

**T.C.  
MANİSA CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
TOPOLOJİ BİLİM DALI**

**ESNEK YAKIN METRİKLERDE SABİT NOKTA  
TEOREMLERİ ÜZERİNE**

**Kaan ÖZDEMİR**

**Danışman  
Prof. Dr. Ali MUTLU**



**MANİSA-2021**

## TEZ ONAYI

**Danışman**

**Prof. Dr. Ali MUTLU**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ**  
Manisa Celal Bayar Üniversitesi

**Jüri Üyesi**

**Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL**



## **TAAHHÜTNAME**

Bu tezin Manisa Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

**KAAN ÖZDEMİR**



## İÇİNDEKİLER

|   | <b>Sayfa</b> |
|---|--------------|
| İÇİNDEKİLER.....  | I            |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....                           | II           |
| TEŞEKKÜR.....   | III          |
| ÖZET.....   | IV           |
| ABSTRACT.....   | V            |
| 1. GİRİŞ.....   | 1            |
| 2. GENEL BİLGİLER.....  | 3            |
| 2.1. Esnek Küme Teorisi.....                                  | 3            |
| 2.2. Metrik Uzaylar ve Esnek Metrik Uzaylar.....              | 6            |
| 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....                                 | 9            |
| 3.1. Esnek Metrik Uzaylar.....                                | 9            |
| 4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....                                   | 14           |
| 4.1. Esnek Yakın Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri..... | 14           |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                     | 26           |
| KAYNAKLAR.....  | 27           |
| ÖZGEÇMİŞ.....   | 31           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| $\Phi$                            | Boş Esnek Küme                      |
| $\mathbb{N}$                      | Doğal Sayılar Kümesi                |
| $\tilde{\mathcal{D}}_N$           | Esnek Yakın Metrik                  |
| $((F, E), \tilde{\mathcal{D}}_N)$ | Esnek Yakın Metrik Uzay             |
| $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$     | Esnek Dizi                          |
| $(F, E)$                          | Esnek Küme                          |
| $\tilde{\cup}$                    | Esnek Kümelerde Birleşim            |
| $\tilde{\cap}$                    | Esnek Kümelerde Kesişim             |
| $\tilde{\mathcal{D}}$             | Esnek Metrik                        |
| $(x, F(x))$                       | Esnek Nokta                         |
| $(a, r)$                          | Esnek Parametrik Skaler             |
| $(X, \tau, E)$                    | Esnek Topolojik Uzay                |
| $\tilde{\pi}$                     | Skaler Değerli Parametrik Fonksiyon |
| $\mathbb{R}$                      | Reel Sayılar Kümesi                 |

## TEŞEKKÜR

Öncelikle bana inanıp güvenen yüksek lisansa başlamamda bir Őans tanıyan tüm sabrıyla değerli bilgi birikimlerini ve deneyimlerini aktaran kendilerini tanımaktan onur duyduğum kıymetli hocalarım Prof. Dr. Ali MUTLU ve Dr. Öğr. Üyesi Simge ÖZTUNÇ 'a teşekkürü borç biliyor ve Őükranlarımı sunuyorum. Ayrıca daima her kararımda en büyük destekçim hayat arkadaşım Gamze Özdemir'e, motivasyon kaynağım oğlum Ayaz Demir'e ve tüm dostlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kaan ÖZDEMİR



## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### ESNEK YAKIN METRİKLERDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE Kaan ÖZDEMİR

Manisa Celal Bayar Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali MUTLU

Bu tez çalışmasında daha önce tanımlanmış olan esnek metrik tanımı ile yakın metrik tanımını birleştirerek yeni bir tanım elde edilip, çeşitli genelleştirilmiş büzülmeler için tam metrik uzaylarda elde edilen yeni sabit nokta teoremleri çeşitlerine göre bir takım teoremler, büzülme dönüşümleri, dizi tanımları, yani Cauchy dizisi tanımı verilecektir. Esnek yakın metrik ile Cauchy dizisinin tanımlanması, bu yeni metriğe göre tam uzay elde etmemizi sağlayacaktır. Böylelikle esnek yakın metriği kullanarak Banach, Kannan ve farklı türden dönüşümler için bazı sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi ve ispatlanması amaçlanmaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek Küme, Esnek Metrik, Yakın Esnek Metrik Uzay, Sabit Nokta Teoremi.

2021, 38 sayfa.

## **ABSTRACT**

**M.Sc. Thesis**

### **FIXED POINT THEOREMS IN NEAR SOFT METRIC SPACES**

**Kaan ÖZDEMİR**

**Manisa Celal Bayar University  
Graduate School of Applied and Natural Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Ali MUTLU**

In this thesis we will obtain a new definition is named near soft metric which is obtained by combining the previously defined soft metric definition with the near metric definition. And we will use this definiton to obtain new fixed point theorems in complete metric space for generalized contractions, transformation contractions and Cauchy sequence. Defining the Cauchy sequence with the soft near metric will allow us to obtain complete space according to this metric. Thus we aimed to obtain and prove some fixed point theorems for Banach, Kannan and different types of transformation by using near soft metric.

**Keywords:** Soft Set, Soft Metric, Near Soft Metric Space, Fixed Point Theorem.

**2021, 38 pages**

## 1. GİRİŞ

Rus matematikçi Dmitri Molodtsov tarafından 1999 da Esnek küme kavramı tarif edilmiştir. Araştırmalarda bu esnek küme teorisi belirsizliklerle ve açık olarak tanımlanmamış nesnelere inceleyen yeni bir matematiksel araştırma konusu olarak literatüre girmiştir. Bu alandaki çalışmalar bilgisayar, mühendislik, fen bilimleri ve ekonomide kendine yer bulmuştur. Araştırmacı matematikçiler tarafından esnek küme teorisinin cebirsel ve topolojik karakterizasyonu sunulmuştur.

Esnek küme teorisinin cebirsel ve topolojik özellikleri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Shabir ve Naz tarafından 2011’de esnek topolojik uzaylar tanımı verilmiştir. Bununla birlikte Zorlutuna Aygünoğlu ve Aygün esnek topolojik uzayların bazı özellikleri tarif etmişlerdir. Aras, Sönmez, Çakallı, Zorlutuna ve Çakır esnek dönüşümlerin ve esnek sürekli dönüşümlerin özellikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Diğer taraftan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar ilk defa 1912 yılında Brouwer tarafından matematik literatürüne sunulmuştur. Brouwer  $\mathbb{R}^n$  de kapalı birim yuvardan yine aynı kapalı birim yuvara tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını göstermiştir. Bu teorem literatüre “Brouwer sabit nokta teoremi” olarak vermiştir. 1922 yılında Banach tam metrik uzayları göz önüne alarak Banach büzülme prensibini Banach sabit nokta teoremini ele alarak ilk defa tam metrik uzaylarda bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti eden teoremi ispatlamıştır. Daha sonra Kannan, Caristi, Chatterjea, Reich, Hardy and Rogers ve Jungck gibi matematikçiler çeşitli tip büzülme ve sabit nokta teoremleri üzerine inceleme yaparak bu teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Esnek kümeleri ve esnek kümeler üzerindeki cebirsel işlemleri kullanarak “esnek metrik” kavramını Das ve Samanta 2013 yılında tanımlamışlardır. Das ve Samanta’dan farklı bir biçimde 2017 yılında Hosseinzadeh esnek noktaları, ifade ederek esnek metrik uzayları yeniden tanımlamıştır ve bu konuda farklı bir bakış ileri sürmüştür. Üstelik Hosseinzadeh’in bu çalışması esnek metrik uzayların temel özelliklerinin incelenmesinin yanı sıra esnek büzülme, esnek sabit nokta kavramlarının meydana getirilmesi ve Banach, Caristi gibi bazı sabit nokta teoremlerinin esnek metrik uzaylarda tanımlanması ve kanıtlanması bakımından

önem teşkil etmiştir. Bu sebepten dolayı esnek dönüşümler, esnek metrik uzaylar ve farklı tip esnek metrik uzaylarla ilgili çalışmalar da yer almaktadır.

Bu tez çalışmasında yakın metrik kavramını esnek kümeler üzerinde ifade ederek “Esnek yakın metrik uzayları” tanımladık. Esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi, esnek büzülebilirlik gibi kavramları esnek yakın metrik uzaylarda ifade ederek bazı esnek sabit nokta teoremleri elde ettik ve ispatladık.

Bu tezde farklı tip esnek metrik olarak tanımlanan  $\mathcal{D}_N$  esnek yakın metrik göz önüne alınarak literatürde bilinen sabit nokta teoremlerinin elde edilmesi ve ispatlanması amaçlanmaktadır. Bununla birlikte bu tez çalışmasının sabit nokta teorisi ve esnek metrik uzaylar üzerine çalışan matematikçiler için faydalı bir kaynak olması hedeflenmektedir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde esnek küme teorisi ve sabit nokta teorisi ile ilgili temel kavramlardan bahsedilmiştir.

### 2.1. Esnek küme teorisi

Bu alt bölümde esnek kümeler ve esnek topolojilerle ilgili temel tanımlar ve özellikler verilir.

