

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KABA DEĞİŞKENLİ DİZİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burak AVŞAR

OCAK, 2022
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**KABA DEĞİŞKENLİ DİZİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burak AVŞAR

UŞAK, 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Burak AVŞAR



KABA DEĞİŞKENLİ DİZİLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Burak AVŞAR

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2022

ÖZET

Bulanık küme teorisi gerçek hayattaki verileri inceleyebilmek için tutarlı ve anlamlı araçlar sunar. Bu sayede günlük hayattaki belirsizlikleri matematiksel olarak ifade edebiliriz. Zadeh (1965) tarafından üyelik fonksiyonu(membership function) aracılığıyla tanımlanan bulanık küme teorisi birçok matematikçi tarafından çalışıp geliştirilmesine karşın öz-ikillik(self-duality) özelliğini barındırmamaktadır. Teorik ve uygulamalarda öz-ikillik özelliğinin gerekliliği sonucu Liu (2004) Kredibilite Teorisini tanımlamıştır. Kredibilite Teorisi bulanık değişkenlerin davranışını inceleyen bir alandır.Bu tezde Kredibilite ölçüsü, güven ölçüsü, kredibilite dağılımı, yoğunluk fonksiyonu, beklenen değer, varyans, mesafe kavramı, eşitsizlikler ve yakınsaklık kavramları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : Bulanık değişken, kaba değişken, kredibilite ölçüsü, güven ölçüsü

Sayfa Adedi : 98

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

GENERALIZED STATISTICAL CONVERGENCE OF ROUGH VARIABLE SEQUENCES

(M.Sc. Thesis)

Burak AVŞAR

UŞAK UNIVERSITY
GRADUATE EDUCATION INSTITUTE
Department of Mathematics

January 2022

ABSTRACT

Fuzzy set theory provides us with consistent and meaningful tools to analyze real-life data. In this way, we can express the uncertainties in daily life mathematically. Although fuzzy set theory introduced by Zadeh (1965) through membership function has been studied and developed by many mathematicians, it does not contain self-duality property. So, Liu (2004) defined the credibility theory as a result of the necessity of self-duality in theory and practice. Credibility Theory is a field that studies the behavior of fuzzy variables. In this thesis, credibility measure, trust measure, credibility distribution, density function, expected value, variance, distance, inequalities and convergence concepts are examined.

Keywords : Fuzzy variable, rough variable, credibility measure, trust measure
Number of Page : 98
Advisor : Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli yardım ve katkılarını esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Ekrem SAVAS’a ve tüm tez süresi boyunca verdiği destekle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli Merve ÇETİNKAYA’ya teşekkürlerimi sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
SEMBOL ve KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	5
2.1 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	5
2.2 λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	6
3. KREDİBİLİTE UZAYI	7
3.1 BULANIK DEĞİŞKEN	20
3.2 ÜYELİK FONKSİYONU	23
3.2.1 Bazı Özel Üyelik Fonksiyonları	27
3.2.2 Ortak Üyelik Fonksiyonu	28
4. KREDİBİLİTE DAĞILIMI	30
4.1 KREDİBİLİTE YOĞUNLUK FONKSİYONU	34
4.2 ORTAK KREDİBİLİTE DAĞILIMI	36
4.3 BAĞIMSIZLIK	37
5. BEKLENEN DEĞER	44
6. VARYANS	48
7. KRİTİK DEĞERLER	51
8. MESAFE	55
9. KABA UZAY ve KABA DEĞİŞKEN	58
10. EŞİTSİZLİKLER	60
10.1 BULANIK DEĞİŞKENLERDE EŞİTSİZLİK	60

10.2 KABA DEĞİŞKENLERDE EŞİTSİZLİK	63
11. YAKINSAKLIK KAVRAMI	67
11.1 BULANIK DEĞİŞKENLERDE YAKINSAKLIK	67
11.2 KABA DEĞİŞKENLERDE λ -İSTATİSTİKSEL GÜVEN YA- KINSAKLIK	73
KAYNAKLAR	86
ÖZGEÇMİŞ	88



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 3.1. (3.32) ile verilen bulanık değişken	27
Şekil 3.2. (3.33) ile verilen bulanık değişken	28
Şekil 3.3. (3.34) ile verilen bulanık değişken	28
Şekil 4.1. (4.1) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı	30
Şekil 4.2. (4.2) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı	31
Şekil 4.3. (4.3) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı	31



SİMGELER ve KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan semboller ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	Boş Küme
$\mathcal{P}$	Kuvvet Kümesi
σ	Sigma
μ	Üyelik Fonksiyonu(Membership Function)
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subseteq$	Kapsar
$\not\subseteq$	Kapsamaz
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\forall$	Hepsi
$\exists$	Bazı
A^c	Tümleyen
$\vee$	Supremum
$\wedge$	İnfimum
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$[a, b]$	Kapalı Aralık
(a, b)	Açık Aralık
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$	Kredibilite Uzayı(Credibility Space)
$(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$	Kaba Uzay(Rough Space)
Cr	Kredibilite Ölçüsü(Credibility Measure)
Tr	Güven ölçüsü(Trust Measure)
$\inf$	İnfimum
$\sup$	Supremum
$\min$	Minimum
$\max$	Maksimum

1. GİRİŞ

Klasik küme teorisine karşın bulanık küme teorisi, gerçek hayatta belirsizliklerin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunar. Bu sayede bulanık küme teorisi, dildeki belirsiz kavramların daha anlamlı bir şekilde ifade edilmesine yardımcı olur. Bulanık küme teorisi, Zadeh (1965) tarafından üyelik fonksiyonu (membership function) aracılığıyla verildi. Üyelik fonksiyonu, kümedeki bir elemanın o kümeye ne derece ait olduğunu gösteren fonksiyondur.

Olasılık teorisi, Pascal ve Fermat tarafından 1654 yılında kumar üzerine kesin olasılıkları elde etmek için yaptıkları çalışmalar sonucunda ortaya çıkmıştır (Gillies, 2012). Olasılık teorisinde Mises (1931) yılında örnek uzay kavramını ortaya atıp bununla birlikte olasılık teorisi ile ölçü teorisi arasındaki ilişkiyi kurduğunda büyük bir ilerleme yaşanmıştır. Olasılık teorisinin aksiyomatik tanımı Kolmogorov tarafından 1933 yılında Foundations of Probability Theory isimli kitapta verilmiştir (Kolmogorov ve Bharucha-Reid, 2018). O zamandan beri olasılık teorisi istikrarlı bir şekilde geliştirildi ve birçok alanda yaygın olarak kullanıldı. Bu gelişmeler ışığında hayata dair olasılıklar hakkında daha iyi yorum yapılabilmesi için Zadeh (1965) üyelik fonksiyonu aracılığıyla bulanık küme kavramını tanımladı.

Zadeh (1978) aynı zamanda bulanık bir olayı ölçmek için olasılık ölçüsü kavramını tanımladı. Zadeh tarafından tanımlanan bu olasılık kavramı; Nahmias (1978), Kauffman ve Gupta (1987), Zimmermann (2001), Dubois ve Prade (1987), Klir ve Yuan (1995) ve De Cooman (1997) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılıp geliştirildi. Fakat bu olasılık ölçüsü öz-ikillik (self-duality) özelliğini barındırmıyordu. Liu (2002) yılında kredibilite ölçüsü kavramını ortaya attı. Teoride ve uygulama da öz-ikillik özelliği içeren bir ölçüme ihtiyaç duyulduğu için Liu (2004) yılında öz-ikillik özelliğini sağlayan Kredibi-

lite ölçüsünü tanımladı. Buna ek olarak Li ve Liu (2006) yılında kredibilite ölçüsü için gerekli ve yeter şartları verdiler.

Kredibilite Teorisi, bulanık değişkenleri inceleyen bir bilim dalıdır. Zaman içerisinde Kredibilite Teorisi altında kredibilite dağılımı, bağımsızlık, eş dağılım, beklenen değer, varyans, kritik değer, mesafe, eşitsizlik ve yakınsaklık gibi birçok kavram incelenmiştir. Li ve Liu (2006) yılında kredibilite teorisi için Kredibilite Genişletme Teoremini verdi. Bu teorem kredibilite ölçüsünü sayısal olarak ifade edilmesini sağlar.

Bulanık değişkenlerin bağımsızlığı, marjinal olasılık dağılım fonksiyonu kavramına dayalı olarak tanımlanmıştır. Bulanık değişkenler için bağımsızlık kavramı Nahmias (1978), Yager (1992), Liu ve Gao (2007) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılıp geliştirilmiştir.

Beklenen değer, tüm olası değerlerin ağırlıklı ortalamasıdır. Diğer bir ifadeyle, rassal değişkenin alabileceği her olası değer, ona karşılık gelen ağırlığı ile çarpılır ve toplanır. Bulanık değişkenin beklenen değer operatörü, olasılık teorisinde son derece önemli bir rol oynar. Bulanık değişkenler için bir beklenen değer operatörü tanımlamanın birden çok yolu vardır. Bu farklı operatörler; Dubois ve Prade (1987), Heilpern (1992), de Campos Ibáñez ve Muñoz (1989) ve Yager (1981) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılıp geliştirilmiştir. Bulanık değişkenler için beklenen değer operatörünün en genel tanımı Liu ve Liu (2002a) tarafından verildi. Bu tanım hem sürekli hem de kesikli bulanık değişkenler için geçerlidir.

Varyans tanımı, Liu ve Liu (2002a) tarafından verilmiştir. Bulanık bir değişkenin varyansı, dağılımın beklenen değeri etrafındaki yayılımının bir ölçüsünü sağlar. Küçük bir

varyans değeri, bulanık değışkenin beklenen değeri etrafında sıkı bir şekilde yoğunlaştığını gösterir. Büyük bir varyans değeri ise bulanık değışkenin beklenen değeri etrafında geniş bir yayılıma sahip olduğunu gösterir. Varyans, bulanık bir sistemdeki risk seviyesini belirlemek için kullanılabilir.

Kritik değeri, bir güven aralığının üst ve alt sınırlarını tanımlayan veya istatistiksel bir testte istatistiksel anlamlılık eşğini tanımlayan değerdir. Verilerdeki toplam varyasyonun belirli bir miktarını kapsamak için dağılımın ortalamasından ne kadar uzağa gitmeniz gerektiğini açıklar. Kritik değeri kavramı, iki bulanık değışkeni sıralayabilmek için Liu (2002) tarafından 2002 yılında tanımlandı.

Bulanık değışkenler arasındaki mesafe kredibilite teorisinde önemli bir kavramdır. Mesafe, görüntü işleme ve örüntü tanıma gibi birçok uygulamalı alanda kullanılabilir. Bulanık değışkenlerde mesafe, Li ve Liu (2008) ve Heilpern (1992) gibi birçok matematikçi tarafından Hausdorff mesafesi, Hamming mesafesi ya da beklenen değeri operatörü tarafından tanımlanan bulanık değışkenler arasındaki mesafe gibi farklı tanımlar yapılarak incelenmiştir.

Olasılık teorisinde Markov eşitsizliği, Chebyshev eşitsizliği, Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve Jensen eşitsizliği gibi iyi bilinen eşitsizlikler vardır. Bu eşitsizlikler hem teoride hem de uygulamalı alanda önemli bir rol oynar. Daha detaylı bilgi için Ash (1972) ya da Laha ve Rohatgi (1979) kaynaklarına bakılabilir. Bu eşitsizlikleri Liu (2003) yılında bulanık değışkenler için göstermiştir.

Bulanık değışkenlerde yakınsaklık ve ortalama yakınsaklık kavramları ise Wang & Klir (1982) tarafından verilmiştir. Liu (2003) ise hemen hemen her yerde yakınsaklık

(convergence almost surely), kredibilite yakınsaklık (converges in credibility), ortalama yakınsaklık (convergence in mean) ve dağılım için yakınsaklık (converges in distribution) kavramlarını vermiştir. Bununla birlikte yine Liu (2003) aynı kavramları kredibilite ölçüsünün bir varyansı olan güven ölçüsünde kaba değişkenler için de tanımlamıştır.

Tez düzenine göre ikinci bölümde istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık tanımları ve ilgili kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, kredibilite uzayı ve kredibilite teorisinin temel aksiyomatik yapısıyla beraber önemli kavramlar matematiksel olarak incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde bulanık değişken ve üyelik fonksiyonu üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde kredibilite dağılımı incelenmiş, yoğunluk fonksiyonu ve bağımsızlık üzerinde durulmuştur. Beşinci bölüm ve onuncu bölüm arasında sırasıyla beklenen değer, varyans, kritik değer, mesafe ve eşitsizlik kavramları incelenmiş, önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Çalışmamızın dokuzuncu bölümünde kredibilite ölçüsünün bir varyansı olan güven ölçüsü için kaba uzay ve kaba değişken kavramları incelenerek güven ölçüsü tanımı verilmiştir. Onuncu bölümde kredibilite ve güven ölçüleri için eşitsizlikler ele alınıp önemli eşitsizlikler incelenmiştir. Çalışmamızın son bölümü ise tamamen özgün olup kaba değişkenlerde istatistiksel güven yakınsaklık ve λ -istatistiksel güven yakınsaklık tanımları verilmiş ve bu kavramlarla ilgili teoremler ispatlanmıştır.

2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde tezin önümüzdeki bölümlerinde kullanacağımız istatistiksel yakınsaklık ve λ -istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir.

2.1 İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu kısımda istatistiksel yakınsaklık kavramı verilip ilgili örnek ve kavramlar sunulmuştur.

