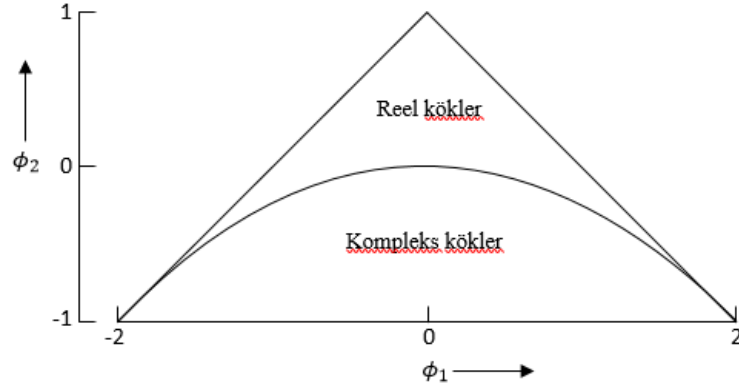
veya eşdeğer olarak,

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \end{cases}$$

anlamına gelir. Kompleks kökler için $\phi_2 < 0$ ve $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ olmalıdır. Böylelikle parametre değerleri açısından $AR(2)$ modelinin durağanlık koşulu,

$$\begin{cases} \phi_2 + \phi_1 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ -1 < \phi_2 < 1 \end{cases}$$

ifadesine uyan Şekil 2.7'deki üçgensel bölge ile verilmiştir.



Şekil 2.7 AR(2) modeli için durağanlık bölgeleri

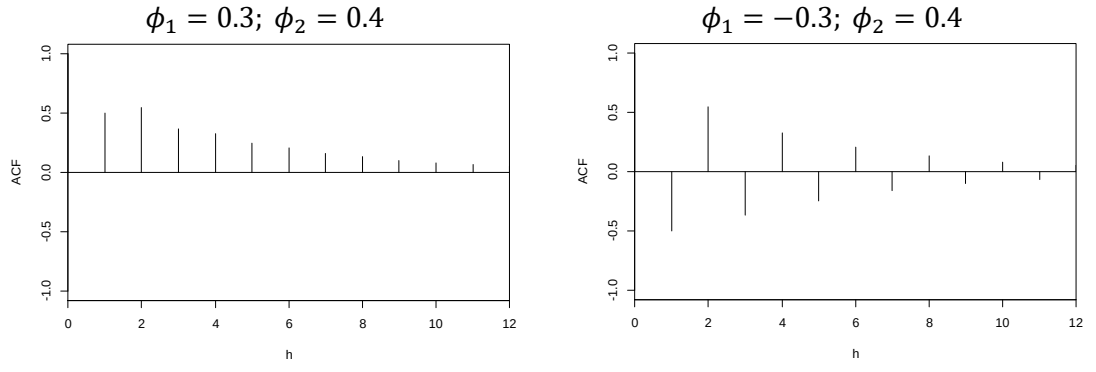
Otokorelasyon fonksiyonu. (2.52)'nin kullanılmasıyla otokorelasyon fonksiyonu, $\rho_0 = 1$ ve $\rho_1 = \phi_1/(1 - \phi_2)$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \phi_2 \rho_{h-2}, \quad h > 0 \quad (2.57)$$

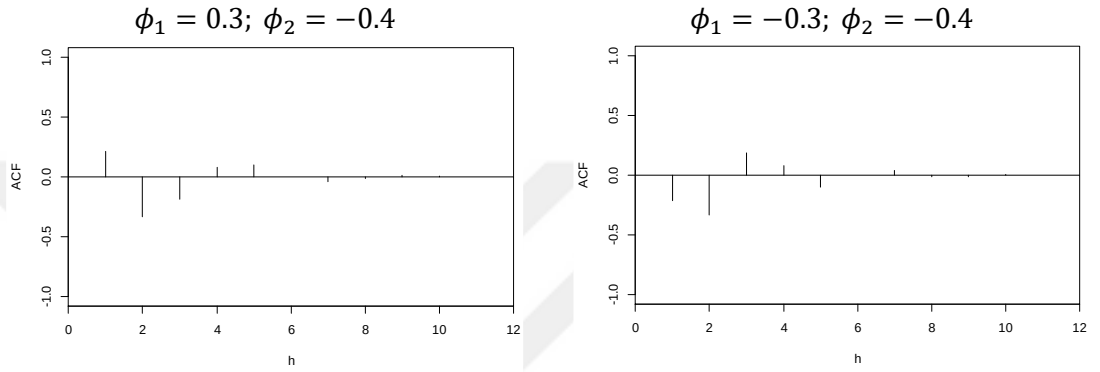
şeklindeki ikinci dereceden fark denklemini sağlar. (2.53)'ten, (2.57) fark denkleminin genel çözümü,

$$\rho_h = A_1 G_1^h + A_2 G_2^h = \frac{G_1(1 - G_2^2)G_1^h - G_2(1 - G_1^2)G_2^h}{(G_1 - G_2)(1 + G_1 G_2)}$$

olur. Burada G_1^{-1} ve G_2^{-1} , $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir. Kökler reel olduğunda yani $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ durumunda otokorelasyon fonksiyonu sönümlü üstellerin bir karışımından meydana gelir (Şekil 2.8a). G_1 ve G_2 kökleri kompleks ise ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$), ikinci dereceden otoregresif süreç sönümlü bir sinüs dalgası şeklinde olup görünüşte (pseudo) periyodik bir davranış sergiler. Bu davranış otokorelasyon fonksiyonuna yansır (Şekil 2.8b).



(a) Reel kökler



(b) Kompleks kökler

Şekil 2.8 $AR(2)$ modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu

Yule-Walker denklemleri. (2.54)'te $p = 2$ alındığında Yule-Walker denklemleri,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned} \tag{2.58}$$

olur. Bu denklem sistemi çözüldüğünde ϕ_1 ve ϕ_2 ,

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

olarak elde edilir. (2.58) denklemleri ρ_1 ve ρ_2 'yi ϕ_1 ve ϕ_2 açısından ifade etmek için çözüldüğünde ise,

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} = \frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}$$

elde edilir. Bu değerler (2.57) için başlangıç değerlerini ifade eder. Verilen ϕ_1 ve ϕ_2 değerlerine sahip bir $AR(2)$ sürecinin otokorelasyonlarını hesaplamak için, doğrudan (2.57) fark denkleminin kullanılması en basitidir.

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. $AR(2)$ süreci için (2.4)'ten,

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\phi_1^2 + \phi_2 - \phi_2^2}{1 - \phi_2}\right) - \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2}\right)^2} = \frac{\phi_2[(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2]}{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2} = \phi_2$$

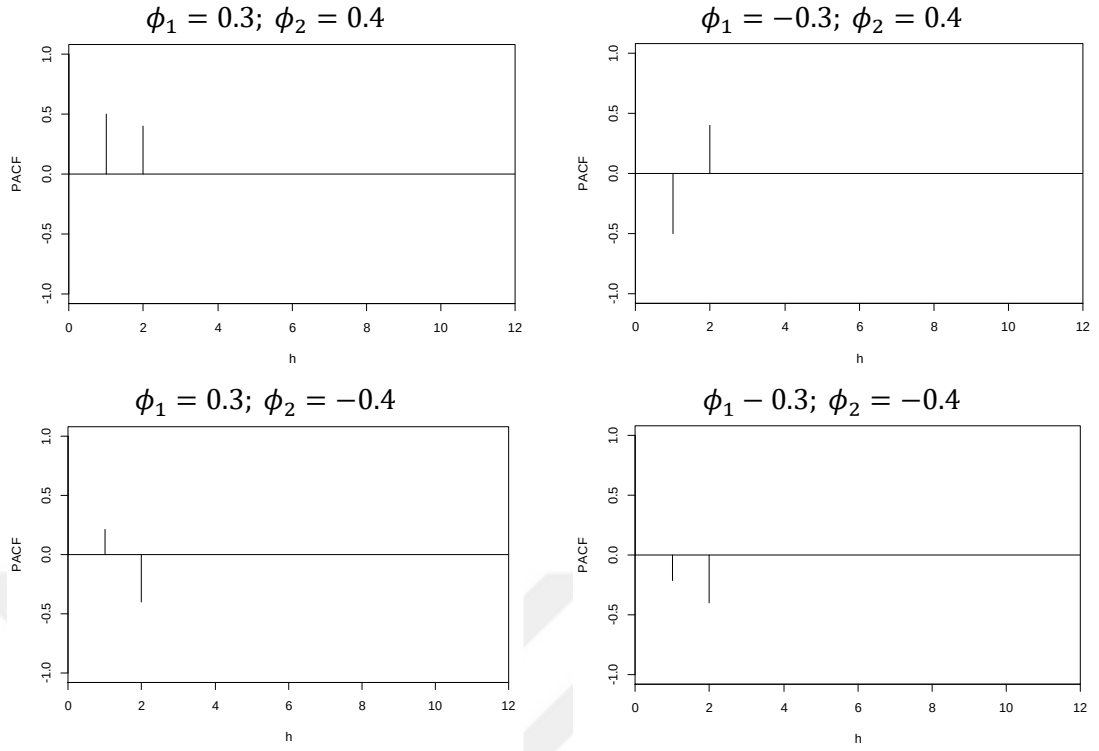
$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 + \phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1\rho_1 + \phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $h \geq 3$ için $\phi_{hh} = 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla bir $AR(2)$ sürecinin PACF'si 2 gecikmeden sonra kesilir. Çeşitli $AR(2)$ modelleri için kısmi otokorelasyon fonksiyonunun grafiği Şekil 2.9'daki gibidir.

Varyans. (2.55)'ten sürecin varyansı,

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2} = \left(\frac{1 - \phi_2}{1 + \phi_2}\right) \frac{\sigma_e^2}{\{(1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2\}}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.9 $AR(2)$ modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu

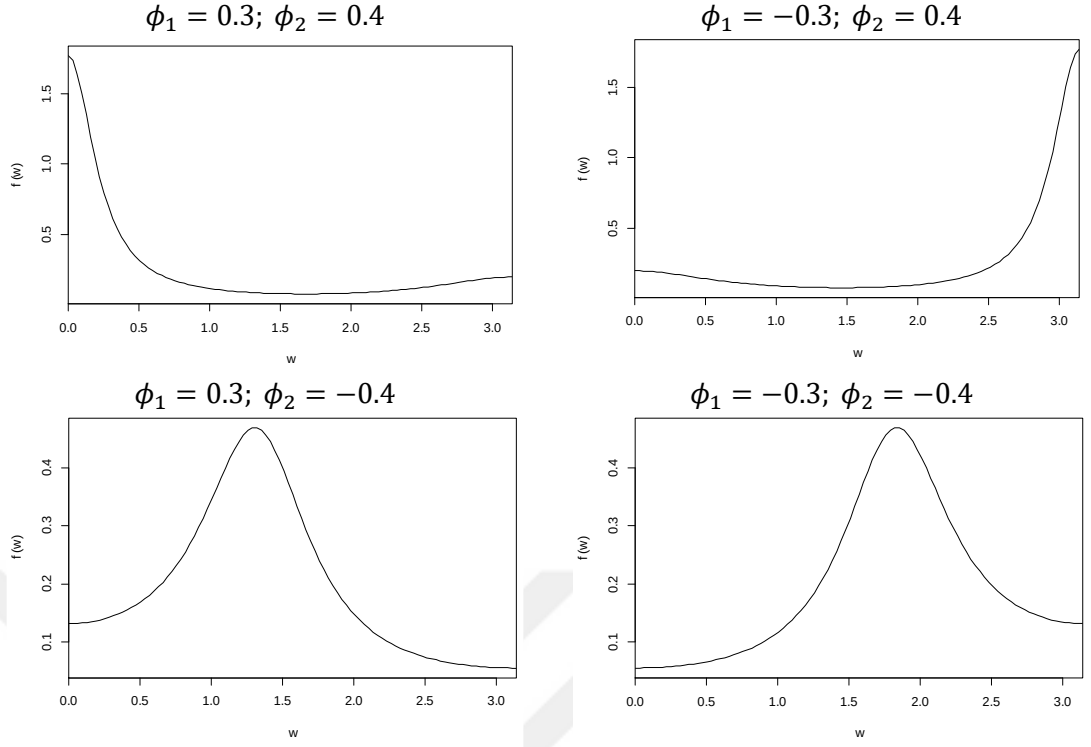
Spektrum. $AR(2)$ sürecinin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{1}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 - \phi_1 B^{-1} - \phi_2 B^{-2})}$$

olup, (2.56)'dan sürecin spektrumu,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{\sigma_e^2}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \phi_2 e^{-i2\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega} - \phi_2 e^{i2\omega})} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{(1 + \phi_1^2 + \phi_2^2 - 2\phi_1(1 - \phi_2) \cos \omega - 2\phi_2 \cos 2\omega)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Box vd. 1994, Wei 2006). Şekil 2.10'da farklı $AR(2)$ modelleri için spektral yoğunluk fonksiyonunun grafikleri sunulmaktadır.



Şekil 2.10 AR(2) modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu

2.4.3 Hareketli ortalama (Moving Average-MA) süreçleri

Hareketli ortalama süreçlerinde, zaman serisi başka bir serinin lineer birleşimi olarak ifade edilir. Bu serilere en basit örnek beyaz gürültü serisidir. Genel olarak bir MA serisi, beyaz gürültü serisinin gecikmeli değerlerinin ağırlıklı ortalaması olarak tanımlanır. Bu kısımda genel q -üncü dereceden hareketli ortalama sürecine ve uygulamada önemli bir yere sahip olan birinci ve ikinci dereceden hareketli ortalama süreçlerine yer verilecektir.

Hareketli ortalama süreçleri için tersinirlik koşulları

$$\dot{X}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \cdots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.59)$$

veya alternatif olarak,

$$\dot{X}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q) e_t = \theta(B) e_t$$

şeklinde gösterilen $MA(q)$ sürecinin tersinir olması için $\theta(B) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. Bununla birlikte $1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2 < \infty$ olduğundan sonlu hareketli ortalama süreci daima durağandır.

Hareketli ortalama süreçlerinin otokorelasyon fonksiyonu ve spektrumu

Otokorelasyon fonksiyonu. (2.59) ile verilen bir $MA(q)$ sürecinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = E[(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q})(e_{t-h} - \theta_1 e_{t-h-1} - \dots - \theta_q e_{t-h-q})]$$

şeklindedir. Dolayısıyla sürecin varyansı,

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma_e^2 \quad (2.60)$$

ve otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = \begin{cases} (-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \theta_2\theta_{h+2} + \dots + \theta_{q-h}\theta_q)\sigma_e^2, & h = 1, 2, \dots, q \\ 0, & h > q \end{cases}$$

olarak yazılır. Böylece sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \dots + \theta_{q-h}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2}, & h = 1, 2, \dots, q \\ 0, & h > q \end{cases} \quad (2.61)$$

olur. (2.61)'den görüldüğü gibi $MA(q)$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu, sürecin q derecesinden sonra sıfırlanır. Diğer bir deyişle bir hareketli ortalama sürecinin otokorelasyon fonksiyonu q gecikmeden sonra kesilir.

Spektrum. Bir $MA(q)$ süreci için $\psi(B) = \theta(B)$ olduğundan sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \theta(B) \theta(B^{-1})$$

şeklindedir. Böylelikle (2.46) kullanılarak sürecin spektrumu,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sigma_e^2 \theta(e^{-i\omega}) \theta(e^{i\omega}) \\ &= \sigma_e^2 (1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \dots - \theta_q e^{-iq\omega}) (1 - \theta_1 e^{i\omega} - \dots - \theta_q e^{iq\omega}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

olarak elde edilir.

Birinci dereceden hareketli ortalama süreci

Birinci dereceden hareketli ortalama süreci $MA(1)$,

$$\dot{X}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} = (1 - \theta_1 B)e_t$$

şeklindedir. Sürecin tersinir olması için θ_1 'in $-1 < \theta_1 < 1$ aralığında olması gerekir.

Bununla birlikte $1 + \theta_1^2$ sonlu olduğundan süreç θ_1 'in bütün değerleri için durağandır.

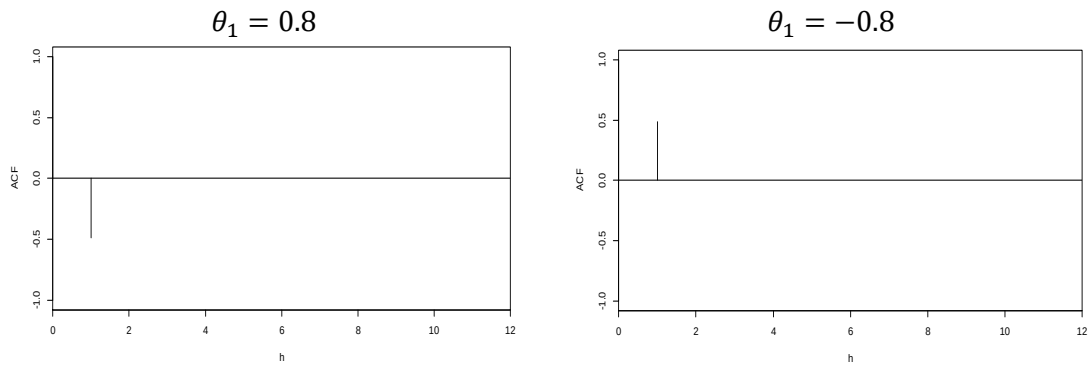
Otokorelasyon fonksiyonu. (2.60) kullanılarak sürecin varyansı,

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_e^2$$

ve (2.61) kullanılarak sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, & h = 1 \\ 0, & h \geq 2 \end{cases} \quad (2.63)$$

olarak elde edilir. $MA(1)$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu 1 gecikmede θ_1 'in işaretine bağlı olarak pozitif veya negatif bir sivri uç gösterir ve daha sonra kesilir (Şekil 2.11).



Şekil 2.11 $MA(1)$ modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. (2.4) ve (2.63) kullanılarak sürecin PACF'sinin $h = 1, 2, 3$ için,

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} = \frac{-\theta_1(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^4}$$

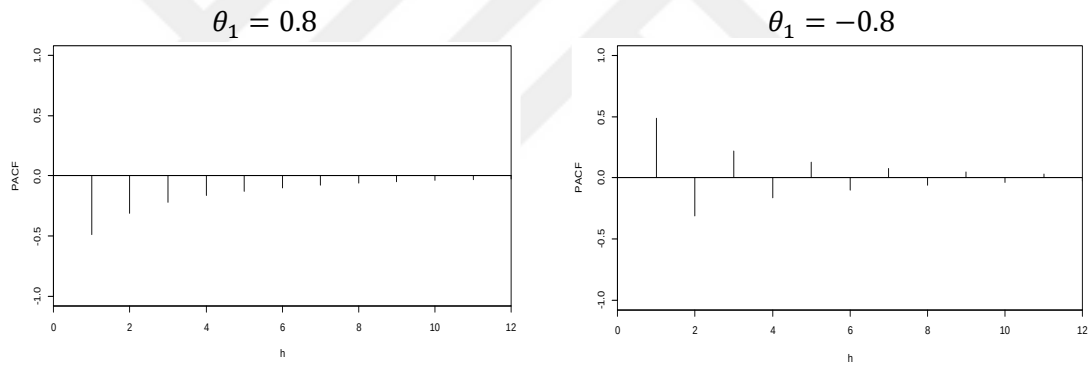
$$\phi_{22} = -\frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4} = \frac{-\theta_1^2(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^6}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3}{1 - 2\rho_1^2} = \frac{-\theta_1^3}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \theta_1^6} = \frac{-\theta_1^3(1 - \theta_1^2)}{1 - \theta_1^8}$$

olduğu görülür. Genel olarak PACF,

$$\phi_{hh} = \frac{-\theta_1^h(1 - \theta_1^2)}{(1 - \theta_1^{2(h+1)})}, \quad h \geq 1$$

şeklindedir. $MA(1)$ modeline ait ACF'nin $h = 1$ gecikmeden sonra kesilmesinin aksine PACF, θ_1 'in işaretine bağlı olarak alabileceği her iki formda da üstel olarak azalan bir yapıdadır. Eğer θ_1 pozitif ise kısmi otokorelasyonlar negatif bölgede yer alır. θ_1 'in negatif olması durumunda ise kısmi otokorelasyonlar işaret olarak birbirini izleyen formdadır (Şekil 2.12).



Şekil 2.12 $MA(1)$ modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu

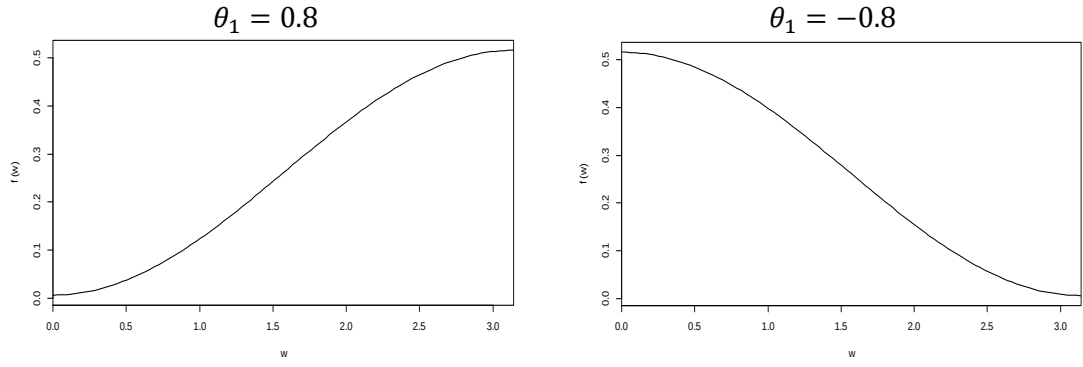
Spektrum. $MA(1)$ sürecinin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^{-1})$$

olup, (2.62)'nin kullanılmasıyla sürecin spektrumu,

$$f(\omega) = \sigma_e^2(1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega}) = \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos \omega)$$

olarak elde edilir. θ_1 pozitif olduğunda spektrum yüksek frekanslarda, θ_1 negatif olduğunda ise spektrum düşük frekanslarda baskındır (Şekil 2.13).



Şekil 2.13 $MA(1)$ modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu

İkinci dereceden hareketli ortalama süreci

İkinci dereceden hareketli ortalama süreci $MA(2)$,

$$\dot{X}_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) e_t$$

olarak tanımlanır ve süreç θ_1 ve θ_2 'nin bütün değerleri için durağandır. Bununla birlikte sürecin tersinir olması için $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$ karakteristik denkleminin köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. Dolayısıyla $MA(2)$ modeli için tersinirlik koşulu,

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_1 < 1 \\ \theta_2 - \theta_1 < 1 \\ -1 < \theta_2 < 1 \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Bu koşul, $AR(2)$ modelinin durağanlık koşuluna paraleldir.

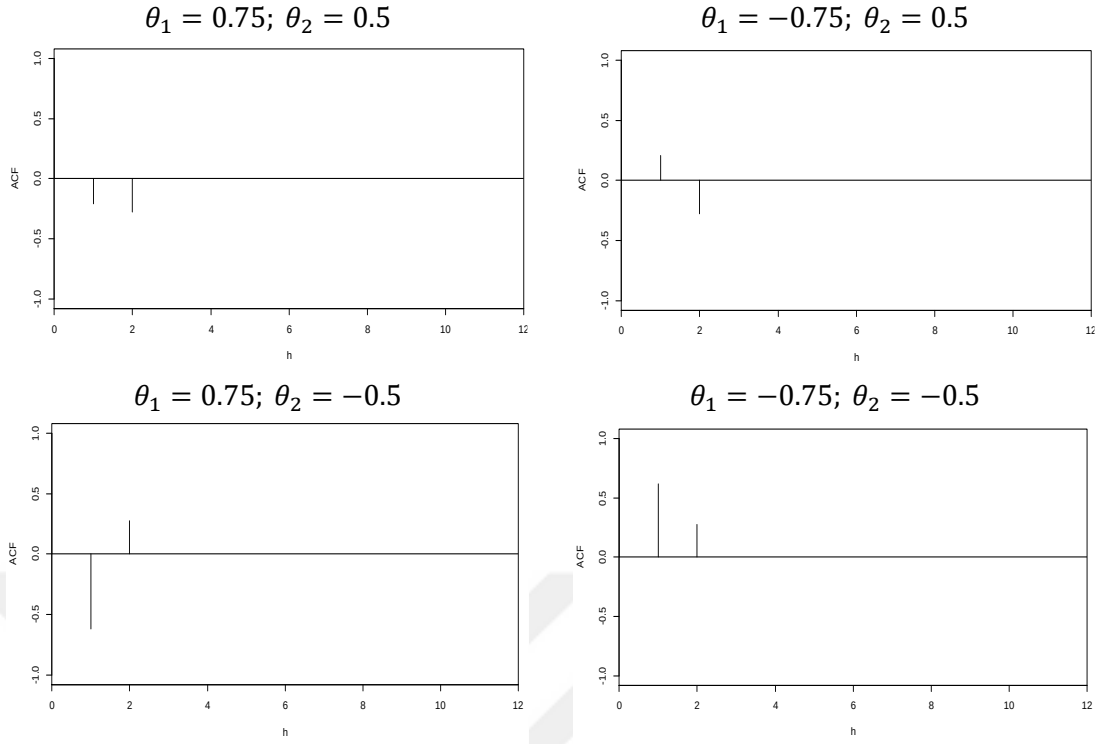
Otokorelasyon fonksiyonu. (2.60) kullanılarak sürecin varyansı,

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

ve (2.61) kullanılarak sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & h = 1 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & h = 2 \\ 0, & h > 2 \end{cases}$$

olarak elde edilir. Böylelikle $MA(2)$ süreci için otokorelasyon fonksiyonu $h = 2$ gecikmeden sonra kesilir (Şekil 2.14).



Şekil 2.14 $MA(2)$ modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. $h \geq 3$ için $\rho_h = 0$ olduğu bilgisi kullanılarak (2.4)'ten,

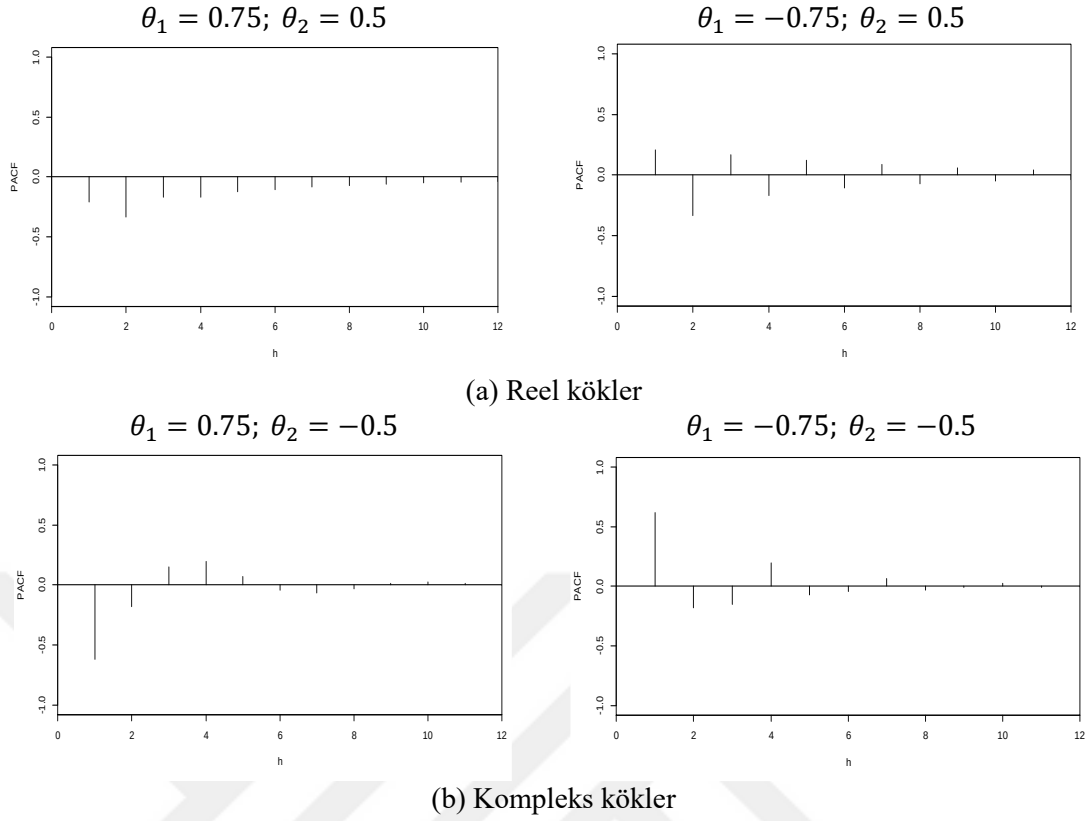
$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_1^3 - \rho_1\rho_2(2 - \rho_2)}{1 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2(1 - \rho_2)}$$

⋮

elde edilir. PACF θ_1 ve θ_2 parametrelerine veya eşdeğer olarak $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$ karakteristik denkleminin köklerine bağlı olarak, üstel olarak veya sönümlü bir sinüs dalgası olarak gittikçe azalır (Şekil 2.15). Karakteristik denklemin kökleri kompleks ise PACF sönümlü sinüs dalgası şeklinde olacaktır (Şekil 2.15b).



Şekil 2.15 $MA(2)$ modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu

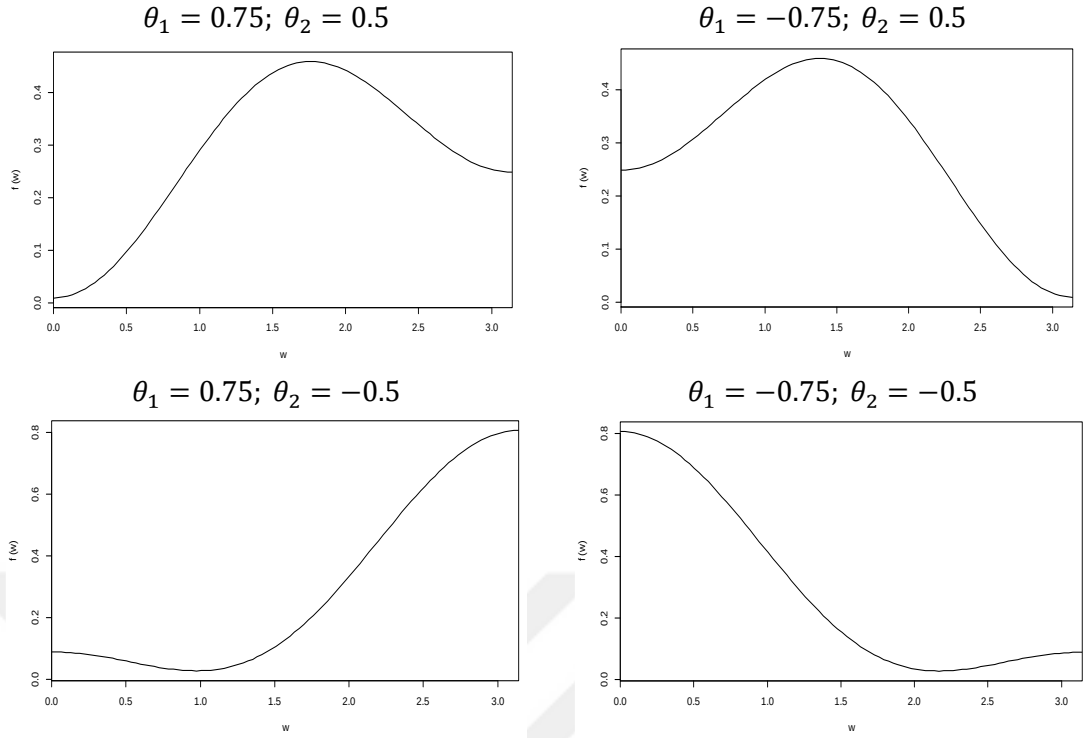
Spektrum. $MA(2)$ sürecinin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \theta_1 B^{-1} - \theta_2 B^{-2})$$

olup, (2.62)'nin kullanılmasıyla sürecin spektrumu,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sigma_e^2(1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \theta_2 e^{-i2\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega} - \theta_2 e^{i2\omega}) \\ &= \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1(1 - \theta_2) \cos \omega - 2\theta_2 \cos 2\omega) \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Box vd. 1994, Wei 2006). Farklı $MA(2)$ modelleri için spektrumun grafiği Şekil 2.16'daki gibidir.



Şekil 2.16 $MA(2)$ modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu

2.4.4 Karma otoregresif hareketli ortalama (AutoRegressive Moving Average-ARMA) süreçleri

Daha önce belirtildiği gibi durağan ve tersinir bir süreç otoregresif form veya hareketli ortalama formu ile gösterilebilir. Ancak her iki gösterimde de sonlu dereceden modeller için bile söz konusu modellerin çok fazla parametre içerebilmesi durumu tahminlerin etkinliğini azaltmaktadır. Bu yüzden modele hem otoregresif hem de hareketli ortalama terimlerinin dâhil edilmesi zorunlu olabilir. Pür otoregresif ve pür hareketli ortalama süreçlerinin doğal bir uzantısı, hem otoregresif hem hareketli ortalama süreçlerini içeren karma otoregresif hareketli ortalama sürecidir.

Karma süreçler için durağanlık ve tersinirlik koşulları

Bir otoregresif hareketli ortalama süreci $ARMA(p, q)$,

$$\hat{X}_t = \phi_1 \hat{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \hat{X}_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.64)$$

olarak ifade edilir. Süreç alternatif olarak,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \dot{X}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) e_t$$

veya

$$\phi(B) \dot{X}_t = \theta(B) e_t$$

formunda gösterilebilir. Sürecin durağan olması için $\phi(B) = 0$ karakteristik denkleminin bütün kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. Benzer şekilde tersinirlik için $\theta(B) = 0$ 'ın köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. Ayrıca $\phi(B) = 0$ ve $\theta(B) = 0$ denklemlerinin ortak kökleri olmadığı varsayılır.

Böylece durağan ve tersinir $ARMA(p, q)$ süreci hem,

$$\dot{X}_t = \psi(B) e_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j}$$

şeklinde sonsuz hareketli ortalama gösterimine hem de,

$$\pi(B) \dot{X}_t = \dot{X}_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \dot{X}_{t-j} = e_t$$

şeklinde sonsuz otoregresif gösterime sahip olur. ψ_j ağırlıkları $\phi(B)\psi(B) = \theta(B)$ ilişkisinden ve π_j ağırlıkları ise $\theta(B)\pi(B) = \phi(B)$ ilişkisinden belirlenir. Bu ilişkilerden ψ_j ve π_j ağırlıkları ϕ_i ve θ_i katsayıları açısından rekürsif olarak hesaplanabilir.

Karma süreçlerin otokorelasyon fonksiyonu ve spektrumu

Otokorelasyon fonksiyonu. Bir otoregresif hareketli ortalama sürecinin otokorelasyon fonksiyonunu elde etmek için öncelikle (2.64)'te verilen eşitliğin her iki tarafı $\dot{X}_{t-h}$ ile çarpılarak,

$$\dot{X}_{t-h} \dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-h} \dot{X}_{t-1} + \dots + \phi_p \dot{X}_{t-h} \dot{X}_{t-p} + \dot{X}_{t-h} e_t - \theta_1 \dot{X}_{t-h} e_{t-1} - \dots - \theta_q \dot{X}_{t-h} e_{t-q}$$

elde edilir. Daha sonra bu ifadede her bir terimin beklenen değerinin alınmasıyla,

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \dots + \phi_p \gamma_{h-p} + E(\dot{X}_{t-h} e_t) - \theta_1 E(\dot{X}_{t-h} e_{t-1}) - \dots - \theta_q E(\dot{X}_{t-h} e_{t-q})$$

elde edilir. X_{t-h} sadece $\dot{X}_{t-h} = \psi(B)e_{t-h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-h-j}$ şeklindeki sonsuz otoregresif hareketli ortalama gösterimi sebebiyle $t-h$ zamanına kadar meydana gelmiş olan şoklara bağlı olduğundan,

$$E(\dot{X}_{t-h}e_{t-i}) = \begin{cases} 0, & h > 0 \\ \psi_{-h}\sigma_e^2, & h \leq 0 \end{cases}$$

olur. Dolayısıyla $\theta_0 = -1$ olmak üzere,

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \dots + \phi_p\gamma_{h-p} - \sigma_e^2(\theta_h\psi_0 + \theta_{h-1}\psi_1 + \dots + \theta_q\psi_{q-h}) \quad (2.65)$$

yazılır. Buradan sürecin otokovaryans fonksiyonunun,

$$\gamma_h = \phi_1\gamma_{h-1} + \dots + \phi_p\gamma_{h-p}, \quad h \geq (q+1)$$

ve dolayısıyla otokorelasyon fonksiyonunun,

$$\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \dots + \phi_p\rho_{h-p}, \quad h \geq (q+1)$$

olduğu görülür. $ARMA(p,q)$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu $AR(p)$ sürecinde olduğu gibi q gecikmeden sonra gittikçe azalır ve bu sadece modeldeki otoregresif parametrelere bağlıdır. Bununla birlikte $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$ şeklindeki ilk q otokorelasyon hem otoregresif hem de hareketli ortalama parametrelerine bağlıdır.

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. Bir $ARMA$ sürecinin PACF'si $\phi_p(B) = 0$ ve $\theta_q(B) = 0$ denkleminin köklerine bağlı olarak sönümlü sinüs dalgalarının veya üstel azalmaların bir karışımı olarak gittikçe azalır.

Varyans. (2.65)'te $h = 0$ alındığında sürecin varyansı,

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \dots + \phi_p\gamma_p + \sigma_e^2(1 - \theta_1\psi_1 - \dots - \theta_q\psi_q)$$

olarak elde edilir. Bu ifade $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ değerlerini elde etmek maksadıyla $h = 1, 2, \dots, p$ için (2.65)'te yer alan p tane denklem ile birlikte çözülmelidir.

Spektrum. $ARMA(p,q)$ süreci için $\psi(B) = \theta(B)/\phi(B)$ olduğundan sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{\theta(B)\theta(B^{-1})}{\phi(B)\phi(B^{-1})}$$

olur. Böylelikle (2.46) kullanılarak sürecin spektrumu,

$$f(\omega) = \sigma_e^2 \frac{\theta(e^{-i\omega})\theta(e^{i\omega})}{\phi(e^{-i\omega})\phi(e^{i\omega})} \quad (2.66)$$

$$= \sigma_e^2 \frac{(1 - \theta_1 e^{-i\omega} - \dots - \theta_q e^{-iq\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega} - \dots - \theta_q e^{iq\omega})}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega} - \dots - \phi_p e^{-ip\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega} - \dots - \phi_p e^{ip\omega})}$$

olarak elde edilir.

Birinci dereceden otoregresif birinci dereceden hareketli ortalama süreci

Uygulamada önemli bir yere sahip olan $ARMA(1,1)$ süreci,

$$\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \quad (2.67)$$

veya alternatif olarak,

$$(1 - \phi_1 B)\dot{X}_t = (1 - \theta_1 B)e_t$$

şeklinde gösterilir. Durağanlık için $|\phi_1| < 1$ olması, tersinirlik için ise $|\theta_1| < 1$ olması gerekir. $\phi_1 = 0$ olduğunda (2.67) bir $MA(1)$ sürecine ve $\theta_1 = 0$ olduğunda ise bir $AR(1)$ sürecine indirgenir. Böylelikle $AR(1)$ ve $MA(1)$ süreçleri $ARMA(1,1)$ sürecinin özel durumlarıdır.

Pür otoregresif gösterim açısından,

$$\pi(B)\dot{X}_t = a_t$$

yazılır. Burada,

$$\pi(B) = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = \frac{(1 - \phi_1 B)}{(1 - \theta_1 B)}$$

şeklindedir. Yani,

$$(1 - \theta_1 B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 - \dots) = (1 - \phi_1 B)$$

veya

$$[1 - (\pi_1 + \theta_1)B - (\pi_2 - \pi_1 \theta_1)B^2 - (\pi_3 - \pi_2 \theta_1)B^3 - \dots] = (1 - \phi_1 B)$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafındaki B^j 'nin katsayıları eşitlenek,

$$\pi_j = \theta_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad j \geq 1$$

elde edilir.

$ARMA(1,1)$ süreci pür hareketli ortalama gösterimi ile,

$$X_t = \psi(B)a_t = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} a_t$$

olarak yazılır. Buradan,

$$(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \psi_3 B^3 + \dots) = (1 - \theta_1 B)$$

yani,

$$[1 + (\psi_1 - \phi_1)B + (\psi_2 - \psi_1 \phi_1)B^2 + \dots] = (1 - \theta_1 B)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad j \geq 1$$

elde edilir.

Otokorelasyon fonksiyonu. Sürecin otokovaryans fonksiyonunu elde etmek için (2.67)'nin her iki tarafı X_{t-h} ile çarpılarak,

$$\dot{X}_{t-h}\dot{X}_t = \phi_1 \dot{X}_{t-h}\dot{X}_{t-1} + \dot{X}_{t-h}e_t - \theta_1 \dot{X}_{t-h}e_{t-1}$$

ve bu ifadede beklenen değer alınarak,

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + E(\dot{X}_{t-h}e_t) - \theta_1 E(\dot{X}_{t-h}e_{t-1}) \quad (2.68)$$

elde edilir. $h = 0$ için,

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + E(\dot{X}_t e_t) - \theta_1 E(\dot{X}_t e_{t-1})$$

olur. $E(\dot{X}_t e_t) = \sigma_e^2$ ve

$$E(\dot{X}_t e_{t-1}) = \phi_1 E(\dot{X}_{t-1} e_{t-1}) + E(e_t e_{t-1}) - \theta_1 E(e_{t-1}^2) = (\phi_1 - \theta_1) \sigma_e^2$$

olduğundan,

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_e^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_e^2 \quad (2.69)$$

olur. $h = 1$ olduğunda (2.68)'den,

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2 \quad (2.70)$$

elde edilir. (2.70), (2.69)'da yerine koyulursa,

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 - \phi_1 \theta_1 \sigma_e^2 + \sigma_e^2 - \phi_1 \theta_1 \sigma_e^2 + \theta_1^2 \sigma_e^2$$

yani,

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \sigma_e^2$$

elde edilir. Böylelikle,

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_e^2 = \frac{\phi_1(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \sigma_e^2 - \theta_1 \sigma_e^2 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{(1 - \phi_1^2)} \sigma_e^2$$

olur. $h \geq 2$ için (2.68)'den,

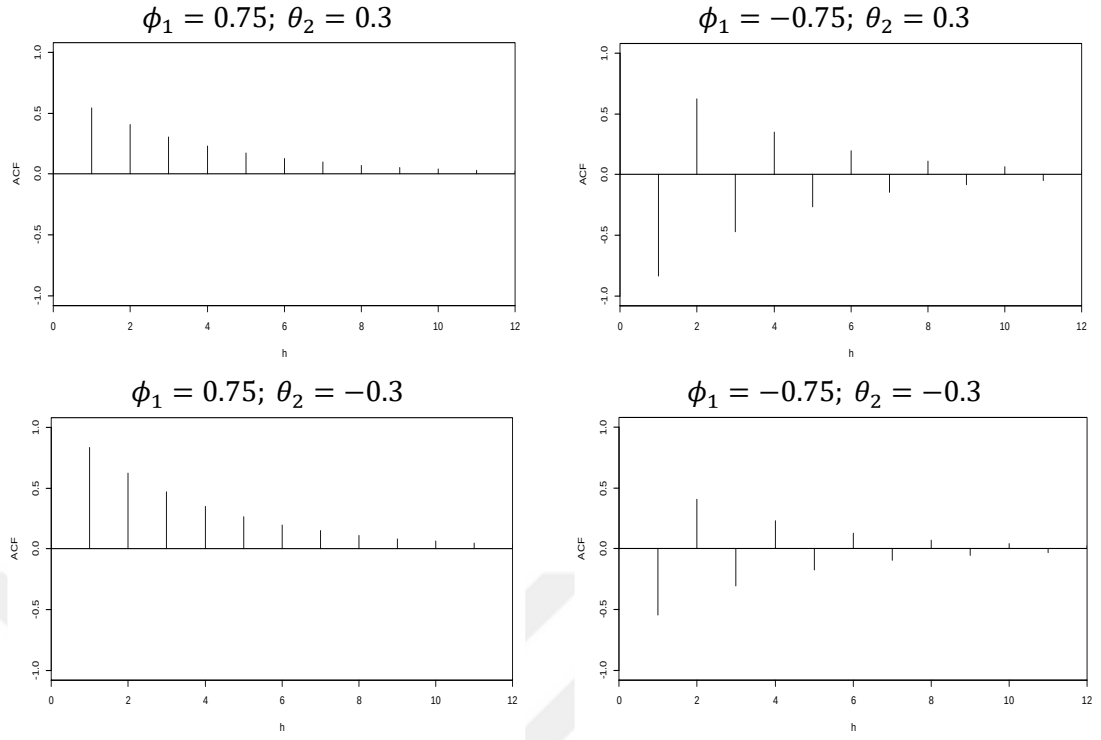
$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1}, \quad h \geq 2$$

elde edilir. Buradan $ARMA(1,1)$ modeli için otokorelasyon fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\rho_h = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}, & h = 1 \\ \phi_1 \rho_{h-1}, & h \geq 2 \end{cases}$$

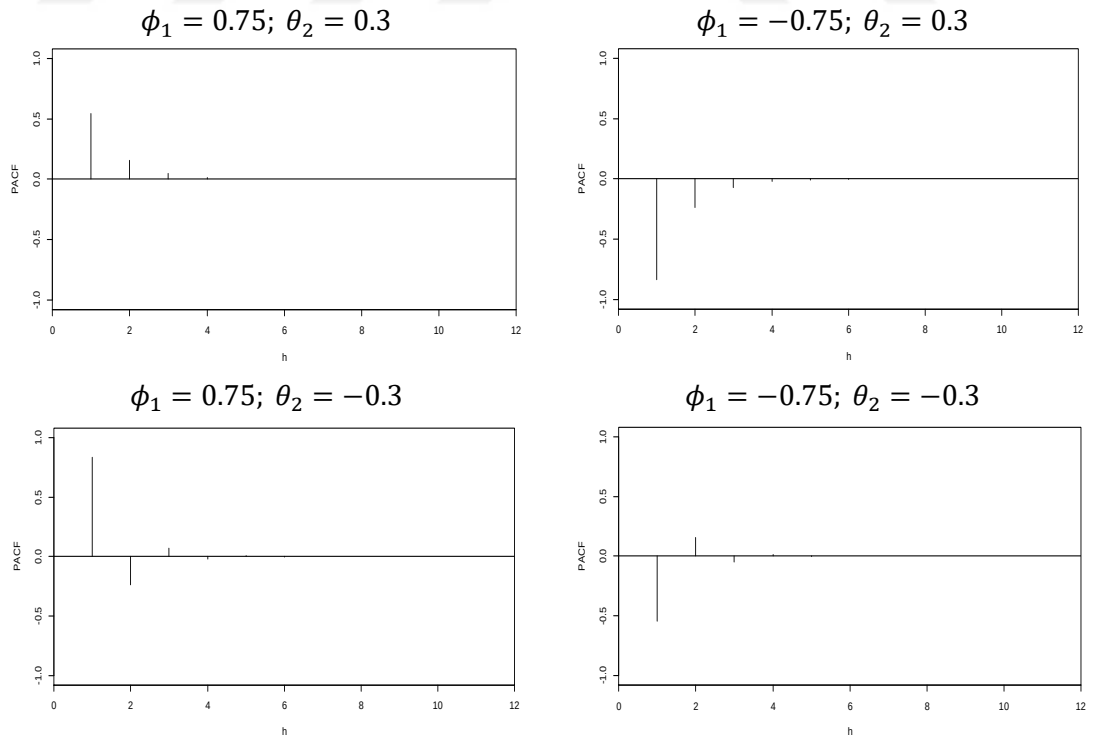
Bir $ARMA(1,1)$ modelinin otokorelasyon fonksiyonu, hem $AR(1)$ hem de $MA(1)$ süreçlerinin karakteristiklerini birleştirir. Hareketli ortalama parametresi θ_1 , ρ_1 'in hesabında yer alır. ρ_1 'den sonra bir $ARMA(1,1)$ modelinin otokorelasyon fonksiyonu, bir $AR(1)$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu ile aynı kalıbı izler (Şekil 2.17).