$X$  nesnelere evrensel kümesi ve  $E$ ,  $X$ 'deki nesnelere ilgili parametrelerin kümesi olsun.  $P(X)$ ,  $X$ 'in kuvvet kümesini gösterecek şekilde ve  $A, B \subseteq E$  olsun.

**Tanım 2.1.1. [1]**  $X$  evrensel bir küme ve  $E$  parametrelerin bir kümesi olsun.

$P(X)$ ,  $X$ 'in kuvvet kümesi ve  $A \subseteq E$  olmak üzere;

$$F : A \rightarrow P(X)$$

ise  $(F, A)$  çifti  $X$  üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Herhangi bir  $(F, A)$  esnek kümesi, her  $e \in A$  için  $F(e) \neq \emptyset$  ve her  $e \in E \setminus A$  için  $F(e) = \emptyset$  olmak üzere  $(F, E)$  şeklinde bir esnek kümeye genişletilebilir.

**Tanım 2.1.2. [2]**  $(F, A)$  ve  $(G, B)$ ,  $X$  üzerinde iki esnek küme olsun.

- i)  $A \subseteq B$ , ve
- ii) Her  $a \in A$  için  $F(a) \subseteq G(a)$  ise

$(F, A)$ 'ya  $(G, B)$ 'nin esnek alt kümesidir denir ve  $(F, A) \subseteq (G, B)$  ile gösterilir.  $(F, A)$ ,  $(G, B)$ 'nin esnek alt kümesi ise  $(F, A)$ 'ya  $(G, B)$ 'nin esnek üst kümesi denir ve  $(F, A) \supseteq (G, B)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.3. [2]**  $X$  üzerinde iki  $(F, A)$  ve  $(G, B)$  esnek kümesinin kesişimi  $(H, C)$  esnek kümesidir.  $C = A \cap B$  ve  $\forall c \in C$  olmak üzere  $H(c) = F(c) \cap G(c)$ . Bu kesişim  $(F, A) \cap (G, B) = (H, C)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.4. [2]**  $X$  üzerinde iki  $(F, A)$  ve  $(G, B)$  esnek kümesinin birleşimi yine bir esnek kümedir.  $C = A \cup B$  ve  $\forall \varepsilon \in C$  için,

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B. \end{cases}$$

Bu bağıntı  $(F, A) \dot{\cup} (G, B) = (H, C)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.5. [2]**  $X$  üzerindeki bir  $(F, A)$  esnek kümesi  $\forall a \in A$  için  $F(a) = \emptyset$  ise bir boş (null) esnek küme olarak adlandırılır ve  $\Phi$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.6. [2]**  $X$  üzerindeki  $\tilde{X}$  mutlak esnek kümesi  $\forall a \in A$  için  $F(a) = X$  olacak şekilde tanımlı bir  $(F, X)$  esnek kümesidir.

**Tanım 2.1.7. [2]**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $(F, A)$ 'nın relatif tümleyeni  $(F, A)^c$  olarak gösterilir ve  $F^c : A \rightarrow P(X)$ , her  $a \in A$  için  $F^c(a) = X - F(a)$  ile verilen bir dönüşüm olmak üzere  $(F, A)^c = (F^c, A)$  ile tanımlanabilir.

**Tanım 2.1.8. [2]**  $(F, A)$  ve  $(G, B)$ ,  $X$  üzerinde iki esnek küme olsun. Bu takdirde  $(F, A) - (G, B) = \{(x, F(x)) : F(x) \notin G(B), x \notin B\}$  esnek kümesidir.

**Tanım 2.1.9. [4]**  $\tau$ ,  $X$  üzerinde esnek kümelerin bir koleksiyonu ve  $E$  parametre kümesi olsun. Bu takdirde  $\tau$  aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa  $X$  üzerinde bir esnek topoloji olarak adlandırılır.

- i)  $\Phi, \tilde{X} = (F, X) \in \tau$ ,
- ii)  $\tau$ 'daki herhangi (keyfi) sayıda esnek kümelerin birleşimi  $\tau$ 'ya aittir.
- iii)  $\tau$ 'daki herhangi iki esnek kümenin kesişimi yine  $\tau$ 'ya aittir.

$(X, \tau, E)$  üçlüsüne  $X$  üzerinde bir esnek topolojik uzay denir.

**Tanım 2.1.10. [8]**  $(X, \tau, E)$  ve  $(Y, \tau', E)$  iki esnek topolojik uzay olsun.  $f : (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau', E)$  bir dönüşüm olsun.  $(f(x_e), E)$ 'nin her bir  $(H, E)$  esnek komşuluğu için  $f((F, E)) \subset (H, E)$  olacak şekilde  $(x_e, E)$ 'nin bir  $(F, E)$  esnek komşuluğu mevcutsa bu takdirde  $f$ 'e  $(x_e, E)$ 'de esnek sürekli dönüşüm denir.

**Önerme 2.1.11. [8]**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $1_X : X \rightarrow X$  birim dönüşümü esnek sürekli olmak zorunda değildir.

**İspat:**  $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  ve  $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$  ve  $\tau' = \{\Phi, \tilde{X}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)\}$ ,  $X$  üzerinde iki esnek topolojik uzay ve

$(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E), (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E), (G_4, E)$ ,  $X$  üzerinde esnek açık kümeler olmak üzere

$$F_1(e_1) = \{h_2\}, F_1(e_2) = \{h_1\}, F_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, F_2(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_3(e_1) = \{h_3\},$$

$$F_3(e_2) = \{h_1, h_2\}, F_4(e_1) = \emptyset, F_4(e_2) = \{h_1\};$$

ve

$$G_1(e_1) = \{h_2\}, G_1(e_2) = \{h_1\}, G_2(e_1) = \{h_2, h_3\}, G_2(e_2) = \{h_1, h_2\}, G_3(e_1) = \{h_1, h_2\},$$

$$G_3(e_2) = X, G_4(e_1) = \{h_2\}, G_4(e_2) = \{h_1, h_2\}$$

olarak tanımlansın.  $f^{-1}((G_3, E)) = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, X)\} \notin (X, \tau, E)$  ve

$$f^{-1}((G_4, E)) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_2\})\} \notin (X, \tau, E). \quad \text{Bundan dolayı}$$

$f = 1_X : X \rightarrow X$  dönüşümü esnek sürekli değildir.

**Tanım 2.1.12 [27]**  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi olsun.  $(a, r)$  ve  $(b, r')$  iki esnek parametrik skaler olsun. Bu takdirde esnek parametrik skalerler arasındaki toplama ve esnek parametrik skalerler üzerindeki skalerler çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(a, r) + (b, r') = (\{a, b\}, r + r') \quad \text{ve}$$

Her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $\lambda(a, r) = (a, \lambda r)$ .

**Tanım 2.1.13. [27]**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $f(A, F(A)) = (f_1, f_2)(A, F(A))$  olacak şekilde  $f_1 : A \rightarrow A$  ve  $f_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları varsa  $(F, A)$  üzerindeki bir  $f$  fonksiyonu parametrik skaler değerli

bir fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde yukarıdaki tanımı  $f_1 : A \times A \rightarrow A$  ve  $f_2 : F(A) \times F(A) \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$f(A \times A, F(A) \times F(A)) = (f_1, f_2)(A \times A, F(A) \times F(A))$  ile  $f : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R})$  şeklinde genişletilebilir.

## 2.2. Metrik uzaylar ve esnek metrik uzaylar

Bu bölümde esnek kümeler (uzaylar) üzerinde tanımlı esnek metriklerle ilgili temel kavramlardan bahsedilecektir.

**Tanım 2.2.1. [41]**  $X$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  fonksiyonu

$$M(1) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) \geq 0$$

$$M(2) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M(3) \quad \forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M(4) \quad \forall x, y, z \in X, \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerini sağlıyorsa  $d$ 'ye  $X$  üzerinde bir metrik ve  $(X, d)$  ikilisine de metrik uzay denir.

**Tanım 2.2.2. [42]**  $X$  boştan farklı bir küme olsun ve  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$  fonksiyonunun her  $x, y \in X$  ve  $c, 1$  den büyük sabit olmak üzere aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2.  $d(x, y) = d(y, x),$
3.  $d(x, z) = c[d(x, y) + d(y, z)]$

Bu takdirde  $d$  metriği yakın metrik olarak adlandırılır ve  $(X, d)$  ikilisine yakın metrik uzay denir.

**Tanım 2.2.3. [43]**  $X \neq \emptyset$  ve  $x \in X$  olsun.  $f : X \rightarrow X$  fonksiyonu için  $f(x) = x$  ise  $x \in X$ 'e  $f$ 'in sabit noktası denir.

**Tanım 2.2.4. [43]**  $(X, d)$  metrik uzay ve  $T : X \rightarrow X$  herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her  $x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

şartını sağlayan bir  $\lambda \geq 0$  sabiti varsa  $T$ 'ye Lipschitz dönüşümü (Lipschitz mapping) denir. Burada  $0 \leq \lambda < 1$  ise  $T$ 'ye büzülme veya daralma (contraction) dönüşümü ve

$\lambda = 1$  ise  $T$ 'ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir. Eğer her  $x, y \in X$  için ( $x \neq y$ )

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

şartı sağlanıyorsa  $T$ 'ye büzülebilir (contractive) dönüşüm denir. Bu durumda aşağıdaki gerektirmenin doğruluğu kolayca görülebilir.

