T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

Hazırlayan
Arzu YAKAR

Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Yüksek Lisans Tezi

OCAK 2022
KAYSERİ

T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Arzu YAKAR

Danışman
Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

OCAK 2022
KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Tezi Hazırlayan

Arzu YAKAR

“**Mutlak Toplanabilme Metotları”** adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi ’ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan | **Danışman**

Arzu YAKAR | Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. Hüseyin ALTINDİŞ

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca ve tez çalışmamın tüm aşamalarında, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, çalışmalarım boyunca bana rehberlik eden, büyük bir fedakârlık ve anlayışlı yaklaşımı ile çalışmalarımın her aşamasında desteğini esirgemeyen, araştırmayı sevdiren, öğreten ve akademik anlamda çok şey öğrendiğim danışman hocam Sayın Doç. Dr. A. Nihal TUNCER' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan ve daima desteğini hissettiğim eşim ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Arzu YAKAR

Ocak 2022, KAYSERİ

MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

Arzu YAKAR

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2022
Danışman: Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ÖZET

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, yöntem ve materyaller ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen teoremler daha zayıf koşullar altında ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, pozitif monoton azalmayan dizilerini alarak, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen teoremler daha zayıf koşullar altında ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde, yarı monoton diziler kullanılarak, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen teoremler daha zayıf koşullar altında ifade ve ispat edilmiştir.

Altıncı bölümde, hemen hemen artan diziler yerine, daha geniş diziler sınıfı olan yarı kuvvetli artan diziler kullanarak, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin $|C,\alpha|_k$ve $|N,q_n|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen teoremler daha zayıf koşullar altında ifade ve ispat edilmiştir.

Son olarak, yedinci bölümde, yapılan çalışmalar ile ilgili sonuçlar verilerek çalışmanın amacı desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Riesz ortalaması, Nörlund ortalaması, Cesaro ortalaması, Abel dönüşümü, Hölder eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Mutlak toplanabilme, Toplanabilme çarpanı, Sonsuz seriler, Fourier serileri, Pozitif monoton azalmayan diziler, Yarı monoton diziler, Yarı kuvvetli artan diziler.

ABSOLUTE SUMMABILITY METHODS

Arzu YAKAR

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master Thesis, January 2022
Supervisor: Assoc. Dr. A. Nihal TUNCER

ABSTRACT

This study consists of seven chapters.

In the first chapter, the basic definitions and theorems that will be used throughout the study are given.

In the second part, some information about the methods and materials is given.

In the third chapter, the theorems about absolute Riesz summability factors of infinite series and Fourier series are expressed and proved under weaker conditions.

In the fourth chapter, the given theorems about absolute Riesz summability factors of infinite series and Fourier series are expressed and proved under weaker conditions by taking positive monotonic non-decreasing sequences.

In the fifth chapter, the theorems about absolute Riesz summability factors of infinite series and Fourier series are expressed and proved under weaker conditions using quasi-monotonic series.

In the sixth chapter, the given theorems about the summability factors $|C,\alpha|_k$ and $|N,q_n|_k$ of infinite series and Fourier series, using quasi-power increasing sequences, which are the larger class of sequences, instead of almost increasing sequences, are expressed and expressed under weaker conditions. proven.

Finally, in the seventh chapter, the aim of the study was supported by giving the results related to the studies carried out.

Keywords: Riesz mean, Nörlund mean, Cesaro mean, Abel transform, Hölder inequality, Minkowski inequality, Absolute summability, Summability factor, Infinite series, Fourier series, Positive monotonic non-decreasing series, quasi-monotonic series, Quasi-power increasing series.

İÇİNDEKİLER

MUTLAK TOPLANABİLME METODLARI

4.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN VE FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLİRLİĞİ ÜZERİNE TEOREMLER

5. BÖLÜM

YARI MONOTON DİZİLERİN SONSUZ SERİLERE VE FOURİER SERİLERİNE UYGULANMASI ÜZERİNE TEOREMLER

6.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN VE FOURİER SERİLERİNİN $|C,\alpha|_k$ ve $|N,q_n|_k$ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE TEOREMLER

7.BÖLÜM

SONUÇLAR

SEMBOLLER LİSTESİ

$\sum a_n$	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonsuz serisi
(s_n)	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$y_n = O(1)$	: (y_n) dizisi sınırlı
BV	: Sınırlı salınımlı dizilerin uzayı
ΔF_n	: F_n dizisi için $F_n - F_{n-1}$
L	: Lebesque İntegral

GİRİŞ

Fourier serileri Leonhard Euler, Jean le Roand d'Alembert ve Daniel Bernoulli 'nin ön araştırmalarından sonra trigonometrik serilerin çalışmasına önemli katkılarda bulunan J.B.Joseph Fourier (1768-1830) onuruna isimlendirilmiştir.

Fourier ilk sonuçlarını 1807'de makalesinde yayınlamış, daha sonra 1822 de yayınladığı Theorie analytique de la chaleur 'da Fourier analizini özellikle de Fourier serilerini anlatmıştır. Fourier 'in araştırmasıyla keyfi bir fonksiyonun bir trigonometrik seri ile temsil edilebileceği gerçeği ortaya çıktı.

Fourier'in fikri karmaşık bir ısı kaynağını basit sinüs ve kosinüs dalgalarının bir süper pozisyonu olarak modellemek ve çözüme karşılık gelen öz çözümlerin bir süper pozisyonu olarak yazmaktı. Bu üst üste binme ve doğrusal kombinasyon Fourier serisi olarak adlandırılır.

Toplanabilme teorisi ise genel olarak Analiz ve Uygulamalı Matematik alanlarında kullanılmaktadır. Toplanabilme 19.yüzyıl sonlarına doğru yükselişe başlamış ve ıraksak serilere olan ilgi artmıştır. Toplanabilme teorisinde amaç belirsiz ıraksak serilere olabilecek en iyi değeri karşılık getirmektir. Bu değeri bulmak için toplanabilme metotlarına ihtiyaç duyulmuştur. Bu metotlardan bazıları matematikçilerin isimleri ile de anılan Abel, Cesàro ,Euler, Hausdorff , Hölder, Nörlund, Riesz metotlarıdır.

Günümüzde de toplanabilme metotları üzerine çalışan matematikçilerin birçoğu bu özel toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri incelemektedir.

1979 yılında Tanovic-Miller tarafından alt üçgensel matrisler yardımıyla $|A|_k$ toplanabilirlik tanımı yapıldı.1985 yılında Bor tarafından $|\bar{N}, p_n|_k$toplanabilirliği ve 1993 yılında $|\bar{N}, p_n, \delta|_k$ toplanabilirliği tanımlamıştır.

Bu çalışmada ilk olarak hemen hemen artan bir dizinin yerine bir yarı –f- kuvvetli artan dizi kullanılarak bilinen bir teoremin $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirliği genelleştirilmiştir. Sonrasında sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin Riesz toplanabilirliği ve mutlak ağırlıklı ortalama toplanabilirliği ile ilgili bilinen sonuçlar daha zayıf şartlar altında ispatlanmış ve Fourier serilerinin bir uygulaması elde edilmiştir. Son olarak ise sonsuz serilerin $|N, p_n|_k$ toplanabilme çarpanı ile ilgili bir teorem ispatlanmış ve bu teorem Fourier serilerine uygulanmıştır.

1. BÖLÜM

GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde konumuzla ilgili olan, genel bilgiler, temel bazı tanımlar ve teoremlere yer vererek işe başlayacağız.

1.1.Araştırmanın Amacı

Tezin amacı, yarı kuvvetli artan diziler, yarı monoton diziler ve pozitif monoton azalmayan diziler kullanılarak sonsuz seriler ve Fourier serilerinin toplanabilme çarpanları ile ilgili genel teoremleri incelemektir.

1.2.Araştırmanın Önemi

Nörlund, Riesz, Cesàro toplanabilme çarpanları, farklı dizilere ve serilere uygulanarak elde edilen teoremler toplanabilme teorisinde önemli bir alan oluşturmaktadır.

1.3.Genel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.3.1. $\sum a_n$ sonsuz serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) ve G reel veya karmaşık sayıların bir cismini göstersin. $n,t = 0,1,2,\ldots$ için $a_{nt} \in G$ olmak üzere $K = (a_{nt})$ sonsuz matrisi olmak üzere

$$w_n = \sum_{t=0}^{\infty} a_{nt} s_t \tag{1.1}$$

olarak verilsin. (w_n) dizisine, $\sum a_n$sonsuz serisinin K - dönüşüm dizisi denir. Yine (w_n)dizisine, (s_n) dizisinin K - dönüşüm dizisi, K ye de diziden diziye bir dönüşümdür, denir. Bu dönüşümün var olabilmesi için (1.1) ifadesindeki toplamın $\forall n \in N$ için yakınsak olması gereklidir [5].

Tanım 1.3.2. n, k = 1,2,…iken $K = (a_{nt})$ sonsuz matrisi verilsin. *K* ile belirtilen bu matris, limiti korumak şartıyla, yakınsak olan her diziyi aynı zamanda yakınsak olan bir diziye dönüştürüyor ise *K* matrisine regülerdir denir [12].