Kısmi otokorelasyon fonksiyonu. $ARMA(1,1)$ sürecinin kısmi otokorelasyon fonksiyonu $\phi_{11} = \rho_1$ başlangıç değeri ile başlar ve ϕ_1 ve θ_1 'in işaret ve büyüklüklerine bağlı olarak üstel olarak gittikçe azalır (Şekil 2.18).



Şekil 2.17 ARMA(1,1) modeli için teorik otokorelasyon fonksiyonu

&



Şekil 2.18 ARMA(1,1) modeli için teorik kısmi otokorelasyon fonksiyonu

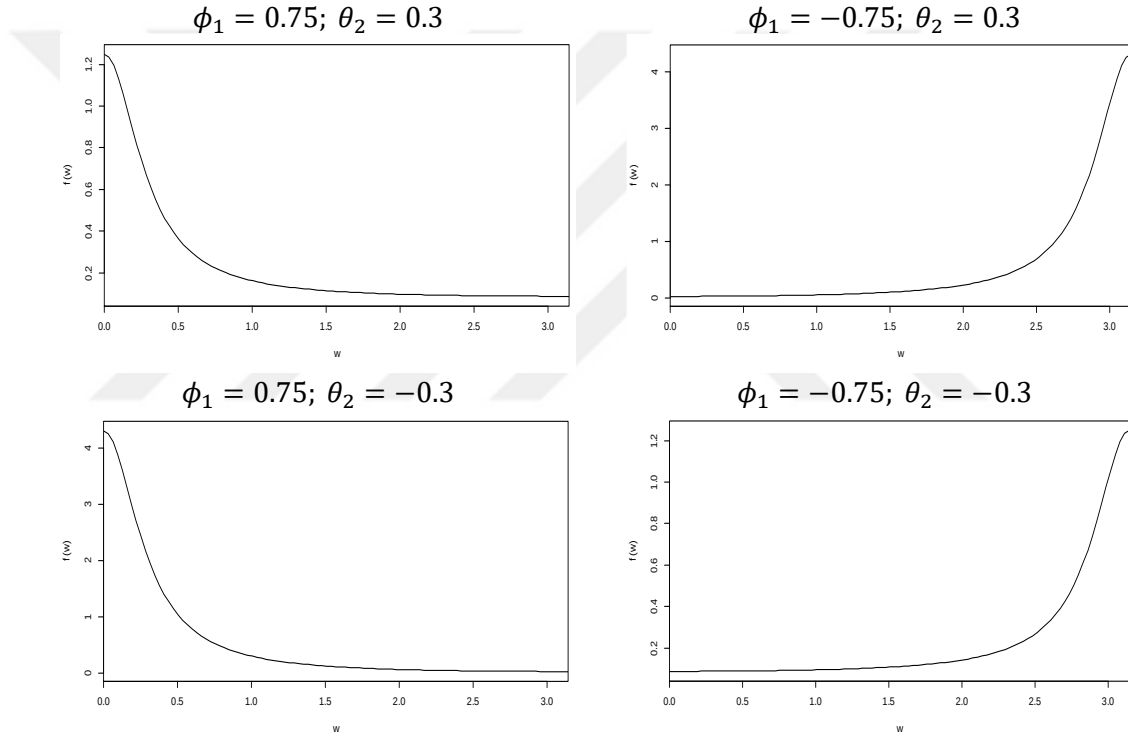
Spektrum. $ARMA(1,1)$ sürecinin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_1 B^{-1})}{(1 - \phi_1 B)(1 - \phi_1 B^{-1})}$$

olur. Böylelikle (2.46) kullanılarak sürecin spektrumu,

$$f(\omega) = \sigma_e^2 \frac{(1 - \theta_1 e^{-i\omega})(1 - \theta_1 e^{i\omega})}{(1 - \phi_1 e^{-i\omega})(1 - \phi_1 e^{i\omega})} = \sigma_e^2 \frac{(1 + \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos \omega)}{(1 + \phi_1^2 - 2\phi_1 \cos \omega)}$$

olarak elde edilir (Box vd. 1994, Wei 2006). Spektral yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 2.19'daki gibidir.



Şekil 2.19 $ARMA(1,1)$ modeli için teorik spektral yoğunluk fonksiyonu

2.5 Durağan Olmayan Süreçler

Bir önceki başlık altında ele alınan zaman serisi süreçlerinin tamamı durağan süreçlerdir. Fakat uygulamada karşılaşılan çoğu zaman serisi özellikle de iktisat ve işletme alanlarında incelenen seriler durağan değildir. Durağan olmayan zaman serileri ortalamasının, varyansın ya da her ikisinin zamana bağlı olması şeklinde ortaya çıkabilir (Wei 2006). Bunlardan ilkinin örnekleri uygulamalı literatürde oldukça sık görülür,

fakat heterojen varyanslara dair de birçok örnek vardır. Bununla birlikte durağan olmayan zaman serilerinin bir diğer önemli sınıfı, durağan olmayan stokastik fark denklemlerine uyan zaman serileridir (Fuller 1996). Bu bölümde bu tarz serileri modellemede kullanılan model sınıfları ele alınmıştır.

2.5.1 Deterministik trend modelleri

Durağan olmayan bir sürecin ortalama fonksiyonu zamanın deterministik bir trendi ile temsil edilebilir. Böyle bir durumda, olayı tanımlamak için standart regresyon modeli kullanılabilir. Örneğin e_t sıfır ortalama beyaz gürültü serisi olmak üzere, ortalama fonksiyonu $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t$ şeklinde bir lineer trende uyuyorsa, aşağıdaki deterministik lineer trend modeli kullanılabilir:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + e_t$$

$\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ şeklindeki deterministik kuadratik bir ortalama fonksiyonu için aşağıdaki model kullanılabilir:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + e_t$$

Genel olarak eğer deterministik trend zamanın k -ıncı dereceden bir polinomu ile tanımlanabiliyorsa, süreç aşağıdaki şekilde modellenenebilir:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_k t^k + e_t$$

Deterministik trendin bir sinüs-kosinüs eğrisi ile temsil edilebilmesi durumunda ise aşağıdaki model kullanılabilir:

$$\begin{aligned} X_t &= v_0 + v \cos(\omega t + \theta) + e_t \\ &= v_0 + \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) + e_t \end{aligned}$$

Burada,

$$\alpha = v \cos \theta, \quad \beta = -v \sin \theta$$

$$v = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ve

$$\theta = \tan^{-1}(-\beta/\alpha)$$

şeklindedir. Ayrıca v eğrinin genliği, ω frekansı ve θ ise fazı olarak adlandırılır (bkz. Bölüm 2.2.3). Genel olarak,

$$X_t = v_0 + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t) + e_t$$

modeli elde edilir ve bu model çoğunlukla *gizli periyodikliklerin modeli (the model of hidden periodicities)* olarak adlandırılır. Tüm bu modeller standart regresyon analizi kullanılarak analiz edilebilir (Wei 2006).

2.5.2 Stokastik trend modelleri

Birçok ampirik zaman serisi sabit olmayan ortalamaya sahipmiş gibi davranmasına rağmen yerel düzey (local level) ve/veya trend göz ardı edildiğinde, serinin bir kısmının herhangi bir diğer kısmına oldukça benzer davrandığı görülebilir. Başka bir deyişle dalgalanmaların meydana geldiği düzeyin (level) farklı zamanlarda farklı olabilmesine rağmen düzeylerdeki farklılıklar göz önünde tutulduğunda serinin genel davranışı benzer olabilir. Bu tür durağan olmama davranışı *homojen durağan olmama* olarak adlandırılır. ARMA modelleri açısından sürecin durağan olmaması, AR polinomunun bazı köklerinin birim çemberin dışında yer almamasından kaynaklanır. Bununla birlikte homojenliğin yapısı itibariyle, bu tip homojen durağan olmayan serilerin yerel davranışı düzeyinden bağımsızdır (Box vd. 1994, Wei 2006).

$\varphi(B)$ serinin davranışını tanımlayan genelleştirilmiş otoregresif operatör olmak üzere, herhangi bir c sabiti için,

$$\varphi(B)(X_t + c) = \varphi(B)X_t \quad (2.71)$$

olarak yazılır. Burada $\varphi(B) = 0$ denkleminin köklerinden en az biri birim çember üzerindedir. (2.71) denklemi, pozitif d değerleri için $\varphi(B)$ operatörünün

$$\varphi(B) = \phi(B)(1 - B)^d$$

formunda olması gerektiği anlamına gelir. Burada $\phi(B)$ durağan otoregresif operatördür. Böylece homojen durağan olmayan bir seri, serinin uygun bir farkı alınarak durağan bir seriye indirgenebilir. Başka bir deyişle $d \geq 1$ tamsayısı için, durağan olmayan $\{X_t\}$ serisinin d -inci fark serisi $\{(1 - B)^d X_t\}$ durağan olabilir.

Örneğin d -inci farkı alınmış seri bir beyaz gürültü sürecine uyuyorsa,

$$(1 - B)^d X_t = e_t$$

yazılır. Homojen durağan olmayan serilerin içerdiği anlamı görmek için burada $d = 1$ alınır,

$$(1 - B)X_t = e_t$$

veya

$$X_t = X_{t-1} + e_t$$

elde edilir. $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ verildiğinde t zamanındaki serinin düzeyi,

$$\mu_t = X_{t-1}$$

olur. Diğer bir deyişle $d \geq 1$ için $(1 - B)^d X_t$ 'deki X_t sürecinin ortalama düzeyi zaman süresince stokastik olarak değişir. Bu sonuç önceki bölümde bahsedilen, t zamanındaki sürecin ortalama düzeyinin zamanın pür deterministik bir fonksiyonu olduğu deterministik trend modelinden farklıdır.

Sonuç olarak, homojen durağan olmayan davranış bazen durağanlık için sürecin d -inci farkını gerektiren bir model aracılığıyla gösterilebilir. Bu durum durağan olmayan süreçleri tanımlamada kullanılan güçlü bir modele (otoregresif bütünleşik hareketli ortalama sürecine) işaret eder (Wei 2006).

2.5.3 Otoresif bütünleşik hareketli ortalama (AutoRegressive Integrated Moving Average-ARIMA) Modelleri

Bölüm 2.4.4'te, $\phi(B)$ ve $\theta(B)$ sırasıyla p ve q dereceden polinomlar olmak üzere,

$$\phi(B)\dot{X}_t = \theta(B)e_t$$

şeklindeki karma otoregresif hareketli ortalama modeli incelenmiş ve durağanlık için $\phi(B) = 0$ 'ın köklerinin birim çemberin dışında olması gerektiğinden bahsedilmişti. Durağan olmayan süreç elde etmenin doğal bir yolu bu kısıtlamayı gevşetmektir. Örnek olarak $|\phi| < 1$ için durağan olan,

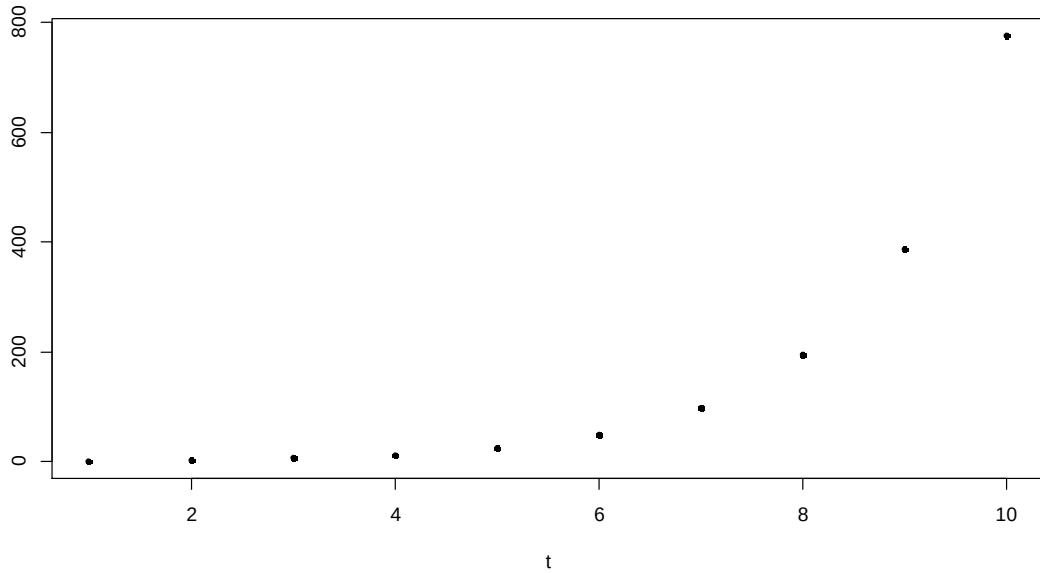
$$(1 - \phi B)\dot{X}_t = e_t$$

şeklindeki birinci dereceden otoregresif sürecin davranışı, durağan aralığın dışındaki bir değer olan $\phi = 2$ için incelensin. e_t $\sigma_e^2 = 1$ olan rasgele normal sapmaların bir kümesi ve $\dot{X}_0 = 0.7$ olmak üzere, $\dot{X}_t = 2\dot{X}_{t-1} + e_t$ modelinden üretilen $\dot{X}_t$ serisi Çizelge 2.3'te, serinin grafiği ise Şekil 2.20'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.3 Durağan olmayan birinci dereceden bir otoregresif sürecin ilk 11 değeri

t	e_t	$\dot{X}_t$	t	e_t	$\dot{X}_t$
0		0.7	6	-0.1	49.3
1	-0.1	1.3	7	-0.2	98.4
2	0.8	3.4	8	-1.1	195.7
3	-0.5	6.3	9	-3.0	388.4
4	-0.6	12.0	10	-0.6	776.2
5	0.7	24.7			

Serinin kısa bir giriş periyodundan sonra üstel bir seyir izlediği ve e 'lerin sonraki kısımlarda hemen hemen hiç rol oynamadığı görülür. Durağanlık şartını ihlal eden daha yüksek dereceden süreçler tarafından üretilen serilerin davranışı da buna benzerdir. Ayrıca bu davranış hareketli ortalama terimlerinin modelde yer alması durumunda da aynıdır. Bu tür durağan olmayan modeller, bakteriyel büyüme davranışı gibi patlayıcı (explosive) veya evrimsel (evolutionary) davranışı temsil eder. Bu modeller için $\phi(B) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin içerisinde yer alır.



Şekil 2.20 $\sigma_e^2 = 1$ olmak üzere $\dot{X}_t = 2\dot{X}_{t-1} + e_t$ durağan olmayan birinci dereceden otoregresif sürecinin bir realizasyonu

Durağanlık şartının ihlal edildiği bir diğer durum $\phi(B) = 0$ denkleminin köklerinin birim çember üzerinde yer alması durumudur ki durağan olmama davranışı incelenirken bu durum dikkate alınır. Özellikle mevsimsel olmayan seriler genellikle bu köklerden bir veya daha fazlasının birim olduğu modeller tarafından iyi temsil edilir. Bu modellerde homojenlik serinin patlayıcı (explosive) davranış sergilemesini engeller (Box vd. 1994). Bu kısımda söz konusu homojen durağan olmayan modeller incelenmiştir.

(p, d, q) dereceden otoregresif bütünleşik hareketli ortalama süreci

$\varphi(B)$ durağan olmayan otoregresif operatör olmak üzere,

$$\varphi(B)\dot{X}_t = \theta(B)e_t$$

modeli ele alınsın. Burada $\varphi(B) = 0$ 'ın köklerinin d tanesi birimdir ve geri kalanı birim çemberin dışında bulunur. Bu model,

$$\varphi(B)\dot{X}_t = \phi(B)(1 - B)^d \dot{X}_t = \theta(B)e_t \quad (2.72)$$

formunda ifade edilebilir. Burada $\phi(B)$ durağan otoregresif operatördür. $\nabla = 1 - B$ fark alma (differencing) operatörü olmak üzere, $d \geq 1$ için $\nabla^d \dot{X}_t = \nabla^d X_t$ olduğundan, (2.72) ile verilen model,

$$\phi(B)\nabla^d X_t = \theta(B)e_t \quad (2.73)$$

olarak yazılabilir. Eşdeğer olarak süreç,

$$\phi(B)W_t = \theta(B)e_t$$

ve

$$W_t = \nabla^d X_t$$

şeklindeki iki denklem tarafından tanımlanır. Böylece serinin d -inci farkının durağan ve tersinir bir ARMA süreci ile temsil edilebildiği görülür.

Eğer (2.73) modelinde $\phi(B)$ otoregresif operatörü p dereceye sahipse, serinin d -inci farkı alınmışsa ve $\theta(B)$ hareketli ortalama operatörü q dereceye sahipse, bu durumda

model (p, d, q) dereceden bir ARIMA modeli veya basitçe bir ARIMA(p, d, q) modeli olarak tanımlanır.

θ_0 sabit terimin ilave edilmesiyle (2.73) ile verilen ARIMA modelinin genel formu,

$$\varphi(B)X_t = \phi(B)\nabla^d X_t = \theta_0 + \theta(B)e_t \quad (2.74)$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

şeklindedir. Ayrıca,

- i. $\phi(B)$ otoregresif operatör olarak adlandırılır; durağan olduğu varsayılır, yani $\phi(B) = 0$ 'ın kökleri birim çemberin dışındadır.
- ii. $\varphi(B) = \phi(B)\nabla^d$ genelleştirilmiş otoregresif operatör olarak adlandırılır; durağan olmayan operatördür, yani $\varphi(B) = 0$ 'ın köklerinden d tanesi birime eşittir.
- iii. $\theta(B)$ hareketli ortalama operatörü olarak adlandırılır; tersinir olduğu varsayılır, yani $\theta(B) = 0$ 'ın kökleri birim çemberin dışındadır.

$d = 0$ olduğunda (2.74) ile verilen model durağan bir süreci temsil eder. Durağanlık ve tersinirlik gereksinimleri birbirinden bağımsız olarak uygulanır ve genellikle $\phi(B)$ ve $\theta(B)$ operatörleri ortak çarpana sahip değildir (Box vd. 1994, Wei 2006).

ARIMA modelinin bazı özel durumları

Aşağıdaki modeller, (2.73)'te verilen durağan olmayan ($d \geq 1$) modelin sıklıkla karşılaşılan bazı özel durumlarını göstermektedir:

(0, 1, 1) süreci. $p = 0, d = 1, q = 1, \phi(B) = 1, \theta(B) = 1 - \theta_1 B$ 'ye karşılık gelen,

$$\nabla X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} = (1 - \theta_1 B)e_t$$

sürecidir.

(0, 2, 2) süreci. $p = 0, d = 2, q = 2, \phi(B) = 1, \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$ 'ye karşılık gelen,

$$\nabla^2 X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) e_t$$

sürecidir.

(1, 1, 1) süreci. $p = 1, d = 1, q = 1, \phi(B) = 1 - \phi_1 B, \theta(B) = 1 - \theta_1 B$ 'ye karşılık gelen,

$$\nabla X_t - \phi_1 \nabla X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

veya,

$$(1 - \phi_1 B) \nabla X_t = (1 - \theta_1 B) e_t$$

sürecidir (Box vd. 1994).

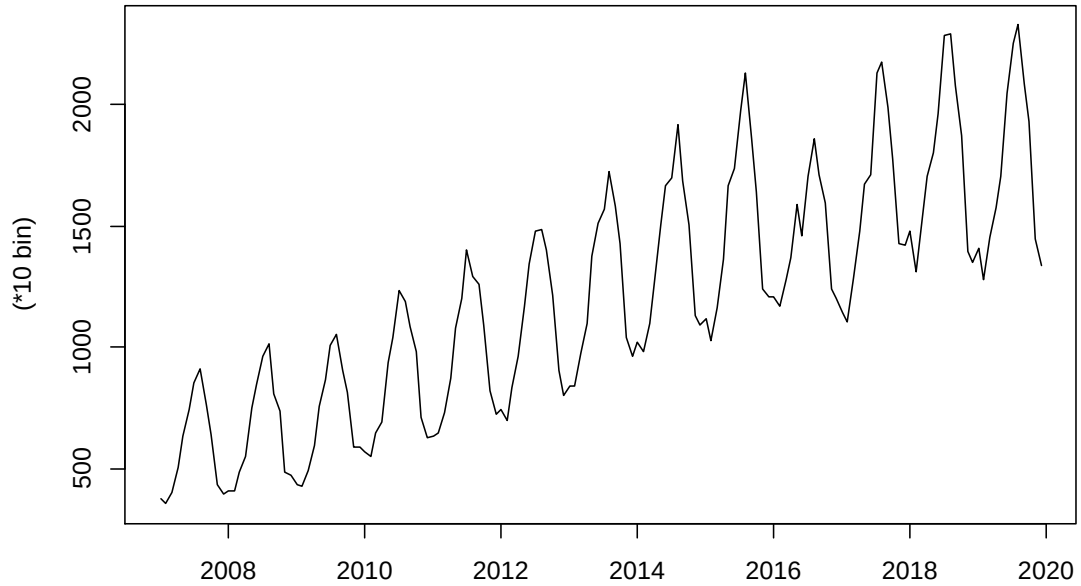
2.6 Mevsimsel Süreçler

Önceki iki alt başlık altında durağan ve durağan olmayan zaman serilerinin gösteriminde kullanılan modeller incelenmiştir. Bu bölümde ise bu modellerin mevsimsel serilere uyarlaması ile elde edilen, başka bir deyişle zaman içerisinde meydana gelen mevsimsel kalıpların da dikkate alındığı modeller ele alınmıştır.

Mevsimsel etkiler içeren bir seride, her s tane temel mevsimsel zaman aralığından sonra ortaya çıkan benzer bir yapı söz konusudur. Başka bir deyişle, s 'nin katları olan mevsimsel gecikmelerde belirgin bir şekilde geçmişe bağımlılık olduğu gözlenir. Burada s mevsimsel periyot olarak da bilinir. Örnek olarak, aylık verilerde $s = 12$ 'nin katları olan gecikmelerde güçlü bir otokorelasyon olabilir. Bu durumda belirli bir aya ilişkin gözlemlerin farklı yıllardaki aynı aylara ilişkin gözlemlere benzer olma eğilimi vardır. Bununla birlikte s 'nin başka değerler aldığı örneklerle de karşılaşılabilir. Örneğin yıllar boyunca mevsimsel etkiler gösteren çeyreklik bir veri seti için $s = 4$ 'tür. Bu durumda ise yine veri seti boyunca birinci çeyreğe ait gözlemler birbirine benzer olma eğilimindedir. Aynı durum diğer çeyreklere ait gözlemler için de geçerlidir. Mevsimsel etkiler turizm ve inşaat gibi çoğu ticari ve ekonomik faaliyetleri etkileyen hava durumu, belirli ürünlerin satışlarıyla yakından ilgili kültürel olaylar, iş gücü ile doğrudan ilgili akademik tatiller ve mezuniyet törenleri gibi birçok durumdan kaynaklanabilir (Box vd 1994, Wei 2006).

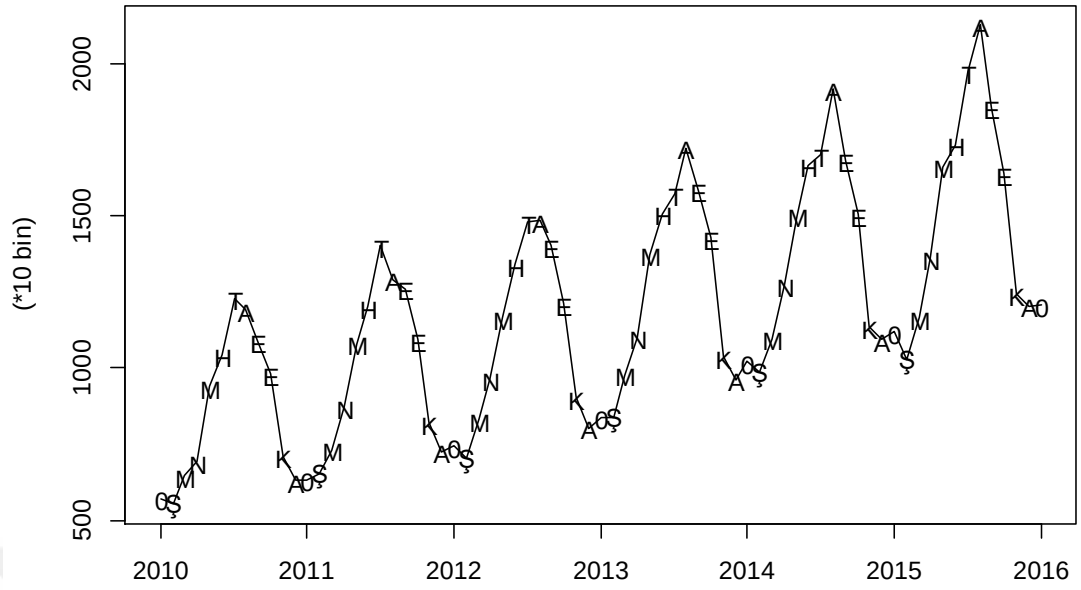
Mevsimsel etkiler içeren bir seriye örnek olarak Ocak 2007-Aralık 2019 süresince kaydedilen aylık Türkiye geneli toplam (iç hat-dış hat, gelen-giden) havayolu yolcu trafiği verisi ele alınmış ve verinin grafiği Şekil 2.21’de sunulmuştur⁴. Serinin artan bir trende sahip olduğu ve -daha kısa bir zaman aralığı için çizdirilen ve aylık gözlemlerin sembollerle işaretlendiği Şekil 2.22’den daha açıkça görüldüğü üzere- belirgin bir mevsimsel kalıp sergilediği görülmektedir. Öyle ki seyahat kış aylarında en düşük düzeyde seyrederken, yaz aylarının sonunda en yüksek düzeyde seyretmektedir.

Mevsimsellik içeren havayolu yolcu trafiği verisi örneğinde temel zaman aralığı 1 ay ve periyot $s = 12$ aydır. Uygulamada karşılaşılan birçok veri seti buna benzer mevsimsel kalıplara sahiptir. Bu kalıpları açık bir şekilde hesaba katabilen en genel model sınıfı mevsimsel ARIMA modelleri olarak bilinir. İlerleyen alt başlıklarda bu modeller detaylı bir şekilde ele alınacaktır.



Şekil 2.21 Aylık havayolu yolcu trafiği verisi, 2007-2019, Türkiye

⁴T.C. Ulaştırma ve Altyapı Bakanlığı Devlet Hava Meydanları İşletmesi Genel Müdürlüğü tarafından yayınlanan istatistiklerden derlenmiştir.



Sırasıyla O: Ocak, Ş: Şubat, M: Mart, N: Nisan, M: Mayıs, H: Haziran, T: Temmuz, A: Ağustos, E: Eylül, E: Ekim, K: Kasım, A: Aralık

Şekil 2.22 Aylık sembollerle havayolu yolcu trafiği verisi

2.6.1 Mevsimsel (durağan) ARMA süreçleri

Bir önceki kısımda bahsedildiği üzere s , *mevsimsel periyot* olarak adlandırılır. Aylık seriler için $s = 12$, çeyreklik seriler için ise $s = 4$ 'tür. Bu kısımda mevsimsel (durağan) ARMA süreçleri incelenecektir. Bu kapsamda s mevsimsel periyotlu Q -üncü dereceden hareketli ortalama süreci ($MA(Q)_s$), s mevsimsel periyotlu P -inci dereceden otoregresif süreç ($AR(P)_s$) ve s mevsimsel periyotlu P ve Q -üncü dereceden mevsimsel otoregresif hareketli ortalama süreci ($ARMA(P, Q)_s$) ele alınacaktır.

$MA(Q)_s$ süreci

$\{e_t\}$ sıfır ortalamalı ve $var(e_t) = \sigma_e^2$ varyanslı bir beyaz gürültü süreci olmak üzere, s mevsimsel periyotlu Q -üncü dereceden mevsimsel hareketli ortalama veya kısaca $MA(Q)_s$ süreci,

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-s} - \theta_2 e_{t-2s} - \dots - \theta_Q e_{t-Qs} \quad (2.75)$$

şeklinde ifade edilir. B gecikme operatörünün kullanılması ile süreç eşdeğer olarak,

$$X_t = (1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}) e_t$$

veya

$$X_t = \Theta_Q(B^s) e_t$$

formunda yazılabilir. Burada $\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$ ifadesi *mevsimsel MA karakteristik operatörü* olarak adlandırılır. Herhangi bir $MA(Q)_s$ süreci daima durağandır. Sürecin tersinir olması için ise $\Theta_Q(B^s) = 0$ denkleminin köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması gerekir.

Sürecin otokorelasyon fonksiyonu yalnızca $s, 2s, 3s, \dots, Qs$ mevsimsel gecikmelerde sıfırdan farklı olup,

$$\rho_{ks} = \frac{-\Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \Theta_2 \Theta_{k+2} + \dots + \Theta_{Q-k} \Theta_Q}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \dots + \Theta_Q^2}, \quad k = 1, 2, \dots, Q$$

şeklinededir.

Mevsimsel $MA(Q)$ süreci, $s, 2s, 3s, \dots, Qs$ mevsimsel gecikmeleri haricinde bütün θ değerlerinin sıfıra eşit olduğu $q = Qs$ dereceden mevsimsel olmayan MA sürecinin özel bir durumudur.

MA(1)₁₂ süreci. (2.75)'te $Q = 1$ ve $s = 12$ alındığında,

$$X_t = e_t - \Theta_1 e_{t-12}$$

şeklindeki $MA(1)_{12}$ süreci elde edilir. Sürecin beklenen değeri,

$$\mu = E(X_t) = E(e_t - \Theta_1 e_{t-12}) = E(e_t) - \Theta_1 E(e_{t-12}) = 0$$

ve varyansı,

$$\gamma_0 = \text{Var}(X_t) = \text{Var}(e_t - \Theta_1 e_{t-12}) = \text{Var}(e_t) + \Theta_1^2 \text{Var}(e_{t-12}) - 2\Theta_1 \underbrace{\text{Cov}(e_t, e_{t-12})}_{=0}$$

$$= \sigma_e^2 + \Theta_1^2 \sigma_e^2 = \sigma_e^2 (1 + \Theta_1^2)$$

şeklinededir. Sürecin otokovaryansı $h = 1$ için,

$$\gamma_1 = \text{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \text{Cov}(e_t - \Theta_1 e_{t-12}, e_{t-1} - \Theta_1 e_{t-13}) = 0$$

olur. Aynı şekilde $h = s = 12$ durumu hariç her h için $\gamma_h = 0$ olduğunu görmek kolaydır. $h = s = 12$ için ise otokovaryans,

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \text{Cov}(X_t, X_{t-12}) = \text{Cov}(e_t - \Theta_1 e_{t-12}, e_{t-12} - \Theta_1 e_{t-24}) \\ &= -\Theta_1 \text{Var}(e_{t-12}) = -\Theta_1 \sigma_e^2\end{aligned}$$

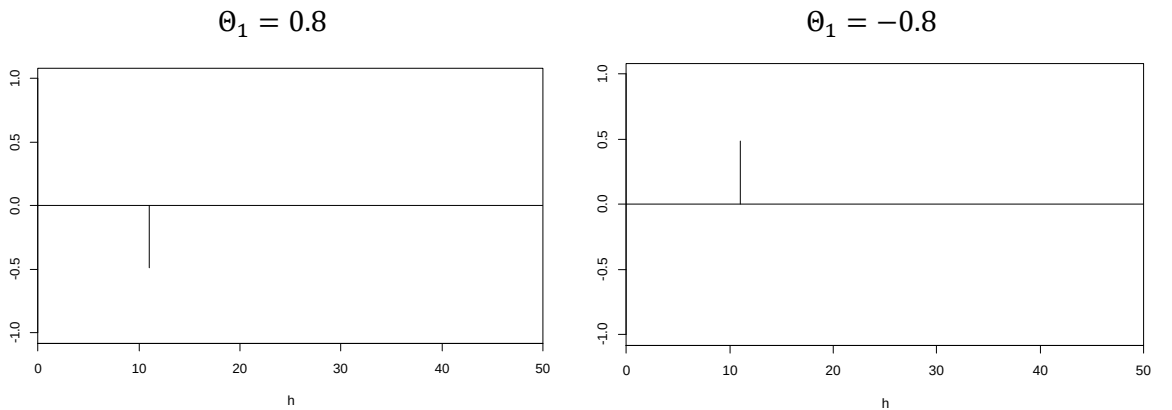
şeklindedir. Dolayısıyla bir $MA(1)_{12}$ süreci için otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma_e^2(1 + \Theta_1^2), & h = 0 \\ -\Theta_1 \sigma_e^2, & h = 12 \\ 0, & d.y \end{cases}$$

ve otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ -\frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1^2}, & h = 12 \\ 0, & d.y \end{cases}$$

şeklindedir. Mevsimsel $MA(1)_{12}$ sürecine ilişkin ACF, mevsimsel olmayan $MA(1)$ sürecine ilişkin ACF ile aynı formdadır. Sadece, $MA(1)_{12}$ süreci için tek sıfır olmayan otokorelasyon $h = 12$ birinci mevsimsel gecikmede gerçekleşirken, mevsimsel olmayan $MA(1)$ sürecinde $h = 1$ gecikmede gerçekleşir (Şekil 2.23). Sürecin PACF'si ise $h = 12, 24, 36, 48, \dots$ mevsimsel gecikmeleri boyunca bir azalma gösterir.



Şekil 2.23 $MA(1)_{12}$ süreci için teorik otokorelasyon fonksiyonu

Mevsimsel $MA(1)_{12}$ süreci matematiksel olarak,

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = 0$$

ve $\theta_{12} = \Theta_1$ olan mevsimsel olmayan $MA(12)$ sürecine eşdeğerdir.

MA(2)₁₂ süreci. $s = 12$ mevsimsel gecikmeli $Q = 2$ dereceden bir mevsimsel MA süreci,

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-12} - \theta_2 e_{t-24}$$

şeklindedir. $MA(2)_{12}$ süreci için $E(X_t) = 0$ ve,

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma_e^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2), & h = 0 \\ (-\theta_1 + \theta_1\theta_2)\sigma_e^2, & h = 12 \\ -\theta_2\sigma_e^2, & h = 24 \\ 0, & d.y \end{cases}$$

olduğunu göstermek kolaydır. Sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & h = 12 \\ \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & h = 24 \\ 0, & d.y \end{cases}$$

şeklindedir. $MA(2)_{12}$ sürecine ilişkin ACF, mevsimsel olmayan $MA(2)$ sürecine ilişkin ACF ile aynı forma sahiptir. Tek fark sıfırdan farklı otokorelasyonların mevsimsel olmayan $MA(2)$ sürecinde $h = 1$ ve $h = 2$ gecikmelerinde meydana gelmesine karşın, $MA(2)_{12}$ sürecinde ilk iki mevsimsel gecikme olan $h = 12$ ve $h = 24$ 'te meydana gelmesidir.

Mevsimsel $MA(2)_{12}$ süreci matematiksel olarak,

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{11} = \theta_{13} = \theta_{14} = \dots = \theta_{23} = 0$$

ve $\theta_{12} = \theta_1$ ve $\theta_{24} = \theta_2$ olan mevsimsel olmayan $MA(24)$ sürecine eşdeğerdir.

AR(P)_s süreci

$\{e_t\}$ sıfır ortalamalı ve $var(e_t) = \sigma_e^2$ varyanslı bir beyaz gürültü süreci olmak üzere, s mevsimsel periyotlu P -inci dereceden mevsimsel otoregresif model,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_P X_{t-Ps} + e_t \quad (2.76)$$

şeklindedir ve kısaca $AR(P)_s$ olarak gösterilir. B gecikme operatörünün kullanılmasıyla süreç,

$$(1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps})X_t = e_t$$

$$\Leftrightarrow \Phi_P(B^s)X_t = e_t$$

olarak da ifade edilebilir. Burada $\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$ ifadesi *mevsimsel AR karakteristik operatörüdür*. $AR(P)_s$ sürecinin durağan olması için $\Phi_P(B^s) = 0$ denkleminin köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması gerekir. Bununla birlikte bütün $AR(P)_s$ süreçleri tersinirdir.

Denklem (2.76)'da verilen süreç, yalnızca $s, 2s, 3s, \dots, Ps$ mevsimsel gecikmelerde sıfırdan farklı Φ katsayılarına sahip olan $p = Ps$ dereceden özel bir $AR(p)$ süreci olarak düşünülebilir. $AR(P)_s$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonunun da yalnızca $s, 2s, 3s, \dots, Ps$ mevsimsel gecikmelerde sıfırdan farklı olduğu ve azalan üstellerin veya sönümlü sinüs fonksiyonlarının bir birleşimi gibi davrandığı gösterilebilir.

AR(1)₁₂ süreci. (2.76)'da verilen $AR(P)_s$ sürecinde $P = 1$ ve $s = 12$ alındığında,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-12} + e_t$$

şeklindeki $AR(1)_{12}$ süreci elde edilir. Sürecin durağan olması için gerek ve yeter şart $-1 < \Phi_1 < 1$ olmasıdır. $AR(1)_{12}$ süreci için,

$$E(X_t) = 0$$

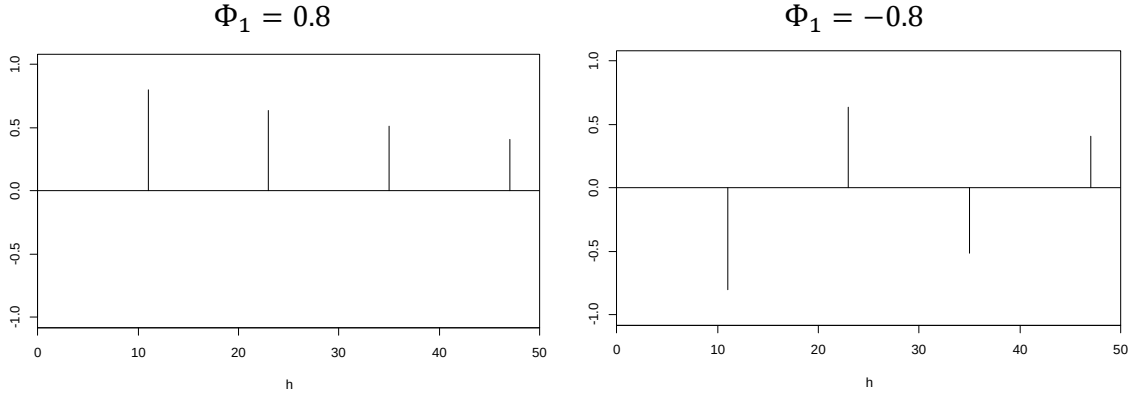
$$\gamma_0 = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma_e^2}{1 - \Phi_1^2}$$

ve sürecin otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \begin{cases} \Phi_1^{h/12}, & h = 0, 12, 24, 36, \dots \\ 0, & d.y \end{cases}$$

olarak elde edilir. Otokorelasyon fonksiyonu mevsimsel olmayan $AR(1)$ sürecine benzer şekilde $\rho_0 = 1, \rho_1 = \Phi_1, \rho_{24} = \Phi_1^2, \rho_{36} = \Phi_1^3, \dots$ şeklindedir. $s = 12$ 'nin katları olmayan bütün h gecikmelerinde $\rho_h = 0$ 'dır. Şekil 2.24'te görüldüğü gibi, mevsimsel $AR(1)_{12}$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu $h = 12, 24, 36, 48, \dots$ mevsimsel gecikmeleri boyunca azalma gösterir. Sürecin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise yalnızca birinci mevsimsel gecikme olan $h = 12$ 'de sıfırdan farklı olup, diğer tüm

gecikmelerde sıfırdır. Bu ise $AR(1)$ sürecinin $h = 1$ 'de sıfırdan farklı ve diğer yerlerde sıfır olan kısmi otokorelasyon fonksiyonuna benzemektedir.



Şekil 2.24 $AR(1)_{12}$ süreci için teorik otokorelasyon fonksiyonu

Mevsimsel $AR(1)_{12}$ süreci matematiksel olarak,

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{11} = 0$$

ve $\phi_{12} = \Phi_1$ olan mevsimsel olmayan $AR(12)$ sürecine eşdeğerdir.

$AR(2)_{12}$ süreci. $s = 12$ mevsimsel gecikmeli $P = 2$ dereceden mevsimsel $AR(2)_{12}$ süreci,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-12} + \Phi_2 X_{t-24} + e_t$$

şeklinde ifade edilir.

Mevsimsel $AR(2)_{12}$ süreci mevsimsel gecikmelerde mevsimsel olmayan $AR(2)$ süreci gibi davranır. Öyle ki sürecin otokorelasyon fonksiyonu $h = 12, 24, 36, 48, \dots$ mevsimsel gecikmeleri boyunca azalan üstel veya sönümlü sinüzoidal kalıp sergiler. Sürecin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise $h = 12$ ve $h = 24$ mevsimsel gecikmelerde sıfırdan farklı olup, diğer tüm gecikmelerde sıfırdır.