Büzülme dönüşümü  $\Rightarrow$  Büzülebilir dönüşüm  $\Rightarrow$  Genişlemeyen dönüşüm  $\Rightarrow$  Lipschitz şartını sağlar.

**Teorem 2.2.5. [12] (Banach Büzülme Teoremi)**  $(X, d)$  bir tam metrik uzay ve  $T : X \rightarrow X$  bir dönüşüm olmak üzere her  $x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

olacak şekilde bir  $\lambda \in (0, 1)$  sabiti bulunabiliyorsa  $T$ 'nin  $X$ 'de bir tek sabit noktası vardır.

**Tanım 2.2.6. [27]**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $\tilde{\pi} : A \times A \rightarrow A$  bir parametrik skaler değerli bir fonksiyon olsun.  $\tilde{\mathcal{D}}$  aşağıdaki şartları sağlıyorsa

$\tilde{\mathcal{D}} : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$  parametrik skaler değerli fonksiyonunun  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek metrik olduğu söylenir.

1.  $\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) \succeq (\tilde{\pi}(a, b), 0)$ ,  $a = b$  iken eşitlik sağlanır.
2. Her  $a, b \in A$  için  $\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) = \tilde{\mathcal{D}}((b, F(b)), (a, F(a)))$
3. Her  $a, b, c \in A$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (c, F(c))) \prec \tilde{\mathcal{D}}((a, F(a)), (b, F(b))) + \tilde{\mathcal{D}}((b, F(b)), (c, F(c)))$$

$((F, A), \tilde{\mathcal{D}})$  ikilisine  $X$  üzerinde bir esnek metrik uzay denir.

**Tanım 2.2.7. [27]**  $(F, A)$  ve  $(F', A')$  sırasıyla  $X$  ve  $Y$  üzerinde iki esnek küme olsun.

$f_1 : A \rightarrow A'$  ve  $f_2 : F(A) \rightarrow F'(A')$ ,  $F(A) = \{F(a) : a \in A\}$  ve  $F'(A') = \{F'(a') : a' \in A'\}$  olmak üzere dönüşümler olsun. Bu takdirde  $f = (f_1, f_2) : (F, A) \rightarrow (F', A')$  ikilisi

$$f(V, B)(e') = \begin{cases} \cup_{e \in f_1^{-1}(e') \cap B} f_2(V(e)) & f_1^{-1}(e') \cap B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

Bu durumda  $f$  esnek dönüşüm olarak adlandırılır ve  $(f(V, A), C)$ ,  $(V, B)$  esnek kümesinin esnek görüntüsü olarak adlandırılır.  $(W, C) \in (F', A')$  olsun. Bu takdirde  $(W, C)$ 'nin yukarıda tanımlanan  $f$  esnek dönüşümü altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(W, C)(e) = \begin{cases} f_2^{-1}(W(f_1(e))) & f_1(e) \in C \\ \emptyset & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere,  $f^{-1}(W, C)$  ile gösterilen  $X$  üzerinde esnek kümedir.

**Tanım 2.2.8. [27]**  $A \subseteq E$  parametrelerin kümesi olsun. Esnek parametrik skalerlerin bir dizisi  $\{(a_n, r_n)\}$  olmak üzere ( $i \neq j$  için  $a_i = a_j$  olabilir)  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$  olacak şekilde bir  $r \in \mathbb{R}$  mevcutsa  $\{(a_n, r_n)\}$  dizisi bir esnek parametrik skalere yakınsaktır denir ve  $\forall a \in A$  için  $(a_n, r_n) \rightarrow (a, r)$  olarak yazılır.

**Tanım 2.2.9. [27]**  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi olsun.  $\{(a_n, r_n)\}$  ( $i \neq j$  için  $a_i = a_j$  olabilir) esnek parametrik skalerlerin bir dizisi olsun.  $(a_{n+1}, r_{n+1}) \preceq (a_n, r_n)$  ise  $\{(a_n, r_n)\}$  azalan,  $(a_n, r_n) \preceq (a_{n+1}, r_{n+1})$  ise  $\{(a_n, r_n)\}$  artan olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.10.[27]**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $f(F, A) = (f_1, f_2)(A, F(A))$  olacak şekilde  $f_1 : A \rightarrow A$  ve  $f_2 : F(A) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları varsa  $(F, A)$  üzerindeki parametrik skaler değerli  $f$  fonksiyonu azalan (artan) olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.11.** [27]  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme ve  $\tilde{\mathcal{D}}$ ,  $(F, A)$  üzerinde bir esnek metrik olsun. Her  $(c, x) \in (F, A)$  esnek noktası için  $(c, x)$  ve  $(a, F(a))$  arasındaki uzaklık  $\tilde{\mathcal{D}}((c, x), (a, F(a)))$  ile gösterilir.

$X, d$  metriği ile birlikte bir metrik uzay ise  $(c, x)$  ve  $(a, F(a))$  arasındaki uzaklık

$$\tilde{\mathcal{D}}((c, x), (a, F(a))) = (\tilde{\pi}(c, a), \inf_{y \in F(a)} d(x, y)) \text{ olarak tanımlanır.}$$

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

#### 3.1. Esnek Yakın metrik uzaylar

Bu bölümde esnek yakın metrik uzay tanımı verilerek, sabit nokta teoremlerinde kullanmaya yönelik esnek yakın metriğin kullanılmasıyla esnek dizi, esnek yakınsak dizi, esnek Cauchy dizisi tanımları ifade edilmiştir.

**Tanım 3.1.1.** [27]  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi olsun. Eğer  $r \in \mathbb{R}$  ve  $a \in A$  ise  $(a, r)$  sıralı ikilisi esnek parametrik skaler olarak adlandırılır.  $r = 0$  ise  $(a, r)$  sıralı ikilisi esnek anlamda 0 (sıfır) olarak adlandırılır.  $r \geq 0$  ise  $(a, r)$  esnek parametrik skaleri negatif olmayan olarak adlandırılır.  $(a, r)$  ve  $(b, r')$  iki esnek parametrik skalerler olsun.  $r \geq r'$  ise  $(a, r)$ 'nin  $(b, r')$ 'den küçük olmadığını söylenir ve  $(a, r) \succeq (b, r')$  şeklinde yazılır.

**Tanım 3.1.2.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme ve  $\tilde{\pi} : A \times A \rightarrow A$  bir parametrik skaler değerli fonksiyon olsun.  $(\tilde{\pi}(a, b), 0)$  esnek parametrik skaleri  $\tilde{\pi}(a, b) \in A$ ,  $0 \in \mathbb{R}$  olmak üzere esnek anlamda 0 (sıfır) elemanını gösterebilir.

$\tilde{\mathfrak{D}}_N : (F, A) \times (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+ \cup \{0\})$  parametrik skaler değerli fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $(F, A)$  üzerinde bir esnek yakın metrik olarak adlandırılır.  $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_N)$  ikilisine de esnek yakın metrik uzay denir.

$\forall (a, F(a)), (b, F(b)), (c, F(c)) \in (F, A)$  için

1.  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) \succeq (\tilde{\pi}(a, b), 0)$  ve  $a = b$  ise eşitlik sağlanır.
2.  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) = (\tilde{\pi}(a, b), 0) \Leftrightarrow (a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$  ve  $(a, F(a)) = (b, F(b))$  [ $\forall a, b \in A, a = b$ ]
3.  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) = \tilde{\mathfrak{D}}_N((b, F(b)), (a, F(a)))$
4.  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (c, F(c))) \leq (c, r)[\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) + \tilde{\mathfrak{D}}_N((b, F(b)), (c, F(c)))]$

**Tanım 3.1.3.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $(F, A)$ 'daki bir esnek dizi  $n \in \mathbb{N}$  için  $(F_n, A)$ ,  $(F, A)$ 'nın bir esnek alt kümesi olacak şekilde

$f(n) = (F_n, A)$  ile tanımlı bir  $f : \mathbb{N} \rightarrow (F, A)$  fonksiyonudur ve  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  ile gösterilir.

**Tanım 3.1.4.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun,  $\tilde{\mathcal{D}}_N$   $(F, A)$  üzerinde bir esnek yakın metrik  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(F, A)$ 'da bir esnek dizi ve  $(x, F(x)) \in (F, A)$  olsun. Bu takdirde her  $\varepsilon$  pozitif sayısı için  $n \geq N$  olmak üzere her  $n$  doğal sayısı için  $\tilde{\mathcal{D}}_N((a, F_n(a)), (x, F(x))) \preceq (\tilde{\pi}(a, x), \varepsilon)$  olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı mevcut ise  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  esnek dizisi  $(x, F(x))$  'e esnek yakınsaktır denir.