Teorem 1.3.3. Bir $A = (a_{nt}) n, t = 1,2, \ldots$ matrisi regülerdir ancak ve ancak

$$(a) Her\ t\ için \lim_{n \to \infty} a_{nt} = 0$$

$$(b) \lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} a_{nt} = 1 \qquad (1.2)$$

$$(c) Her\ \ n\ için \sum_{t=0}^{\infty} |a_{nt}| \leq M$$

şartlarını sağlayacak şekilde bir *M* pozitif gerçel sabiti mevcuttur [7].

Bu teoreme **Silverman-Toeplitz Teoremi** de denir.

Tanım 1.3.4. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan $\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin. Diğer taraftan (s_n) dizisinin $K = (a_{nt})$ matrisi ile verilen (w_n) dönüşüm dizisi, (1.1) ifadesinde verildiği gibi olsun. Şayet $\lim_{n \to \infty} w_n = r$ ise, bu takdirde (s_n) dizisine veya $\sum a_n$ serisine *r* değerine *K* toplanabiliyordur denir [7].

Tanım 1.3.5. (s_n),$\sum a_n$ serisine karşılık gelen kısmi toplamlar dizisi olarak verilsin. (s_n) kısmi toplamlar dizisinin $K = (a_{nt})$ matrisi ile verilen (w_n) dönüşüm dizisi, (1.1) ifadesindeki şekilde olsun. Şayet $(w_n) \in BV$ oluyorsa, $\sum a_n$ serisine ya da (s_n) kısmi toplamlar dizisine mutlak *K* toplanabilirdir, denir ve $\sum a_n \in |K|$ veya $s_n \in |K|$ şeklinde gösterilir[3].

Tanım 1.3.6. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan $\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin. Ayrıca (s_n) kısmi toplamlar dizisinin veya $\sum a_n$ serisinin matris elemanları

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & , k \leq n\ \ için \\ 0 & , k > n\ \ için \end{cases} \qquad (1.3)$$

olmak üzere $K = (a_{nk})$matrisi tarafından oluşturulan (ϑ_n),dönüşümü de

$$\vartheta_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k \tag{1.4}$$

olsun.Bu durumda (ϑ_n) ortalamasına Cesàro dönüşümü(ortalaması) ya da daha kısa olarak $(C,1)$ ortalaması adı verilir. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n = \vartheta$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi bu ϑ değerine $(C,1)$ anlamında toplanabiliyordur denir[7].

Tanım 1.3.7. (ϑ_n), (1.4) şeklinde tanımlansın. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n - \vartheta_{n-1}| < \infty \tag{1.5}$$

koşulu sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ anlamında toplanabiliyordur olarak tanımlanır. [8].

Tanım 1.3.8. Eğer $k \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\vartheta_n - \vartheta_{n-1}|^k < \infty \tag{1.6}$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ anlamında toplanabiliyordur denir [9].

(1.6) ifadesinde özel olarak, $k=1$ alınırsa bu durumda $|C,1|$ anlamında toplanabilirlik bulunur.

Tanım 1.3.9. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan, $\sum a_n$ sonsuz serisi verilsin. $\alpha > -1$ için ϑ_n^{α}veh_n^{α} ortalamaları sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizisinin $\alpha-$ıncı mertebeden $n-$ inci $(C,1)$ dönüşümünü göstersinler. Daha açık olarak

$$\vartheta_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=0}^{n} A_{n-u}^{\alpha-1} s_u \tag{1.7}$$

$$h_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n} u a_u A_{n-u}^{\alpha-1} \tag{1.8}$$

göstersin.

Şayet

$$\lim_{n\to\infty} \vartheta_n^\alpha = s$$

şartı sağlanıyorsa $\sum a_n$ serisi s değerine (C,α) anlamında toplanabilirdir denir. Bu eşitliklerde

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha)\ ,\ \ n>0\ ,\ A_{-n}^\alpha = 0\ ,\quad \alpha > -1\ ,\ A_0^\alpha = 1 \tag{1.9}$$

şeklindedir [10].

Tanım 1.3.10. (ϑ_n^α), (1.7) ifadesinde verildiği şekilde tanımlansın. $\alpha > -1$ olduğunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n^\alpha - \vartheta_{n-1}^\alpha| < \infty \tag{1.10}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda $\sum a_n$ serisi bu s değerine $|C,\alpha|$ anlamında toplanabiliyordur denir [8].

Tanım 1.3.11. Eğer $k \geq 1$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\vartheta_n^\alpha - \vartheta_{n-1}^\alpha|^k < \infty \tag{1.11}$$

şartı sağlandığında $\sum a_n$ serisi s değerine $|C,\alpha|_k$ anlamında toplanabiliyordur denir [9].

$h_n^\alpha = n(\vartheta_n^\alpha - \vartheta_{n-1}^\alpha)$ olacağından (1.11) ifadesi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| h_n^\alpha \right|^k < \infty$$

olarak da yazılabilir.

Tanım 1.3.12. (q_n) dizisi

$$Q_n = \sum_{r=0}^{n} q_r \to \infty \ , n \to \infty (Q_{-i} = q_{-i} = 0, i \geq 1) \tag{1.12}$$

koşulunu oluşturan pozitif sayıların bir dizisi, (t_n) de diziden diziye Riesz veya kısaca $(\bar{N}, q_n)$ ortalamasını göstersin. Yani

$$t_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{r=0}^{n} q_r s_r \tag{1.13}$$

olmak üzere, şayet

$$\lim_{n\to\infty} t_n = h$$

oluyorsa, $\sum a_n$ sonsuz serisi h değerine Riesz toplanabilirdir veya daha kısa olarak $(\bar{N}, q_n)$ toplanabilirdir denir [13].

$(\bar{N}, q_n)$ metodu regülerdir ancak ve ancak $n \to \infty$ için $Q_n \to \infty$ olmasıdır [7].

Tanım 1.3.13. (t_n), (1.13) şartı olarak verilsin. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty \tag{1.14}$$

oluyorsa, $\sum a_n$ sonsuz serisi h değerine $|\bar{N}, q_n|$ toplanabiliyordur denir [1].

Tanım 1.3.14. Eğer $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|t_n - t_{n-1}|^k < \infty \tag{1.15}$$

oluyorsa, $\sum a_n$ serisi h değerine $|\bar{N}, q_n|_k$toplanabilirdir denir.

Eğer (1.15) ifadesinde $\forall n \in N$ için $q_n = 1$ alındığında, $|C,1|_k$ toplanabilmeyi elde ederiz [14].

Ayrıca $k=1$ ve $q_n = \frac{1}{n+1}$ alırsak $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilme $|R, \log n, 1|$ toplanabilmeye eşdeğerdir.

Tanım 1.3.15. Pozitif sabitlerin herhangi bir dizisi θ_n olsun. $k \geq 1$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n - t_{n-1}|^k \theta_n^{k-1} < \infty \tag{1.16}$$

oluyorsa, $\sum a_n$ serisi, $|\bar{N}, q_n, \theta_n|_k$ toplanabiliyordur denir [16].

$\theta_n = \frac{Q_n}{q_n}$ alınırsa bu takdirde $|\bar{N}, q_n, \theta_n|_k$ toplanabilmesi $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilmesine indirgenir.

Tanım1.3.16. Hepsi birden sıfır olmayan, non-negatif sayıların bir (q_n) dizisi verilmiş olsun.

$$Q_n = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_n, \qquad q_0 > 0, (n = 0,1,2,3, \ldots.)$$

Olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (U_n) dizisine

$$U_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n} q_{n-v}s_v \tag{1.17}$$

İle verilen dönüşüme, Nörlund dönüşümü veya Nörlund ortalaması denir ve (N, q_n) ile gösterilir.

(N, q_n) ortalamasının matrisinin elemanları,

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{q_{n-v}}{Q_n} & , v \leq n \\ 0 & , v > n \end{cases} \tag{1.18}$$

Şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.3.17. $q_n \neq 0$ olmak üzere (s_n) dizisinin (N, q_n) dönüşüm dizisi(U_n) olsun.

Eğer$k > 0$için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |U_n - U_{n+1}|^k < \infty \tag{1.19}$$

İse (s_n) dizisine k.mertebeden mutlak Nörlund toplanabilir veya$|N, q_n|_k$toplanabilirdir, denir.

Bu metod *k=1* için Mears (1937) tarafından verilen $|N, q_n|$ toplanabilme metoduna indirgenebilir.

Tanım 1.3.18. Herhangi iki toplanabilme metodu *K* ve *L* olsun. *K* metodu ile toplanabilen bir dizi aynı değere *L* metodu ile toplanabiliyor ise *K* metodu *L* metodunu gerektiriyor denir. $K \subset L$ şeklinde gösterilir. $K \subset L$ *ve* $L \subset K$ ise iki toplanabilme metodu birbirine denktir[7].