$A, \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesi olsun. A kümesinin doğal yoğunluğunu,

$$\delta(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in A\}|$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu küme n 'i geçmeyen A 'nın eleman sayısını temsil etmektedir. Eğer $\delta(A) = 0$ ise A kümesinin yoğunluğu sıfır olur ve bu kümeye sıfır yoğunluklu küme denir. Sonlu dizilerin yoğunluğunun sıfır olduğu aşıkardır.

Yoğunluk tanımından yola çıkarak verilen istatistiksel yakınsaklık tanımı ise şu şekilde verilmiştir.

Tanım 2.1. Fridy (1985) $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyor ise (x_k) dizisi, L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Yakınsak bir dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1. $a = (a_k)$ dizisi,

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq \sqrt{n}$$

olur. Böylece dizinin istatistiksel yakınsak olmasına karşın yakınsak bir dizi olmadığı görülür.

2.2 λ -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 2.2. Mursaleen (2000) $\lambda = (\lambda_n)$ azalmayan pozitif bir dizi olsun ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

koşullarını sağlasın. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ için,

$$t_n(x) := \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k \in I_n} x_k$$

şeklinde tanımlayalım. $n \rightarrow \infty$ koşulunda $t_n(x) \rightarrow L$ oluyorsa (x_k) dizisine L 'ye λ toplanabilir denir.

Sonuç 2.1. Eğer $\lambda_n = n$ ise λ toplanabilirlik, toplanabilirliğe indirgenir.

Tanım 2.3. Mursaleen (2000) $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa (x_k) dizisine L 'ye λ -istatistiksel yakınsaktır denir.

Sonuç 2.2. Eğer $\lambda_n = n$ seçersek λ -istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

3. KREDİBİLİTE UZAYI

Kredibilite Teorisi, Liu ve Liu tarafından 2002 yılında tanımlandı(Liu ve Liu, 2002a). Sonrasında 2007 yılında Liu (2007) tarafından revize edilen Kredibilite Teorisi, bulanık değişkenlerin davranışını inceleyen bir alandır. Kredibilite ölçüsünün tanımını verelim: Θ boş olmayan bir küme ve $\mathcal{P}$ kümesi Θ kümesinin kuvvet kümesi olsun. $\mathcal{P}(\theta)$ kümesindeki her elemana olay diyelim.

Tanım 3.1. Liu ve Liu (2002a) Bir küme fonksiyonu olan Cr 'nin kredibilite ölçüsü olabilmesi için,

1. (Normallik) $Cr\{\Theta\} = 1$.
2. (Monotonluk) Eğer $A \subseteq B$ ise $Cr\{A\} \leq Cr\{B\}$.
3. (Öz-İkillik) Her A olayı için $Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = 1$.
4. (Maksimallik) $\sup_i Cr\{A_i\} \leq 0.5$ değerini sağlayan her A olayı için ;
 $Cr\{\cup_i A_i\} = \sup_i Cr\{A_i\}$

özelliklerini sağlanması gerekir.

Örnek 3.1. $\Theta = \{\mu_1, \mu_2\}$ olsun. Bu durumda sadece 4 adet olay vardır. Bu olaylar, $\emptyset, \{\mu_1\}, \{\mu_2\}, \{\mu_1, \mu_2\}$ olur. $Cr\{\emptyset\} = 0, Cr\{\mu_1\} = 0.2, Cr\{\mu_2\} = 0.8, Cr\{\Theta\} = 1$ olsun. Bu koşullar altında, küme fonksiyonu 4 özelliği de sağladığı için bir kredibilite ölçüsü olur.

Örnek 3.2. Θ boş olmayan bir küme olsun. $Cr\{\emptyset\} = 0, Cr\{\Theta\} = 1$ ve herhangi bir alt küme A için, $Cr\{A\} = \frac{1}{2}$ olsun. Bu koşullar altında, küme fonksiyonu 4 özelliği de sağladığı için bir kredibilite ölçüsü olur.

Teorem 3.1. Liu (2007) Θ boş olmayan bir küme, $\mathcal{P}$ kümesi Θ kümesinin kuvvet kümesi ve Cr kredibilite ölçüsü olsun. O halde $Cr\{\emptyset\} = 0$ ve her $A \in \mathcal{P}$ için $0 \leq Cr\{A\} \leq 1$ olur.

Kanıt. Cr bir kredibilite ölçüsü olduğu için öz-ikillik özelliği kullanarak $Cr\{\emptyset\} = 1 - Cr\{\Theta\}$ eşitliğini elde ederiz. Normallik kullandığımızda ise $Cr\{\emptyset\} = 1 - 1 = 0$ şeklinde bulunur.

Diğer yandan $\emptyset \subset A \subset \Theta$ olduğu için monotonluk özelliğini kullanırsak, her A olayı için $0 \leq Cr\{A\} \leq 1$ eşitsizliğini elde ederiz. $\square$

Teorem 3.2. *Liu (2007) Θ boş olmayan bir küme, $\mathcal{P}$ kümesi Θ kümesinin kuvvet kümesi ve Cr bir kredibilite ölçüsü olsun. Her $C, D \in \mathcal{P}$ olayları için;*

$$Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} \vee Cr\{D\}, \quad Cr\{C \cup D\} \leq 0.5 \quad (3.1)$$

$$Cr\{C \cap D\} = Cr\{C\} \wedge Cr\{D\}, \quad Cr\{C \cap D\} \geq 0.5 \quad (3.2)$$

durumları sağlanır.

Kanıt. Eğer $Cr\{C \cup D\} \leq 0.5$ ise monotonluk özelliği sayesinde $Cr\{C\} \vee Cr\{D\} \leq 0.5$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumda maksimallik özelliği kullanırsak,

$Cr\{C \cup D\} = \sup Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} \vee Cr\{D\}$ eşitliğini elde ederiz.

Eğer $Cr\{C \cup D\} = 0.5$ ve (2.1) sağlanmıyorsa, $Cr\{C\} \vee Cr\{D\} \leq 0.5$ olur. Bu durumda maksimallik özelliği sayesinde;

$Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} \vee Cr\{D\} \leq 0.5$ olduğunu görürüz. Bu bir çelişkidir. Bu da (2.1)'i kanıtlar.

Diğer kısımda ise $Cr\{C \cap D\} \geq 0.5$ olduğu için öz-ikillik özelliğini kullanırsak $Cr\{C^c \cup D^c\} \leq 0.5$ olduğunu görürüz. Böylece,

$Cr\{C \cap D\} = 1 - Cr\{C^c \cup D^c\} = 1 - Cr\{C^c\} \vee Cr\{D^c\} = Cr\{C\} \wedge Cr\{D\}$ olur. Bu da (3.2)'yi kanıtlar. $\square$

Teorem 3.3. *Liu (2004) (Credibility Subadditivity Theorem) Kredibilite ölçüsü alt toplam özelliğini sağlar. Yani her $C, D \in \mathcal{P}$ olayları için,*

$$Cr\{C \cup D\} \leq Cr\{C\} + Cr\{D\} \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. İncelememiz gereken 2 durum var:

1.Durum: $Cr\{C\} \leq 0.5$ ve $Cr\{D\} \leq 0.5$ olsun. Bu koşulda maksimallik özelliği kullanırsak;

$$Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} \vee Cr\{D\} \leq Cr\{C\} + Cr\{D\}.$$

olur. 2.Durum: $Cr\{C\} \geq 0.5$. Bu durumda monotonluk ve öz-ikillik özelliklerini kullanırsak, $Cr\{C^c\} \leq 0.5$ ve $Cr\{C \cup D\} \geq Cr\{C\} \geq 0.5$ olur. O halde;

$$\begin{aligned} Cr\{C^c\} &= Cr\{C^c \cap D\} \vee Cr\{C^c \cap D^c\} \\ &\leq Cr\{C^c \cap D\} + Cr\{C^c \cap D^c\} \\ &\leq Cr\{D\} + Cr\{C^c \cap D^c\} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliği kullanırsak,

$$\begin{aligned} Cr\{C\} + Cr\{D\} &= 1 - Cr\{C^c\} + Cr\{D\} \\ &\geq 1 - Cr\{D\} + Cr\{C^c \cap D^c\} + Cr\{D\} \\ &= 1 - Cr\{C^c \cap D^c\} \\ &= Cr\{C \cup D\} \end{aligned}$$

olur. $Cr\{D\} \geq 0.5$ koşulu altında ise 2. durumda olduğu gibi benzer şekilde kanıtlanabilir.

□

Teorem 3.4. Liu (2007) $\{D_i\}$ olaylar dizisi, kredibilitesinin limiti $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{D_i\} = 0$ olan, azalan bir dizi olsun. O halde her C olayı için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C \cup D_i\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C \setminus D_i\} = Cr\{C\} \quad (3.4)$$

olur.

Kanıt. Monotonluk ve kredibilite alt toplamsallık özelliklerinden yararlanırsak, her i için

$$Cr\{C\} \leq Cr\{C \cup D_i\} \leq Cr\{C\} + Cr\{D_i\}$$

olur. Eğer iki tarafında limitini alırsak,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C \cup D_i\} = Cr\{C\}$$

elde ederiz. Diğer bir yandan $(C \setminus D_i) \subset C \subset ((C \setminus D) \cup D_i)$ olması sebebiyle kredibilitenin monotonluk ve alt toplamsallık özelliklerini kullanırsak,

$$Cr\{C \setminus D_i\} \leq Cr\{C\} \leq Cr\{C \setminus D_i\} + Cr\{D_i\}$$

elde ederiz. Her tarafın i üzerinden limitini alırsak, sıkıştırma teoremi sayesinde

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C \setminus D_i\} = Cr\{C\}$$

olur. □

Teorem 3.5. Θ üzerinde tanımlı kredibilite ölçüsünün toplanabilir olması için gerek ve yeter şart kümede olan elemanların en fazla iki tanesinin kredibilite ölçüsünün sıfırdan farklı değer almasıdır.

Kanıt. $\Leftarrow$ Kabul edelim ki ölçümüz toplamsaldır. Kredibilite ölçüsü sıfırdan farklı ikiden daha fazla eleman olsun. Bunların arasından 3 eleman seçelim. Bunlar μ_1, μ_2, μ_3 olsun ve $Cr\{\mu_1\} \geq Cr\{\mu_2\} \geq Cr\{\mu_3\}$ koşulunu sağlasınlar. Eğer $Cr\{\mu_1\} \geq 0.5$ ise kredibilitenin monotonluk ve öz-ikillik özelliklerini kullanırsak;

$$Cr\{\mu_2, \mu_3\} \leq Cr\{\Theta - \{\mu_1\}\} = 1 - Cr\{\mu_1\} \leq 0.5$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Kredibilitenin maksimallik özelliğini kullanarak;

$$Cr\{\mu_2, \mu_3\} = Cr\{\mu_2\} \vee Cr\{\mu_3\} \leq Cr\{\mu_2\} + Cr\{\mu_3\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da toplamsallık özelliğine çelişkidir.

Eğer $Cr\{\mu_1\} \leq 0.5$ ise $Cr\{\mu_3\} \leq Cr\{\mu_2\} < 0.5$ olur. Bu durumda maksimallik özelliğini kullanırsak;

$$Cr\{\mu_2, \mu_3\} \wedge 0.5 = Cr\{\mu_2\} \vee Cr\{\mu_3\} < 0.5$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$Cr\{\mu_2, \mu_3\} = Cr\{\mu_2\} \vee Cr\{\mu_3\} \leq Cr\{\mu_2\} + Cr\{\mu_3\}.$$

Bu durumda toplamsal özelliğine çelişkidir. O halde eğer kredibilite ölçüsü toplamsal ise kredibilite ölçüsü 0'dan farklı en fazla iki tane eleman olabilir.

$\Rightarrow$ Kredibilite ölçüsü sıfırdan farklı en çok iki tane eleman olsun. Bunlar μ_1 ve μ_2 olsun. Diyelim ki C ve D ayrık olaylar olsun. İncelememiz gerek 2 durum var:

1.Durum: Eğer $Cr\{C\} = 0$ ya da $Cr\{D\} = 0$ ise alt toplamsallık teoremini kullanarak $Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} + Cr\{D\}$ olduğunu söyleyebiliriz.

2.Durum: Eğer $Cr\{C\} > 0$ ya da $Cr\{D\} > 0$ durumunda ise, genellemeyi bozmadan, $\mu_1 \in C$ ve $\mu_2 \in D$ olduğunu varsayalım. Bununla beraber $Cr\{(C \cup D)^c\} = 0$ olur. Alt toplamsallık teoremini ve kredibilitenin öz-ikillik özelliğini kullanırsak;

$$Cr\{C \cup D\} = Cr\{(C \cup D) \cup (C \cup D)^c\} = Cr\{\Theta\} = 1$$

ve

$$Cr\{C\} + Cr\{D\} = Cr\{C \cup (C \cup D)^c\} + Cr\{D\} = 1$$

olur.

Böylece, $Cr\{C \cup D\} = Cr\{C\} + Cr\{D\}$ olur. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Şimdi ise kredibilitenin yarı sürekliliğini inceleyelim.

Teorem 3.6. *Liu (2004)(Credibility Semicontinuity Law) Herhangi $C_1, C_2, C_3, \dots$ olayları için,*

- $Cr\{C\} \leq 0.5$ ve $C_i \uparrow C$,
- $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} < 0.5$ ve $C_i \uparrow C$,
- $Cr\{C\} \geq 0.5$ ve $C_i \downarrow C$,
- $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} > 0.5$ ve $C_i \downarrow C$,

koşullarından birisinin sağlanması durumunda,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} = Cr\left\{\lim_{i \rightarrow \infty} C_i\right\} \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Sırasıyla tüm durumları incelersek,

1. $Cr\{C\} \leq 0.5$ olduğundan her i için $Cr\{C_i\} \leq 0.5$ olduğunu söyleyebiliriz. Kredibilite ölçüsünün maksimallik özelliğini kullanırsak;

$$Cr\{C\} = Cr\{\cup_i C_i\} = \sup_i Cr\{C_i\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\}$$

olur.