**Tanım 3.1.5.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $\tilde{\mathcal{D}}_N$ ,  $(F, A)$  üzerinde bir esnek yakın metrik ve  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(F, A)$  'da bir esnek dizi olsun. Bu takdirde her  $\varepsilon$  pozitif sayısı için  $n, m \geq N$  olmak üzere her  $n, m$  doğal sayısı için  $\tilde{\mathcal{D}}_N((a, F_n(a)), (a, F_m(a))) \preceq (\tilde{\pi}(a, a), \varepsilon)$  olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı mevcut ise  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisine bir esnek Cauchy dizisi denir.

**Teorem 3.1.6.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $\tilde{\mathcal{D}}_N$ ,  $(F, A)$  üzerinde bir esnek yakın metrik,  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(F, A)$  'da bir esnek dizi olsun.  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(F, A)$  'da  $\tilde{\mathcal{D}}_N$  metriğine göre esnek yakınsak ise bu takdirde  $(F, A)$  'nın bir tek elemanına yakınsar.

**İspat:**  $(x, F(x)), (y, F(y)) \in (F, A)$  ve  $\forall n \in \mathbb{N}$  için

$(F_n, A) \rightarrow (x, F(x))$  ve  $(F_n, A) \rightarrow (y, F(y))$  olacak şekilde farklı iki esnek eleman olsun. Bu takdirde esnek yakın metrik uzayın 4. Koşulundan  $\forall x, y \in A$  ve  $(c, r)$  esnek parametrik skaler olmak üzere

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y))) \leq (c, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (a, F_n(a))) + \tilde{\mathcal{D}}_N((a, F_n(a)), (y, F(y)))] \quad (3.1)$$

$\varepsilon$  keyfi pozitif bir sayı olsun.  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $(x, F(x))$  ve  $(y, F(y))$ 'ye yakınsak olduğundan her  $n \succ N_1$  ve  $n \succ N_2$  için aşağıdaki eşitsizler sağlanacak şekilde  $N_1$  ve  $N_2$  doğal sayıları mevcuttur.

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (a, F_n(a))) \preceq (\tilde{\pi}(x, a), \varepsilon/2)(c, r) \quad (3.2)$$

ve

$$\tilde{\mathfrak{D}}_N((y, F(y)), (a, F_n(a))) \preceq (\tilde{\pi}(y, a), \varepsilon / 2)(c, r) \quad (3.3)$$

$n \succeq \max\{N_1, N_2\}$  olduğunu kabul edelim. Bu takdirde (3.1), (3.2) ve (3.3) den

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y))) &\preceq (c, r)[(\tilde{\pi}(x, a), \varepsilon / 2(c, r)) + (\tilde{\pi}(a, y), \varepsilon / 2(c, r))] \\ &\preceq (c, r)((\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)), \varepsilon / (c, r)) \\ &= (\{\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)\}, \varepsilon) \end{aligned}$$

Bu  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y))) \preceq (\{\tilde{\pi}(x, a), \tilde{\pi}(a, y)\}, \varepsilon)$  olduğu anlamına gelir. Bundan dolayı  $\tilde{\mathfrak{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y))) = (\tilde{\pi}(x, y), 0)$ . Bu takdirde esnek yakın metrik tanımının 1. Şartı  $x = y$  olmasını gerektirir. Sonuç olarak  $(x, F(x)) = (y, F(y))$  dir.

**Tanım 3.1.7.**  $(F, A)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun.  $\tilde{\mathfrak{D}}_N$ ,  $(F, A)$  üzerinde bir esnek yakın metrik olsun. Eğer  $(F, A)$ 'daki her esnek Cauchy dizisi  $(F, A)$ 'da esnek yakınsak ise  $(F, A)$ 'ya tam esnek yakın metrik uzay denir.

**Önerme 3.1.8.**  $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_N)$   $X$  üzerinde bir esnek yakın metrik uzay ve  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$   $(F, A)$  da yakınsak esnek dizi olsun. Bu takdirde  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  esnek Cauchy dizisidir.

**Teorem 3.1.9.**  $((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_N)$  ve  $((F', A'), \tilde{\mathfrak{D}}'_N)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  üzerinde iki farklı yakın esnek metrik uzay olsun.  $f = (f_1, f_2): ((F, A), \tilde{\mathfrak{D}}_N) \rightarrow ((F', A'), \tilde{\mathfrak{D}}'_N)$  bir esnek dönüşüm olsun. Bu takdirde  $f$  esnek süreklidir ancak ve ancak her  $(x, F(x)) \in (F, A)$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  için en az bir pozitif  $\delta$  sayısı vardır öyleki her  $(y, F(y)) \in (F, A)$  için

$$\tilde{\mathfrak{D}}'_N(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq (\tilde{\pi}(x, y), \delta) \text{ iken}$$

$$\tilde{\mathfrak{D}}'_N(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq (\tilde{\pi}'(\tilde{\pi}(x, y)), \varepsilon) \text{ olur.}$$

**Tanım 3.1.10.**  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$   $X$  üzerinde yakın esnek metrik ve  $f : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  bir esnek dönüşüm olsun.  $\forall x, y \in A$  için  $\tilde{\mathcal{D}}_N(f(x, F(x)), f(y, F(y))) \preceq c \cdot \tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y)))$  olacak şekilde  $0 < c < 1$  olmak üzere bir pozitif  $c$  sayısı varsa  $f$  esnek büzülme olarak adlandırılır.

**Teorem 3.1.11.** Esnek büzülme dönüşümü  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  yakın esnek metrik uzayda esnek süreklidir.

**İspat:**  $f$ 'in esnek sürekli olduğunu göstermek için keyfi bir  $(x_0, F(x_0)) \in (F, A)$  noktasında esnek sürekli olduğunu gösterelim.  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$  alırsak;

$\forall (x, F(x)), (x_0, F(x_0)) \in (F, A)$  için  $\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (x_0, F(x_0))) < (\tilde{\pi}(x, x_0), \delta)$  iken

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N(f(x, F(x)), f(x_0, F(x_0))) &\preceq c \cdot \tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), (x_0, F(x_0))) \\ &\preceq c \cdot (\tilde{\pi}(x, x_0), \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(x, x_0), c \cdot \delta) \\ &= (\tilde{\pi}(x, x_0), \varepsilon) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $f, (x_0, F(x_0))$  noktasında esnek süreklidir.  $(x_0, F(x_0)),$

$(F, A)$ 'nin keyfi bir noktası olduğundan esnek süreklidir.

■

**Tanım 3.1.12.**  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$   $X$  üzerinde tam yakın esnek metrik uzay ve  $f : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  bir esnek dönüşüm olsun.  $f$  için bir esnek sabit küme  $f((x, F(x))) = (x, F(x))$  olacak şekilde  $(F, A)$  nın  $(x, F(x))$  şeklinde bir esnek alt kümesidir.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. Yakın Esnek Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

**Teorem 4.1.1. (Yakın Esnek Metrik Uzaylar için Banach Büzülme Teoremi)**

$((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$   $X$  üzerinde bir tam yakın esnek metrik uzay olsun ve  $f : ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  bir yakın esnek büzülme dönüşümü olsun. Bu taktirde  $f$  bir tek sabit esnek noktaya sahiptir.

**İspat:**  $(F_0, A)$ ,  $(F, A)$  'da keyfi bir esnek nokta olsun.  $\{(F_n, A)_{n=1}^\infty\}$  esnek dizisini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$(F_{n+1}, A) = f((F_n, A)) = f^{n+1}((F_0, A)) \quad (4.1)$$

$(n=0,1,2,\dots)$ .  $f$  esnek büzülme olduğundan, bu taktirde her  $n \geq 1$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, A), (F_n, A)) = \tilde{\mathcal{D}}_N((f(F_n, A)), (f(F_{n-1}, A)))$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, A), (F_n, A)) \leq \tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_{n-1}, A)) \quad (4.2)$$

olacak şekilde bir  $0 < c < 1$  mevcuttur.. İndiksiyonla  $n=0,1,2,\dots$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, A), (F_n, A)) \leq \lambda^n \tilde{\mathcal{D}}_N((F_1, A), (F_0, A)) \quad (4.3)$$

olduğu sonucuna varırız.