Tanım 1.3.19. Herhangi bir $\sum a_n$ serisi verilsin. $\sum a_n v_n$serisi *K* toplanabilme metodu tarafından bir değere toplanabiliyorsa, bu (v_n) dizisine$\sum a_n$ sonsuz serisinin *K* metodu için bir toplanabilme çarpanı denir [17].

Tanım 1.3.20. Herhangi iki pozitif sabit *G ve H* olsun .(j_n) de pozitif sabitlerin artan bir dizisi olmak üzere

$$Gj_n \leq i_n \leq Hj_n \tag{1.20}$$

koşulunu sağlayan(i_n) pozitif dizisine hemen hemen artan dizi denir[26].

Tanım 1.3.21. Bütün $b \geq c \geq 1$ için

$$Tb^{\partial}W_n \geq c^{\partial}W_c \tag{1.21}$$

Eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $T = T(\partial, W) \geq 1$ sabiti varsa bu takdirde (W_n) pozitif sabitlerin dizisine yarı $\partial -$ kuvvetli artan bir dizi adı verilir [19].

Tanım 1.3.22. (Abel Kısmi Toplama Formülü)

Karmaşık sayıların iki dizisi $(e_k)\ ve\ (f_k)$ verilsin.

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} e_k$$

Şeklinde tanımlı olduğuna göre

$$\sum_{k=1}^{n} e_k f_k = \sum_{k=1}^{n-1} w_k \Delta f_k + w_n f_n \tag{1.22}$$

dir [18].

Bu formüle Abel Dönüşümü denir.

Tanım 1.3.23. (Hölder Eşitsizliği).

$r_1, r_2, r_3, \dots\dots, r_n \geq 0,\ ve\ s_1, s_2, s_3, \dots\dots, s_n \geq 0\ \ ve\ q > 1\ için,\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliği

$$\sum_{u=1}^{n} r_u s_u \leq \left(\sum_{u=1}^{n} r_u^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{u=1}^{n} s_u^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{1.23}$$

Şeklindedir [5].

Tanım 1.3.24. (Minkowski Eşitsizliği).

$r_1, r_2, r_3, \dots\dots, r_n \geq 0, s_1 s_2 s_3 \dots\dots\dots\dots s_n \geq 0\ \ ve\ k \geq 1$ verilsin.

Bu takdirde Minkowski Eşitsizliği

$$\left(\sum_{u=1}^{n}(r_u + s_u)^k\right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\sum_{u=1}^{n}(r_u)^k\right)^{\frac{1}{k}} + \left(\sum_{u=1}^{n}(s_u)^k\right)^{\frac{1}{k}} \tag{1.24}$$

Şeklindedir [5].

Tanım 1.3.25. Her x için $f(x+\varphi) = f(x)$ olacak şekilde bir $\varphi > 0$ sayısı mevcut ise$f$ fonksiyonuna periyodik fonksiyon ve φ sayısına da f nin en küçük esas periyodu denir.

Bilindiği üzere *sinx* ve *cosx* trigonometrik fonksiyonlar 2π periyotlu, periyodik fonksiyonlardır. Bu durumda her $u \in N$ için a_u ve b_u lar keyfi sabitler olmak üzere,

$$a_u cosux + b_u sinux \tag{1.25}$$

Fonksiyonu 2π periyotlu, periyodik bir fonksiyondur [38].

Tanım 1.3.26. x bir reel değişken ve $a_0, a_1, \dots b_1, \dots.$ ler de x den bağımsız katsayılar olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{u=1}^{\infty}(a_u cosux + b_u sinux) \tag{1.26}$$

Şeklindeki seriye bir trigonometrik seri denir. Ayrıca

$$K(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{u=1}^{n}(a_u cosux + b_u sinux) \tag{1.27}$$

Sonlu trigonometrik toplamına n inci mertebeden bir trigonometrik polinom denir. [38]

Tanım 1.3.27. f, $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ve a_u, b_u da

f den elde edilen Fourier katsayıları olmak üzere

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{u=1}^{\infty}(a_u cosux + b_u sinux)\, , (-\pi \leq x \leq \pi\,) \tag{1.28}$$

Trigonometrik serisine f tarafından meydana getirilen veya f fonksiyonuna ait Fourier serisi denir ve sembolik olarak

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{u=1}^{\infty}(a_u cosux + b_u sinux) \tag{1.29}$$

Şeklinde gösterilir.

$f(x)$ in Fourier serisinin sabit teriminin sıfır olduğu farz edilirse, bu durumda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \tag{1.30}$$

Ve

$$f(x) \sim \sum_{u=1}^{\infty}(a_u cosux + b_u sinux) = \sum_{u=1}^{\infty} C_u(x) \tag{1.31}$$

Olur [38].

Teorem 1.3.28. (q_n)

$$q_n = O(nq_n), \qquad n \to \infty \tag{1.32}$$

Olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\varphi_m = o(1), \qquad m \to \infty \tag{1.33}$$

$$\sum_{n=1}^{m} n Y_n |\Delta^2 \varphi_n| = O(1), \qquad m \to \infty \tag{1.34}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} |h_n|^k = O(Y_m), \qquad m \to \infty \tag{1.35}$$

Koşulları sağlanıyorsa o zaman $\sum a_n \varphi_n$ serisi $k \geq 1$,için $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir [2].

Eğer tüm n değerleri için $q_n = 1$ alırsak, o zaman biz Mazhar'ın sonsuz serilerin $|C,1|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili bilinen sonucunu elde ederiz [20].

Teorem 1.3.29. (q_n) bir pozitif sayılar dizisi olsun öyle ki

$$Q_n = O(nq_n)\,, \qquad n \to \infty. \tag{1.36}$$

(Y_n) pozitif monoton azalmayan bir dizi olsun. Eğer (Y_n) , (φ_n) ve (q_n) dizileri

$$\varphi_m Y_m = O(1)\,, \qquad m \to \infty \tag{1.37}$$

$$\sum_{n=1}^{m} nY_n|\Delta^2\varphi_n| = O(1) \tag{1.38}$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k = O(Y_m)\,, m \to \infty \tag{1.39}$$

Koşullarını sağlıyorsa $\sum a_n\varphi_n$ serisi $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir.($k \geq 1$) [22].

Teorem1.3.30. $\varphi_n \to 0,\ n \to \infty$ olsun. Kabul edelim ki her n için $\sum n\mu_n \log n$,$\sum A_n \log n$ yakınsak ve $|\Delta\varphi_n| \leq |A_n|$olacak şekilde (A_n)sayılarının bir μ-yarı-monoton dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}|h_n|^k = O(\log m)\,, m \to \infty \tag{1.40}$$

Oluyor ise o zaman $\sum a_n\varphi_n$ dizisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir.($k \geq 1$) [26].

Teorem 1.3.31. $\varphi_n \to 0, n \to \infty$ olsun ve (q_n) bir pozitif sayılar dizisi olsun öyle ki

$$Q_n = O(nq_n)\,, n \to \infty\ . \tag{1.41}$$

Kabul edelim ki her n için $\sum n\mu_n Y_n$, $\sum A_n Y_n$yakınsak ve $|\Delta\varphi_n| \leq |A_n|$olacak şekilde$(A_n)$ sayılarının birμ-yarı-monoton dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k = O(Y_m), \quad m \to \infty \tag{1.42}$$

Oluyor ise o zaman $\sum a_n\varphi_n$dizisi $|\bar{N},q_n|_k$ toplanabilirdir.($k\geq 1$) [24].

Uyarı: Tüm n değerleri için $q_n=1$ alırsak (bu durumda $Y_n \sim \log n$), o zaman Teorem1.3.31, Teorem1.3.30'a indirgenir.

Teorem 1.3.32. $q_0>0, q_n\geq 0 ve (q_n)$ artmayan bir dizi olsun ve (Y_n) hemen hemen artan bir dizi olsun öyle ki $|\Delta Y_n|=O(Y_n/n)$.

Eğer

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}|h_n|^k=O(Y_n)\,,m\rightarrow\infty \tag{1.43}$$

İse burada $(h_n),(na_n)$ dizisinin n'inci $(C,1)$ ortalaması ve (φ_n) bir dizi öyle ki

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|\Delta^2\varphi_n|Y_n<\infty \tag{1.44}$$

$$|\varphi_n|Y_n=O(1)\,,n\rightarrow\infty \tag{1.45}$$

O zaman $\sum a_nQ_n\varphi_n(n+1)^{-1}$ dizisi $|N,q_n|_k, k\geq 1$ toplanabilirdir [28].

Teorem 1.3.33. (q_n) Teorem 1.3.32 'deki gibi olsun ve (Y_n) hemen hemen artan bir dizi olsun öyle ki $|\Delta Y_n|=O(Y_n/n)$.Ayrıca, $\sum n\mu_nY_n<\infty$ olan μ-yarı-monoton, $\sum A_nY_n$ yakınsak ve tüm n için $|\Delta\varphi_n|\leq|A_n|$ olacak şekilde bir (A_n) sayı dizisi olduğunu varsayalım.

