



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİBRİT ÇATISINA GÖRE BEZİER EĞRİLERİ

Fatma BAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz -2021
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



**T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Fatma BAŞ

HİBRİT ÇATISINA GÖRE BEZİER EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Danışman
Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU**

**Temmuz-2021
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL ve ONAYI

Fatma BAŞ tarafından hazırlanan “**Hibrit Çatısına göre Bezier Eğrileri**” adlı tez çalışması 26/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Prof. Dr. Talat KÖRPINAR
(Başkan)

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

.....

Doç. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
(Üye)

Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

.....

Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU
(Danışman)

Muş Alparslan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
Matematik Eğitimi ABD

.....

Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 03/08/2021 Tarih ve 18/4 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Fatma BAŞ

26/07/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİBRİT ÇATISINA GÖRE BEZİER EĞRİLİLERİ

Fatma BAŞ

**Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Muhsin İNCESU

Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmanın giriş kısmı verilmiştir. İkinci bölümde, konu hakkında kaynak araştırması yapılmıştır. Üçüncü bölümde, konu ile ilgili temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca 3. bölümde B-spline ve NURBS eğrilerinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Bezier eğrilerinin Hibrit vektör alanları ve eğrilikleri verilmiştir. Son bölümde ise sonuçlar verilmiştir.

2021, 71 Sayfa

Anahtar Kelimeler: NURBS eğrileri, Hibrit çatı, B-spline eğrileri, Frenet çatı, Eğrilik.

ABSTRACT

MS THESIS

THE BEZIER CURVES ACCORDING TO HYBRID FRAME

Fatma BAŞ

**Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics**

Advisor: Asist. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

This work has consisted of five chapters. The first part of the study has been given. In the second part, a resource survey has been done on the subject. In the third chapter, basic definitions and concepts related to the subject are given. In addition Frenet vector fields and curvatures B-spline and NURBS curves are given in the third chapter. In the fourth chapter Hybrid vector fields and curvature of Bezier curves are given. Results have been given in the final section.

2021, 71 Pages

KeyWords: NURBS curves, Hybrid Frame B-spline curves, Frenet frame, Curvatures.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygı değer hocam Dr. Öğr. Üyesi Muhsin İNCESU'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Fatma BAŞ
MUŞ-2021



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM	3
3.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	3
3.2 Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrileri	8
3.2.1 Bezier eğrilerinde türev kavramı	8
3.2.2 Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması	9
3.2.3 Bezier eğrilerinde Sub-division.....	9
3.2.4 Parçalı Bezier eğrisi	10
3.2.5 Rasyonel Bezier eğrileri	12
3.2.6 Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması	14
3.2.7 Rasyonel Bezier eğrilerinin türevleri	14
3.3. B-Spline Eğrileri	15
3.3.1 B-Spline Çeşitleri	17
3.3.2 De Boor algoritması	20
3.3.3 B-spline eğrilerinin türevleri	22
3.3.4 NURBS eğrisinin türevi	23
3.3.5 Rasyonel De Boor algoritması	23
3.3.6 $t=0$ İçin Başlangıç Noktasında Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü	24
3.3.7 $t_0 \in [0,1]$ İçin Keyfi Bir Noktada Frenet Formülü ve Bezier Eğrisinin Eğrilikleri	26
3.3.8 Açık B-Spline Eğrilerinde Frenet Çatısı	28
3.3.9 Açık Nurbs Eğrilerinde Frenet Çatısı ve Eğrilikleri	36
3.3.10 $t=1$ Noktasındaki Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü.....	46

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	48
4.1 Hibrit Çatısına göre Bezier Eğrileri	48
5. SONUÇ	67
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	71



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

R^3	: Üç boyutlu Öklid uzay
b_i	: i. kontrol noktası
w_i	: i. kontrol noktasına ait ağırlık
$B_i^n(t)$	: Bernstein taban polinomu
$N_{i,d}(t)$	: B-spline taban polinomu
$R_{i,d}(t)$	: Rasyonel B-spline taban polinomu
$\kappa(s)$	: Eğrilik
$\tau(s)$	: Burulma (Torsion)
$\mathfrak{B}(t)$	: Açık NURBS eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1. Hibrit çatı	7
Şekil 3. 2. Bezier Eğrisinde Sub-division.....	10
Şekil 3.3 (a) $(t, f(t))$ 'nin grafiği (b) $f'(t)$ 'nin grafiği	11
Şekil 3.4. (b) ağırlıkları 1,0.6,2 ve (a) ağırlıkları 1,1,2 ile kontrol noktaları $(-1,0)$, $(2,1)$, $(4,-1)$ olan rasyonel Bezier eğrisi	13
Şekil 3.5. Uzaysal rasyonel Bezier eğrisi.....	13

1. GİRİŞ

Geometrik modellemelerde amaç bir cismin ya da nesnenin matematiksel yapısını oluşturup bilgisayarda çeşitli programlar ve algoritmalar beraberinde şekiller ile görselleştirilmesidir. Bilgisayarların her geçen gün gelişmesiyle de beraber bu modellemelerde optimum seviyelere doğru hareket etmektedirler. Matematik modellemelerle elde edilen tasarımların alt yapısını parametrik eğri ve yüzeyler oluşturmaktadır. Bunlardan; Bezier yüzeyleri ve eğrileri, B-spline yöntemleri, NURBS eğrileri uygulaması yaygın olarak kullanılan önemli bir alana sahiptir.

Bernstein polinomlarıyla tanımlanan Bezier yüzeyleri ve eğrilerine Pau De-Casteljau ve Pierre Bezier öncülük etmiştir. Bu eğriler ve yüzeyler otomotiv sanayisinden uçak sanayisine, mühendislikten tıp alanına kadar geniş yelpazede kullanıldığından sürekli geliştirilerek çalışmaya devam etmektedir. Endüstriyel tasarımlarda kullanılan Spline' lar noktalar kümesi tarafından belirlenen düzgün bir eğri oluşturmak için kullanılan esnek bir şerittir. Çok sayıda ağırlıklar şerit boyunca yayılmasıyla sabit konumda duran bir eğri oluşturmaktadırlar. Yine modellemelerin alt yapısında kullanılan NURBS yüzeylerinin ve eğrilerinin invaryantlarının tanımlanmasıyla yüzey ve eğrilerin önemli özelliklerinden Gauss eğriliği, burulma, asal eğrilik, eğrilik ve daha fazla yapı tanımlanmaktadır. En temel örnek olarak bir arabanın dizaynında rüzgar direncinden yakıt tüketimine kadar etkili olan aerodinamik kavisler, kıvrımlar bu eğri ve yüzeylerin sahip olduğu özellikler ile tanımlanmaktadırlar.

Diferansiyel geometrinin çalışma alanında her daim önemli olan eğrilerin farklı uzaylarda ve yeni çatılara göre özellikleri incelenmektedir. Eğrileri daha iyi karakterize edebilmek için Frenet çatısına alternatif olarak Bishop çatısı (Bishop, 1975), Quasi çatı (Dede, Ekici ve Güven, 2018) ve Hibrit çatı (Arbind, Srinivasa, Reddy, 2018) son zamanlarda çalışmaktadırlar.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Eğriler diferansiyel geometride sürekli ilgi alanı olmakla beraber geniş bir çalışma alanına sahiptir. En yaygın olarak eğrilerde Frenet çatısı kullanılmakla beraber farklı yeni çatılar da oluşturulmuştur. Bunlardan Bishop çatısı (Bishop, 1975) eğrinin teğet vektörü değişmeden diğer normal ve binormal vektörlerinin bir açı ile döndürülmesiyle paralel öteleme çatı olarak adlandırılan farklı bir çatı oluşturulmuştur. Literatürde pek çok eğri Bishop çatısına göre incelenmiştir (Yılmaz ve Turgut, 2010; Bükçü ve Karacan, 2008; Bükçü ve Karacan, 2009; Körpınar, Asil ve Baş, 2011; Körpınar ve Demirkol, 2017; Yılmaz ve Turgut, 2010).

Matematiksel modelleme ve dizaynda önemli bir yeri olan Bernstein polinom eğrileriyle tanımlanan Bezier eğrileriyle pek çok çalışma yapılmıştır. Samancı, Çelik ve İncesu (2015), Bezier eğrilerini Bishop çatısına göre incelemişlerdir. Evren (2020), Bertrand NURBS eğrilerini tanımlamıştır. Samancı Kuşak (2018), Bezier eğrilerini farklı bir uzayda alıp Minkowski Uzayında timelike rasyonel Bezier eğrilerini çalışmıştır. Ayrıca bu eğriler literatürde (Farouki, Szafran ve Biard, 2009; Hoschek, 1992; İncesu ve Gursoy, 2004; İncesu, 2003; İncesu ve Kiren, 2008; Juhász, 1999; Liu, ve Wang 2002; Piegl ve Tiller, 1999 tarafından çalışılmışlardır. Son zamanlarda ise Kılıçoğlu ve Şenyurt (2020), Kübik Bezier eğrisinin involütünü çalışmıştır. Ayrıca Abdel-Aziz, vd., 2021, Frenet çatı kullanılarak tıbbi görüntü rekonstrüksiyonunu iyileştirmek için Bezier eğrileri tanımlanmıştır.

Bishop çatısının dışında son zamanlarda q-çatı (quasi); q-normal vektörün izdüşüm vektörü ile teğet vektörün vektörel çarpımı ile tanımlanmıştır (Dede, vd., 2018). Çalışmamızda kullandığımız çatı ise Bishop çatısının belli bir açı ile döndürülmesiyle elde edilen Hibrit çatısıdır. Bu çatı ise mühendislikte malzeme alanında modelleme oluşturulurken kullanılmıştır. Bir uzay eğrisinde Hibrit çatı kullanılarak ince ve kalın kavisli çubukların veya boruların büyük deformasyonunu analiz etmek için model sunulmuştur (Arbin ve Reddy, 2018; Arbin ve Reddy, 2019).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm içerisinde araştırma bulguları ve tartışma kısmında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1 V bir vektör uzay $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de bu vektör uzayının bir alt kümesi olsun.

Eğer $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ olduğunda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalerinin hepsi sıfır oluyorsa $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine lineer bağımsızdır denir.

Tanım 3.2 V bir vektör uzay $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ olsun. Eğer $\forall u \in V$ için $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ oluyorsa $(a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R})$ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V uzayını gerer denir.

Tanım 3.3 V bir vektör uzay ve $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ için

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ lineer bağımsız
2. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ V - yi gererse

o zaman $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine V nin bir bazı denir.

Tanım 3.4 V bir vektör uzay olsun. $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow K$ fonksiyonu

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$$

1. Pozitif tanımlı
2. Bi-lineer (İki değişkenli)
3. Üçgen eşitsizliği

sağlarsa $\langle, \rangle$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu denir. $(v, \langle, \rangle)$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

Tanım 3.5 Bir vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $\forall p \in A$ ve $v \in V$ olmak üzere (p, v) ve V_p şeklinde ifade edilen vektöre A afin uzayının bir p noktasındaki tanjant vektörü denir.

Tanım 3.6 n -boyutlu Öklid uzay E^n ve I, R nin irtibatlı açık alt cümlesi olmak üzere,

$$\gamma: I \subset R \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferansiyellenebilir ise $\alpha(t)$ cümlesine E^n de bir eğri ve $t \in I$ değişkenine de eğrinin parametresi denir (Gray, 1998).

Tanım 3.7 M eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Bu durumda $\Psi = \{\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \gamma^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $(V_1, V_2, \dots, V_r)$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $(V_{1(m)}, V_{2(m)}, \dots, V_{r(m)})$ ye $m \in M$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı denir. Her bir V_i $1 \leq i \leq r$ ye Frenet vektörü denir. (Gray, 1998).

Tanım 3.8 $\gamma: I \subset R \rightarrow E^3$ eğrisi, $t \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \gamma'(t), \quad (3.1)$$

Eğrinin binormal vektör alanı

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|} \quad (3.2)$$

ve eğrinin asli normal vektör alanı

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}(t) \wedge \mathbf{B}(t) \quad (3.3)$$

olmak üzere bu vektörlerden oluşan $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ sistemine Frenet 3- ayaklısı denir. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ frenet 3- ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Gray, 1998).

Tanım 3.9 M eğrisi (I, γ) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $s \in I$ ya karşılık gelen $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna

$$k_i: I \rightarrow R, 1 \leq i \leq r$$

$$s \rightarrow k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i - yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\gamma(s)$ noktasında M nin i -yinci eğriliği denir (Gray, 1998).

Tanım 3.10 $\gamma: I \subset R \rightarrow E^3$

$$s \rightarrow \gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \gamma_3(s))$$

s yay parametresi ile verilen bir eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun.

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s),$$

$$\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s)\mathbf{N}(s),$$

denklemlerine Frenet formülleri denir (Gray, 1998).

Tanım 3.11 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi için

$$\kappa(s) = \|\alpha''(t)\|$$

değerine $\gamma(s)$ eğrisinin s - noktasındaki eğriliği denir (Carmo, 1976).

Tanım 3.12 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi yay parametresi ile verilmiş olsun. $\gamma''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\tau(s)$ sayısına $\gamma(s)$ eğrisinin s - noktasındaki burulması denir (Gray, 1998).

Tanım 3.13 Bishop çatısı veya paralel öteleme çatısı bir eğrinin Frenet çatısında $\mathbf{T}$ vektörünü değiştirmeden diğer asli normal ve binormal vektörlerini belli bir açı ile döndürülerek elde edilir. Bishop çatısının türev denklemleri

$$\mathbf{T}'(s) = k_1(s)\mathbf{M}_1(s) + k_2(s)\mathbf{M}_2(s),$$

$$\mathbf{M}_1'(s) = -k_1(s)\mathbf{T}(s),$$

(3.5)

$$\mathbf{M}_2'(s) = -k_2(s)\mathbf{T}(s),$$

eşitlikleri ile verilir. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2\}$ Bishop üçlüsü birim vektörler olmak üzere k_1 ve k_2 ye eğrinin Bishop eğrilikleri denir. Bishop ve Frenet çatıları arasında

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca

$$\alpha(s) = \arctan \frac{k_2}{k_1},$$

$$\tau(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğinden

$$\alpha = \alpha_0 + \int \tau ds.$$

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

dir. Bishop eğrilikleri

$$k_1 = \kappa \cos\alpha \text{ ve } k_2 = \kappa \sin\alpha,$$

eşitlikleriyle tanımlanır (Bishop, 1975).

Tanım 3.14 Uzay eğrisi boyunca q - çatısı (quasi)

$$t = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}, n_q = \frac{t \wedge k}{\|t \wedge k\|}, b_q = t \wedge n_q$$

ile tanımlanır. Burada k projeksiyon vektörüdür ve quasi çatısı

$$\begin{bmatrix} t' \\ n'_q \\ b'_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_q \\ b_q \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

denklemleri ile verilir. $\mathbf{N}$ ve n_q arasındaki açı φ olmak üzere q-eğrilikler ile Frenet eğrilikleri arasında

$$k_1 = \kappa \cos \varphi,$$

$$k_2 = -\kappa \sin \varphi,$$

$$k_3 = -d\varphi + \tau,$$

bağıntıları vardır (Dede, Ekici ve Güven, 2018).

Tanım 3.15 Uzay eğrisi boyunca $(\mathbf{T}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ Hybrid çatısı, $(\mathbf{T}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ Bishop çatısının döndürülmesiyle

$$\mathbf{B}_1 = \cos \beta(s) \mathbf{M}_1 + \sin \beta(s) \mathbf{M}_2,$$

$$\mathbf{B}_2 = -\sin \beta(s) \mathbf{M}_1 + \cos \beta(s) \mathbf{M}_2,$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Buradan Hybrid çatısı ile Bishop çatısı arasında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta(s) & \sin \beta(s) \\ 0 & -\sin \beta(s) & \cos \beta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

eşitliğiyle verilir ve Hybrid çatısının türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{B}'_1 \\ \mathbf{B}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\kappa}_2 \\ -\tilde{\kappa}_1 & 0 & \tilde{\kappa}_3 \\ -\tilde{\kappa}_2 & -\tilde{\kappa}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

denklemleriyle verilir. Burada

$$\tilde{\kappa}_1 = \bar{\kappa}_1 \cos \beta(s) + \bar{\kappa}_2 \sin \beta(s),$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\bar{\kappa}_1 \sin \beta(s) + \bar{\kappa}_2 \cos \beta(s), \quad (3.9)$$

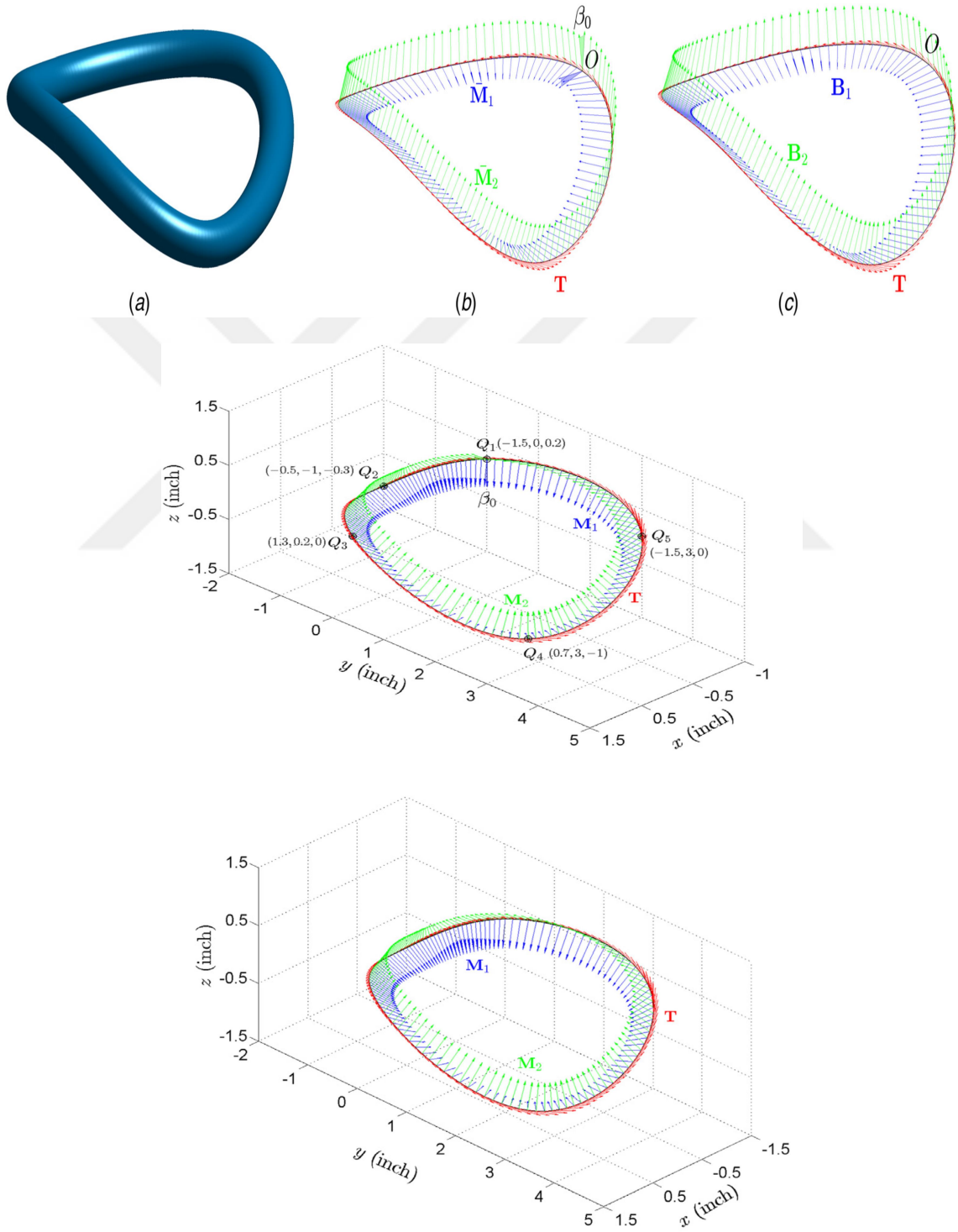
$$\tilde{\kappa}_3 = \beta'$$

ve

$$\beta_0 = (\sum_i \alpha_{0_i} + \oint \tau ds) \bmod 2\pi = 0$$

$$\beta(s) = -\beta_0(s) / \oint ds,$$

ile verilir (Arbind, Srinivasa, Reddy, 2018).