Mevsimsel $AR(2)_{12}$ süreci matematiksel olarak,

$$\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_{11} = \phi_{13} = \phi_{14} = \dots = \phi_{23} = 0$$

ve $\phi_{12} = \Phi_1$ ve $\phi_{24} = \Phi_2$ olan mevsimsel olmayan $AR(24)$ sürecine eşdeğerdir (Cryer ve Chan 2008, Tebbs 2013).

AR(1)₄ süreci. Uygulamada sık karşılaşılan bir diğer $AR(P)_s$ süreci ise,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-4} + e_t$$

şeklinde ifade edilen $AR(1)_4$ sürecidir. Süreç $-1 < \Phi_1 < 1$ için durağandır. Sürecin otokovaryans fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \gamma_h &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \text{Cov}(\Phi_1 X_{t-4} + e_t, X_{t-h}) \\ &= \Phi_1 \text{Cov}(X_{t-4}, X_{t-h}) + \text{Cov}(e_t, X_{t-h}) \\ &= \Phi_1 \gamma_{h-4} + \sigma_e^2 I(h=0) \end{aligned} \quad (2.77)$$

şeklindedir. Burada $I(h=0)$ gösterge fonksiyonu,

$$I(h=0) = \begin{cases} 1, & h=0 \\ 0, & d.y \end{cases}$$

olarak tanımlanır. (2.77)'de verilen Yule-Walker denklemleri kullanılarak sürecin otokovaryansları,

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_4 + \sigma_e^2$$

$$\gamma_1 = \Phi_1 \gamma_3, \gamma_2 = \Phi_1 \gamma_2, \gamma_3 = \Phi_1 \gamma_1 \text{ ve } \gamma_4 = \Phi_1 \gamma_0$$

eşitliklerinden elde edilir. Ancak bu eşitliklerin sağlanabilmesi için, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ olması gerekir. Sürecin varyansı,

$$\gamma_0 = \Phi_1 \gamma_4 + \sigma_e^2 = \Phi_1 (\Phi_1 \gamma_0) + \sigma_e^2 = \Phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_e^2$$

eşitliğinden,

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \Phi_1^2}$$

olarak elde edilir. Buradan sürecin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_h = \begin{cases} \sigma_e^2 \Phi_1^{h/4} / (1 - \Phi_1^2), & h = 4k, k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & d.y \end{cases}$$

ve otokorelasyon fonksiyonu,

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \begin{cases} \Phi_1^{h/4}, & h = 4k, k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & d.y \end{cases}$$

olarak elde edilir. Buna göre, $AR(1)_4$ sürecinin otokorelasyon fonksiyonu $h = 4, 8, 12, 16, \dots$ mevsimsel gecikmeleri boyunca periyodik olarak azalmaktadır. Sürecin kısmi otokorelasyon fonksiyonu ise $h = 4$ mevsimsel gecikmede Φ_1 olup, diğer tüm gecikmelerde sıfırdır (Akdi 2012).

ARMA(P, Q)_s süreci

$\{e_t\}$ sıfır ortalamalı ve $var(e_t) = \sigma_e^2$ varyanslı bir beyaz gürültü süreci olmak üzere, s mevsimsel periyotlu P ve Q -üncü dereceden mevsimsel otoregresif hareketli ortalama süreci,

$$X_t = \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \dots + \Phi_P X_{t-Ps} + e_t$$

şeklinde ifade edilir ve kısaca $ARMA(P, Q)_s$ olarak gösterilir. B gecikme operatörünün kullanılmasıyla süreç,

$$\Phi_P(B^s)Y_t = \Theta_Q(B^s)e_t$$

olarak da ifade edilebilir. Burada mevsimsel AR ve MA karakteristik operatörleri,

$$\Phi_P(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_P B^{Ps}$$

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

şeklindeir. Süreç, yalnızca $h = s, 2s, 3s, \dots$ mevsimsel gecikmelerde sıfırdan farklı otokorelasyona sahip olan mevsimsel olmayan $ARMA(p, q)$ sürecine benzer bir kalıp sergiler.

Mevsimsel olmayan bir $ARMA(p, q)$ sürecine benzer olarak, $ARMA(P, Q)_s$ sürecinin durağan olması için $\Phi_P(B^s) = 0$ denkleminin köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması, tersinir olması için ise $\Theta_Q(B^s) = 0$ denkleminin köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması gerekir.

Mevsimsel $ARMA(P, Q)_s$ süreci matematiksel olarak,

$$\phi_s = \Phi_1, \phi_{2s} = \Phi_2, \dots, \phi_{Ps} = \Phi_P, \quad \theta_s = \Theta_1, \theta_{2s} = \Theta_2, \dots, \theta_{Qs} = \Theta_Q$$

olan ve diğer tüm ϕ ve θ parametrelerinin 0'a eşit olduğu mevsimsel olmayan $ARMA(Ps, Qs)$ sürecine eşdeğerdir.

2.6.2 Çarpımsal mevsimsel (durağan) ARMA süreçleri

Mevsimsel $ARMA(P, Q)_s$ modellerinin mevsimsel olmayan $ARMA(p, q)$ modelleri ile birleştirilmesi sonucunda mevsimsel (durağan) zaman serilerine uygulanabilir daha geniş bir model sınıfı oluşturulur. Bu kısımda *çarpımsal mevsimsel ARMA sınıfı* olarak adlandırılan bu yeni model sınıfı ele alınacaktır.

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ süreci

$\{e_t\}$ sıfır ortalamalı ve $var(e_t) = \sigma_e^2$ varyanslı bir beyaz gürültü süreci olsun.

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} \Leftrightarrow X_t = (1 - \theta_1 B)e_t$$

şeklindeki mevsimsel olmayan $MA(1)$ modeli ve

$$X_t = e_t - \Theta_1 e_{t-12} \Leftrightarrow X_t = (1 - \Theta_1 B^{12})e_t$$

şeklindeki mevsimsel $MA(1)_{12}$ modeli dikkate alınsın. Önceki bölümlerde bahsedildiği üzere mevsimsel olmayan $MA(1)$ sürecinin tanımlayıcı özelliği tek sıfırdan farklı otokorelasyonun $h = 1$ gecikmede meydana gelmesidir. Benzer şekilde mevsimsel $MA(1)_{12}$ sürecinin tanımlayıcı özelliği ise, tek sıfırdan farklı otokorelasyonun $h = 12$ gecikmede meydana gelmesidir.

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B$ şeklindeki mevsimsel olmayan MA karakteristik operatörü ve $\Theta(B) = 1 - \Theta_1 B^{12}$ şeklindeki mevsimsel operatörün çarpımı ile elde edilen,

$$\begin{aligned} & (1 - \theta_1 B)(1 - \Theta_1 B^{12}) \\ &= 1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^{12} + \theta_1 \Theta_1 B^{13} \end{aligned}$$

şeklindeki MA karakteristik operatörüne karşılık gelen model,

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \Theta_1 e_{t-12} + \theta_1 \Theta_1 e_{t-13}$$

olarak ifade edilir. Bu yeni model *çarpımsal mevsimsel $MA(1) \times MA(1)_{12}$ süreci* olarak adlandırılır. “Çarpımsal” terimi, $1 - \theta_1 B - \Theta_1 B^{12} + \theta_1 \Theta_1 B^{13}$ şeklindeki MA karakteristik operatörünün $(1 - \theta_1 B)$ ve $(1 - \Theta_1 B^{12})$ operatörlerinin çarpımı olmasından kaynaklanır. $MA(1) \times MA(1)_{12}$ süreci için,

$$E(X_t) = 0$$

ve

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_1^2)\sigma_e^2$$

şeklindedir. Sürecin otokorelasyon fonksiyonu yalnızca 1, 11, 12 ve 13 gecikmelerinde sıfırdan farklı olup,

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$$

$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{\theta_1\Theta_1}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_1^2)}$$

$$\rho_{12} = -\frac{\Theta_1}{1 + \Theta_1^2}$$

şeklinde elde edilir. Sürecin $h = 1$ ve $h = 12$ gecikmelerinde sıfırdan farklı otokorelasyona sahip olması mevsimsel olmayan ve mevsimsel MA süreçlerinin tanımlayıcı özelliklerini almasındandır. Bunlara ek olarak $h = 11$ ve $h = 13$ gecikmelerinde gözlenen sıfırdan farklı otokorelasyonlar ise iki modelin çarpımsal etkisinden kaynaklanmaktadır.

$MA(1) \times MA(1)_{12}$ süreci matematiksel olarak $\theta_1 = \theta_1$, $\theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_{11} = 0$, $\theta_{12} = \Theta_1$ ve $\theta_{13} = -\theta_1\Theta_1$ parametrelerine sahip mevsimsel olmayan $MA(13)$ sürecine eşdeğerdir.

ARMA(p, q) × ARMA(P, Q)_s süreci

Çarpımsal mevsimsel (durağan) ARMA süreçlerini en genel haliyle ifade etmek amacıyla,

$$\phi(B)Y_t = \theta(B)e_t$$

şeklindeki mevsimsel olmayan $ARMA(p, q)$ süreci,

$$\Phi_P(B^s)Y_t = \Theta_Q(B^s)e_t$$

şeklindeki mevsimsel $ARMA(P, Q)_s$ süreci ile birleştirebilir. Bu durumda,

$$\phi(B)\Phi_P(B^s)X_t = \theta(B)\Theta_Q(B^s)e_t$$

şeklinde ifade edilen yeni bir model elde edilir. Bu model s mevsimsel periyotlu çarpımsal mevsimsel (durağan) $ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$ süreci olarak adlandırılır.

$ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$ süreci matematiksel olarak $\phi^*(B) = \phi(B)\Phi_P(B^s)$ şeklindeki AR karakteristik operatörüne ve $\theta^*(B) = \theta(B)\Theta_Q(B^s)$ şeklindeki MA karakteristik operatörüne sahip mevsimsel olmayan ARMA sürecine eşdeğerdir.

2.6.3 Durağan olmayan mevsimsel ARIMA (SARIMA) süreçleri

Bölüm 2.5'te bahsedildiği üzere, bir $\{X_t\}$ stokastik süreci için birinci farklar,

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$$

ve genel olarak d -inci farklar,

$$\nabla^d X_t = (1 - B)^d X_t$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca $d = 1$ veya (genellikle en fazla) $d = 2$ almanın (mevsimsel olmayan) non-durağan bir süreci durağanlığa zorlayabileceği bilinmektedir. Bununla birlikte mevsimsel serilerde bu durum sürecin durağan hale gelmesi için yeterli olmayacaktır. Bu noktada durağan olmayan mevsimsel süreçlerin modellenmesinde önemli bir araç olan mevsimsel fark operatörü devreye girmektedir.

Bir $\{X_t\}$ serisi için s periyotlu birinci mevsimsel farklar $\nabla_s X_t$ ile gösterilir ve

$$\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - B^s)X_t$$

olarak tanımlanır. Genel olarak D -inci mevsimsel farklar ise,

$$\nabla_s^D X_t = (1 - B^s)^D X_t$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 2.3 (Mevsimsel rasgele yürüyüş). $\{X_t\}$ süreci,

$$X_t = S_t + e_t$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\{S_t\}$,

$$S_t = S_{t-s} + u_t$$

şeklinde ifade edilen s periyotlu mevsimsel rasgele yürüyüş süreci olup, $\{e_t\}$ ve $\{u_t\}$ bağımsız beyaz gürültü serileridir. $\{S_t\}$ sürecinin durağan olmamasından dolayı $\{X_t\}$ sürecinin de durağan olmadığı açıktır. $\{X_t\}$ süreci için mevsimsel olmayan fark almanın mevsimsel non-durağanlık üzerinde bir etkisi olmayacaktır. Örnek olarak $d = 1$ alındığında,

$$\begin{aligned}\nabla X_t &= \nabla S_t + \nabla e_t \\ &= \nabla S_{t-s} + \nabla u_t + \nabla e_t \\ &= S_{t-s} - S_{t-s-1} + u_t - u_{t-1} + e_t - e_{t-1}\end{aligned}$$

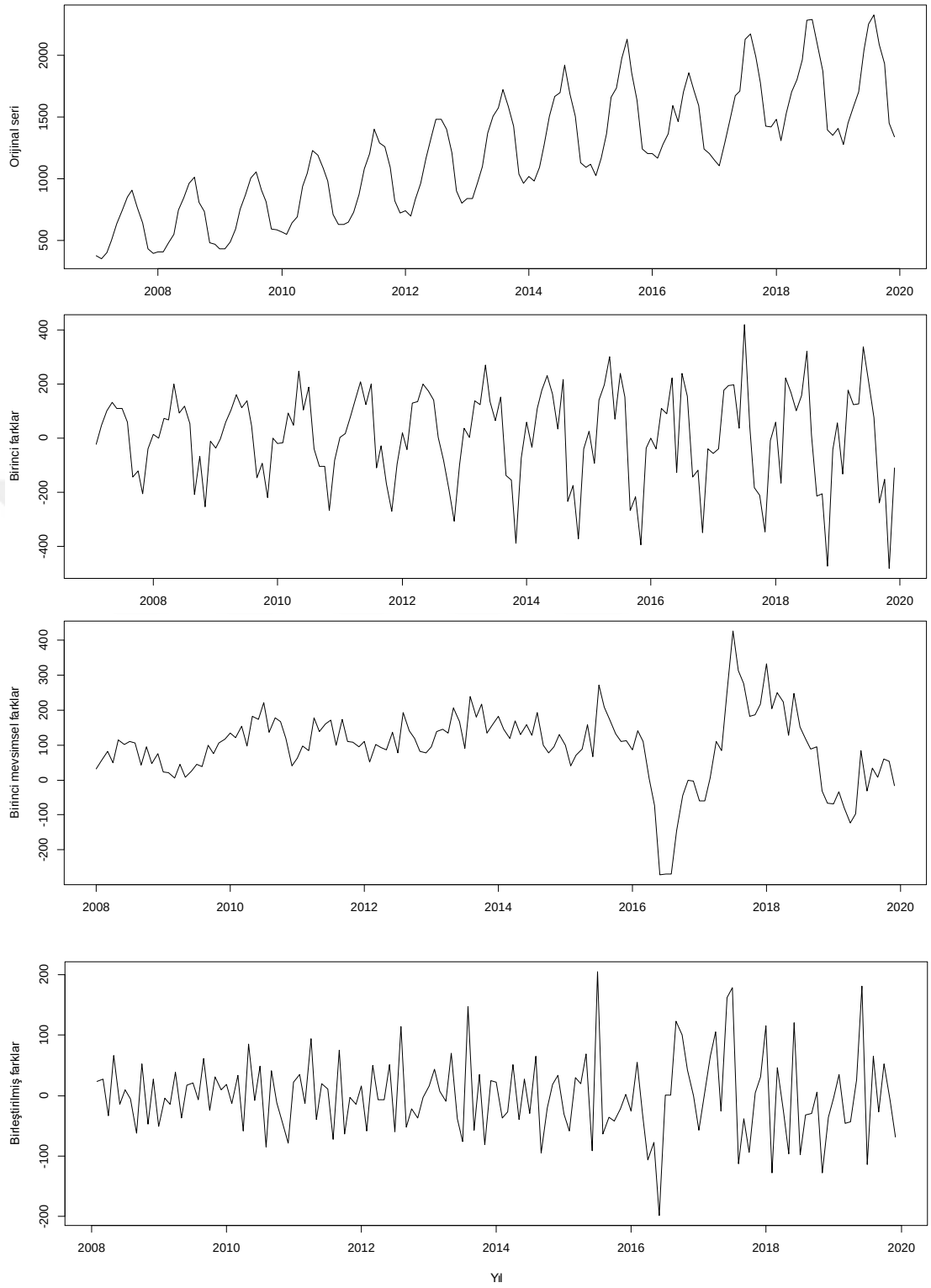
elde edilir. $\{\nabla X_t\}$ birinci fark süreci hâlâ non-durağandır ve bunun yanı sıra daha karmaşık bir model haline gelmiştir. Dolayısıyla burada mevsimsel gecikmeler arasında non-durağanlığı kaldırabilecek yeni bir fark alma operatörüne ihtiyaç duyulur. $\{X_t\}$ sürecinin birinci mevsimsel farkı,

$$\begin{aligned}\nabla_s X_t &= \nabla_s S_t + \nabla_s e_t \\ &= \underbrace{S_t - S_{t-s}}_{u_t} + e_t - e_{t-s} = u_t + e_t - e_{t-s}\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $\{\nabla_s X_t\}$ serisinin durağan mevsimsel $MA(1)_s$ süreci ile aynı otokorelasyon fonksiyonuna sahip olduğu görülebilir (Cryer ve Chan 2008, Tebbs 2013).

Şekil 2.21’de sunulan aylık havayolu yolcu trafiği verisi tekrar ele alınsın. Burada, veri hakkında daha fazla bilgi edinmek amacıyla, fark serilerine ilişkin grafikler ve örnek otokorelasyon fonksiyonu grafikleri incelenecektir. Bu amaçla ilk olarak Şekil 2.25’te havayolu yolcu trafiği verisine ilişkin X_t orijinal zaman serisi grafiği ile ∇X_t birinci (mevsimsel olmayan) fark süreci, $\nabla_{12} X_t$ birinci (mevsimsel) fark süreci ve $\nabla \nabla_{12} X_t$ birleştirilmiş (mevsimsel ve mevsimsel olmayan) fark süreci grafikleri sunulmuştur. $\nabla \nabla_{12} X_t$ birleştirilmiş fark süreci,

$$\begin{aligned}\nabla \nabla_{12} X_t &= (1 - B)(1 - B^{12})X_t \\ &= (1 - B - B^{12} + B^{13})X_t \\ &= X_t - X_{t-1} - X_{t-12} + X_{t-13}\end{aligned}$$



Şekil 2.25 Hava yolu yolcu trafiği verisi (Yukarıdan aşağıya) (1): Orijinal seri $\{X_t\}$ (2): Birinci (mevsimsel olmayan) farklar $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$ (3): Birinci (mevsimsel) farklar $\nabla_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$ (4): Birleştirilmiş birinci (mevsimsel ve mevsimsel olmayan) farklar $\nabla \nabla_{12} X_t$

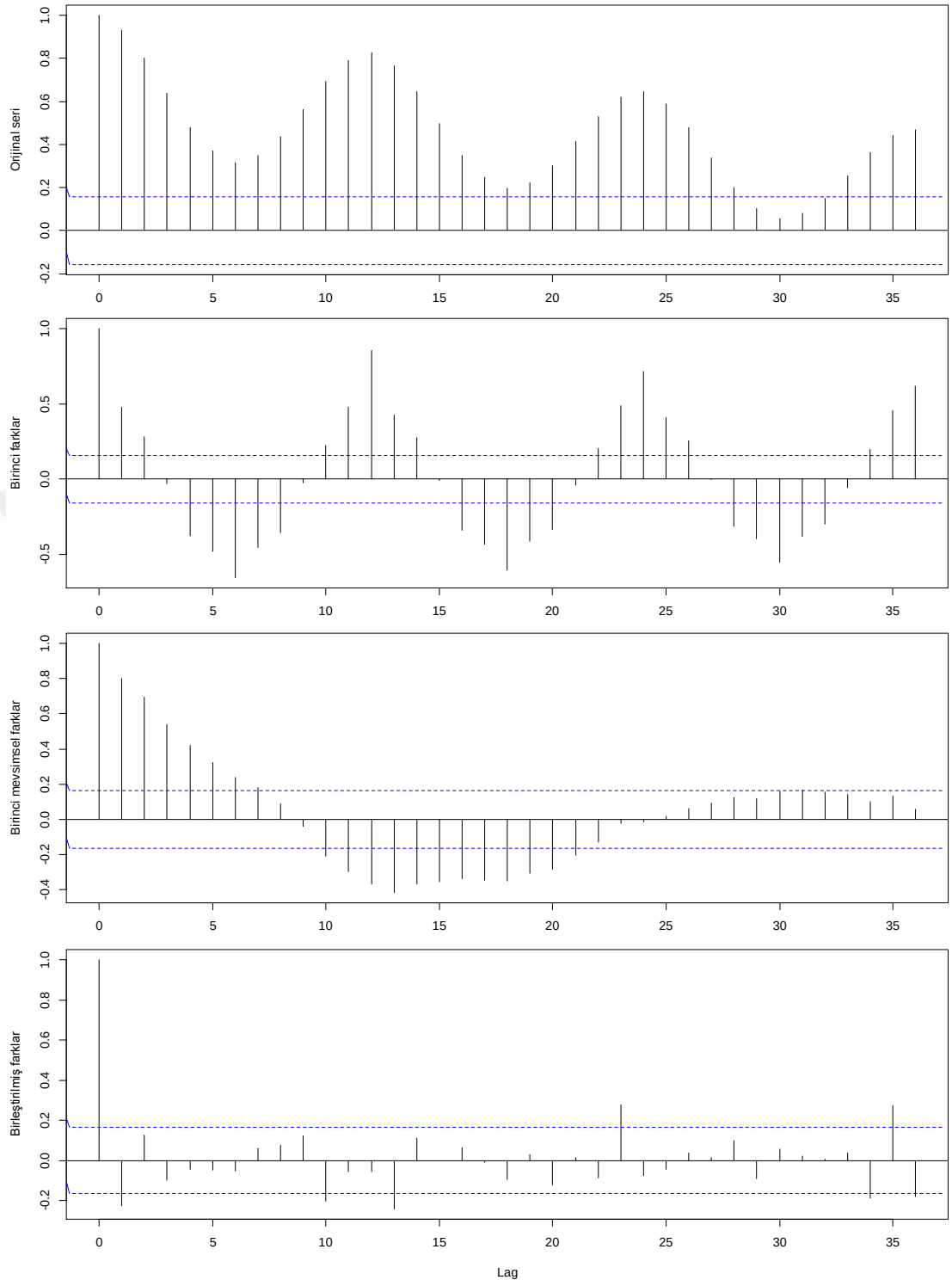
olarak verilir. Daha sonra Şekil 2.26’da ise her dört seriye (orijinal seri, birinci fark serisi, birinci mevsimsel fark serisi ve birleştirilmiş fark serisi) ilişkin örnek ACF grafikleri sunulmuştur.

- Havayolu yolcu trafiği verisine ilişkin orijinal serinin grafiği (Şekil 2.25; (1)) seride artan bir trendin olduğunu göstermektedir. Bu durum, serinin durağan olmadığına işaret eder. Serinin otokorelasyon fonksiyonunun grafiği (Şekil 2.26; (1)) incelendiğinde ise mevsimsel ilişkilerin oldukça belirgin olduğu görülmekte, diğerlerinin yanı sıra $h = 12, 24, 36, \dots$ mevsimsel gecikmelerinde güçlü korelasyonlar göze çarpmaktadır.
- Birinci (mevsimsel olmayan) farkların alınması, orijinal serideki artan lineer trendi ortadan kaldırmıştır (Şekil 2.25; (2)). Bununla birlikte, örnek ACF grafiğinden de görüleceği üzere, $\{X_t\}$ süreci hâlâ kayda değer bir mevsimsellik sergilemektedir (Şekil 2.26; (2)).
- Birinci mevsimsel farkların alınması ise görünüşe göre mevsimselliği ortadan kaldırmıştır (Şekil 2.25; (3)), fakat $\{\nabla_{12}X_t\}$ sürecinin örnek ACF’sindeki yavaş azalma non-durağanlığın işaretidir (Şekil 2.26; (3)).
- Son olarak birleştirilmiş farkların alınmasıyla elde edilen $\{\nabla\nabla_{12}X_t\}$ sürecinin en azından ortalama düzeyde durağan bir sürece benziyor görüldüğü (Şekil 2.25; (4)) ve seride çok az otokorelasyon kaldığı (Şekil 2.26; (4)) söylenebilir. Seri artık basit bir modelle modellenebilecek durumdadır.

Bu açıklayıcı girişten sonra, non-durağan mevsimsel modellerin tanımına geçilecektir.

$ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_s$ süreci

Periyodik veride önemli iki zaman aralığı söz konusudur. Havayolu yolcu trafiği verisi örneğinde bu aralıklar aylara ve yıllara karşılık gelmektedir. Öyle ki belirli bir yılda birbirini izleyen aylara ait gözlemler arasında ve birbirini izleyen yıllarda aynı ay için elde edilen gözlemler arasında bir ilişki olması beklenir. Mevsimsel etki, belirli bir aya örneğin Nisan ayına ait bir gözlemin önceki Nisan aylarına ait gözlemlerle ilişkili olduğu anlamına gelir. t -inci gözlem X_t ’nin Nisan ayına ait olduğu varsayılınsın. Bu X_t gözlemi,



Şekil 2.26 Örnek ACF'leri (Yukarıdan aşağıya) (1): Orijinal seri (2): Birinci (mevsimsel olmayan) farklar (3): Birinci (mevsimsel) farklar (4): Birleştirilmiş birinci (mevsimsel ve mevsimsel olmayan) farklar

$$\Phi(B^s)\nabla_s^D X_t = \Theta(B^s)\alpha_t \quad (2.78)$$

formundaki bir model ile önceki Nisan aylarına ilişkin gözlemlerle ilişkilendirilebilir. Burada $\Phi(B^s)$ ve $\Theta(B^s)$ polinomları B^s 'nin sırasıyla P ve Q dereceden polinomları olup, durağanlık ve tersinirlik koşullarını sağlar. Benzer şekilde,

$$\Phi(B^s)\nabla_s^D X_{t-1} = \Theta(B^s)\alpha_{t-1} \quad (2.79)$$

şeklindeki model, Mart ayının şimdiki davranışını önceki gözlemlerle ilişkilendirmek için kullanılabilir. Böylece 12 ayın her biri için bu modeller yazılır. Bu aylık modellerde yer alan Φ ve Θ parametrelerinin her ay için aşağı yukarı aynı olacağı varsayılabilir.

Bu modellerdeki $\alpha_t, \alpha_{t-1}, \dots$ hata terimleri genellikle ilişkisiz olmayacaktır. Örneğin Nisan 2019'daki toplam yolcu sayısı önceki Nisan toplamlarıyla ilişkiliyken, aynı zamanda da Mart 2019, Şubat 2019, Ocak 2019, ... toplamlarıyla da ilişkili olacaktır. Böylelikle (2.78)'deki α_t 'nin, (2.79)'daki α_{t-1} ile ve diğer hata bileşenleriyle de ilişkili olacağı beklenir. Dolayısıyla bu ilişkileri dikkate almak için,

$$\phi(B)\nabla^d \alpha_t = \theta(B)e_t \quad (2.80)$$

şeklindeki ikinci bir model daha ele alınır. Burada artık e_t bir beyaz gürültü sürecidir. $\phi(B)$ ve $\theta(B)$ polinomları ise B 'nin sırasıyla p ve q dereceden polinomlarıdır ve durağanlık ve tersinirlik koşullarını yerine getirirler.

(2.80), (2.78)'de yerine koyulursa, sonuç olarak,

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^s)\nabla^d \nabla_s^D X_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)e_t$$

şeklindeki genel çarpımsal (multiplicative) model elde edilir. $ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_s$ şeklinde gösterilen bu model, s mevsimsel periyotlu çarpımsal mevsimsel otoregresif bütünleşik hareketli ortalama (SARIMA) süreci olarak adlandırılır. Burada, mevsimsel olmayan AR ve MA karakteristik operatörleri,

$$\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

ve mevsimsel AR ve MA karakteristik operatörleri,

$$\Phi_p(B^s) = 1 - \Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \dots - \Phi_p B^{ps}$$

$$\Theta_Q(B^s) = 1 - \Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \dots - \Theta_Q B^{Qs}$$

şeklindedir ve $\{\nabla^d \nabla_s^D X_t\}$ birleştirilmiş fark süreci,

$$\nabla^d \nabla_s^D X_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t$$

olarak tanımlanır. d mevsimsel olmayan farkların sayısını, D ise mevsimsel farkların sayısını gösterir. Genellikle $d = 1$ veya (genellikle en fazla) $d = 2$ mevsimsel olmayan durağanlığı, $D = 1$ ise mevsimsel durağanlığı sağlayacaktır.

Ayrıca $\{X_t\}$ süreci ile $\{\nabla^d \nabla_s^D X_t\}$ birleştirilmiş fark süreci arasında,

$$X_t \sim ARIMA(p, d, q) \times ARIMA(P, D, Q)_s \Leftrightarrow \nabla^d \nabla_s^D X_t \sim ARMA(p, q) \times ARMA(P, Q)_s$$

şeklinde ifade edilen bir ilişki söz konusudur (Box vd. 1994, Cryer ve Chan 2008, Tebbs 2013).

2.6.4 Mevsimsel süreçlerin spektrumu

Bölüm 2.3.2 ve Bölüm 2.3.5'teki sonuçlardan, s mevsimsel periyotlu deterministik bir mevsimsel bileşenin $\omega_k = 2\pi k/s, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm [s/2]$ harmonik frekanslarda kesikli (çizgi) spektruma sahip olacağı bilinir. Örneğin, e_t bir beyaz gürültü sürecini göstermek üzere,

$$X_t = \sum_{k=1}^6 \left[\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{12}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{12}\right) \right] + e_t$$

modeli döngüsel (cyclical) trende sahip aylık bir seriyi modellemek için kullanılabilir. Böyle bir X_t sürecinin spektrumu, biri deterministik bileşene diğeri e_t beyaz gürültü sürecine ilişkin olmak üzere, iki bağımsız spektranın toplamı olacaktır. Beyaz gürültü sürecinin spektrumu yatay düz bir çizgi olduğundan, sonuçta elde edilen spektrum, $\omega_k = 2\pi k/12, k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$ harmonik mevsimsel frekanslarda sivri uçlara sahip olacaktır (Wei 2006).

Mevsimsel ARMA süreçleri mevsimsel olmayan ARMA süreçlerinin özel bir hali olduğundan, Bölüm 2.4'teki sonuçlar buraya uyarlanabilir. Çarpımsal mevsimsel

modeller iki lineer filtrenin art arda uygulanması olarak düşünülebilir. Örnek olarak aşağıda üç farklı mevsimsel süreç ele alınacaktır.

İlk olarak $s = 12$ mevsimsel periyotlu,

$$(1 - \Phi B^{12})X_t = e_t$$

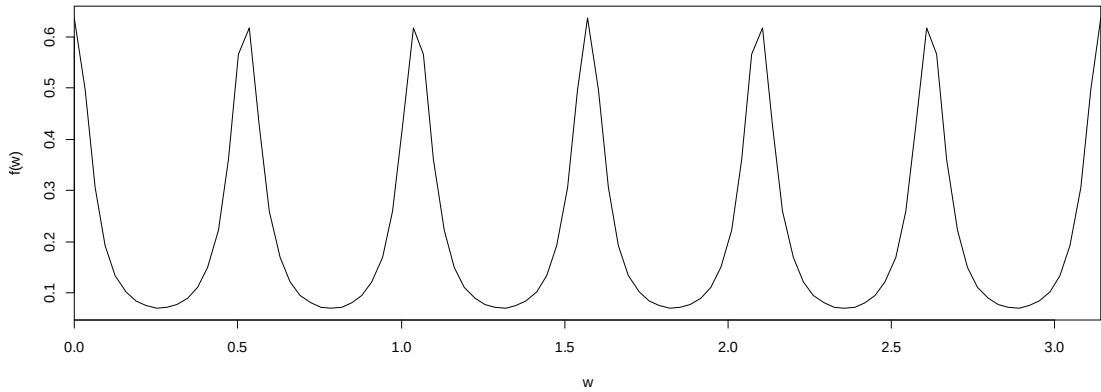
şeklindeki mevsimsel AR süreci ele alınsın. Sürecin otokovaryans üreten fonksiyonu,

$$\gamma(B) = \sigma_e^2 \frac{1}{(1 - \Phi B^{12})(1 - \Phi B^{-12})}$$

olarak verilir. Süreç durağan ise bu durumda spektrum vardır ve

$$f(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{(1 - \Phi e^{-i12\omega})(1 - \Phi e^{i12\omega})} = \frac{\sigma_e^2}{[1 + \Phi^2 - 2\Phi \cos(12\omega)]}$$

ifadesine eşittir. $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olmak üzere her $\omega = \pi(2k - 1)/12$ için $\cos(12\omega) = -1$ ve her $\omega = 2\pi k/12$ ile $\omega = 0$ için $\cos(12\omega) = 1$ olur. Bu sebeple, $\Phi > 0$ olduğunda Şekil 2.27’de gösterildiği gibi spektrum, $\omega = 0$ ’daki bir zirve hariç, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $\omega = 2\pi k/12$ mevsimsel harmonik frekanslarda zirveler ve $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $\omega = \pi(2k - 1)/12$ frekanslarda dipler sergiler. $\Phi < 0$ için spektrum benzer şekilde türetilir.



Şekil 2.27 $(1 - \Phi B^{12})X_t = e_t$ süreci için spektrum, $\Phi = 0.5$, $\sigma_e^2 = 1$

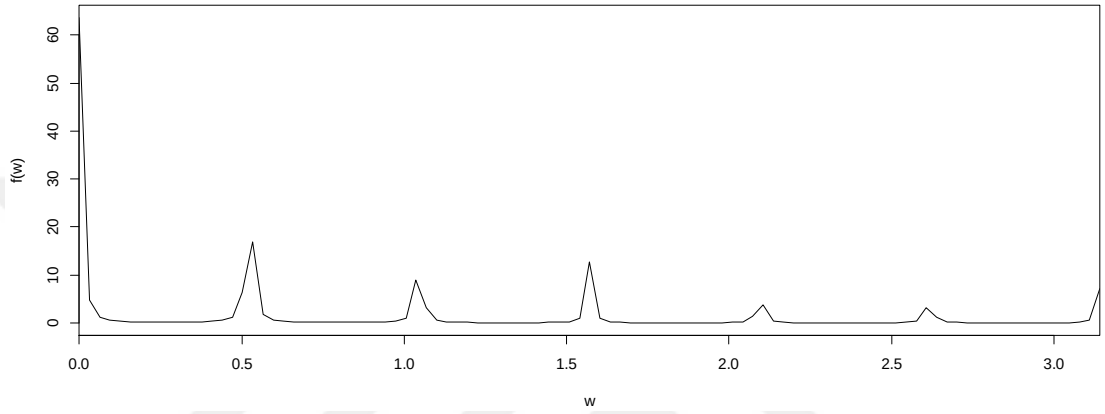
Daha sonra, hem mevsimsel hem de mevsimsel olmayan AR bileşenlerine sahip $s = 12$ mevsimsel periyotlu,

$$(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})X_t = e_t$$

şeklindeki çarpımsal mevsimsel AR süreci ele alınsın. Sürecin spektrumunun,

$$f(\omega) = \frac{\sigma_e^2}{(1 + \phi^2 - 2\phi \cos \omega)(1 + \Phi^2 - 2\Phi \cos(12\omega))}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. $\phi > 0$ ve $\Phi > 0$ için spektrumun genel şekli Şekil 2.28'deki gibidir. Mevsimsellik $0, 1/12, 2/12, 3/12, 4/12, 5/12$ ve $6/12$ frekanslarda azalan büyüklükteki sivri uçlarda görülmektedir.



Şekil 2.28 $(1 - \phi B)(1 - \Phi B^{12})X_t = e_t$ süreci için spektrum, $\phi = 0.5$, $\Phi = 0.9$ ve $\sigma_e^2 = 1$

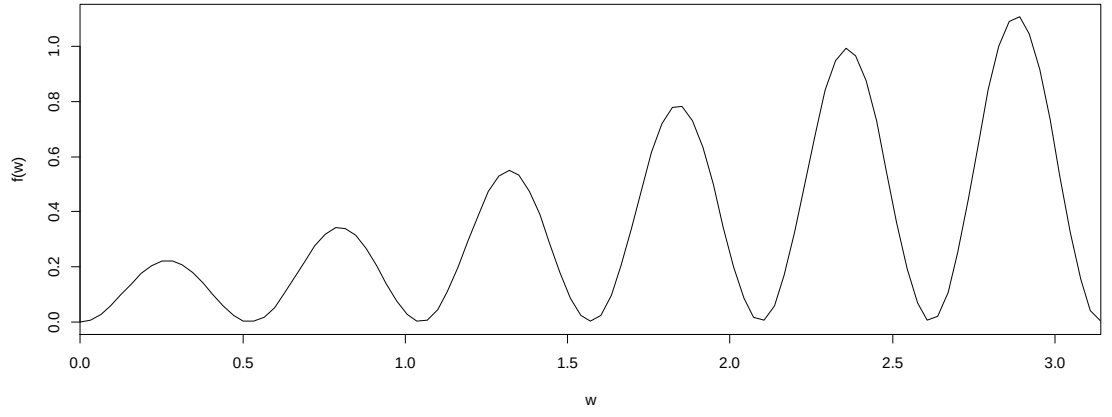
Son örnek olarak,

$$X_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^{12})e_t$$

şeklindeki mevsimsel MA süreci ele alınsın. Sürece karşılık gelen spektral yoğunluk,

$$f(\omega) = \sigma_e^2(1 + \theta^2 - 2\theta \cos \omega)(1 + \theta^2 - 2\theta \cos(12\omega))$$

şeklindedir. $\theta = 0.4$ ve $\theta = 0.9$ parametreleri için spektral yoğunluk Şekil 2.29'da gösterilmektedir (Cryer ve Chan 2008, Wei 2006).



Şekil 2.29 $X_t = (1 - \theta B)(1 - \theta B^{12})e_t$ süreci için spektrum, $\theta = 0.4$, $\theta = 0.9$, $\sigma_e^2 = 1$

3. MEVSİMSEL BİRİM KÖK TESTLERİ

Bu bölümde literatürde tek değişkenli zaman serilerinde mevsimsel birim kökün varlığının araştırılmasında yaygın olarak kullanılan üç test prosedürü ele alınmıştır. Bunlar 1984'te Dickey, Hasza ve Fuller tarafından geliştirilen *simetrik en küçük kareler yöntemi*, 1990'da Hylleberg, Engle, Granger ve Yoo tarafından geliştirilen *HEGY yöntemi* ve 1990'da Franses tarafından geliştirilen *Franses yöntemi*dir.

3.1 Simetrik En Küçük Kareler (DHF) Yöntemi

Dickey vd. (1984) tarafından ortaya koyulan ve literatürde *DHF testi* olarak da bilinen bu yöntem, parametrelerin simetrik en küçük kareler tahmin edicisinin dağılımına dayanmaktadır.

X_t zaman serisi için,

$$X_t = \alpha_d X_{t-d} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

modelinin uygun olduğu düşünülün. Burada $X_{-d+1}, X_{-d+2}, \dots, X_0$ başlangıç değerlerini (genellikle sıfır) gösterir ve $e_t \text{ iid}(0, \sigma^2)$ rasgele değişkenlerdir. Model (3.1) aylık verilerin $d = 12$, çeyreklik verilerin $d = 4$, vb. ile temsil edildiği basit bir mevsimsel zaman serisi modelidir.

Dickey vd. (1984) çalışmasında α_d 'nin en küçük kareler tahmin edicisine ($\hat{\alpha}_d$) alternatif olarak simetrik en küçük kareler tahmin edicisini ($\tilde{\alpha}_d$) dikkate almış ve $\alpha_d = 1$ hipotezi altında tahmin edicilerin dağılımlarına ilişkin yüzdelikler hesaplamıştır. $\alpha_d = 1$ hipotezi, Model (3.1) için $\dot{X}_t = X_t - X_{t-d}$ mevsimsel farkının beyaz gürültü olduğunu ifade etmektedir.

Mevsimsel zaman serisi için alternatif bir model de durağan modeldir:

$$X_t = \alpha_d X_{t-d} + e_t, \quad |\alpha_d| < 1 \quad (3.2)$$

Buna ilaveten, Model (3.2) ile modellenebilen durağan X_t zaman serisinin normal olması durumunda, $X_t - \alpha_d X_{t+d}$ NID($0, \sigma^2$) zaman serisi olacaktır. Öyle ki,

$$X_t = \alpha_d X_{t+d} + v_t, \quad v_t \sim \text{NID}(0, \sigma^2) \quad (3.3)$$

(3.2) ve (3.3)'ten hareketle α_d 'nin, simetrik tahmin edici olarak adlandırılan, alternatif bir tahmin edicisi önerilmiştir. Simetrik en küçük kareler tahmin edici $\tilde{\alpha}_d$, X_t 'nin X_{t+d} üzerine ve X_t 'nin X_{t-d} üzerine regresyonundan alınan bilgiyi birleştirir. α_d 'nin simetrik en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\tilde{\alpha}_d = \left[2 \sum_{t=1}^n X_t X_{t-d} \right] \left[\sum_{t=1}^n (X_t^2 + X_{t-d}^2) \right]^{-1} \quad (3.4)$$

ve birleştirilmiş t-türü istatistik (the associated studentized statistic),

$$\tilde{\tau}_d = \sqrt{2} \left[\left\{ \sum_{t=1}^n (X_t^2 + X_{t-d}^2) \right\}^{-1} S^2 \right]^{-1/2} (\tilde{\alpha}_d - 1)$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$S^2 = \frac{1}{2n-1} \sum_{t=1}^n [(X_t - \tilde{\alpha}_d X_{t-d})^2 + (X_{t-d} - \tilde{\alpha}_d X_t)^2]$$

şeklindeir. Verilen tanımlamalardan $-1 \leq \tilde{\alpha}_d \leq 1$ ve

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\tau}_d = -[(2n-1)(1-\tilde{\alpha}_d)]^{1/2} (1+\tilde{\alpha}_d)^{-1/2}$$

olur. Burada $\tilde{\tau}_d$, $\tilde{\alpha}_d$ 'nin monoton bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, $\tilde{\tau}_d$ tabanlı testler ile $\tilde{\alpha}_d$ tabanlı testler eşdeğer olacaktır.

Model (3.1) ve (3.2), $E(X_t) = 0$ özelliğine sahiptir. Sıfır ortalamalı durağan bir zaman serisi ile uygulamada nadiren karşılaşılır. $H_0: \alpha_d = 1$ hipotezine bir alternatif, çoğu gerçek veri için uygun olan, $E(X_t)$ 'nin sıfır olmadığı durağan modeldir. Bu nedenle aşağıdaki regresyon modeli dikkate alınır:

$$X_t = \sum_{i=1}^d \theta_i \delta_{it} + \alpha_d X_{t-d} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Burada,

$$\delta_{it} = \begin{cases} 1, & t = i \pmod{d} \text{ ise} \\ 0, & \text{d.d.} \end{cases}$$

şeklindedir ve $\{e_t\}$ iid($0, \sigma^2$) rasgele değişkenlerin bir dizisidir. $t = 1, 2, \dots, n$ için X_t 'nin $\delta_{1t}, \delta_{2t}, \dots, \delta_{dt}, X_{t-d}$ üzerine regresyonundan $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_d, \hat{\alpha}_{\mu d}$ katsayıları elde edilir. $\hat{\alpha}_{\mu d} - 1$ ile ilişkili olan t -türü istatistik $\hat{\tau}_{\mu d}$ ile gösterilmiştir.

$|\alpha_d| < 1$ varsayımı altında Model (3.5)'in yeniden parametrelendirilmiş hali aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X_t - \sum_{i=1}^d \delta_{it} \mu_i = \alpha_d \left(X_{t-d} - \sum_{i=1}^d \delta_{it} \mu_i \right) + e_t \quad (3.6)$$

Burada,

$$\theta_i = (1 - \alpha_d) \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

şeklindedir. Model (3.6) altında $\alpha_d = 1$ hipotezi, μ_i 'nin değeri ne olursa olsun $\theta_i = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle Model (3.6)'da $\alpha_d = 1$ olması μ_i 'nin herhangi bir değer olmasına olanak tanır. Bununla birlikte $|\alpha_d| < 1$ alternatifi altında μ_i tanımlanmış bir parametredir ve tahmin edilmelidir.

Durağan model için μ_i 'nin iki tahmin edicisi dikkate alınabilir. Birincisi Model (3.5) için regresyon tahmin edicileri tarafından tanımlanır ve ikincisi ise,

$$\tilde{\mu}_i = (n_i + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{n_i} X_{-d+i+dj}, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

olarak tanımlanan $\tilde{\mu}_i$ mevsimsel ortalamadır. Burada $n_i, (n + d - i)/d$ değerini aşmayan en büyük tamsayıdır. $\tilde{\mu}_i$ tahmin edicisi α_d 'nin (3.4)'te verilene benzer olarak simetrik tahmin edicisini tanımlamak için kullanılabilir. Öyle ki,

$$\tilde{\alpha}_{\mu d} = \left\{ \sum_{t=1}^n (x_t^2 + x_{t-d}^2) \right\}^{-1} 2 \sum_{t=1}^n x_t x_{t-d}$$

Burada,

$$x_t = X_t - \sum_{i=1}^d \tilde{\mu}_i \delta_{it}$$

şeklindedir.