Eğer (1.45) ve

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(\vartheta_n^\alpha)^k}{n}=O(Y_m)\,,m\rightarrow\infty \tag{1.46}$$

Şartları sağlandıysa o zaman $\sum a_nQ_n\varphi_n(n+1)^{-1}$ dizisi $k\geq 1$için $|N,q_n|_k$ toplanabilirdir [29].

2. BÖLÜM

YÖNTEM VE MATERYALLER

2.1.Yöntem

Öncelikle kapsamlı bir literatür taraması yapılmıştır. Gerek kütüphanede bulunan kaynaklar gerekse internet ortamında olan mevcut kaynaklar ve makale taramaları ile elde edilen çalışmalar incelenmiştir.

2.2. Materyaller

Bu tez çalışmasında yer alan materyaller; mutlak toplanabilme teorisi ile ilgili yayınlanmış kitap ve makalelerdir.

3. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN VE FOURİER SERİLERİNİN $|\bar{N}, q_n|_k$ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE TEOREMLER

Bu bölümde sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen Teorem 1.3.28 ve Teorem 3.2.1 i daha zayıf koşullar altında ispatlanacak olan iki teorem ifade edilecektir.

3.1. $\sum a_n\varphi_n$ serilerinin daha zayıf koşullar altında $|\bar{N}, q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

Teorem 3.1.1. Eğer (Y_n) , (φ_n) ve (q_n) dizileri (1.32) - (1.34)ve

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = O(Y_m) \ , m \to \infty \tag{3.1}$$

koşullarını sağlıyorsa $\sum a_n\varphi_n$ serisi $k \geq 1$ için, $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir.

Uyarı : $k = 1$ olduğunda (3.1) koşulunun, (1.35) koşuluna indirgendiği unutulmamalıdır. $k > 1$ olduğunda koşul (3.1), koşul (1.35) den daha zayıftır, ancak bu durumun tersi doğru değildir .[21]'de olduğu gibi eğer (1.35) sağlanmışsa o zaman

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = O\left(\frac{1}{Y_1^{k-1}}\right) \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} |h_n|^k = O(Y_m)$$

elde edilir.

Eğer (3.1) sağlanmışsa, $(k > 1)$ için ,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} |h_n|^k = \sum_{n=1}^{m} Y_n^{k-1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(Y_n^{k-1}) \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(Y_m^k) \neq O(Y_{m)}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2. Teorem 3.1.1 in şartları altında,

$$nY_n|\Delta\varphi_n| = O(1), \;\; n \to \infty \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n|\Delta\varphi_n| < \infty \tag{3.3}$$

$$Y_n|\varphi_n| = O(1), \;\; n \to \infty \tag{3.4}$$

Olarak alınır [2].

İspat :(F_n), $\sum a_{\boldsymbol{n}}\varphi_n$ serisinin $(\bar{N}, q_n)$ ortalamasının bir dizisi olsun. Bu durumda tanım gereği

$$F_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{u=0}^{n} q_u \sum_{t=0}^{u} a_t \, \varphi_t = \frac{1}{Q_n} \sum_{u=0}^{n} (Q_n - Q_{u-1}) a_u \varphi_u \tag{3.5}$$

yazabiliriz. $n \geq 1$ için,

$$F_n - F_{n-1} = \frac{1}{Q_n} \sum_{u=0}^{n} (Q_n - Q_{u-1}) a_u \varphi_u \; - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{u=0}^{n-1} (Q_{n-1} - Q_{u-1}) \, a_u \varphi_u$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n} \frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u} u a_u \tag{3.6}$$

bulunur. (3.3) in sağ tarafına Abel dönüşümü uygulanırsa,

$$F_n - F_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u}\right) \sum_{t=1}^{u} t a_t + \frac{q_n \varphi_n}{n Q_n} \sum_{u=1}^{n} u a_u$$

$$= \frac{(n+1) q_n h_n \varphi_n}{n Q_n} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} q_u h_u \varphi_u \frac{u+1}{u}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \Delta\varphi_u h_u \frac{u+1}{u} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \varphi_{u+1} h_u \frac{1}{u}$$

$$= F_{n,1} + F_{n,2} + F_{n,3} + F_{n,4}$$

elde edilir.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski Eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|F_{n,\alpha}\right|^k < \infty \quad , \alpha = 1,2,3,4 için$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak Teorem 3.1.1. ve Lemma 3.1.2. nin hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|F_{n,1}\right|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n|^{k-1} |\varphi_n| \frac{q_n}{Q_n} |h_n|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n| \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta|\varphi_n| \sum_{u=1}^{n} \frac{q_u}{Q_u} \frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}} + O(1) |\varphi_m| \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\varphi_n| Y_n + O(1) |\varphi_m| Y_m$$

$$= O(1) \, , m \to \infty$$

elde ederiz. Ayrıca $F_{n,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|F_{n,2}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u|h_u|^k|\varphi_u|^k\right)\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|^{k-1}\,|\varphi_u|q_u|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|\frac{q_u}{Q_u}\frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\,, m\to\infty$$

elde ederiz. Yine (1.32)' yi kullanarak Teorem 3.1.1 ve Lemma 3.1.2 hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|F_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{u=1}^{n-1}Q_u|\Delta\varphi_u||h_u|\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}uq_u|\Delta\varphi_u||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u(u|\Delta\varphi_u|)^k|h_u|^k\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}q_u(u|\Delta\varphi_u|)^{k-1}u|\Delta\varphi_u|q_u\,|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}u|\Delta\varphi_u|\frac{q_u|h_u|^k}{Q_uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}\Delta(u|\Delta\varphi_u|)\sum_{t=1}^{u}\frac{q_t|h_t|^k}{tY_t^{k-1}}$$

$$+O(1)m|\Delta\varphi_m|\sum_{u=1}^{m}\frac{q_u|h_u|^k}{uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}|\Delta(u|\Delta\varphi_u|)|Y_u + O(1)m|\Delta\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}uY_u|\Delta^2\varphi_u| + O(1)\sum_{u=1}^{m-1}Y_u|\Delta\varphi_u|$$

$$+O(1)m|\Delta\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1)\ \ ,m\to\infty$$

elde ederiz. Son olarak (1.32)' yi kullanarak, $F_{n,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|F_{n,4}|^k \le \sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}\frac{Q_u}{u}|\varphi_{u+1}||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u|\varphi_{u+1}|^k|h_u|^k\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}q_u|\varphi_{u+1}|^{k-1}|\varphi_{u+1}||h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_{u+1}|\frac{q_u|h_u|^k}{Q_uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\,,m\to\infty$$

elde ederiz. Bu da Teorem 3.1.1 in ispatını tamamlar.

3.2. $\sum A_n(x)\varphi_n$ serilerinin daha zayıf koşullar altında $|\bar{N}, q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta\varphi_n| < \infty$$

ise(φ_n) dizisine sınırlı salınımlı dizi denir, ve $(\varphi_n) \in BV$ile gösterilir.

f(t) ,2π peryotlu ve $(-\pi,\pi)$ boyunca L integrallenebilen periyodik bir fonksiyon olsun.

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x),$$

$$\beta(h) = \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\}$$

$$ve$$

$$\beta_\alpha h = \frac{\alpha}{h^\alpha}\int_0^h (h-u)^{\alpha-1}\beta(u)du, \qquad (\alpha > 0)$$

dır.

$h_n(x)$, $(nA_n(x))$ dizisinin$(C,1)$ ortalaması olmak üzere, eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi)$ ise $h_n(x) = O(1)$ dir [6].

Bu açıklamaları kullanarak, Fourier Serileri ile ilgili aşağıdaki teoremleri ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.1. Eğer $\beta_1(h) \in BV\ (0,\pi)$ ve (q_n), (φ_n) ve (Y_n) dizileri Teorem 1.3.28 'in koşullarını sağlıyorsa, o zaman $\sum A_n(x)\varphi_n$ serisi $k \geq 1$ için $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir [2].

Eğer bütün *n* değerleri için $q_n = 1$ alırsak, Fourier Serisinin $|C,1|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili Mazhar'ın bilinen sonucunu elde ederiz [20].

Şimdi, Teorem 3.2.1 i daha zayıf koşullarda ifade ve ispat edeceğimiz aşağıdaki Teoremi verelim.

Teorem 3.2.2. Eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi)$ ve $(q_n), (\varphi_n)$ ve (Y_n) dizileri Teorem 3.1.1'in koşullarını yerine getirirse, o zaman $\sum A_n(x)\varphi_n$ serisi $k \geq 1$ için, $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir.