Şekil 3.1. Bishop çatı (b), Hibrit çatı (c) (Arbind, Srinivasa, Reddy, 2018)

3.2 Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrileri

Tanım 3.16 R^3 uzayında genel Bezier eğrisi, Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olarak verilen ve başlangıç noktası b_0 , bitim noktası b_n olan n . dereceden bir polinom eğridir. Genel Bezier eğrisi, vektörel formda,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1] \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır. Burada $B_i^n(t)$ fonksiyonları

$$B_i^n(t) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^i, & 0 \leq i \leq n \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde verilen Bernstein taban fonksiyonlarıdır. $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ifadeleri de Binom katsayılarıdır ve $\binom{n}{i}$ gösterilir.

Teorem 3.17 Bernstein polinomları aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1, \quad t \in [0,1]$
- 2) $B_i^n(t) \geq 0, \quad t \in [0,1]$
- 3) $B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1-t)$
- 4) $B_i^n(t) = (1-t)B_{i-1}^{n-1}(t) + B_{i+1}^{n-1}(t)$

3.2.1 Bezier eğrilerinde türev kavramı

Bezier eğrilerinde türevler, Bernstein polinomlarının türevlerinden elde edilmektedir.

Teorem 3.18 $0 \leq t \leq n$ için $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ Bernstein taban fonksiyonlarının

birinci ve ikinci türevleri

$$1. \quad B_i^{n'}(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

ya da

$$B_i^{n'}(t) = \frac{i-n}{t(1-t)} B_i^n(t)$$

$$2. \quad B_i^{n''}(t) = n(n-1)[B_i^{n-2}(t) - 2B_{i-1}^{n-2}(t) + B_{i-2}^{n-2}(t)]$$

ya da

$$B_i^{n''}(t) = \left(\frac{i(i-1) - 2i(n-1)t + n(n-1)t^2}{t^2(1-t)^2} \right) B_i^n(t)$$

tanımlanır.

3.2.2 Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması

De Casteljau algoritması, bir Bezier eğrisinin $t_0 \in [0,1]$ noktasındaki $B(t_0)$ değerini hesaplamak için geliştirilmiş bir algoritmadır. Ayrıca verilen bir Bezier eğrisinin iki ayrı parçaya ayrılmasında da yine sıklıkla bu algoritma kullanılmaktadır.

Kontrol noktaları b_0, b_1, b_2 ve b_3 olan bir kübik Bezier eğrisi durumunda belirli bir parametre değeri için $t \in [0,1]$ de casteljau algoritması öz yineleme formülü $j = 1, 2, 3$ ve $i = 0, \dots, 3-j$ için

$$\begin{cases} b_i^0 = b_i \\ b_i^j = (1-t)b_i^{j-1} + tb_{i+1}^{j-1} \end{cases} \quad (3.11)$$

ile ifade edilir.

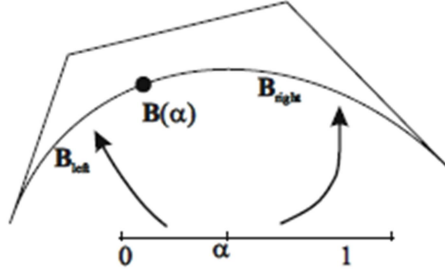
Formül belirtilen t değeri için $b_0^3 = B(t)$ için üçgen şeklinde değer kümesi (3.12)'nu üretir.

$$\begin{array}{cccc} b_0^0 & b_1^0 & b_2^0 & b_3^0 \\ b_0^1 & b_1^1 & b_2^1 & \\ b_0^2 & b_1^2 & & \\ b_0^3 & & & \end{array} \quad (3.12)$$

3.2.3 Bezier eğrilerinde Sub-division

Bir Bezier eğrisi genellikle $[0,1]$ aralığında tanımlanır ve $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$ ile verilir. Bazen eğrinin yalnızca bir kısmı ilgi çekicidir. Örneğin şekil 2'de gösterildiği gibi $t = \alpha$ parametre değerinde $[0, \alpha]$ ve $[\alpha, 1]$ aralıklarında $B_{sol}(t)$ ve $B_{sağ}(t)$ ile gösterilen iki eğri parçasına ayrıldığını varsayalım. Çünkü $B_{sol}(t)$ ve $B_{sağ}(t)$ $[0,1]$ aralığında Bezier formunda temsil edilebilen polinom eğrileridir. $B_{sağ}(t)$ ve $B_{sol}(t)$ 'nin kontrol noktalarını belirlemeyi teorem 3.2.5 gösterecek. $t = \alpha$ ile $B(t)$ için de casteljau algoritmasını uygulamak yeterlidir. Teorem bir kübik bezier eğrisi için $B_{sağ}(t)$ 'nin kontrol noktaları $b_0^3, b_1^2, b_2^1, b_3^0$ 'dır ve $B_{sol}(t)$ 'in kontrol noktaları $b_0^0, b_1^1, b_2^2, b_3^3$ olduğunu ima eder. Alt bölüm eğri ölçüsüne fazladan özgürlük verebilmek için ekstra kontrol

noktaları yaratmanın bir yoludur. Örneğin eğrinin sol bölümü bozulmamış olabilir oysaki eğrinin diğer bölümü değişmiştir.



Şekil 3.1. Bezier Eğrisinde Sub-division

3.2.4 Parçalı Bezier eğrisi

n dereceli bir Bezier eğrisinin $n + 1$ kontrol noktası vardır. Eğrinin şekli ile kontrol poligonunun şekli arasında sadece zayıf bir ilişki olduğu için yüksek dereceli eğriler genellikle kullanılmaz. Ayrıca noktaların değerlendirilmesi gibi işlemler çok sayıda aritmetik işlem gerektirir ve bu nedenle hesaplama hataları riski artar. Aksine düşük dereceli eğrilerin bir kaç kontrol noktası vardır ve bu nedenle sınırlı bir eğri şekli aralığı üretirler. Eğri derecesini arttırmadan şekil aralığını genişletmek için bir parça Bezier eğrisi adı verilen tek bir sürekli eğri oluşturmak için bir dizi eğri Bezier eğrisi uçtan uca birleştirilebilir. Uygulamada, eğrilerin birleşimlerinin pürüzsüz(düzgün) olması gerekir.

Teorem 3.19 $[t_{min}, t_{max}]$ aralığı üzerinde tanımlanan kontrol noktası $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile n . dereceden rastgele aralıklı bir $B(t)$ Bezier eğrisi

$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(\frac{t-t_{min}}{t_{max}-t_{min}})$ ile verilir; burada $B_{i,n}$ n . dereceden Bernstein temel fonksiyonlarını gösterir. $B(t)$ rastgele aralıklı Bezier eğrisi, sıradan Bezier eğrisinin $t \in [0,1]$ olmak üzere $\hat{B}(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_{i,n}(t)$ değerinin yeniden listelenmesidir. $\hat{B}(t)B(t)$ 'nin normalleştirilmesi olarak söylenir.

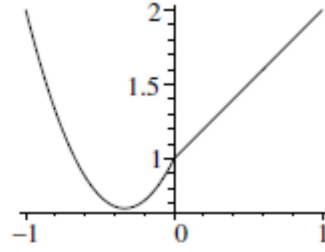
Örnek 3.20 $(x(t), y(t) = (t, f(t)))$ eğrisini düşünelim; burada

$$f(t) = \begin{cases} 3t^2 + 2t + 1, & \text{eğer } t \leq 0 \text{ ise} \\ t + 1, & \text{eğer } t > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

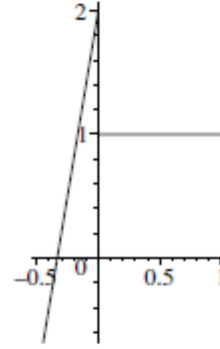
Eğri şekil 3.3.(a)'da gösterilmektedir. Herhangi bir polinom fonksiyonu C^∞ olduğu için, $x(t) = t$ her yerde C^∞ ve $y(t) = f(t)$ muhtemelen $t = 0$ hariç olmak üzere her yerde C^∞ 'dur, ikinci polinom fonksiyonunun ilk olarak f' 'nin tanımında $f(t)$ 'nin C^0 olduğu kolayca kontrol edilir. $f(t)$ 'nin C^1 olup olmadığını belirlemek için ilk türevini

$$f'(t) = \begin{cases} 6t + 2, & \text{eğer } t \leq 0 \text{ ise} \\ 1, & \text{eğer } t > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dikkate almak gereklidir.



Şekil 3.3. (a) $(t, f(t))$ 'nin grafiği



Şekil 3.3. (b) $f'(t)$ 'nin grafiği

$f'(t)$ 'nin grafiği Şekil 3.3. (b) de gösterilmektedir. f 'nin C^1 olmadığı açıktır; geometrik olarak $f'(t)$ 'nin grafiği $t = 0$ da kırılıyor. Dolayısıyla $(t, f(t))$ bir C^0 -sürekli eğridir, ancak C^1 sürekli eğri değildir. Bu örnekteki parçalı eğri, $(t, t + 1)$ ve $(t, 3t^2 + 2t + 1)$ iki polinom eğrisinin birleşimidir. $p = 2$ ve $q = 1$ derece eğrileri için $k = \min(2, 1) = 1$ olduğu için mümkün olan maksimum süreklilik C^1 ; örnek sadece C^0 -sürekliliğe ulaşmaktadır. $P(t)$, tanım 3.27'de ifade edildiği gibi $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, r - 1$) aralıklarında tanımlanan Bezier eğrileri $B_j(t)$ 'yi içeren $I = [a, b]$ üzerinde tanımlanan bir parçalı Bezier eğrisi olduğunu varsayalım.

$P(t)$ 'nin koordinat fonksiyonları parçalı polinom fonksiyonları olduğundan $P(t)$ kırılma noktası olmayan tüm parametre değerlerinde C^∞ dur. $B_j(t)$ 'nin n dereceli ve $b_0^j, \dots, b_{n_j}^j$ kontrol noktaları olduğunu varsayalım. O halde $P(t)$, $t = t_j$ 'de süreklidir ancak ve ancak $\lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) = P(t_j)$. (Bu, sürekli fonksiyonlar için standart bir ölçüttür, bkz. (Smith, G., 1998). Fakat

$$\lim_{t \rightarrow t_j^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^+} B_j(t) = b_0^j$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow t_j^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow t_j^-} B_{j-1}(t) = b_{n_{j-1}}^{j-1}$$

Böylece, $P(t)$, $t = t_j$ 'de süreklidir ancak ve ancak

$$P(t_j) = b_{n_{j-1}}^{j-1} = b_0^j.$$

Dolayısıyla, $B_{j-1}(t)$ 'nin son kontrol noktası $B_j(t)$ 'nin ilk kontrol noktasına eşit olmalıdır. Bu nedenle $P(t)$ süreklidir ancak ve ancak $j = 1, 2, \dots, r - 1$ (her değeri) için

$$b_{n_{j-1}}^{j-1} = b_0^j \text{ dir.}$$

3.2.5 Rasyonel Bezier Eğrileri

İndirgenemez koniklerin üç türü olduğu gösterilmiştir (Marsh, 1999), yani hiperboller, parabol ve elipsler. Parabol polinom fonksiyonları ile parametrize edilebilirken, hiperboller ve elipsler rasyonel fonksiyonlarla parametrelendirilir. Böylece, polinom parametrizasyonu olan kuadratik Bezier eğrileri, hiperboller ve elipsleri hariç tutmaktadır. Bu eğrileri temsil edebilmek için rasyonel Bezier eğrileri getirmek gerekir.

Tanım 3.21 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve buna tekabül skaler ağırlıkları w_i olan n . derecen rasyonel Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0,1] \quad (3.13)$$

olarak tanımlanır. Tüm ağırlıkların sıfır olmadığı varsayılmaktadır. $b_i \in R^2 (i = 0, 1, \dots, n)$ olduğunda eğri düzlemsel, $b_i \in R^3$ olduğunda eğri uzaysaldır. İntegral Bezier eğrisi tanımı, rasyonel olmayan Bezier eğrilerini tanımlamak için kullanılır.

$$b_i = (x_i, y_i, z_i) \text{ olsun. Homojen kontrol noktalarını } \hat{b}_i \\ \hat{b}_i = \begin{cases} (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i), & \text{eğer } w_i \neq 0 \text{ ise} \\ (x_i, y_i, z_i, 0), & \text{eğer } w_i = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

olarak tanımlayalım.

Homojen koordinatlarda rasyonel Bezier eğrisi, integral Bezier eğrisinin formunu alan ancak homojen kontrol noktaları olan

$$B(t) = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i B_{i,n}(t)$$

tarafından verilir. Çünkü $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$, birlik özelliğinin bölümüyle, $w_0 = w_1 = \dots = w_n$ olduğunda integral Bezier eğrileri elde edilir. Rasyonel bir Bezier eğrisi,

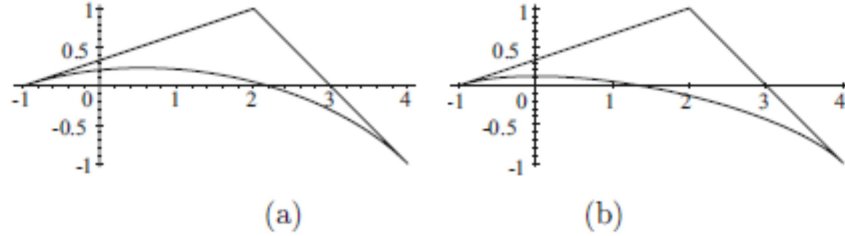
$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i R_{i,n}(t)$$

temel formunda yazılabilir. Burada

$$R_{i,n}(t) = \begin{cases} \frac{w_i B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)}, & \text{eğer } w_i \neq 0 \text{ ise} \\ \frac{B_{i,n}(t)}{\sum_{j=0}^n w_j B_{j,n}(t)}, & \text{eğer } w_i = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

Örnek 3.22 Kontrol noktaları $b_0(-1,0)$, $b_1(2,1)$ ve $b_2(4,-1)$ ve buna karşılık gelen 1,1 ve 2 ağırlıklarıyla rasyonel kuadratik, şekil 5(a)'da gösterilmiş ve ağırlıkları 1, 0.6, 2 ile şekil 5(b)'de gösterilmiştir.



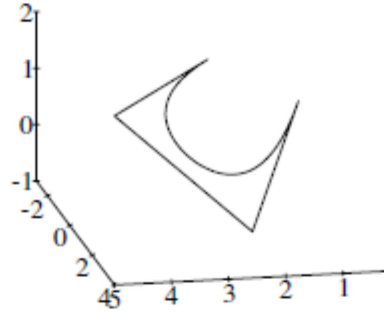
Şekil 3.4. (b) ağırlıkları 1,0.6,2 ve (a) ağırlıkları 1,1,2 ile kontrol noktaları $(-1,0)$, $(2,1)$, $(4,-1)$ olan rasyonel bezier eğrisi

Örnek 3.23 Kontrol noktaları $b_0(1,0,1)$, $b_1(2,1,-1)$, $b_2(5,4,2)$ ve $b_3(2,-3,1)$ ve ağırlıkları 1,2,2,1 olan uzaysal rasyonel kübik Bezier eğrisi şekil 6'da gösterilmektedir.

Kuadratik rasyonel bir Bezier eğrisi,

$$B(t) = \frac{w_0 b_0 B_{0,2}(t) + w_1 b_1 B_{1,2}(t) + w_2 b_2 B_{2,2}(t)}{w_0 B_{0,2}(t) + w_1 B_{1,2}(t) + w_2 B_{2,2}(t)} \quad (3.14)$$

şeklindedir.



Şekil 3.5. Uzaysal rasyonel Bezier eğrisi

Herhangi bir koniğin parametreleştirileceğinden dolayı (Marsh, 1999.) kuadratik rasyonel fonksiyonlar tarafından parametreleştirilen herhangi bir eğrinin bir koni olduğunu kabul eder. Dolayısıyla, kuadratik rasyonel Bezier eğrileri koniktir. Koniklerin sınıflandırılması aşağıdaki gibi alınırsa ikinci bir Bezier eğrisinin türü belirlenebilir.

$$\text{elips: } w_1^2 - w_0 w_2 < 0;$$

$$\text{parabol: } w_1^2 - w_0 w_2 = 0;$$

hiperbol: $w_1^2 - w_0w_2 > 0$.