Başlangıç değerleri sabit olduğunda θ_i (veya μ_i), regresyon modeli kullanılarak tahmin edilmelidir.

Son olarak μ_i mevsimsel ortalamalarının sabit bir μ 'ye eşit olduğu bir model dikkate alınmıştır. Sabit ortalamaya sahip model için sıradan regresyon tahmin edicileri,

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}^* \\ \hat{\alpha}_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^n X_{t-d} \\ \sum_{t=1}^n X_{t-d} & \sum_{t=1}^n X_{t-d}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n X_t \\ \sum_{t=1}^n X_{t-d} X_t \end{bmatrix}$$

ve $H_0: \alpha_d = 1$ için t -türü istatistik,

$$\hat{t}_d^* = \left\{ \left[\sum_{t=1}^n X_{t-d}^2 - n^{-1} \left(\sum_{t=1}^n X_{t-d} \right)^2 \right]^{-1} S_*^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} (\hat{\alpha}_d^* - 1)$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$S_*^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^n (X_t - \hat{\theta}^* - \hat{\alpha}_d^* X_{t-d})^2$$

şeklindedir. Durağan sabit ortalamalı model için α_d 'nin simetrik tahmin edicisi ise,

$$\tilde{\alpha}_{\mu d}^* = \left\{ \sum_{t=1}^n [(x_t^*)^2 + (x_{t-d}^*)^2] \right\}^{-1} 2 \sum_{t=1}^n x_t^* x_{t-d}^*$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$\tilde{\mu}_* = (n+d)^{-1} \sum_{t=-d+1}^n X_t$$

$$x_t^* = X_t - \tilde{\mu}_*$$

şeklindedir (Dickey vd. 1984). Test istatistiklerine ilişkin kritik değerler Dickey vd. (1984) tarafından verilmiştir.

Simetrik en küçük kareler yönteminde test istatistiği değerinin paket programlar yardımı ile hesaplanması karmaşıktır. Bu yönteme alternatif olarak geliştirilen ve pratikte çok kullanılan bir yöntem HEGY yöntemidir (Akdi 2012).

3.2 HEGY Yöntemi

Hylleberg vd. (1990) tarafından tek değişkenli zaman serilerinde mevsimsel birim kök olup olmadığını test etmek için bir yöntem geliştirilmiştir. Literatürde *HEGY prosedürü* olarak bilinen ve çeyreklik verileri dikkate alan bu yöntem, standart Dickey-Fuller yönteminden yola çıkılarak geliştirilmiş olup sıfır frekansın yanı sıra bütün mevsimsel frekanslardaki birim kökleri ele almaktadır.

Mevsimsel fark alma operatörünün kullanılmasıyla stokastik mevsimsel süreç aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\varphi(B)X_t = (1 - B^4)X_t = \Delta_4 X_t = \varepsilon_t$$

Buradaki $(1 - B^4)$ polinomu:

$$(1 - B^4) = (1 - B)(1 + B)(1 - iB)(1 + iB) = (1 - B)(1 + B)(1 + B^2)$$

şeklindedir. Dolayısıyla burada 1, -1 ve $\pm i$ olmak üzere dört kök vardır. Bu kökler sırasıyla sıfır frekansa, yılda 2 devire veya çeyrekte 1/2 devire ve yılda 1 devire veya çeyrekte 1/4 devire karşılık gelir. Son iki kök ($\pm i$) birbirinden ayrıştırılamayıp yıllık devir olarak yorumlanır.

Hylleberg vd. (1990) çalışmasında $\varphi(B)$ polinomunun köklerinin birim çemberin dışında bulunduğu alternatifine karşı köklerin birim çember üzerinde bulunduğu hipotezini test etmek amacıyla, Lagrange teoremine dayanan ve yaklaşım (approximation) teorisinde kullanılan bir önermeye göre otoregresif polinomun yeniden yazılmasını önermiştir:

Önerme: Ayırık, sıfırdan farklı ve (possibly) kompleks olan $\theta_1, \dots, \theta_p$ noktalarında sonlu-değerli herhangi bir ((possibly) sonsuz veya rasyonel) $\varphi(B)$ polinomu, elementer polinomlar ve kalan terim açısından aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi(B) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \Delta(B)/\delta_k(B) + \Delta(B) \varphi^{**}(B) \quad (3.7)$$

Burada, λ_k sabitlerin bir kümesi, $\varphi^{**}(B)$ ((possibly) sonsuz veya rasyonel) bir polinom ve

$$\delta_k(B) = 1 - \frac{1}{\theta_k} B, \quad \Delta(B) = \prod_{k=1}^p \delta_k(B)$$

şeklindedir.

Bu ifadenin alternatif ve kullanışlı bir formu, (3.7)'deki denklemin sağ tarafına $\Delta(B) \sum \lambda_k$ teriminin eklenip çıkarılmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\varphi(B) = \sum_{k=1}^p \lambda_k \Delta(B) (1 + \delta_k(B))/\delta_k(B) + \Delta(B) \varphi^*(B) \quad (3.8)$$

Burada $\varphi^*(B) = \varphi^{**}(B) + \sum \lambda_k$ şeklindedir. Bu gösterimde $\varphi(0) = \varphi^*(0)$ olup birime normalize edilmiştir.

Açıktır ki, $\varphi(B)$ polinomu θ_k 'da köke sahip olacaktır ancak ve ancak $\lambda_k = 0$ 'dır. Bu sebeple birim kök testi, $\lambda = 0$ parametrelerinin testi ile eşdeğer olan uygun bir genişletmedir.

Bu önermeyi çeyreklik veride mevsimsel birim köklerin testine uygulamak için, $\varphi(B)$ polinomu $\theta_k, k = 1, \dots, 4$ için $+1, -1, i$ ve $-i$ kökleri civarında genişletilir. Bu durumda (3.8)'den,

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \lambda_1 B(1+B)(1+B^2) + \lambda_2 (-B)(1-B)(1+B^2) \\ &+ \lambda_3 (-iB)(1-B)(1+B)(1-iB) + \lambda_4 (iB)(1-B)(1+B)(1+iB) \\ &+ \varphi^*(B) (1-B^4) \end{aligned}$$

elde edilir. Şüphesiz $\varphi(B)$ reel olduğundan, λ_3 ve λ_4 kompleks eşlenikler olmalıdır. Basitlik için $\pi_1 = -\lambda_1$, $\pi_2 = -\lambda_2$, $2\lambda_3 = -\pi_3 + i\pi_4$ ve $2\lambda_4 = -\pi_3 - i\pi_4$ olarak alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= -\pi_1 B(1 + B + B^2 + B^3) - \pi_2(-B)(1 - B + B^2 - B^3) \\ &\quad - (\pi_4 + \pi_3 B)(-B)(1 - B^2) + \varphi^*(B)(1 - B^4) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sonuç olarak (3.9) ifadesi ile yeniden yazılan $\varphi(B)$ polinomunun,

$$\varphi(B)X_t = \varepsilon_t$$

denkleminde yerine koyulmasıyla,

$$\varphi^*(B)Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + \varepsilon_t \quad (3.10)$$

elde edilir. Burada,

$$Y_{1,t} = (1 + B + B^2 + B^3)X_t$$

$$Y_{2,t} = -(1 - B + B^2 - B^3)X_t$$

$$Y_{3,t} = -(1 - B^2)X_t$$

$$Y_{4,t} = (1 - B^4)X_t = \Delta_4 X_t$$

şeklinde ve π_i katsayıları mevsimsel köklerin katsayılarıdır. (3.10)'da verilen denkleme hataları beyazlatmak için gerektiği kadar Y_4 teriminin gecikmeli değerleri ilave edildikten sonra denklem sıradan en küçük karelerle tahmin edilir. Ayrıca modele sabit terim veya mevsimsel lineer trend gibi deterministik bileşenler de eklenebilir. 1 kökü için $H_0: \pi_1 = 0$ hipotezi, -1 kökü için $H_0: \pi_2 = 0$ hipotezi ve $\pm i$ kompleks kökleri için $H_0: \pi_3 = \pi_4 = 0$ hipotezi test edilir. Eğer π_2 ve π_3 ya da π_4 sıfırdan farklıysa, seride mevsimsel birim kökler olmadığı sonucuna varılır.

Denklem (3.10)'da $\varphi^*(B) = 1$ olarak düşünüldüğünde, $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ varsayımı altında $\pi_1 = 0$ 'ın testi standart Dickey-Fuller testidir. Öyle ki model,

$$Y_{1,t} = (1 + \pi_1)Y_{1,t-1} + \varepsilon_t$$

formunda yazılabilir. Benzer olarak $\pi_1 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ varsayımı altında model,

$$Y_{2,t} = -(1 + \pi_2)Y_{2,t-1} + \varepsilon_t$$

olur. $\pi_2 = 0$ için test -1 kökü için testtir ve yine Dicker-Fuller tarafından Dickey-Fuller dağılımına sahip olduğu gösterilmiştir. Son olarak $\pi_4 = 0$ varsayımı altında model,

$$Y_{3,t} = -(1 + \pi_3)Y_{3,t-2} + \varepsilon_t$$

olarak yazılır. $\pi_3 = 0$ için test, yılda iki kez mevsimsellik için Dickey-Hasza-Fuller testine karşılık gelir.

Söz konusu testler için Monte Carlo kritik değerleri Hylleberg vd. (1990) tarafından verilmiştir. Bu değerler Dickey-Fuller ve Dickey-Hasza-Fuller'den elde edilen Monte Carlo değerlerine çok yakındır (Hylleberg vd. 1990).

Mevsimsel birim kök testi (çeyreklik veriler) için HEGY yönteminin uygulanmasında izlenmesi gereken yol aşağıda özetlenmiştir:

Adım 1. Aşağıdaki dönüşümler yapılır:

$$Y_{1,t-1} = (1 + B + B^2 + B^3)X_{t-1} = X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3} + X_{t-4}$$

$$Y_{2,t-1} = -(1 - B + B^2 - B^3)X_{t-1} = -X_{t-1} + X_{t-2} - X_{t-3} + X_{t-4}$$

$$Y_{3,t-1} = -(1 - B^2)X_{t-1} = -X_{t-1} + X_{t-3} \text{ ve } Y_{3,t-2} = -X_{t-2} + X_{t-4}$$

$$Y_{4,t} = (1 - B^4)X_t = \Delta_4 X_t$$

Adım 2. Aşağıdaki yardımcı regresyon modeline göre parametreler tahmin edilir:

$$Y_{4,t} = \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-2} + \pi_4 Y_{3,t-1} + e_t$$

Bu regresyon modelinin parametreleri tahmin edilirken, $(1 - B^4)X_{t-i}$ değişkenleri de modele ilave edilebilir. Bu aşamada, e_t hata terimlerinin beyaz gürültü serisi olduğu kontrol edilmelidir.

Adım 3. Bu aşamada, önce $H_0: \pi_1 = 0$ hipotezini test etmek için t istatistiğinin hesaplanan değeri Hylleberg vd. (1990) tarafından verilen kritik değer ile karşılaştırılır. $H_0: \pi_1 = 0$ yokluk hipotezi reddedilemez ise seri birim köklüdür. Bu durum sıfır frekansta mevsimsel olmayan birim kökün varlığını gösterir. $H_0: \pi_2 = 0$ yokluk hipotezi reddedilemez ise, seri 2 devirli (6 aylık dönemler) birim köke sahiptir. Bu,

yarıyıllık (1/2) frekansta mevsimsel birim kökün olduğunu gösterir. Son olarak $H_0: \pi_3 = \pi_4 = 0$ hipotezini test etmek için F istatistiğinin değeri hesaplanır. Kritik değerler aynı çalışmada verilmiştir. F istatistiğinin değeri kritik değerden küçük ise $H_0: \pi_3 = \pi_4 = 0$ yokluk hipotezi reddedilemez ve yıllık (1/4 veya 3/4) frekansta mevsimsel birim kök vardır denir (Akdi 2012).

Modele deterministik kukla değişkenler dâhil edildiğinde model,

$$Y_{4,t} = \alpha_1 D_{1t} + \alpha_2 D_{2t} + \alpha_3 D_{3t} + \alpha_4 D_{4t} + \pi_1 Z_1 X_{t-1} + \pi_2 Z_2 X_{t-1} + \pi_3 Z_3 X_{t-2} \\ + \pi_4 Z_3 X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \psi_i \Delta_4 X_{t-i} + \delta t + u_t$$

şeklinde olacaktır. Burada D_{qt} , q -üncü çeyreğe karşılık gelen ve 0-1 değerlerini alan kukla değişkenlerdir ve

$$Z_1 = (1 + B + B^2 + B^3), Z_2 = -(1 - B + B^2 - B^3), Z_3 = -(1 - B^2)$$

şeklindedir (Harris ve Sollis 2003).

3.3 Franses Yöntemi

HEGY testi üç aylık (çeyreklik) gözlemlerden oluşan zaman serileri için geliştirilmiştir. Franses (1990), bu testin uygulamasını aylık gözlemlerden oluşan zaman serilerine genişletmiştir.

Aylık gözlemler dikkate alındığında durağan olmayan mevsimsel süreç,

$$X_t = X_{t-12} + \varepsilon_t$$

olacaktır. Backshift operatörünün kullanılmasıyla bu süreç,

$$(1 - B^{12})X_t = \varepsilon_t$$

olarak yeniden yazılabilir. $1 - B^{12} = 0$ denklemi birim çember üzerinde bulunan 12 çözüme sahiptir. Öyle ki $1 - B^{12}$ polinomu,

$$1 - B^{12} = (1 - B)(1 + B)(1 - iB)(1 + iB) \\ \times (1 + (\sqrt{3} + i)B/2)(1 + (\sqrt{3} - i)B/2)$$

$$\times (1 - (\sqrt{3} + i)B/2)(1 - (\sqrt{3} - i)B/2)$$

$$\times (1 + (i\sqrt{3} + 1)B/2)(1 - (i\sqrt{3} - 1)B/2)$$

$$\times (1 - (i\sqrt{3} + 1)B/2)(1 + (i\sqrt{3} - 1)B/2)$$

şeklindedir. Burada $(1 - B)$ 'nin dışındaki diğer tüm terimler mevsimsel birim köklere karşılık gelir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$1 - B^{12} = (1 - B^2)(1 + B^2)$$

$$(1 + \sqrt{3}B + B^2)(1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 + B + B^2)(1 - B + B^2)$$

$$= (1 - B^4)(1 - B^2 + B^4)(1 + B^2 + B^4)$$

yazılır. Hylleberg vd. (1990) tarafından verilen önermenin $\Delta(B) = 1 - B^{12}$ olduğu duruma uygulanması ile,

$$\begin{aligned} \varphi(B) &= \lambda_1 B \varphi_1(B) + \lambda_2 (-B) \varphi_2(B) + \lambda_3 (i - B) B \varphi_3(B) \\ &+ \lambda_4 (-i - B) B \varphi_3(B) + \lambda_5 (-(\sqrt{3} + i)/2 - B) B \varphi_4(B) \\ &+ \lambda_6 (-(\sqrt{3} - i)/2 - B) B \varphi_4(B) + \lambda_7 ((\sqrt{3} + i)/2 - B) B \varphi_5(B) \\ &+ \lambda_8 ((\sqrt{3} - i)/2 - B) B \varphi_5(B) + \lambda_9 (-(i\sqrt{3} + 1)/2 - B) B \varphi_6(B) \\ &+ \lambda_{10} ((i\sqrt{3} - 1)/2 - B) B \varphi_6(B) + \lambda_{11} ((i\sqrt{3} + 1)/2 - B) B \varphi_7(B) \\ &+ \lambda_{12} (-(i\sqrt{3} - 1)/2 - B) B \varphi_7(B) + \varphi^*(B) \varphi_8(B) \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \varphi_1(B) &= (1 + B)(1 + B^2)(1 + B^4 + B^8) = \left(1 + \sum_{j=1}^{11} B^j\right) \\ \varphi_2(B) &= (1 - B)(1 + B^2)(1 + B^4 + B^8) \\ \varphi_3(B) &= (1 - B^2)(1 + B^4 + B^8) \\ \varphi_4(B) &= (1 - B^4)(1 - \sqrt{3}B + B^2)(1 + B^2 + B^4) \\ \varphi_5(B) &= (1 - B^4)(1 + \sqrt{3}B + B^2)(1 + B^2 + B^4) \\ \varphi_6(B) &= (1 - B^4)(1 - B^2 + B^4)(1 - B + B^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\varphi_7(B) = (1 - B^4)(1 - B^2 + B^4)(1 + B + B^2)$$

$$\varphi_8(B) = (1 - B^{12})$$

şeklindedir. (3.11)'deki kompleks terimleri ortadan kaldırmak için aşağıdaki tanımlamaları yapmak uygundur:

$$\lambda_1 = -\pi_1$$

$$\lambda_2 = -\pi_2$$

$$\lambda_3 = -(i\pi_3 + \pi_4)/2$$

$$\lambda_4 = -(-i\pi_3 + \pi_4)/2$$

$$\lambda_5 = i\pi_5 - ((1 + i\sqrt{3})/2)\pi_6$$

$$\lambda_6 = -i\pi_5 - ((1 - i\sqrt{3})/2)\pi_6$$

$$\lambda_7 = -i\pi_7 - ((1 + i\sqrt{3})/2)\pi_8$$

$$\lambda_8 = i\pi_7 - ((1 - i\sqrt{3})/2)\pi_8$$

$$\lambda_9 = i\sqrt{3}\pi_9/3 - ((1 + (1/3)i\sqrt{3})/2)\pi_{10}$$

$$\lambda_{10} = -i\sqrt{3}\pi_9/3 - ((1 - (1/3)i\sqrt{3})/2)\pi_{10}$$

$$\lambda_{11} = -i\sqrt{3}\pi_{11}/3 - ((1 + (1/3)i\sqrt{3})/2)\pi_{12}$$

$$\lambda_{12} = i\sqrt{3}\pi_{11}/3 - ((1 - (1/3)i\sqrt{3})/2)\pi_{12}$$

(3.13)

(3.13), (3.11)'de yerine koyulursa,

$$\varphi(B) = -\pi_1 B \varphi_1(B) + \pi_2 B \varphi_2(B) + (\pi_3 + \pi_4 B) B \varphi_3(B) + (\pi_5 + \pi_6 B) B \varphi_4(B)$$

$$+ (\pi_7 + \pi_8 B) B \varphi_5(B) + (\pi_9 + \pi_{10} B) B \varphi_6(B) + (\pi_{11} + \pi_{12} B) B \varphi_7(B) + \varphi^*(B) \varphi_8(B)$$

elde edilir. Aylık verilerin,

$$\varphi(B)X_t = \varepsilon_t + \mu_t$$

şeklindeki otoregresyon ile üretildiği varsayıldığında (mevsimsel) birim köklerin varlığı için test denklemi,

$\begin{aligned} \varphi^*(B)Y_{8,t} = & \pi_1 Y_{1,t-1} + \pi_2 Y_{2,t-1} + \pi_3 Y_{3,t-1} + \pi_4 Y_{3,t-2} + \pi_5 Y_{4,t-1} \\ & + \pi_6 Y_{4,t-2} + \pi_7 Y_{5,t-1} + \pi_8 Y_{5,t-2} + \pi_9 Y_{6,t-1} + \pi_{10} Y_{6,t-2} + \pi_{11} Y_{7,t-1} \\ & + \pi_{12} Y_{7,t-2} + \mu_t + \varepsilon_t \end{aligned}$	(3.14)
--	--------

olur. Burada μ_t zaman serisinin deterministik kısmını gösterir ve sabit terim, mevsimsel kukla değişkenler veya trendden oluşabilir. $\varphi^*(B)$ ise B 'nin polinomial bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon,

$$Y_{i,t} = \varphi_i(B)X_t, \quad i = 1,8$$

$$Y_{i,t} = -\varphi_i(B)X_t, \quad i = 2, \dots, 7$$

özelliklerine sahiptir ve bütün kökleri birim çemberin dışında yer alır. Buradaki φ_i , (3.12)'de verilmiştir. Sıradan en küçük kareler yönteminin (3.14)'e uygulanması ile π_i 'lerin tahminleri elde edilir. $\varphi^*(B)$ polinomunun derecesi artıkları beyazlatmak amacıyla deneysel bir yolla seçilir. Karşılık gelen köklerin birim çember üzerinde olması durumunda π_i sıfır olduğundan, tahmin edilen π_i 'lerin anlamlılığının test edilmesi, birim köklerin test edilmesi anlamına gelir. (Mevsimsel) birim köklerin olması durumunda, karşılık gelen π_i 'ler sıfırdır. Eğer $\pi_1 = 0$ ise, bu durumda 1 kökünün varlığı reddedilemezdir. $\pi_2, \dots, \pi_{12}$ tahminleri istatistiksel olarak sıfırdan farklıysa mevsimsel birim kökler olmayacaktır. $i = 1, \dots, 12$ için bütün π_i 'lerin sıfırdan farklı olduğu durumda, durağan bir mevsimsel kalıpla karşılaşılmıştır ve modellemede mevsimsel kukla değişkenler kullanılabilir. Bütün π_i 'lerin sıfıra eşit olması durumunda ise durağanlığı sağlamak için $(1 - B^{12})$ filtresini uygulamak uygundur. π_1 ve π_2 için testler tek-yönlü, diğer π_i 'ler için ise iki-yönlüdür. (3.13)'ten görülebileceği gibi, kompleks birim kök çiftleri eşlenik olduğundan, bu kökler ancak karşılık gelen π çiftlerinin eşanlı olarak sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Örneğin i ve $-i$ kökleri sadece π_3 ve π_4 'ün her ikisinin de sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur ve dolayısıyla π_3 ve π_4 'ü eşanlı test etmek daha uygundur. π_i 'lerin ayrı ayrı t -testleri için, π çiftlerine dair $\pi_3 = \pi_4 = 0, \dots, \pi_{11} = \pi_{12} = 0$ 'ın F testi için ve $\pi_3 = \dots = \pi_{12} = 0$ 'ın ortak F testi için kritik değerler farklı μ_t kombinasyonlarına göre Franses (1990) tarafından verilmiştir (Franses 1990, 1991a).

4. PERİODOGRAM TABANLI MEVSİMSEL BİRİM KÖK TESTİ

Zaman serilerinin frekans alanı analizinde seriyi karakterize eden fonksiyon spektral yoğunluk fonksiyonudur. Spektral yoğunluk fonksiyonu, Bölüm 2.3.6’da detaylı olarak ele alınan, serinin periodogram ordinatı $I_n(\omega_k)$ kullanılarak tahmin edilir. Zaman serileri için spektral analiz, özellikle de spektral yoğunluk fonksiyonunun tahmini, ağırlıklı olarak, $n \rightarrow \infty$ iken $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ serisinin periodogram ordinatının asimptotik dağılımına bağlıdır. Periodogram ordinatı, spektral yoğunluk fonksiyonunun tahmininin yanı sıra verinin periyodik bir bileşen içerip içermediğinin araştırılması ve verideki gizli periyodikliklerin ortaya çıkarılması gibi birçok istatistiksel çıkarım amacı için kullanılmaktadır (Akdi 1995).

Birim kök süreçleri için periodogram ordinatının davranışı ve yorumu ilk olarak Akdi (1995) tarafından incelenmiştir. Akdi (1995)’te incelenen zaman serisi modelleri; birinci dereceden otoregresif model ($AR(1)$), p -inci dereceden otoregresif model ($AR(p)$), birinci dereceden otoregresif hareketli ortalama modeli ($ARMA(1,1)$) ve sabit sürüklenmeli rasgele yürüyüş modelidir. Çalışmada $AR(1)$, $ARMA(1,1)$ ve trendin olmadığı durumda sabit sürüklenmeli rasgele yürüyüş modeli için periodogram ordinatının exact dağılımı elde edilmiştir. Ayrıca tek birim köklü genel $AR(p)$ süreci için, k sabit ve $n \rightarrow \infty$ olmak üzere, $\omega_k = 2\pi k/n$ olarak seçilmiş ve düşük frekanslarla ilgilenilmiş, sonuç olarak dağılımın şeklinin aynı kaldığı görülmüştür. Son olarak, periodogram ordinatı kullanılarak otoregresif modeller için bir birim kök testi önerilmiştir. Daha sonra, çalışma Akdi ve Dickey (1998) tarafından sürdürülmüştür.

Bu bölümde öncelikle Akdi (1995)’te detaylıca ele alınan periodogram ordinatının dağılımı ile ilgili bilgilere yer verilmiş, daha sonra Akdi (1995) ve Akdi ve Dickey (1998)’de önerilen periodogram tabanlı birim kök testi ele alınmıştır. Son olarak periodogram tabanlı testin mevsimsel zaman serilerinde birim kökün testi için kullanımı incelenmiştir. Buna yönelik teorik zemin, Bölüm 2.3’te detaylı olarak ele alınmıştır.

4.1 Periodogram Ordinatinın Dağılımı

Aşağıda verilen birinci dereceden $AR(1)$ modeli ele alınsın:

$$(Y_t - \mu) = \rho(Y_{t-1} - \mu) + e_t \quad (4.1)$$

Burada e_t , bağımsız normal dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisidir. (4.1)'de $\rho = 1$ ve $Y_0 = 0$ alındığında model,

$$Y_t = Y_{t-1} + e_t = \sum_{j=1}^t e_j \quad (4.2)$$

olur. $E(Y_t) = 0$, $Var(Y_t) = t\sigma^2$, $Cov(Y_t, Y_s) = \sigma^2 \min\{t, s\}$ olduğu açıktır.

Model (4.1)'de $\rho = 1$ ve $Y_0 = 0$ olduğu düşünölsün, yani (4.2) ile verilen model dikkate alınsın ve $\tilde{\mathbf{X}} = (a_k, b_k)'$ gösterimi kullanılsın. Bu durumda $\tilde{\mathbf{X}}$, ortalama vektörü $\tilde{\mathbf{0}}$ ve varyans kovaryans matrisi $\mathbf{V}_1$ olan ortak normal dağılımlıdır. Burada,

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\sigma^2}{n(1 - \cos(\omega_k))} \begin{bmatrix} 2 - \cos(\omega_k) & -\sin(\omega_k) \\ -\sin(\omega_k) & 2 + \cos(\omega_k) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$f_1(\omega_k) = \frac{\sigma^2}{[1 - \cos(\omega_k)]}$ ve $\tilde{\mathbf{X}} = (a_k, b_k)' \sim N(\tilde{\mathbf{0}}, \mathbf{V}_1)$ olması durumunda, $\sqrt{\frac{n}{f(\omega_k)}} \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{Y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ olur. Burada,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2 - \cos(\omega_k) & -\sin(\omega_k) \\ -\sin(\omega_k) & 2 + \cos(\omega_k) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

ve korelasyon matrisi,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad r_1 = -\frac{\sin(\omega_k)}{\sqrt{3 + \sin^2(\omega_k)}}$$

şeklindedir. (4.3) ile verilen kovaryans matrisi $\mathbf{V}$, periodogram ordinatinın dağılımının çıkarılmasında önemli bir rol oynamaktadır.

V kovaryans matrisinin özellikleri:

- i. Simetrik bir matristir.
- ii. $\det(\mathbf{V}) = 4 - \cos^2(\omega_k) - \sin^2(\omega_k) = 3$ olduğundan, nonsingular bir matristir.
- iii. $\mathbf{V}$ 'nin özdeğerleri 1 ve 3'tür. $\mathbf{I}_2$, 2×2 'lik bir birim matris olmak üzere,

$$0 = \det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{I}_2) = [(2 - \lambda) - \cos(\omega_k)][(2 - \lambda) + \cos(\omega_k)] - \sin^2(\omega_k)$$

$$= (2 - \lambda)^2 - \cos^2(\omega_k) - \sin^2(\omega_k) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$
 olur. Buradan, $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 3$ olur. $\mathbf{V}$ 'nin elemanlarının ω 'ya göre farklılık göstermesine rağmen, özdeğerleri sabittir.
- iv. $\mathbf{V}$, 1 ve 3 özdeğerlerine sahip simetrik ve nonsingular bir matris olduğundan, $\mathbf{QVQ}'$ diagonal olacak şekilde bir $\mathbf{Q}$ matrisi vardır. Böyle bir $\mathbf{Q}$ matrisi, $\mathbf{V}$ 'nin özdeğerleri ile elde edilebilir.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sin(\omega_k) & 1 - \cos(\omega_k) \\ 1 - \cos(\omega_k) & -\sin(\omega_k) \end{bmatrix}$$

alındığında,

$$\mathbf{QVQ}' = 2(1 - \cos(\omega_k)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 2(1 - \cos(\omega_k)) \mathbf{D} = \mathbf{V}^*$$

elde edilir. $\mathbf{Q}$ normalize edilebilir, fakat basitlik için bu haliyle kullanılır.

- v. $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = 2(1 - \cos(\omega_k)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dikkate alınsın. $\det(\mathbf{Q}) = -2(1 - \cos(\omega_k))$ olup, $\omega_k \neq 0$ frekanslarında sıfırdan farklıdır ve,

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2(1 - \cos(\omega_k))} \mathbf{Q}$$

şeklindedir.

Şimdi, (4.1) ile verilen model ve Bölüm 2.3.6'da

$$I_n(\omega_k) = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2) \quad (4.4)$$

olarak tanımlanan periodogram ordinatı dikkate alınsın. Bu durumda normalize edilmiş periodogram ordinatı, her biri bir serbestlik dereceli, iki bağımsız farklı ağırlıklı ki-kare değişkenlerinin toplamı olarak dağılır:

$$\frac{I_n(\omega_k)}{f(\omega_k)} \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2 \quad (4.5)$$

Burada Z_1 ve Z_2 birbirinden bağımsız aynı $N(0,1)$ dağılımlı rasgele değişkenlerdir ve

$$f(\omega_k) = \frac{\sigma^2}{2[1 - \cos(\omega_k)]}$$

şeklindedir.

Ayrıca genel bir $ARMA(p, q)$ süreci için $n \rightarrow \infty$ iken,

$$\frac{4\pi^2 k^2}{\sigma^2 \phi^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

olduğu gösterilmiştir.

Johanson ve Kotz (1970) tarafından $Z = \alpha_1 Z_1^2 + \alpha_2 Z_2^2$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonuna ilişkin bilgiler tanımlanmıştır. Bu tanımlamalara dayalı olarak ki-kare rasgele değişkenlerinin birleşiminin dağılım fonksiyonu elde edilir. Öyle ki $H_a: |\rho| < 1$ alternatif hipotezi altında, periodogram ordinatının üstel olarak (2 serbestlik dereceli ki-kare) dağıldığı bilgisine ulaşılır ve bu bilgi birim kök testi için kullanılır (Akdi 1995).

4.2 Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi

$H_0: |\rho| = 1$ hipotezi altında periodogram ordinatının büyük, $H_1: |\rho| < 1$ hipotezi altında ise küçük olduğu dikkate alındığında, periodogram ordinatının küçük olması durumunda yokluk hipotezi reddedilir. Ayrıca hem yokluk hipotezi hem de alternatif hipotez altında periodogram ordinatının dağılımı bilinmektedir. En küçük kareler tahmin yöntemine göre ρ ve σ^2 'nin OLS tahmin edicileri (sırasıyla $\hat{\rho}$ ve $\hat{\sigma}^2$) elde edilir. $\hat{\rho}_n \xrightarrow{P} \rho$ ve $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca Slutsky teoremi kullanılarak,

$$\frac{2(1 - \cos(\omega_k))}{\hat{\sigma}_n^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad H_0 \text{ altında} \quad (4.6)$$

$$\frac{(1 + \hat{\rho}_n^2 - 2\hat{\rho}_n \cos(\omega_k))}{\hat{\sigma}_n^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} \chi_2^2, \quad H_1 \text{ altında} \quad (4.7)$$

elde edilir.

$H_0: |\rho| = 1$ yokluk hipotezini durağanlık şeklindeki alternatifine karşı test etmek için,

$$T_n(\omega_k) = \frac{2(1 - \cos(\omega_k))}{\hat{\sigma}_n^2} I_n(\omega_k) \quad (4.8)$$

şeklinde bir test istatistiği kullanılır. Burada $P\{T_n(\omega_1) < c | H_0\} = \alpha$ 'dır. $\beta_n(\rho)$ ile gösterilen güç fonksiyonu ise,

$$\beta_n(\rho) = P_\rho\{H_0 \text{ red} | H_1\} = P_\rho\{T_n < c | |\rho| < 1\}$$

$$= P_\rho\left\{\frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k))}{\sigma^2} I_n(\omega_k) < ck_n(\rho)\right\} \cong P\{\chi_2^2 < ck_n(\rho)\} = \int_0^{ck_n(\rho)} e^{-x} dx$$

$$= 1 - e^{-ck_n(\rho)}$$

olarak hesaplanır. Burada, $k_n(\rho) = \frac{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k))}{2(1 - \cos(\omega_k))}$ şeklindedir.

$k_n(\omega_k)$ 'nın n 'nin monoton artan bir fonksiyonu olduğu ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\rho) = 1$ olduğu dikkate alınsın. Öyle ki $n \rightarrow \infty$ iken $k_n(\rho)$ ifadesinin payı $(1 - \rho)^2$ ifadesine ve paydası sıfıra yaklaşacak ve böylece $k_n(\rho)$ sonsuza gidecek, dolayısıyla güç 1'e gidecektir. Ampirik güç ile bu tahmin karşılaştırılmış ve n değeri arttıkça gücün 1'e yaklaştığı gözlenmiştir. Çizelge 4.1'de yokluk hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında dağılımın kritik değerleri yer almaktadır (Akdi 1995, Akdi ve Dickey 1998).

Çizelge 4.1 $Z_1^2 + 3Z_2^2$ 'nin yüzdeleri (Akdi ve Dickey 1998)

α	0.01	0.025	0.05	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
z	0.0348	0.088	0.178	0.368	9.48	12.85	16.37	21.17

Periodogram Tabanlı Birim Kök Testinin Avantajları

Periodogram tabanlı birim kök testinde (4.8) ile verilen $T_n(\omega_k)$ istatistiği kullanılmaktadır. Asimptotik dağılım her bir sabit ω_k için geçerli olmakla birlikte hipotez testlerinde genellikle ω_1 sıklığı kullanılmaktadır. Seride özellikle periyodik bir bileşen varsa bu yöntemin diğer yöntemlere göre avantajlı olduğu söylenebilir. Bunun yanı sıra periodogram tabanlı birim kök testinin avantajlarını aşağıdaki gibi sıralamak mümkündür (Akdi ve Dickey 1998):

- i. Yöntemde herhangi bir model varsayımı bulunmamaktadır. Yani, metod modele göre değişmezdir (invariant). Bu, periodogramların herhangi bir model varsayımına bağlı olmadan hesaplanabildiğini gösterir.
- ii. Bilindiği gibi diğer birim kök testleri zaman serisi modeline bağlı olduğundan, öncelikle model parametrelerinin tahminine ihtiyaç duyulur. Burada ise, beyaz gürültü serisinin varyansı haricinde herhangi bir parametre tahminine ihtiyaç duyulmaz.
- iii. $T_n(\omega_k)$ istatistiğinin dağılımı H_0 yokluk hipotezi ve H_a alternatif hipotez altında belli olduğundan, test için analitik güç fonksiyonu mevcuttur.
- iv. Test istatistiğinin kritik değerleri örneklem hacmine bağlı değildir.
- v. Periodogramlar verinin trigonometrik dönüşümleri ile hesaplandığı için eğer veride herhangi bir periyodik bileşen varsa, bu periyodikliği dikkate alması sebebiyle, periodogram tabanlı testin daha anlamlı olacağı açıktır.

4.3 Mevsimsel Zaman Serileri için Periodogram Tabanlı Birim Kök Testi

Bu bölümde amaç, $f(\omega_k)$ spektral yoğunluk fonksiyonu ile normalize edilen, normalize edilmiş periodogram ordinatının dağılımını bulmaktır. Periodogram ordinatının a_k ve b_k Fourier katsayılarına göre,

$$I_n(\omega_k) = \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2)$$

şeklinde tanımlandığı daha önce belirtilmişti. Böylelikle, normalize edilmiş periodogram ordinatının dağılımının bulunması için öncelikle periodogram ordinatının tanımında yer alan a_k ve b_k Fourier katsayılarının ortak dağılımının bulunması gerekir. Dolayısıyla bu başlık altında öncelikle periodogram ordinatının formülasyonunda yer alan a_k ve b_k Fourier katsayılarının ortak dağılımı incelenecek, ardından normalize edilmiş periodogram ordinatının dağılımı ile ilgili çıkarımda bulunulacaktır.

e_t sıfır ortalamalı ve sabit σ_e^2 varyanslı iid rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$Y_t = \rho Y_{t-4} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde verilen mevsimsel otoregresif süreç ele alınsın. Burada $\rho = 1$ alındığında model,

$$Y_t = Y_{t-4} + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

olarak yazılır. Bu süreç her $t = 1, 2, \dots, n$ için açık bir şekilde yazıldığında,

$$\begin{aligned}
Y_1 &= Y_{1-4} + e_1 = \underbrace{Y_{-3}}_0 + e_1 = e_1 \\
Y_2 &= Y_{2-4} + e_2 = \underbrace{Y_{-2}}_0 + e_2 = e_2 \\
Y_3 &= Y_{3-4} + e_3 = \underbrace{Y_{-1}}_0 + e_3 = e_3 \\
Y_4 &= Y_{4-4} + e_4 = \underbrace{Y_0}_0 + e_4 = e_4 \\
\hline
Y_5 &= Y_{5-4} + e_5 = \underbrace{Y_1}_{e_1} + e_5 = e_1 + e_5 \\
Y_6 &= Y_{6-4} + e_6 = \underbrace{Y_2}_{e_2} + e_6 = e_2 + e_6 \\
Y_7 &= Y_{7-4} + e_7 = \underbrace{Y_3}_{e_3} + e_7 = e_3 + e_7 \\
Y_8 &= Y_{8-4} + e_8 = \underbrace{Y_4}_{e_4} + e_8 = e_4 + e_8 \\
\hline
Y_9 &= Y_{9-4} + e_9 = \underbrace{Y_5}_{e_1+e_5} + e_9 = e_1 + e_5 + e_9 \\
Y_{10} &= Y_{10-4} + e_{10} = \underbrace{Y_6}_{e_2+e_6} + e_{10} = e_2 + e_6 + e_{10} \\
Y_{11} &= Y_{11-4} + e_{11} = \underbrace{Y_7}_{e_3+e_7} + e_{11} = e_3 + e_7 + e_{11} \\
Y_{12} &= Y_{12-4} + e_{12} = \underbrace{Y_8}_{e_4+e_8} + e_{12} = e_4 + e_8 + e_{12} \\
\hline
&\vdots \\
Y_{n-3} &= Y_{(n-3)-4} + e_{n-3} = e_1 + e_5 + e_9 + \dots + e_{n-3} \\
Y_{n-2} &= Y_{(n-2)-4} + e_{n-2} = e_2 + e_6 + e_{10} + \dots + e_{n-2} \\
Y_{n-1} &= Y_{(n-1)-4} + e_{n-1} = e_3 + e_7 + e_{11} + \dots + e_{n-1} \\
Y_n &= Y_{n-4} + e_n = e_4 + e_8 + e_{12} + \dots + e_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Y_1, Y_5, Y_9, \dots, Y_{n-3}$ terimlerinin birbirleriyle ilişkili olduğu görülür. Bu terimler, $\{Y_{1,4(t)-3}\}_{t=1}^{n/4}$ serisinin elemanları olarak düşünülebilir. Dolayısıyla bu serinin $n/4$ elemanı vardır ve bunlar,

$$Y_{1,4(1)-3} = Y_{1,1} = Y_1$$

$$Y_{1,4(2)-3} = Y_{1,5} = Y_5$$

$$Y_{1,4(3)-3} = Y_{1,9} = Y_9$$

$\vdots$

$$Y_{1,4(n/4)-3} = Y_{1,n-3} = Y_{n-3}$$

şeklindedir. Burada anlaşılabilirlik için n sayısının 4'ün tam katı olduğu varsayılmıştır. Bu şekilde $i = 1,2,3,4$ için her biri $n/4$ elemanlı 4 farklı $\{Y_{i,i+4(t-1)}\}_{t=1}^{n/4}$ serisi elde edilir. $\{Y_{i,i+4(t-1)}\}_{t=1}^{n/4}$ serileri bundan böyle kısaca $\{Y_{i,t}\}$ olarak ifade edilecektir. Sonuç olarak $t = 1,2, \dots, n/4$ olmak üzere $\{Y_{i,t}\}, i = 1,2,3,4$ rasgele dizisi aşağıdaki gibi iid hataların toplamı şeklinde yazılır:

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= e_1 + e_5 + e_9 + \dots + e_{4t-3} \\ Y_{2,t} &= e_2 + e_6 + e_{10} + \dots + e_{4t-2} \\ Y_{3,t} &= e_3 + e_7 + e_{11} + \dots + e_{4t-1} \\ Y_{4,t} &= e_4 + e_8 + e_{12} + \dots + e_{4t} \end{aligned}$$

Genel olarak, $i = 1,2,3,4$ olmak üzere,

$$Y_{i,t} = \sum_{j=0}^{t-1} e_{i+4j} = e_i + e_{i+4} + e_{i+8} + \dots + e_{i+4(t-1)}, \quad t = 1,2, \dots, n/4 \quad (4.9)$$

olarak ifade edilir. (4.9)'dan, $Y_{i,t}, i = 1,2,3,4$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğu görülür. Böylelikle $\{Y_t\}_{t=1}^n = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n\}$ serisi, $i = 1,2,3,4$ olmak üzere birbirinden bağımsız $\{Y_{i,t}\}_{t=1}^{n/4}$ serilerine ayrıştırılmış olur. Öyle ki,

$$\{Y_{1,t}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_{4t-3}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_1, Y_5, Y_9, \dots, Y_{n-3}\}$$

$$\{Y_{2,t}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_{4t-2}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_2, Y_6, Y_{10}, \dots, Y_{n-2}\}$$

$$\{Y_{3,t}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_{4t-1}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_3, Y_7, Y_{11}, \dots, Y_{n-1}\}$$

$$\{Y_{4,t}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_{4t}\}_{t=1}^{n/4} = \{Y_4, Y_8, Y_{12}, \dots, Y_n\}$$

şeklindedir.

Bu ayrışımın yararlanılarak,

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n Y_t \cos(\omega_k t)$$

şeklinde ifade edilen Fourier katsayısı,

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{n} \left[\sum_{t=1}^{n/4} Y_{4t-3} \cos(\omega_k(4t-3)) + \sum_{t=1}^{n/4} Y_{4t-2} \cos(\omega_k(4t-2)) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{t=1}^{n/4} Y_{4t-1} \cos(\omega_k(4t-1)) + \sum_{t=1}^{n/4} Y_{4t} \cos(\omega_k(4t)) \right] \\
&= a_{1,k} + a_{2,k} + a_{3,k} + a_{4,k}
\end{aligned}$$

şeklinde 4 farklı bileşenin toplamı olarak yazılır. Burada $i = 1,2,3,4$ olmak üzere $a_{i,k}$, $Y_{i,t}$ serisine ilişkin ayrışımıdır ve

$$a_{i,k} = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n/4} Y_{i,i+4(t-1)} \cos(\omega_k(i+4(t-1)))$$

olarak ifade edilir. Yine $a_{i,k}$, $i = 1,2,3,4$ rasgele değişkenlerinin birbirinden bağımsız olacağı açıktır. Aynı ifade b_k katsayısı için de yazılır. Öyle ki $b_k = b_{1,k} + b_{2,k} + b_{3,k} + b_{4,k}$ olarak ifade edilir. $i = 1,2,3,4$ için her bir $Y_{i,t}$ serisi kullanılarak yazılan $b_{i,k}$ değişkenleri de birbirinden bağımsızdır. Sonuç olarak $i = j = 1,2,3,4$ ve $i \neq j$ olmak üzere, her $a_{i,k}$ ve $b_{j,k}$ değişkenleri de birbirinden bağımsız olacaktır.