Eğer tüm n değerleri için $q_n = 1$ alırsak, Fourier Serilerinin $|C,1|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

4. BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN VE FOURİER SERİLERİNİN MUTLAK AĞIRLIKLI ORTALAMA TOPLANABİLİRLİĞİ ÜZERİNE TEOREMLER

Bu bölümde, (Y_n) pozitif monoton azalmayan dizilerini alarak, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen teoremleri daha zayıf koşullarla ispatlayacak olan iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

4.1. $\sum a_n\varphi_n$ serilerinin pozitif monoton azalmayan dizi yardımıyla $|\bar{N}, q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

Teorem 4.1.1. (Y_n) pozitif monoton azalmayan bir dizi olsun. Eğer $(Y_n), (\varphi_n) ve\ (q_n)$ dizileri (1.36)-(1.38) koşulları ve

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = O(Y_m)\,, m \to \infty \tag{4.1}$$

koşulunu sağlıyorsa $\sum a_n\varphi_n$ serisi $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilirdir.$(k \geq 1\ için.)$

Uyarı 4.1.2. Dikkat edilmelidir ki, *k=1* olduğunda (4.1) şartı (1.39) şartına indirgenebilir.

$k > 1$ olduğunda (4.1) şartı (1.39) şartından daha zayıftır. Fakat tersi doğru değildir. [21]'de olduğu gibi eğer (1.39) şartı sağlanırsa

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = O\left(\frac{1}{Y_1^{k-1}}\right)\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k = O(Y_m)$$

elde edilebileceğini görebiliriz.

Eğer (4.1) şartı sağlanırsa $k > 1$ için

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} |h_n|^k = \sum_{n=1}^{m} Y_n^{k-1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(Y_m^{k-1}) \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(Y_m^k) \neq O(Y_m)$$

elde ederiz.

Lemma 4.1.3. Teorem 4.1.1 şartları altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n |\Delta\varphi_n| < \infty \tag{4.2}$$

$$nY_n |\Delta\varphi_n| = O(1)\,, n \to \infty \tag{4.3}$$

Elde ederiz [22].

Teorem 4.1.1 in İspatı : (F_n) dizisi $\sum a_n \varphi_n$ serisinin $(\bar{N}, q_n)$ ortalaması olsun. O zaman tanım gereği

$$F_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{u=0}^{n} q_u \sum_{r=0}^{u} a_r \varphi_r = \frac{1}{Q_n} \sum_{u=0}^{n} (Q_n - Q_{u-1}) a_u \varphi_u \tag{4.4}$$

Bulunur. Buna göre $n \geq 1$ için

$$F_n - F_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n} \frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u} u a_u \tag{4.5}$$

Elde ederiz.

(4.5)'in sağ tarafına Abel Dönüşümünü uygularsak

$$F_n - F_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} \Delta\left(\frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u}\right) \sum_{r=1}^{u} r a_r + \frac{q_n \varphi_n}{n Q_n} \sum_{r=1}^{n} u a_u$$

$$= \frac{(n+1) q_n h_n \varphi_n}{n Q_n} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} \left(\frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u} - \frac{Q_u \varphi_{u+1}}{u+1}\right) \sum_{r=1}^{u} r a_r$$

$$= \frac{(n+1) q_n h_n \varphi_n}{n Q_n}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} \left(\frac{Q_u \varphi_u}{u} - \frac{q_u \varphi_u}{u} - \frac{Q_u \varphi_{u+1}}{u+1} + \frac{Q_u \varphi_{u+1}}{u}\right.$$

$$\left. - \frac{Q_u \varphi_{u+1}}{u}\right) h_u (u+1)$$

$$= \frac{(n+1) q_n h_n \varphi_n}{n Q_n} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} q_u h_u \varphi_u \frac{u+1}{u}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u (\varphi_u - \varphi_{u+1}) h_u \frac{u+1}{u}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \varphi_{u+1} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) h_u (u+1)$$

$$= \frac{(n+1) q_n h_n \varphi_n}{n Q_n} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} q_u h_u \varphi_u \frac{u+1}{u}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \Delta\varphi_u h_u \frac{u+1}{u} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \varphi_{u+1} h_u \frac{1}{u}$$

$= F_{n,1} + F_{n,2} + F_{n,3} + F_{n,4}$ elde ederiz.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski Eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|F_{n,r}\right|^k < \infty \quad , r = 1,2,3,4 \; için$$

Olduğunu göstermemiz yeterlidir.

İlk olarak Teorem 4.1.1 ve Lemma 4.1.3 hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|F_{n,1}\right|^{k-1}=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{(n+1)q_nh_n\varphi_n}{nQ_n}\right|^{k}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{m}|\varphi_n|^{k-1}.|\varphi_n|\frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{m}|\varphi_n|\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\varphi_n|\sum_{u=1}^{n}\frac{q_u}{Q_u}\frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}+O(1)|\varphi_m|\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\varphi_n|Y_n+O(1)|\varphi_m|Y_m$$

$$=O(1)\ ,m\to\infty$$

Elde edilir.Ayrıca $F_{n,1}$'de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|F_{n,2}\right|^{k}=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}\frac{u+1}{u}q_uh_u\varphi_u\right|^{k}$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u|h_u||\varphi_u|\right)^k$$

$$=O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u|h_u|^k|\varphi_u|^k\right)\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$=O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|^{k-1}|\varphi_u|q_u|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|\frac{q_u}{Q_u}\frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\ \ , m \to \infty$$

Elde ederiz.

Tekrar (1.36)'yı kullanarak, Teorem 4.1.1 ve Lemma 4.1.3 hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|F_{n,3}|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}Q_u\Delta\varphi_u h_u\frac{u+1}{u}\right|^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}Q_u|\Delta\varphi_u||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}uq_u|\Delta\varphi_u||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}(u|\Delta\varphi_u|)^k q_u|h_u|^k\right)\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}(u|\Delta\varphi_u|)^{k-1}u\,|\Delta\varphi_u|q_u|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}u\,|\Delta\varphi_u|\frac{q_u}{Q_u}\frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}\Delta(u|\Delta\varphi_u|)\sum_{r=1}^{u}\frac{q_r}{Q_r}\frac{|h_r|^k}{Y_r^{k-1}} + O(1)m|\Delta\varphi_m|\sum_{u=1}^{m}\frac{q_u}{Q_u}\frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}|\Delta(u|\Delta\varphi_u|)|Y_u + O(1)m|\Delta\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}uY_u|\Delta^2\varphi_u| + O(1)\sum_{u=1}^{m-1}Y_u|\Delta\varphi_u| + O(1)\,m|\Delta\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1) \quad , m \to \infty \text{ elde ederiz.}$$

Son olarak (1.36)'yı kullanarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |F_{n,4}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} Q_u \varphi_{u+1} h_u \frac{1}{u}\right|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^k} \left(\sum_{u=1}^{n-1} |\varphi_{u+1}|\, q_u |h_u|\right)^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left(\sum_{u=1}^{n-1} |\varphi_{u+1}|^k q_u |h_u|^k\right)$$

$$\times \left(\frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1) \sum_{u=1}^{m} |\varphi_{u+1}|^{k-1} |\varphi_{u+1}| q_u |h_u|^k \sum_{n=u+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

$$= O(1) \sum_{u=1}^{m} |\varphi_{u+1}| \frac{q_u}{Q_u} \frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}}$$

$$= O(1) \quad , m \to \infty$$

Olduğu görülür.

Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

4.2. $\sum A_n(x)\varphi_n$ serilerinin pozitif monoton azalmayan dizi yardımıyla $|\bar{N}, q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

f(t) , 2π periyotlu periyodik ve $(-\pi, \pi)$ üzerinde (L) integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)$$

$$\beta(h) = \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\} \; and \; \beta_\alpha(h)$$

$$= \frac{\alpha}{h^\alpha}\int_0^h (h-u)^{\alpha-1}\beta(u)du, (\alpha > 0)$$

yazılır.

Şu iyi bilinir ki, $h_n(x), (nC_n(x))$ dizisinin $(C,1)$ ortalaması olmak üzere, eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi)$ ise bu takdirde $h_n(x) = O(1)$ dir [6].

Bu durumu kullanarak Fourier Serileri vasıtasıyla aşağıda ki asıl sonucu elde ederiz.

Teorem 4.2.1 Eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi) \; ve \; (q_n), (\varphi_n) \; ve \; (Y_n)$ Teorem 4.1.1 'in şartlarını sağlayan diziler ise bu takdirde $\sum C_n(x)\varphi_n$ serisi $|\bar{N}, q_n|_k \;, k \geq 1$ toplanabilirdir.

Eğer tüm n değerleri için $q_n = 1$ alırsak, Fourier Serilerinin $|C, 1|_k$ toplanabilirlik faktörleri ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

5. BÖLÜM

YARI MONOTON DİZİLERİN SONSUZ SERİLERE VE FOURİER SERİLERİNE UYGULANMASI ÜZERİNE TEOREMLER

Bu bölümde yarı monoton diziler kullanılarak, sonsuz serilerin ve Fourier serilerinin mutlak Riesz toplanabilme çarpanları ile ilgili verilen Teorem1.3.30 ve Teorem 1.3.31 daha zayıf koşullar altında ispatlanacak olan iki teorem ifade edilecektir.