Rasyonel Bezier eğrileri, eğri tasarımı için daha fazla esneklik sunar çünkü belirli bir kontrol noktaları kümesinde, ağırlık seçimine bağlı olarak sonsuz sayıda eğri vardır. Bir ağırlık ayarlandığında tüm eğri değişir, ancak bir sonraki teoremden açıklandığı gibi, öngörülebilir bir şekilde olur.

3.2.6 Rasyonel Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması

İntegral Bezier eğrileri için de Casteljau algoritması rasyonel duruma uzanmaktadır. Algoritmayı gerçekleştirmenin iki yolu vardır.

Yöntem 1: Varsayalım ki

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

olsun. Burada düzlemsel eğriler için $b_i = (x_i, y_i)$ ve uzaysal eğriler için $b_i = (x_i, y_i, z_i)$ dir. Düzlemsel eğriler için $\hat{b}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i)$ ve uzaysal eğriler için $\hat{b}_i = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$ olsun. İntegral Bezier eğrileri için de Casteljau algoritmasını uygulayın. (Bölüm 3.2.3 de açıklanmıştır.), ağırlığı ek bir koordinat olarak ele alın.

Yöntem 2: İlk yöntem uygulanması ve sayısal olarak verimli olmasına rağmen, belirlili koşullar altında hesaplama hatalarına eğilimlidir. Homojen kontrol noktalarının her bir iterasyonu sonunda kartezyen koordinatlara dönüştürülmesi durumunda problemten kaçınılır. Yeni algoritma $i = 0, 1, \dots, n - j$ ve $j = 1, \dots, n$ için

$$\begin{cases} b_i^j = (1-t) \frac{w_i^{j-1}}{w_i^j} b_i^{j-1} + t \frac{w_{i+1}^{j-1}}{w_i^j} b_{i+1}^{j-1} \\ w_i^j = (1-t)w_i^{j-1} + tw_{i+1}^{j-1} \end{cases} \quad (3.15)$$

dir.

Rasyonel de Casteljau algoritması $B(t)$ noktasını değerlendirir ve eğriyi parametre değeri t 'ye karşılık gelen noktada böler.

3.2.7 Rasyonel Bezier eğrilerinin türevleri

Rasyonel fonksiyonların ayırt edilmesi için rasyonel Bezier eğrisinin türevini belirleyen öz yinelemeli formül aşağıdaki yöntemden elde edilir. $F(t) = f(t)/g(t)$ olsun. Daha sonra bölüm kuralı

$$F'(t) = \frac{g(t)f'(t) - g'(t)f(t)}{g(t)^2} = \frac{f'(t) - g'(t)F(t)}{g(t)} \quad (3.16)$$

verir.

İki fonksiyonun bir sonucunun türevlerini elde etmek için Leibnitz kuralı (Spivak, 1967)

$f(t) = g(t)F(t)$ r . türevinin

$$\begin{aligned} f^{(r)}(t) &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} g^{(i)} F^{(r-i)}(t) \\ &= g(t)F^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t)F^{(r-i)}(t) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$F^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t) - \sum_{i=1}^r \binom{r}{i} g^{(i)}(t)F^{(r-i)}(t)}{g(t)} \text{ dir} \quad (3.17)$$

Böylece $F(t)$ 'nin r . türevi $F(t)$ 'nin birinci $r - 1$ türevleri ve $f(t)$ ve $g(t)$ 'nin birinci r türevleri özelliğinden elde edilir. n . dereceden

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}$$

Rasyonel Bezier eğrisini düşünelim,

$f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t)$ ve $g(t) = \sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)$ olsun. $f(t)$ ve $g(t)$ nin türevleri, bölüm 3.2.2'de verilen integral Bezier eğrilerinin türevlerini belirlemek için algoritma uygulanarak elde edilir. Burada $w_i b_i$ $f(t)$ 'nin kontrol noktaları ve w_i ağırlığı $g(t)$ 'nin kontrol noktaları olduğunu düşünün. Özellikle $r = 1$ ve $r = 2$ için

$$B'(t) = \frac{(\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t))' - (\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))' B(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)},$$

$$B''(t) = \frac{(\sum_{i=0}^n w_i b_i B_{i,n}(t))'' - 2(\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))' B'(t) - (\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t))'' B(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}.$$

Bu nedenle

$$B'(0) = \frac{n(w_1 b_1 - w_0 b_0) - n(w_1 - w_0) b_0}{w_0} = n \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0).$$

Benzer şekilde, $B'(1) = n \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$ dir. Son nokta tanjant durumu şimdi kanıtlanmıştır.

3.3 B-Spline Eğrileri

Parçalı bir polinom eğrisi özellikleri ile Bezier eğrisine benzer şekilde B-spline taban gösterimine sahiptir. $[a, b]$ aralığında tanımlanan bir B-spline eğrisi, aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. d. dereceden (veya $d+1$) böylece parçalı polinom eğrisinin her bölümü d. derece veya daha azdır.

2. Knot vektörü olarak adlandırılan $m+1$ reel sayıdan oluşan bir dizi $t_0, t_1, \dots, t_m$ dizisi olsun. öyle ki $t_i \leq t_{i+1}$ ($i=0,1,\dots,m-1$), $t_d = a$ ve $t_{m-d} = b$ olsun. $t_0, t_1, \dots, t_d$ ve $t_{m-d}, t_{m-d+1}, \dots, t_m$ değerlerine uç (dış) knot vektör denir., ve $t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}$ değerlerine iç knot vektör denir.

3. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ 'dir.

bir B-spline eğrisi, B-spline temel fonksiyonların özelliğinden tanımlanmıştır.

Tanım 3.24 Knot vektörü $t_0, t_1, \dots, t_m$ ile tanımlanan, $N_{i,d}(t)$ ile belirtilen d. dereceden B-spline temel fonksiyonları aşağıdaki gibi ardışık olarak tanımlanır:

$i=0,1,\dots,n$ ve $d \geq 1$ için

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (3.18)$$

$$N_{i,d}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+d}-t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1}-t}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t). \quad (3.19)$$

Eğer knot vektörü yeterli sayıda tekrarlanan knot değeri içeriyorsa, tekrarlananın gerçekleştirilmesi sırasında $\frac{N_{i,d-1}(t)}{t_{i+d}-t_i} = 0/0$ formunun bir bölünmesi ile karşılaşılabilir.

Tanım 3.25 Knot noktaları $t_0, t_1, \dots, t_m$ ve kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile d. dereceden (veya $d+1$) B-spline eğrisi

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t) \quad \text{tarafından} \quad [a, b] = [t_d, t_{m-d}] \quad \text{üzerinde} \quad \text{tanımlanır.}$$

Burada $N_{i,d}(t)$, d. dereceden B-spline temel fonksiyonudur. B-spline eğrilerini rasyonel formdan ayırmak genellikle integral B-spline olarak adlandırılır.

d. dereceden bir Bezier eğrisi tam olarak $d+1$ kontrol noktalarına sahipken d. dereceden bir B-spline yeterli sayıda knot belirtildiği taktirde herhangi bir sayıda kontrol noktasına sahip olabilir. Bu nedenle, karmaşık eğri şekillerini tanımlamak için, B-spline'lar kontrol noktalarının sayısını arttırarak, eğrinin derecesini arttırmaksızın, ek bir özgürlük verilebilir.

Her temel fonksiyon $N_{i,d}(t)$ $d+2$ knot $t_i, \dots, t_{i+d+1}$ ile tanımlanır. Dolayısıyla, $n+1$ kontrol noktaları gerekiyorsa $n+d+2$ knot $t_0, \dots, t_{n+d+1}$ belirtilmelidir. Bu nedenle, knot sayısı kontrol noktalarının sayısı artı 1'e eşittir ve $m=n+d+1$ özdeşliğini verir.

Bir knot vektörü tekrar tekrar knot değerlerine sahip olabilir. Bir knot değerinin meydana gelme sayısı knotun çokluğu olarak adlandırılır. İç knotların farklı değerlerinden oluşan kırılma noktaları adı verilen yeni bir $u_0, u_1, \dots, u_r (u_0 < u_1 < \dots < u_r)$ dizisi tanımlayalım. Daha sonra B-spline, d . dereceden $t \in [u_i, u_{i+1}] B_i(t)$ polinom eğri bölümlerinin birleşimidir.

3.3.1 B-spline çeşitleri

3.3.1.1 Açık B-spline

Genel olarak, B-spline eğrileri ilk ve son kontrol noktası b_0 ve b_n 'i enterpolasyona uğratmaz d . dereceden eğriler için, son nokta interpolasyonu ve bir son nokta tanjant durumu, uç knotların $t_0 = t_1 = \dots = t_d$ ve $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ 'i karşıladığı açık B-spline'leri ile elde edilir.

Temel fonksiyonların (3.42) tanımının küçük bir modifikasyonu knotların çokluğuna uyum sağlamak için gereklidir: N_{m-d-1} , $t = m - d$ 'de 1 değerini (ve diğer yerlerde 0) olmalıdır. $t_d \in [t_d, t_{d+1})$ olduğu için, $r = d$ olan bölgesel kontrol özelliği $B(t_d) = \sum_{j=0}^d b_j N_{j,d}(t_d)$ verir. $0 \leq j \leq d$ için

$$N_{j,d}(t_d) = \frac{t_d - t_j}{t_{j+d} - t_j} N_{j,d-1}(t_d) + \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-1}(t_d)$$

$t_0 = t_1 = \dots = t_d$ olduğu için, $t_j = t_d$, ve dolayısıyla ($j = 0$ durumu için $0/0 = 0$ kuralının uygulanması)

$$N_{j,d}(t_d) = (0)N_{j,d-1}(t_d) + \frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-1}(t_d).$$

Bu nedenle

$$N_{j,d}(t_d) = \left(\frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} \right) \left(\frac{t_d - t_{j+1}}{t_{j+d} - t_{j+1}} N_{j+1,d-2}(t_d) + \frac{t_{j+2+d} - t_d}{t_{j+2+d} - t_{j+2}} N_{j+2,d-2}(t_d) \right).$$

Tekrarlanan benzer sadeleştirmeler ve temel fonksiyonların yerine geçenler, daha küçük dizi sonuçları ile

$$N_{j,d}(t_d) = \left(\frac{t_{j+1+d} - t_d}{t_{j+1+d} - t_{j+1}} \right) \left(\frac{t_{j+2+d} - t_d}{t_{j+2+d} - t_{j+2}} \right) \dots \left(\frac{t_{d+j+d} - t_d}{t_{d+j+d} - t_{j+d}} \right) N_{j+d,0}(t_d)$$

$j > 0$ için $N_{j+d,0}(t_d) = 0$ olduğu için (21)'den $j > 0$ için $N_{j,d}(t_d) = 0$ olur. $j = 0$ olduğunda, özdeşlik (21) ve $N_{d,0}(t_d) = 1$

$$N_{0,d}(t_d) = \left(\frac{t_{1+d}-t_d}{t_{1+d}-t_1}\right) \left(\frac{t_{2+d}-t_d}{t_{2+d}-t_2}\right) \dots \left(\frac{t_{d+d}-t_d}{t_{d+d}-t_d}\right) N_{d,0}(t_d) = 1$$

değerini verir.

Dolayısıyla $B(t_d) = \sum_{j=0}^d b_j N_{j,d}(t_d) = b_0$.

Benzer şekilde $B(t_{m-d}) = b_n$.

3.3.1.2 Uniform (Düzgün) B-splinelar

Bir B-spline, knotları eşit aralıklı olduğunda ve düzgün olmayan bir şekilde tek düze olduğu söylenir. Knot vektörü $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_m = m$ olsun. Bu knot vektöründe 2. dereceden uniform B-spline için temel fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases}$$

$$N_{0,1}(t) = \frac{(t-0)}{(1-0)} N_{0,0} + \frac{(2-t)}{(2-1)} N_{1,0} = t N_{0,0} + (2-t) N_{1,0},$$

$$N_{1,1}(t) = \frac{(t-1)}{(2-1)} N_{1,0} + \frac{(3-t)}{(3-2)} N_{2,0} = (t-1) N_{1,0} + (3-t) N_{2,0},$$

$$N_{2,1}(t) = \frac{(t-2)}{(3-2)} N_{2,0} + \frac{(4-t)}{(4-3)} N_{3,0} = (t-2) N_{2,0} + (4-t) N_{3,0}.$$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{(t-0)}{(2-0)} N_{0,1}(t) + \frac{(3-t)}{(3-1)} N_{1,1}(t) = \frac{1}{2} t N_{0,1}(t) + \frac{1}{2} (3-t) N_{1,1}(t) \\ &= \frac{1}{2} t (t N_{0,0} + (2-t) N_{1,0}) + \frac{1}{2} (3-t) ((t-1) N_{1,0} + (3-t) N_{2,0}) \\ &= \frac{1}{2} t^2 N_{0,0} + \left(\frac{1}{2} t(2-t) + \frac{1}{2} (3-t)(t-1) \right) N_{1,0} + \frac{1}{2} (3-t)^2 N_{2,0} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} t^2, & t \in [0,1] \\ -\frac{1}{2} (3-6t+2t^2), & t \in [1,2] \\ \frac{1}{2} (3-t)^2, & t \in [2,3] \end{cases} \end{aligned}$$

i . temel fonksiyonu

$$\begin{aligned}
N_{i,2}(t) &= \frac{t-i}{(i+2)-i} N_{i,1}(t) + \frac{i+3-t}{(i+3)-(i+1)} N_{i+1,1}(t) \\
&= \frac{t-i}{2} N_{i,1}(t) + \frac{i+3-t}{2} N_{i+1,1}(t) \\
&= \frac{t-i}{2} \left(\frac{t-i}{(i+1)-i} N_{i,0}(t) + \frac{(i+2)-t}{(i+2)-(i+1)} N_{i+1,0}(t) \right) \\
&\quad + \frac{i+3-t}{2} \left(\frac{t-(i+1)}{(i+2)-(i+1)} N_{i+1,0}(t) + \frac{i+3-t}{(i+3)-(i+2)} N_{i+2,0}(t) \right) \\
&= \frac{1}{2} (t-i)^2 N_{i,0}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} ((t-i)(i+2-t) + (i+3-t)(t-i-1)) N_{i+1,0}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} (i+3-t)^2 N_{i+2,0}(t).
\end{aligned}$$

Böylece, $[i+2, i+3]$ ile tanımlanan i . bölüm $B_i(t)$,

$$\begin{aligned}
B_i(t) &= \sum_{j=i}^{i+2} b_j N_{j,2}(t) \\
&= \frac{1}{2} (i+3-t)^2 b_i + \frac{1}{2} ((t-i-1)(i+3-t) + (i+4-t)(t-i-2)) b_{i+1} \\
&\quad + \frac{1}{2} (t-i-2)^2 b_{i+2}
\end{aligned}$$

ile verilir.

Son olarak $t \mapsto t+i+2$ parametrizasyonu

$$\begin{aligned}
B_i(t) &= \frac{1}{2} (1-t)^2 b_i + \frac{1}{2} (1+2t-2t^2) b_{i+1} + \frac{1}{2} t^2 b_{i+2} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \end{pmatrix} \tag{3.20}
\end{aligned}$$

tarafından $[0,1]$ aralığında bölümü tanımlanır.

Her bir bölüm üzerindeki noktalar, $\frac{1}{2}(1-t)^2$, $\frac{1}{2}(1+2t-2t^2)$, $\frac{1}{2}t^2$ temel fonksiyonları her t için sadece bir kez değerlendirmek zorunda olduğundan verimli bir şekilde hesaplanır.

$d = 3$. dereceden uniform B-splinelar için benzer bir yöntem

$$B_i(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i \\ b_{i+1} \\ b_{i+2} \\ b_{i+3} \end{pmatrix}$$

verir.

3.3.1.3 Periyodik B-spline ve kapalı periyodik B-spline

Bazı uygulamalarda, başlangıç noktasının bitiş noktasına eşit olduğu kapalı eğrileri temsil etmek arzu edilir. Kapalı bir Bezier eğrisi, kapalı bir kontrol poligonu oluşturan kontrol noktaları seçilerek elde edilebilir. Ancak, genel olarak, B-spline eğrileri ilk ve son kontrol noktalarını interpolasyona uğratmazlar ve bu nedenle kapalı bir kontrol poligonu kapalı bir eğri vermez. Eğrinin kapatılması knotlar ve kontrol noktalarındaki koşulların uygulanmasıyla elde edilir. Örneğin bu amaç için açık bir B-spline kullanılabilir.

$n + 1$ kontrol noktaları ile ve d . dereceden bir periyodik B-spline knot $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ rastgele seçerek ve $i = 1, \dots, d + 1$ için

$$t_{n+i} = t_{n+i-1} + (t_i - t_{i-1})$$

ayarlayarak elde edilir. Bu formun bir knot vektörü periyodik knot vektörü olarak adlandırılır. Özellikle, bir uniform B-spline, periyodik bir B-spline'in özel durumudur.

Kontrol noktaları $b_0, \dots, b_n, b_{n+1} = b_0, b_{n+2} = b_1, \dots, b_{n+d} = b_{d-1}$ ve d . dereceden kapalı periyodik bir B-spline, knot $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1}$ rastgele seçerek ve $n + 2d + 2$ knot ile periyodik bir knot vektörü oluşturarak elde edilir.

3.3.2 De Boor algoritması

Bir B-spline eğrisi üzerindeki noktaların değerlendirilmesi de Boor algoritması olarak bilinen bir yöntem kullanılarak gerçekleştirilebilir. Bezier eğrileri için de Casteljau algoritması, Bernstein temel fonksiyonlarının öz yineleme özelliğinin bir sonucu olduğu gibi, de Boor algoritması, B-spline temel fonksiyonlarını

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad (3.21)$$

öz yineleme özelliğinden gelir.