$a_{i,k}$ ve $b_{j,k}$ değişkenleri tanımlandıktan sonra şimdi bu değişkenlerden yola çıkılarak $(a_k, b_k)'$ vektörünün dağılımı incelenecektir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 8}$$

ve

$$\tilde{X} = (a_{1,k}, b_{1,k}, a_{2,k}, b_{2,k}, a_{3,k}, b_{3,k}, a_{4,k}, b_{4,k})'$$

olmak üzere, $(a_k, b_k)' = \tilde{A}\tilde{X}$ olarak tanımlansın. $\tilde{A}\tilde{X}$ 'in dağılımını bulmak için, $(a_{i,k}, b_{i,k})'$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımını bulmak yeterlidir. Bu rasgele değişkenlerin normal dağılımlı olduğu kabul edildiğinde, sadece $\tilde{A}\tilde{X}$ 'in ortalama vektörünü ve varyans-kovaryans matrisini hesaplamak gereklidir. İlk olarak her i için $E(a_{i,k}) = E(b_{i,k}) = 0$ olduğuna ve böylece $E(a_k) = E(b_k) = 0$ olduğuna, başka bir deyişle $\tilde{A}\tilde{X}$ 'in ortalama vektörünün sıfır vektörü olduğuna dikkat edilsin. a_k ve b_k 'nin asimptotik varyansı ise, her iki rasgele değişkenin karşılık gelen tüm ayrışımalarının

toplamı olarak dikkate alınmasıyla elde edilir. (Burada ele alınan modelde 4 olan mevsimsellik faktörü genel olarak q ile gösterilecektir.)

$$\begin{aligned} Var(a_{i,k}) &= \frac{4\sigma_e^2}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \left\{ \min(i + q(t-1), i \right. \\ &\quad \left. + q(s-1)) \cos\left(2\pi k \frac{i + q(t-1)}{n}\right) \cos\left(2\pi k \frac{i + q(s-1)}{n}\right) \right\} \\ &= 4n\sigma_e^2 \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \left\{ \min\left(\frac{i + q(t-1)}{n}, \frac{i + q(s-1)}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. \cos\left(2\pi k \frac{i + q(t-1)}{n}\right) \cos\left(2\pi k \frac{i + q(s-1)}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

Sabit k için, buradaki çift toplama çift integral ile yaklaşılabileceği göz önüne alındığında, bazı hesaplamalardan ve trigonometrik özelliklerin kullanılmasından sonra aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{n} Var(a_{i,k}) \rightarrow 4\sigma_e^2 q \int_0^1 \int_0^1 \min(x, y) \cos(2\pi k dx) \cos(2\pi k dy) \partial x \partial y = \frac{\sigma_e^2}{2\pi^2 k^2 q}$$

(Burada, notasyonal karışıklıktan kaçınmak için, diferansiyeli göstermek amacıyla ∂ ifadesi kullanılmıştır.) $Var(b_{i,k})$ ve $Cov(a_{i,k}, b_{i,k})$ benzer şekilde aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\frac{1}{n} Var(b_{i,k}) \rightarrow 4\sigma_e^2 q \int_0^1 \int_0^1 \min(x, y) \sin(2\pi k dx) \sin(2\pi k dy) \partial x \partial y = \frac{3\sigma_e^2}{2\pi^2 k^2 q},$$

$$\frac{1}{n} Cov(a_{i,k}, b_{i,k}) \rightarrow 4\sigma_e^2 q \int_0^1 \int_0^1 \min(x, y) \cos(2\pi k dx) \sin(2\pi k dy) \partial x \partial y = 0$$

Bu yüzden $n \rightarrow \infty$ iken,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} a_{i,k} \\ b_{i,k} \end{bmatrix} \xrightarrow{D} N(0, V_1^*)$$

olur. Burada $V_1^* = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k^2 q} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ şeklindedir.

Fakat burada $(a_k, b_k) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{X}}$ 'in dağılımı bulunmak isteniyor. Her şeyden önce, $\tilde{\mathbf{X}}/\sqrt{n}$ 'nin asimptotik dağılımı da $\mathbf{0}$ ortalama vektörlü ve $\mathbf{V}_1 = \text{diag}\{\mathbf{V}_1^*, \mathbf{V}_1^*, \dots, \mathbf{V}_1^*\}$

şeklindeki V_1 varyans-kovaryans matrisli normal dağılımdır. Bu yüzden, $\tilde{X}$ 'in bütün bileşenlerinin bağımsız olduğu $(a_{i,k}, a_{j,k}, b_{i,k}, b_{j,k}$ ve $a_{i,k}, b_{j,k}$ 'lar tüm $i \neq j$ için bağımsız) bilgisi kullanılarak, (a_k, b_k) 'nın varyans-kovaryans matrisi hesaplanabilir. $(a_k, b_k) = A\tilde{X}$ 'in asimptotik dağılımı $\tilde{0}$ ortalama vektörlü ve $V = AV_1A'$ varyans-kovaryans matrisli normaldir. Elde edilen varyans-kovaryans matrisi q mevsimsellik faktörüne göre invarianttır ve dolayısıyla asimptotik dağılım da q mevsimsellik faktöründen bağımsızdır. Burada,

$$V = AV_1A' = \frac{\sigma^2}{2\pi^2k^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu yüzden $n \rightarrow \infty$ iken,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} \xrightarrow{D} N(\tilde{0}, V)$$

olur. Bu,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(a_k, b_k) \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{n}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} \frac{\sigma^2}{2\pi^2k^2}(Z_1^2 + 3Z_2^2), \quad n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

veya,

$$\Rightarrow \frac{2\pi^2k^2}{n\sigma^2}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2k^2}{n^2\sigma^2} \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2\pi k}{n}\right)^2 \frac{1}{\sigma^2} I_n(\omega_k) = \frac{\omega_k^2}{\sigma^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

veya,

$$\frac{I_n(\omega_k)}{f(\omega_k)} \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2, \quad n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

olduğunu gösterir. Sabit k için $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{2(1-\cos(4\omega_k))}{\omega_k^2} \rightarrow 1$ olup, bu ise $n \rightarrow \infty$ iken,

$$\frac{2(1-\cos(4\omega_k))}{\sigma^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

olduğunu gösterir. Bu gösterim açıkça, mevsimsel birim kök süreci altında test istatistiğinin asimptotik karma dağılımının, sıfır frekans birim kök süreci için elde edilen dağılımla aynı olduğunu söylemektedir.

Sonuç olarak periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testine ilişkin test istatistiği ve test istatistiğinin dağılımı,

$$T_n(\omega_k) = \frac{I_n(\omega_k)}{f(\omega_k)} = \frac{2(1 - \cos(4\omega_k))}{\sigma^2} I_n(\omega_k) \xrightarrow{D} Z_1^2 + 3Z_2^2$$

şeklindedir.



5. SİMÜLASYON VE UYGULAMA ÇALIŞMALARI

Bu bölümde $s = 4$ mevsimsel periyotlu birinci dereceden mevsimsel otoregresif zaman serisi modeli $SAR_4(1)$ esas alınarak periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için kritik değerler üretilmiş, daha sonra teorik güç hesaplamaları yapılmıştır. Simülasyon çalışması SAS ortamında, güç hesaplamaları ise RStudio ortamında gerçekleştirilmiştir.

Kritik değerlerin üretilmesi ve testin gücüne dair hesaplamaların yapılmasının ardından gerçek bir veri setinin kullanılmasıyla gerçekleştirilen uygulama çalışmasına yer verilmiştir.

5.1 Kritik Değerlerin Üretilmesi

Kritik değerlerin elde edilmesi için yapılan simülasyon çalışmasında öncelikle $n = 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 300, 400, 500$ örnek büyüklükleri için $N = 100.000$ tekrar ile,

$$X_t = \rho X_{t-4} + e_t, \quad \rho = 1$$

modeline uygun veri setleri üretilmiştir. Daha sonra her bir örnek büyüklüğü için üretilen 100.000 adet veri seti üzerinden Bölüm 4.3'te belirtilen $T_n(\omega_k)$ test istatistiğinin değerleri $k = 1$ için hesaplanmıştır. Burada şunu belirtmek gerekir ki test istatistiğinin değerleri her $k = 1, 2, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ için hesaplanabilir, fakat uygulamada genellikle $k = 1$ durumu kullanıldığından burada da hesaplamalar bu değer için yapılmıştır. Test istatistiğine dair formülasyonu yeniden ifade etmek gerekirse,

$$\omega_k = 2\pi k/n, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor (n-1)/2 \rfloor$$

$$I_n(\omega_k) = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2)$$

$$f(\omega_k) = \frac{\sigma_e^2}{2[1 - \cos(4\omega_k)]}$$

olmak üzere test istatistiği,

$$T_n(\omega_k) = \frac{I_n(\omega_k)}{f(\omega_k)}$$

şeklindedir. Yapılan hesaplamalarda σ_e^2 'nin tahmini olarak $t = 1, 2, \dots, n$ için üretilen her bir X_t serisinin X_{t-4} şeklindeki gecikmeli değerleri üzerine regresyonundan elde edilen hata kareler ortalaması dikkate alınmış ve $I_n(\omega_k)$ periodogram değerlerinin hesaplanması için *proc spectra* prosedürü kullanılmıştır. Böylelikle her bir örnek büyüklüğüne ilişkin $T_n(\omega_k)$ test istatistiği için $t_1, t_2, \dots, t_{100.000}$ şeklinde 100.000 tane değer hesaplanmıştır. Son olarak her bir örneklem için elde edilen $t_1, t_2, \dots, t_{100.000}$ değerleri küçükten büyüğe doğru sıralanmış ve bu sıralı değerlerin α oranı kadarı hangi değerden küçük ya da eşit kaldıysa o değer α anlam düzeyindeki kritik değer olarak ele alınmıştır.

Sonuç olarak $n = 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 300, 400, 500$ örnek büyüklükleri için elde edilen $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.10$ anlam düzeyindeki kritik değerler Çizelge 5.1'de sunulmaktadır.

Çizelge 5.1 Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testine ilişkin kritik değerler

n	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$
60	0.0351	0.1821	0.3735
80	0.0358	0.1845	0.3799
100	0.0323	0.1795	0.3724
120	0.0369	0.1812	0.3749
140	0.0351	0.1855	0.3770
160	0.0337	0.1774	0.3698
180	0.0358	0.1787	0.3743
200	0.0344	0.1813	0.3756
300	0.0344	0.1794	0.3713
400	0.0357	0.1806	0.3740
500	0.0348	0.1780	0.3683

5.2 Teorik Güç için Elde Edilen Hesaplamalar

$H_0: \rho = 1$ yokluk hipotezinin $H_1: |\rho| < 1$ alternatif hipotezine karşı test edilmesi problemi için ele alınan periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin analitik güç fonksiyonu mevcut olup,

$$\beta_n(\rho) = P_\rho(H_0 \text{ red} | H_1)$$

$$= P_\rho(T_n(\omega_k) < c_\alpha | |\rho| < 1)$$

$$\begin{aligned}
&= P_\rho \left(\frac{I_n(\omega_k)}{f(\omega_k)} < c_\alpha \mid |\rho| < 1 \right) \\
&= P_\rho \left(\frac{2(1 - \cos(4\omega_k))}{\sigma_e^2} I_n(\omega_k) < c_\alpha \mid |\rho| < 1 \right) \\
&= P_\rho \left(\frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k)}{\sigma_e^2} \frac{2(1 - \cos(4\omega_k))}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k)} I_n(\omega_k) < c_\alpha \mid |\rho| < 1 \right) \\
&= P_\rho \left(\frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k)}{\sigma_e^2} I_n(\omega_k) < \frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k)}{2(1 - \cos(4\omega_k))} c_\alpha \mid |\rho| < 1 \right) \\
&= P_\rho (\chi_2^2 < k_n(\rho, \alpha)) \\
&= \int_0^{k_n(\rho, \alpha)} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx \\
&= 1 - e^{-k_n(\rho, \alpha)/2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$k_n(\rho, \alpha) = \frac{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\omega_k)}{2(1 - \cos(4\omega_k))} c_\alpha$$

şeklindedir.

$\beta_n(\rho)$ güç fonksiyonu kullanılarak $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.10$ için elde edilen değerler sırasıyla Çizelge 5.2 ve 5.3'te sunulmaktadır.

Örnek hacmine ve ρ parametrelerine göre güç grafikleri ise sırasıyla Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de sunulmaktadır. Şekil 5.1'de sunulan, farklı n değerleri için testin gücüne dair grafik incelendiğinde, örnek hacmi arttıkça testin gücünün de arttığı görülmektedir. Farklı ρ parametrelerine göre testin gücüne ilişkin grafik incelendiğinde ise ρ değeri arttıkça testin gücünün azalarak α anlam düzeyine yaklaştığı görülmektedir (Şekil 5.2). Bunlar olması gereken sonuçlardır.

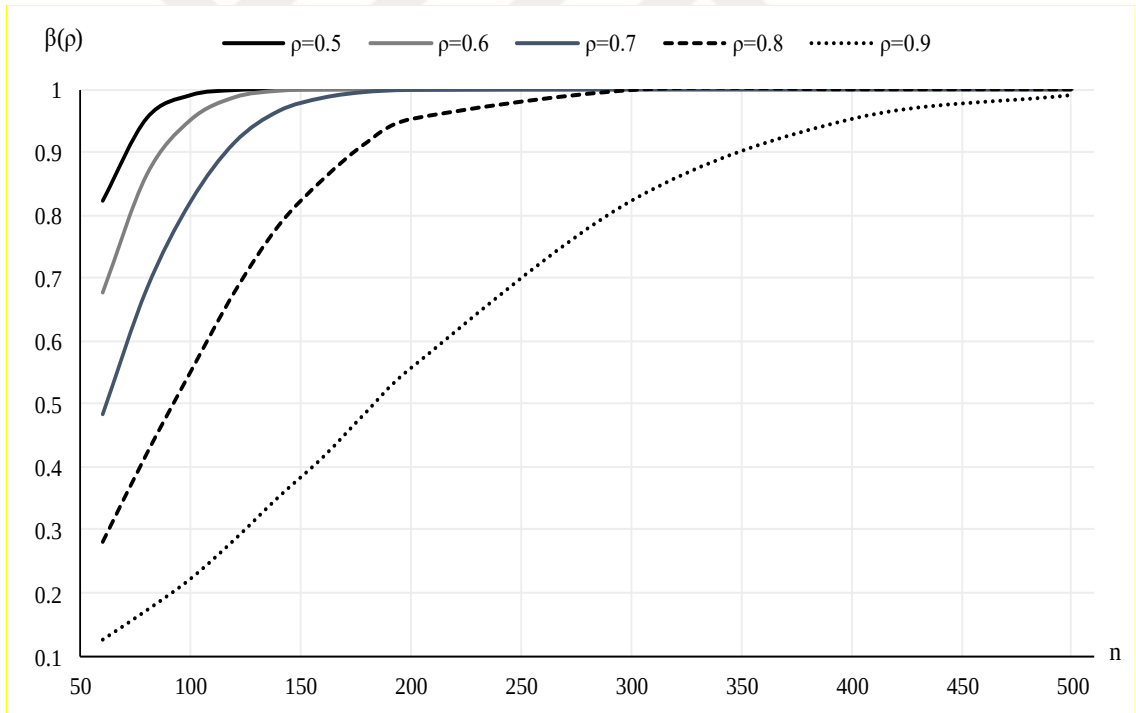
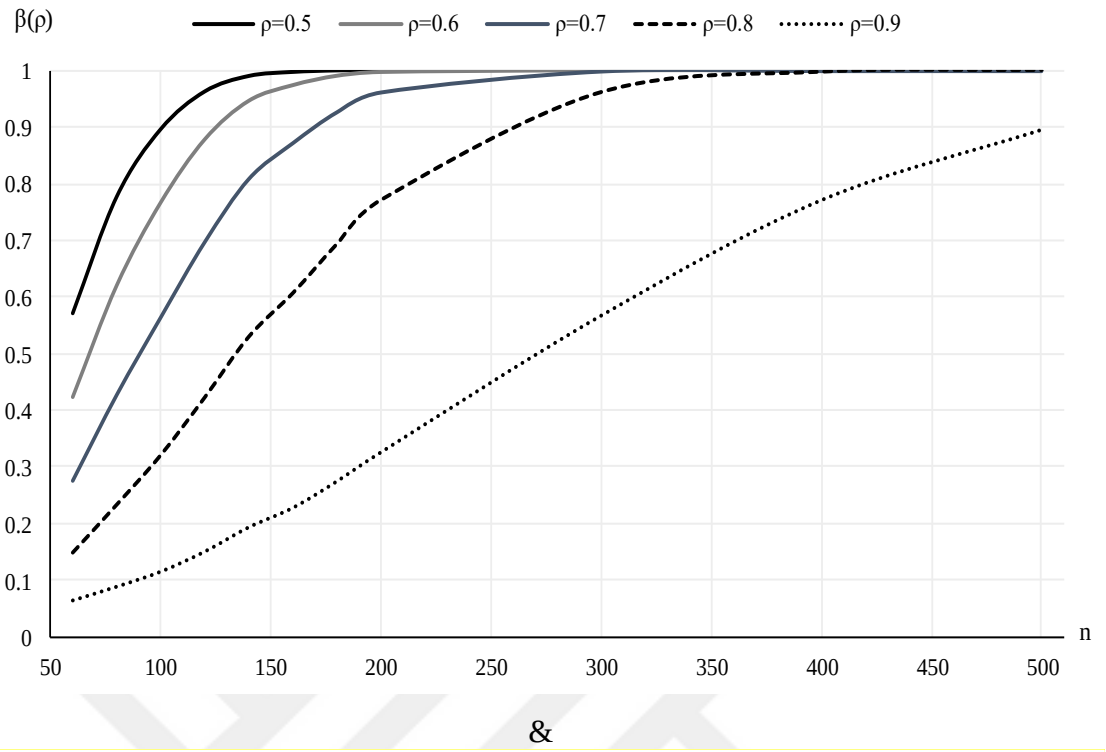
Çizelge 5.2 Testin gücü ($\alpha = 0.05$)

ρ	n=60	n=800	n=100	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200	n=300	n=400	n=500
0.05	0.9496	0.9952	0.9997	1	1	1	1	1	1	1	1
0.10	0.9317	0.9918	0.9993	1	1	1	1	1	1	1	1
0.15	0.9089	0.9862	0.9985	0.9999	1	1	1	1	1	1	1
0.20	0.8805	0.9776	0.9968	0.9998	1	1	1	1	1	1	1
0.25	0.8459	0.9646	0.9936	0.9993	1	1	1	1	1	1	1
0.30	0.8045	0.9457	0.9878	0.9983	0.9999	1	1	1	1	1	1
0.35	0.7560	0.9191	0.9777	0.9960	0.9995	0.9999	1	1	1	1	1
0.40	0.7005	0.8831	0.9610	0.9909	0.9986	0.9997	1	1	1	1	1
0.45	0.6383	0.8360	0.9348	0.9809	0.9959	0.9990	0.9998	1	1	1	1
0.50	0.5705	0.7766	0.8957	0.9622	0.9895	0.9966	0.9993	0.9999	1	1	1
0.55	0.4984	0.7045	0.8406	0.9299	0.9751	0.9900	0.9971	0.9993	1	1	1
0.60	0.4237	0.6207	0.7670	0.8783	0.9463	0.9738	0.9903	0.9970	1	1	1
0.65	0.3487	0.5272	0.6744	0.8019	0.8941	0.9389	0.9714	0.9883	0.9999	1	1
0.70	0.2761	0.4279	0.5650	0.6981	0.8094	0.8727	0.9272	0.9622	0.9993	1	1
0.75	0.2086	0.3280	0.4442	0.5688	0.6868	0.7632	0.8394	0.8981	0.9936	0.9999	1
0.80	0.1490	0.2336	0.3211	0.4229	0.5298	0.6066	0.6932	0.7708	0.9609	0.9969	0.9999
0.85	0.0999	0.1515	0.2070	0.2764	0.3554	0.4165	0.4928	0.5695	0.8408	0.9618	0.9933
0.90	0.0636	0.0880	0.1145	0.1499	0.1928	0.2272	0.2739	0.3251	0.5662	0.7699	0.8941
0.95	0.0418	0.0483	0.0545	0.0643	0.0769	0.0858	0.1001	0.1168	0.2089	0.3250	0.4438
0.99	0.0356	0.0361	0.0353	0.0360	0.0373	0.0361	0.0370	0.0382	0.0420	0.0483	0.0552

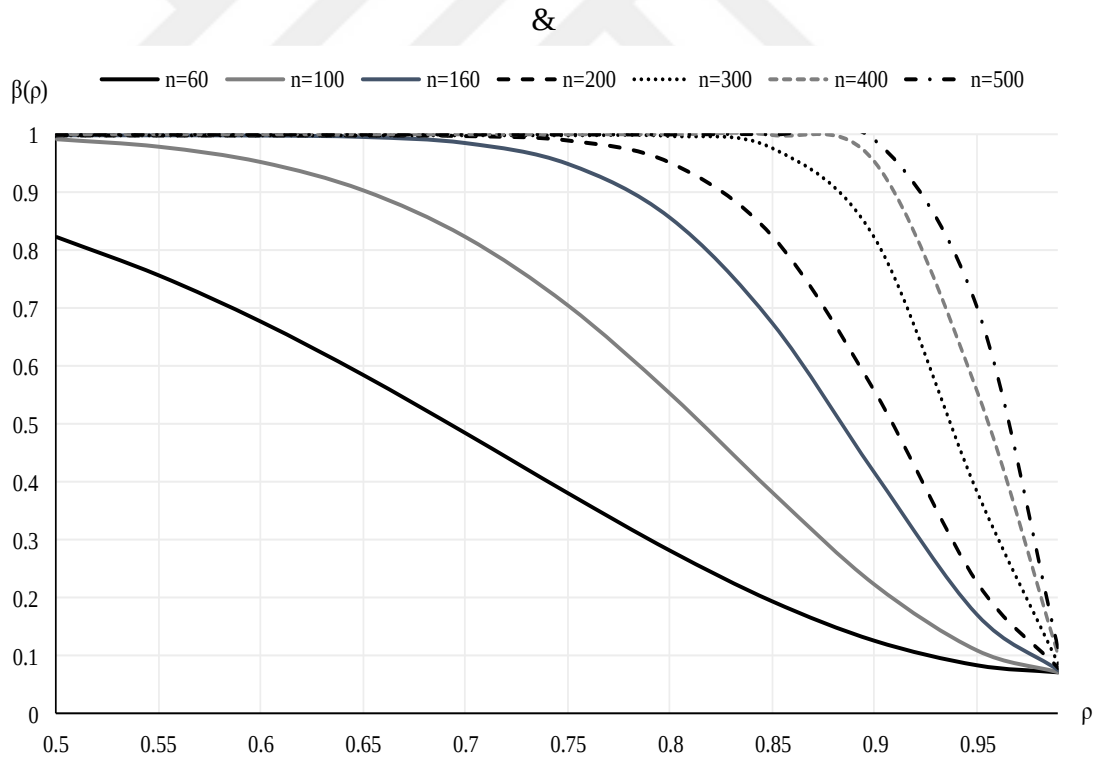
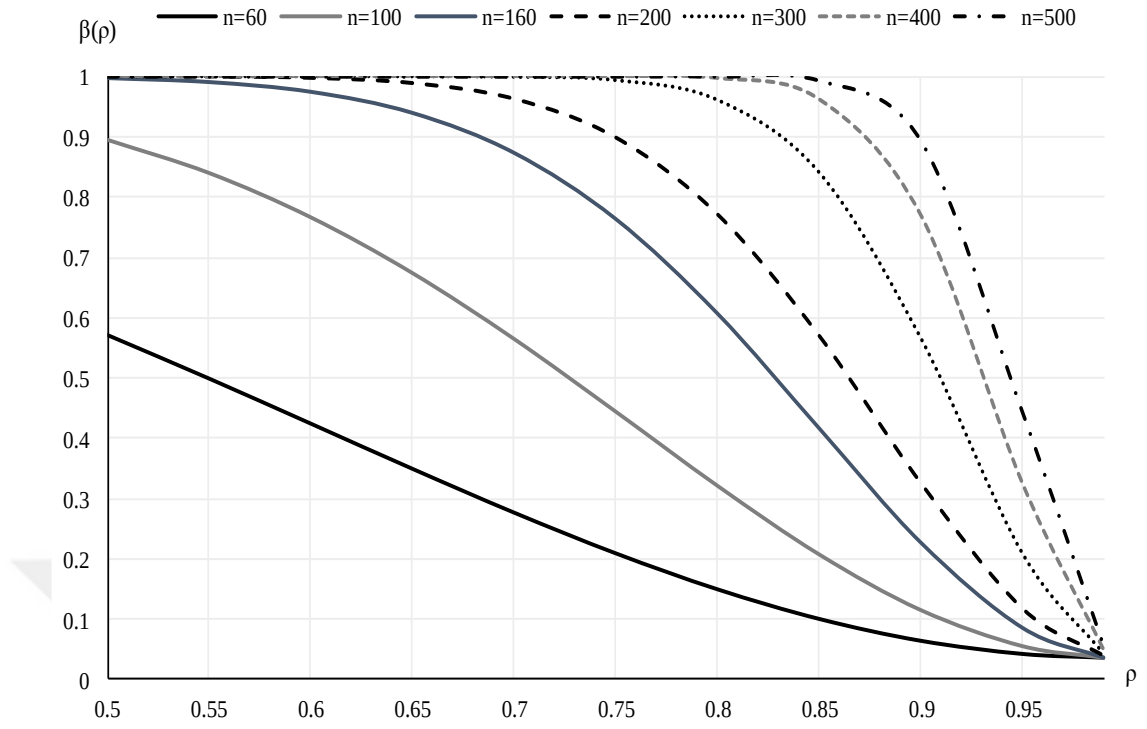
&

Çizelge 5.3 Testin gücü ($\alpha = 0.10$)

ρ	n=60	n=800	n=100	n=120	n=140	n=160	n=180	n=200	n=300	n=400	n=500
0.05	0.9978	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.10	0.9959	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.15	0.9927	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.20	0.9872	0.9996	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.25	0.9784	0.9990	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0.30	0.9648	0.9975	0.9999	1	1	1	1	1	1	1	1
0.35	0.9446	0.9944	0.9996	1	1	1	1	1	1	1	1
0.40	0.9156	0.9880	0.9988	0.9999	1	1	1	1	1	1	1
0.45	0.8758	0.9758	0.9965	0.9997	1	1	1	1	1	1	1
0.50	0.8234	0.9543	0.9908	0.9989	0.9999	1	1	1	1	1	1
0.55	0.7571	0.9188	0.9779	0.9959	0.9994	0.9999	1	1	1	1	1
0.60	0.6771	0.8641	0.9513	0.9872	0.9974	0.9995	0.9999	1	1	1	1
0.65	0.5850	0.7862	0.9026	0.9649	0.9896	0.9971	0.9994	0.9999	1	1	1
0.70	0.4846	0.6834	0.8222	0.9160	0.9656	0.9864	0.9959	0.9989	1	1	1
0.75	0.3811	0.5589	0.7044	0.8244	0.9055	0.9504	0.9783	0.9912	1	1	1
0.80	0.2817	0.4218	0.5523	0.6792	0.7842	0.8570	0.9159	0.9527	0.9988	1	1
0.85	0.1942	0.2870	0.3821	0.4878	0.5902	0.6748	0.7587	0.8256	0.9777	0.9988	1
0.90	0.1261	0.1727	0.2230	0.2853	0.3529	0.4156	0.4885	0.5572	0.8225	0.9523	0.9904
0.95	0.0839	0.0969	0.1098	0.1285	0.1501	0.1706	0.1983	0.2268	0.3843	0.5570	0.7030
0.99	0.0716	0.0729	0.0719	0.0730	0.0742	0.0739	0.0759	0.0774	0.0850	0.0974	0.1108



Şekil 5.1 Farklı n değerleri için testin gücü (Üst: $\alpha = 0.05$, alt: $\alpha = 0.10$)



Şekil 5.2 Farklı ρ değerleri için testin gücü (Üst: $\alpha = 0.05$, alt: $\alpha = 0.10$)

5.3 Uygulama

Çalışmanın uygulama kısmında gerçek bir seri üzerinde hem periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin hem de HEGY testinin nasıl uygulanacağını ve elde edilen sonuçların nasıl değerlendirileceğinin gösterilmesi amaçlanmıştır.

Bu amaçla Türkiye İstatistik Kurumunun internet sitesinde yayınlanan turizm verileri içerisinde milliyetlerine göre çıkış yapan yabancı ziyaretçi sayısı verisi 1996:Q1-2019:Q4 aralığı için derlenmiştir (TÜİK 2021). Sonuç olarak 22 Avrupa OECD ülkesi verisi ile hem bu 22 ülkenin toplam verisi ve hem de kaydı tutulan bütün ülkelerin toplam verisi olmak üzere her biri 96 gözlemden oluşan 24 seri üzerinden analizler gerçekleştirilmiştir⁵.

RStudio ortamında gerçekleştirilen analizlerde, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi için gerekli olan bütün kodlar Bölüm 4.3 temel alınarak yazılmış, yalnızca periodogram değerlerinin hesaplanması için programda var olan *periodogram()* fonksiyonu kullanılmıştır. HEGY testinin uygulaması için ise yine programda mevcut olan *hegy.test()* fonksiyonu kullanılmıştır.

Öncelikle her bir serinin düzeyde durağan olup olmadığı test edilmiş, daha sonra serilerin birinci mevsimsel farkları alındıktan sonra durağanlıkları yeniden sınanmıştır. Hem periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinde hem de HEGY testinde mevsimsel birim kök yokluk hipotezi durağan alternatifine karşı test edilmektedir. Dolayısıyla her iki yöntemde de p-değerinin dikkate alınan anlamlılık düzeyinden küçük olması ilgili serinin mevsimsel durağan olduğu anlamına gelmektedir.

Yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgular düzey için Çizelge 5.4'te sunulmuştur. Çizelge 5.4 incelendiğinde, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testine göre bütün serilerin düzeyde birim köklü olduğu görülmektedir. HEGY testi sonuçlarına göre ise

⁵ Serilere ilişkin kullanılan kısaltmalar şu şekildedir:

TOP: Bütün ülkeler toplamı, AVRUPATOP: Avrupa OECD ülkeleri toplamı, ALM: Almanya, AVU: Avusturya, BEL: Belçika, CEK: Çek Cumhuriyeti, DAN: Danimarka, FIN: Finlandiya, FRA: Fransa, HOL: Hollanda, ING: İngiltere, IRL: İrlanda, ISP: İspanya, ISVEC: İsveç, ISV: İsviçre, ITA: İtalya, IZL: İzlanda, LUK: Lüksemburg, MAC: Macaristan, NOR: Norveç, POL: Polonya, POR: Portekiz, SLO: Slovakya, YUN: Yunanistan

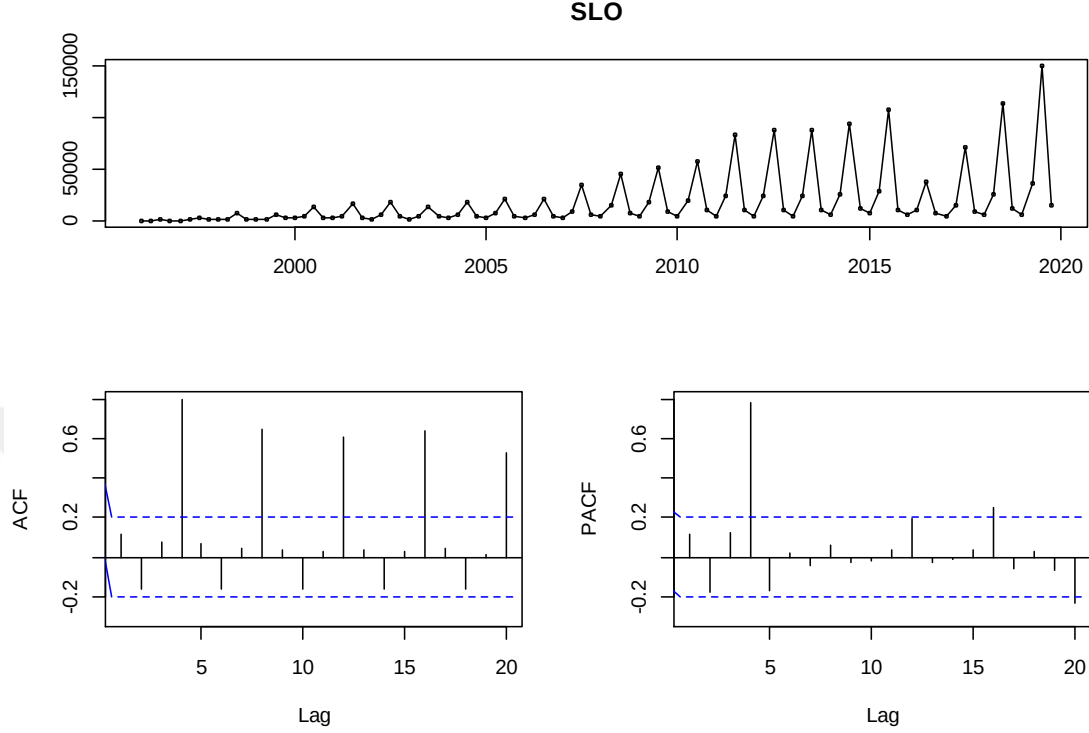
yalnızca 3 serinin (BEL, HOL, SLO) düzeyde durağan olduğu, diğer bütün serilerin düzeyde birim köklü olduğu tespit edilmiştir.

Çizelge 5.4 Düzey için test istatistikleri ve p-değerleri

Seri	Periodogram tabanlı test		HEGY testi	
	Test istatistiği	p-değeri	Test istatistiği	p-değeri
TOP	55.6324	0.99997	-0.6857	0.83173
AVRUPATOP	21.9557	0.99066	-1.7058	0.39231
ALM	9.4641	0.89782	-1.5961	0.44825
AVU	7.0545	0.82880	-1.7351	0.37770
BEL	21.3902	0.98960	-3.4553	0.00843
CEK	20.2332	0.98713	-0.6741	0.83483
DAN	29.0526	0.99723	-0.6561	0.83950
FIN	11.3602	0.92991	-0.7521	0.81328
FRA	13.4332	0.95346	-2.5625	0.08730
HOL	25.8474	0.99529	-3.2987	0.01337
ING	43.9192	0.99980	-1.5709	0.46128
IRL	26.2134	0.99562	-1.9264	0.28794
ISP	11.9227	0.93701	-1.9220	0.28989
ISVEC	25.3166	0.99487	-0.8725	0.77607
ISV	13.8027	0.95665	-1.5926	0.45008
ITA	10.8160	0.92202	-1.8806	0.30845
IZL	1.5930	0.35417	-1.4390	0.52938
LUK	8.7324	0.88157	-1.2576	0.61998
MAC	21.1037	0.98914	-2.3346	0.14060
NOR	28.8367	0.99719	-0.7448	0.81540
POL	24.2948	0.99385	-0.8878	0.77095
POR	16.2484	0.97286	-1.2339	0.63115
SLO	13.5614	0.95454	-7.9859	0.00000
YUN	25.8908	0.99533	-1.4130	0.54268

Periodogram tabanlı birim kök testine göre düzeyde birim köklü bulunan fakat HEGY testine göre düzeyde durağan bulunan bu 3 seriden (BEL, HOL, SLO) biri olan SLO (Slovakya) serisi ele alınsın. Bu seriye ilişkin zaman serisi grafiği, ACF ve PACF grafikleri Şekil 5.3'te verilmiştir. Slovakya serisinin zaman serisi grafiği incelendiğinde seride belirgin bir mevsimsellik olduğu göze çarpmaktadır. Aynı zamanda seriye ilişkin örnek otokorelasyon fonksiyonunun grafiğine bakıldığında da $h = 4, 8, 12, 16, \dots$ mevsimsel gecikmelerinde güçlü korelasyonlar olduğu göze çarpmaktadır. Aynı durum

diğer iki seri (BEL ve HOL) için de geçerlidir⁶. Sonuç olarak HEGY testine göre elde edilen, serinin düzeyde mevsimsel durağan olduğu sonucuna şüphe ile yaklaşılmalıdır.



Şekil 5.3 Slovakya serisi için zaman serisi, ACF ve PACF grafikleri

Bu şüpheden dolayı burada ek olarak söz konusu seriye ilişkin öngörü değerleri de hesaplanmıştır. HEGY testine göre düzeyde durağan olduğu belirlenen Slovakya serisi için Çizelge 5.5’te sunulan öngörü değerlerine bakıldığında öngörü değerlerinin her dört dönemde bir tekrar ettiği görülmektedir. Bu durum bilindiği üzere durağan olmayan serilerde gözlenen bir durumdur. Sonuç olarak HEGY testi, aslında düzeyde birim köklü olan bir seriyi durağan olarak göstermiştir.

Dolayısıyla düzeydeki test sonuçlarına bakıldığında periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi ile HEGY testinin bazı durumlarda farklılık gösterebileceği söylenebilir. Bu farklılık veri setindeki periyodik yapıdan kaynaklanıyor olabilir. Elde edilen sonuçlara göre, düzeyde mevsimsel durağanlık sınıandığında, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin verideki bu yapıya daha iyi bir yaklaşım sunduğunu söylemek mümkündür.

⁶ Analizlerde kullanılan her bir serinin zaman serisi grafiği, ACF ve PACF grafikleri EK 1’de verilmiştir.

Çizelge 5.5 Slovakya serisi için hesaplanan öngörü değerleri

Gözlem	Öngörü	Standart hata	%95 güven sınırları	
2020:Q1	8.7137	0.7456	7.2524	10.1751
2020:Q2	10.4884	0.7456	9.027	11.9497
2020:Q3	11.9168	0.7456	10.4555	13.3782
2020:Q4	9.6338	0.7456	8.1725	11.0952
2021:Q1	8.7137	1.0544	6.6471	10.7804
2021:Q2	10.4884	1.0544	8.4217	12.555
2021:Q3	11.9168	1.0544	9.8502	13.9835
2021:Q4	9.6338	1.0544	7.5672	11.7005
2022:Q1	8.7137	1.2914	6.1826	11.2449
2022:Q2	10.4884	1.2914	7.9573	13.0195
2022:Q3	11.9168	1.2914	9.3857	14.4479
2022:Q4	9.6338	1.2914	7.1027	12.165
2023:Q1	8.7137	1.4912	5.7911	11.6364
2023:Q2	10.4884	1.4912	7.5657	13.4111
2023:Q3	11.9168	1.4912	8.9941	14.8395
2023:Q4	9.6338	1.4912	6.7112	12.5565
2024:Q1	8.7137	1.6672	5.4461	11.9814
2024:Q2	10.4884	1.6672	7.2207	13.756
2024:Q3	11.9168	1.6672	8.6492	15.1845
2024:Q4	9.6338	1.6672	6.3662	12.9015
2025:Q1	8.7137	1.8263	5.1342	12.2933
2025:Q2	10.4884	1.8263	6.9088	14.0679
2025:Q3	11.9168	1.8263	8.3373	15.4963
2025:Q4	9.6338	1.8263	6.0543	13.2134
2026:Q1	8.7137	1.9727	4.8474	12.5801
2026:Q2	10.4884	1.9727	6.622	14.3547
2026:Q3	11.9168	1.9727	8.0505	15.7831
2026:Q4	9.6338	1.9727	5.7675	13.5002
2027:Q1	8.7137	2.1089	4.5805	12.847
2027:Q2	10.4884	2.1089	6.3551	14.6217
2027:Q3	11.9168	2.1089	7.7835	16.0501
2027:Q4	9.6338	2.1089	5.5006	13.7671
2028:Q1	8.7137	2.2368	4.3297	13.0978
2028:Q2	10.4884	2.2368	6.1044	14.8724
2028:Q3	11.9168	2.2368	7.5328	16.3008
2028:Q4	9.6338	2.2368	5.2498	14.0178

Uygulama kapsamında serilerin düzeyde durağanlıkları sınıandıktan sonra, birinci mevsimsel farklar alınmış ve mevsimsel fark serileri için durağanlık yeniden sınanmıştır. Birinci mevsimsel farklar için elde edilen sonuçlar Çizelge 5.6'da sunulmuştur.

Çizelge 5.6'da sunulan birinci mevsimsel farklar için elde edilen bulgular incelendiğinde ise, serilerin mevsimsel farkları alındıktan sonra periodogram tabanlı teste göre yalnızca 3 serinin durağan olduğu (CEK, IZL, POR), bununla birlikte diğer tüm serilerin birim köklü olduğu görülmüştür. HEGY testinin sonucuna göre ise mevsimsel farkı alınmış bütün serilerin durağan olduğu tespit edilmiştir.

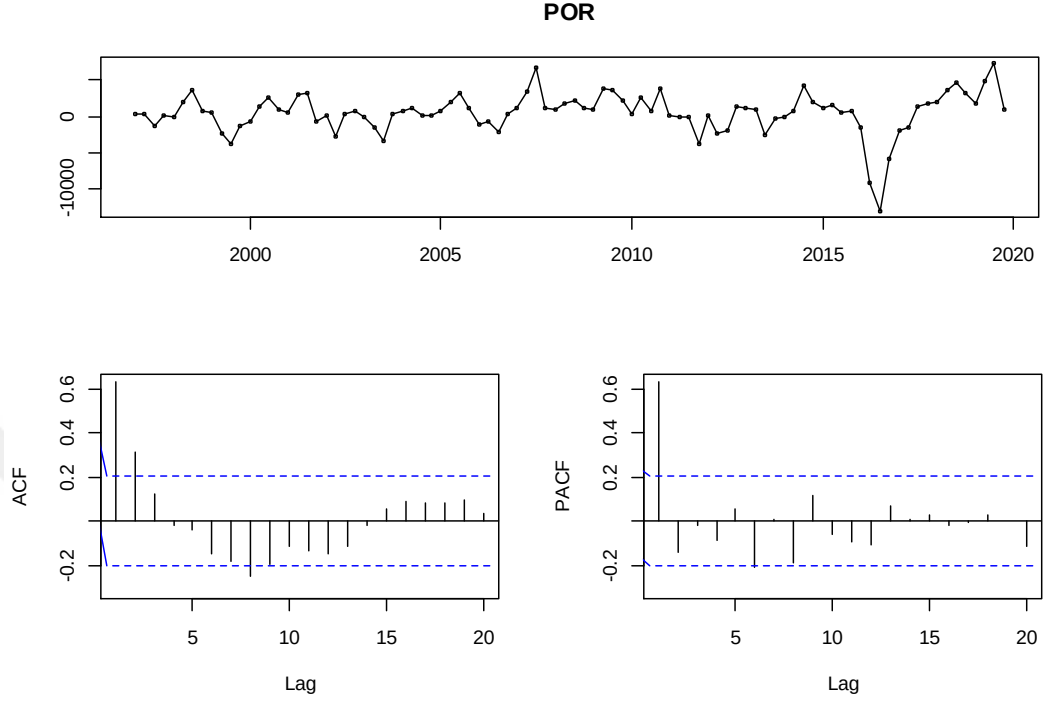
Çizelge 5.6 Birinci mevsimsel farklar için test istatistikleri ve p-değerleri

Seri	Periodogram tabanlı test		HEGY testi	
	Test istatistiği	p-değeri	Test istatistiği	p-değeri
TOP	0.2546	0.06832	-4.8577	0.00000
AVRUPATOP	0.4484	0.11768	-4.9579	0.00000
ALM	0.2453	0.06594	-5.3684	0.00000
AVU	0.3306	0.08751	-5.1106	0.00000
BEL	0.5670	0.14605	-5.4982	0.00000
CEK	0.1586	0.04316	-5.1577	0.00000
DAN	0.6938	0.17562	-4.9923	0.00000
FIN	0.7439	0.18682	-4.6482	0.00015
FRA	0.3443	0.09095	-5.8995	0.00000
HOL	1.0978	0.26068	-4.0634	0.00119
ING	0.5786	0.14867	-4.2411	0.00064
IRL	0.7214	0.18182	-4.1544	0.00087
ISP	0.3733	0.09843	-6.0862	0.00000
ISVEC	0.5909	0.15153	-4.1261	0.00096
ISV	0.3278	0.08659	-4.7523	0.00010
ITA	0.3768	0.09935	-5.7522	0.00000
IZL	0.1371	0.03761	-4.4001	0.00037
LUK	0.1999	0.05427	-5.5955	0.00000
MAC	0.3305	0.08749	-5.1366	0.00000
NOR	0.9242	0.22616	-4.3384	0.00046
POL	0.1946	0.05275	-4.0810	0.00112
POR	0.1289	0.03530	-5.7025	0.00000
SLO	0.8442	0.20911	-5.0806	0.00000
YUN	0.3098	0.08214	-5.6201	0.00000

Burada da her iki teste göre de durağan olduğu tespit edilen POR (Portekiz) serisi örnek olarak alınsın. Seriyeye ilişkin zaman serisi grafiği, ACF ve PACF grafikleri incelendiğinde birinci mevsimsel fark alındıktan sonra dahi serideki mevsimsel kalıbın tam olarak kaybolmadığı görülmektedir (Şekil 5.4).