Herhangi bir  $m \geq n$  için,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_m, A)) &\leq (c_1, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_m, A))] \\ &\leq (c_1, r) \tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A)) + (c_1, r)(c_2, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, A), (F_{n+2}, A)) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+2}, A), (F_m, A))] \\ &\leq (c_1, r) \tilde{\mathcal{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A)) + (c_1, r)(c_2, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, A), (F_{n+2}, A)) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+2}, A), (F_m, A))] + \\ &\quad (c_1, r)(c_2, r)(c_3, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+2}, A), (F_{n+3}, A)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+3}, A), (F_m, A))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (c_1, r) (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A))) + \dots + \\
&(c_1, r) (c_2, r) \dots (c_{n-m+1}, r) [\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-2}, A), (F_{m-1}, A)) + \tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-1}, A), (F_m, A))] \\
&\leq \lambda^n (c_1, r) (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A))) + \dots + \\
&\lambda^{m-1} (c_1, r) (c_2, r) \dots (c_{n-m+1}, r) [\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-2}, A), (F_{m-1}, A)) + \tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-1}, A), (F_m, A))] \\
&\exists k \in N \quad (c_k, r) \geq (c_1, r) (c_2, r) \dots (c_{n-m+1}, r) \\
&\leq (c_k, r) [\lambda^n (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_n, A), (F_{n+1}, A))) + \dots + \\
&\lambda^{m-1} (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-2}, A), (F_{m-1}, A)) + \tilde{\mathfrak{D}}_N((F_{m-1}, A), (F_m, A)))] \\
&= (c_k, r) (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{m-1}) (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_1, A), (F_0, A))) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (c_k, r)^n (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_1, A), (F_0, A))) \\
\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_n, A), (F_m, A)) &\leq \frac{1}{1-\lambda} \cdot \frac{1}{1-(c_k, r)} (\tilde{\mathfrak{D}}_N((F_1, A), (F_0, A))) \tag{4.4}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahibiz. Şu halde  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  'un  $(F, A)$  da bir Cauchy esnek dizisi olduğunu gösterir.  $(F, A)$  tam yakın esnek metrik uzay olduğundan, bu taktirde  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty} (x, F(x))$  'e yakınsayacak şekilde  $(x, F(x)) \in (F, A)$  vardır.  $f$  esnek sürekli olduğundan, Tanım (3.1.5)'ten  $f((F, A)) f((x, F(x)))$  e yakınsar. Bununla birlikte  $\{(F_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin tanımına göre,  $f((F_n, A)) (x, F(x))$  e yakınsar.

$f((x, F(x))) = (x, F(x))$  olduğu elde edilir.  $(x, F(x))$  'in teklik özelliğini ispatlamak için  $(x, F(x)) \neq (y, F(y))$  ve  $f((y, F(y))) = (y, F(y))$  olacak şekilde başka bir  $(y, F(y)) \in (F, A)$  elemanının mevcut olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_N(f((x, F(x))), f((y, F(y)))) \\
&\preceq \lambda \tilde{\mathfrak{D}}_N((x, F(x)), (y, F(y)))
\end{aligned}$$

Bu takdirde yukarıdaki eşitsizlik  $\lambda > 1$  olduğunu gerektirir ki bu bir çelişkidir. ■

**Önerme 4.1.2. [29]**  $A \subseteq E$  parametrelerin bir kümesi  $(a, r)$  ve  $(b, r')$  iki esnek parametrik skaler olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $(a, r) < (b, r' + \varepsilon)$  ise bu takdirde

$$(a, r) \leq (b, r').$$

**Teorem 4.1.3.**  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N), X$  üzerinde tam yakın esnek metrik uzay olsun.

$T = (T_1, T_2): ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  her  $(a, F(a)) \in (F, A)$  için  $T(a, F(a)) = (T_1(a), T_2(F(a))) = (T_1(a), F(T_1(a)))$  olacak şekilde esnek sürekli bir dönüşüm olsun ve parametrik skaler değerli  $\varphi: (F, A) \rightarrow (A, \mathbb{R}^+)$  dönüşümü

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T((a, F(a))), (a, F(a))) < \varphi((a, F(a))) - \varphi(T(a, F(a))) \quad (4.5)$$

sağlasın. Bu takdirde her  $(a, F(a)) \in (F, A)$  için  $\{T^n((a, F(a)))\}$  bir esnek sabit noktaya yakınsar.

**İspat:**  $T = (T_1, T_2)$  ve  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  olsun. Şimdi  $T((a, F(a))) = (T_1(a), T_2(F(a)))$  ise

$T((a, F(a))) = (a_1, F(a_1))$  alalım. Bu takdirde

$$\varphi(T((a, F(a)))) = (\varphi_1(a_1), \varphi_2(F(a_1))) = (b_1, r_1).$$

Benzer bir yolla  $n = 1, 2, \dots$  için  $T^n((a, F(a))) = (a_n, F(a_n))$  yazarız. Şu hâlde

$$\varphi(T^n((a, F(a)))) = (\varphi_1(a_n), \varphi_2(F(a_n))) = (b_n, r_n).$$

(4.5) bağıntısından yararlanarak

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T((a, F(a))), (a, F(a))) + \varphi(T((a, F(a)))) < \varphi((a, F(a))) \quad (4.6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bundan dolayı önerme 4.1.2'den

$\varphi(T((a, F(a)))) < \varphi((a, F(a)))$  elde edilir. Bu  $\varphi(T^2((a, F(a)))) \leq \varphi(T((a, F(a))))$

olması anlamına gelir. Bu metodu devam ettirirsek,

$\varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) \leq \varphi(T^n((a, F(a))))$  elde ederiz. Bu ise  $\{\varphi(T^n((a, F(a))))\}$ 'nin

artan olması anlamına gelir ve böylece reel sayıların  $\{r_n\}$  dizisi artandır. Bundan

dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(T^n((a, F(a)))) = (b, r) \quad (4.7)$$

Her  $b \in \mathbb{R}$  olacak şekilde bir  $r \in \mathbb{R}$  vardır.

Açık olarak  $(b, r)$  negatif değildir. Bu takdirde  $m \geq n$  olmak üzere tüm  $n, m \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^m((a, F(a)))) \leq (c_1, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^{n+1}((a, F(a)))) \\
& + \tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}((a, F(a)), T^m((a, F(a))))] \\
& \leq (c_1, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^{n+1}((a, F(a))))] \\
& + (c_1, r) (c_2, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}((a, F(a)), T^{n+2}((a, F(a)))) + [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+2}((a, F(a)), T^m((a, F(a))))] \\
& \leq (c_1, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^{n+1}((a, F(a))))] + \dots + \\
& (c_1, r) (c_2, r) \dots (c_{n-m+1}, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}((a, F(a)), T^{n+2}((a, F(a)))) \\
& + [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+2}((a, F(a)), T^m((a, F(a))))] \\
& \exists k \in \mathbb{N} \text{ ile } (c_k, r) \geq (c_1, r) (c_2, r) \dots (c_{n-m+1}, r) \\
& \leq (c_k, r) [\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^{n+1}((a, F(a)))) + \dots + \tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}((a, F(a)), T^m((a, F(a))))] \\
& \leq (c_k, r) \sum_{i=n}^{m-1} \tilde{\mathcal{D}}_N(T^i((a, F(a)), T^{i+1}((a, F(a)))) \\
& \leq (c_k, r) [\varphi(T^n((a, F(a))) - \varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) + \varphi(T^{n+1}((a, F(a)))) - \varphi(T^{n+2}((a, F(a)))) \\
& + \dots + \varphi(T^{m-1}((a, F(a))) - \varphi(T^m((a, F(a))))] \\
& = (c_k, r) [\varphi(T^n((a, F(a))) - \varphi(T^m((a, F(a))))]
\end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}_N(T^n((a, F(a)), T^m((a, F(a)))) = (b, 0)$  . Bundan dolayı

$\{T^n((a, F(a)))\}$  bir esnek Cauchy dizisidir. Sonuç olarak

$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n((a, F(a))) = (x, F(x))$  olacak şekilde bir  $(x, F(x)) \in (F, A)$  vardır.

■

**Tanım 4.1.4. [27]**  $X$  üzerinde bir  $(F, A)$  esnek kümesini göz önüne alalım.

$c \in A$  olmak üzere her  $(c, F(c)) \in (F, A)$  elemanı  $(F, A)$ 'nin bir esnek noktası olarak adlandırılır.  $c \in A$  için  $x \in F(c)$  ise  $(c, x)$ 'in  $(F, A)$ 'ye ait olmasına gerek yoktur. Fakat ait oluyorsa  $(c, x)$ 'i bir esnek nokta olarak kabul edebiliriz.

**Tanım 4.1.5.**  $(F, A)$ 'nin  $X$  üzerinde bir esnek küme olduğunu kabul edelim.

$\tilde{\mathcal{D}}_N, (F, A)$  üzerinde yakın esnek metrik ve  $t$  bir pozitif reel sayı olsun.  $(e', t)$  yarıçaplı,  $(e, F(e))$  merkezli esnek yuvar

$$\{(c, F(c)) \in (F, A) : \tilde{\mathcal{D}}_N((c, F(c)), (e, F(e))) \preceq (\tilde{\varphi}(c, e) = (e', t))\}$$

kümesidir.  $(e, F(e))$  merkezli  $(e', t)$  yarıçaplı esnek yuvarı  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((e, F(e)), (e', t))$  ile gösteririz, ifadeyi biraz daha kısaltmak için sadece  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((e, F(e)), (e', t))$  yada  $\mathcal{B}_{(e', t)}(e, F(e))$  yazabiliriz.

**Teorem 4.1.6.**  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$ ,  $X$  üzerinde tam yakın esnek metrik uzay olsun ve  $T: \mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((a, F(a)), (a', r)) \rightarrow ((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$ ,  $0 < c < 1$  iken

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T((a, F(a)), (a, F(a)))) \prec (\lambda, k)(a', r) \quad (4.9)$$

olmak üzere bir esnek büzülme dönüşümü olsun. Bu takdirde  $T$ ,  $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((a, F(a)), (a', r))$  bir tek esnek sabit nokta kümesine sahiptir.