Varsayalım ki $t \in [t_r, t_{r+1})$ olsun. Sonra (24)

$$\begin{aligned} B(t) &= \sum_{i=r-k}^r b_i N_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \end{aligned}$$

anlamına gelir.

$i - 1$ ile i ikinci toplamda değiştirilmesi

$$B(t) = \sum_{i=r-k}^r b_i \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \sum_{i=r-k+1}^{r+1} b_{i-1} \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1}(t)$$

verir ve $N_{r+1,k-1}(t) = N_{r-k,k-1}(t) = 0$ olduğundan $[t_r, t_{r+1})$ üzerinde

$$B(t) = \sum_{i=r-k+1}^r \left(b_i \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} + b_{i-1} \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} \right) N_{i,k-1}(t)$$

olur. $i = r - k + 1, \dots, r$ için

$$b_i^1(t) = b_{i-1} \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} + b_i \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}$$

olsun. b_i^1 'in t parametre değerine bağlı olduğunu unutmayın. Benzer bir şekilde $N_{i,k-1}(t)$, $k - 2$. dereceden temel fonksiyonlar açısından ifade edilebilir. d . dereceden bir eğri için sonuç bir yineleme prosedürü $j = 1, \dots, d$, $i = r - d + j, \dots, r$ için

$$\left. \begin{aligned} b_i^j(t) &= \left(1 - \alpha_i^j(t) \right) b_{i-1}^{j-1}(t) + \alpha_i^j(t) b_i^{j-1}(t), \\ \alpha_i^j(t) &= \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

dir.

Burada $b_j^0(t) = b_j$, $b_{-1} = 0$ ve $b_{m-d+1} = 0$ (burada 0 bir düzlem eğrisi için $(0,0)$ ve bir uzaysal eğri için $(0,0,0)$).

j . adımı, $d - j$. dereceden temel fonksiyonların şartı $B(t)$ (b_i^j , t 'nin bir fonksiyonu olduğunu unutmayın)

$$B(t) = \sum_{i=r-d+j}^r b_i^j N_{i,d-j}(t)$$

cinsinden verilir. Böylece $j = d$ olduğunda algoritma eğri üzerindeki $B(t) = \sum_{i=r}^r b_i^d N_{i,0}(t) = b_r^d$ noktalarını verir.

Özetlemek gerekirse, belirli bir parametre değeri t için de Boor algoritması $b_r^d = B(t)$ gibi bir üçgen dizi noktası verir.

$$\begin{array}{ccccccc} b_{r-d}^0 & b_{r-d+1}^0 & \dots & \dots & b_r^0 \\ b_{r-d+1}^1 & \dots & \dots & b_r^1 \\ \vdots & \dots & & & \\ b_{r-1}^{d-1} & b_r^{d-1} \\ b_r^d & = B(t). \end{array}$$

3.3.3 B-spline eğrilerinin türevleri

Bir sonraki amaç, d . dereceden bir B-spline eğrisinin $(d - 1)$. dereceden bir B-spline'ı olarak türevinin saptanmasıdır. İlk adım, d . dereceden temel fonksiyonların türevlerini $d - 1$. dereceden temel fonksiyonlarına göre belirlemektir.

Lemma 3.26 d . dereceden B-spline temel fonksiyonları $N_{i,d}(t)$ türevi, aşağıdaki gibi $d - 1$. dereceden temel fonksiyonları açısından elde edilebilir:

$$N'_{i,d}(t) = \frac{d}{t_{i+d}-t_i} N_{i,d-1}(t) - \frac{d}{t_{i+d+1}-t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t) \quad (3.23)$$

Teorem 3.27 $B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)$ 'nin türevi

$$B'(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^{(1)} N_{i,d-1}(t) \quad (3.24)$$

dir. Burada

$$b_i^{(1)} = d \frac{b_{i+1} - b_i}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} \quad (3.25)$$

ve $N_{i,d-1}^{(1)}(t)$ knot vektörü $t_1, \dots, t_{m-1}$ üzerinde tanımlanan $d - 1$. dereceden temel fonksiyonlardır.

Sonuç 3.28 $B(t)$ 'nin r . türevi

$$B^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i,d-r}^{(r)}(t) \quad (3.26)$$

ile verilir. Burada $b_i^0 = b_i$,

$$b_i^{(r)} = (d - r + 1) \frac{b_{i+1}^{(r-1)} - b_i^{(r-1)}}{t_{i+d+1} - t_{i+r}} \quad (3.27)$$

ve $N_{i,d-r}^{(r)}(t)$ knot vektörü $t_r, \dots, t_{m-r}$ 'de tanımlanan temel fonksiyonlardır.

Örnek 3.29 Kontrol noktaları $b_0(2,1)$, $b_1(4,8)$, $b_2(5,-1)$, $b_3(3,-2)$ ve $b_4(2,-4)$ ile knot vektörü $t_0 = 1.2$, $t_1 = 1.4$, $t_2 = 1.5$, $t_3 = 2.0$, $t_4 = 2.4$, $t_5 = 3.1$, $t_6 = 5.0$, $t_7 = 7.3$ 'te tanımlanan 3. dereceden B-spline $B(t)$ değerini düşünün. Daha sonra $B(t)$ türevinin kontrol noktaları

$$\begin{aligned} b_0^{(1)} &= 3 \frac{b_1 - b_0}{t_4 - t_1} = 3 \frac{(4,8) - (2,1)}{1.0} = (6.0, 21.0), \\ b_1^{(1)} &= 3 \frac{b_2 - b_1}{t_5 - t_2} = 3 \frac{(5,-1) - (4,8)}{1.6} = (1.875, -16.875), \\ b_2^{(1)} &= 3 \frac{b_3 - b_2}{t_6 - t_3} = 3 \frac{(3,-2) - (5,-1)}{3.0} = (-2.0, -1.0), \text{ ve} \\ b_3^{(1)} &= 3 \frac{b_4 - b_3}{t_7 - t_4} = 3 \frac{(2,-4) - (3,-2)}{4.0} = (-0.75, -1.5). \end{aligned}$$

Türev $d = 2$ derecesine sahiptir ve knot vektörü $t_0 = 1.4$, $t_1 = 1.5$, $t_2 = 2.0$, $t_3 = 2.4$, $t_4 = 3.1$, $t_5 = 5.0$, $t_6 = 6.4$ 'te tanımlanmıştır.

3.3.4 NURBS eğrisinin türevi

Bir NURBS'nin türevini belirlemek için tekrarlayıcı bir formül, rasyonel bir fonksiyonun türevini belirleyen denklem (16)'dan elde edilir. Bir NURBS

$$B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)},$$

$f(t) = \sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)$ ve $g(t) = \sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)$ olsun. $f(t)$ ve $g(t)$ 'nin türevleri, B-spline türevlerini hesaplamak için algoritma uygulanarak elde edilir. Buradaki $w_i b_i f(t)$ 'nin kontrol noktaları olarak kabul edilir ve $w_i g(t)$ 'nin kontrol noktaları olarak kabul edilir.

3.3.5 Rasyonel De Boor algoritması

Rasyonel de Boor algoritması, de casteljau algoritmasından gelen rasyonel de casteljau algoritmasının türetilmesine benzer şekilde de Boor algoritmasından elde edilir. $b_i^0 = b_i$ ve $w_i^0 = w_i$ değerini ayarlayın ve $t \in [t_r, t_{r+1})$ olduğunu varsayalım.

Rasyonel de Boor algoritması, $j = 1, \dots, d$ ve $i = r - d + 1, \dots, r$ için

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^j &= \frac{t - t_i}{t_{i+d-j+1} - t_i}, \\ w_i^j &= (1 - \alpha_i^j) w_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1}, \\ w_i^j b_i^j &= (1 - \alpha_i^j) w_{i-1}^{j-1} b_{i-1}^{j-1} + \alpha_i^j w_i^{j-1} b_i^{j-1}, \quad j > 0 \text{ için} \end{aligned} \right\}$$

algoritma $B(t) = b_r^d$ verir.

Nokta değerlendirmesine ek olarak, de Boor veya rasyonel de Boor algoritması, B-spline veya NURBS eğrisini alt bölümlere ayırmak için kullanılabilir. Alt bölüm, sadece bir eğri ayırma aracı değil, aynı zamanda eğri tasarımı için ek özgürlükler sağlamak amacıyla ekstra kontrol noktaları yaratmanın bir yoludur. De casteljau algoritmasını kullanan Bezier eğrileri için kesişim algoritmaları, de Boor algoritması kullanılarak B-spline ve NURBS eğrilerine genişletilebilir.

3.3.6 $t=0$ İçin Başlangıç Noktasında Bezier ve Rasyonel Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü

Teorem 3.30 Rastgele hızda eğri $\alpha: I \rightarrow R^3$ olarak verilsin ve α 'nın hızı $v = \|\alpha'\|$ olarak gösterilsin. $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$, α eğrisinin Frenet vektör alanları olsun ve $\{\kappa, \tau\}$ α 'nın eğriliği ve burulması olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= v\kappa\mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= v(-\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}) \\ \mathbf{B}' &= -v\tau\mathbf{N} \text{ dir.}\end{aligned}\tag{3.28}$$

Teorem 3.31 $\alpha: I \rightarrow R^3$ 'ün rastgele hızda regüler (düzenli) eğri olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} & \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \mathbf{B} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{B} \times \mathbf{T} & \tau &= \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}\end{aligned}\tag{3.29}$$

dir.

Teorem 3.32 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Frenet vektör alanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\mathbf{T}|_{t=0} &= \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \\ \mathbf{B}|_{t=0} &= \frac{(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)\|} \\ \mathbf{N}|_{t=0} &= \frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \psi + \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \psi\end{aligned}\tag{3.30}$$

burada ψ , $b_1 - b_0$ ve $b_2 - b_1$ vektörleri arasındaki açıdır (İncesu, 2003).

Teorem 3.33 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki eğriliği ve burulması

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \psi\tag{3.31}$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1), (b_3 - b_2) \rangle}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2}\tag{3.32}$$

dır. Burada ψ , $b_1 - b_0$ ve $b_2 - b_1$ arasındaki açıdır (İncesu, 2003).

Teorem 3.34 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ nin $t = 0$ ' da Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$\mathbf{T}'|_{t=0} = (n-1) \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|} \sin \psi \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}'|_{t=0} = -(n-1) \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|} \sin \psi \mathbf{T} + (n-2) \frac{\|b_1-b_0\| \langle (b_1-b_0) \times (b_2-b_1), (b_3-b_2) \rangle}{\|(b_1-b_0) \times (b_2-b_1)\|^2} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}'|_{t=0} = -(n-2) \frac{\|b_1-b_0\| \langle (b_1-b_0) \times (b_2-b_1), (b_3-b_2) \rangle}{\|(b_1-b_0) \times (b_2-b_1)\|^2} \mathbf{N}.$$

Teorem 3.35 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Frenet vektör alanları aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{p_1-p_0}{\|p_1-p_0\|} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B}|_{t=0} = \frac{(p_2-p_0) \times (p_1-p_0)}{\|(p_2-p_0) \times (p_1-p_0)\|} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{N}|_{t=0} = \frac{p_2-p_0}{\|p_2-p_0\|} \csc \psi + \frac{p_1-p_0}{\|p_1-p_0\|} \cot \psi \quad (3.35)$$

burada ψ , $p_1 - p_0$ ve $p_2 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak ,2018).

Teorem 3.36 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki eğriliği $\{\kappa, \tau\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2-p_0\|}{\|p_1-p_0\|^2} \sin \psi \quad (3.36)$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{\|p_3-p_0\| \cos \Phi}{\|p_1-p_0\| \|p_2-p_0\| \sin \psi} \quad (3.37)$$

burada ψ , $p_1 - p_0$ ve $p_2 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\Phi(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$ ve $p_3 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak ,2018).

Teorem 3.37 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ nin $t = 0$ 'da Serret-Frenet çatısının türev formülleri

$$\mathbf{T}'|_{t=0} = (n-1) \frac{w_2}{w_1} \frac{\|p_2-p_0\|}{\|p_1-p_0\|} \sin \psi \mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}'|_{t=0} = -(n-1) \frac{w_2}{w_1} \frac{\|p_2-p_0\|}{\|p_1-p_0\|} \sin \psi \mathbf{T} + (n-2) \frac{w_3}{w_2} \frac{\|p_3-p_0\| \cos \Phi}{\|p_2-p_0\| \sin \psi} \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}'|_{t=0} = -(n-2) \frac{w_3}{w_2} \frac{\|p_1-p_0\| \langle (p_1-p_0) \times (p_2-p_1), (p_3-p_2) \rangle}{\|(p_1-p_0) \times (p_2-p_1)\|^2} \mathbf{N}$$

dir. Burada Φ , $(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$ ve $p_3 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır ve ψ , $p_2 - p_0$ ve $p_1 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak ,2018).

3.3.7 $t_0 \in [0, 1]$ İçin Keyfi Bir Noktada Frenet Formülü ve Bezier Eğrisinin Eğrilikleri

Bezier eğrileri için De Casteljau algoritması, herhangi bir $t_0 \in [0, 1]$ parametresindeki bezier eğrileri $B(t)$ 'nin, $B(t_0)$ değerini hesaplamak için kullanılır ve ayrıca Bezier eğrisini $B_{sağ}$ ve B_{sol} adlı iki eğri parçasına bölmek için kullanılır.

Teorem 3.38 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve herhangi bir parametre $t_0 \in [0, 1]$ olan n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman

$$B(t_0) = b_0^n$$

burada $i = 0, 1, \dots, n$ için $b_i^0 = b_i$ ve $i = 0, 1, \dots, n - j$ için ve $j = 0, 1, \dots, n$ için (Marsh, 1999)

$$b_i^j = (1 - t_0)b_i^{j-1} + t_0b_{i+1}^{j-1}$$

Bu algoritma sonucunda, bölünmüş Bezier eğrilerinin B_{sol} ve $B_{sağ}$ kontrol noktaları sırasıyla $\{b_0^0, b_0^1, \dots, b_0^n\}$ ve $\{b_0^n, b_1^{n-1}, \dots, b_{n-1}^1, b_n^0\}$ dir.

Teorem 3.39 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}|_{t=t_0} = \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_0} = \frac{(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_0} = \frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \quad (3.40)$$

burada b_i^j , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölmesi $B_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır ve $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açıdır (İncesu, 2003).

Teorem 3.40 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman, verilen $B(t)$ bezier eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki eğriliği ve burulması aşağıdaki gibidir.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \quad (3.41)$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{\langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} \quad (3.42)$$

Burada b_i^j , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölümü $B_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır, $\bar{\psi}$, $b_1^{n-1} - b_0^n$ ve $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır (Yılmaz Evren, 2020).

Teorem 3.41 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t_0)$ noktasındaki Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'|_{t=t_0} &= (n-1) \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \sin \psi \mathbf{N}, \\ \mathbf{N}'|_{t=t_0} &= -(n-1) \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \sin \psi \mathbf{T} \\ &+ (n-2) \frac{\|b_1^{n-1} - b_0^n\| \langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}'|_{t=t_0} &= -(n-2) \frac{\|b_1^{n-1} - b_0^n\| \langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2} \mathbf{N} \end{aligned}$$

burada b_i^j , (9) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen Bezier bölümü $B'_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır, $\bar{\psi}$, $b_1^{n-1} - b_0^n$ ve $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır (Yılmaz Evren, 2020).

Teorem 3.42 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. O zaman rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ aşağıdaki gibidir.

$$T|_{t=t_0} = \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \quad (3.42)$$

$$B|_{t=t_0} = \frac{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \quad (3.43)$$

$$N|_{t=t_0} = \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \quad (3.44)$$

burada p_i^j , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölmesi $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktalarıdır ve $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_0^n$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak, 2018).

Teorem 3.43 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. O zaman, verilen rasyonel Bezier

eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki eğriliği ve burulması eşitliklerle verilir.

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0^n w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^{n-2}} \sin \bar{\psi} \quad (3.45)$$

$$\tau = \frac{n-2}{2} \frac{w_0^n w_3^{n-3}}{w_1^{n-1} w_2^{n-2}} \frac{p_3^{n-3} - p_0^n \cos \bar{\Phi}}{p_1^{n-1} - p_0^n p_2^{n-2} - p_0^n \sin \bar{\psi}} \quad (3.46)$$

burada p_i^j , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölümü $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktaları ve w_i^j ise ağırlıklarıdır ve $\bar{\psi}$, $p_1^{n-1} - p_0^n$ ve $p_2^{n-2} - p_0^n$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\bar{\Phi}$, $p_3^{n-3} - p_0^n$ ve $(p_1^{n-1} - p_0^n) \times (p_2^{n-2} - p_0^n)$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak, 2018).

Teorem 3.44 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ nin $t = t_0$ daki Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= (n-1) \frac{w_2^{n-2} \|p_2^{n-2} - p_0^n\|}{w_1^{n-1} \|p_1^{n-1} - p_0^n\|} \sin \bar{\psi} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -(n-1) \frac{w_2^{n-2} \|p_2^{n-2} - p_0^n\|}{w_1^{n-1} \|p_1^{n-1} - p_0^n\|} \sin \bar{\psi} \mathbf{T} + (n-2) \frac{w_3^{n-3} \|p_3^{n-3} - p_0^n\| \cos \bar{\Phi}}{w_2^{n-2} \|p_2^{n-2} - p_0^n\| \sin \bar{\psi}} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -(n-2) \frac{w_3^{n-3} \|p_3^{n-3} - p_0^n\| \cos \bar{\Phi}}{w_2^{n-2} \|p_2^{n-2} - p_0^n\| \sin \bar{\psi}} \mathbf{N} \end{aligned}$$

burada p_i^j , (15) ile formüle edilmiş alt bölme algoritması ile elde edilen rasyonel Bezier bölümü $RB_{sağ}$ 'ın kontrol noktaları ve $\bar{\psi}$, $p_1^{n-1} - p_0^n$ ve $p_2^{n-2} - p_0^n$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\bar{\Phi}$, $(p_1^{n-1} - p_0^n) \times (p_2^{n-2} - p_0^n)$ ve $p_3^{n-3} - p_0^n$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak, 2018).