5.1. $\sum a_n\varphi_n$ serilerinin yarı monoton diziler yardımıyla $|\bar{N},q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

Bu bölümde Teoremi 1.3.30'u zayıf koşullar altında kanıtlayacağız. Bunun için aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

Teorem 5.1.1. $n\to\infty$ $\varphi_n\to\infty$ olsun.$\sum nY_n\mu_n$ ile μ-yarı-monoton olan bir sayı dizisi (A_n) olduğunu varsayalım, $\sum A_n Y_n$ yakınsak ve tüm n için $|\Delta\varphi_n|\leq|A_n|$.

Eğer (1.41) ve

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}=O(Y_m)\,,m\to\infty \tag{5.1}$$

Koşulları sağlanıyor ise $\sum a_n\varphi_n$ serisi $|\bar{N},q_n|_k$ toplanabilirdir, $k\geq 1$ için.

Uyarı: $k=1$ olduğunda koşul (5.1)'un koşul (1.42)'ye indirgendiği unutulmamalıdır. $k>1$ olduğunda koşul (5.1) koşul (1.42)'den daha zayıftır ancak tersi doğru değildir.[21] 'de olduğu gibi eğer (1.42) sağlanmışsa o zaman

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}=O\left(\frac{1}{Y_1^{k-1}}\right)\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k$$

$$= O(Y_m)\,, m \to \infty$$

Elde ederiz.

[25] 'de olduğu gibi, $k > 1$ olduğunda tersinin yanlış olduğunu göstermek için aşağıdaki örnek yeterlidir. $Y_n = n^\beta,\ 0 < \beta < 1$,ve benzeri bir dizi (v_n) oluşturulabilir öyle ki

$$\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = Y_n - Y_{n-1}$$

Dolayısıyla

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}\frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}} = Y_m = m^\beta$$

Ve bu yüzden

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k = \sum_{n=1}^{m}(Y_n - Y_{n-1})Y_n^{k-1} = \sum_{n=1}^{m}\left(n^\beta - (n-1)^\beta\right)n^{\beta(k-1)}$$

$$\geq \beta\sum_{n=1}^{m} n^{\beta-1}\, n^{\beta(k-1)}$$

$$= \beta\sum_{n=1}^{m} n^{\beta k-1} \sim \frac{m^{\beta k}}{k} \quad , m \to \infty$$

Elde edilir. Bunu takip eden $k > 1$ sağladığı

$$\frac{1}{Y_m}\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}|h_n|^k \to \infty \quad , m \to \infty$$

Olur. Bu, (1.42) 'nin (5.1) anlamına geldiğini ancak tersine olmadığını göstermektedir.

Teorem 5.1.1'in kanıtı için aşağıdaki lemma ya ihtiyacımız var.

Lemma 5.1.2. Teorem5.1.1 şartları altında biz,

$$|\varphi_n|Y_n = O(1), \qquad n \to \infty \tag{5.2}$$

$$nY_n|A_n| = O(1) \quad , n \to \infty \tag{5.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nY_n|\Delta A_n| < \infty \tag{5.4}$$

Olarak alırız [24].

Teorem 5.1.1. in ispatı

(K_n) , $\sum a_n\varphi_n$ serisinin $(\bar{N}, q_n)$ ortalamasının bir dizisi olsun. Bu durumda tanım gereği biz

$$K_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{u=0}^{n} q_u \sum_{r=0}^{u} a_r\,\varphi_r = \frac{1}{Q_n}\sum_{u=1}^{n}(Q_n - Q_{u-1})a_u\varphi_u \tag{5.5}$$

$n \geq 1$ için biz

$$K_n - K_{n-1} = \frac{1}{Q_n}\sum_{u=1}^{n}(Q_n - Q_{u-1})a_u\varphi_u - \frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}(Q_{n-1} - Q_{u-1})\,a_u\varphi_u$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n} Q_{u-1}\varphi_u a_u$$

$$= \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n} \frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u} u a_u \tag{5.6}$$

Elde ederiz. (5.6) in sağ tarafına Abel dönüşümü uygulanırsa ,

$$K_n - K_{n-1} = \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}\Delta\left(\frac{Q_{u-1}\varphi_u}{u}\right)\sum_{r=1}^{u} r a_r + \frac{q_n\varphi_n}{nQ_n}\sum_{u=1}^{n} u a_u$$

$$= \frac{(n+1)q_nh_n\varphi_n}{nQ_n} - \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1} q_uh_u\varphi_u\frac{u+1}{u}$$

$$+ \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1} Q_u\Delta\varphi_uh_u\frac{u+1}{u} + \frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1} Q_u\varphi_{u+1}h_u\frac{1}{u}$$

$$= K_{n,1} + K_{n,2} + K_{n,3} + K_{n,4}$$

Elde edilir.

Teorem 5.1.1'in ispatını tamamlamak için Minkowski Eşitsizliği ile

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |K_{n,\alpha}|^k < \infty \quad , \alpha = 1,2,3,4 \; için \tag{5.7}$$

Olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak Teorem5.1.1 ve Lemma 5.1.2 hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |K_{n,1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n|^{k-1} |\varphi_n| \frac{q_n |h_n|^k}{Q_n} = O(1) \sum_{n=1}^{m} |\varphi_n| \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} \Delta|\varphi_n| \sum_{u=1}^{n} \frac{q_u}{Q_u} \frac{|h_u|^k}{Y_u^{k-1}} + O(1)|\varphi_m| \sum_{n=1}^{m} \frac{q_n}{Q_n} \frac{|h_n|^k}{Y_n^{k-1}}$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |\Delta\varphi_n| Y_n + O(1)|\varphi_m| Y_m$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m-1} |A_n| Y_n + O(1)|\varphi_m| Y_m$$

$$= O(1) \quad , m \to \infty$$

Elde ederiz. Şimdi $K_{n,1}$ de olduğu gibi Hölder'in eşitsizliğini uygularsak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |K_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left(\sum_{u=1}^{n-1} q_u |h_u|^k |\varphi_u|^k \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{u=1}^{n-1} q_u \right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|^{k-1}\,|\varphi_u|q_u|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_u|\frac{q_u|h_u|^k}{Q_uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\ ,m\to\infty$$

Elde ederiz.Tekrar (1.41) ‘i kullanarak Teorem5.1.1 ve Lemma 5.1.2 hipotezleri sayesinde

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|K_{n,3}\right|^k = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{u=1}^{n-1}Q_u|\Delta\varphi_u||h_u|\right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}uq_u|A_u||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u(u|A_u|)^k|h_u|^k\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}(u|A_u|)^{k-1}u|A_u|q_u\,|h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}u|A_u|\frac{q_u|h_u|^k}{Q_uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}\Delta(u|A_u|)\sum_{r=1}^{u}\frac{q_r|h_r|^k}{rY_r^{k-1}} + O(1)m|A_m|\sum_{u=1}^{m}\frac{q_u|h_u|^k}{uY_u^{k-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}|\Delta(u|A_u|)|Y_u + O(1)m|A_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1}\left|(u+1)\Delta|A_u| - |A_u|\right|Y_u + O(1)m|A_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1} uY_u|\Delta A_u| + O(1)\sum_{u=1}^{m-1}|A_u|Y_u + O(1)m|A_m|\,Y_m$$

$$= O(1)\ \ , m \to \infty$$

Elde edilir.Son olarak (1.41)'i kullanarak $K_{n,1}$'de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|K_{n,4}\right|^k \le O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}\frac{Q_u}{u}|\varphi_{u+1}||h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}^k}\left(\sum_{u=1}^{n-1}|\varphi_{u+1}|q_u|h_u|\right)^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\left(\sum_{u=1}^{n-1}q_u|\varphi_{u+1}|^k|h_u|^k\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{u=1}^{n-1}q_u\right)^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}q_u|\varphi_{u+1}|^{k-1}|\varphi_{u+1}||h_u|^k\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}|\varphi_{u+1}|\frac{q_u|h_u|^k}{Q_uY_u^{k-1}} = O(1)\ \ , m \to \infty$$

Elde ederiz. Bu Teorem5.1.1'in ispatını tamamlar.

5.2. Trigonometrik Fourier Serilerine Uygulama

f, 2π peryotlu ve $(-\pi,\pi)$ boyunca Lebesgue integrallenebilen periyodik bir fonksiyon olsun. Trigonometrik Fourier *f* serisi,

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)$$

$$\beta(h) = \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\},$$

$$ve \ \ \beta_\alpha h = \frac{\alpha}{h^\alpha}\int_0^h (h-u)^{\alpha-1}\beta(u)du, \qquad (\alpha > 0).$$

Eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi)$ ise $h_n(x) = O(1)$, burada $h_n(x)$, $\big(nA_n(x)\big)$ dizisinin $(C,1)$ ortalamasıdır [6].

Bu gerçeği kullanarak aşağıdaki trigonometrik Fourier serisi ile ilgili sonucu elde ederiz.