2. $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} < 0.5$ olduğundan $\sup_i Cr\{C_i\} < 0.5$ olur. Kredibilite ölçüsünün maksimallik özelliğini kullanırsak;

$$Cr\{C\} = Cr\{\cup_i C_i\} = \sup_i Cr\{C_i\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\}$$

olur.

3. $Cr\{C\} \geq 0.5$ ve $C_i \downarrow C$ olduğunu bildiğimiz için öz-ikillik özelliğinden faydalırsak $Cr\{C^c\} \leq 0.5$ ve $C_i^c \uparrow C^c$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece $i \rightarrow \infty$ durumu için $Cr\{C_i\} = 1 - Cr\{C_i^c\} \rightarrow 1 - Cr\{C^c\} = Cr\{C\}$ elde ederiz.

4. $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} > 0.5$ ve $C_i \downarrow C$ olduğundan öz-ikillik özelliğinden yararlanırsak

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i^c\} = \lim_{i \rightarrow \infty} (1 - Cr\{C_i\}) \leq 0.5$$

ve $C_i^c \uparrow C^c$ olur. Böylece $i \rightarrow \infty$ durumunda $Cr\{C_i\} = 1 - Cr\{C_i^c\} \rightarrow 1 - Cr\{C^c\} = Cr\{C\}$ olur. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Teorem 3.7. (*Kredibilite Asimptotik Teoremi*) Liu (2007) Herhangi $C_1, C_2, C_3, \dots$ olayları için,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} \geq 0.5, \quad C_i \uparrow \Theta \quad (3.6)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} \leq 0.5, \quad C_i \downarrow \emptyset \quad (3.7)$$

koşulları sağlanır.

Kanıt. Kabul edelim ki $C_i \uparrow \Theta$ olsun. Eğer $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} < 0.5$ olursa yarı süreklilik kuralından,

$$Cr\{\Theta\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{C_i\} < 0.5$$

olduğunu görürüz. Bu bir çelişkidir çünkü $Cr\{\Theta\} = 1$ 'dir. Bu da ilk eşitsizliği kanıtlar. Diğer eşitsizlik benzer şekilde kanıtlanabilir. $\square$

Diyelim ki bir kümede bazı elemaların kredibite ölçülerini bilelim. Bu durumda herhangi bir olayın kredibilite ölçüsü tanımlanabilir mi? Sıradaki bölüm bu soruya cevap arayacak.

Teorem 3.8. Θ boş olmayan bir küme olsun. Eğer Cr bir kredibilite ölçüsü ise,

$$\begin{aligned} \sup_{\mu \in \Theta} Cr\{\mu\} &\geq 0.5 \\ Cr\{\mu^*\} &\geq 0.5 \quad \text{ise} \quad Cr\{\mu^*\} + \sup_{\mu \neq \mu^*} Cr\{\mu\} = 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

sağlanır. (3.8)'i kredibilite genişletme koşulu olarak isimlendirilir.

Kanıt. Eğer $Cr\{\mu\} \leq 0.5$ ise kredibilitenin maksimallik özelliğini kullanırsak,

$$1 = Cr\{\Theta\} = \sup_{\mu \in \Theta} Cr\{\mu\} < 0.5.$$

olur. Bu da bir çelişkidir. Bu yüzden $\sup_{\mu \in \Theta} Cr\{\mu\} \geq 0.5$ olur.

Diyelim ki $\mu^* \in \Theta$ ve $Cr\{\mu^*\} \geq 0.5$ olsun. Kredibilitenin monotonluk ve öz-ikillik özelliklerini kullanırsak, $Cr\{\Theta - \{\mu^*\}\} \leq 0.5$ ve

$$Cr\{\Theta - \{\mu^*\}\} = \sup_{\mu \neq \mu^*} Cr\{\mu\}$$

olur. Kredibilite ölçüsü öz-ikil olduğu için (3.8) sağlanır. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Teorem 3.9. *Li ve Liu (2006)(Credibility Extension Theorem)* Θ boş olmayan bir küme olsun ve $Cr\{\Theta\}$, Θ üzerinde tanımlı ve kredibilite genişletme koşulu (3.8)'i sağlayan negatif olmayan bir fonksiyon olsun. O halde $Cr\{\Theta\}$ 'nin kredibilite ölçüsüne özel bir genişletmesi vardır ve

$$Cr\{A\} = \begin{cases} \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\}, & \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \leq 0.5 \\ 1 - \sup_{\theta \in A^c} Cr\{\theta\}, & \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \geq 0.5 \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Kanıt. İlk olarak tanımladığımız küme fonksiyonunun kredibilite ölçüsü olduğunu göstereyim. Bunun için kredibilite özelliklerini sağlatalım.

1. Özellik: Kredibilite genişletme koşulu sayesinde $\sup_{\theta \in \Theta} Cr\{\theta\} \geq 0.5$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde,

$$Cr\{\emptyset\} = 1 - \sup_{\theta \in \emptyset} Cr\{\theta\} = 1 - 0 = 1$$

olur.

2. Özellik: Eğer $A \subset B$ ise $B^c \subset A^c$ 'dir. Kanıtı iki durumda inceleyebiliriz.

1. Durum: $\sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \leq 0.5$ ise,

$$Cr\{A\} = \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \leq \sup_{\theta \in B} Cr\{\theta\} \leq Cr\{B\}$$

olur.

2. Durum: $\sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \geq 0.5$ ise, $\sup_{\theta \in B} Cr\{\theta\} \geq 0.5$ ve

$$Cr\{A\} = 1 - \sup_{\theta \in A^c} Cr\{\theta\} \leq 1 - \sup_{\theta \in B^c} Cr\{\theta\} = Cr\{B\}$$

olur.

3. Özellik: Öz-ikilliliğini kanıtlayabilmek için iki farklı durumu incelemeliyiz.

1. Durum: $\sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} < 0.5$ ise, $\sup_{\theta \in A^c} Cr\{\theta\} \geq 0.5$ olur. Böylece,

$$Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} + 1 - \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} = 1$$

olur.

2. Durum: $\sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} \geq 0.5$ ise, $\sup_{\theta \in A^c} Cr\{\theta\} \leq 0.5$ olur. Böylece,

$$Cr\{A\} + Cr\{A^c\} = 1 - \sup_{\theta \in A^c} Cr\{\theta\} + \sup_{\theta \in A} Cr\{\theta\} = 1$$

olur.

4. Özellik: $\{A_i\}$, $\sup_i Cr\{A_i\} < 0.5$ olan herhangi bir küme ailesi olsun. O halde,

$$Cr\{\cup_i A_i\} = \sup_{\theta \in \cup_i A_i} Cr\{\theta\} = \sup_i \sup_{\theta \in A_i} Cr\{\theta\} = \sup_i Cr\{A_i\}$$

olur. O halde Cr bir kredibilite ölçüsüdür.

Son olarak ise bu kredibilite ölçüsünün tek olduğunu gösterelim. Bunun için kabul edelim ki Cr_1 ve Cr_2 birer kredibilite ölçüsü olsun ve her $\theta \in \Theta$ için $Cr_1\{\theta\} = Cr_2\{\theta\}$ eşitliği sağlansın. Bu eşitliğin her A olayı için $Cr_1\{A\} = Cr_2\{A\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için incelememiz gereken 3 durum var:

1. Durum: Eğer $Cr_1\{A\} < 0.5$ ise, 4. özelliği kullanırsak;

$$Cr_1\{A\} = \sup_{\theta \in A} Cr_1\{\theta\} = \sup_{\theta \in A} Cr_2\{\theta\} = Cr_2\{A\}$$

olur.

2. Durum: Eğer $Cr_1\{A\} > 0.5$ ise $Cr_1\{A^c\} < 0.5$ olur. 1. durumu kullanırsak, $Cr_1\{A^c\} = Cr_2\{A^c\}$ elde ederiz. Bu da $Cr_1\{A\} = Cr_2\{A\}$ durumunu gerektirir.

3. Durum: Eğer $Cr_1\{A\} = 0.5$ ise $Cr_1\{A^c\} = 0.5$ olur. Burada da 2 durum incelememiz gerekiyor:

3.1. Durum: Eğer $Cr_2\{A\} < 0.5$ ise;

$$0.5 = Cr_1\{A\} = \sup_{\theta \in A} Cr_1\{\theta\} = \sup_{\theta \in A} Cr_2\{\theta\} = Cr_2\{A\}$$

olur.

3.2. Durum: Eğer $Cr_2\{A\} > 0.5$ ise Eğer $Cr_2\{A^c\} < 0.5$ olur. O halde,

$$0.5 = Cr_1\{A^c\} = Cr_2\{A^c\} \iff Cr_2\{A\} = 0.5$$

olur. Böylece $Cr_2\{A\} = 0.5 = Cr_1\{A\}$ 'dır ve genişletme tektir. □

Bu bilgiler ışığında kredibilite uzayını tanımlayabiliriz:

Tanım 3.2. (Kredibilite Uzayı) Liu (2007) Θ boş olmayan bir küme, $\mathcal{P}$ kümesi Θ kümesinin kuvvet kümesi ve Cr bir kredibilite ölçüsü olsun. O halde $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ üçlüsüne kredibilite uzayı denir.

Örnek 3.3. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ bir kredibilite uzayı olsun. Θ 'yı $i = 1, 2, \dots$ için

$$\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}, \quad Cr\{\mu_i\} = 1/2 \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlayalım. Krebilite genişletme teoremini kullanarak, $Cr\{A\}$ ' yı şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$Cr\{A\} = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A = \Theta \\ 1/2 & \text{diger durumlar.} \end{cases}$$

Örnek 3.4. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ bir kredibilite uzayı olsun. Θ 'yı $j = 1, 2, \dots$ için

$$\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots\}, Cr\{\mu_j\} = \frac{j}{2j+1} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlayalım. Krebilite genişletme teoremini kullanarak, $Cr\{A\}$ ' yı şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$Cr\{A\} = \begin{cases} \sup_{\mu_j \in A} \frac{j}{2j+1}, & A \text{ sonlu} \\ 1 - \sup_{\mu_j \in A^c} \frac{j}{2j+1}, & A \text{ sonsuz.} \end{cases}$$

Örnek 3.5. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ bir kredibilite uzayı olsun. Θ 'yı;

$$\Theta = [0, 1], \quad Cr\{\mu\} = \mu/2, \quad \mu \in \Theta \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlayalım. Krebilite genişletme teoremini kullanarak, $Cr\{A\}$ ' yı şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$Cr\{A\} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sup_{\mu \in A} \mu, & \sup_{\mu \in A} \mu < 1 \\ 1 - \frac{1}{2} \sup_{\mu \in A^c} \mu, & \sup_{\mu \in A} \mu = 1. \end{cases}$$

Şimdi işe çarpımın kredibilite ölçüsünü tanımlayacağız. Kredibilite ölçüsü için çarpım tanımlamak amacıyla yeni bir özellik tanımlamalıyız.

5. (Kredibilite çarpım aksiyomu): $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ için α_k 'lar boş olmayan kümeler ve Cr_k 'lar sırasıyla bu kümelere karşılık gelen kredibilite ölçüleri olsun. $\Theta = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \dots \times \alpha_n$ şeklinde tanımlayalım. O halde her $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \Theta$ için;

$$Cr\{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)\} = Cr_1\{\alpha_1\} \wedge Cr_2\{\alpha_2\} \wedge \dots \wedge Cr_n\{\alpha_n\} \quad (3.13)$$

olur.

Teorem 3.10. Liu (2006) $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ için α_k 'lar boş olmayan kümeler ve Cr_k 'ler sırasıyla bu kümelere karşılık gelen kredibilite ölçüleri olsun. $\Theta = \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \dots \times \alpha_n$ şeklinde tanımlayalım. 5. özellikte tanımladığımız $Cr = Cr_1\{\alpha_1\} \wedge Cr_2\{\alpha_2\} \wedge \dots \wedge Cr_n\{\alpha_n\}$ için Kredibilite Genişletme teoremini kullanırsak;

$$Cr\{A\} = \begin{cases} \sup_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in A} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\}, \\ \sup_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in A} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\} < 0.5 \\ 1 - \sup_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in A^c} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\}, \\ \sup_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in A} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\} \geq 0.5 \end{cases} \quad (3.14)$$

olur.

Kanıt. Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \Theta$ için, $Cr\{\Theta\} = Cr_1\{\alpha_1\} \wedge Cr_2\{\alpha_2\} \wedge Cr_3\{\alpha_3\} \wedge \dots \wedge Cr_n\{\alpha_n\}$ olduğunu biliyoruz. O halde $Cr\{\alpha\}$ 'nn genişletme koşullarını sağladığını gösterelim. Her k için $\sup_{\alpha_k \in \Theta_k} Cr\{\alpha_k\} \geq 0.5$ olduğundan,

$$\sup_{\alpha \in \Theta} Cr\{\alpha\} = \sup_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\} \geq 0.5 \text{ olur.}$$

Kabul edelim ki $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \dots, \alpha_n^*)$, kredibilite ölçüsü $Cr\{\alpha^*\} \geq 0.5$ olan bir nokta olsun. Genellemeyi bozmadan, i bir indeks olsun öyle ki,

$$Cr\{\alpha^*\} = \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k^*\} = Cr_i\{\alpha_i^*\} \quad (3.15)$$

olur. O zaman sırasıyla, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için,

$$Cr_k\{\alpha_k^*\} \geq 0.5, \quad (3.16)$$

$$Cr_k\{\alpha_k^*\} + \sup_{\alpha_k \neq \alpha_k^*} Cr_k\{\alpha_k\} = 1, \quad (3.17)$$

$$\sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\} \geq \sup_{\alpha_k \neq \alpha_k^*} Cr_k\{\alpha_k\}, \quad (3.18)$$

$$\sup_{\alpha_k \neq \alpha_k^*} Cr_k\{\alpha_k\} \leq 0.5, \quad (3.19)$$

olur.