3.3.8. Açık B-Spline Eğrilerinde Frenet Çatısı

Teorem 3.45 $\mathfrak{B}$, kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olacak biçimde d . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\mathfrak{B}(t_d) = b_0 \text{ ve } \mathfrak{B}(t_{m-d}) = b_n$$

dir.

(3.47)

İspat: (Marsh, 1999)

Teorem 3.46 $\mathfrak{B}$, kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olacak biçimde d . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. Bu takdirde

$$\mathfrak{B}'(t_d) = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) \quad (3.48)$$

$$\mathfrak{B}'(t_{m-d}) = \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \quad (3.49)$$

dir (Marsh, 1999).

Sonuç 3.47 $\mathfrak{B}$, kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olacak biçimde d . dereceden bir açık B-spline eğrisi verilsin. Eğer $t_0 = t_1 = \dots = t_d = 0$ ve $t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m = 1$ bu takdirde

$$\mathfrak{B}'(0) = \frac{d}{t_{d+1}} (b_1 - b_0) \quad (3.50)$$

$$\mathfrak{B}'(1) = \frac{d}{1-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \quad (3.51)$$

dir.

Teorem 3.48 $\mathfrak{B}$, kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olacak biçimde d . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. B u takdirde

$$\mathfrak{B}''(t_d) = \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} (b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)} (b_1 - b_0)$$

ve

$$\mathfrak{B}''(t_{m-d}) = \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}) - \frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} (b_{n-1} - b_{n-2})$$

dir.

İspat: (Marsh, 1999)'den açık bir B-spline eğrisinin r .

türevi $\mathfrak{B}^{(r)}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} b_i^{(r)} N_{i,d-r}(t)$ burada $b_i^{(0)} = b_i$ ve $b_i^{(r)} = \frac{d-r+1}{t_{i+d+1}-t_{i+r}} (b_{i+1}^{(r-1)} -$

$b_i^{(r-1)})$ dir. Buna göre $b_1^{(1)} = \frac{d}{t_{d+2}-t_2} (b_2 - b_1)$ ve $b_0^{(1)} = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) =$

$\mathfrak{B}'(t_d)$ yazılabilir. Ayrıca (Marsh, 1999)'den, $\mathfrak{B}''(t_d) = b_0^{(2)} = \frac{d-1}{t_{d+1}-t_2} (b_1^{(1)} - b_0^{(1)}) =$

$\frac{d-1}{t_{d+1}-t_2} \left[\frac{d}{t_{d+2}-t_2} (b_2 - b_1) - \frac{d}{t_{d+1}-t_1} (b_1 - b_0) \right]$ elde edilebilir. Benzer şekilde bir Spline

eğrisinin ikinci türevi alındığında ve $n=m-d-1$ olduğundan

$$b_i^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} (b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)})$$

Biçiminde $i = n - 2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
b_{n-2}^{(2)} &= \frac{d-1}{t_{n+d-1}-t_n} (b_{n-1}^{(1)} - b_{n-2}^{(1)}) \\
&= \frac{d-1}{t_{n+d-1}-t_n} \left[\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{d}{t_{n-1+d}-t_{n-1}} (b_{n-1} - b_{n-2}) \right] \\
&= \frac{d(d-1)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $\mathfrak{B}''(t_{m-d})$ ifadesine eşittir.

Teorem 3.49 $\mathfrak{B}$, kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ olan ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olacak biçimde d . dereceden bir açık B-spline eğrisi olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'''(t_d) &= \frac{d(d-1)(d-2)(b_3 - b_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \\
&\quad - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3](b_2 - b_1)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+1}-t_2)} \\
&\quad + \frac{d(d-1)(d-2)(b_1 - b_0)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(d-2)(b_n - b_{n-1})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} \\
&\quad - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{m-3} + t_{m-2} - t_{m-d-2} - t_{m-d-1}](b_{n-1} - b_{n-2})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})} \\
&\quad + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2} - b_{n-3})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{B}'''(t_d)$ yi bulmak için $b_i^{(r)}$ 'de $r = 3$ seçelim

$$b_i^{(3)} = \frac{(d-2)}{t_{i+d+1}-t_{i+3}} (b_{i+1}^{(2)} - b_i^{(2)})$$

bulunur. $b_{i+1}^{(2)}$ ve $b_i^{(2)}$ yi yerine $b_i^{(2)} = \frac{(d-1)}{t_{i+d+1}-t_{i+2}} (b_{i+1}^{(1)} - b_i^{(1)})$ ve

$b_{i+1}^{(2)} = \frac{(d-1)}{t_{i+d+2}-t_{i+3}} (b_{i+2}^{(1)} - b_{i+1}^{(1)})$ ifadeleri yazılmalıdır. $b_i^{(1)}, b_{i+1}^{(1)}, b_{i+2}^{(1)}$ yerine de

$$b_i^{(1)} = \frac{d}{t_{d+i+1}-t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i)$$

$$b_{i+1}^{(1)} = \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1})$$

$$b_{i+2}^{(1)} = \frac{d}{t_{i+d+3} - t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2})$$

ifadeleri yazılırsa

$$b_i^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+1} - t_{i+2}} \left[\frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) - \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i) \right]$$

$$b_{i+1}^{(2)} = \frac{d-1}{t_{i+d+2} - t_{i+3}} \left[\frac{d}{t_{i+d+3} - t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2}) - \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) \right]$$

elde edilir. Şimdi bu ifadelerde $b_i^{(3)}$ de yerine yazılırsa

$$b_i^{(3)} = \frac{d-2}{t_{i+d+1} - t_{i+3}} \left\{ \frac{d-1}{t_{i+d+2} - t_{i+3}} \left[\frac{d}{t_{i+d+3} - t_{i+3}} (b_{i+3} - b_{i+2}) - \frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) \right] - \frac{d-1}{t_{i+d+1} - t_{i+2}} \left[\frac{d}{t_{i+d+2} - t_{i+2}} (b_{i+2} - b_{i+1}) - \frac{d}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} (b_{i+1} - b_i) \right] \right\}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde

$$b_i^{(3)} = \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+3} - b_{i+2})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+3} - t_{i+3})} - \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+2} - b_{i+1})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+2})} - \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+2} - t_{i+2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+1} - t_{i+1})}$$

bulunur. Bu ifadeyi daha da sadeleştirirsek;

$$b_i^{(3)} = \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+3} - b_{i+2})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+3} - t_{i+3})} - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{i+d+1} + t_{i+d+2} - t_{i+2} - t_{i+3}](b_{i+2} - b_{i+1})}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+2} - t_{i+2})(t_{i+d+2} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{i+1} - b_i)}{(t_{i+d+1} - t_{i+3})(t_{i+d+1} - t_{i+2})(t_{i+d+1} - t_{i+1})}$$

bulunur. Buna göre

$$\mathfrak{B}'''(t_d) = b_0^{(3)} \text{ ve } \mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = b_{n-3}^{(3)} \text{ olur. Yani;}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}'''(t_d) = & \frac{d(d-1)(d-2)(b_3-b_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \\ & - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{d+1}+t_{d+2}-t_2-t_3](b_2-b_1)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+1}-t_2)} \\ & + \frac{d(d-1)(d-2)(b_1-b_0)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = & \frac{d(d-1)(d-2)(b_n-b_{n-1})}{(t_{n+d-2}-t_n)(t_{n+d-1}-t_n)(t_{n+d}-t_n)} \\ & - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{n+d-2}+t_{n+d-1}-t_{n-1}-t_n](b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{n+d-2}-t_n)(t_{n+d-1}-t_{n-1})(t_{n+d-1}-t_n)(t_{n+d-2}-t_{n-1})} \\ & + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2}-b_{n-3})}{(t_{n+d-2}-t_n)(t_{n+d-2}-t_{n-1})(t_{n+d-2}-t_{n-2})}\end{aligned}$$

olur. Ya da $n = m - d - 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}'''(t_{m-d}) = & \frac{d(d-1)(d-2)(b_n-b_{n-1})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} \\ & - \frac{d(d-1)(d-2)[t_{m-3}+t_{m-2}-t_{m-d-2}-t_{m-d-1}](b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})} \\ & + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2}-b_{n-3})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})}\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.50 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olana nci dereceden bir açık B-spline eğrisinin Frenet vektör alanları; t_d noktalarında;

$t = t_d$ 'de

$$\mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{b_1-b_0}{\|b_1-b_0\|}; \quad \mathbf{B}|_{t=t_d} = \frac{(b_1-b_0) \times (b_2-b_1)}{\|(b_1-b_0) \times (b_2-b_1)\|}; \quad (3.52)$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_d} = \frac{(b_2-b_1) \csc \Phi}{\|b_2-b_1\|} - \frac{(b_1-b_0)}{\|b_1-b_0\|} \cot \Phi \quad (3.53)$$

$$\kappa|_{t=t_d} = \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \quad (3.54)$$

(Φ : $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_1$ arasındaki açıdır).

$$\tau|_{t=t_d} = \frac{(d-2)(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}{d(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \frac{\|b_3-b_2\| \cos \varphi}{\|b_1-b_0\| \|b_2-b_1\| \sin \Phi} \quad (3.55)$$

burada φ ; $[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)]$ vektörü ile $b_3 - b_2$ vektörleri arasındaki açıdır (Yılmaz Evren, 2020).

İspat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}|_{t=t_d} &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \Big|_{t=t_d} = \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1}(b_1 - b_0)}{\left\| \frac{d}{t_{d+1}-t_1}(b_1 - b_0) \right\|} = \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1}(b_1 - b_0)}{\frac{d}{t_{d+1}-t_1} \|b_1 - b_0\|} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}, \\
\mathbf{B}|_{t=t_d} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \Big|_{t=t_d} \\
&= \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1}(b_1 - b_0) \times \left[\frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}(b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)}(b_1 - b_0) \right]}{\left\| \frac{d}{t_{d+1}-t_1}(b_1 - b_0) \times \left[\frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}(b_2 - b_1) - \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+1}-t_1)}(b_1 - b_0) \right] \right\|} \\
&= \frac{\frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)} [(b_1 - b_0) \times [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]]}{\left\| \frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)} [(b_1 - b_0) \times [(b_2 - b_1) - (b_1 - b_0)]] \right\|} \\
&= \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \\
\mathbf{N}|_{t=t_d} &= \mathbf{B}|_{t=t_d} \times \mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \times \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \\
&= \frac{1}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\| \cdot \|b_1 - b_0\|} [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)] \\
&\quad \times (b_1 - b_0) \\
&= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \cdot \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} [\langle (b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \rangle (b_2 - b_1) \\
&\quad - \langle (b_2 - b_1), (b_1 - b_0) \rangle (b_1 - b_0)] \\
&= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \cdot \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} [\|b_1 - b_0\|^2 (b_2 - b_1) \\
&\quad - \langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_1) \rangle (b_1 - b_0)] \\
&= \frac{(b_2 - b_1) \|b_1 - b_0\|}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} - \frac{\langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_1) \rangle (b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \\
&= \frac{(b_2 - b_1) \|b_1 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi} - \frac{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \cos \Phi (b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\| \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi} \\
&= \frac{(b_2 - b_1)}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \\
\kappa|_{t=t_d} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{d^2(d-1)}{(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|}{\frac{d^3}{(t_{d+1}-t_1)^3} \|b_1 - b_0\|^3} \\
&= \frac{(t_{d+1} - t_1)^2 (d-1)}{d(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau|_{t=t_d} \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left(\frac{d}{(t_{d+1}-t_1)} (b_1 - b_0), \frac{d(d-1)}{(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} (b_2 - b_1), \frac{d(d-1)(d-2)(b_3-b_2)}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \right)}{\frac{d^4(d-1)^2}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3(d-1)^2(d-2)(b_1-b_0, b_2-b_1, b_3-b_2)}{(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)}}{\frac{d^4(d-1)^2}{(t_{d+1}-t_1)^2(t_{d+1}-t_2)^2(t_{d+2}-t_2)^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{(d-2)(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}{d(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \cdot \frac{(b_1 - b_0, b_2 - b_1, b_3 - b_2)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|^2} \\
&= \frac{(d-2)(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}{d(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \cdot \frac{\|b_3 - b_2\| \cos \varphi}{\|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_1\| \sin \Phi}
\end{aligned}$$

Burada φ ; $[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)]$ vektörü ile $b_3 - b_2$ vektörleri arasındaki açıdır.

Teorem 3.51 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d nci dereceden bir açık B-spline eğrisinin Frenet vektör alanları; $t = t_{m-d}$ noktalarında;

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} = \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} = -\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \quad (3.58)$$

dir. ϑ , $(b_{n-1} - b_{n-2})$ ile $(b_n - b_{n-1})$ vektörleri arasındaki açıdır.

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\| \sin \vartheta}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \quad (3.59)$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = -\frac{(d-2)}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})\|b_{n-2}-b_{n-3}\| \csc \varphi}{\|(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})\|(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})}$$

burada φ , $(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})$ vektörü ile $(b_{n-2} - b_{n-3})$ vektörleri arasındaki açıdır (Yılmaz Evren, 2020).

İspat:

$$i) \mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1})}{\left\| \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right\|} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$\begin{aligned}
ii) \mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} \\
&= \frac{\left[\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right] \times \left[\frac{d(d-1)(b_n-b_{n-1})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \right]}{\left\| \left[\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (b_n - b_{n-1}) \right] \times \left[\frac{d(d-1)(b_n-b_{n-1})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} - \frac{d(d-1)(b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \right] \right\|}} \\
&= \frac{\frac{-d^2(d-1)(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})}}{\left\| \frac{-d^2(d-1)(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \right\|}} = \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|}
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
iii) \mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} &= \mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} \times \mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} \\
&= \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \times \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \\
&= \frac{\|b_n - b_{n-1}\|^2 (b_{n-1} - b_{n-2}) + \langle b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\|^2 \|b_{n-1} - b_{n-2}\| \sin \vartheta} \\
&= -\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iv) \kappa|_{t=t_{m-d}} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{d^2(d-1)\|(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})\|}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})}}{\frac{d^3}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^3} \|b_n - b_{n-1}\|^3} \\
&= \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\| \sin \vartheta}{\|b_n - b_{n-1}\|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v) \tau|_{t=t_{m-d}} &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left(\frac{d}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}), \left(\frac{d(d-1)}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-1}-t_{m-d-1})} (b_n - b_{n-1}) - \frac{d(d-1)(b_{n-1}-b_{n-2})}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \right), \left[\frac{\frac{d(d-1)(d-2)(b_n-b_{n-1})}{(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)}}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})} + \frac{d(d-1)(d-2)(b_{n-2}-b_{n-3})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})} \right] \right)}{\frac{(d)^4(d-1)^2}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3(d-1)^2(d-2)(b_n-b_{n-1}, b_{n-1}-b_{n-2}, b_{n-2}-b_{n-3})}{(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})}}{\frac{d^4(d-1)^2}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2} \\
&= -\frac{(d-2)}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})}{(t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})} \frac{(b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2}, b_{n-2} - b_{n-3})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|^2} \\
&= -\frac{(d-2)}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2}) \|b_{n-2} - b_{n-3}\| \csc \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\| (t_{m-3} - t_{m-d-1})(t_{m-3} - t_{m-d-2})(t_{m-3} - t_{m-d-3})}
\end{aligned}$$

Burada $\varphi, (b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})$ vektörü ile $(b_{n-2} - b_{n-3})$ vektörleri arasındaki açıdır.

3.3.9. Açık Nurbs Eğrilerinde Frenet Çatısı ve Eğrilikleri

Teorem 3.52 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu takdirde

$$B'(t_d) = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)$$

ve

$$B'(t_{m-d}) = \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$$

dir.

İspat: Bir NURBS eğrisini $B(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i b_i N_{i,d}(t)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,d}(t)}$ olarak yazdığımızda buna $\frac{f}{g}$ dersek;

$B'(t) = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda, f ifadesi kontrol noktaları $(w_i b_i)$ olan g ifadesi de kontrol noktaları (w_i) olan birer B-spline eğrisi olarak düşünülebilir. O halde bu f ve g fonksiyonlarının $t = t_d$ ve $t = t_{m-d}$ noktalarındaki türevleri aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$\begin{aligned} B'(t_d) &= \left(\frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right) \Big|_{t=t_d} \\ &= \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1} (w_1 b_1 - w_0 b_0)}{w_0} - \left(b_0 \frac{\frac{d}{t_{d+1}-t_1} (w_1 - w_0)}{w_0} \right) \\ &= \frac{d}{t_{d+1}-t_1} \left[\frac{w_1 b_1}{w_0} - b_0 - \frac{b_0 w_1}{w_0} + b_0 \right] = \frac{d}{t_{d+1}-t_1} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} B'(t_{m-d}) &= \left(\frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right) \Big|_{t=t_{m-d}} \\ &= \frac{\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1})}{w_n} - \left(b_n \frac{\frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} (w_n - w_{n-1})}{w_n} \right) \\ &= \frac{d}{t_{m-1}-t_{m-d-1}} \\ &\quad \left[\frac{w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1}}{w_n} - \frac{b_n (w_n - w_{n-1})}{w_n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \left[b_n - \frac{w_{n-1}b_{n-1}}{w_n} - b_n + \frac{b_n w_{n-1}}{w_n} \right] \\
&= \frac{d}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} \left[\frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \right]
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.53 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu taktirde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}''(t_d) &= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\
&- \frac{d}{(t_{d+1} - t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[\frac{(d-1)(t_{d+1} + t_{d+2} - t_1 - t_2)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} + \frac{2d}{(t_{d+1} - t_1)} \left(\frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}''(t_{m-d}) &= \\
&\left\{ \frac{w_{n-1}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})} \left[\frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} - \frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-2}} \right] - \frac{2d^2 w_{n-1} (w_n - w_{n-1})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2 w_n} \right\} (b_n - b_{n-1}) - \\
&\frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-2})} (b_n - b_{n-2})
\end{aligned}$$

dir.