**İspat:**

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N(T(b, F(b)), (a, F(a))) &\leq (\lambda, k)[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(b, F(b)), (a, F(a))) + \tilde{\mathcal{D}}_N(T(a, F(a)), (a, F(a)))] \\ &\leq (\lambda, k)(\tilde{\mathcal{D}}_N(T(b, F(b)), (a, F(a)))) + (\lambda, r)(\tilde{\mathcal{D}}_N(T(a, F(a)), (a, F(a)))) \\ &\leq (\lambda, k)c\tilde{\mathcal{D}}_N((b, F(b)), (a, F(a))) + (\lambda, r)(1-r)(a', r_0) \\ &\leq (\lambda, k)c(a', r_0) + (\lambda, r)(1-c)(a', r_0) \\ &= (\lambda, k)(a', r_0) \end{aligned}$$

Şimdi bu eşitlikte görüldüğü gibi yakın esnek metrik uzay için Banach Sabit nokta teoreminden  $T$ 'nin  $\overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((a, F(a)), (a', r_0))} \subseteq \overline{\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{D}}_N}((a, F(a)), (a', r))}$  esnek yuvarında bir tek esnek sabit nokta kümesine sahip olduğunu elde ederiz.

■

**Teorem 4.1.7.**  $((F, A), \tilde{\mathcal{D}}_N)$ ,  $X$  üzerinde tam yakın esnek metrik uzay olsun ve keyfi  $(a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$  olacak şekilde bir  $a$  elemanı alalım.  $T: (F, A) \rightarrow (F, A)$  bir dönüşümü ve  $T(a, F(a)) = (T_1(a), T_2(F(a))) = (T_1(a), F(T_1(a)))$   $(a, F(a)) \in (F, A)$  olmak üzere

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T(a, F(a)), (b, F(b))) \leq \alpha(\lambda, k)(\lambda', k')(\tilde{\mathcal{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b)))) \quad (4.10)$$

$(a, F(a)), (b, F(b)) \in (F, A)$  için (4.10) eşitsizliği sağlıyorsa  $T$ 'nin tek bir esnek kümesi vardır

**İspat:**  $(a, F(a)) \in (F, A)$  olacak şekilde esnek kümeyi göz önüne alalım ve

$(a_n, F(a_n)) = T^n(a, F(a))$  için  $n \in \mathbb{N}$  olsun. Bu teoremi iki adımda ispatlayacağız.

**Adım1:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) = 0 \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

$T$  büzülme dönüşümü olduğu için

$$\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) = \tilde{\mathfrak{D}}_N(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a)))$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) &= \tilde{\mathfrak{D}}_N(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a))) \\ &\leq \alpha \tilde{\mathfrak{D}}_N(T^n(a, F(a)), T^{n+1}(a, F(a))) \tilde{\mathfrak{D}}_N(T^{n-1}(a, F(a)), T^n(a, F(a))) \\ &= \alpha [\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n-1}, F(a_{n-1})), T(a_n, F(a_{n+1}))) \tilde{\mathfrak{D}}_N(T(a_{n-1}, F(a_{n-1})), T^n(a_{n+1}, F(a_{n+1})))] \\ \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) &\leq \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n-1}, F(a_{n-1})), (a_n, F(a_n))). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bununla birlikte

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) &\leq \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n-1}, F(a_{n-1})), (a_n, F(a_n))) \\ \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) &\text{ dizisi azalandır ve} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) &= (b, r). \end{aligned}$$

$(b, r) \neq 0$  or  $r \neq 0$  olması kabulümüzle çelişir. Ve bununla birlikte

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_{n+2}, F(a_{n+2}))) &\leq \alpha [\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \\ &\quad \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1})))] \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde edilir.  $n \rightarrow \infty$  giderken,

$$(b, r) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))))(b, r)$$

bulunur.

$$\frac{1}{r}(b, 1) \leq \frac{1}{r}(\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1})))) \geq 1$$

bulunmasıyla bir çelişki elde edilir ve iddiamız doğrudur.

**Adım2:**  $(a_n, F(a_n))$  bir Cauchy esnek dizisi olduğunu iddia edelim. Her  $a \in A$  için  $t$

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) > (a, 0)$  bunun aksini kabul edelim. Yakın Esnek

Metrik tanımının 4. Özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) &= (\lambda, k) [\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) \\ &\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_m, F(a_m)))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) + (\lambda, k) \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_m, F(a_m))) \\
&\leq (\lambda, k) \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) + (\lambda, k)(\lambda', k') [\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_{m+1}, F(a_{m+1}))) \\
&\quad + \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{m+1}, F(a_{m+1})), (a_m, F(a_m)))] \\
&\leq (\lambda, k) \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) + (\lambda, k)(\lambda', k') \alpha [\tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))]
\end{aligned}$$

Bulunur ve

$$\begin{aligned}
&[1 - \alpha(\lambda, k)(\lambda', k') \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))] \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \\
&\leq (\lambda, k) \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_{n+1}, F(a_{n+1}))) + (\lambda, k)(\lambda', k') \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_{n+1}, F(a_{n+1})), (a_m, F(a_m)))
\end{aligned}$$

Elde edilir. Adım 1 ile birlikte aşağıdaki eşitsizlik

$$[1 - \alpha(\lambda, k)(\lambda', k') \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))] \leq (a, 0)$$

her  $a \in A$  için sağlanır. Bununla birlikte aşağıdaki şartlar sağlanır

- i)  $1 - \alpha(\lambda, k)(\lambda', k') (\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))) = 0$
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m))) = 0$  her  $a \in A$ .

$\alpha$  tanımdan kaynaklı olarak ii) şartı sağlanmaz. Bundan dolayı  $\alpha(\lambda, k)(\lambda', k') (\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))) = 1$  olur

$\alpha$  tanımından dolayı her  $a \in A$  için  $\alpha(\lambda, k)(\lambda', k') (\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathfrak{D}}_N((a_n, F(a_n)), (a_m, F(a_m)))) \rightarrow (a, 0)$  sağlanır

Tek eleman için,  $T$ 'den başka bir  $(b, F(b))$  elemanı alalım ve  $T(b, F(b)) = (b, F(b))$  eşitliğini sağlar.  $T$  üzerindeki büzülme koşulundan

$$\tilde{\mathfrak{D}}_N(T(a, F(a)), T(b, F(b))) \leq \tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) \leq \alpha \tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b)))$$

Elde edilir. Şu halde

$$\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) (1 - \alpha(\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b)))) \leq 0.$$

Böylece

$\tilde{\mathfrak{D}}_N((a, F(a)), (b, F(b))) = 0$  veya  $(1 - \alpha \tilde{\mathfrak{D}}_N(T(a, F(a)), T(b, F(b)))) = 0$  bulunur.  $\alpha$  nın özelliği ile yakın esnek metrik tanımından

$$T(b, F(b)) = (b, F(b)) = (a, F(a))$$

sonucuna ulaşılır. ■

**Tanım 4.1.8.**  $(X, d)$  bir genelleştirilmiş metrik uzay olsun.

$\alpha \rightarrow [0, \infty] \rightarrow [0, \frac{1}{2})$  artan dönüşüm olmak üzere herhangi bir  $x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \preceq \alpha(d(x, y))[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

ise  $T : X \rightarrow X$  dönüşümüne genelleştirilmiş Kannan büzülme dönüşümü denir [13].

**Teorem 4.1.9.**  $((F, E), \tilde{\mathcal{D}}_N)$  bir esnek yakın tam metriğin boş olmayan esnek kapalı alt kümesi  $(F, E)$  ve  $T : (F, E) \rightarrow (F, E)$  Kannan tipinde bir dönüşüm olsun  $K < 1$  için

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F(x)), T(y, F(y))) &\leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), T(x, F(x))) \\ &+ \tilde{\mathcal{D}}_N((y, F(y)), T(y, F(y)))] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlasın.  $a, b \in E$  ile birlikte  $0 \leq r < 1$  ve  $r' > 0$  olacak şekilde  $(a, r)$ ,  $(b, r')$  vardır. Keyfi  $(x, F(x)) \in (F, E)$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((u, F(x)), T(u, F(u))) \leq r[\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), T(x, F(x)))] \quad (4.13)$$

olacak şekilde  $(u, F(u)) \in (F, E)$  ve de

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((u, F(x)), T(x, F(x))) \leq r'[\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F(x)), T(x, F(x)))] \quad (4.14)$$

vardır. Bu iki eşitsizlik sağlanıyorsa  $T$  en az bir sabit noktaya sahiptir.

**İspat:** Keyfi bir esnek nokta  $(x_0, F(x_0)) \in (F, E)$  olsun.  $n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, E), (F_n, E)) \leq r[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(F_n, E), (F_n, E))] \leq rr'[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(F_0, E), (F_0, E))]$$

olduğundan

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T(F_{n+1}, E), (F_{n+1}, E)) \leq r[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(F_n, E), (F_n, E))]$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((F_{n+1}, E), (F_n, E)) \leq r'[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(F_n, E), (F_n, E))]$$

bu iki şart sağlanacak şekilde  $\{(F_n, E)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisini göz önüne alalım.  $(F, E)$ 'de  $\{F_n, E\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin bir Cauchy esnek dizi olduğunu görmek kolaydır.  $(F, E)$

tamlığından dolayı  $\lim_{x \rightarrow \infty} (F_n, E) = (v, F(v))$  olacak şekilde  $(v, F(v)) \in (F, E)$  mevcuttur.  $n \rightarrow \infty$  giderken aşağıdaki sol taraf sıfıra gider.