(3.16), (3.19) sayesinde,

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha_k \neq \alpha_k^*} &= \sup_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)} \min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k\} \\ &\geq \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} \min_{1 \leq k \leq i-1} Cr_k\{\alpha_k^*\} \wedge Cr_i\{\alpha_i\} \wedge \min_{i+1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha_k^*\} \\ &= \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\} \end{aligned}$$

olur. Şimdi, kabul edelim ki

$$\sup_{\alpha \neq \alpha^*} Cr\{\alpha\} > \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\}$$

olsun. O halde öyle bir $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) \neq (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ noktası vardır ki

$$\min_{1 \leq k \leq n} Cr_k\{\alpha'_k\} > \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\}$$

olur. Öyle bir j vardır ki $\alpha'_j \neq \alpha_i^*$ olsun. O halde,

$$Cr_j\{\alpha'_j\} > \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\}$$

olur. O halde,

$$\sup_{\alpha_j \neq \alpha_j^*} Cr_j\{\alpha_j\} > \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\}$$

olur ki bu da (3.18) ile çelişir. O halde ,

$$\sup_{\alpha \neq \alpha^*} Cr\{\alpha\} = \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\} \quad (3.20)$$

olur. (3.15), (3.17) ve (3.20) sayesinde,

$$Cr\{\alpha^*\} + \sup_{\alpha \neq \alpha^*} Cr\{\alpha\} = Cr_i\{\alpha_i^*\} + \sup_{\alpha_i \neq \alpha_i^*} Cr_i\{\alpha_i\} = 1$$

olur.

Sonuç olarak Cr ölçüsünün kredibilite genişletme teorisinin koşullarını sağladığını görürüz. Kredibilite genişletme teoremi (3.9) sayesinde $Cr\{A\}$ özel bir genişletmedir. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

3.1 BULANIK DEĞİŞKEN

Tanım 3.3. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ kredibilite uzayından reel sayı kümesine tanımlı olan bulanık değişken ölçülebilir bir fonksiyondur.

Örnek 3.6. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ uzayı kredibilite ölçüleri $Cr\{C\} = Cr\{D\} = 0.5$ olan $\{C, D\}$ olsun. O halde

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = C \\ 1, & \theta = D \end{cases}$$

bir bulanık değişkendir.

Örnek 3.7. $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ uzayı $[0, 1]$ aralığı ve her $\mu \in [0, 1]$ için $Cr\{\mu\} = 0.5$ olsun. O halde

$$\xi\{\mu\} = \mu$$

bir bulanık değişkendir.

Uyarı 3.11. ξ bulanık değişkeni kredibilite uzayı üzerinde bir fonksiyon olduğu için, herhangi B reel kümesi için tanımlayacağımız;

$$\{\xi \in B\} = \{\xi^{-1}(B) \in \Theta\} = \{\theta \in \Theta | \xi(\theta) \in B\}$$

kümesi her zaman kuvvet kümesinin bir elemanıdır. Baska bir deyişle, bulanık değişkeni ölçülebilir bir fonksiyondur ve $\xi \in B$ bir olaydır.

Tanım 3.4. Liu (2004) ξ bir bulanık değişken olsun.

1. $Cr\{\xi < 0\} = 0$ ise, ξ bulanık değişkeni negatif olmayan bir değişkendir.
2. $Cr\{\xi \leq 0\} = 0$ ise, ξ bulanık değişkeni pozitif bir değişkendir.
3. $Cr\{\xi = x\}$ fonksiyonu x noktasında sürekli ise, ξ bulanık değişkeni sürekli dir.
4. $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ sınırlı bir dizi ve

$$Cr\{\xi \neq a_1, \xi \neq a_2, \dots, \xi \neq a_m\} = 0 \quad (3.21)$$

eşitliği sağlanıyorsa, ξ bulanık değişkeni temel(simple) bir değişkendir.

5. $\{a_1, a_2, \dots\}$ sayılabilir bir dizi ve

$$Cr\{\xi \neq a_1, \xi \neq a_2, \dots\} = 0 \quad (3.22)$$

eşitliği sağlanıyorsa, ξ bulanık değişkeni ayrık bir değişkendir.

Tanım 3.5. ξ_1 ve ξ_2 kredibilite uzayı üzerinde tanımlı bulanık değişkenler olsun. $\theta \in \Theta$ için hemen hemen her yerde $\xi_1(\theta) = \xi_2(\theta)$ eşitliği sağlanıyor ise $\xi_1 = \xi_2$ 'dir.

Bulanık Vektör

Teorem 3.12. $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ vektörünün bulanık bir vektör olması için gerekli ve yeter şart her $i=1, 2, 3, 4, \dots, n$ için ξ_i 'nin bulanık bir değişken olmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) Kabul edelim ki $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ olsun ve ξ bir bulanık vektör olsun. O halde $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'ler Θ dan $\mathcal{R}$ 'a tanımlı fonksiyonlardır. Böylece $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'ler birer bulanık değişkendir.

($\impliedby$) Kabul edelim ki $i=1,2,3,4, \dots, n$ için ξ_i 'ler sırasıyla $(\Theta_i, \mathcal{P}_i, Cr_i)$ kredibilite uzayları üzerinde tanımlı bulanık değişkenler olsun. O halde $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ vektörü $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ 'dan R^n 'e tanımlı bir fonksiyon olur. O halde her $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Theta$ için,

$$\xi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = (\xi(\theta_1), \xi_2(\theta_2), \dots, \xi_n(\theta_n))$$

olur. Sonuç olarak, $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ bulanık vektördür. $\square$

Tanım 3.6. $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, (\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ uzayı üzerinde tanımlı bulanık değişkenler olsun. O halde, $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ bulanık değişken olur ve her $\mu \in \Theta$ için

$$\xi(\Theta) = f(\xi_1(\mu), \xi_2(\mu), \dots, \xi_n(\mu)) \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Örnek 3.8. ξ_1 ve ξ_2 kredibilite uzayı üzerinde tanımlı birer bulanık değişken olsun. O halde $\forall \alpha \in \Theta$ için

$$(\xi_1 + \xi_2)(\alpha) = \xi_1(\alpha) + \xi_2(\alpha)$$

ve

$$(\xi_1 \times \xi_2)(\alpha) = \xi_1(\alpha) \times \xi_2(\alpha)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 3.13. ξ , n boyutlu bulanık vektör ve $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde $f(\xi)$ bir bulanık değişken olur.

Kanıt. $f(\xi)$ kredibilite uzayından reel sayılara tanımlı bir fonksiyon olduğu için Tanım (3.3) sayesinde bulanık bir değişken olduğunu söyleriz. $\square$

3.2 ÜYELİK FONKSİYONU

Tanım 3.7. Liu (2007) ξ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı bir bulanık değişken olsun. ξ değişkeninin üyelik ölçüsünü kredibilite ölçüsüne bağlı olarak $\forall x \in \mathcal{R}$ için,

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1 \quad (3.24)$$

şeklinde tanımlarız.

Not 3.14. Üyelik fonksiyonu bulanık değişkenin kümeye ait olma derecesini simgeler. Bu yüzden üyelik fonksiyonu $[0, 1]$ arasında bir değer alır.

Uyarı 3.15. Bir bulanık değişkenin üyelik fonksiyonu tektir. Fakat, bir üyelik fonksiyonu birden fazla bulanık değişkene ait olabilir.

Örnek 3.9. $\Theta = \{C, D\}$ ve $Cr\{C\} = Cr\{D\} = 0.5$ olsun. O halde $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ bir kredibilite uzayı olur. Eğer ξ_1 ve ξ_2 'yi,

$$\xi_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta = C \\ 1, & \theta = D \end{cases}$$

$$\xi_2(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta = C \\ 0, & \theta = D \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, ikiside bulanık değişken olur ve aynı üyelik fonksiyonuna ($\mu(x) = 1$, $x = 0$ veya $x = 1$) sahip olurlar.

Teorem 3.16. (*Kredilibite Dönüştürme Teoremi - Credibility Inversion Theorem*)Liu (2004)

ξ üyelik fonsiyonu μ olan bir bulanık değışken olsun. O halde $\forall B \subset \mathcal{R}$ için

$$Cr\{\xi \in B\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \right) \quad (3.25)$$

olur.

Kanıt. 1. Durum: Eğer $Cr\{\xi \in B\} \leq 0.5$ ise kredibilitenin monotonluk özelliği sayesinde, $\forall x \in B$ için $Cr\{\xi = x\} \leq 0.5$ olduğunu söyleriz. Kredibilitenin maksimallik özelliğini kullanırsak

$$Cr\{\xi \in B\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} (2Cr\{\xi = x\} \wedge 1) \right) = \frac{1}{2} \sup_{x \in B} \mu(x) \quad (3.26)$$

olur.

Kredibilite ölçüsünün öz-ikillik özelliğinden yararlanırsak $Cr\{\xi \in B^c\} \geq 0.5$ ve $\sup_{x \in B^c} Cr\{\xi = x\} \geq 0.5$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu sayede

$$\sup_{x \in B^c} \mu(x) = \sup_{x \in B^c} (2Cr\{\xi = x\} \wedge 1) = 1 \quad (3.27)$$

olur. Böylece (3.26) ve (3.27), (3.25)'nin doğruluğunu kanıtlar.

2. Durum: Eğer $Cr\{\xi \in B\} \geq 0.5$ ise $Cr\{\xi \in B^c\} \leq 0.5$ olur. 1. durumu kullanırsak,

$$Cr\{\xi \in B\} = 1 - Cr\{\xi \in B^c\} = 1 - \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B^c} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B} \mu(x) \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} \mu(x) + 1 - \sup_{x \in B^c} \mu(x) \right)$$

olur. Bu da teorimi kanıtlar. □

Not 3.17. ξ üyelik fonsiyonu μ olan bir bulanık değışken olsun. O halde (3.16) teoremi sayesinde, $\forall x \in \mathcal{R}$ için bu eşitlikleri elde ederiz:

$$Cr\{\xi = x\} = \frac{1}{2} \left(\mu(x) + 1 - \sup_{y \neq x} \mu(y) \right), \quad (3.28)$$

$$Cr\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \leq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y > x} \mu(y) \right), \quad (3.29)$$

$$Cr\{\xi \geq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{y \geq x} \mu(y) + 1 - \sup_{y < x} \mu(y) \right) \quad (3.30)$$

ve son olarak eğer μ sürekli bir fonksiyonsa,

$$Cr\{\xi = x\} = \mu(x)/2 \quad (3.31)$$

olur.

Teorem 3.18. Liu (2007) $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun üyelik fonksiyonu olması için gerekli ve yeter şart $\sup(\mu(t)) = 1$ olmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) Eğer μ bir üyelik fonksiyonu ise ona karşılık gelen bir tane ξ bulanık değişken vardır ve

$$\sup_{t \in \mathcal{R}} \mu(t) = \sup_{t \in \mathcal{R}} (2Cr\{\xi = t\}) \wedge 1$$

olur.

Eğer $Cr\{\xi = t\} > 0.5$ olan bir $t \in \mathcal{R}$ varsa, $\sup \mu(t) = 1$ olur. Aksi takdirde $\forall t \in \mathcal{R}$ için $Cr\{\xi = t\} < 0.5$ ise kredibilitenin maksimallik özelliğini kullanırsak

$$\sup_{t \in \mathcal{R}} \mu(t) = \sup_{t \in \mathcal{R}} (2Cr\{\xi = t\}) \wedge 1 = 2 \sup_{t \in \mathcal{R}} (Cr\{\xi = t\}) = 2(Cr\{\Theta\} \wedge 0.5) = 1$$

olur.

($\impliedby$) Kabul edelim ki $\sup \mu(t) = 1$ olsun. $\forall t \in \mathcal{R}$ için,

$$Cr\{t\} = \frac{1}{2} \left(\mu(t) + 1 - \sup_{y \neq t} \mu(y) \right)$$

tanımlayalım. Her iki tarafın supremumunu alırsak;

$$\sup_{t \in \mathcal{R}} Cr\{t\} \geq \frac{1}{2} (1 + 1 - 1) = 0.5$$

olur.

$\forall t^* \in \mathcal{R}$ için $Cr\{t^*\} \geq 0.5$ olduğundan $\mu(t^*) = 1$ olur ve

$$\begin{aligned} & Cr\{t^*\} + \sup_{y \neq t^*} Cr\{y\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\mu(t^*) + 1 - \sup_{y \neq t} \mu(y) \right) + \sup_{y \neq t^*} \frac{1}{2} \left(\mu(y) + 1 - \sup_{y \neq t} \mu(y) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sup_{y \neq t} \mu(y) + \frac{1}{2} \sup_{y \neq t} \mu(y) = 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece tanımladığımız $Cr\{t\}$ fonksiyonu kredibilite genişletme koşullarını sağlar ve kredibilite genişletme teoremi sayesinde kuvvet kümesi üzerinde özel bir kredibilite ölçüsü tanımlayabiliriz. Kredibilite uzayından reel sayılara birim fonksiyon olan ξ bulanık değişkeni tanımlayalım.