İspat: $B = \frac{f}{g}$ dersek, $B' = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$ idi.

$$\begin{aligned}
B'' &= \left[\frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g} \right]' \\
B'' &= \frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}''(t_d) &= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\
&- \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \left[\frac{1}{t_{d+2} - t_2} + \frac{1}{t_{d+1} - t_1} \right] \\
&- 2 \frac{d^2}{(t_{d+1} - t_1)^2} \left(\frac{w_1^2}{w_0^2} - \frac{w_1}{w_0} \right) (b_1 - b_0) \\
&= \frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\
&- \frac{d}{(t_{d+1} - t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[\frac{(d-1)(t_{d+1} + t_{d+2} - t_1 - t_2)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} + \frac{2d}{(t_{d+1} - t_1)} \left(\frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(w_n b_n - w_{n-1} b_{n-1})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})w_n} \\
&\quad - \frac{d(d-1)(w_{n-1} b_{n-1} - w_{n-2} b_{n-2})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})w_n} \\
&\quad - \frac{2d^2}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2} \frac{w_{n-1}}{w_n^2} (b_n - b_{n-1})(w_n - w_{n-1}) \\
&\quad - \frac{b_n}{w_n} \frac{d(d-1)(w_n - w_{n-1})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} \\
&\quad + \frac{b_n}{n} \frac{d(d-1)(w_{n-1} - w_{n-2})}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-1})} \\
&= \left\{ \frac{w_{n-1}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})} \left[\frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-1}} - \frac{1}{t_{m-1} - t_{m-d-2}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{2d^2 w_{n-1} (w_n - w_{n-1})}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2 w_n} \right\} (b_n - b_{n-1}) \\
&\quad - \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{(t_{m-2} - t_{m-d-1})(t_{m-1} - t_{m-d-2})} (b_n - b_{n-2})
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.54 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık NURBS eğrisi verilsin bu taktirde

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}'''(t_d) &= \frac{d(d-1)(d-2)}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0) \\
&\quad - \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left[\frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1 - w_0)}{zykw_0} \right] (b_2 - b_0) \\
&\quad + \frac{w_1 d}{w_0} \left[\frac{\frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz}}{x^2 w_0} \left(\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1 - w_0)}{xw_0} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3d(d-1)}{w_0 xy} \left[\frac{w_1 - w_2}{k} + \frac{w_1 - w_0}{x} \right] \right] (b_1 - b_0)
\end{aligned}$$

dir. Burada

$t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m$ ve $t_{d+1} - t_2 = y$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{B}'''(t_{m-d}) \\
&= \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvw_n} \left(\frac{1}{e} + \frac{h+v}{qh} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3d^2w_{n-1}}{ew_n} \left[\frac{(d-1)(w_n - w_{n-1}) \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right)}{vw_n} + \frac{d-1}{vw_n} \left(\frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q} \right) - \frac{2d(w_n - w_{n-1})^2}{e^2} \right] \right\} (b_n \\
&\quad - b_{n-1}) \\
&\quad + \frac{d(d-1)w_{n-2}}{w_n} \left\{ \frac{3d^2(w_n - w_{n-1})}{evqw_n} - \frac{(d-2)}{uhr} - \frac{(d-2)(h+v)}{uqvh} \right\} (b_n - b_{n-2}) \\
&\quad + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-3})
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$t_{m-3} - t_{m-d-1} = u, \quad t_{m-2} - t_{m-d-1} = v,$$

$$t_{m-1} - t_{m-d-1} = et_{m-1} - t_{m-d-2} = p,$$

$$t_{m-2} - t_{m-d-2} = q, \quad t_{m-3} - t_{m-d-2} = h, \quad t_{m-3} - t_{m-d-3} = r \quad \text{dir.}$$

İspat: $B = \frac{f}{g} \Rightarrow B' = \frac{f'}{g} - B \frac{g'}{g}$ ve $B'' = \frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g}$ idi. O halde

$$\begin{aligned}
B''' &= \left[\frac{f'''g - f''g'}{g^2} \right] - 2 \left[B'' \frac{g'}{g} + B' \left(\frac{g''g - g'g'}{g^2} \right) \right] - \left[B' \frac{g''}{g} + B \left(\frac{g'''g - g''g'}{g^2} \right) \right] \\
&= \frac{f'''g}{g^2} - \frac{f''g'}{g^2} - 2B'' \frac{g'}{g} - 2B' \frac{g''g}{g^2} + 2B' \frac{g'^2}{g^2} - B' \frac{g''}{g} - B \frac{g'''}{g} + B \frac{g''g'}{g^2} \\
&= \frac{f'''}{g} - \frac{g'}{g} \left(\frac{f''}{g} - 2B' \frac{g'}{g} - B \frac{g''}{g} + 2B' \right) - \frac{g''}{g} [3B'] - B \frac{g'''}{g} \\
&= \left\{ \frac{f'''}{g} - 3 \frac{g'}{g} B'' - 3 \frac{g''}{g} B' - B \frac{g'''}{g} \right\}
\end{aligned}$$

dir. O halde;

$$B'''(t_d) = \frac{1}{w_0} \left\{ - \frac{\left[\frac{d(d-1)(d-2)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} (w_3b_3 - w_2b_2) \right]}{\frac{d(d-1)(d-2)[t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3](w_2b_2 - w_1b_1)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_2)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+1} - t_2)}} \right. \\
\left. + \frac{d(d-1)(d-2)(w_1b_1 - w_0b_0)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{w_0} \left\{ \frac{d}{(t_{d+1} - t_1)} (w_1 \right. \\
& \left. - w_0) \left[\frac{\frac{d(d-1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{d}{(t_{d+1} - t_1)} \frac{w_1}{w_0} \left[\frac{(d-1)(t_{d+1} + t_{d+2} - t_1 - t_2)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} + \frac{2d}{t_{d+1} - t_1} \left(\frac{w_1}{w_0} - 1 \right) \right] (b_1 - b_0) \right] \right\} \\
& -\frac{3}{w_0} \left\{ \frac{d}{(t_{d+1} - t_1)} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \left[\frac{d(d-1)(w_2 - w_1)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+2} - t_2)} - \frac{d(d-1)(w_1 - w_0)}{(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)} \right] \right\} \\
& -\frac{b_0}{w_0} \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)(w_3 - w_2)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+3} - t_3)} + \frac{d(d-1)(d-2)(w_1 - w_0)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+1} - t_2)(t_{d+1} - t_1)} \right\} \\
& -\frac{d(d-1)(d-2)(t_{d+1} + t_{d+2} - t_2 - t_3)(w_2 - w_1)}{(t_{d+1} - t_3)(t_{d+2} - t_2)(t_{d+2} - t_3)(t_{d+1} - t_2)} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m$ ve $t_{d+1} - t_2 = y$

alırsak

$$\begin{aligned}
B'''(t_d) &= \frac{d(d-1)(d-2)}{w_0} \left[\frac{w_3 b_3 - w_2 b_2}{zlm} - \frac{(y+l)(w_2 b_2 - w_1 b_1)}{zkly} + \frac{w_1 b_1 - w_0 b_0}{zyx} \right] \\
& -\frac{3d}{xw_0} (w_1 - w_0) \left[\frac{d(d-1)}{yk} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \right. \\
& \left. - \frac{dw_1}{xw_0} (b_1 - b_0) \left[\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d}{x} \left(\frac{w_1 - w_0}{w_0} \right) \right] \right] \\
& -\frac{3dw_1}{xw_0^2} (b_1 - b_0) \left[\frac{d(d-1)(w_2 - w_1)}{yk} - \frac{d(d-1)(w_1 - w_0)}{yx} \right] \\
& -\frac{b_0}{w_0} (d(d-1)(d-2)) \left[\frac{w_3 - w_2}{zlm} + \frac{w_1 - w_0}{zyx} - \frac{(w_2 - w_1)(y+l)}{zkly} \right] \\
& = \frac{d(d-1)(d-2)}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0) - \frac{d(d-1)(d-2)}{zlm} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) \\
& -\frac{d(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) + \frac{d(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \\
& + \frac{d(d-1)(d-2)}{xyz} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) - \frac{3d^2(d-1)w_2(w_1 - w_0)}{zykw_0^2} (b_2 - b_0) \\
& + \frac{3d^2w_1(w_1 - w_0)}{x^2w_0^2} \left[\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1 - w_0)}{xw_0} \right] (b_1 - b_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{3d^2(d-1)w_1(w_2-w_1)}{xw_0^2yk} + \frac{3d^2(d-1)w_1(w_1-w_0)}{x^2yw_0^2} \right] (b_1 - b_0) \\
& = \frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlm} \frac{w_3}{w_0} (b_3 - b_0) \\
& \quad - \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left[\frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1-w_0)}{zykw_0} \right] (b_2 - b_0) \\
& \quad + \frac{w_1d}{w_0} \left[\frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \right. \\
& \quad \left. \frac{3d(w_1-w_0)}{x^2w_0} \left(\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right) \right] (b_1 - b_0) \\
& \quad \left. + \frac{3d(d-1)}{w_0xy} \left[\frac{w_1-w_2}{k} + \frac{w_1-w_0}{x} \right] \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde önce

$$\begin{aligned}
t_{m-3} - t_{m-d-1} &= u, & t_{m-2} - t_{m-d-1} &= v, & t_{m-1} - t_{m-d-1} &= e \\
t_{m-1} - t_{m-d-2} &= p, & t_{m-2} - t_{m-d-2} &= q, & t_{m-3} - t_{m-d-2} &= h \\
t_{m-3} - t_{m-d-3} &= r
\end{aligned}$$

diyelim. Bu durumda

$$B''' = \frac{f'''}{g} - 3\frac{g'}{g}B''' - 3\frac{g''}{g}B' - B\frac{g'''}{g} \text{ idi. O halde}$$

$$\begin{aligned}
B'''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(d-2)}{w_n} \left[\frac{w_nb_n - w_{n-1}b_{n-1}}{uve} + \frac{w_{n-2}b_{n-2} - w_{n-3}b_{n-3}}{uhr} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(h+v)(w_{n-1}b_{n-1} - w_{n-2}b_{n-2})}{uqvh} \right] \\
&\quad - \frac{3d(w_n - w_{n-1})}{ew_n} \left\{ \left[\frac{w_{n-1}}{w_n} \frac{d(d-1)}{v} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) - \frac{2d^2w_{n-1}(w_n - w_{n-1})}{e^2} \right] (b_n - b_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{vq} (b_n - b_{n-2}) \right\} \\
&\quad - \frac{3d^2(d-1)}{vew_n} \left\{ \frac{(w_n - w_{n-1})}{e} - \frac{(w_{n-1} - w_{n-2})}{q} \right\} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \\
&\quad - \frac{d(d-1)(d-2)b_n}{uw_n} \left[\frac{w_n - w_{n-1}}{ve} - \frac{(h+v)(w_{n-1} - w_{n-2})}{qvh} + \frac{(w_{n-2} - w_{n-3})}{hr} \right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
B'''(t_{m-d}) &= -\frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} b_{n-1} + \frac{w_{n-2}d(d-1)(d-2)}{uhrw_n} b_{n-2} \\
&\quad - \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} b_{n-3} - \frac{d(d-1)(d-2)(u+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} b_{n-1} \\
&\quad + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}(h+v)}{uqvhw_n} b_{n-2} - \frac{3d^2(d-1)(w_n - w_{n-1})w_{n-1}}{vew_n^2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p} \right) b_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} b_n + \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}(w_n - w_{n-1})}{vew_n^2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p}\right) b_{n-1} \\
& - \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} b_{n-1} + \frac{3d^2(d-1)w_{n-2}(w_n - w_{n-1})}{evqw_n^2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p}\right) (b_n - b_{n-2}) \\
& - \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}}{vew_n^2} \left(\frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q}\right) (b_n - b_{n-1}) \\
& + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} b_n \\
& + \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} b_n - \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-2}}{uqvhw_n} b_n \\
& - \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}}{uhrw_n} b_n + \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} b_n
\end{aligned}$$

olur. Buradan da;

$$\begin{aligned}
B'''(t_{m-d}) &= \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvew_n} (b_n - b_{n-1}) \\
&+ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-3}) \\
&- \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-2}}{uhrw_n} (b_n - b_{n-2}) + \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-1}}{uqvhw_n} (b_n - b_{n-1}) \\
&- \frac{d(d-1)(d-2)(h+v)w_{n-2}}{uqvhw_n} (b_n - b_{n-2}) \\
&- \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}(w_n - w_{n-1})}{vew_n^2} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p}\right) (b_n - b_{n-1}) \\
&+ \frac{6d^3(w_n - w_{n-1})^2 w_{n-1}}{e^3 w_n} (b_n - b_{n-1}) + \frac{3d^2(d-1)w_{n-2}(w_n - w_{n-1})}{evqw_n^2} (b_n - b_{n-2}) \\
&- \frac{3d^2(d-1)w_{n-1}}{vew_n^2} \left(\frac{(w_n - w_{n-1})}{e} - \frac{(w_{n-1} - w_{n-2})}{q}\right) (b_n - b_{n-1})
\end{aligned}$$

yazılır. Son olarak

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{B}'''(t_{m-d}) \\
&= \left\{ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-1}}{uvw_n} \left(\frac{1}{e} + \frac{h+v}{qh}\right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{3d^2 w_{n-1}}{ew_n} \left[\frac{(d-1)(w_n - w_{n-1})}{vw_n} \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{p}\right) + \frac{d-1}{vw_n} \left(\frac{w_n - w_{n-1}}{e} - \frac{w_{n-1} - w_{n-2}}{q}\right) - \frac{2d(w_n - w_{n-1})^2}{e^2} \right] \right\} (b_n \\
&- b_{n-1}) \\
&+ \frac{d(d-1)w_{n-2}}{w_n} \left\{ \frac{3d^2(w_n - w_{n-1})}{evqw_n} - \frac{(d-2)}{uhr} - \frac{(d-2)(h+v)}{uqvh} \right\} (b_n - b_{n-2})
\end{aligned}$$

$$+ \frac{d(d-1)(d-2)w_{n-3}}{uhrw_n}(b_n - b_{n-3})$$

olur.

Teorem 3.55 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d .nci dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri $t = t_d$ noktasında aşağıdaki şekildedir:

$$\mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_d} = \frac{(b_2 - b_0)}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \quad (3.62)$$

$$\kappa|_{t=t_d} = \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \quad (3.63)$$

$$\tau|_{t=t_d} = \frac{d-2}{d} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_3 - b_0\| \cos \varphi}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \quad (3.64)$$

dir. Burada Φ , $(b_1 - b_0)$ ve $(b_2 - b_0)$ vektörleri arasındaki açıyı ve φ de $(b_3 - b_0)$ ile $(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)$ vektörleri arasındaki açıyı ifade eder. Ayrıca $t_{d+1} - t_1 = x, t_{d+1} - t_3 = z, t_{d+2} - t_2 = k, t_{d+2} - t_3 = l, t_{d+3} - t_3 = m$ ve $t_{d+1} - t_2 = y$ (Yılmaz Evren, 2020).

İspat:

$$1) \mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)}{\left\| \frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \right\|} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}$$

$$\begin{aligned} 2) \mathbf{B}|_{t=t_d} &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{\frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \times \frac{d(d-1)w_2}{ykw_0} (b_2 - b_0)}{\left\| \frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0) \times \frac{d(d-1)w_2}{ykw_0} (b_2 - b_0) \right\|} \\ &= \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \mathbf{N}|_{t=t_d} &= (\mathbf{B} \times \mathbf{T})|_{t=t_d} = \left[\frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \times \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \right] \\ &= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} [(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)] \times (b_1 - b_0) \\ &= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} [\langle (b_1 - b_0), (b_1 - b_0) \rangle (b_2 - b_0) \\ &\quad - \langle (b_1 - b_0), (b_2 - b_0) \rangle (b_1 - b_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|b_1 - b_0\| \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_0\| \sin \Phi} [\|b_1 - b_0\|^2 (b_2 - b_0) \\
&\quad - \|b_1 - b_0\| \|b_2 - b_0\| \cos \Phi (b_1 - b_0)] \\
&= \frac{b_2 - b_0}{\|b_2 - b_0\| \sin \Phi} - \frac{(b_1 - b_0) \cos \Phi}{\|b_1 - b_0\| \sin \Phi} = \frac{(b_2 - b_0)}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \\
4) \quad \kappa|_{t=t_d} &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{d^2(d-1)w_1w_2}{xykw_0^2} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|}{\frac{d^3w_1^3}{x^3w_0^3} \|b_1 - b_0\|^3} \\
&= \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
5) \quad \tau|_{t=t_d} &= \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\
&= \frac{\left(\begin{aligned} &\frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0), \frac{d(d-1)}{yk} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) - \frac{d}{x} \frac{w_1}{w_0} \left[\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right] (b_1 - b_0) \\ &\frac{d(d-1)(d-2)w_3}{zlmw_0} (b_3 - b_0) - \frac{d(d-1)w_2}{w_0} \left(\frac{d-2}{zlm} + \frac{d-2}{zkly} + \frac{3d(w_1-w_0)}{zykw_0} \right) (b_2 - b_0) \\ &+ \frac{w_1d}{w_0} \left\{ \frac{(d-1)(d-2)(y+l)}{zkly} + \frac{(d-1)(d-2)}{xyz} + \frac{3d(w_1-w_0)}{x^2w_0} \left(\frac{(d-1)(x+k)}{yk} + \frac{2d(w_1-w_0)}{xw_0} \right) \right\} (b_1 - b_0) \end{aligned} \right)}{\frac{d^4(d-1)^2w_1^2w_2^2}{x^2y^2k^2w_0^4} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3}{x} \frac{w_1}{w_0} \frac{(d-1)^2}{yk} \frac{w_2}{w_0} \frac{(d-2)w_3}{zlmw_0} (b_1 - b_0, b_2 - b_0, b_3 - b_0)}{\frac{d^4(d-1)^2w_1^2w_2^2}{x^2y^2k^2w_0^4} \|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|^2} \\
&= \frac{d-2}{d} \frac{w_0w_3}{w_1w_2} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_3 - b_0\| \cos \varphi}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.56 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d. dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin Frenet vektör alanları ve eğrilikleri $t = t_{m-d}$ noktasında aşağıdaki şekildedir:

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} = -\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \quad (3.66)$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \quad (3.67)$$

burada $\Phi, b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır.

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{e^2(d-1)}{dvp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \quad (3.68)$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = \frac{(d-2)w_n w_{n-3}}{dw_{n-1} w_{n-2}} \frac{evp}{uhr} \frac{\|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \quad (3.69)$$

Burada $\varphi, (b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})$ ile $(b_n - b_{n-3})$ vektörleri arasındaki açıdır.