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F(v)), (v, F(v))) \leq c\tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F(v)), (x_n, F(x_n))) + \tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F(v)), (x_n, F(x_n))) \\
& \leq c\tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F(v)), (x_n, F(x_n))) + c.c[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F(v)), (x_n, F(x_n)))] \\
& \quad + \tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), (v, F(v))) \\
& \leq c.K\tilde{\mathcal{D}}_N([(v, F(v)), T(v, F(v))] + \tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), T(x_n, F(x_n)))) \\
& \quad + c.c\tilde{\mathcal{D}}_N(T(x_n, F(x_n)), (x_n, F(x_n))) + c.c\tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), (v, F(v))) \\
& \leq \frac{C(K+C')}{1-C.K}\tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), T(x_n, F(x_n))) + \frac{C.C'}{1-C.K}\tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), (v, F(v))) \\
& \leq \frac{C(K+C')}{1-C.K}a^n\tilde{\mathcal{D}}_N((x_0, F(x_0)), T(x_n, F(x_n))) + \frac{C.C'}{1-C.K}\tilde{\mathcal{D}}_N((x_n, F(x_n)), (v, F(v)))
\end{aligned}$$

Böylece

$$T(v, F(v)) = (v, F(v))$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.9.**  $((F, E), D)$  bir esnek metrik uzay ve bütün  $x, y \in X$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F_x), T(y, F_y)) \leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N((x, F_x), T(x, F_x)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((y, F_y), T(y, F_y))] \quad (4.14)$$

sağlanıyorsa  $K < \frac{1}{2}$  var olacak şekilde  $T : (F, E) \rightarrow (F, E)$  bir dönüşümdür.

Bu taktirde  $T$  bir tek sabit esnek  $(v, F_v) \in (F, E)$  noktasına sahiptir. Keyfi  $(x, F_x) \in (F, E)$  için  $\{T^n(x, F_x)\}$  iterasyon esnek dizisi  $(v, F_v)$  yakınsak ve  $n = 0, 1, 2, \dots$  için

$$\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}(x, F_x), (v, F_v)) \leq K \cdot \left(\frac{K}{K-1}\right)^n \tilde{\mathcal{D}}_N((x, F_x), T(x, F_x)) \quad (4.15)$$

bulunur.

**İspat:** Keyfi  $(x, F_x) \in (F, E)$  için  $(u, F_u) = T(x, F_x)$  olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{D}}_N((u, F_u), T(u, F_u)) &= \tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F_x), T(u, F_u)) \\
&\leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F_x), T(u, F_u)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((u, F_u), T(u, F_u))]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda kabulden  $\frac{K}{1-K} \leq 1$  olmak üzere

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((u, F_u), T(u, F_u)) \leq \frac{K}{1-K} \tilde{\mathcal{D}}_N((x, F_x), T(x, F_x))$$

sağlanır ve

$$\tilde{\mathcal{D}}_N((u, F_u), (x, F_x)) = \tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F_x), T(x, F_x)) .$$

Şimdi  $(x_0, F_{x_0}) \in (F, E)$  olmak üzere  $\{(x_{n+1}, F_{x_{n+1}}) = T(x_n, F_{x_n})\}$  dizisini tümevarımsal olarak tanımlayabiliriz ve  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x_n, F_{x_n}) = (v, F_v)$  ve  $T(v, F_v) = (v, F_v)$  bulunur.  $T$ 'nin bir başka sabit noktasının  $(z, F_z)$  olduğunu farz edelim. Bir sonraki adımda da

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{\mathcal{D}}_N((v, F_v), (z, F_z)) &= \tilde{\mathcal{D}}_N(T(v, F_v), T(z, F_z)) \\ &\leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N((v, F_v), T(v, F_v)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((z, F_z), T(z, F_z))] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ifadesinin çelişki olduğunu görürüz. Sonuç olarak  $T(v, F_v) \in (F, E)$  olacak şekilde tek bir tane sabit noktaya sahiptir.

Her bir  $(x, F_x) \in (F, E)$  için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}(x, F_x), T^n(x, F_x)) &\leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n(x, F_x), T^{n+1}(x, F_x)) + \tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n-1}(v, F_v), T^n(x, F_x))] \\ &\leq \frac{K}{K-1} \tilde{\mathcal{D}}_N(T^n(x, F_x), T^{n-1}(x, F_x)) \end{aligned}$$

bu eşitsizliği kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}(x, F_x), (v, F_v)) &\leq K[\tilde{\mathcal{D}}_N(T^n(x, F_x), T^{n+1}(x, F_x)) + \tilde{\mathcal{D}}_N((v, F_v), T(v, F_v))] \\ &= K[\tilde{\mathcal{D}}_N(T^{n+1}(x, F_x), T^n(x, F_x))] \\ &= K \cdot \left(\frac{K}{K-1}\right)^n \tilde{\mathcal{D}}_N(T(x, F_x), (x, F_x)) \end{aligned}$$

Tümevarım yöntemiyle  $n = 0, 1, 2, \dots$  olmak üzere ispatımız tamamlanmış olur.

**Teorem 4.1.10.**  $E_i$  parametre kümeleri ve  $(G, E_i)$ ,  $X$  üzerinde esnek kümeler olsun.  $\{(G, E_i)\}_{i=1}^p$  en az biri esnek kompakt bir esnek tam yakın metrik uzayın boş olmayan kapalı alt kümeleri ve  $(G, E_{p+1}) = (G, E_1)$  olmak üzere

$$f : \tilde{U}_{i=1}^p(G, E_i) \rightarrow \tilde{U}_{i=1}^p(G, E_i)$$

aşağıdaki şartları sağladığını farz edelim.

1)  $F(G, E_i) \tilde{\subseteq} (G, E_{i+1})$  için yani  $F(E_i) \tilde{\subseteq} (E_{i+1})$  ve bütün  $e \in F(E_i)$  için  $F(G(e)) \subseteq G(e)$

2) Her zaman  $(x, G(x)) \in (G, E_i)$  ve  $(y, G(y)) \in (G, E_i)$  olmak üzere  $D(F(x, G(x)), F(y, G(y))) \prec D((x, G(x)), (y, G(y)))$ .

$(1 \leq i \leq p)$  için  $(x, G(x)) \neq (y, G(y))$  ise bu taktirde  $F$  bir tek esnek sabit noktaya sahiptir.

**İspat:**

$(G, E_1)$  kompakt olduğunu kabul edelim ve  $(a, r)$  parametrik skaler olmak üzere

$$(a, r)D((G, E_1), (G, E_p)) = \inf\{D((x, G(x)), (y, G(y)))\}$$

ve

$$(x, G(x)) \in (G, E_1), (y, G(y)) \in (G, E_p)$$

olsun.

Kompaktlıkta  $(x_0, G(x_0)) \in (G, E_1)$  mevcuttur ve  $r \in \mathbb{R}$  ve  $a \in E_i$  için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D((x_0, G(x_0)), (G_n, E)) = (a, r)$$

olacak şekilde  $\{(G_n, E)\} \tilde{\subset} (G, E_p)$  bir dizisi vardır.  $(a, r) \succ (\pi(a, a), 0)$  olduğunu kabul edelim bu taktirde

$$\begin{aligned} \tilde{D}_N(F^{p+1}(x_0, G(x_0)), F^{p+1}(G_n, E)) \prec \dots \prec \tilde{D}_N(F(x_0, G(x_0)), F(G_n, E)) \\ \prec \tilde{D}_N((x_0, G(x_0)), (G_n, E)) \end{aligned}$$

$\{F^{p+1}(G_n, E)\}_{n=1}^{\infty} \subset (G, E_1)$  dizisi and  $(G, E_1)$  esnek kompakt olduğundan  $(z, F(z)) \in (G, E_1)$  yakınsaya bir alt diziye sahiptir. Bu teorem ve uzaklık fonksiyonunun sürekliliği ile birlikte

$$\tilde{D}_N((z, F(z)), F^{p+1}(G, E_1)) \leq (a, r)$$

elde edilir. Üstelik bununla birlikte

$$\tilde{D}_N(F^{p-1}(z, F(z)), F^{2p}(G, E_1)) \leq (a, r)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece  $F^{p-1}(z, F(z)) \in (G, E_p)$  and  $F^{2p}(G, E_1) \in (G, E_1)$  olduğundan çelişki elde ederiz. Böylece  $(a, r) = 0$  ve  $(G, E_1) \cap (G, E_p) \neq \emptyset$  elde ederiz. Bu yüzden (1) şartından  $(G, E_1) \cap (G, E_p) \neq \emptyset$  elde etmiş oluruz.