Bu bulanık değişkenin üyelik fonksiyonu ise $\forall t \in \mathcal{R}$ için,

$$(2Cr\{\xi = t\}) \wedge 1 = \left(\mu(t) + 1 - \sup_{y \neq t} \mu(y) \right) \wedge 1 = \mu(t)$$

olur. □

Teorem 3.19. *Liu (2007) ξ üyelik fonksiyonu μ olan bir bulanık değişken olsun. Bu bulanık değişkeninin;*

1. *negatif olmaması için gerekli ve yeter şart $\forall t < 0$ için $\mu(t) = 0$ olmasıdır,*
2. *pozitif olması için gerekli ve yeter şart $\forall t \leq 0$ için $\mu(t) = 0$ olmasıdır,*
3. *temel bir değişken olması için gerekli ve yeter şart üyelik fonksiyonu μ 'nün sonlu noktada 0'dan farklı değer almasıdır,*
4. *ayrık bir değişken olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonu μ 'nün sayılabilir noktada 0'dan farklı değer almasıdır,*

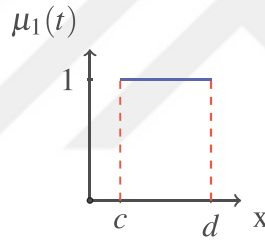
5. sürekli olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonu μ 'nin sürekli bir fonksiyon olmasıdır.

Kanıt. Üyelik fonksiyonunun tanımından (3.7) aşıkardır. □

3.2.1 Bazı Özel Üyelik Fonksiyonları

Eşit İhtimalli Bulanık Değişken: Bulanık değişkenin üyelik fonksiyonunu $c < d$ özelliğini sağlayan bulanık olmayan iki değişken (c, d) ile şu şekilde tanımlarız;

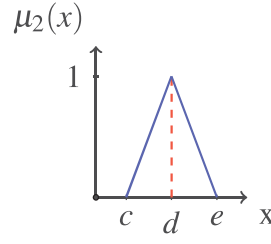
$$\mu_1(t) = \begin{cases} 1, & c \leq t \leq d \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (3.32)$$



Şekil 3.1. (3.32) ile verilen bulanık değişken

Üçgen Bulanık Değişken : Bulanık değişkenin üyelik fonksiyonunu $c < d < e$ özelliğini sağlayan bulanık olmayan üç değişken (c, d, e) ile şu şekilde tanımlarız;

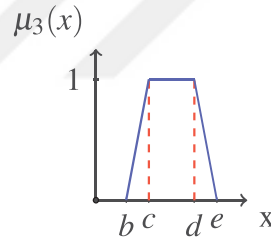
$$\mu_2(x) = \begin{cases} \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ \frac{x-e}{d-e}, & d \leq x \leq e \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (3.33)$$



Şekil 3.2. (3.33) ile verilen bulanık değişken

Yamuk Bulanık Değişkeni: Bulanık değişkenin üyelik fonksiyonunu $b < c < d < e$ özelliğini sağlayan bulanık olmayan dört değişken (b, c, d, e) ile şu şekilde tanımlarız;

$$\mu_3(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 1, & c \leq x \leq d \\ \frac{x-e}{d-e}, & d \leq x \leq e \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases} \quad (3.34)$$



Şekil 3.3. (3.34) ile verilen bulanık değişken

3.2.2 Ortak Üyelik Fonksiyonu

Eğer $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı bir vektör ise bunun ortak üyelik fonksiyonunu kredibilite ölçüsünden faydalanarak $\forall x \in \mathcal{R}^n$ için,

$$\mu(x) = (2Cr\{\xi = x\}) \wedge 1$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Teorem 3.20. Bir $\mu : \mathcal{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun ortak üyelik fonksiyonu olması için gerekli ve yeter şart $\sup(\mu(t)) = 1$ olmasıdır.

Kanıt. Teoremin kanıtı (3.18) teoreminin kanıtıyla benzerdir. □



4. KREDİBİLİTE DAĞILIMI

Tanım 4.1. Liu ve Liu (2002b) ξ bulanık değişkeninin kredibilite dağılımı $\Phi : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ tanımlı,

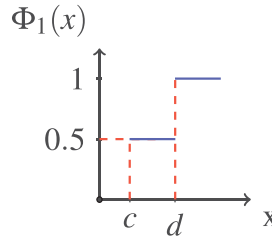
$$\Phi(x) = Cr\{\theta \in \Theta | \xi(\theta) \leq x\}$$

fonksiyonudur. Yani $\Phi(x)$ fonksiyonu ξ bulanık değişkeninin x 'e eşit veya daha küçük değerler almasının kredibilite ölçüsü olarak nitelendirilebilir.

Örnek 4.1. Eşit İhtimalli Bulanık Değişkenin kredibilite dağılımını,

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ \frac{1}{2}, & c \leq x \leq d \\ 1, & x \geq d \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

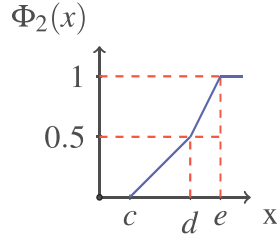


Şekil 4.1. (4.1) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı

Örnek 4.2. Üçgen Bulanık Değişkenin kredibilite dağılımını,

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ \frac{x-c}{2(d-c)}, & c \leq x \leq d \\ \frac{x+e-2d}{2(e-d)}, & d \leq x \leq e \\ 1, & x \geq e \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

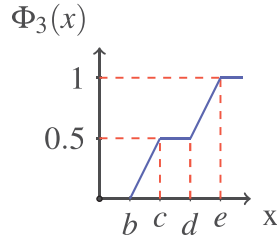


Şekil 4.2. (4.2) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı

Örnek 4.3. *Yamuk Bulanık Değişkenin kredibilite dağılımını,*

$$\Phi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b \\ \frac{x-b}{2(c-b)}, & b \leq x \leq c \\ \frac{1}{2}, & c \leq x \leq d \\ \frac{x+e-2d}{2(e-d)}, & d \leq x \leq e \\ 1, & x \geq e \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.



Şekil 4.3. (4.3) ile verilen bulanık değişkenin kredibilite dağılımı

Teorem 4.1. *Liu ve Liu (2002b) ξ üyelik fonsiyonu μ olan bir bulanık değişken olsun. O halde kredibilite dağılımını $\forall t \in \mathcal{R}$ için,*

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \left(\sup_{z \leq t} \mu(z) + 1 - \sup_{z > t} \mu(z) \right) \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Kanıt. Kredibilite dönüştürme teoremi (3.16)'i kullanarak elde ederiz. $\square$

Teorem 4.2. *Liu (2004) Bir $\Phi : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun kredibilite dağılımı olması için gerekli ve yeter şart fonksiyonun artan fonksiyon olması ve*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) \leq 0.5 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) \quad (4.5)$$

ve yalnızca

$$\lim_{z \downarrow x} \Phi(z) > 0.5 \quad \text{ya da} \quad \Phi(x) \geq 0.5$$

olduğunda

$$\lim_{z \downarrow x} \Phi(z) = \Phi(x) \quad (4.6)$$

özelliklerini sağlamasıdır.

Kanıt. ($\implies$) Açıkça görülüyor ki Φ artan bir fonksiyondur ve (4.5) direkt olarak kredibilite asimptotik teoreminden gelir.

Kabul edelim ki $x \lim_{z \downarrow x} \Phi(z) > 0.5$ sağlayan bir nokta olsun. O halde,

$$\lim_{z \downarrow x} Cr\{\xi \leq z\} > 0.5$$

olduğunu söyleyebiliriz.

$z \downarrow x$ olduğundan $\{\xi \leq z\} \downarrow \{\xi \leq x\}$ söyleriz ve kredibilite yarı-süreklilik kuralı sayesinde,

$$\Phi(z) = Cr\{\xi \leq z\} \downarrow Cr\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$$

olur. Eğer seçtiğimiz x noktasında $\Phi(x) \geq 0.5$ ve $\lim_{z \downarrow x} \Phi(z) \neq \Phi(x)$ olursa,

$$\lim_{z \downarrow x} \Phi(z) \geq \Phi(x) \geq 0.5$$

olur. Bu durum için $\lim_{z \downarrow x} \Phi(z) = \Phi(x)$ olduğunu söyleriz.

($\impliedby$) Kabul edelim ki $\Phi : \mathcal{R} \rightarrow [0, 1]$ tanımlı, (4.5) ve (4.6) denklemleri sağlayan ve artan

bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\mu(x) = \begin{cases} 2\Phi(x), & \Phi(x) < 0.5 \\ 1, & \lim_{z \uparrow x} < 0.5 \leq \Phi(x) \\ 2 - 2\Phi(x), & 0.5 \leq \lim_{z \uparrow x} \Phi(z) \end{cases} \quad (4.7)$$

$[0, 1]$ arası değer alan ve $\sup \mu(x) = 1$ olan bir fonksiyon tanımlayalım. Teorem(3.18) sayesinde μ fonksiyonunun ξ için üyelik fonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi Φ fonksiyonunun kredibilite dağılımı olduğunu, yani $\forall x$ için $Cr\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$ olduğunu gösterelim. İki durumda inceleyebiliriz:

1. Durum: Eğer $\Phi(x) < 0.5$ ise $\sup_{z > x} \mu(z) = 1$ ve $z \leq x$ olan her z için $\mu(z) = 2\Phi(z)$ elde ederiz. Böylece,

$$Cr\{\xi \leq x\} = \frac{1}{2} \left(\sup_{z \leq x} \mu(z) + 1 - \sup_{z > x} \mu(z) \right) = \sup_{z \leq x} \Phi(z) = \Phi(x)$$

olur.

2. Durum: Eğer $\Phi(x) \geq 0.5$ ise $\sup_{z \leq x} \mu(z) = 1$ ve $z > x$ olan her z için $\Phi(z) \geq \Phi(x) \geq 0.5$ elde ederiz. Böylece $\mu(z) = 2 - 2\Phi(z)$ ve

$$\begin{aligned} Cr\{\xi \leq x\} &= \frac{1}{2} \left(\sup_{z \leq x} \mu(z) + 1 - \sup_{z > x} \mu(z) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 - \sup_{z > x} (2 - 2\Phi(z)) \right) \\ &= \inf_{z > x} \Phi(z) = \lim_{z \downarrow x} \Phi(z) = \Phi(x) \end{aligned}$$

olur. □

Örnek 4.4. a ve b , $0 \leq a \leq 0.5 \leq b \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun. Bir bulanık

değişkenimiz olsun ve üyelik fonksiyonunu,

$$\mu(t) = \begin{cases} 2a, & t < 0 \\ 1, & t = 0 \\ 2 - 2b, & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde kredibilite dağılımı,

$$\Phi(t) = \begin{cases} a, & t < 0 \\ b, & t \geq 0 \end{cases}$$

olur. Bu sebeple,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = b$$

olur.

Sonuç 4.3. Kredibilite dağılımı Φ olan bir bulanık değişken olsun. Bu değişkenin,

1. negatif olmaması için gerekli ve yeter şart $\forall t < 0, \Phi(t) = 0$ olmasıdır.
2. pozitif olması için gerekli ve yeter şart $\forall t \leq 0, \Phi(t) = 0$ olmasıdır.

4.1 KREDİBİLİTE YOĞUNLUK FONKSİYONU

Tanım 4.2. Liu (2004) ξ bir bulanık değişken olsun. Φ bu değişkenin kredibilite dağılımı olsun. Bu değişkenin yoğunluk fonksiyonu $\phi : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty)$ tanımlı ve $\forall t \in \mathcal{R}$ için,

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(y) dy \tag{4.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy = 1 \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.5. Üçgen bulanık değişkeninin kredibilite yoğunluk fonsiyonu,

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2(b-a)}, & a \leq t \leq b \\ \frac{1}{2(c-b)}, & b \leq t \leq c \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek 4.6. Yamuk bulanık değişkeninin kredibilite yoğunluk fonsiyonu,

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2(b-a)}, & a \leq t \leq b \\ \frac{1}{2(d-c)}, & c \leq t \leq d \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde olur.

Örnek 4.7. Eşit ihtimalli bulanık değişkenin kredibilite yoğunluk fonsiyonu tanımlı değildir.

Teorem 4.4. Liu (2007) ξ bir bulanık değişken olsun. ϕ bu değişkenin kredibilite yoğunluk fonsiyonu olsun. O halde,

$$Cr\{\xi \leq t\} = \int_{-\infty}^t \phi(y)dy, \quad Cr\{\xi \geq t\} = \int_t^{\infty} \phi(y)dy \quad (4.10)$$

olur.