Ayrıca

$$t_{m-3} - t_{m-d-1} = u, \quad t_{m-2} - t_{m-d-1} = v,$$

$$t_{m-1} - t_{m-d-1} = e t_{m-1} - t_{m-d-2} = p,$$

$$t_{m-2} - t_{m-d-2} = q, \quad t_{m-3} - t_{m-d-2} = h, \quad t_{m-3} - t_{m-d-3} = r$$

(Yılmaz Evren, 2020).

İspat:

$$1) \mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})}{\left\| \frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \right\|} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$2) \mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{-\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{d(d-1)w_{n-2}}{vp_n} (b_n - b_{n-2})}{\left\| -\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{d(d-1)w_{n-2}}{vp_n} (b_n - b_{n-2}) \right\|}$$

$$= -\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|}$$

$$3) \mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} = (\mathbf{B} \times \mathbf{T})|_{t=t_{m-d}} = -\frac{[(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})]}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \times \frac{(b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$= -\frac{\langle b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-1} \rangle (b_n - b_{n-2}) - \langle b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1})}{\|b_n - b_{n-1}\| \|b_n - b_{n-1}\| \|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}$$

$$= \left(\frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi} \right) - \left(\frac{b_n - b_{n-1} \cos \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\| \sin \Phi} \right)$$

$$= \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi$$

burada $\Phi, b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır.

$$4) \kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\left\| \frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{vp} (b_n - b_{n-2}) \right\|}{\frac{d^3}{e^3} \frac{w_{n-1}^3}{w_n^3} \|b_n - b_{n-1}\|^3}$$

$$= \frac{e^2(d-1)}{dvp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\|^2}$$

$$5) \tau|_{t=t_{m-d}} = \frac{(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\left\langle \left(\frac{d}{e} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1}) \times \frac{w_{n-2}}{w_n} \frac{d(d-1)}{vp} (b_n - b_{n-2}) \right), \left(\frac{d(d-1)(d-2)}{uhr} \frac{w_{n-3}}{w_n} (b_n - b_{n-3}) \right) \right\rangle}{\frac{d^4(d-1)^2}{e^2 v^2 p^2} \frac{w_{n-1}^2 w_{n-2}^2}{w_n^4} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{\frac{d^3(d-1)^2(d-2)w_{n-1}w_{n-2}w_{n-3}}{evpuhrw_n^3} (b_n - b_{n-1}, b_n - b_{n-2}, b_n - b_{n-3})}{\frac{d^4(d-1)^2 w_{n-1}^2 w_{n-2}^2}{e^2 v^2 p^2 w_n^4} \|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|^2} \\
&= \frac{(d-2)w_n w_{n-3} evp}{dw_{n-1} w_{n-2} uhr} \frac{\|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|}
\end{aligned}$$

Burada φ , $(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})$ ile $(b_n - b_{n-3})$ vektörleri arasındaki açıdır.

3.3.10 t=1 için Bezier Eğrisinin Eğrilikleri ve Frenet Formülü

Teorem 3.57 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = 1$ noktasındaki Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}|_{t=1} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{B}|_{t=1} = \frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{N}|_{t=1} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \bar{\psi} - \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \bar{\psi} \quad (3.72)$$

burada $\bar{\psi}$, $b_{n-1} - b_{n-2}$ ve $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak, 2018).

Teorem 3.58 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman, verilen $B(t)$ bezier eğrisinin $t = 1$ noktasındaki eğriliği ve burulması aşağıdaki gibidir.

$$\kappa|_{t=1} = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \quad (3.73)$$

$$\tau|_{t=1} = -\frac{n-2}{n} \frac{(b_n - b_{n-1})(b_{n-1} - b_{n-2})(b_{n-2} - b_{n-3})}{\|((b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2}))\|^2} \quad (3.74)$$

burada $\bar{\psi}$, $b_{n-1} - b_{n-2}$ ve $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır (Samancı Kuşak, 2018).

Teorem 3.59 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ nin $t = 1$ ' da Serret-Frenet çatısının türev formülleri aşağıdadır.

$$\mathbf{T}'|_{t=1} = (n-1) \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_1 - b_0\|} \sin \psi \mathbf{N} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}'|_{t=1} = & \\
& -(n-1) \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|} \sin \psi \mathbf{T} + (n- \\
& 2) \frac{\|b_n-b_{n-1}\|(b_n-b_{n-1})(b_n-b_{n-1})(b_{n-1}-b_{n-2})(b_{n-2}-b_{n-3})}{\|(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})\|^2} \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\mathbf{B}'|_{t=1} = -(n-2) \frac{\|b_n-b_{n-1}\| \langle (b_1-b_0) \times (b_2-b_1), (b_3-b_2) \rangle}{\|(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})\|^2} \mathbf{N} \tag{3.77}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1 Hibrit Çatısına göre Bezier Eğrileri

Bu bölümde Bezier eğrisi $B(t)$ eğrisinin ve rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ nin Hibrit vektör alanları ve eğrilikleri bulundu. Daha sonra B-spline ve $\delta NURBS$ eğrilerinin Hibrit vektör alanları ve eğriliklerini veren teoremler verildi.

Teorem 4.1 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki Hibrit vektör alanları aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=0} = \cos \eta \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \psi + \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \psi \right) + \sin \eta \left(\frac{(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)\|} \right), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=0} = \sin \eta \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \psi + \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \psi \right) - \cos \eta \left(\frac{(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \wedge (b_2 - b_1)\|} \right), \quad (4.3)$$

burada ψ , $b_1 - b_0$ ve $b_2 - b_1$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Bishop ve Hibrit çatılarının tanımından

$$\mathbf{B}_1 = \cos \beta (\cos \alpha \mathbf{N} - \sin \alpha \mathbf{B}) + \sin \beta (\sin \alpha \mathbf{N} + \cos \alpha \mathbf{B})$$

olarak elde edilir. Son eşitlikten

$$\mathbf{B}_1 = (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) \mathbf{N} + (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) \mathbf{B}$$

olur. $\eta = \beta - \alpha$ olmak üzere

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \mathbf{N} + \sin \eta \mathbf{B}$$

olur. Benzer şekilde

$$\mathbf{B}_2 = -\sin \beta (\cos \alpha \mathbf{N} - \sin \alpha \mathbf{B}) + \cos \beta (\sin \alpha \mathbf{N} + \cos \alpha \mathbf{B}),$$

olarak elde edilir. Son eşitlikten

$$\mathbf{B}_2 = (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) \mathbf{N} + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \mathbf{B}$$

olur. $\eta = \beta - \alpha$ olmak üzere

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \mathbf{N} - \cos \eta \mathbf{B},$$

olur. Teorem 3.32 da verilen $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Frenet vektör alanları eşitliklerinden $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|},$$

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|} \csc \psi + \frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|} \cot \psi \right) + \sin \eta \left(\frac{(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \wedge (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \wedge (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\|} \right),$$

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \left(\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|} \csc \psi + \frac{\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|} \cot \psi \right) - \cos \eta \left(\frac{(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \wedge (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{\|(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) \wedge (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\|} \right),$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.2 Kontrol noktaları $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta, \quad (4.5)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

burada ψ , $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ ve $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Tanım (3.13) ve (3.14) den

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa \cos \theta \cos \beta + \kappa \sin \theta \sin \beta,$$

olur. Benzer olarak

$$\tilde{\kappa}_2 = -\kappa \cos \theta \sin \beta + \kappa \sin \theta \cos \beta,$$

olarak bulunur. Teorem (3.70) gözönüne alınırsa $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1\|}{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

bulunur.

Teorem 4.3 Kontrol noktaları $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının türev denklemleri,

$$\mathbf{T}' = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \cos\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \sin\beta \right) \mathbf{B}_1 + \left(-\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \sin\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \cos\beta \right) \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}'_1 = \left(-\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \cos\beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \sin\beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2 = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \sin\beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \cos\beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_2,$$

İspat. Teorem 4.2 den $B(t)$ eğrisinin eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \cos\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \sin\beta,$$

$$\kappa_2 = -\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \sin\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \cos\beta,$$

$$\kappa_3 = \beta',$$

eşitlikler ile verilir. Bu son eşitlikler ve Tanım 3.14 Hibrit çatısının türev denklemleriyle $B(t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının türev denklemleri

$$\mathbf{T}' = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \cos\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \sin\beta \right) \mathbf{B}_1 + \left(-\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \sin\beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \cos\beta \right) \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}'_1 = \left(-\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \cos\beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \sin\beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2 = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \cos\theta \sin\beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2 - b_1\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin\psi \sin\theta \cos\beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_2,$$

olarak bulunur.

Teorem 4.4 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \cos\eta \csc\psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \cos\eta \cot\psi + \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|} \cos\eta, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \sin\eta \csc\psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \sin\eta \cot\psi - \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|} \cos\eta \quad (4.8)$$

burada ψ , $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ ve $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Teorem 3.35 den rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Frenet vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|},$$

$$\mathbf{B}|_{t=0} = \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|},$$

$$\mathbf{N}|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \csc \psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \cot \psi,$$

eşitlikleriyle verilir. Tanım 3.14 Hibrit çatının tanımından

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \mathbf{N} + \sin \eta \mathbf{B},$$

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \mathbf{N} - \cos \eta \mathbf{B},$$

ve burada $\eta = \beta - \alpha$ dır. Dolayısıyla buradan rasyonel $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=0} = \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \cos \eta \csc \psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \cos \eta \cot \psi + \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|} \cos \eta,$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=0} = \frac{p_2 - p_0}{\|p_2 - p_0\|} \sin \eta \csc \psi + \frac{p_1 - p_0}{\|p_1 - p_0\|} \sin \eta \cot \psi - \frac{(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)}{\|(p_2 - p_0) \times (p_1 - p_0)\|} \cos \eta,$$

bulunur.

Teorem 4.5 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. Daha sonra rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

burada ψ , $p_1 - p_0$ ve $p_2 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır ve $\Phi(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0)$ ve $p_3 - p_0$ vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. Tanım (3.13) ve tanım (3.14) Bishop ve Hibrit çatılarının tanımları birlikte ele alındığında

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa \cos \theta \cos \beta + \kappa \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\kappa \cos \theta \sin \beta + \kappa \sin \theta \cos \beta,$$

olarak verilir. Teorem (3.73) den rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki eğrilikleri

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi$$

$$\tau = \frac{n-2}{n} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{\|p_3 - p_0\| \cos \Phi}{\|p_1 - p_0\| \|p_2 - p_0\| \sin \psi}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Buradan rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ 'nin noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

elde edilir.

Teorem 4.6 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ 'nin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının türev denklemleri,

$\mathbf{T}' =$

$$\left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 +$$

$$\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}'_1 = \left(-\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta - \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T}$$

$$+ \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2 = \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_2,$$

İspat. Teorem 4.5 den rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta, \\ \tilde{\kappa}_2 &= \frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta, \\ \tilde{\kappa}_3 &= \beta',\end{aligned}$$

eşitlikler ile verilir. Bu son eşitlikler ve Tanım 3.14 Hibrit çatısının türev denklemleriyle $RB(t)$ eğrisinin $t = 0$ noktasındaki Hibrit çatısının türev denklemleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 + \\ &\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}'_1 &= \left(-\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \cos \beta - \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T} \\ &\quad + \beta' \mathbf{B}_2, \\ \mathbf{B}'_2 &= \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \cos \theta \sin \beta + \frac{1-n}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|p_2 - p_0\|}{\|p_1 - p_0\|^2} \sin \psi \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_2,\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.7 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit vektör alanları

$$\begin{aligned}\mathbf{T}|_{t=t_0} &= \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|}, \\ \mathbf{B}_1|_{t=t_0} &= \cos \eta \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) + \sin \eta \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \right. \\ &\quad \left. \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) \\ \mathbf{B}_2|_{t=t_0} &= \sin \eta \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) \\ &\quad - \cos \eta \left(\frac{(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|} \right),\end{aligned}$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Hibrit çatısının tanımından

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \mathbf{N} + \sin \eta \mathbf{B}$$

denklemleriyle verilir. Herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Frenet vektör alanı Teorem 3.76 dan

$$\mathbf{T}|_{t=t_0} = \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|}$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_0} = \frac{(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|}$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_0} = \frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Son eşitliklerden $\mathbf{B}_1$ vektör alanı

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = \cos \eta & \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) + \sin \eta \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} \right. \\ & \left. + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\mathbf{B}_2 = \sin \eta \mathbf{N} - \cos \eta \mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \left(\frac{b_2^{n-2} - b_1^{n-1}}{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|} \csc \bar{\psi} + \frac{b_1^{n-1} - b_0^n}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|} \cot \bar{\psi} \right) - \cos \eta \left(\frac{(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|} \right),$$

olarak bulunur.

Teorem 4.8 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman, verilen $B(t)$ bezier eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Hibrit çatısının tanımından

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa \cos \theta \cos \beta + \kappa \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\kappa \cos \theta \sin \beta + \kappa \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

denklemleriyle ile tanımlanır. Herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki eğriliği ve burulması Teorem 3.40 dan

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi}$$

$$\tau = \frac{n-2 \langle (b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1}), (b_3^{n-3} - b_2^{n-2}) \rangle}{\|(b_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_2^{n-2} - b_1^{n-1})\|^2},$$

eşitlikleriyle verilir. Buradan herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.9 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının türev formülleri

$$\mathbf{T}'|_{t=t_0} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 +$$

$$\left(\frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}'_1|_{t=t_0} = \left(\frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2|_{t=t_0} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_1,$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Teorem 4.8 den herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta'$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Buradan Hibrit çatısı tanımı gözönüne alındığında $B(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $B(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının türev formülleri

$$\mathbf{T}'|_{t=t_0} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 +$$

$$\left(\frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{B}'_1|_{t=t_0} = \left(\frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2|_{t=t_0} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{1-n}{n} \frac{\|b_2^{n-2} - b_1^{n-1}\|}{\|b_1^{n-1} - b_0^n\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_1,$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

Teorem 4.10 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. $RB(t)$ Bezier eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_0} = \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{\|p_1^{n-1} - p_0^n\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_0} = \cos \eta \left(\frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \right) + \sin \eta \left(\frac{(p_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_1^{n-1} - b_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \right),$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_0} = \sin \eta \left(\frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \right) - \cos \eta \left(\frac{(p_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_1^{n-1} - b_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \right),$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Hibrit çatısının tanımından

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \mathbf{N} + \sin \eta \mathbf{B}$$

denklemleriyle verilir. Herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $RB(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Frenet vektör alanı Teorem 3.42 dan

$$\mathbf{T}|_{t=t_0} = \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{\|p_1^{n-1} - p_0^n\|},$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_0} = \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi},$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_0} = \frac{(p_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_1^{n-1} - b_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)},$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Son eşitliklerden $\mathbf{B}_1$ vektör alanı

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \left(\frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \right) + \sin \eta \left(\frac{(p_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_1^{n-1} - b_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \right)$$

olarak elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \mathbf{N} - \cos \eta \mathbf{B}$$

olmak üzere

$$\mathbf{B}_2 = \sin \eta \left(\frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_2^{n-2} - p_0^n} \csc \bar{\psi} + \frac{p_1^{n-1} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n} \cot \bar{\psi} \right) - \cos \eta \left(\frac{(p_1^{n-1} - b_0^n) \times (b_1^{n-1} - b_0^n)}{(p_2^{n-2} - p_0^n) \times (p_1^{n-1} - p_0^n)} \right),$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.11 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. $RB(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1 = \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2 = \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Hibrit çatısının tanımından

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa \cos \theta \cos \beta + \kappa \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\kappa \cos \theta \sin \beta + \kappa \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

denklemleriyle tanımlanır. Herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $RB(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki eğriliği ve burulması Teorem 3.43 den

$$\kappa = \frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \sin \bar{\psi},$$

$$\tau = \frac{n-2}{2} \frac{w_0^n w_3^{n-3}}{w_1^{n-1} w_2^{n-2}} \frac{p_3^{n-3} - p_0^n}{p_1^{n-1} - p_0^n p_2^{n-2} - p_0^n \sin \bar{\psi}},$$

eşitlikleriyle verilir. Buradan herhangi bir $t_0 \in [0,1]$ parametresindeki $RB(t)$ eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \\ \tilde{\kappa}_2 &= \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \\ \tilde{\kappa}_3 &= \beta',\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.12 Kontrol noktaları $p_0, p_1, \dots, p_n$ ve ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ile verilen n . dereceden bir rasyonel Bezier eğrisi $RB(t)$ olsun. $RB(t)$ eğrisinin $t = t_0$ daki Hibrit çatısının türev denklemleri

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'|_{t=t_0} &= \left(\left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \right. \\ &\left. \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta\right) \mathbf{B}_1 + \left(\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \right. \\ &\left. \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta\right) \mathbf{B}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'_1|_{t=t_0} &= \left(\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \right. \\ &\left. \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta\right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'_2|_{t=t_0} &= \left(\left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \right. \\ &\left. \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta\right) \mathbf{T} \\ &- \beta' \mathbf{B}_2,\end{aligned}$$

burada $\bar{\psi}$, $b_2^{n-2} - b_1^{n-1}$ ve $b_1^{n-1} - b_0^n$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Teorem 4.11 den $RB(t)$ rasyonel Bezier eğrisinin $t = t_0$ için $RB(t_0)$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}_1 &= \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \\ \tilde{\kappa}_2 &= \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2}\right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \\ \tilde{\kappa}_3 &= \beta',\end{aligned}$$

eşitlileriyle verilmektedir. Buradan bu eğrilikler Hibrit çatısının türev denklemlerinde yazılırsa $RB(t)$ eğrisinin $t = t_0$ daki Hibrit çatısının türev denklemleri

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'|_{t=t_0} = & \left(\left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \right. \\ & \left. \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 + \left(\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \right. \\ & \left. \left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_1|_{t=t_0} = & \left(\left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \right. \\ & \left. \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_2|_{t=t_0} = & \left(\left(\frac{n-1}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \right. \\ & \left. \left(\frac{1-n}{n} \frac{w_0^n - w_2^{n-2}}{(w_1^{n-1})^2} \frac{p_2^{n-2} - p_0^n}{p_1^{n-1} - (p_0^n)^2} \right) \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} \\ & - \beta' \mathbf{B}_2, \end{aligned}$$

olarak elde bulunur.