Dolayısıyla birinci mevsimsel farklar alındıktan sonra bu seriye tekrar periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin ya da HEGY testinin uygulanmasının doğru olmayacağı söylenebilir. Çünkü söz konusu modeller Y_t ve Y_{t-4} serileri üzerinde geliştirilmiş olup, oysa mevsimsel fark alındıktan sonra seri $\nabla_4 Y_t$ haline dönüşmüştür. Dickey-Fuller ve Phillips-Perron birim kök test yöntemlerinde de aynı durumla karşılaşmaktadır. Öyle ki bu testler serinin yalnızca bir birim kök içermesi durumunda kullanılmaktadır. Dickey ve Pantula (1987) farkı alınmış serilere tekrar bu testlerin uygulanmasının yanlış sonuçlar verebileceğini göstermiş ve bu durum için ardışık birim

kök testlerini geliştirmiştir. Dolayısıyla burada da mevsimsel farkı alınmış seri için yeni bir model belirlenmesinin gerekli olacağı söylenebilir.



şekil 5.4 Portekiz serisi için zaman serisi, ACF ve PACF grafikleri

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Zaman serisi analizinde en önemli konulardan biri birim kök testleridir. Bir zaman serisinin davranışı ve karakteristikleri serinin durağan olması veya olmaması durumundan etkilenmektedir. Daha da önemlisi zaman serilerinde istatistiksel sonuç çıkarımı yapılabilmesi için serinin durağan olması gereklidir. Birim köklü serilerde ancak ve ancak serinin durağanlığı sağlatıldıktan sonra istatistiksel sonuç çıkarımına geçilebilir. Dolayısıyla bir zaman serisinin durağan olup olmadığı başka bir deyişle birim kök içerip içermediğinin sınanması önemli bir husustur.

Bu çalışmanın konusu mevsimsel zaman serileri için periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testidir. Esas konuya geçilmeden önce zaman serisinin karakteristikleri ve çeşitli zaman serisi modelleri hem zaman alanı hem de frekans alanı kapsamında detaylıca ele alınmış ve ayrıca literatürde yer edinmiş diğer bazı mevsimsel birim kök testlerinin teorik alt yapısı sunulmuştur. Daha sonra çalışmanın asıl konusu olan periodogram tabanlı birim kök testinin dayandığı teorik çerçeve etraflıca incelenmeye çalışılmıştır. Periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin teorisi zaman serilerinin spektral analizine ve ilk olarak Akdi (1995) tarafından ele alınan daha sonra Akdi ve Dickey (1998) tarafından geliştirilen periodogram tabanlı birim kök testine dayanmaktadır.

Çalışmada mevsimsel zaman serileri için periodogram ordinatının dağılımı, daha önce Akdi (1995)'te gösterilen ve modelden bağımsız olduğu ispat edilen -periodogram ordinatının her biri bir serbestlik dereceli iki bağımsız farklı ağırlıklı ki-kare değişkenlerinin toplamı olarak dağıldığı- bilgisinden yola çıkılarak elde edilmiştir. Mevsimsel seriler için periodogram ordinatının dağılımının aynı kaldığı bilgisi verildikten sonra, periodogram değerleri ve mevsimsel serilerin spektral yoğunluk fonksiyonu kullanılarak elde edilen test istatistiğine dair formülasyon verilmiştir. Testin teorik alt yapısına ilişkin sunulan bu bilgilerden sonra yapılan bir simülasyon çalışması ile teste ilişkin kritik değerler elde edilmiş ve farklı örnek büyüklükleri ile farklı parametre değerleri için testin gücü hesaplanmıştır. Son olarak, 24 farklı gerçek seri üzerinde testin uygulaması yapılmıştır. Uygulamada elde edilen sonuçlar,

periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi ile çeyreklik veriler için önerilen HEGY mevsimsel birim kök testi ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Uygulama kapsamında, ele alınan 24 serinin önce düzeyde durağan olup olmadıkları sınanmış ve periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testi sonucuna göre tüm serilerin düzeyde birim köklü olduğu, HEGY testi sonucuna göre ise 3 seri hariç diğer tüm serilerin düzeyde birim köklü olduğu sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte, periodogram tabanlı teste göre düzeyde birim köklü bulunan fakat HEGY testine göre düzeyde mevsimsel durağan olduğu tespit edilen serilerden biri detaylıca incelenmiştir. Bu inceleme sonucunda, HEGY testinin aslında düzeyde birim köklü olan bir seriyi mevsimsel durağan olarak tanımladığı görülmüştür. Düzeydeki sonuçlardan yola çıkılarak, periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin düzeyde mevsimsel durağanlık sınaması yapıldığında serideki doğal yapıya daha uygun sonuçlar vereceğini söylemek mümkündür.

Uygulamada, düzeyde durağanlık sılandıktan sonra serilerin birinci mevsimsel farkları alınarak durağanlıkları yeniden sınanmış ve periodogram tabanlı birim kök testine göre mevsimsel farkı alınmış serilerden yalnızca 3 tanesinin durağan olduğu, HEGY testi sonucuna göre ise mevsimsel farkı alınmış bütün serilerin durağan olduğu tespit edilmiştir. Burada da her iki teste göre de birinci mevsimsel farklarda mevsimsel durağan olduğu tespit edilen serilerden biri üzerinde durulmuştur. Bu seride birinci mevsimsel fark alındıktan sonra dahi mevsimselliğin tam olarak kaybolmadığı, fakat hem periodogram tabanlı testin hem de HEGY testinin seriyi mevsimsel durağan olarak tanımladığı görülmüştür. Bu bilgiden ve ayrıca Dickey-Fuller ve Phillips-Perron birim kök test yöntemlerinde de aynı durumla karşılaşıldığı bilgisinden yola çıkılarak, mevsimsel farkı alınmış seriye tekrar aynı testlerin uygulanmasının uygun sonuçlar vermeyeceği yorumu yapılmıştır. Bu aşamada tıpkı Dickey ve Pantula (1987) tarafından önerilen ardışık birim kök testleri gibi farklı bir test prosedürünün geliştirilmesi gerektiğini söylemek mümkündür.

Bu çalışmada $s = 4$ mevsimsel periyotlu birinci dereceden mevsimsel otoregresif zaman serisi modelinde mevsimsel birim köklerin incelenmesine yönelik periodogram tabanlı bir metot önerilmiştir. Periodogram tabanlı testin mevsimsel serilerdeki yapıya doğal olarak uyumlu olduğu, bu nedenle mevsimsel birim köklerin incelenmesi

hususunda üzerinde çalışılmaya değer bir konu olduğu düşünülebilir. Bu metodoloji geliştirilmeye açıktır. (i) Bu çalışmada da gösterildiği üzere, mevsimsel farkı alınmış seriler için metodolojinin nasıl düzenleneceği konusunda boşluklar vardır. (ii) Ayrıca farklı mevsimsel zaman serisi modelleri için periodogram tabanlı mevsimsel birim kök testinin uygulaması üzerinde durulabilir. Bunların yanı sıra, (iii) kointegrasyon analizinde periodogram tabanlı testin kullanımı üzerinde de literatürde boşluk olduğu görülmektedir. Bu nedenle bu çalışmada bahsedilen metodolojinin bu üç başlık temel olmak üzere daha birçok kapsamda üzerinde çalışılmaya devam edilebileceğini söylemek mümkündür.



KAYNAKLAR

- Abeyasinghe, T. 1994. Deterministic Seasonal Models and Spurious Regressions. *Journal of Econometrics*, 61, 259-272.
- Akdi, Y. 1995. Periodogram Analysis for Unit Roots. Ph.D. Dissertation. North Carolina State University, 138, Raleigh.
- Akdi, Y. 2012. Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon) (3. Baskı). Gazi Kitabevi, 377, Ankara.
- Akdi, Y. and Dickey, D.A. 1998. Periodograms of Unit Root Time Series: Distributions and Tests. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27(1), 69-87.
- Akdi, Y. and Dickey, D.A. 1999. Periodograms for Seasonal Time Series with a Unit Root. *Journal of the Turkish Statistical Association*, 2(3), 153-164.
- Akdi, Y., Kalafatçılar, K. and Özcan, K.M. 2010. Application of Periodogram-Based Cointegration Test for the Analysis of the Services and Goods Sector Inflation. *International Econometric Review*, 2(1), 3-10.
- Alexander, C. and Jorda, M.C. 1997. Seasonal Unit Roots in Trade Variables. IVIE Working Paper 13.
- Altın, A. 2011. Fourier Analizi. Gazi Kitabevi, 126, Ankara.
- Barsky, R.B. and Miron, J.A. 1989. The Seasonal Cycle and the Business Cycle. *Journal of Political Economy*, 97(3), 503-534.
- Beaulieu, J.J. and Miron, J.A. 1990. The Seasonal Cycle in U.S. Manufacturing. NBER Working Papers 3450.
- Beaulieu, J.J. and Miron, J.A. 1993. Seasonal Unit Roots in Aggregate U.S. Data. *Journal of Econometrics*, 55, 305-328.
- Bhattacharyya, B.B. and Richardson, G.D. 1996. Asymptotic Distribution of Periodogram Ordinate for a Nearly Nonstationary AR(1) Process. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series B*, 58(3), 389-395.
- Bhattacharyya, B.B., Richardson, G.D. and Flores, P.V. 2006. Unit Roots: Periodogram Ordinate. *Statistics & Probability Letters*, 76, 641-651.
- Bhattacharyya, B.B., Li, X., Pensky, M. and Richardson, G.D. 2000. Testing for Unit Roots in a Nearly Nonstationary Spatial Autoregressive Process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52, 71-83.
- Bloomfield, P. 1976. Fourier Decomposition of Time Series: An Introduction (1st Edition). John Wiley, 258, New York.

- Bloomfield, P. 2000. *Fourier Analysis of Time Series An Introduction* (2nd Edition). John Wiley & Sons, 275, Canada.
- Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. 1976. *Time Series Analysis Forecasting and Control* (1st Edition). Holden-Day, 575, San Francisco.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M. and Reinsel, G.C. 1994. *Time Series Analysis Forecasting and Control* (3rd Edition). Prentice-Hall, 614, New Jersey.
- Brandes, O., Farley, J., Hinich, M. and Zackrisson, U. 1968. The Time Domain and the Frequency Domain in Time Series Analysis. *The Swedish Journal of Economics*, 70(1), 25-42.
- Brockwell, P.J. and Davis, R.A. 1987. *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 530, New York.
- Caner, M. 1998. A Locally Optimal Seasonal Unit-Root Test. *Journal of Business & Economic Statistics*, 16(3), 349-356.
- Canova, F. and Hansen, B.E. 1995. Are Seasonal Patterns Constant over Time? A Test for Seasonal Stability. *Journal of Business & Economic Statistics*, 13(3), 237-252.
- Chambers, M.J., Ercolani, J.S. and Taylor, R.A.M. 2014. Testing for Seasonal Unit Roots by Frequency Domain Regression. *Journal of Econometrics*, 178, 243-258.
- Chan, N.H. and Wei, C.Z. 1988. Limiting Distributions of Least Squares Estimates of Unstable Autoregressive Processes. *The Annals of Statistics*, 16(1), 367-401.
- Choi, I. and Phillips P.C.B. 1993. Testing for a Unit Root by Frequency Domain Regression. *Journal of Econometrics*, 59, 263-286.
- Coşar, E.E. 2006. Seasonal Behaviour of the Consumer Price Index of Turkey. *Applied Economics Letters*, 13(7), 449-455.
- Cryer, J.D. and Chan, K.S. 2008. *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer Science+Business Media, 501, New York.
- Darne, O. and Diebolt, C. 2002. A Note on Seasonal Unit Root Tests. *Quality & Quantity*, 36, 305-310.
- del Barrio Castro, T. and Rossello, A.S. 2015. On Augmented Franses Tests for Seasonal Unit Roots. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 44(24), 5204-5212.
- del Barrio Castro, T., Osborn, D.R. and Taylor, A.M.R. 2012. On Augmented HEGY Tests for Seasonal Unit Roots. *Econometric Theory*, 28(5), 1121-1143.

- Demir, F. ve Mert, M. 2015. Türkiye Sanayi Üretim Endeksinde Mevsimsel Birim Kökün Araştırılması. *Yönetim ve Ekonomi*, 22(2), 415-431.
- Dickey, D.A. 1976. Estimation and Hypothesis Testing in Nonstationary Time Series. Ph.D. Dissertation. Iowa State University, 125, Ames.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1979. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366), 427-431.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. 1981. Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Econometrica*, 49(4), 1057-1072.
- Dickey, D.A. and Pantula, S.G. 1987. Determining the Order of Differencing in Autoregressive Processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 5(4), 455-461.
- Dickey, D.A. and Zhang, Y. 2010. Seasonal Unit Root Tests in Long Periodicity Cases. *Journal of the Korean Statistical Society*, 39, 271-279.
- Dickey, D.A., Bell, W.R. and Miller, R.B. 1986. Unit Roots in Time Series Models: Tests and Implications. *The American Statistician*, 40(1), 12-26.
- Dickey, D.A., Hasza, D.P. and Fuller, W.A. 1984. Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series. *Journal of the American Statistical Association*, 79(386), 355-367.
- Engle, R.F. 1980. Exact Maximum Likelihood Methods for Dynamic Regressions and Band Spectrum Regressions. *International Economic Review*, 21(2), 391-407.
- Eroğlu, B.A., Göğebakan, K.Ç. and Trokic, M. 2018. Powerful Nonparametric Seasonal Unit Root Tests. *Econometric Letters*, 167, 75-80.
- Espasa, A. and Sargan J.D. 1977. The Spectral Estimation of Simultaneous Equation Systems with Lagged Endogenous Variables. *International Economic Review*, 18(3), 583-605.
- Evans, B.A. and Dickey, D.A. 2002. Normalizations for Periodogram-Based Unit Root Tests. *Statistics & Probability Letters*, 60, 343-350.
- Fan, Y. and Gençay, R. 2010. Unit Root Tests with Wavelets. *Econometric Theory*, 26, 1305-1331.
- Fuller, W.A. 1976. *Introduction to Statistical Time Series* (1st Edition). John Wiley & Sons, 470, New York.
- Fuller, W.A. 1996. *Introduction to Statistical Time Series* (2nd Edition). John Wiley & Sons, 720, Canada.
- Franses, P.H. 1990. Testing for Seasonal Unit Roots in Monthly Data. Report, Erasmus University Econometric Institute, Rotterdam.

- Franses, P.H. 1991a. Seasonality, Non-Stationarity and the Forecasting of Monthly Time Series. *International Journal of Forecasting*, 7(2), 199-208.
- Franses, P.H. and Hobijn, B. 1997. Critical Values for Unit Root Tests in Seasonal Time Series. *Journal of Applied Statistics*, 24(1), 25-47.
- Franses, P.H., Hoek, H. and Paap, R. 1997. Bayesian Analysis of Seasonal Unit Roots and Seasonal Mean Shifts. *Journal of Econometrics*, 78, 359-380.
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S. 1983. The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4), 221-238.
- Ghysels, E., Lee, H.S. and Noh, J. 1994. Testing for Unit Roots in Seasonal Time Series: Some Theoretical Extensions and a Monte Carlo Investigation. *Journal of Econometrics*, 62, 415-442.
- Gürel, S.P. and Tiryakioğlu. 2012. Seasonal Unit Root: An Application to Turkish Industrial Production Series. *Business and Economics Research Journal*, 3(4), 77-89.
- Harris, R. and Sollis, R. 2003. *Applied Time Series Modelling and Forecasting*. John Wiley & Sons, 313, England.
- Hurvich, C.M. and Beltrao, K.I. 1993. Asymptotics for the Low-Frequency Ordinates of the Periodogram of a Long-Memory Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 14(5), 455-472.
- Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. and Yoo, B.S. 1990. Seasonal Integration and Cointegration. *Journal of Econometrics*, 44, 215-238.
- Hylleberg, S., Jorgensen, C. and Sorensen N.K. 1993. Seasonality in Macroeconomic Time Series. *Empirical Economics*, 18, 321-335.
- Leong, K. 1997. Seasonal Integration in Economic Time Series. *Mathematics and Computers in Simulation*, 43, 413-419.
- Meng, X. and He, C. 2012. Testing Seasonal Unit Roots in Data at Any Frequency: An HEGY Approach. *Working Papers in Transport, Tourism, Information Technology and Microdata Analysis* 08.
- Miron, J.A. 1990. The Economics of Seasonal Cycles. NBER Working Papers 3522.
- Miron, J.A. and Zeldes, S.P. 1987. Seasonality, Cost Shocks, and the Production Smoothing Model of Inventories. NBER Working Papers 2360.
- Nelson, C.R. and Kang, H. 1981. Spurious Periodicity in Inappropriately Detrended Time Series. *Econometrica*, 49(3), 741-751.
- Nelson, C.R. and Kang, H. 1984. Pitfalls in the Use of Time as an Explanatory Variable in Regression. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2(1), 73-82.

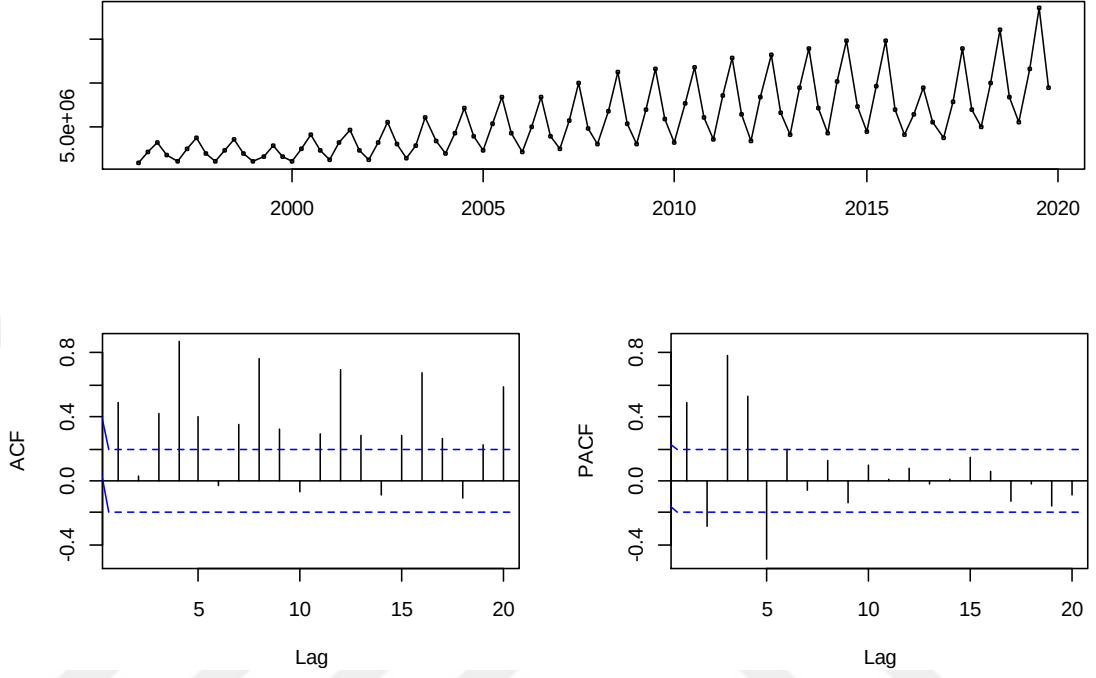
- Nelson, C.R. and Plosser, C.I. 1982. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139-162.
- Osborn, D.R. 1990. A Survey of Seasonality in UK Macroeconomic Variables. *International Journal of Forecasting*, 6, 327-336.
- Osborn, D.R., Chui, A.P.L., Smith, J.P. and Birchenhall, C.R. 1988. Seasonality and the Order of Integration for Consumption. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 50(4), 361-377.
- Phillips, P.C.B. and Perron, P. 1988. Testing for a Unit Root in Time Series Regression. *Biometrika*, 75(2), 335-346.
- Psaradakis, Z. 2000. Bootstrap Tests for Unit Roots in Seasonal Autoregressive Models. *Statistics & Probability Letters*, 50, 389-395.
- Reininger, T. and Fingerlos, U. 2007. Modelling Seasonality of Gross Domestic Product in Belgium. Working Paper, University of Vienna.
- Robinson, P.M. 1994. Efficient Tests of Nonstationary Hypotheses. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428), 1420-1437.
- Rodrigues, P.M.M. 2000. A Note on the Application of the DF Test to Seasonal Data. *Statistics & Probability Letters*, 47, 171-175.
- Rodrigues, P.M.M. and Taylor, R. 2004b. Alternative Estimators and Unit Root Tests for Seasonal Autoregressive Processes. *Journal of Econometrics*, 120, 35-73.
- Rubia, A. 2001. Testing for Weekly Seasonal Unit Roots in Daily Electricity Demand: Evidence from Deregulated Markets. IVIE Working Papers 21.
- Said, S.E. and Dickey, D.A. 1985. Hypothesis Testing in ARIMA(p,1,q) Models. *Journal of the American Statistical Association*, 80(390), 369-374.
- Schuster, A. 1898. On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed 26 Day Period of Meteorological Phenomena. *Journal of Geophysical Research*, 3(1), 13-41.
- Smith, R.J. and Taylor, A.M.R. 1999. Likelihood Ratio Tests for Seasonal Unit Roots. *Journal of Time Series Analysis*, 20(4), 453-476.
- Smith, R.J., Taylor, A.M.R. and del Barrio Castro, T. 2009. Regression-Based Seasonal Unit Root Tests. *Econometric Theory*, 25(2), 527-560.
- Sowell, F. 1990. The Fractional Unit Root Distribution. *Econometrica*, 58(2), 495-505.
- Taylor, A.M.R. 1995. Testing for Unit Roots in Monthly Time Series. *Journal of Time Series Analysis*, 19(3), 349-368.

- Tebbs, J.M. 2013. Forecasting and Time Series (Lecture Notes). Department of Statistics, University of South Carolina, 311, South Carolina.
- Tiwari, A.K., Dutta, S. and Dash, A.K. 2017. Testing of the Seasonal Unit Root Hypothesis in the Price Indices of Agricultural Commodities in India. Asian Journal of Agriculture and Development, 14(2), 63-81.
- Tolstov, G.P. 1962. Fourier Series (translated by R.A. Silverman). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 349, New Jersey.
- TÜİK. 2021. Turizm İstatistikleri Veri Tabanları. Web Sitesi: <https://data.tuik.gov.tr/Kategori/GetKategori?p=egitim-kultur-spor-ve-turizm-105&dil=1>. Erişim Tarihi: 13 Temmuz 2021.
- Wei, W.W.S. 1990. Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods (1st Edition). Addison Wesley, 478, USA.
- Wei, W.W.S. 2006. Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods (2nd Edition). Pearson Education, 634, USA.
- Wold, H. 1938. A Study in the Analysis of Stationary Time Series (1st Edition). Almqvist & Wiksells, 220, Sweden.
- Zimmermann, S. 2012. Seasonality in German GDP: Testing for Stationarity and Non-Stationarity. Term Paper, University of Vienna.

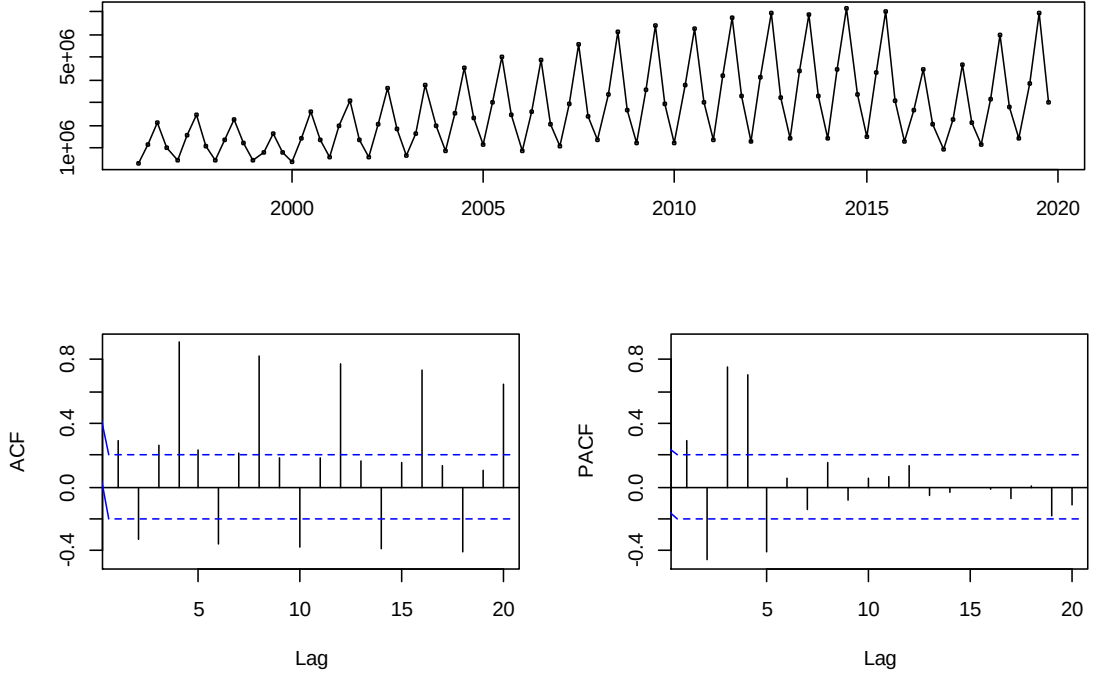
EKLER

EK 1 (DÜZEY İÇİN GRAFİKLER)

TOP

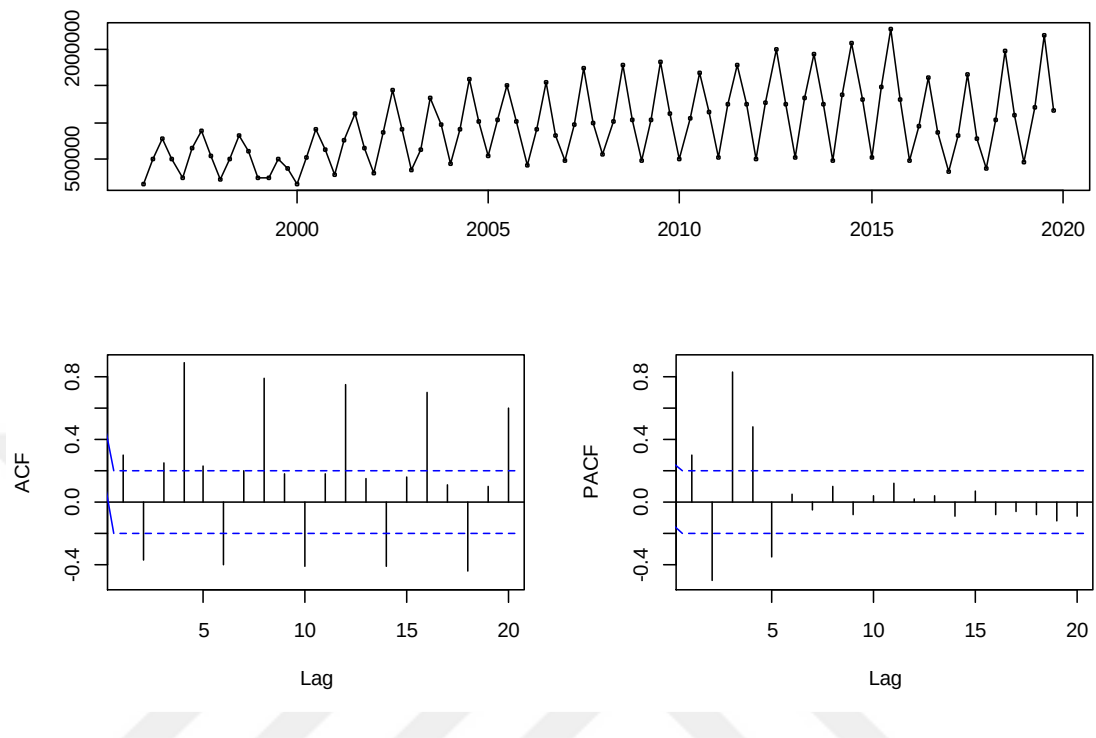


AVRUPATOP

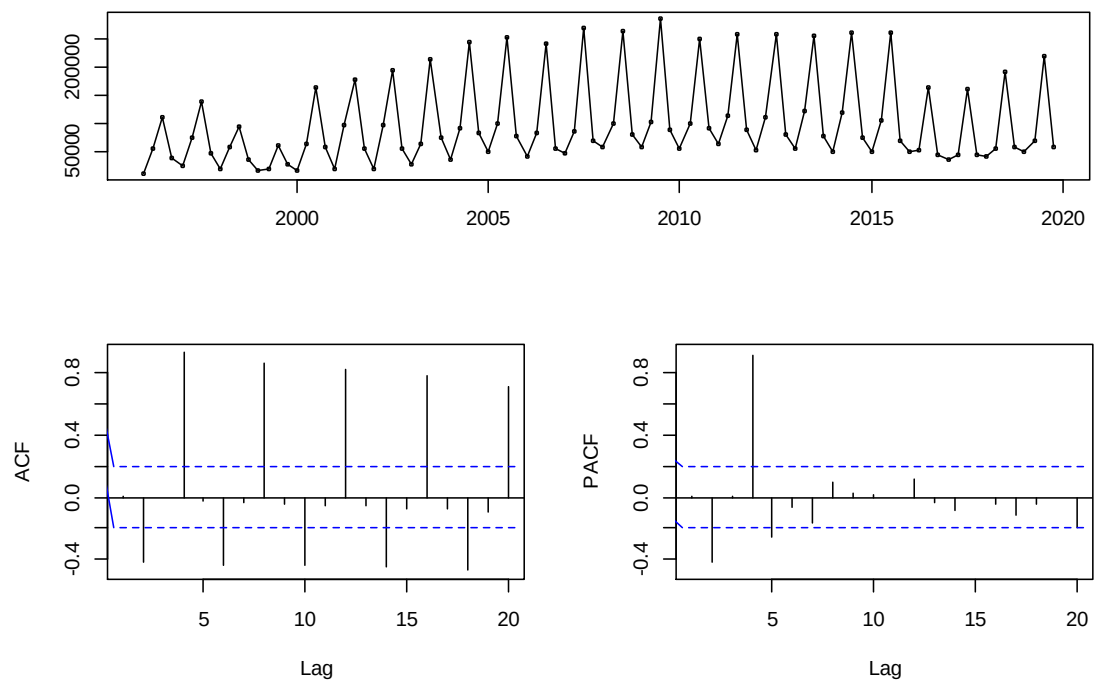


EK 1 (Devam)

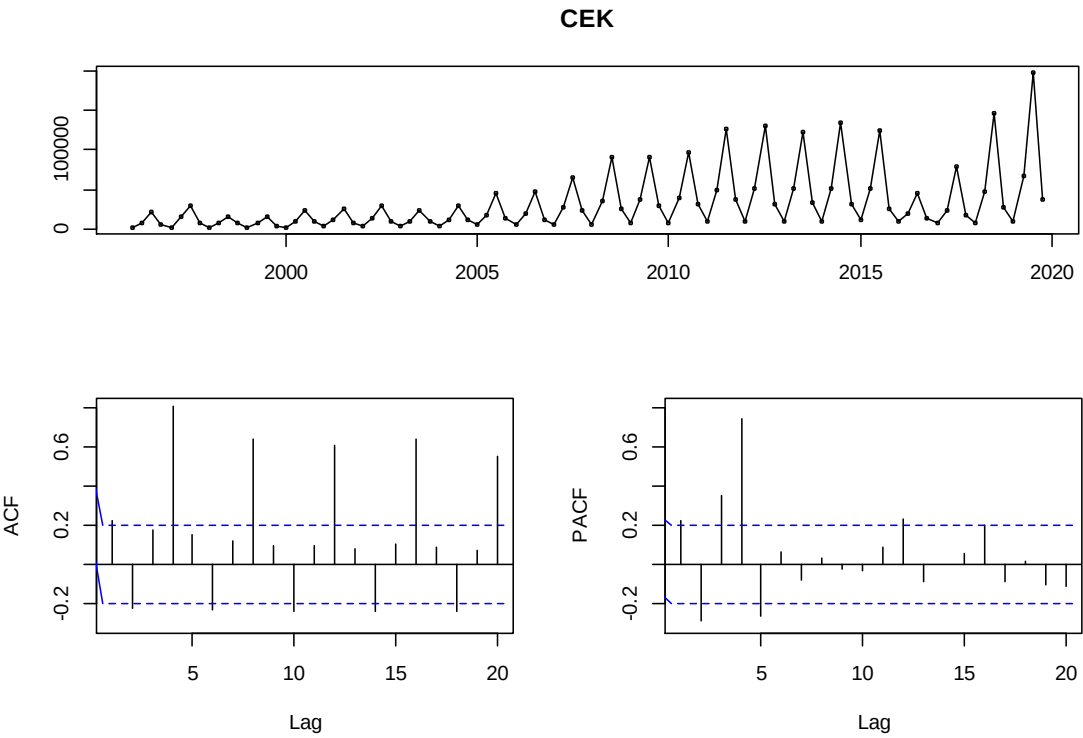
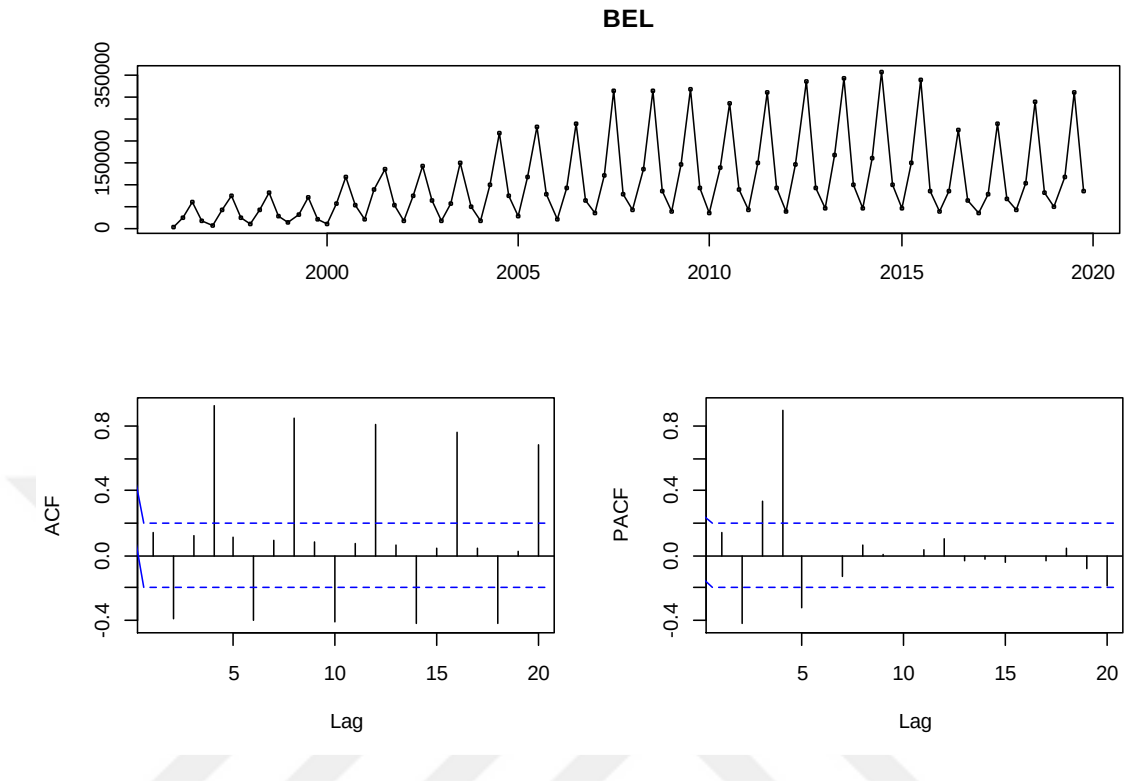
ALM



AVU

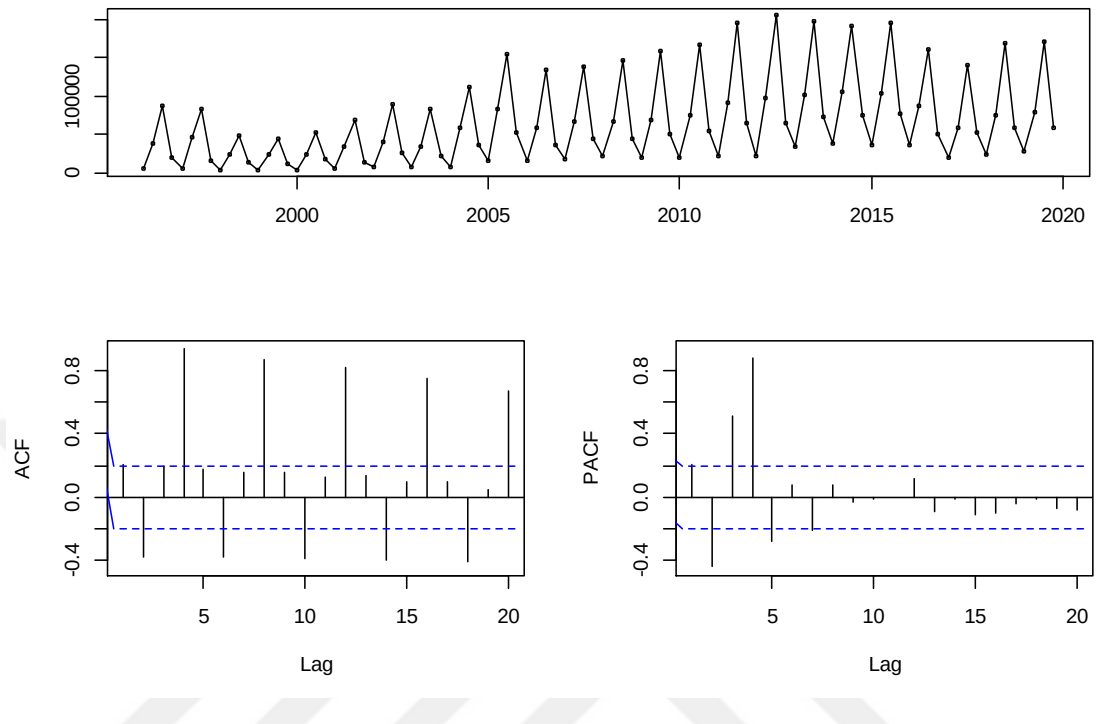


EK 1 (Devam)

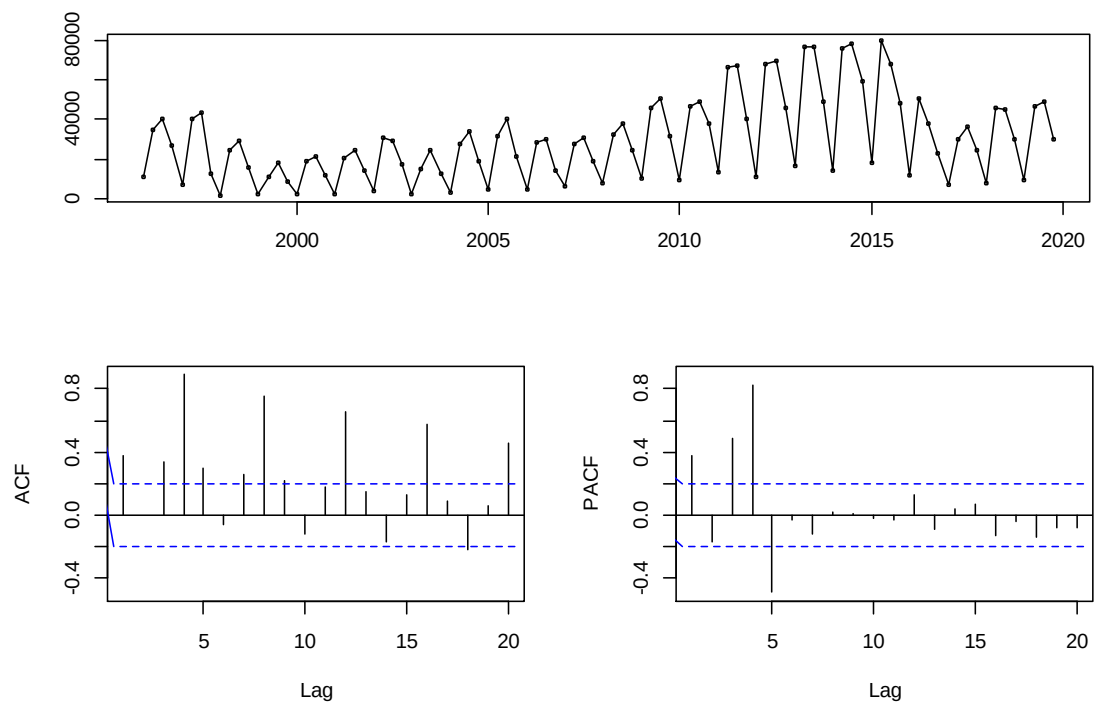


EK 1 (Devam)

DAN

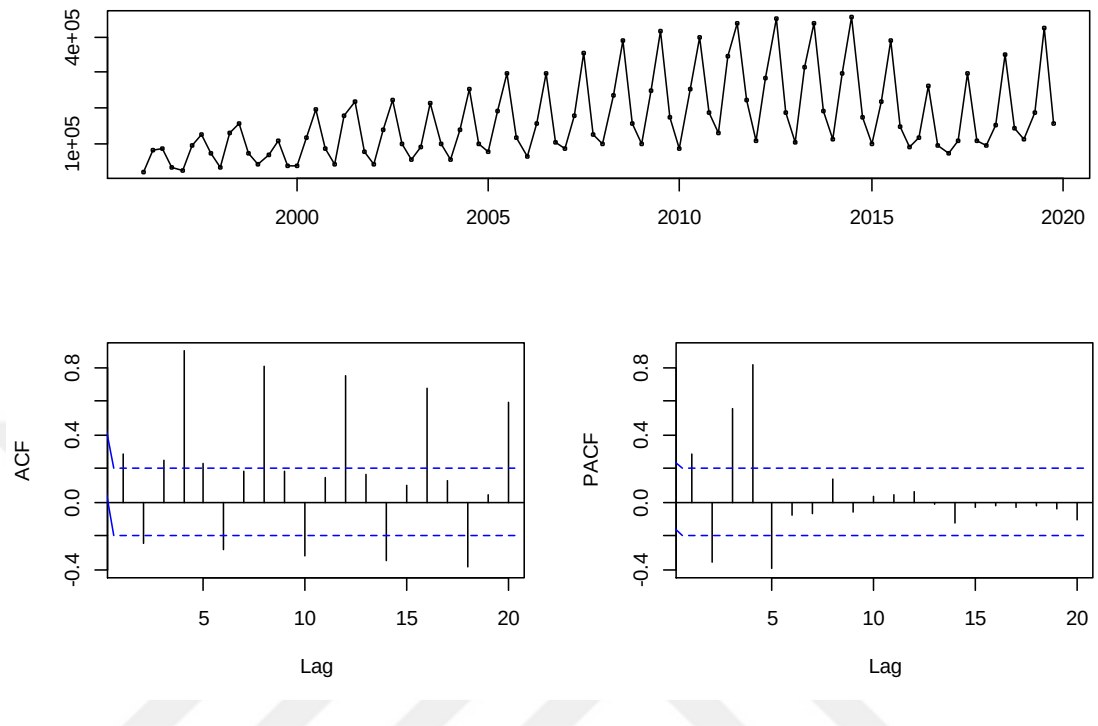


FIN

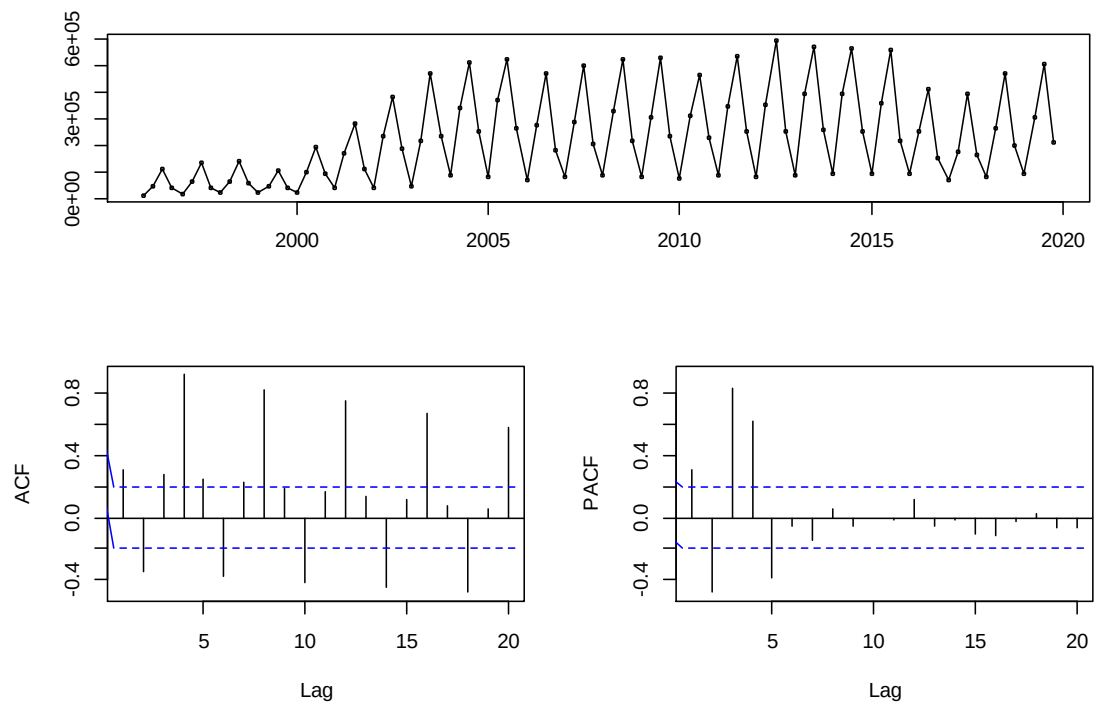


EK 1 (Devam)