Kanıt. İlk eşitlik doğrudan kredibilite dağılım fonsiyonu tanımından gelir. Diğer eşitlik için ise kredibilite ölçüsünün öz-ikillik özelliğini kullanalım. O halde

$$Cr\{\xi \geq t\} = 1 - Cr\{\xi < t\} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)dy - \int_{-\infty}^t \phi(y)dy = \int_t^{\infty} \phi(y)dy$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek 4.8. Bu durumlardan farklı bir durumda eşitlikten bahsedemeyiz. Yani

$$Cr\{b \leq \xi \leq c\} \neq \int_b^c \phi(y)dy$$

olur. Örnek verecek olursak, bulanık değişkenimiz $\xi = (1, 2, 3, 4)$ olsun. O halde $Cr\{2 \leq \xi \leq 3\} = 0.5$ olur. Fakat $2 \leq x \leq 3$ iken $\phi(x) = 0$ olur. Bu sebeple,

$$\int_2^3 \phi(y)dy = 0 \neq 0.5 = Cr\{2 \leq x \leq 3\}.$$

4.2 ORTAK KREDİBİLİTE DAĞILIMI

Tanım 4.3. $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ bir bulanık vektör olsun. O halde ortak kredibilite dağılımı $\Phi : \mathcal{R}^n \rightarrow [0, 1]$ tanımlı,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = Cr\{\theta \in \Theta | \xi_1(\theta) \leq x_1, \dots, \xi_n(\theta) \leq x_n\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4. $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ bir bulanık vektör olsun. Φ bulanık vektörünün kredibilite dağılım fonksiyonu olsun. O halde ortak kredibilite yoğunluk fonksiyonu $\phi : \mathcal{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı, her $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ için

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \phi(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n = 1$$

şeklinde tanımlanır.

4.3 BAĞIMSIZLIK

Bulanık değişkenlerin bağımsızlığı Zadeh (1978), Nahmias (1978), Yager (1992), Liu (2004), Yang ve Liu (2005) gibi birçok matematikçi tarafından farklı açılardan tartışılmıştır. Bağımsızlık için birçok denklik koşulu sunulmuştur. Burada Yang ve Liu (2005) tarafından verilen koşul ele alınmıştır.

Tanım 4.5. Yang & Liu (2005) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenler olsun. Eğer her $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{R}$ için

$$Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in B_i\} \quad (4.11)$$

ise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsızdır.

Teorem 4.5. Liu (2007) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenler olsun. Eğer her $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{R}$ için

$$Cr \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in B_i\} \quad (4.12)$$

ise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsızdır.

Kanıt. Kredibilite ölçüsünün öz-ikillik özelliğini ve Tanım(4.5)'i kullanırsak, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bağımsız olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} Cr \left\{ \bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} &= 1 - Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i^c\} \right\} \\ &= 1 - \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in B_i^c\} = \max_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in B_i\} \end{aligned}$$

□

Teorem 4.6. Yang & Liu (2005) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri olsun. Eğer her $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{R}$ için

$$Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\} \right\} < 0.5 \quad \text{olduğunda,}$$

$$Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\} \right\} = \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i = x_i\} \quad (4.13)$$

ise $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsızdır.

Kanıt. ($\implies$) Eğer $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bağımsız değişkenler ise bağımsızlık tanımından yararlanılır ve her $B_i = \{x_i\}$ seçersek eşitlik sağlanır.

($\impliedby$) Eğer her $x_i \in B_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $Cr\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\} \geq 0.5$ ise Teorem(3.2) sayesinde denklem sağlanır.

Aksi halde $\forall x_i \in B_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $Cr\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\} < 0.5$ ve

$$\begin{aligned} Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\} \right\} &= Cr \left\{ \bigcup_{x_i \in B_i, 1 \leq i \leq n} \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\} \right\} \\ &= \sup_{x_i \in B_i, 1 \leq i \leq n} Cr \left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\} \right\} = \sup_{x_i \in B_i, 1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i = x_i\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq n} \sup_{x_i \in B_i} Cr\{\xi_i = x_i\} = \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in B_i\} \end{aligned}$$

olur. Böylece (4.5) doğru olur ve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bağımsızdır. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Teorem 4.7. Liu (2007) $\mu_i, i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ için sırasıyla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'lerin üyelik fonksiyonları olsun ve $\mu, (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ vektörünün ortak üyelik fonksiyonu olsun. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'lerin bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{R}$ için

$$\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) \quad (4.14)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) Kabul edelim ki $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 'lar bağımsız olsun. Teorem(4.6)'yı kullanırsak,

$$\mu(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \left(2Cr\left\{ \bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\} \right\} \right) \wedge 1$$

$$\begin{aligned}
&= \left(2 \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i = x_i\} \right) \wedge 1 \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} (2Cr\{\xi_i = x_i\}) \wedge 1 = \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i)
\end{aligned}$$

olur.

($\Leftarrow$) $Cr\{\cap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\} \leq 0.5$ özelliğini sağlayan $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{R}$ için

$$\begin{aligned}
Cr\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right\} &= \frac{1}{2} \left(2Cr\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i = x_i\}\right\} \right) \wedge 1 \\
&= \frac{1}{2} \mu(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) \\
&= \frac{1}{2} \left(\min_{1 \leq i \leq n} (2Cr\{\xi_i = x_i\}) \wedge 1 \right) \\
&= \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i = x_i\}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlandığı için $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bağımsızdır. □

Teorem 4.8. Liu (2007) Φ_i 'ler, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için ξ_i bulanık değişkenlerin kredibilite dağılımları ve Φ , $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ bulanık vektörünün kredibilite ortak dağılım fonksiyonu olsun. Eğer $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsız ise,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \min_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(x_i) \quad (4.15)$$

olur.

Kanıt. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsız olsun. O halde,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = Cr\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \leq x_i\}\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \leq x_i\} = \min_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(x_i)$$

□

Uyarı 4.9. (4.15) denkleminin sağlanması bulanık değişkenlerinin bağımsız olduğunu göstermez.

Örnek 4.9. ξ kredibilite dağılımı Φ olan bir bulanık değişken olsun. O halde (ξ, ξ) bulanık vektörünün ortak kredibilite dağılımını $\forall t \in \mathcal{R}$ için

$$\Psi(t_1, t_2) = Cr\{\xi \leq t_1, \xi \leq t_2\} = Cr\{\xi \leq t_1\} \wedge Cr\{\xi \leq t_2\} = \Phi(t_1) \wedge \Phi(t_2)$$

olarak tanımlayabiliriz.

(4.15) sağlanır fakat bulanık değişkenleri bağımsızdır diyemeyiz.

Teorem 4.10. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ bulanık değişkenleri bağımsız ve $f_1, f_2, \dots, f_n$ fonksiyonlar reel değerli olsun. O halde $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \dots, f_n(\xi_n)$ 'ler bağımsız bulanık değişkenlerdir.

Kanıt. Herhangi $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{R}$ için ,

$$\begin{aligned} Cr\left\{\bigcap_{i=1}^n \{f_i(\xi_i) \in B_i\}\right\} &= Cr\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in f_i^{-1}(B_i)\}\right\} \\ &= \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{\xi_i \in f_i^{-1}(B_i)\} = \min_{1 \leq i \leq n} Cr\{f_i(\xi_i) \in B_i\} \end{aligned}$$

olur. Böylece $f_1(\xi_1), f_2(\xi_2), \dots, f_n(\xi_n)$ 'ler bağımsız bulanık değişkenleri olur. □

Teorem 4.11. (Zadeh Genişletme Prensibi - Extension Principle of Zadeh) Zadeh (1978) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ olan bağımsız bulanık değişkenleri ve $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ 'nin üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i) \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Kanıt. Üyelik fonksiyonu tanımından (3.7) yararlanırsak $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n)$ 'nin üyelik fonksiyonunu

$$\mu(x) = (2Cr\{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = x\}) \wedge 1$$

şeklinde yazabiliriz. O halde;

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= (2Cr\{f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n) = x\}) \wedge 1 \\
&= \left(2Cr \left\{ \bigcup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n\} \right\} \right) \wedge 1 \\
&= \left(2 \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} Cr(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) \right) \wedge 1 \\
&= \left(2 \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq k \leq n} Cr\{\xi_k = x_k\} \right) \wedge 1 \quad (\text{bağımsızlık sayesinde}) \\
&= \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq k \leq n} (2Cr\{\xi_k = x_k\}) \wedge 1 \\
&= \sup_{x=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i(x_i)
\end{aligned}$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Şimdi bulanık değişkenler için özdeş dağılım tanımını verelim:

Tanım 4.6. Liu (2004) ξ ve η bulanık değişkenler olsun. Eğer her $C \in \mathcal{R}$ için

$$Cr\{\xi \in C\} = Cr\{\eta \in C\}$$

eşitliği sağlanıyor ise bu iki bulanık değişken özdeş dağılımlıdır.

Teorem 4.12. Liu (2007) ξ ve η bulanık değişkenler olsun. Bu bulanık değişkenlerin eş dağılımlı olması için gerek ve yeter şart ξ ve η bulanık değişkenlerinin aynı üyelik fonksiyonuna sahip olmasıdır.

Kanıt. ($\implies$) μ ve ν sırasıyla ξ ve η için üyelik fonksiyonları olsun. Eğer ξ ve η eş dağılımlı bulanık değişkenler ise

$$\mu(t) = (2Cr\{\xi = t\}) \wedge 1 = (2Cr\{\eta = t\}) \wedge 1 = \nu(t)$$

olur. Böylece üyelik fonksiyonları eşit olur.

($\Leftarrow$) Eğer ξ ve η bulanık değişkenleri aynı üyelik fonksiyonuna sahiplerse, kredibilite dönüştürme teoremini(3.16) kullanırsak, her $B \in \mathcal{R}$ için

$$\begin{aligned} Cr\{\xi \in B\} &= \frac{1}{2} \left(\sup_{t \in B} \mu(t) + 1 - \sup_{t \in B^c} \mu(t) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sup_{t \in B} v(t) + 1 - \sup_{t \in B^c} v(t) \right) = Cr\{\eta \in B\} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece bulanık değişkenleri eş dağılımlı olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 4.13. *Liu (2007) ξ ve η bulanık değişkenleri olsun. Bu bulanık değişkenleri eş dağılımlı ise ξ ve η bulanık değişkenleri aynı kredibilite dağılımına sahiptirler.*

Kanıt. Eğer ξ ve η eş dağılımlı bulanık değişkenler ise her $t \in \mathcal{R}$ için , $Cr\{\xi \in (-\infty, t]\} = Cr\{\eta \in (-\infty, t]\}$ olur. Böylece ξ ve η bulanık değişkenleri aynı kredibilite dağılımına sahiptirler. □

Örnek 4.10. *Bu teoremin tersi doğru olmak zorunda değildir. Örnek olarak,*

$$\mu(t) = \begin{cases} 1.0, & t = 0 \\ 0.6, & t = 1 \\ 0.8, & t = 2 \end{cases}$$

ve

$$\eta(t) = \begin{cases} 1.0, & t = 0 \\ 0.7, & t = 1 \\ 0.8, & t = 2 \end{cases}$$

iki tane bulanık değişken olsun. Bunların kredibilite dağılımları aynı ve

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0.6, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde olur. Fakat bu iki değişken özdeş dağılımlı değildir.

Teorem 4.14. ξ ve η bulanık değişkenler olsun. Bu değişkenlerin kredibilite yoğunluk fonksiyonları var olsun. ξ ve η bulanık değişkenleri eş dağılımlı ise aynı kredibilite yoğunluk fonksiyonuna sahiptirler.

Kanıt. Teorem (4.13) sayesinde ξ ve η eş dağılımlı bulanık değişkenlerinin aynı kredibilite dağılımı olduğunu biliyoruz. Bu sayede ξ ve η eş dağılımlı bulanık değişkenleri aynı kredibilite yoğunluk fonksiyonuna sahiptirler. $\square$

5. BEKLENEN DEĞER

Bulanık değişkenler için beklenen değer operatörü tanımlamanın birçok yolu vardır. Bunlara örnek olarak Dubois ve Prade (1987), Heilpern (1992), de Campos Ibáñez ve Muñoz (1989) ve Yager (1981, 2002) gösterilebilir. Ancak bulanık değişkenlerde beklenen değer operatörünün en genel tanımı Liu ve Liu (2002a) tarafından yapılmıştır. Bu tanım sadece sürekli bulanık değişkenler için değil aynı zamanda ayrık değişkenler için de geçerlidir. Bu bölümde bu tanımı ele alacağız.

Tanım 5.1. ξ bir bulanık değişken olsun. Bu bulanık değişkeninin beklenen değerini integrallerden en az birinin sonlu olması durumunda,

$$E[\xi] = \int_0^{\infty} Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlarız.

Örnek 5.1. $\xi = (c, d)$ eş ihtimalli bulanık değişkeninin beklenen değerini hesaplayalım. Eğer $c \geq 0$ ise $r < 0$ olduğunda $Cr\{\xi \leq r\} = 0$ ve

$$Cr\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 1.0, & r \leq c \\ 0.5, & c < r \leq d \\ 0, & r > d \end{cases}$$

olur ve beklenen değeri,

$$E[\xi] = \left(\int_0^c 1dr + \int_c^d 0.5dr + \int_d^{\infty} 0dr \right) - \int_{-\infty}^0 0dr = \frac{c+d}{2}$$

olur. Eğer $d \leq 0$ ise $r > 0$ olduğunda $Cr\{\xi \geq r\} = 0$ ve

$$Cr\{\xi \leq r\} = \begin{cases} 1.0, & r \geq d \\ 0.5, & c \leq r < d \\ 0, & r < c \end{cases}$$

olur ve beklenen değeri,

$$E[\xi] = \int_0^\infty 0dr - \left(\int_{-\infty}^a 0dr + \int_a^b 0.5dr + \int_b^0 1dr \right) = \frac{c+d}{2}$$

olur. Eğer $c < 0 < d$ ise

$$Cr\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 0.5, & 0 \leq r \leq d \\ 0, & r > d \end{cases}$$

ve

$$Cr\{\xi \leq r\} = \begin{cases} 0, & r < c \\ 0.5, & c \leq r \leq 0 \end{cases}$$

olur ve beklenen değeri,

$$E[\xi] = \left(\int_0^d 0.5dr + \int_d^\infty 0dr \right) - \left(\int_{-\infty}^c 0dr + \int_c^0 0.5dr \right) = \frac{c+d}{2}$$

olur. Böylece her durum için beklenen değer $\frac{c+d}{2}$ olduğunu görebiliriz.