Teorem 4.13 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$

olan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_d} = \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \cos \eta + \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \sin \eta,$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_d} = \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \sin \eta - \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \cos \eta,$$

Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_1$ arasındaki açıdır.

İspat. Hibrit çatısının tanımından

$$\mathbf{B}_1 = \cos \eta \mathbf{N} + \sin \eta \mathbf{B}$$

denklemlerle verilir. Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Frenet vektör alanı Teorem 3.50 den

$$\mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|},$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_d} = \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|},$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_d} = \frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi,$$

Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_1$ arasındaki açılar olmak üzere eşitlikleriyle tanımlanır. Burada $\mathbf{B}_1$ vektör alanı,

$$\mathbf{B}_1 = \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \cos \eta + \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \sin \eta,$$

olarak elde edilir. Öte yandan $\mathbf{B}_2 = \sin \eta \mathbf{N} - \cos \eta \mathbf{B}$ olmak üzere

$$\mathbf{B}_2 = \left(\frac{b_2 - b_1}{\|b_2 - b_1\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \sin \eta - \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|} \cos \eta,$$

olarak bulunur.

Teorem 4.14 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_d} = \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_d} = \beta',$$

burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_1$ arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Teorem 3.50 den d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_d$ eğrilikleri

$$\kappa|_{t=t_d} = \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi$$

$$\tau|_{t=t_d} = \frac{(d-2)(t_{d+1}-t_1)(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)}{d(t_{d+1}-t_3)(t_{d+2}-t_3)(t_{d+3}-t_3)} \frac{\|b_3-b_2\| \cos \varphi}{\|b_1-b_0\| \|b_2-b_1\| \sin \Phi}$$

burada φ ; $[(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)]$ vektörü ile $b_3 - b_2$ vektörleri arasındaki açıdır. Buradan Hibrit çatının tanımından d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_d} = \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{(t_{d+1}-t_1)^2(d-1)}{d(t_{d+1}-t_2)(t_{d+2}-t_2)} \frac{\|b_2-b_1\|}{\|b_1-b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_d} = \beta',$$

olarak elde edilir. Burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_1$ arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

Teorem 4.15 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_{m-d}} = \left(-\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \right) \cos \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \right) \sin \eta$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_{m-d}} = \left(-\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \right) \sin \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \right) \cos \eta$$

burada ϑ , $b_{n-1} - b_{n-2}$ ile $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. Teorem 3.51 dan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Frenet vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} = \frac{-(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|}$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} = -\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta$$

dir. ϑ , $(b_{n-1} - b_{n-2})$ ile $(b_n - b_{n-1})$ vektörleri arasındaki açıdır. Son eşitlikler Hibrit çatı denklemlerinde yazılırsa d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_{m-d}} = \left(-\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \right) \cos \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \right) \sin \eta$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_{m-d}} = \left(-\frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \vartheta + \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \vartheta \right) \sin \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \right) \cos \eta$$

bulunur. Burada ϑ , $b_{n-1} - b_{n-2}$ ile $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır.

Teorem 4.16 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_{m-d}} = \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2 (d-1)}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \vartheta \cos \theta \cos \beta +$$

$$\frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1} - t_{m-d-1})^2 (d-1)}{(t_{m-1} - t_{m-d-1})(t_{m-2} - t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \vartheta \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2|_{t=t_{m-d}} = \frac{1-d}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \cos\theta \sin\beta +$$

$$\frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \sin\theta \cos\beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_{m-d}} = \beta',$$

burada ϑ , $b_{n-1} - b_{n-2}$ ile $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. Teorem 3.51 dan d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki eğrilikleri

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2}{(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\| \sin\vartheta}{\|b_n-b_{n-1}\|^2}$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = -\frac{(d-2)}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})\|b_{n-2}-b_{n-3}\| \csc\varphi}{\|(b_n-b_{n-1}) \times (b_{n-1}-b_{n-2})\|(t_{m-3}-t_{m-d-1})(t_{m-3}-t_{m-d-2})(t_{m-3}-t_{m-d-3})}$$

eşiklikleriyle tanımlanır. Buradan Hibrit çatı tanımından d . dereceden bir açık B-spline eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_{m-d}} = \frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \cos\theta \cos\beta +$$

$$\frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \sin\theta \sin\beta$$

$$\tilde{\kappa}_2|_{t=t_{m-d}} = \frac{1-d}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \cos\theta \sin\beta +$$

$$\frac{d-1}{d} \frac{(t_{m-1}-t_{m-d-1})^2(d-1)}{(t_{m-1}-t_{m-d-1})(t_{m-2}-t_{m-d-2})} \frac{\|b_{n-1}-b_{n-2}\|}{\|b_n-b_{n-1}\|^2} \sin\vartheta \sin\theta \cos\beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_{m-d}} = \beta',$$

olarak bulunur. Burada burada ϑ , $b_{n-1} - b_{n-2}$ ile $b_n - b_{n-1}$ vektörleri arasındaki açıdır.

Teorem 4.17 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_d} = \frac{b_1-b_0}{\|b_1-b_0\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_d} = \left(\frac{b_2-b_0}{\|b_2-b_0\|} \csc\Phi - \frac{b_1-b_0}{\|b_1-b_0\|} \cot\Phi \right) \cos\eta + \frac{(b_1-b_0) \times (b_2-b_0)}{\|(b_1-b_0) \times (b_2-b_0)\|} \sin\eta,$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_d} = \left(\frac{b_2-b_0}{\|b_2-b_0\|} \csc\Phi - \frac{b_1-b_0}{\|b_1-b_0\|} \cot\Phi \right) \sin\eta - \frac{(b_1-b_0) \times (b_2-b_0)}{\|(b_1-b_0) \times (b_2-b_0)\|} \cos\eta,$$

burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_0$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

İspat. Teorem 3.56 den d .nci dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Frenet vektör alanı

$$\begin{aligned} \mathbf{T}|_{t=t_d} &= \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \\ \mathbf{B}|_{t=t_d} &= \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \\ \mathbf{N}|_{t=t_d} &= \frac{(b_2 - b_0)}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{(b_1 - b_0)}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Son eşitlikler Hibrit çatı denkleminde yazılırsa d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}|_{t=t_d} &= \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|}, \\ \mathbf{B}_1|_{t=t_d} &= \left(\frac{b_2 - b_0}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \cos \eta + \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \sin \eta, \\ \mathbf{B}_2|_{t=t_d} &= \left(\frac{b_2 - b_0}{\|b_2 - b_0\|} \csc \Phi - \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|} \cot \Phi \right) \sin \eta - \frac{(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \cos \eta, \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_0$ vektörleri arasındaki açı ve $\eta = \beta - \alpha$ dır.

Teorem 4.18 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_1|_{t=t_d} &= \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta, \\ \tilde{\kappa}_2|_{t=t_d} &= \frac{1-d}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta, \\ \tilde{\kappa}_3|_{t=t_d} &= \beta' \end{aligned}$$

burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_0$ vektörleri arasındaki açı ve $t_{d+1} - t_1 = x$, $t_{d+2} - t_2 = k$, $t_{d+1} - t_2 = y$ dir.

İspat. Teorem 3.56 den d .nci dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki eğrilikleri

$$\begin{aligned} \kappa|_{t=t_d} &= \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \\ \tau|_{t=t_d} &= \frac{d-2}{d} \frac{w_0 w_3}{w_1 w_2} \frac{xyk}{zlm} \frac{\|b_3 - b_0\| \cos}{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_0)\|} \end{aligned}$$

denklemleriyle tanımlanır. Burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_0$ vektörleri arasındaki açıdır. Son eşitlikler Hibrit çatının eğrilikleri tanımında gözönüne alırsak d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_d$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_d} = \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2|_{t=t_d} = \frac{1-d}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{d-1}{d} \frac{x^2}{yk} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|b_2 - b_0\|}{\|b_1 - b_0\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_d} = \beta'$$

burada Φ , $b_1 - b_0$ ile $b_2 - b_0$ vektörleri arasındaki açı ve $t_{d+1} - t_1 = x$, $t_{d+2} - t_2 = k$, $t_{d+1} - t_2 = y$ dir.

Teorem 4.19 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_{m-d}} = \left(\frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \right) \cos \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \right) \sin \eta,$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_{m-d}} = \left(\frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \right) \sin \eta + \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \right) \cos \eta,$$

burada Φ , $b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır.

İspat. Teorem 3.57 den d . dereceden bir açık α NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Frenet vektör alanları

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$\mathbf{B}|_{t=t_{m-d}} = - \frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|}$$

$$\mathbf{N}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Burada Φ , $b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır. Buradan Hibrit çatının tanımından d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit vektör alanları,

$$\mathbf{T}|_{t=t_{m-d}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|},$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=t_{m-d}} = \left(\frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \right) \cos \eta - \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \right) \sin \eta,$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=t_{m-d}} = \left(\frac{b_n - b_{n-2}}{\|b_n - b_{n-2}\|} \csc \Phi - \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \Phi \right) \sin \eta + \left(\frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|} \right) \cos \eta,$$

burada Φ , $b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır.

Teorem 4.20 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile ağırlıkları $w_0, w_1, \dots, w_n$ ve knot vektörleri $t_0 = t_1 = \dots = t_d; t_{d+1}, t_{d+2}, \dots, t_{m-d-1}; t_{m-d} = t_{m-d+1} = \dots = t_m$ olan d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_{m-d}} = \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2|_{t=t_{m-d}} = \frac{f^2(1-d)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_{m-d}} = \beta'$$

burada Φ , $b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açı ve $t_{m-2} - t_{m-d-1} = c$, $t_{m-1} - t_{m-d-1} = f$, $t_{m-1} - t_{m-d-2} = y$ dir.

İspat. Teorem 3.56 den d . dereceden bir açık α NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki eğrilikleri

$$\kappa|_{t=t_{m-d}} = \frac{e^2(d-1)}{dvp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\| \sin \Phi}{\|b_n - b_{n-1}\|^2}$$

$$\tau|_{t=t_{m-d}} = \frac{(d-2)w_n w_{n-3}}{dw_{n-1} w_{n-2}} \frac{evp}{uhr} \frac{\|b_n - b_{n-3}\| \cos \varphi}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_n - b_{n-2})\|}$$

denklemleriyle tanımlanır. Burada $\Phi, b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açıdır. Son eşitlikler Hibrit çatının eğrilikleri tanımında gözönüne alırsak d . dereceden bir açık δ NURBS eğrisinin $t = t_{m-d}$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri

$$\tilde{\kappa}_1|_{t=t_{m-d}} = \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \cos \theta \cos \beta + \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \sin \theta \sin \beta$$

$$\tilde{\kappa}_2|_{t=t_{m-d}} = \frac{f^2(1-d)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \cos \theta \sin \beta + \frac{f^2(d-1)}{dcp} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|b_n - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \Phi \sin \theta \cos \beta$$

$$\tilde{\kappa}_3|_{t=t_{m-d}} = \beta'$$

burada Φ , $b_n - b_{n-1}$ ile $b_n - b_{n-2}$ vektörleri arasındaki açı ve $t_{m-2} - t_{m-d-1} = c$, $t_{m-1} - t_{m-d-1} = f$, $t_{m-1} - t_{m-d-2} = y$ dir.

Teorem 4.21 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. O zaman Bezier eğrisi $B(t)$ 'nin $t = 1$ noktasındaki Hibrit vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}|_{t=1} = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|}$$

$$\mathbf{B}_1|_{t=1} = \frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} \cos \eta + \sin \eta \left(\frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \bar{\psi} - \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \bar{\psi} \right)$$

$$\mathbf{B}_2|_{t=1} = \sin \eta \frac{(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})}{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|} - \cos \eta \left(\frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|} \cot \bar{\psi} - \frac{b_{n-1} - b_{n-2}}{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|} \csc \bar{\psi} \right).$$

İspat. Hibrit çatı tanımından ve teorem 3.58 den teorem 4.20 elde edilir.

Teorem 4.22 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ eğrisinin $t = 1$ noktasındaki Hibrit çatısının eğrilikleri,

$$\tilde{\kappa}_1 = \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -\frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta,$$

$$\tilde{\kappa}_3 = \beta',$$

İspat. Hibrit çatı tanımından ve teorem 3.59 den teorem 4.21 elde edilir.

Teorem 4.23 Kontrol noktaları $b_0, b_1, \dots, b_n$ ile verilen n . dereceden bir Bezier eğrisi $B(t)$ olsun. $B(t)$ 'nin $t = 1$ noktasındaki Hibrit çatısının türev denklemleri,

$$\mathbf{T}'|_{t=1} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{B}_1 + \left(-\frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta - \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_1|_{t=1} = -\left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \cos \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \sin \beta \right) \mathbf{T} + \beta' \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{B}'_2|_{t=1} = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \cos \theta \sin \beta + \frac{n-1}{n} \frac{\|b_{n-1} - b_{n-2}\|}{\|b_n - b_{n-1}\|^2} \sin \bar{\psi} \sin \theta \cos \beta \right) \mathbf{T} - \beta' \mathbf{B}_1,$$

İspat. Hibrit çatı tanımından ve teorem 4.21 den teorem 4.23 elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada $B(t)$, $RB(t)$, B-spline ve NURBS eğrilerinin Hibrit çatısına göre vektör alanları ve eğrilikleri elde edildi. Bu çalışma farklı uzaylarda ve 4-boyutlu uzaylarda incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Arbin, A. R., Reddy, 2018. A one-dimensional model of 3-D structure for large deformation: a general higher-order rod theory, *Acta Mechanica*, 229, 1803-1831.
- Arbin, A. R., Reddy, 2019. A nonlinear 1-D finite element analysis of rods/tubes made of incompressible neo-Hookean materials using higher-order theory, *International Journal of Solids and Structures*, 166, 2019.
- Abdel-Aziz, H. S., Zanaty, E. A., Ali. H. A., Khalifa Saad, M., Generating Bezier curves for medical image reconstruction, *Results in Physics*, 23, 103996.
- Bishop, R. L., 1975. There is more than one way to frame a curve space, *The Amer. Math. Monthly*, 82(3), 246-251.
- Bükçü, B., Karacan, M. K., 2008. Special Bishop Motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve, *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.*, 6(1), 27-34.
- Bükçü, B., Karacan, M. K., 2009. The Slant Helices according to Bishop frame, *Int. J. Math. Comput. Sci.*, 3(11), 67-70.
- Do Carmo, M.P., 1976, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dede, M., Ekici, C., Güven, İ. A., 2018. Directional Bertrand Curves, *Gazi University Journal of Science*, 31(1), 202-211.
- Evren Yılmaz, S., (2020). Bertrand Nurbs Eğrileri Üzerine, Yüksek Lisans Tez, Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.
- Farouki, R. T., Szafran, N., Biard, L., 2009. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries, *Computer Aided Design*, 41, 772-781.
- Gray, A. 1998, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press LLC.

- Hoschek, J. 1992. Circular splines. *Computer-Aided Design*, 24(11), 611-618.
- İncesu, M., Gursuoy, O. 2004, Bezier Yüzeylerinde Esas Formlar ve eğrilikler, XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu, 146-157.
- İncesu M., (2003), Bezier eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Matlab ile Sayısal Algoritmalar, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- İncesu, M., Kiren, Z., Arslan, F. 2008, The Weingarten Transform on Bezier Surfaces, VI. Ulusal Geometri Sempozyumu, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Juhász, I. 1999. Weight-based shape modification of NURBS curves. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5), 377-383.
- Körpınar, T., Asil, V., Baş, S., 2011. On characterization inextensible flows of curves according to Bishop frame in E^3 , *Revista Notas de Matemática*, 302, 37-45.
- Kılıçoğlu, Ş., Şenyurt, S., 2020. On the Involute of the Cubic Bezier Curve By Using Matrix Representation in E^3 , *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 216-226.
- Körpınar, T., Demirkol, R. C., 2017. A New Characterization on the Energy of Elastica with the Energy of Bishop Vector Fields in Minkowski Space, *Journal of Advanced Physics*, 6(4), 562-569.
- Liu, L., Wang, G. 2002. Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6), 409-419.
- Marsh, D. 1999. Applied geometry for computer graphics and CAD, Springer- Verlag, London.
- Neamtu, M., Pottmann, H., and Schumaker, L.L. 1998. Designing NURBS cam profiles using trigonometric splines.
- Neill, B.O. 1983, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York.
- Piegl, L.A. ve Tiller, W. 1999. Computing off sets of NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(2), 147-156.
- Piegl, L. A. Ve Tiller, W. 2002. Biarc approximation of NURBS curves. *Computer-Aided Design*, 34(11), 807-814.
- Ravani, B., ve Ku, T.S. 1991. Bertrand off sets of ruled and developable surfaces. *Computer-Aided Design*, 23(2), 145-152.

- Samancı Kuşak, H. 2018. On Curvatures of The Timelike Rational Bezier Curves in Minkowski 3-Space, Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 7(2), 243-255.
- Samancı Kuşak, H. 2018. Introduction to Timelike Uniform B-Spline Curves in Minkowski 3-Space, Journal of Mathematical sciences and Modelling, 1(3), 206- 210.
- Selimovic, I. 2006. Improved algorithms for the projection of points on NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 23(5), 439-445.
- Samancı Kuşak, H., Çelik, S., İncesu, M., 2015. The Bishop Frame of Bezier Curves, *Life Science Journal*, 12, 175–180.
- Selimovic, I. 2006. Improved algorithms for the projection of points on NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 23(5), 439-445.
- Smith, G.,1998, *Introductory Mathematics: Algebra and Analysis*. SpringerVerlag
- Spivak, M, 1967 *Calculus*.New York: W.A. Benjamin.
- Tiller, W. 1992. Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 24(8), 445-453.
- Yılmaz, S., Turgut, M. 2010. A new Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images, *J. Math. Anal. Appl.*, 371, 764-776.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatma BAŞ
Uyruğu :
Doğum Yeri ve Tarihi :
Telefon :
Faks :
e-mail :