Teorem 5.2.1. Eğer $\beta_1(h) \in BV(0,\pi)$ ve $(A_n),(\varphi_n) ve \ (Y_n)$ dizileri Teorem 5.1.1'in koşullarını yerine getirirse o zaman $\sum C_n(x)\varphi_n$ serisi $|\bar{N},q_n|_k$ toplanabilirdir,$k \geq 1$.

Eğer tüm n değerleri için $q_n = 1$ alırsak, Trigonometrik Fourier Serilerinin $|C,1|_k$ toplanabilirlik faktörleri ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz. Sonuç olarak eğer $k = 1$ alırsak Trigonometrik Fourier Serilerinin $|\bar{N},q_n|$ toplanabilirlik faktörleri ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

6.BÖLÜM

SONSUZ SERİLERİN VE FOURİER SERİLERİNİN $|C,\alpha|_k$ve $|N,q_n|_k$ TOPLANABİLME ÇARPANLARI ÜZERİNE TEOREMLER

6.1. $\sum a_n\varphi_n$ serilerinin $|C,\alpha|_k$ Toplanabilme Çarpanları ve $\sum a_nQ_n\varphi_n(n+1)^{-1}$ serilerinin $|N,q_n|_k$ Toplanabilme Çarpanları Üzerine Teoremler

Bu bölümde hemen hemen artan bir dizi yerine, daha geniş diziler sınıfı olan yarı kuvvetli artan diziler kullanarak, Teorem1.3.32 ve Teorem1.3.33 ’ ü genelleştiren iki teorem ifade ve ispat edeceğiz

Teorem 6.1.1.(Y_n) bazı $\beta(0<\beta<1)$ için bir yarı -f- power artan dizi olsun.Ayrıca kabul edelim ki her n için $\sum n\mu_nY_n<\infty$, $\Delta A_n<\mu_n$,$\sum A_n Y_n$ yakınsak ve $|\Delta\varphi_n|\leq|A_n|$olacak şekilde (A_n)sayılarının bir μ-yarı- monoton dizi olsun.Eğer (1.45)-(1.46) şartları sağlanıyorsa bu taktirde $\sum a_n\varphi_n$ serisi $|C,\alpha|_k$,$(0<\alpha\leq 1\ ve\ k\geq 1)$ toplanabilirdir.

Teorem 6.1.2. (q_n), Teorem A ‘da ki gibi bir dizi (Y_n) de bazı $\beta(0<\beta<1)$ için bir yarı-f- power artan dizi olsun. Ayrıca kabul edelim ki her n için $\sum n\mu_nY_n$, $\Delta A_n\leq\mu_n$, $\sum A_nY_n$ yakınsak ve $|\Delta\varphi_n|\leq|A_n|$ olacak şekilde (A_n) sayılarının bir μ-yarı-monoton dizisi olsun. Eğer (1.45)-(1.46) şartları sağlanıyorsa bu takdirde $\sum a_nq_n\varphi_n(n+1)^{-1}$ serisi $|N,q_n|_k$,$(k\geq 1)$ toplanabilirdir.

Teoremlerin ispatı için aşağıdaki lemmaları kullanacağız.

Lemma 6.1.3. Eğer $0<\alpha\leq 1\ ve\ 1\leq u\leq n$ ise bu takdirde

$$\left|\sum_{q=0}^{u} A_{n-q}^{\alpha-1}\, a_q\right| \leq \frac{max}{1 \leq m \leq u}\left|\sum_{q=0}^{m} A_{m-q}^{\alpha-1} a_q\right| \tag{6.1}$$

dır.[32]

Lemma 6.1.4. Eğer $-1 \leq \alpha \leq \sigma, k > 1\ ve \sum a_n$ serisi$|C,\alpha|_k$ toplanabilir ise bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C,\sigma|_k$ toplanabilirdir[34]. Bu Lemmanın $k = 1$ olması durumu Kogbetliantz'dan kaynaklanıyor [18].

$k > 1$ olması durumu Flett 'in bir teoreminin özel bir versiyonudur.([9],Teorem6.1.1])

Lemma 6.1.5. (Y_n) bazı $\beta(0 < \beta < 1)$ için bir yarı-f-power artan dizi olsun. Eğer $(A_n), \Delta A_n < \mu_n\ ve \sum n\mu_n Y_n < \infty$ şartları ile birlikte bir μ-yarı-monoton dizi ise bu taktir de ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nY_n|\Delta A_n| < \infty \tag{6.2}$$

$$nA_nY_n = O(1)\,, n \to \infty \tag{6.3}$$

dır. [30]

Lemma 6.1.6. ,$q_0 > 0, q_n \geq 0\ ve\ (q_n)$ bir monoton azalan dizi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilir ise bu takdirde $\sum a_n Q_n (n+1)^{-1}$ serisi $|N,q_n|_k$ $(k \geq 1)$ toplanabilirdir [37].

Teorem 6.1.1 in İspatı : $(na_n\varphi_n)$ dizisinin ortalaması $(F_n^\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1\ ile\ n.(C,\alpha)$ olsun. Bu takdirde (1.7) ve (1.8)'den dolayı biz

$$F_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n} A_{n-u}^{\alpha-1} u a_u \varphi_u \tag{6.4}$$

Yazabiliriz.

Önce Abel dönüşümü uygulayarak ve Lemma 6.1.3'ü kullanarak, biz

$$F_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n-1}\Delta\varphi_u\sum_{q=1}^{u}A_{n-q}^{\alpha-1}qa_q + \frac{\varphi_n}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n}A_{n-u}^{\alpha-1}ua_u,$$

$$|F_n^\alpha| \le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n}|\Delta\varphi_u|\left|\sum_{q=1}^{u}A_{n-q}^{\alpha-1}qa_q\right| + \frac{|\varphi_n|}{A_n^\alpha}\left|\sum_{u=1}^{n}A_{n-u}^{\alpha-1}ua_u\right|$$

$$\le \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{u=1}^{n-1}A_u^\alpha\vartheta_u^\alpha|\Delta\varphi_u| + |\varphi_n|\vartheta_n^\alpha$$

$$= F_{n,1}^\alpha + F_{n,2}^\alpha$$

Elde ederiz.

Teoremin ispatını tamamlamak için Minkowski eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\left|F_{n,r}^\alpha\right|^k < \infty\,, r = 1{,}2\ için$$

Olduğunu göstermek yeterlidir.

$k > 1$ olduğu zaman biz $k\ ve\ k^\iota$ indisleri için Hölder'in eşitsizliğini uygulayabiliriz, burada $\frac{1}{k} + \frac{1}{k^\iota} = 1$ olup Teorem 6.1.1 ve Lemma 6.1.5 'in hipotezleri doğrultusunda

$$\sum_{n=2}^{m+1} n^{-1}\left|F_{n,1}^\alpha\right|^k \le \sum_{n=2}^{m+1} n^{-1}(A_n^\alpha)^{-k}\left\{\sum_{u=1}^{n-1}A_u^\alpha\vartheta_u^\alpha|\Delta\varphi_u|\right\}^k$$

$$\le \sum_{n=2}^{m+1} n^{-(1+\alpha k)}\left\{\sum_{u=1}^{n-1}u^{\alpha k}(\vartheta_u^\alpha)^k|A_u|\right\} \times \left\{\sum_{u=1}^{n-1}|A_u|\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}u^{\alpha k}(\vartheta_u^\alpha)^k\,|A_u|\sum_{n=u+1}^{m+1}\frac{1}{n^{\alpha k+1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m}u^{\alpha k}(\vartheta_u^\alpha)^k\,|A_u|\int_u^\infty \frac{dx}{x^{\alpha k+1}}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m} u|A_u|\frac{(\vartheta_u^\alpha)^k}{u}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1} \Delta(u|A_u|)\sum_{i=1}^{u}\frac{(\vartheta_i^\alpha)^k}{i} + O(1)m|A_m|\sum_{u=1}^{m}\frac{(\vartheta_u^\alpha)^k}{u}$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1} \big|(u+1)\Delta|A_u| - |A_u|\big|Y_u + O(1)m|A_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{u=1}^{m-1} u|\Delta A_u|Y_u + O(1)\sum_{u=1}^{m-1}|A_u|Y_u + O(1)m|A_m|Y_m$$

$$= O(1)\ , m \to \infty$$

Elde ederiz. Tekrar Teorem 6.1.1 ve hipotezlerin altında

$$\sum_{n=1}^{m+1} n^{-1}\left|F_{n,2}^\alpha\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}|\varphi_n|\frac{(\vartheta_n^\alpha)^k}{n} = O(1)\sum_{n=1}^{m-1}\Delta|\varphi_n|\sum_{u=1}^{n}\frac{(\vartheta_u^\alpha)^k}{u}$$

$$+O(1)|\varphi_m|\sum_{n=1}^{m}\frac{(\vartheta_n^\alpha)^k}{n}$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|\Delta\varphi_n|Y_n + O(1)|\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m-1}|A_n|Y_n + O(1)|\varphi_m|Y_m$$

$$= O(1)\ , m \to \infty$$

Elde ederiz. Bu ise Teorem 6.1.1 ’in ispatını tamamlar.