Örnek 5.2. ξ üçgen bulanık değişkenimiz olsun. $\xi = (a, b, c)$ 'nin beklenen değeri $E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}$ olur.

Örnek 5.3. ξ yamuk bulanık değişkenimiz olsun. $\xi = (a, b, c, d)$ 'nin beklenen değeri $E[\xi] = \frac{a+b+c+d}{4}$ olur.

Örnek 5.4. ξ üyelik fonksiyonu,

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

olan bir bulanık değişken olsun. Bu koşulda beklenen değeri $+\infty$ olur.

Eğer ξ üyelik fonksiyonu,

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

olan bir bulanık değişkeni olsaydı bu koşulda beklenen değeri $-\infty$ olurdu.

Örnek 5.5. Bazı bulanık değişkenlerin beklenen değerleri olmayabilir. Örnek olarak, ξ üyelik fonksiyonu $\forall x \in \mathcal{R}$ için,

$$\mu(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

olan bir bulanık değişken olsun. Bu bulanık değişkeninin beklenen değeri yoktur çünkü

$$\int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}dr \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr$$

integrallerinin ikiside sonsuz değere sahiptirler. Bu yüzden ξ bulanık değişkeninin beklenen değeri yoktur.

Teorem 5.1. Liu (2002) ξ kredibilite yoğunluk fonksiyonu ϕ olan bir bulanık değişkeni olsun. Eğer Lebesgue integrali

$$\int_{-\infty}^\infty x\phi(x)dx$$

sonlu ise, bulanık değişkenin beklenen değeri

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^\infty x\phi(x)dx \tag{5.2}$$

olur.

Kanıt. Beklenen değer tanımını kullanırsak,

$$E[\xi] = \int_0^\infty Cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \leq r\}dr$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_r^\infty \phi(x) dx \right] dr - \int_{-\infty}^0 \left[\int_{-\infty}^r \phi(x) dx \right] dr$$

elde ederiz. Fubini teoremini kullanırsak,

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left[\int_0^x \phi(x) dr \right] dx - \int_{-\infty}^0 \left[\int_x^0 \phi(x) dr \right] dx \\ &= \int_0^\infty x\phi(x) dx + \int_{-\infty}^0 x\phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^\infty x\phi(x) dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek 5.6. ξ kredibilite dağılım fonksiyonu Φ olan bir bulanık değişken olsun. Bu koşulda genel olarak,

$$E[\xi] \neq \int_{-\infty}^\infty x d\Phi(x)$$

olur. Örnek olarak, ξ üyelik fonksiyonu

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

olan bir bulanık değişkeni olsun. Örnek (5.4) sayesinde beklenen değerinin ∞ olduğunu biliyoruz. Fakat

$$\int_{-\infty}^\infty x d\Phi(x) = \frac{1}{4} \neq \infty$$

olur.

Tanım 5.2. ξ bulanık bir değişken ve $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde $f(\xi)$ 'nin beklenen değeri,

$$E[f(\xi)] = \int_0^\infty Cr\{f(\xi) \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 Cr\{f(\xi) \leq r\} dr$$

olur.

6. VARYANS

Tanım 6.1. Liu ve Liu (2002a) ξ bulanık bir değişken olsun. Bulanık değişkenin beklenen değeri sonlu olsun. Beklenen değere e diyelim. Bulanık değişkenin varyansı

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]$$

şeklinde tanımlanır.

Varyans kavramı, bulanık değişkenin dağılımının beklenen değeri etrafındaki yayılımının bir ölçüsünü sağlar.

Örnek 6.1. $\xi = (c, d)$ eş ihtimalli bulanık değişken olsun. O halde beklenen değeri $e = (c + d)/2$ ve her pozitif r sayısı için,

$$Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & r \leq \frac{(d-c)^2}{4} \\ 0, & r > \frac{(d-c)^2}{4} \end{cases}$$

olur. O halde bulanık değişkenin varyansı,

$$V[E] = \int_0^\infty Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\} dr = \int_0^{\frac{(d-c)^2}{4}} \frac{1}{2} dr = \frac{(d-c)^2}{8}$$

olur.

Örnek 6.2. $\xi = (a, b, c)$ simetrik üçgen bulanık değişken yani $b - a = c - b$ olsun. O halde varyansı $V[\xi] = \frac{(c-a)^2}{24}$ olur.

Örnek 6.3. $\xi = (a, b, c, d)$ simetrik yamuk bulanık değişken yani $b - a = d - c$ olsun. O halde varyansı $V[\xi] = \frac{((d-a)^2 + (d-a)(c-b) + (c-b)^2)}{24}$ olur.

Teorem 6.1. Liu (2007) ξ varyansı olan bir bulanık değişken olsun. $c, d \in \mathcal{R}$ için

$$V[c\xi + d] = c^2 V[\xi] \text{ olur.}$$

Kanıt. Varyans tanımını kullanırsak;

$V[c\xi + d] = E[(c\xi + d) - cE[\xi] - d]^2 = c^2E[(\xi - E[\xi])^2] = c^2V[\xi]$ olur. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Teorem 6.2. *Liu (2004) ξ varyansı e olan bir bulanık değişken olsun. O halde $V[\xi] = 0$ olması için gerek ve yeter şart $Cr\{\xi = e\} = 1$ olmasıdır.*

Kanıt. $V[\xi] = 0$ ise varyans tanımından $E[(\xi - e)^2] = 0$ olur. Bu da,

$$E[(\xi - e)^2] = \int_0^\infty Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\}dr$$

olur. O halde $r > 0$ için $Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\} = 0$ olur. O halde $Cr\{(\xi - e)^2 = 0\} = 1$ olur yani $Cr\{\xi = e\} = 1$ olur.

Diğer yandan, $Cr\{\xi = e\} = 1$ ise $Cr\{(\xi - e)^2 = 0\} = 1$ olur ve $r > 0$ için $Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\} = 0$ olur. Varyans tanımından yararlanırsak,

$$V[\xi] = \int_0^\infty Cr\{(\xi - e)^2 \geq r\}dr = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

ξ , $[a, b]$ aralığında değer alan bir bulanık değişken olsun. Bulanık değişkenin beklenen değeri verildiğinde maksimum varyans teoremi sayesinde değişkenin maksimum varyansını buluruz.

Teorem 6.3. *Li ve Liu (2007) f , $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun, ξ beklenen değeri e olan ve $[a, b]$ aralığında değer alan bulanık bir değişken olsun. O halde,*

$$E[f(\xi)] \leq \frac{b-e}{b-a}f(a) + \frac{e-a}{b-a}f(b) \quad (6.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Kanıt. Her $\theta \in \Theta$ için $a \leq \xi(\theta) \leq b$ ve

$$\xi(\theta) = \frac{b - \xi(\theta)}{b - a}a + \frac{\xi(\theta) - a}{b - a}b$$

sağlanır. f fonksiyonunun konveksliğini kullanırsak,

$$f(\xi(\theta)) \leq \frac{b - \xi(\theta)}{b - a}f(a) + \frac{\xi(\theta) - a}{b - a}f(b)$$

eşitsizliğini elde ederiz. İki tarafında beklenen değerini alırsak teorem kanıtlanır. $\square$

Teorem 6.4. (*Maksimum Varyans Teoremi-Maximum Variance Theorem*) Li ve Liu (2007)

ξ , beklenen değeri e olan ve $[a, b]$ aralığında değer alan bulanık bir değişken olsun. O halde,

$$V[\xi] \leq (e - a)(b - e) \quad (6.2)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik durumunun sağlanması için, ξ bulanık değişkeninin üyelik fonksiyonu,

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{2(b-e)}{b-a} \wedge 1 & x = a \\ \frac{2(e-a)}{b-a} \wedge 1 & x = b \end{cases} \quad (6.3)$$

şeklinde olmalıdır.

Kanıt. Kanıt Teorem(6.3) de bulunan konveks fonksiyonu $f(x) = (x - e)^2$ şeklinde alırsak benzer bir şekilde ispatlanabilir. $\square$

7. KRİTİK DEĞERLER

Bulanık değişkenleri derecelendirmek için 2 tane kritik değer kullanırız: Optimistik değer, pesimistik değer.

Tanım 7.1. Liu (2007) ξ bulanık bir değişken ve $\alpha \in (0, 1]$ olsun. O halde optimistik değeri

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \sup\{r | Cr\{\xi \geq r\} \geq \alpha\} \quad (7.1)$$

pesimistik değeri ise

$$\xi_{\inf}(\alpha) = \inf\{r | Cr\{\xi \leq r\} \geq \alpha\} \quad (7.2)$$

olur.

Yani α –optimistik değeri ξ bulanık değişkeninin kredibilite ölçüsünün supremumudur. Aynı şekilde α –pesimistik değeri ξ bulanık değişkeninin kredibilite ölçüsünün infimumudur.

Örnek 7.1. $\xi = (c, d)$ eş ihtimalli bulanık değişken olsun. O halde optimistik değeri,

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \begin{cases} c, & \alpha > 0.5 \\ d, & \alpha \leq 0.5 \end{cases}$$

pesimistik değeri ise,

$$\xi_{\inf}(\alpha) = \begin{cases} c, & \alpha \leq 0.5 \\ d, & \alpha > 0.5 \end{cases}$$

olur.

Örnek 7.2. $\xi = (a, b, c)$ üçgen bulanık değişken olsun. O halde optimistik değeri,

$$\xi_{\sup}(\alpha) = \begin{cases} 2\alpha b + (1 - 2\alpha)c, & \alpha \leq 0.5 \\ 2(\alpha - 1)a + (2 - 2\alpha)b, & \alpha > 0.5 \end{cases}$$

pesimistik değeri ise,

$$\xi_{\inf}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha \leq 0.5 \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \alpha > 0.5 \end{cases}$$

olur.

Teorem 7.1. ξ bulanık bir değişken olsun. Eğer $\alpha > 0.5$ ise;

$$Cr\{\xi \leq \xi_{\inf}(\alpha)\} \geq \alpha, \quad Cr\{\xi \geq \xi_{\sup}(\alpha)\} \geq \alpha \quad (7.3)$$

olur.

Kanıt. α -pesimistik değerin tanımından öyle bir azalan $\{\xi\}$ dizisi vardır ki $i \rightarrow \infty$ durumunda $Cr\{\xi \leq x_i\} \leq \alpha$ ve $x_i \downarrow \xi_{\sup}(\alpha)$ koşullarını sağlar. $\{\xi \leq x_i\} \downarrow \{\xi \leq \xi_{\inf}(\alpha)\}$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{\xi \leq x_i\} \geq \alpha > 0.5$ olduğu için, yarı süreklilik kuralı (3.6) sayesinde,

$$Cr\{\xi \leq \xi_{\inf}(\alpha)\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{\xi \leq x_i\} > \alpha$$

olur. Benzer şekilde, öyle bir artan $\{\xi\}$ dizisi vardır ki $i \rightarrow \infty$ durumunda $Cr\{\xi \geq x_i\} \geq \delta$ ve $x_i \uparrow \xi_{\sup}(\alpha)$ koşullarını sağlar. $\{\xi \geq x_i\} \downarrow \{\xi \geq \xi_{\sup}(\alpha)\}$ ve $\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{\xi \geq x_i\} \geq \alpha > 0.5$ olduğu için, yarı süreklilik kuralı (3.6) sayesinde,

$$Cr\{\xi \geq \xi_{\sup}(\alpha)\} = \lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{\xi \geq x_i\} > \alpha$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek 7.3. $\alpha \leq 0.5$ durumu için $Cr\{\xi \leq \xi_{\inf}(\alpha)\} < \alpha$ ve $Cr\{\xi \geq \xi_{\sup}(\alpha)\} < \alpha$ durumlarının sağlanması olasıdır. ξ , $(-1, 1)$ arasında değer alan eşit ihtimalli bulanık değişken olsun. $\xi_{\inf}(0.5) = -1$ olduğu aşikardır ve $Cr\{\xi \leq \xi_{\inf}(0.5)\} = 0 < 0.5$ olur. Aynı şekilde $\xi_{\sup}(0.5) = 1$ ve $Cr\{\xi \geq \xi_{\sup}(0.5)\} = 0 < 0.5$ olur.

Teorem 7.2. Liu (2004) ξ bulanık bir değişken olsun. O halde,

1. $\alpha > 0.5$ durumu için $\xi_{\inf}(\alpha) \geq \xi_{\sup}(\alpha)$ sağlanır.

2. $\alpha \leq 0.5$ durumu için $\xi_{\inf}(\alpha) \leq \xi_{\sup}(\alpha)$ sağlanır.

Kanıt. Teoremin ilk durumu için $\tilde{\xi}(\alpha) = \frac{(\xi_{\inf}(\alpha) + \xi_{\sup}(\alpha))}{2}$ tanımlayalım. Eğer $\xi_{\sup}(\alpha) \geq \xi_{\inf}(\alpha)$ ise,

$$1 \geq Cr\{\xi \leq \tilde{\xi}(\alpha)\} + Cr\{\xi > \tilde{\xi}(\alpha)\} \geq \alpha + \alpha > 1$$

olur ve bu bir çelişkidir. Bu da birinci durumu kanıtlar.