FRA

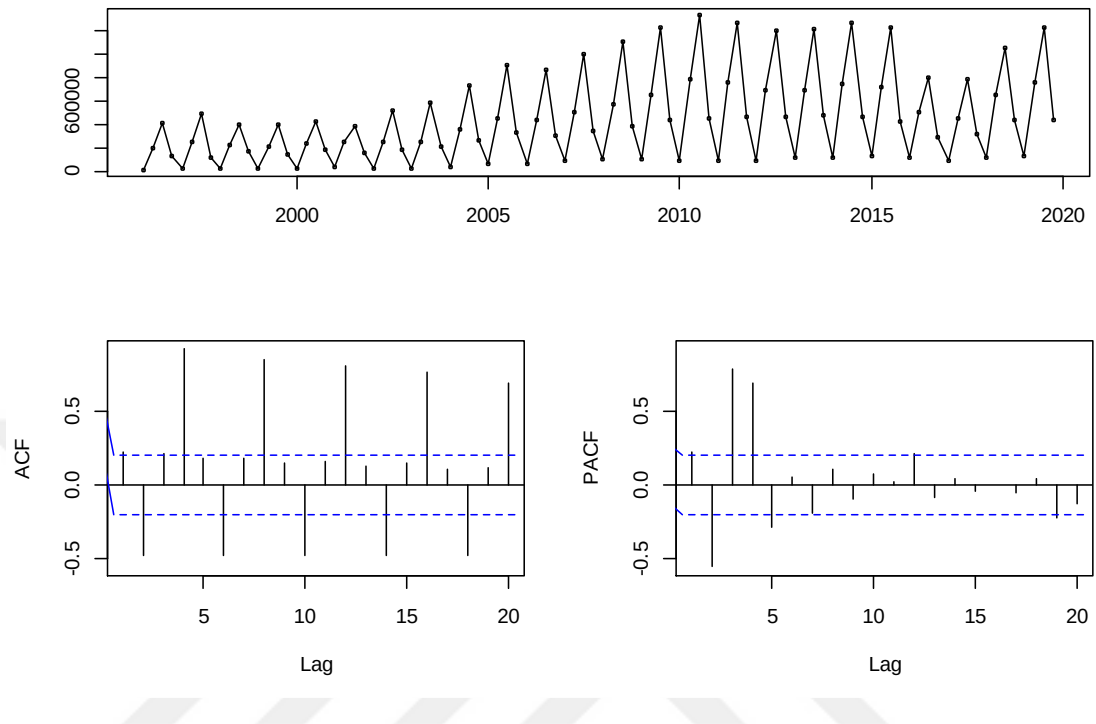


HOL

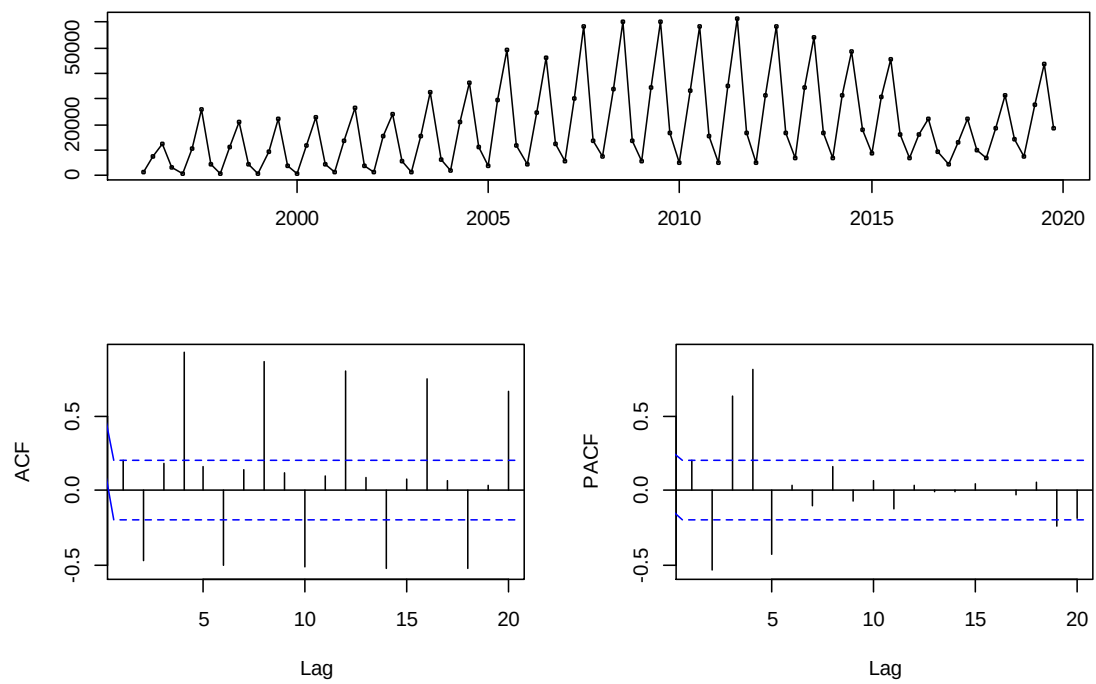


EK 1 (Devam)

ING

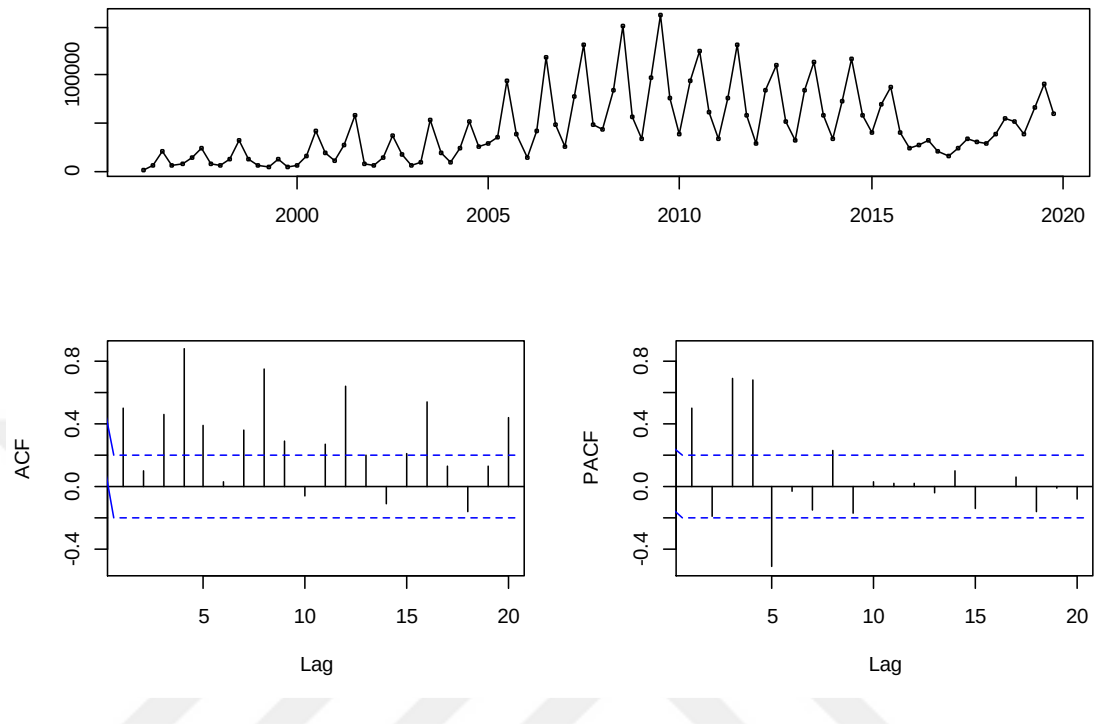


IRL

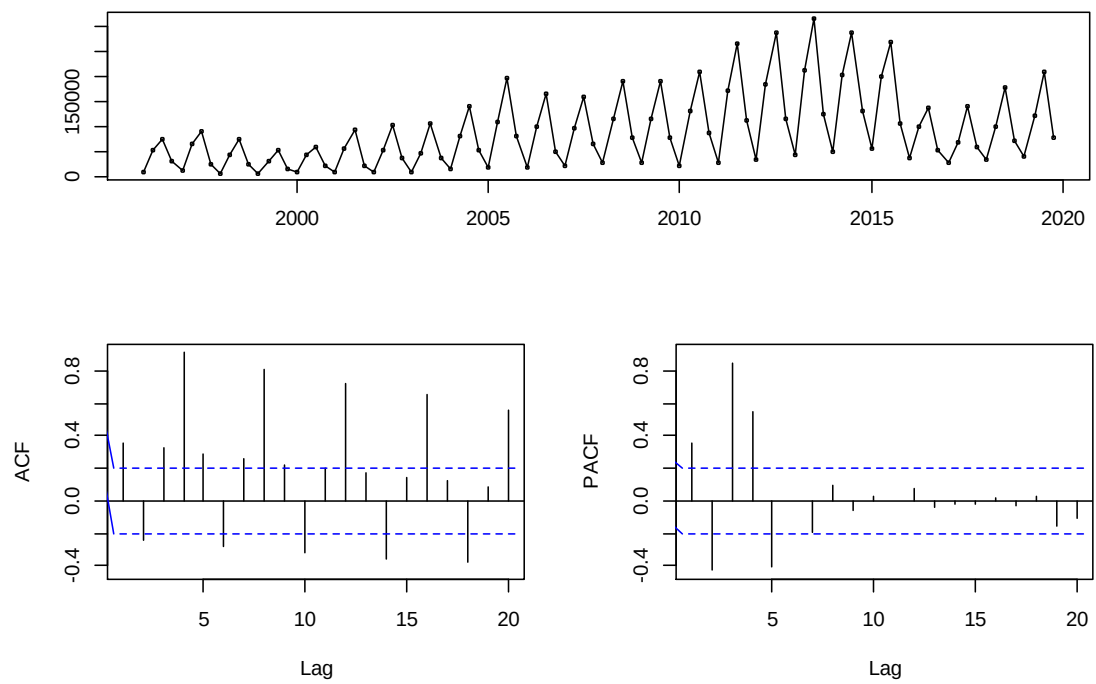


EK 1 (Devam)

ISP

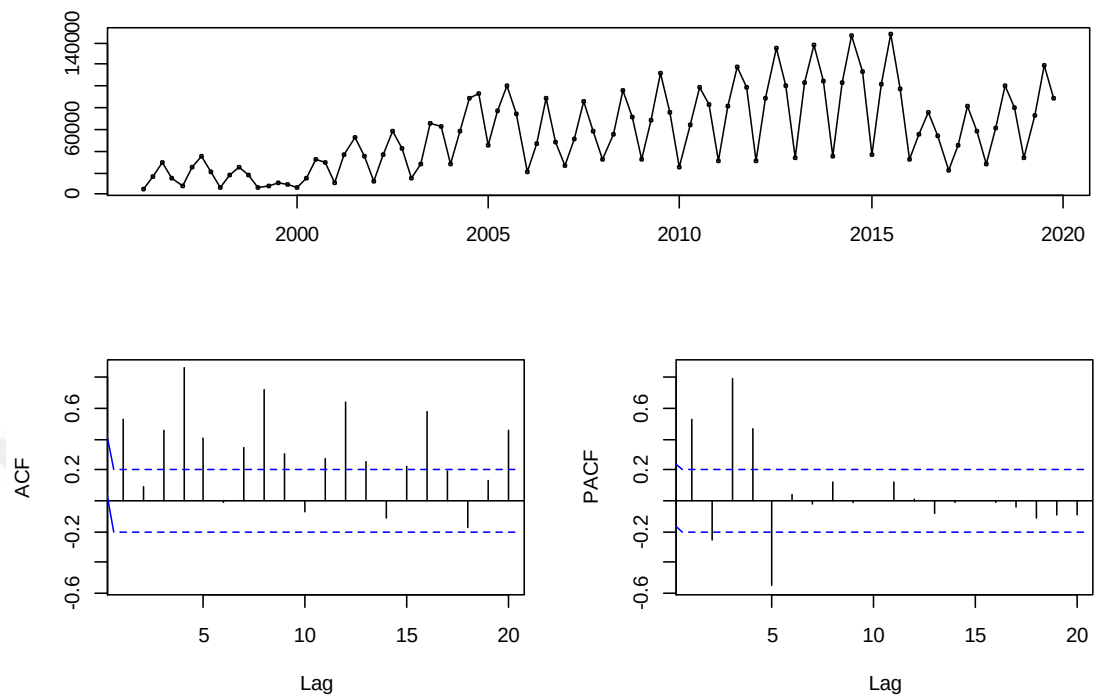


ISVEC

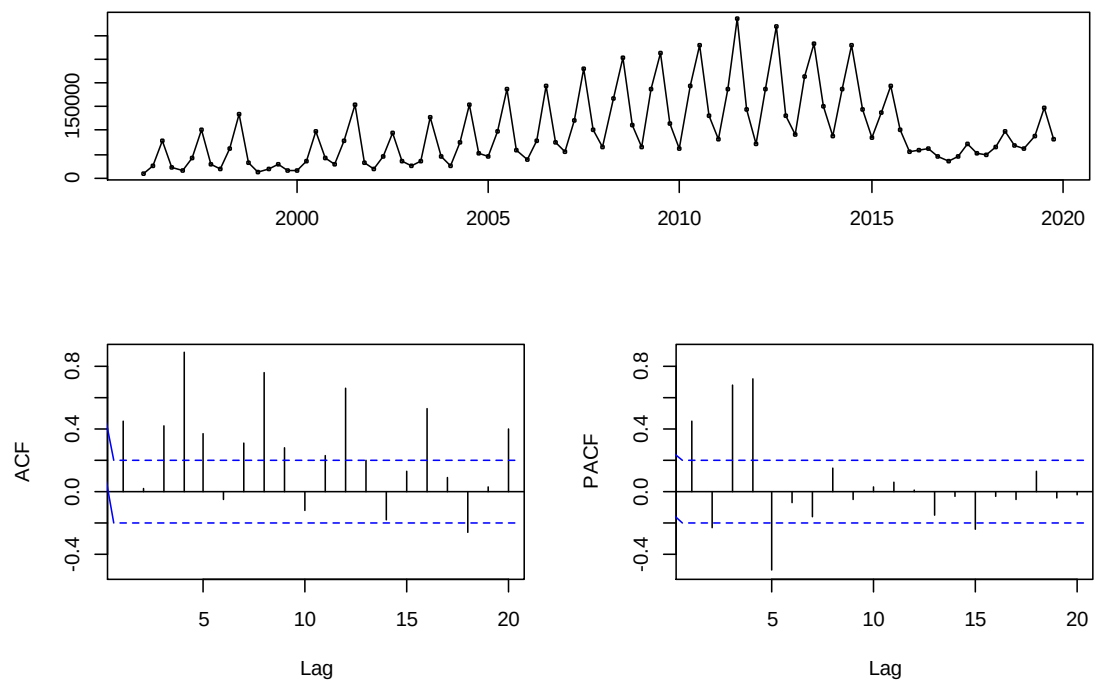


EK 1 (Devam)

ISV

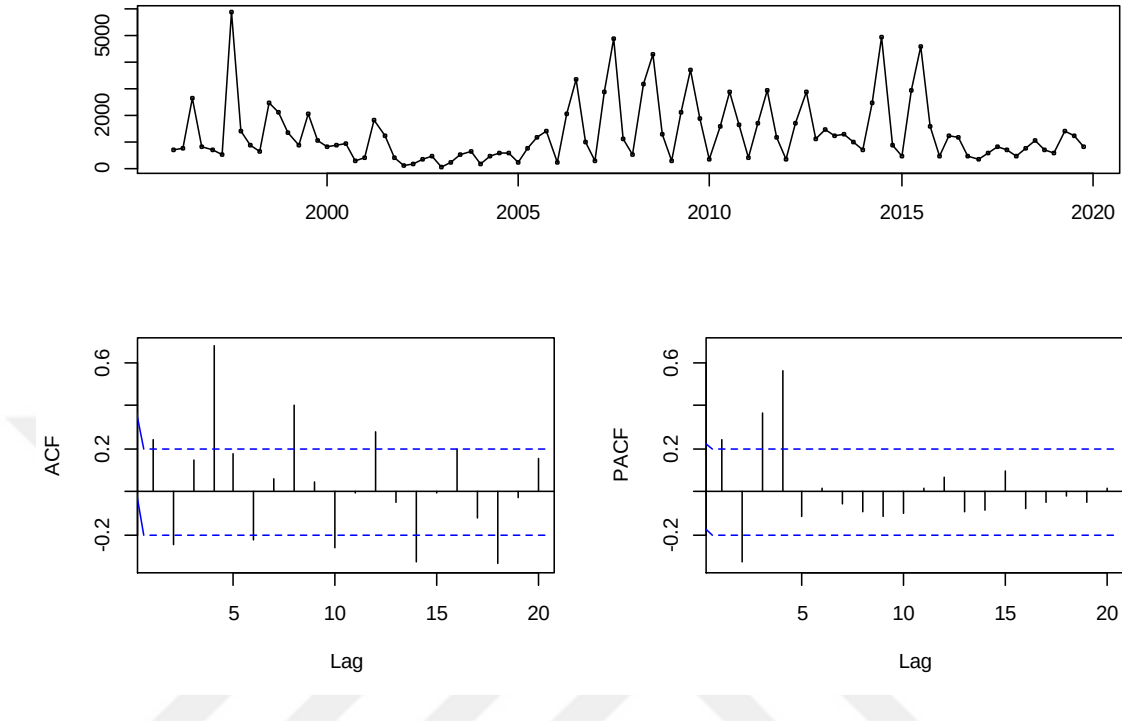


ITA

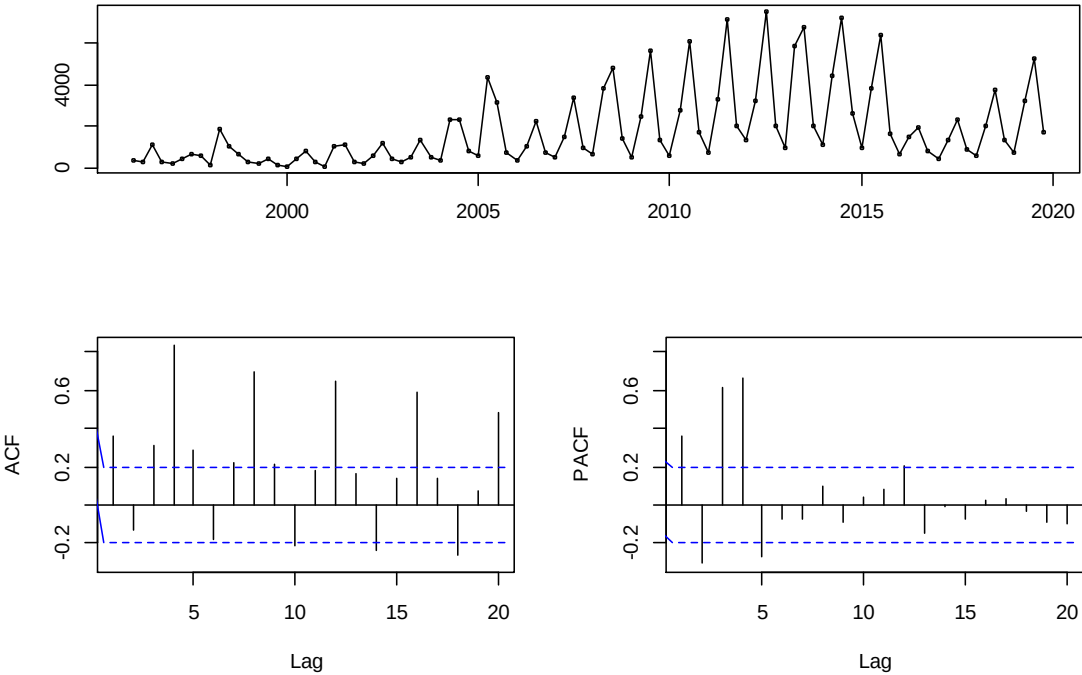


EK 1 (Devam)

IZL

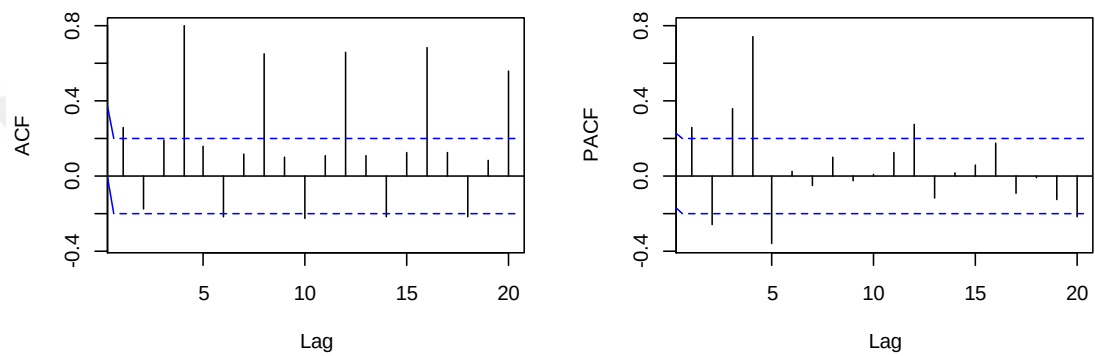
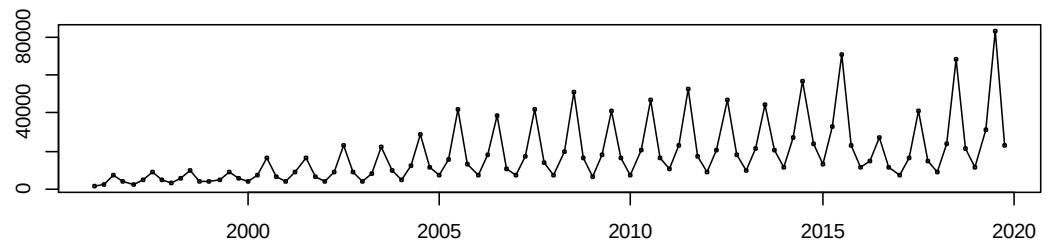


LUK

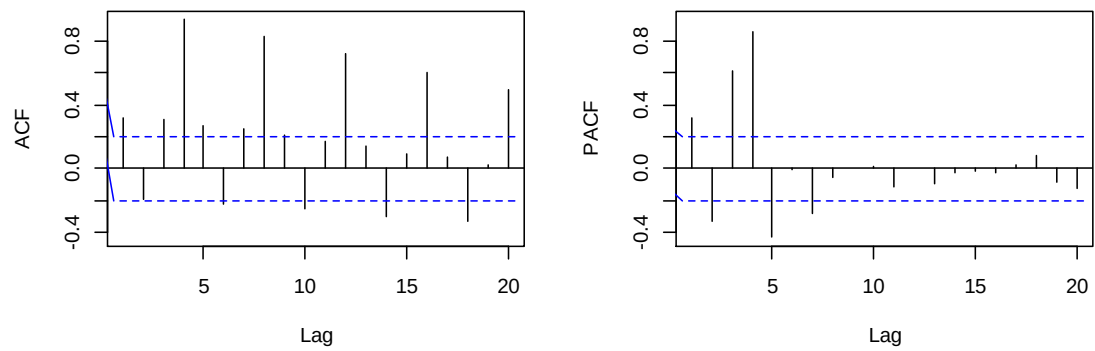
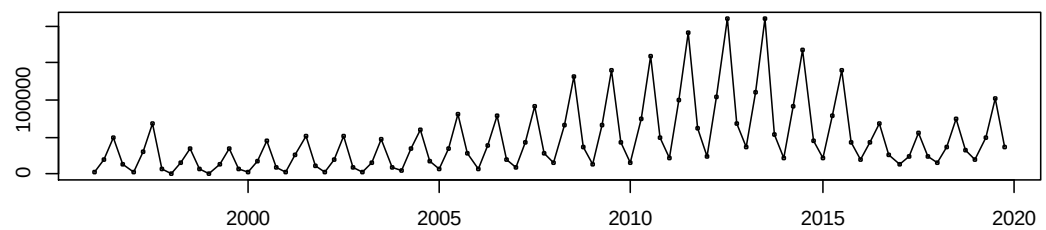


EK 1 (Devam)

MAC

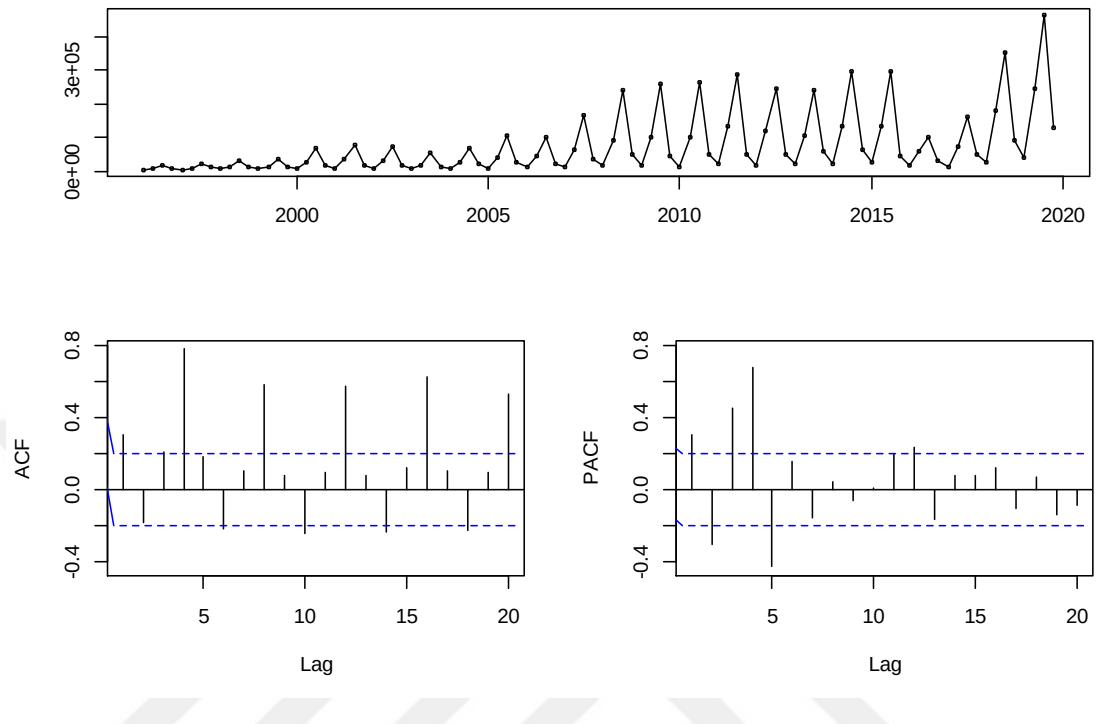


NOR

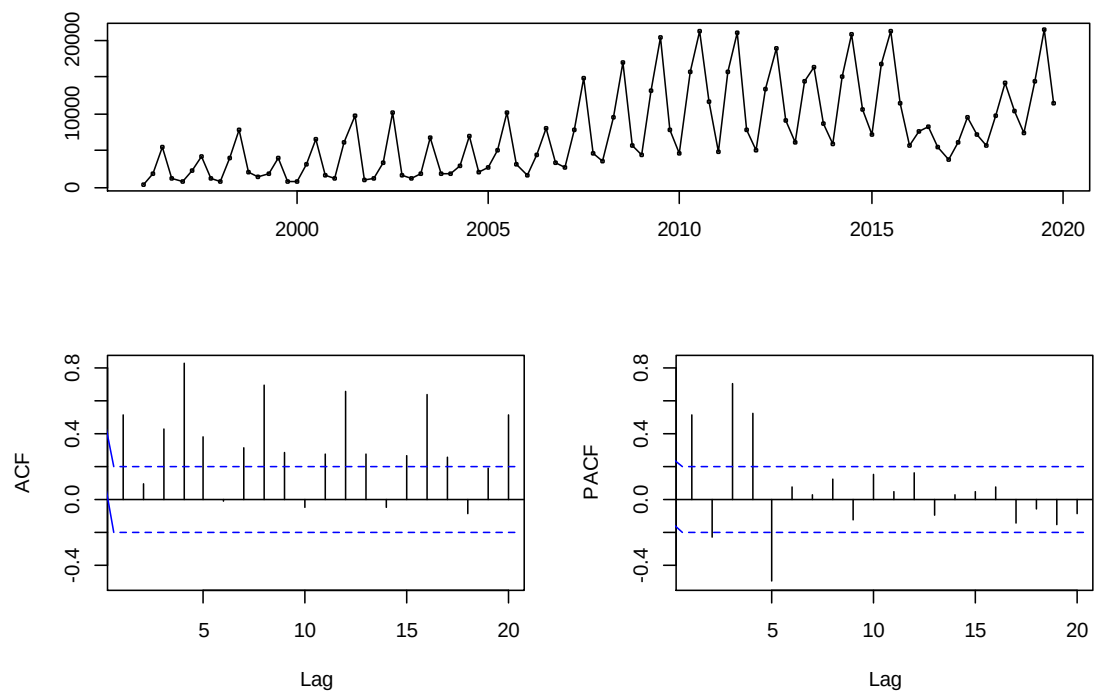


EK 1 (Devam)

POL

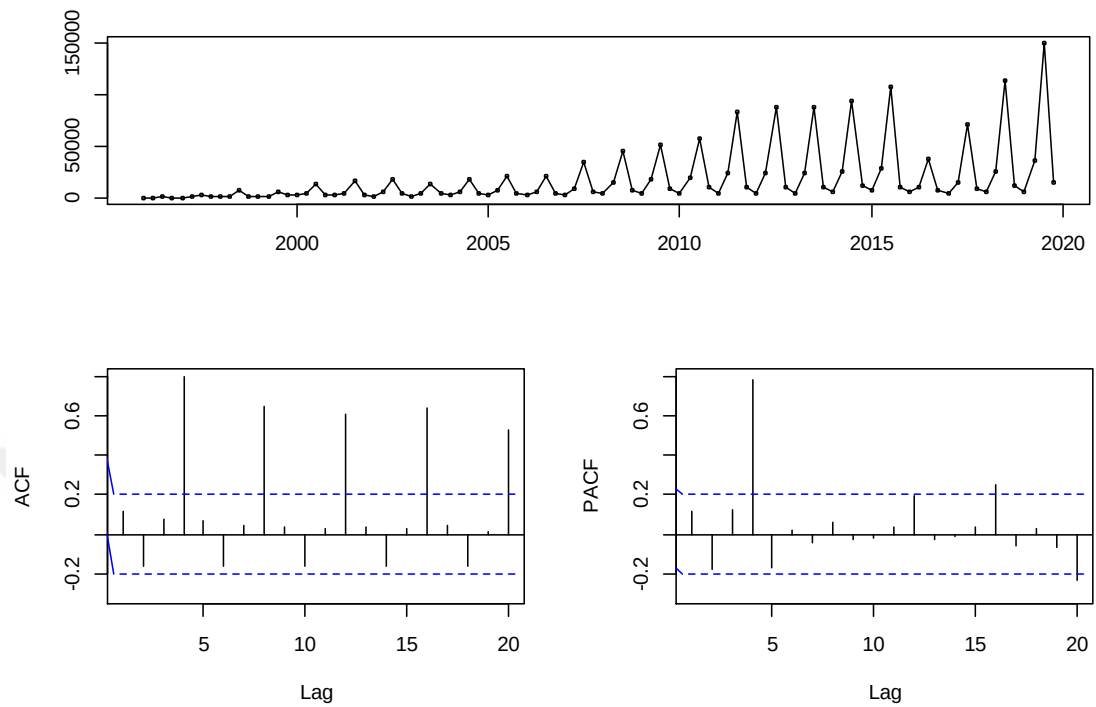


POR

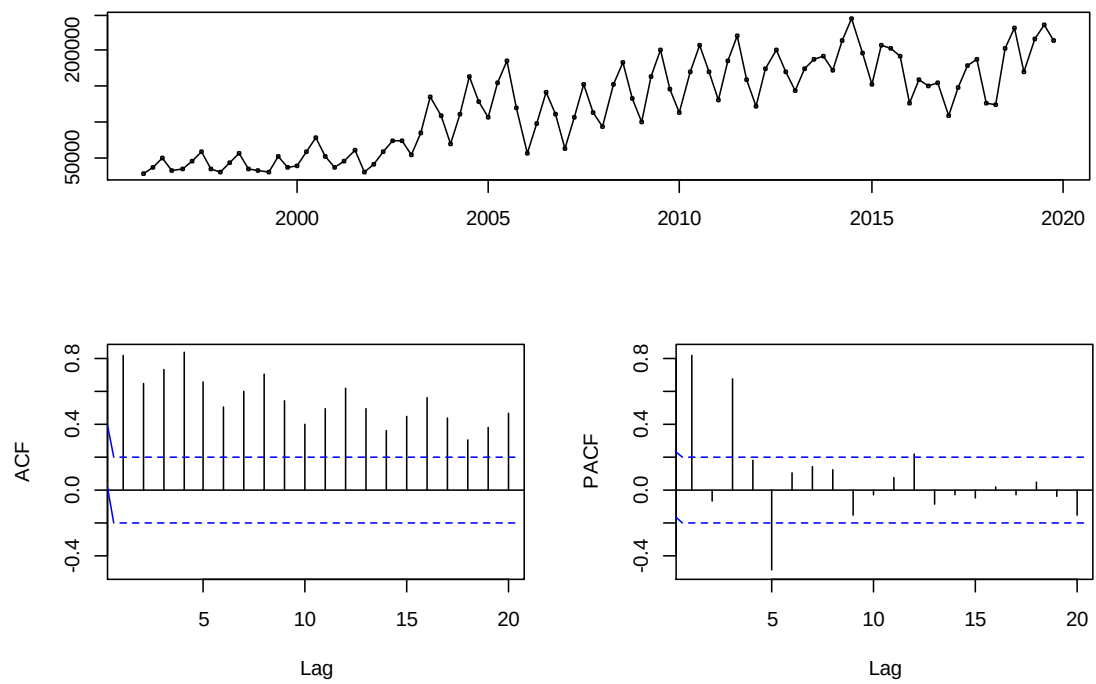


EK 1 (Devam)

SLO

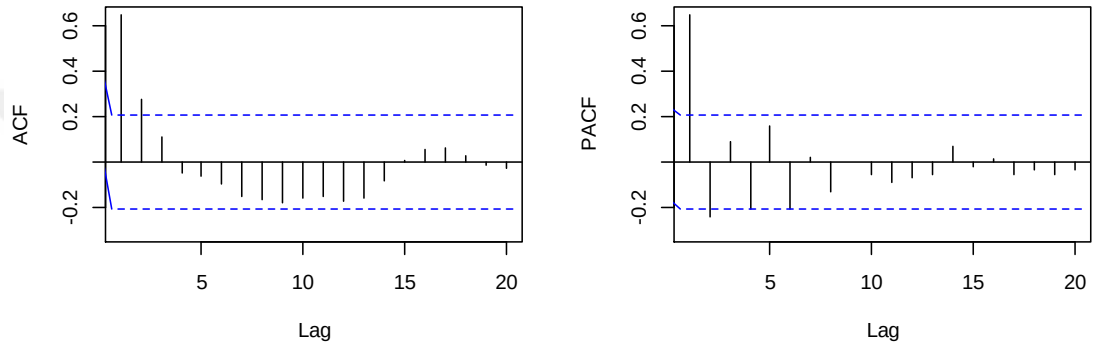
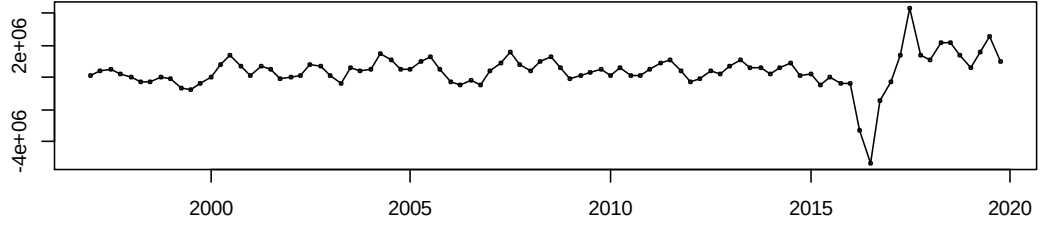


YUN

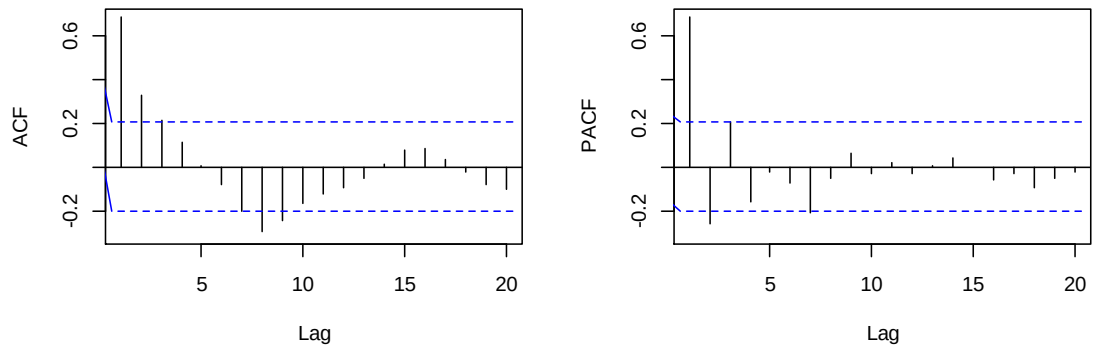
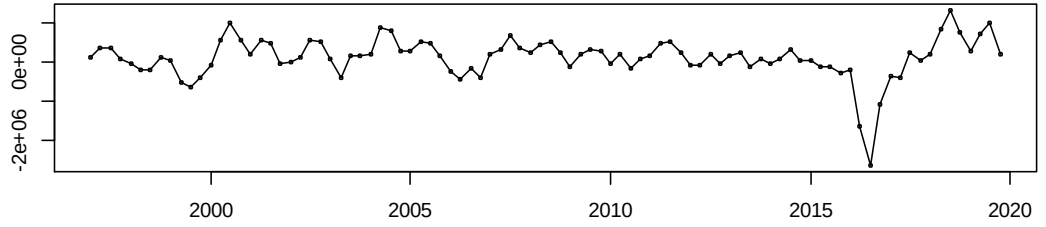


EK 2 (BİRİNCİ MEVSİMSEL FARKLAR İÇİN GRAFİKLER)

TOP

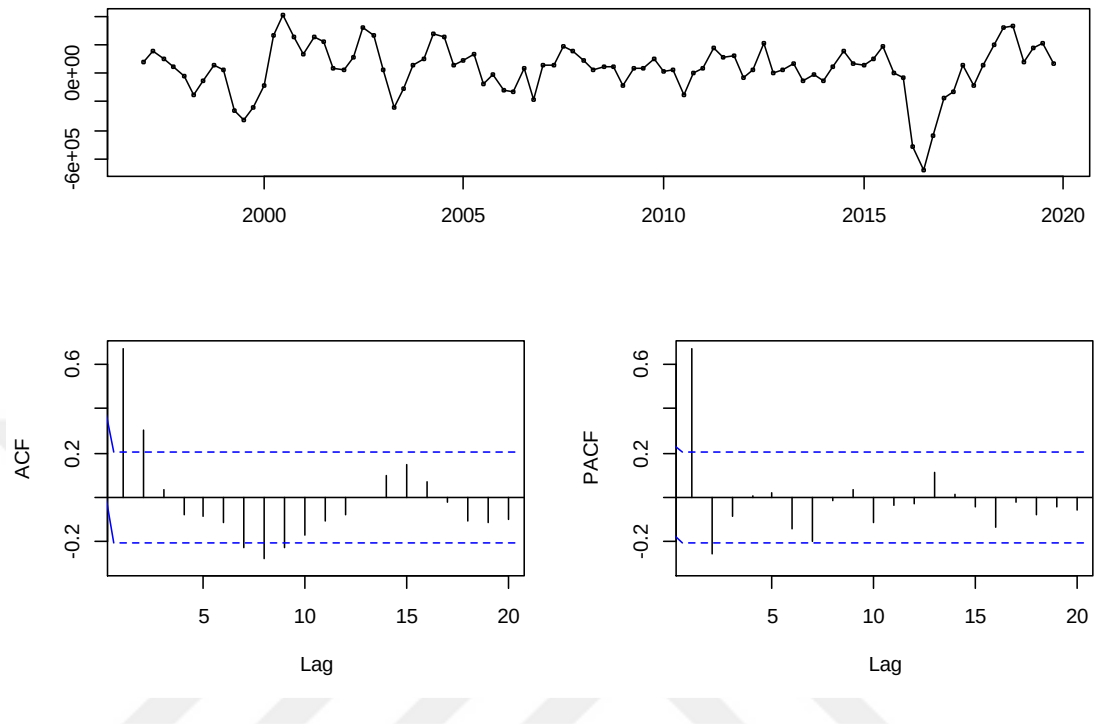


AVRUPATOP

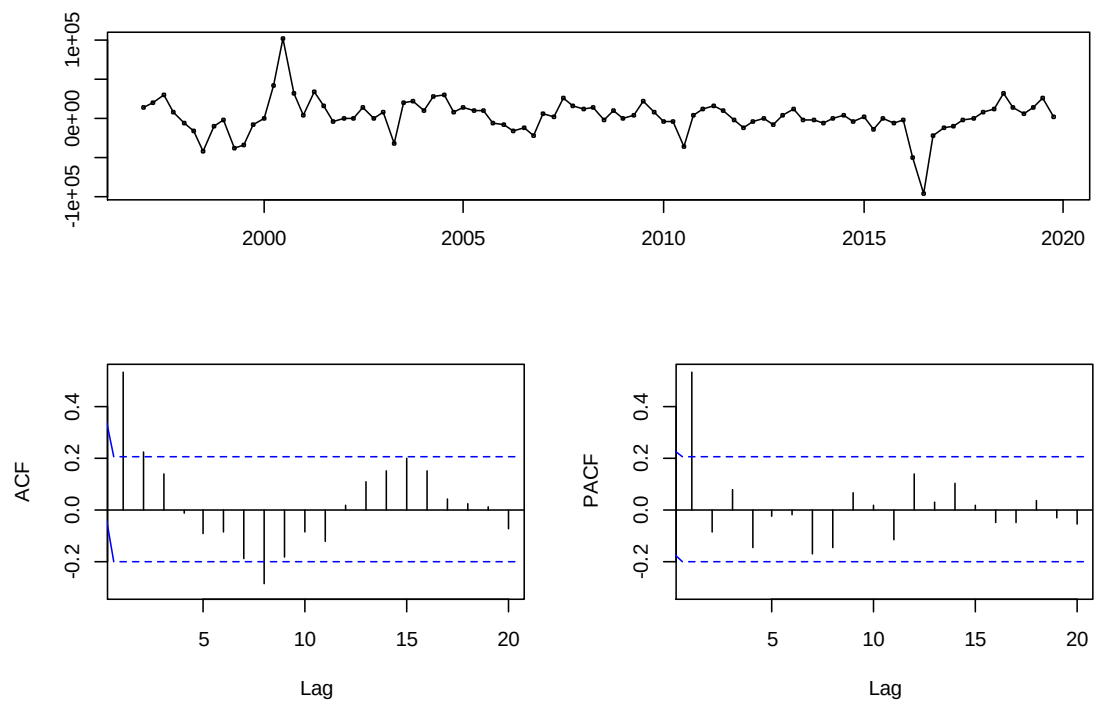


EK 2 (Devam)