Teorem 6.1.2’nin İspatı: Teorem 6.1.2’yi ispatlamak için yalnızca bizim (N, q_n)’nin özel bir durumu olan (C, α)’yı göz önüne almaya ihtiyacımız vardır. Bu nedenle, Teorem 6.1.2 daha sonra Teorem 6.1.1, Lemma 6.1.4 ve Lemma 6.1.6 vasıtasıyla incelenecektir. Eğer $\alpha = 1$ alırsak, bu takdirde sonsuz serilerin Mutlak Nörlund Toplanabilirlik faktörleri için yeni bir sonuç elde ederiz. Ayrıca eğer $\gamma = 0$ alırsak bu takdirde yarı-β-power artan diziler ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz. Sonuç olarak eğer (Y_n),$|\Delta Y_n| = O\left(\frac{Y_n}{n}\right)$ olacak şekilde hemen hemen artan bir dizi olarak alırsak bu takdirde ayrıca Teorem6.1.2, özel bir durum olarak Teorem 1.3.32 ve Teorem 1.3.33'ü içerir ve bu durumda"$\Delta A_n \leq \mu_n$"şartına ihtiyaç yoktur.

6.2. Trigonometrik Fourier Serilerine Uygulama

f(h) ,2π periyotlu periyodik ve $(-\pi, \pi)$ üzerinde (L) integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cosnx + b_n sinnx) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)$$

$$\beta(h) = \frac{1}{2}\{f(x+h) + f(x-h)\}\, and\, \beta_\alpha(h)$$

$$= \frac{\alpha}{h^\alpha} \int_0^h (h-u)^{\alpha-1} \beta(u) du, (\alpha > 0)$$

yazılır.

Şu iyi bilinir ki eğer $\beta_1(h) \in BV(0, \pi)$ ise bu takdirde $h_n(x) = O(1)$ dir, burada $h_n(x), (nC_n(x))$ dizisi anlamında $(C,1)$ dir [6]. Bu durumu kullanarak Fourier Serileri vasıtasıyla aşağıdaki asıl sonucu elde ederiz.

Teorem 6.2.1. Eğer $\beta_1(h) \in BV(0, \pi)\; ve\; (q_n), (\varphi_n)\; ve\; (Y_n)$ Teorem6.1.2'nin şartlarını sağlayan diziler ise bu takdirde $\sum C_n(x) Q_n \varphi_n (n+1)^{-1}$ serisi $|N, q_n|_k$,$k \geq 1$ toplanabilirdir.

7. BÖLÜM

SONUÇLAR

7.1 Sonuçlar

Şimdi önceki kısımlarda ifade edilmiş ve ispatlanmış teoremler ile ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Sonuç 7.1.1. Teorem 3.1.1 in hipotezleri altında eğer tüm n değerleri için$q_n = 1$ alırsak sonsuz serilerin $|C,1|_k$ toplanabilme çarpanları ile ilgili yeni bir sonuç elde ederiz.

Sonuç 7.1.2. Teorem 4.1.1 in hipotezleri altında n'nin tüm değerleri için $q_n = 1$ alırsak, Mazhar'ın zayıf koşullar altında sonsuz serinin $|C,1|_k$ toplanabilirlik faktörleri ile ilgili bilinen bir sonucu elde edilir.

KAYNAKÇA

1. Bor, H., 1985. On two summability methods. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 97:** 147–149.
2. Bor, H., 1994. On the absolute Riesz summability factors. **Rocky Mt.J. Math. ,24:** 1263-1271 .
3. Das, G., 1969. Tauberian theorems for absolute Nörlund summability. **Proceedings of the London Mathematical Society, 9** (3): 357-394
4. Cesaro,E. , 1890. Sur la multiplication des series.**Bull. sci. Math. 14:**114-120
5. Maddox, I.J., 1970. Elements of functional analysis. **Cambridge University Press.**
6. Chen ,K.K. , 1954 . Functions of bounded variation and the Cesaro means of Fourier series. **Acad.Sin.Sci.Record 1:** 283-289
7. Petersen, G.M.,1966. Regular matrix transformations. **Mc Graw Publishing Company Limited, London-New York-Toronto.**
8. Fekete, M., 1911. Zur theorie der divergenten reihen. **Mathematical és Termezs Ertesitö (Budapest), 29:** 719-726.
9. Flett, T.M., 1957. On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. **Proceeding of the London Mathematical Society, 7:** 113-141.
10. Zygmund, A., 1959. Trigonometric series. **Cambridge University Press.**
11. Hardy, G.H., 1949. Divergent Series.**Oxford University Press,Oxford**
12. Fadden, L.M., 1942. Absolute Nörlund summability. **Duke Mathematical Journal, 9:** 168-207.
13. Mazhar, S. M., 1966. On the summability factors of infinite series. **Publicationes Mathematicae Debrecen, 13:** 229–236.
14. Bor, H., 1985. On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Summability Factors of Infinite Series. **Tamkang Journal of Mathematics, 16:** 13-20.
15. Bor, H., 1986. A Note on $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ Summability Factors. **Pure Appl. Math. Sci.,24:**17-23
16. Sulaiman, W. T., 1992. On some summability factors of infinite series. **Proc. Amer. Math. Soc., 115:** 313-317.

17. Kishore, N., Hotta, G. C., 1970 on $\left|\bar{N}, p_n\right|$, summability factors. **Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 31:** 9–12.
18. Kogbetliantz, E., 1925. Sur les Sèries Absolument Sommables Par la Mèthode desMoyannes Arithmètiques. **Bull. Sci. Math., 49:** 234-256.
19. Leindler, L., 2001. A new application of quasi power increasing sequences. **Publicationes Mathematicae Debrecen, 58:** 791-796.
20. Mazhar, S. M., 1972. On $|C,1|_k$ summability factors of infinite series. **Indian J.Math.14 :**45-48
21. Sulaiman,W.T. , 2010. A note on $|A|_k$ summability factors of infinite series. **Appl. Math. Comput. 216:** 2645-2648
22. Bor H., 1993. On absolute summability factors ,**Proc. Amer**. **Math. Soc. 118:** 71-75
23. Boas Jr., R.P.1965. Quasi-positive sequences and trigonometric series. **Proc. Lond**. **Math. Soc. 14A**, 38–46
24. Bor, H., 1991. On quasi-monotone sequences and their applications. **Bull. Aust. Math. Soc. 43,** 187–192
25. Bor, H. , 2012 . Quasi-monotone and almost increasing sequences and their new applications. **Abstr. Appl.Anal., Art. ID 793548**, 6
26. Mazhar, S.M., 1977, On generalized quasi-convex sequence and its applications. **Indian J. Pure Appl. Math**.**8**, 784–790
27. Bari, N.K., Steˇckin, S.B. 1956 . Best approximation and differential properties of two conjugate functions**.Trudy. Moskov. Mat. Obšˇc. 5**, 483–522 (in Russian)
28. Bor, H., 2011. On a new application of almost increasing sequences. **Math. Comput. Model. 53,** 230–233
29. . Bor, H , 2011. A new application of δ-quasi-monotone and almost increasing sequences. **Comput. Math.Appl**. **61**, 2899–2902
30. Bor, H., 2013. Onthe quasi-monotone and generalized power increasing sequences and their newapplications. **J. Class. Anal. 2**, 139–144
31. Borwein, D.,Cass, F.P. ,1968. Strong Nörlund summability. **Math. Z. 103**, 94–111
32. Bosanquet, L.S. , 1941. A mean value theorem. **J. Lond. Math. Soc**. **16**, 146–148
33. Leindler, L. ,2001. A new application of quasi power increasing sequences. **Publ. Math. Debr. 58,** 791–796

34. Mehdi, M.R., 1959. Linear transformations between the Banach spaces $L\,p$ and $l\,p$ with applications to absolute summability. **Ph.D. Thesis. University College and Birkbeck College, London**

35. Nörlund, N.E.,1920. Sur une application des fonctions permutables. **Lunds Univ. Arssk. (2) 16(3)**, 1–10

36. Pati, T.,1954. The summability factors of infinite series. **Duke Math. J. 21**, 271–284

37. Varma, R.S. ,1977. On the absolute Nörlund summability factors. **Riv. Mat. Univ. Parma (4) 3,** 27–33

38. Titchmarsh, E.C. 1961. The Theory of Functions, **Oxford University Press,London**

ÖZGEÇMİŞ

Adı, Soyadı : Arzu YAKAR

Uyruğu : Türkiye (TC)

NEVŞEHİR

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	ERÜ Fen Bilimleri Enstitüsü	2021- Devam
Yüksek Lisans(tezsiz)	ERÜ Fen Bilm.. Enst .Matematik Blm.	2008
Lisans	ERÜ Fen Edebiyat Fak.Matematik	2007
Lise	Kayseri Lisesi	2002

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2021- Halen	Diriliş Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi.	Öğretmen
2013	Boğazlıyan Necmettin Yıldız METEM	Öğretmen