Şimdi aşağıdaki kümeleri göz önüne alalım

$$\begin{aligned} (G, E_1)' &= (G, E_1) \cap (G, E_2) \\ (G, E_2)' &= (G, E_2) \cap (G, E_3) \\ &\vdots \\ (G, E_p)' &= (G, E_p) \cap (G, E_1) \end{aligned}$$

Teoremin (1) şartına göre bu kümeler boş olmayan aynı zamanda kapalı kümelerdir ve  $(G, E_1)'$  aynı zamanda kompakttır. Teoremin (1) ve (2) şartlarını  $F$  sağlar ve  $\{A_i\}_{i=1}^p$  ailesi hipotezin tekrarıyla

$$(G, E_1)' \cap (G, E_2) \cap (G, E_3) \neq \emptyset$$

elde edilir

Adım adım ilerlersek

$$(G, E) : \bigcap_{i=1}^p (G, E_i) \neq \emptyset$$

elde ederiz.  $(G, E)$  kompakt ve  $F$  'nin  $(G, E)$  'ye kısıtlanması bir çelişki belirtir. Burada  $F$  'nin  $(G, E)$  'de tek bir sabit noktaya sahip olduğunu elde ederiz ve bu elde ettiğimiz  $F$  'nin herhangi bir sabit noktasının  $(G, E)$  'de bulunması teoremin (1) şartı ile çelişir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında esnek küme yapısı ve yakın metrik kullanılarak, esnek yakın metrik denilen ve  $\tilde{\mathcal{D}}_N$  ile gösterilen yeni bir metrik tanımlanmıştır. Böylece bu metrik uzayda bazı sabit nokta teoremlerini ispatlamaya yönelik altyapı oluşturması açısından esnek yakın metriğin kullanılmasıyla esnek dizi, esnek yakınsak dizi ve esnek Cauchy dizisi ve esnek büzülebilirlik gibi kavramlar ifade edilmiştir.

Halihazırda mevcut Banach, Kannan gibi bazı sabit nokta teoremleri esnek yakın metrik uzaylarda ispat edilmiştir. Bu teoremleri ispatlamaya yönelik bazı yardımcı tanım, teorem ve lemmalar da verilmiştir.

Aynı zamanda bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların dışında literatürde yer alan Suzuki, Meir Keeler, Chatterja gibi bir çok sabit nokta teoremi ifade ve ispat edilebilir. Ayrıca ortak sabit nokta teoremleri için kullanılan fonksiyonlara esnek sürekli olmaları veya esnek sürekli olmamaları gibi özellikler yüklenerek yeni araştırma kolları oluşturulabilir

## KAYNAKLAR

- [1] Molodtsov, D. Soft set theory-first result. Computers & Mathematics with Applications. 1999, 37, 19-31.
- [2] Maji, P. K., Biswas R., Roy A. R. Soft set theory. Computers & Mathematics with Applications. 2003, 45, 555-562.
- [3] Maji, P. K., Roy, A. R. and Biswas, R. An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl. 2002, 44, 1077-1083.
- [4] Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces. Computers & Mathematics with Applications. 2011, 61(7), 1786-1799.
- [5] Aygünoğlu, A., Aygün, H. Some notes on soft topological spaces, Neural Computing and Applications. 2012, 21, 113-119.
- [6] Varol, B.P., Aygün, H. On soft Hausdorff spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform. 5(1), 15-24 (2013).
- [7] Zorlutuna, İ., Akdağ, M., Min, W. K., Atmaca, S. Remarks on soft topological spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 2012, 3, 171-185.
- [8] Aras, Ç. G., Sönmez, A., Çakallı, H. On soft mappings. ArXiv, Computers & Mathematics with Applications. 2013, 1-12.
- [9] Aras, Ç. G., Poşul, H. On some new operations in probabilistic soft set theory. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016, 9(3), 333-339.
- [10] Zorlutuna, İ., Çakır, H. On continuity of soft mappings. Applied Mathematics and Information Science. 2015, 9(1), 403-409.
- [11] Brouwer, L. E. J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Mathematische Annalen. 1910, 71, 97-115.
- [12] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. Fund Math. 1922, 3, 133-181.
- [13] Kannan, R. Some results on fixed point. Bull. Cal. Math. Soc. 1968, 60, 71-76.
- [14] Kannan, R. Some results on fixed point II. Amer. Math. Monthly. 1969, 76, 405-408.
- [15] Caristi, J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Transactions of the American Mathematical Society. 1976, 215, 241-251.
- [16] Chatterjea, S.K. Fixed point theorems. Comptes rendus de l'Academie Bulgare des Sciences. 1972, 25, 727-730.

- [17] Reich, S. Fixed point of contractive functions. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*. 1972, 5, 26-42.
- [18] Hardy, G. E., Rogers, T.D. A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*. 1973, 16, 201-206.
- [19] Ćirić, L. B. Fixed points for generalized multivalued contractions. *Mathematicki Vesnik*. 1972, 9(24), 265-272.
- [20] Jungck, G. Commuting mappings and fixed points. *Amer. Math. Monthly*. 1976, 83, 261-263.
- [21] Jungck, G. Compatible mappings and fixed points. *Internat. J. Math. Math. Sci.* 1986, 9(4), 771-779.
- [22] Branciari, A. A Fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric space. *Publ. Math. Debrecen*. 2000, 57, 31-37.
- [23] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. Fixed point theorems in partially ordered rectangular metric spaces. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2016, 15(2), 1-9.
- [24] Mutlu, A., Yolcu, N., Mutlu, B. A survey on Kannan mappings in universalized metric space. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. 2016, 15(6), 1-6.
- [25] Das, S., Samanta, S. K. Soft real sets, soft real numbers and their properties, *J. Fuzzy Math*. 2012, 20, 551-576.
- [26] Das, S., Samanta, S.K. Soft metric. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. 2013, 6(1), 77-94.
- [27] Hosseinzadeh, H. Fixed point theorems on soft metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. 2017, 19(2), 1625-1647.
- [28] Majumdar, P., Samanta, S. K. On soft mappings, *Comput. Math. Appl.* 2010, 60, 2666–2672.
- [29] Wardowski, D. On a soft mapping and its fixed points, *Fixed Point Theory Appl.* 2013, 182.
- [30] Güler, A.C., Yıldırım, E.D., Ozbakır, O.B. A fixed point theorem on soft G-metric spaces. *J. Nonliyakın Sci. Appl.* 2016, 9, 885–894.
- [31] Yazar, M. I., Aras, Ç.G., Bayramov, S. Fixed point theorems of soft contractive mappings. *Filomat*. 2016, 30(2), 269-279.
- [32] Abbas, M., Murtaza, G., Romaguera S. On the fixed point theory of soft metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.* 2016, 17.

- [33] Altıntaş, İ., Şimşek, D., Taşköprü, K. Topology of Soft Cone Metric Spaces. JAIIP Conference Proceeding. 2017, 1880(1), 030006. <https://doi.org/10.1063/1.50006056>
- [34] Şimşek, D., Altıntaş, İ., Ersoy, S., Abdullayev, F., İmaşkıızı, M., Taşköprü, K., Kesik, D., Ablayeva, E., Oğul, B., Cemşitov, N. An introduction to soft cone metric spaces and some fixed point theorems. Manas Journal of Engineering(MJEN). 2018, 6(1), 59-89.
- [35] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir, K. Soft fixed point theorems for near soft metric spaces, 2. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Abstract Book pp. 103 (2018).
- [36] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir K., New Results In Near Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. 2019. Proceeding Book, pp. 349-353 (2019)
- [37] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir K., On Kannan Type Mappings in Near Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. 2019. Proceeding Book, pp. 344-348 (2019)
- [38] Kirk W. A., Srinivasan P. S., Veermani P., Fixed Point Theory, Volume 4, No. 1, 2003, 79-89
- [39] Geraghty M. A Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 40, No. 2 (Oct., 1973), pp. 604-608 (5 pages)
- [40] Kirk W. A Contraction mappings and extensions; in Handbook of Metric Fixed Point Theory , Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 2001; pp.1-34
- [41] Kurepa D. Tableux ramifies d'ensembles, Espaces pseudo-distancies. Comptes Rendus Mathematique 1934, 198 1563-1565.
- [42] Fagin R., Kumar R. and Sivakumar D., Comparing Top k Lists, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Volume: 17, Issue 1, 2003,134-160.
- [43] Granas, A., Dugundji, J. Fixed Point Theory. Springer. 2002, 690.

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : KAAN ÖZDEMİR

Doğum Yeri ve Yılı :

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta :

### Eğitim Durumu

Lise : Hoca Ahmed Yesevi Anadolu Lisesi, 2007

Lisans :Dokuz Eylül Üniversitesi , Matematik Bölümü, 2014

### Yayınları

[1] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir, K. Soft fixed point theorems for near soft metric spaces, 2. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. Abstract Book pp. 103 (2018).

[2] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir K., New Results In Near Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. 2019. Proceeding Book, pp. 349-353 (2019)

[3] Öztunç, S., Mutlu, A., Özdemir K., On Kannan Type Mappings in Near Soft Metric Spaces, 3. International Students Science Conference, İzmir/Turkey. 2019. Proceeding Book, pp. 344-348 (2019)