ALM

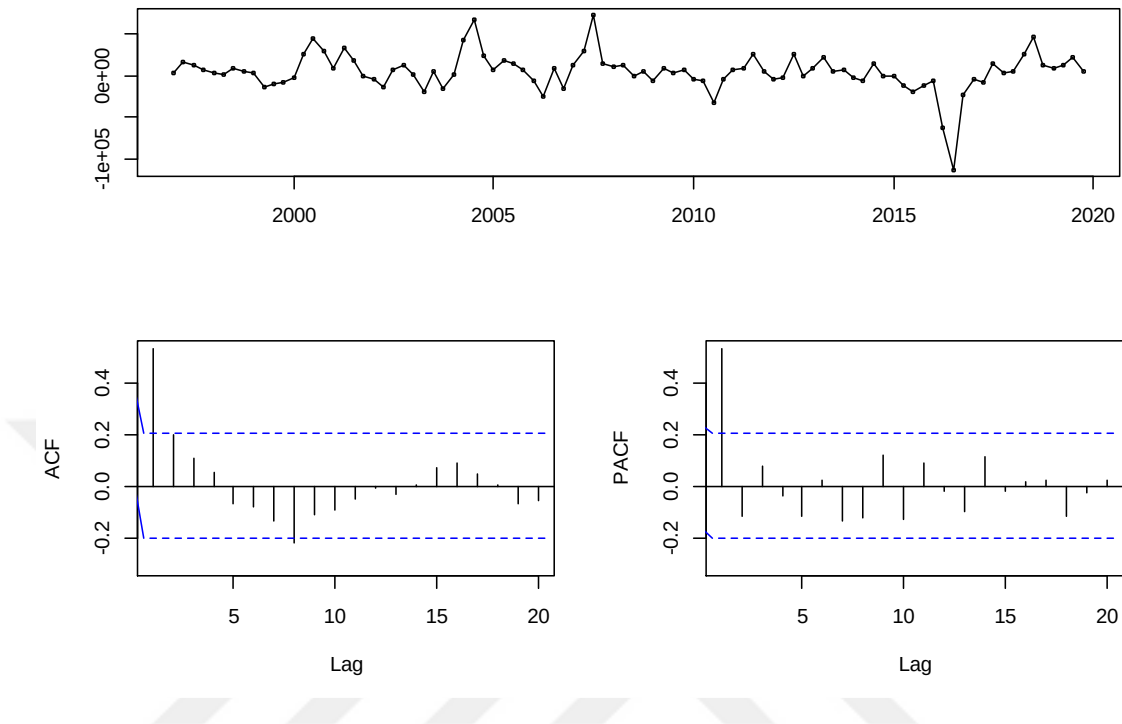


AVU

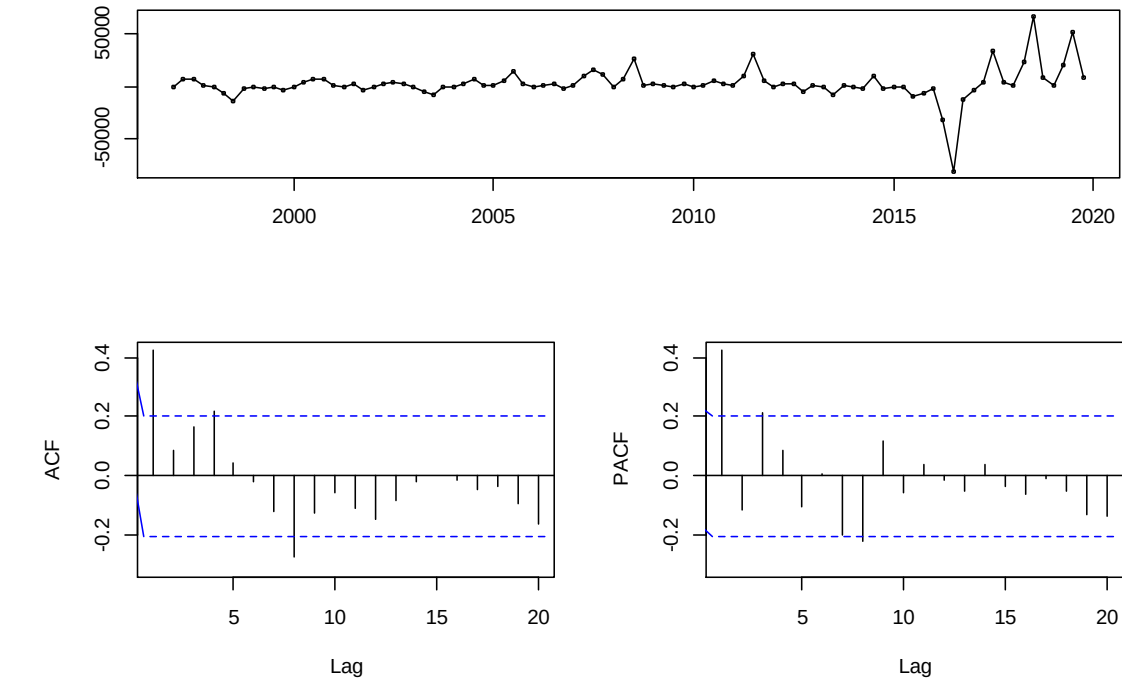


EK 2 (Devam)

BEL

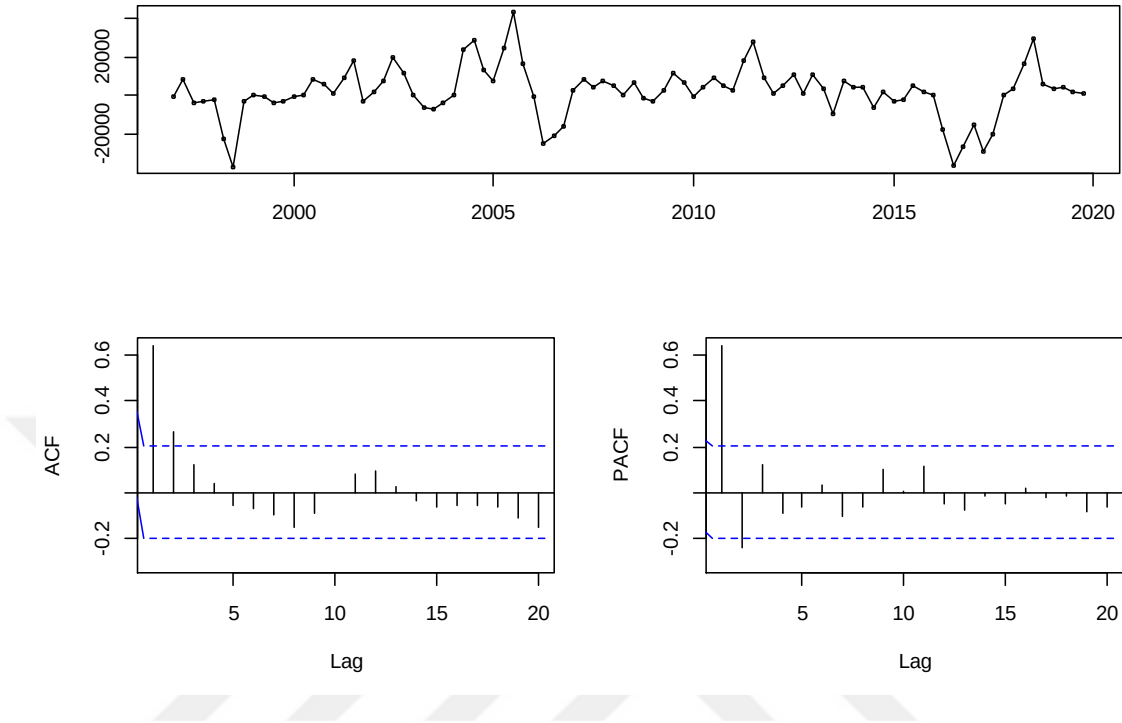


CEK

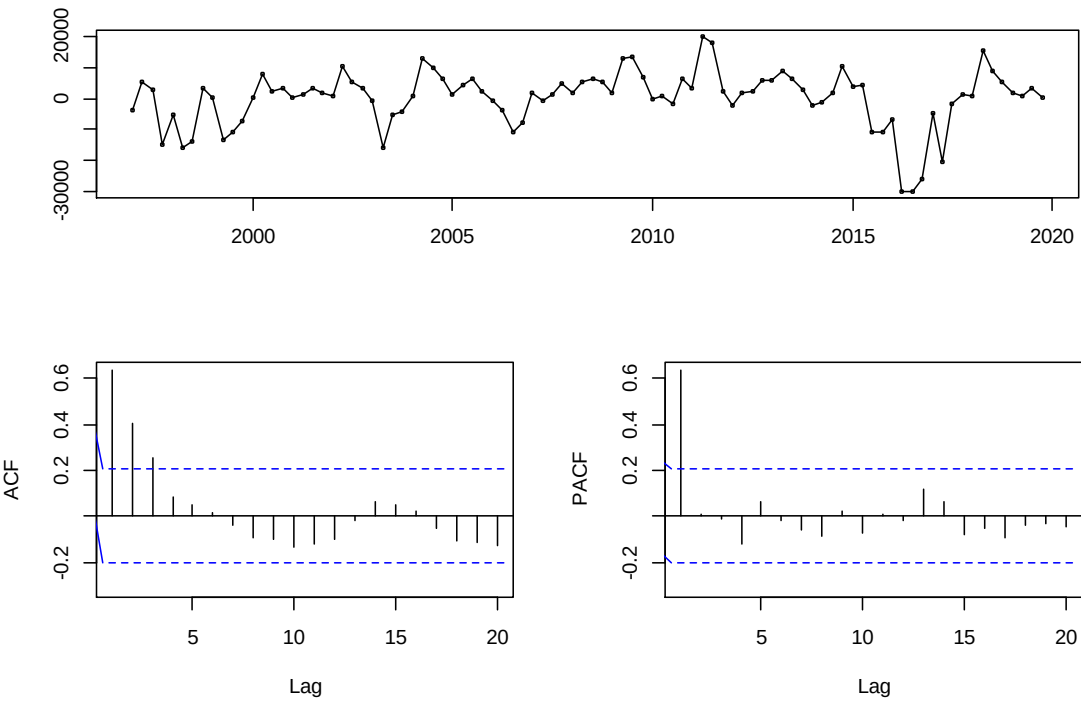


EK 2 (Devam)

DAN

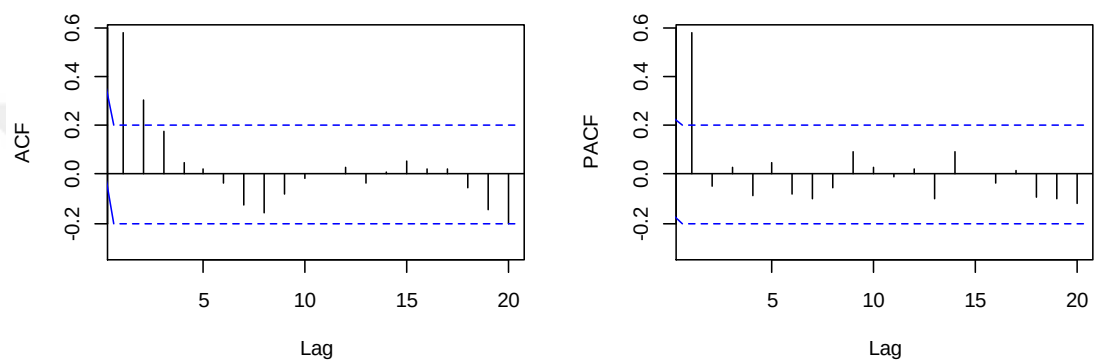
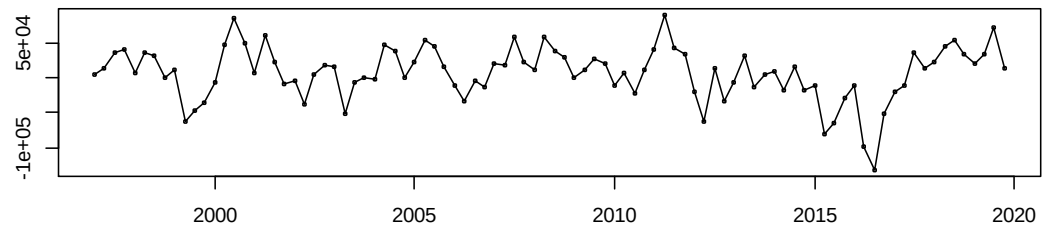


FIN

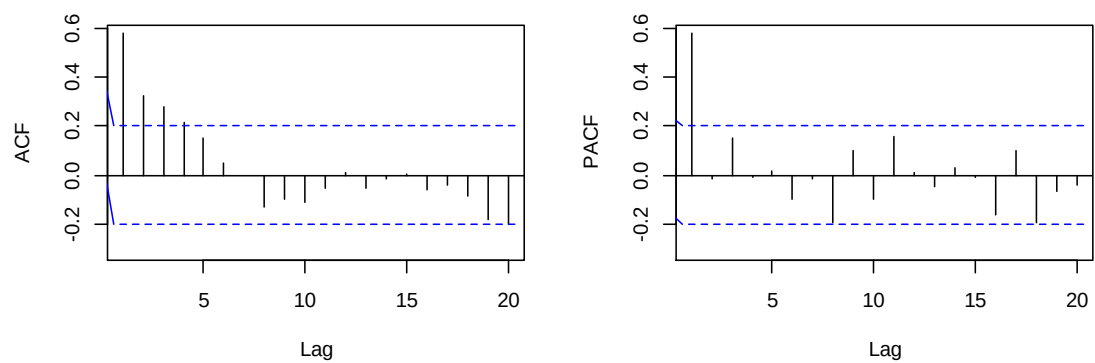
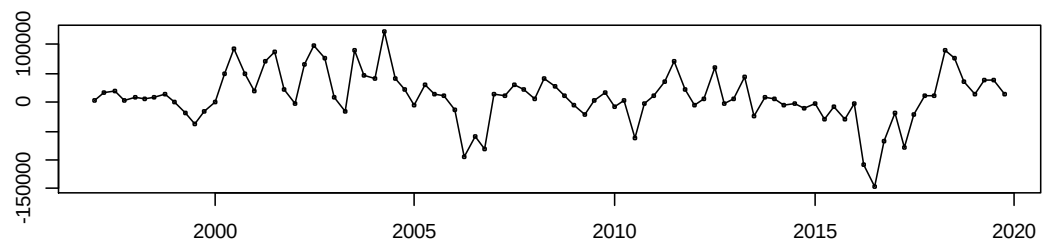


EK 2 (Devam)

FRA

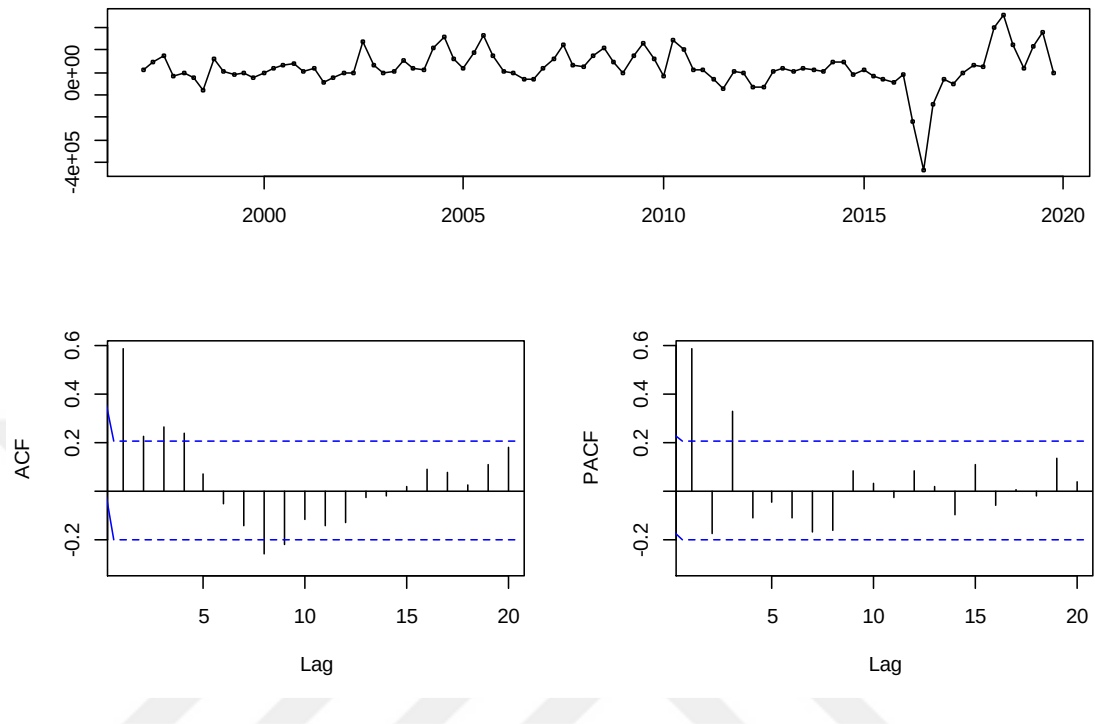


HOL

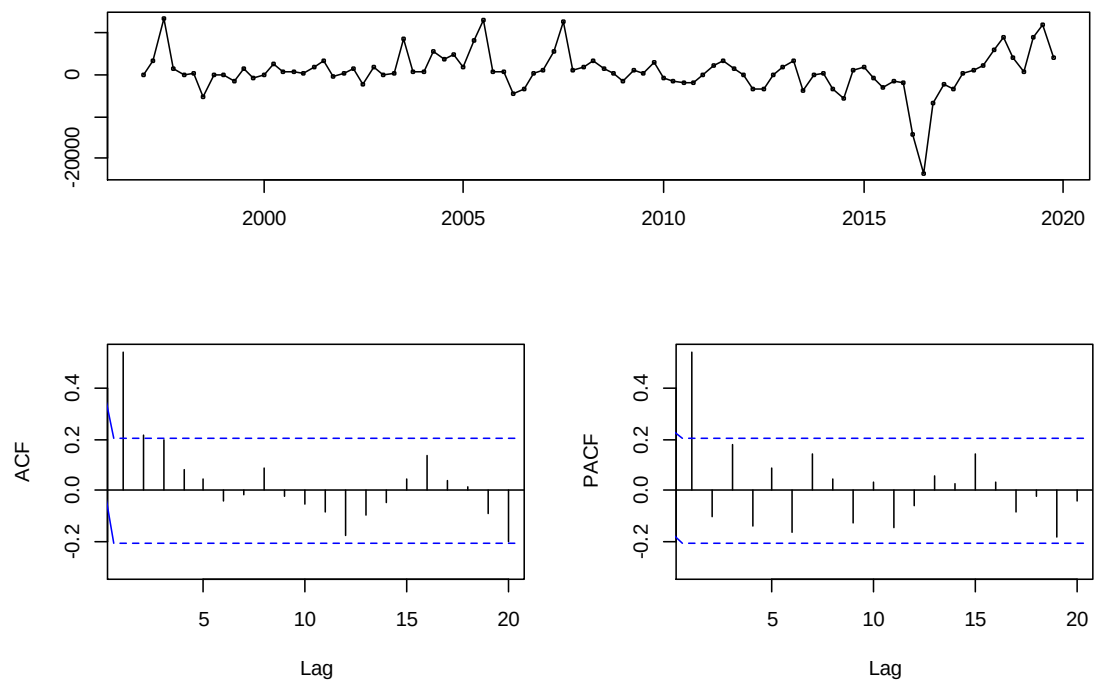


EK 2 (Devam)

ING

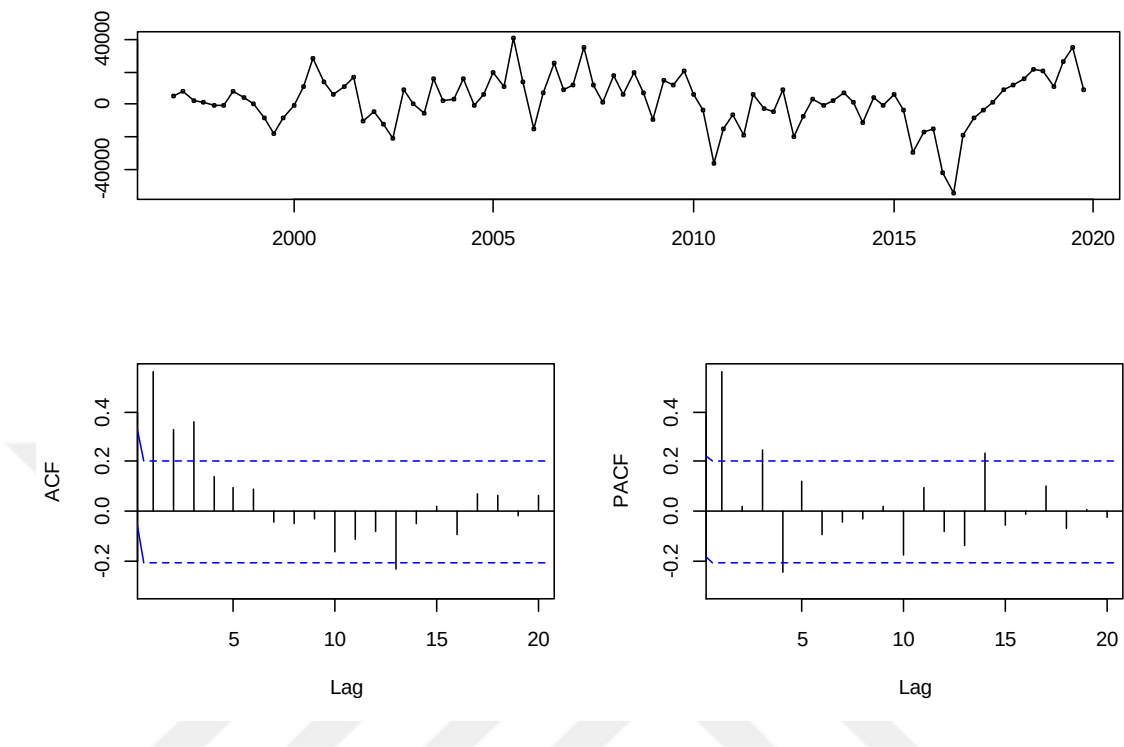


IRL

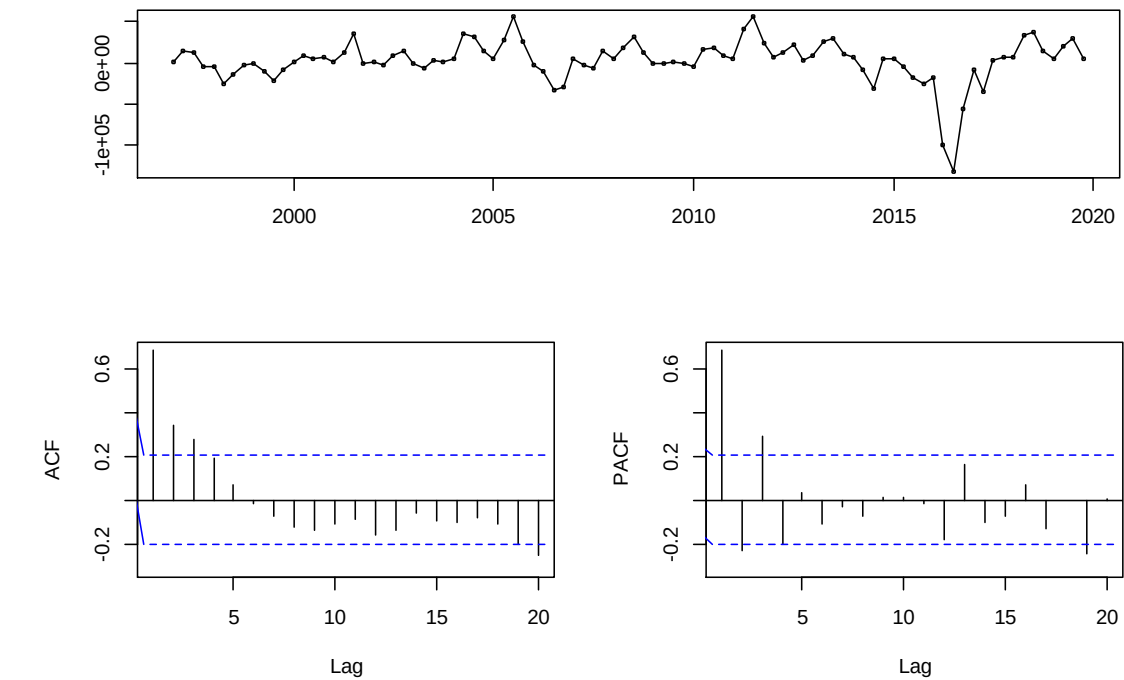


EK 2 (Devam)

ISP

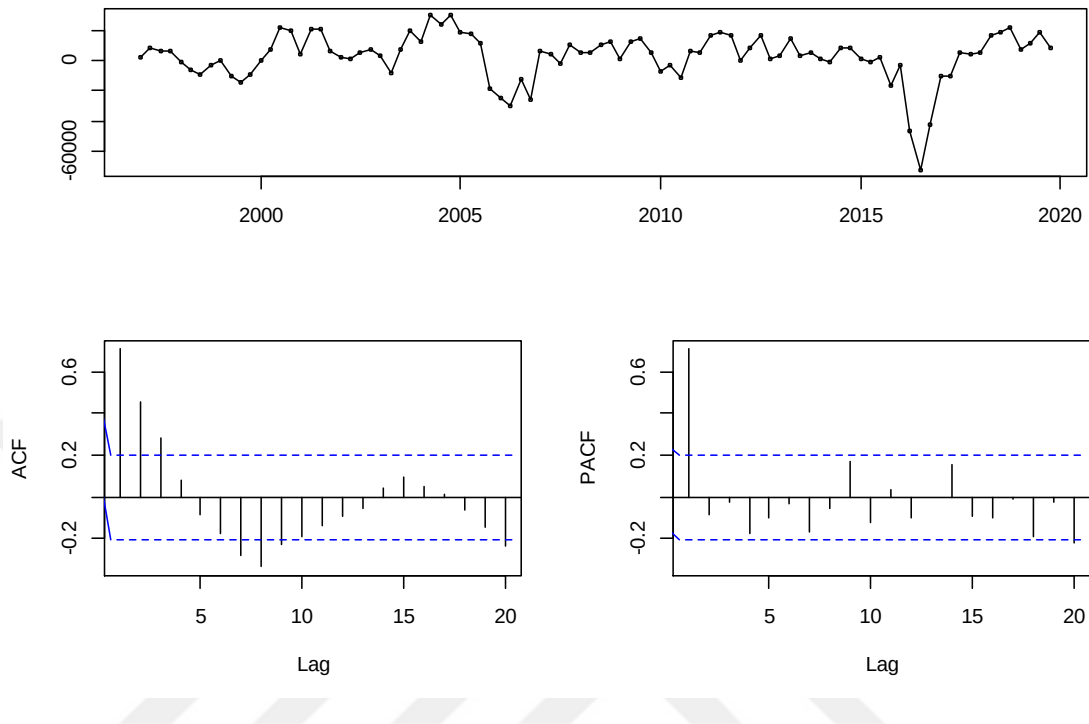


ISVEC

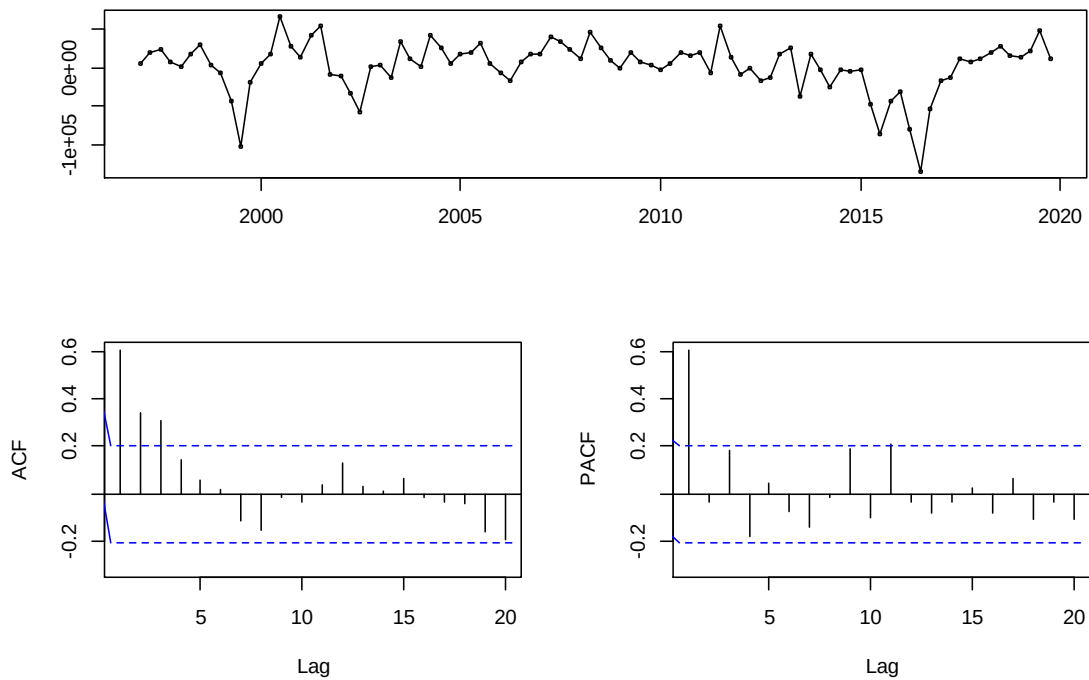


EK 2 (Devam)

ISV

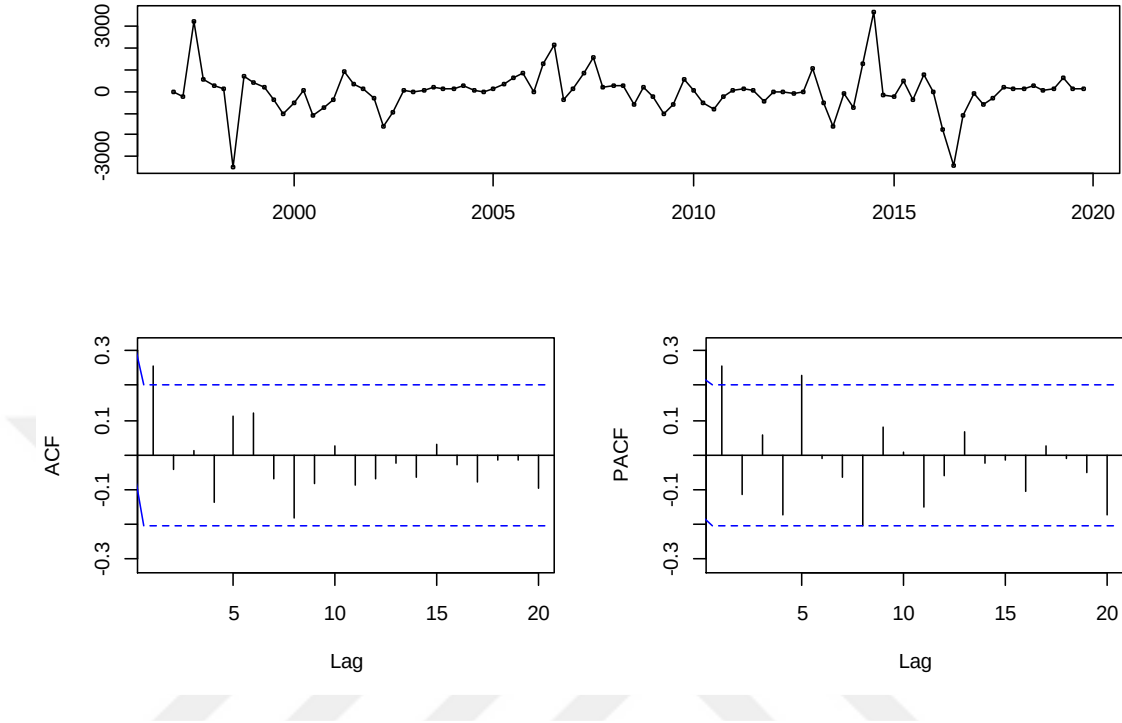


ITA

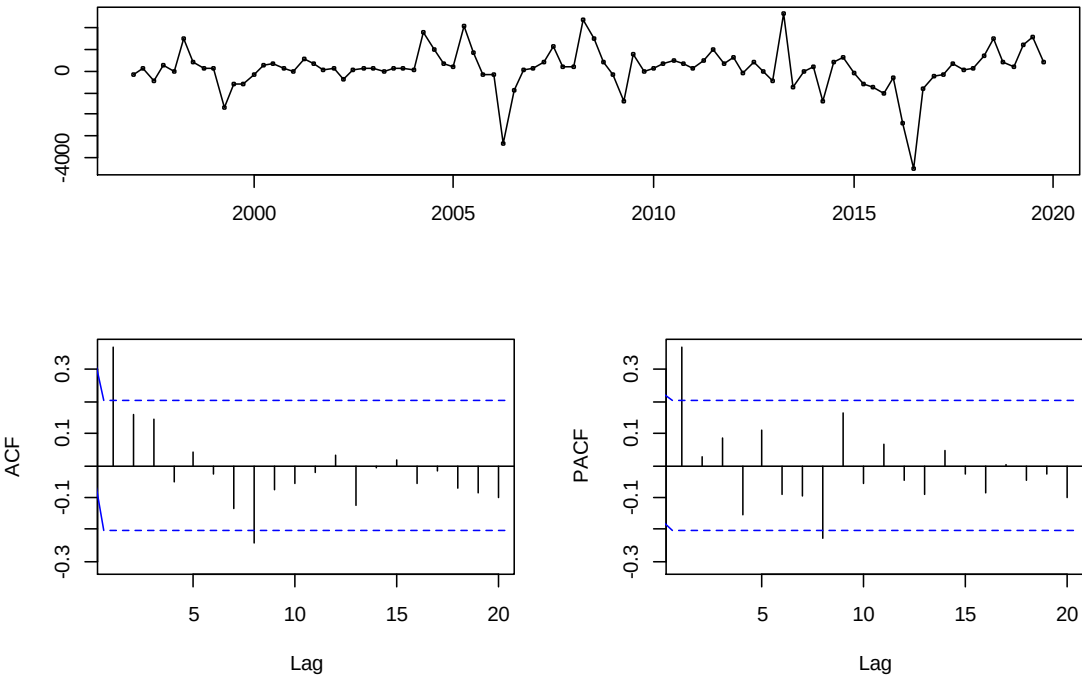


EK 2 (Devam)

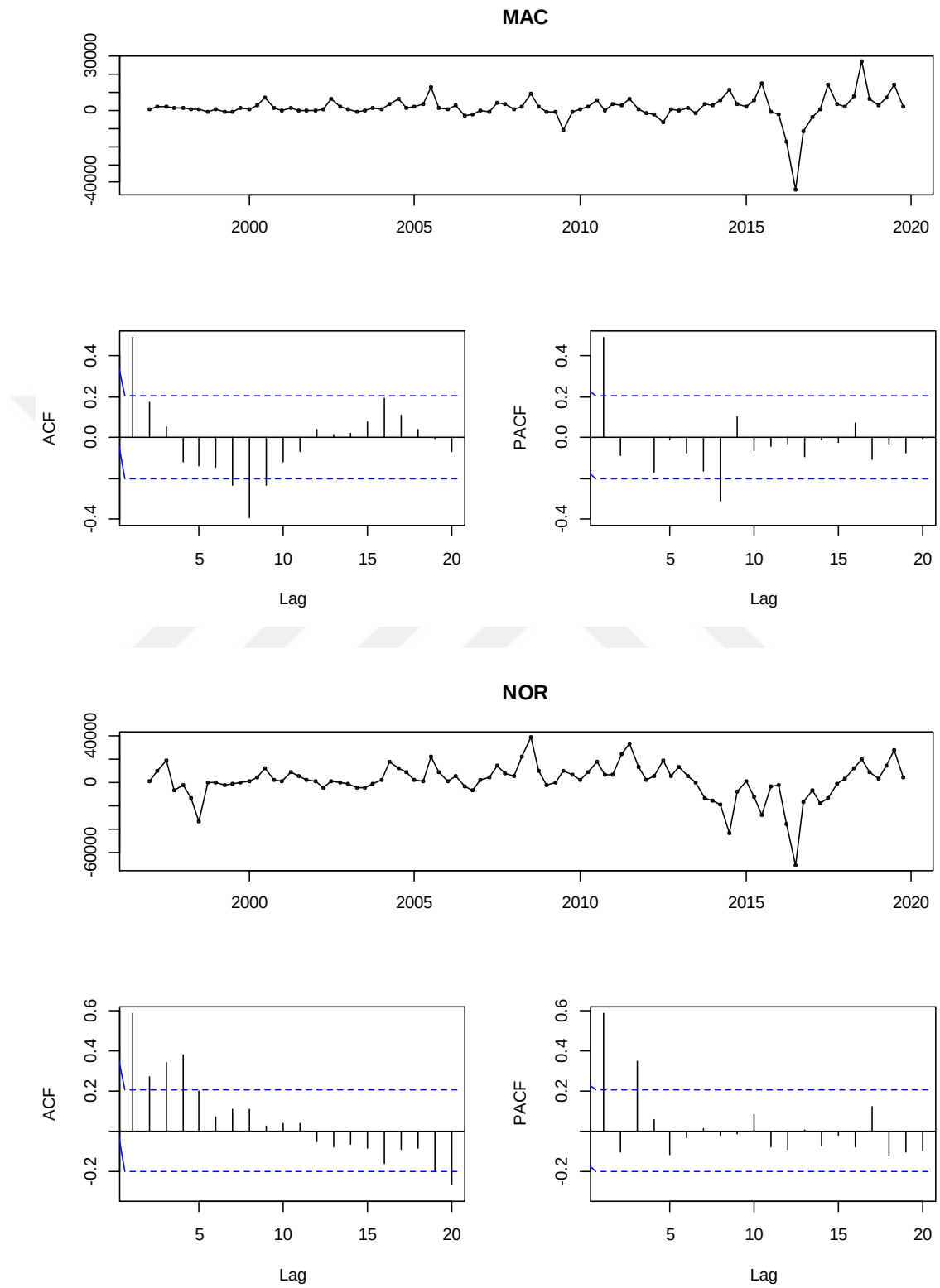
IZL



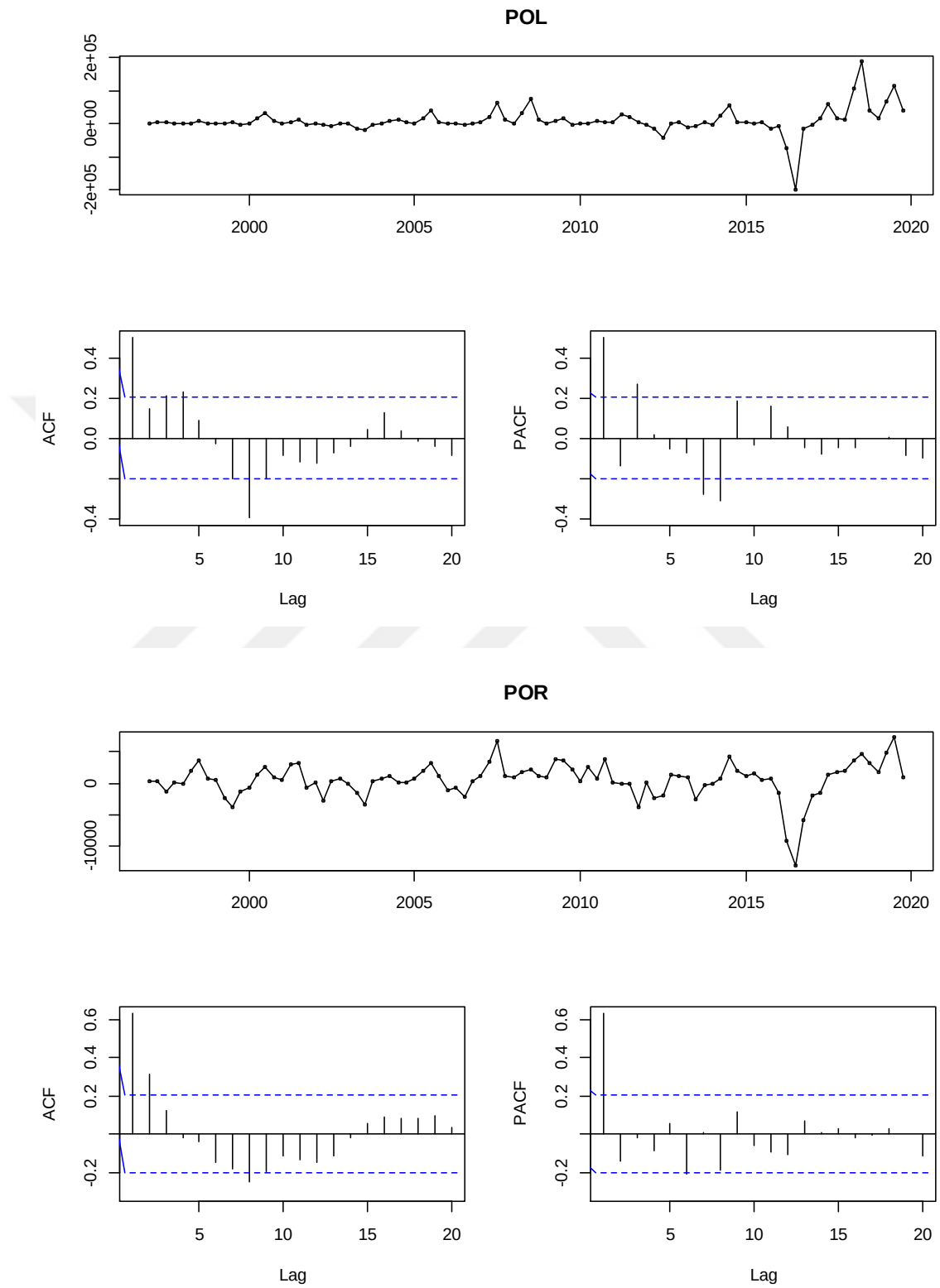
LUK



EK 2 (Devam)

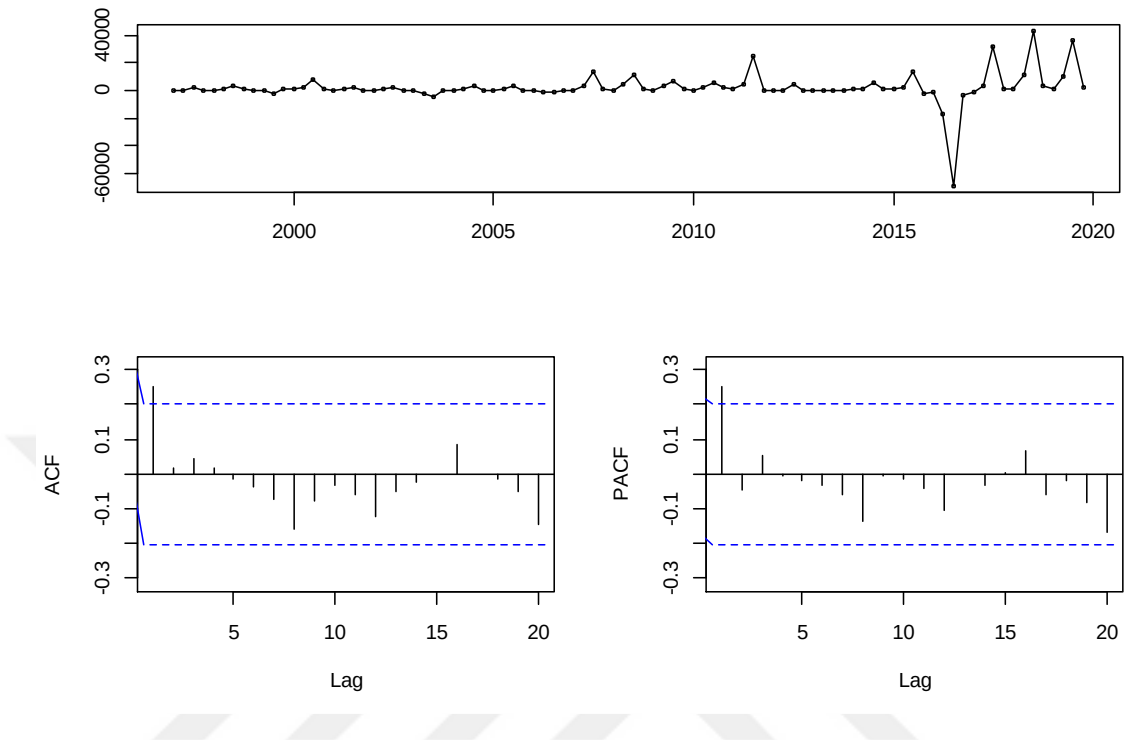


EK 2 (Devam)



EK 2 (Devam)

SLO



YUN