Teoremin ikinci durumu için kabul edelim ki $\xi_{\sup}(\alpha) \leq \xi_{\inf}(\alpha)$ sağlansın. $\xi_{\inf}(\alpha)$ tanımından $Cr\{\xi \leq \tilde{\xi}(\alpha)\} < \alpha$ olur. Aynı şekilde, $\xi_{\sup}(\alpha)$ tanımından $Cr\{\xi \geq \tilde{\xi}(\alpha)\} < \alpha$ olur. O halde,

$$1 \leq Cr\{\xi \leq \tilde{\xi}(\alpha)\} + Cr\{\xi \geq \tilde{\xi}(\alpha)\} < \alpha + \alpha \leq 1$$

olur ve bu bir çelişkidir. Bu da ikinci durumu kanıtlar. Böylece teorem kanıtlanmış olur. $\square$

Teorem 7.3. Liu (2007) ξ bulanık bir değişken olsun. O halde,

1. $d \geq 0$ durumu için $(d\xi)_{\sup}(\alpha) = d\xi_{\sup}(\alpha)$ ve $(d\xi)_{\inf}(\alpha) = d\xi_{\inf}(\alpha)$ sağlanır.

2. $d < 0$ durumu için $(d\xi)_{\sup}(\alpha) = d\xi_{\inf}(\alpha)$ ve $(d\xi)_{\inf}(\alpha) = d\xi_{\sup}(\alpha)$ sağlanır.

Kanıt. $d = 0$ durumu için ilk durum aşıkardır. $d > 0$ olduğunda,

$$\begin{aligned} (d\xi)_{\sup}(\alpha) &= \sup\{r | Cr\{d\xi \geq r\} \geq \alpha\} \\ &= d \sup\{\frac{r}{d} | Cr\{\xi \geq \frac{r}{d}\} \geq \alpha\} \\ &= d\xi_{\sup}(\alpha) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $(d\xi)_{\inf}(\alpha) = d\xi_{\inf}(\alpha)$ kanıtlanır.

Teoremin ikinci kısmını kanıtlamak için $(-\xi)_{\sup}(\alpha) = -\xi_{\inf}(\alpha)$ ve $(-\xi)_{\inf}(\alpha) =$

$-\xi_{\sup}(\alpha)$ sağlandığını gösterelim. Her $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$\begin{aligned} (-\xi)_{\sup}(\alpha) &= \sup\{r | Cr\{-\xi \geq r\} \geq \alpha\} \\ &= -\inf\{-r | Cr\{\xi \leq -r\} \geq \alpha\} \\ &= -\xi_{\inf}(\alpha) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $(-\xi)_{\inf}(\alpha) = -\xi_{\sup}(\alpha)$ kanıtlanır. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$



8. MESAFE

Bu bölümde iki bulanık değişken arasındaki uzaklık kavramını vereceğiz. Uzaklık kavramı birçok kişi tarafından farklı şekillerde tanımlanmıştır. Bunlara örnek olarak Puri ve Ralescu (1991) tarafından tanımlanan Hausdorff Mesafesi, Szmidt ve Kacprzyk (1997) tarafından tanımlanan Hamming mesafesi verilebilir. Bu tezde Liu (2004) tarafından verilen mesafe tanımı kullanılmıştır.

Tanım 8.1. ξ ve η iki bulanık değişken olsun. Bu iki bulanık değişken arasındaki mesafe

$$d(\xi, \eta) = E[|\xi - \eta|] \quad (8.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 8.1. $\xi = (a_1, b_1)$ ve $\eta = (a_2, b_2)$ eş ihtimalli bulanık değişkenler olsun ve $(a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) = \emptyset$ olsun. Bu koşullar altında $|\xi - \eta|$ da eş ihtimalli bir değişken olur ve aralığının bitiş noktaları $|a_1 - b_1|$ ve $|a_2 - b_2|$ olur. Aralarındaki mesafe ise farklarının beklenen değeri olduğu için,

$$d(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|)$$

olur.

Örnek 8.2. $\xi = (a_1, b_1, c_1)$ ve $\eta = (a_2, b_2, c_2)$ üçgen bulanık değişkenler olsun ve $(a_1, c_1) \cap (a_2, c_2) = \emptyset$ olsun. Bu koşullar altında iki değişken arasındaki mesafe beklenen değerlerinin farkları olduğundan,

$$d(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(|c_2 - a_1| + 2|b_2 - b_1| + |a_2 - c_1|)$$

olur.

Örnek 8.3. $\xi = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ ve $\eta = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ yamuk bulanık değişkenler olsun ve $(a_1, d_1) \cap (a_2, d_2) = \emptyset$ olsun. Bu koşullar altında iki değişken arasındaki mesafe beklenen

değerlerinin farkları olduğundan,

$$d(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(|d_2 - a_1| + |c_2 - b_1| + |b_2 - c_1| + |a_2 - d_1|)$$

olur.

Teorem 8.1. *Li ve Liu (2008) ξ , η ve τ bulanık değişkenler ve $d(\cdot, \cdot)$ mesafe olsun. O halde,*

1. $d(\xi, \eta) \geq 0$;
2. $d(\xi, \eta) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\xi = \eta$ olmasıdır;
3. $d(\eta, \xi) = d(\xi, \eta)$;
4. $d(\eta, \xi) \leq 2d(\tau, \xi) + 2d(\tau, \eta)$;

özellikleri sağlanır.

Kanıt. Kanıtın (1), (2) ve (3). kısımları direkt olarak tanımdan görülebilir. (4). kısım için, kredibilite alttoplam teoremini (3.3) kullanırsak,

$$\begin{aligned} d(\xi, \eta) &= \int_0^{+\infty} Cr\{|\xi - \eta| \geq r\} dr \\ &\leq \int_0^{+\infty} Cr\{|\xi - \tau| + |\tau - \eta| \geq r\} dr \\ &\leq \int_0^{+\infty} Cr\left\{\{|\xi - \tau| \geq \frac{r}{2}\} \cup \{|\tau - \eta| \geq \frac{r}{2}\}\right\} dr \\ &\leq \int_0^{+\infty} (Cr\{|\xi - \tau| \geq \frac{r}{2}\} + Cr\{|\tau - \eta| \geq \frac{r}{2}\}) dr \\ &= \int_0^{+\infty} Cr\{|\xi - \tau| \geq \frac{r}{2}\} dr + \int_0^{+\infty} Cr\{|\tau - \eta| \geq \frac{r}{2}\} dr \\ &= 2E[|\xi - \tau|] + 2E[|\tau - \eta|] = 2d(\xi, \tau) + 2d(\tau, \eta) \end{aligned}$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek 8.4. $i = 1, 2, 3$ için $\theta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ve $Cr\{\alpha_i\} = 1/2$ olsun. ξ, η ve τ bulanık değişkenlerini sırasıyla,

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta = \alpha_3 \\ 0, & \text{diğer durumlar,} \end{cases}$$

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -1, & \theta = \alpha_1 \\ 0, & \text{diğer durumlar,} \end{cases}$$

$$\tau(\theta) = 0$$

şeklinde tanımlayalım. Bu koşullar altında $d(\tau, \xi) = d(\eta, \tau) = 1/2$ ve $d(\eta, \xi) = 3/2$ durumu açıkça görülür. Bu sebeple,

$$d(\eta, \xi) = \frac{3}{2} (d(\tau, \xi) + d(\eta, \tau))$$

olur.

9. KABA UZAY ve KABA DEĞİŞKEN

Bu bölümde önümüzdeki bölümlerde kullanacağımız kaba uzay, kaba değişken, güven ölçüsü ve ilgili tanımlar verilmiştir. Bulanık değişkenler için kullandığımız kredibilite ölçüsünün bir varyansı olan güven ölçüsü kaba değişkenler için tanımlanmıştır.

Tanım 9.1. Liu (2002) Λ boş olmayan bir küme olsun, $\mathcal{A}$, Λ alt kümesinin σ -cebiri, $\Delta \in \mathcal{A}$, ve π ,

- $\pi(\Lambda) < \infty$;
- $\pi(\Delta) > 0$;
- $\pi(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$;
- sayılabilir her ayrık $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ olayları için,

$$\pi\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi\{A_i\}$$

aksiyomlarını sağlayan bir küme fonksiyonu olsun. Bu durumda $(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$ bir kaba uzaydır.

Tanım 9.2. Liu (2002) ξ kaba değişkeni $(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$ kaba uzayından reel sayı kümesine tanımlı ölçülebilir bir fonksiyondur. Yani, her Borel kümesi B^* için

$$\{\lambda \in \Lambda \mid \xi(\lambda) \in B^*\} \in \mathcal{A}$$

olur.

Tanım 9.3. Liu (2002) $(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$ kaba uzay olsun. O halde bir A olayının alt ve üst güven ölçüleri

- $\overline{Tr}\{A\} = \frac{\pi\{A\}}{\pi\{\Lambda\}}$;

- $\underline{Tr}\{A\} = \frac{\pi\{A \cap \Delta\}}{\pi\{\Delta\}};$

ve bir A olayının güven ölçüsü

$$Tr\{A\} = \frac{1}{2} (\underline{Tr}\{A\} + \overline{Tr}\{A\}) \quad (9.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 9.4. Liu (2002) ξ $(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$ uzayı üzerinde tanımlı bir kaba değişken olsun. Bu kaba değişkeninin beklenen değerini integrallerden en az birinin sonlu olması durumunda,

$$E[\xi] = \int_0^\infty Tr\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 Tr\{\xi \leq r\} dr \quad (9.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 9.5. Liu (2002) ξ kaba bir değişken olsun. Kaba değişkenin beklenen değeri sonlu olsun ve e diyelim. O halde kaba değişkenin varyansını

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 9.6. Liu (2002) ξ ve η kaba değişkenler olsun. $E[\xi]$, $E[\eta]$ ve $E[\xi\eta]$ beklenen değerleri sonlu olsun diyelim. O halde ξ ve η kaba değişkenlerinin kovaryansını

$$Cov[\xi, \eta] = E[\xi\eta] - E[\xi]E[\eta]$$

şeklinde tanımlarız.

10. EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde bulanık ve kaba eşitsizlikler ile ilgili teoremler kanıtlarıyla sunulmuştur. Aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve örneklerle desteklenmiştir.

10.1 BULANIK DEĞİŞKENLERDE EŞİTSİZLİK

Teorem 10.1. *Liu (2007) ξ bir bulanık değişken ve f negatif olmayan bir fonksiyon olsun.*

Eğer f çift ve $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon ise, $\forall t > 0$ için

$$Cr\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[f(\xi)]}{f(t)} \quad (10.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. İlk olarak $Cr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\}$ 'nin $[0, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu aşikardır. Beklenen değer tanımı ve f 'nin negatif olmayışını kullanırsak,

$$\begin{aligned} E[f(\xi)] &= \int_0^\infty Cr\{f(\xi) \geq r\} dr \\ &= \int_0^\infty Cr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\} dr \\ &\geq \int_0^{f(t)} Cr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\} dr \\ &\geq \int_0^{f(t)} dr Cr\{|\xi| \geq f^{-1}(f(t))\} \\ &= f(t) Cr\{|\xi| \geq t\} \end{aligned}$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 10.2. *Liu (2007) ξ bir bulanık değişken olsun. Verilen her $t > 0$ ve $p > 0$ için*

$$Cr\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[|\xi|^p]}{t^p} \quad (10.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Eğer önceki teoremde ki f fonksiyonunu $f(x) = |x|^p$ seçersek, bu durum sağlanmış olur. $\square$

Teorem 10.3. Liu (2003) ξ varyansı $V[\xi]$ olan bir bulanık değişken olsun. O halde her $t > 0$ için,

$$Cr\{|\xi - E[\xi]| \geq t\} \leq \frac{V[\xi]}{t^2} \quad (10.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Teorem 10.1'de $f(t) = t^2$ ve $\xi = \xi - E[\xi]$ aldığımız durumda bu eşitsizlik sağlanır. $\square$

Teorem 10.4. Liu (2007) p ve q $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan iki tane pozitif reel sayı olsun. ξ ve η ise beklenen değerleri sonlu bulanık değişkenler olsun. O halde,

$$E[|\xi \eta|] \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]} \sqrt[q]{E[|\eta|^q]} \quad (10.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Bu eşitsizlik herhangi bir bulanık değişkeninin 0 olmasıyla sağlanır. Diğer bir yandan kabul edelim ki $E[|\xi|^p] > 0$ ve $E[|\eta|^q] > 0$ olsun. $f(x, y) = \sqrt[p]{x} \sqrt[q]{y}$ fonksiyonunun $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ alanında konkav bir fonksiyon olduğunu açıkça görebiliriz. O halde alacağımız herhangi (x_0, y_0) , $x \geq 0, y \geq 0$ noktası ve alacağımız herhangi iki a ve b reel sayıları ve, $\forall (x, y) \in D$ için

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $x_0 = E[|\xi|^p], y_0 = E[|\eta|^q], x = |\xi|^p, y = |\eta|^q$ alırsak,

$$f(|\xi|^p, |\eta|^q) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^q - E[|\eta|^q]).$$

İki tarafın beklenen değerini alırsak,

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^q)] - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]) \leq a(E[|\xi|^p] - E[|\xi|^p]) + b(E[|\eta|^q] - E[|\eta|^q]) = 0.$$

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^q)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q])$$

olur. Bu da 10.4’u gerektirir. $\square$

Teorem 10.5. *Liu (2007) $p \geq 1$ olan bir reel sayı, ξ ve η beklenen değerleri sonlu bulanık değişkenler olsun. O halde,*

$$\sqrt[p]{E[|\xi + \eta|^p]} \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]} + \sqrt[p]{E[|\eta|^p]} \quad (10.5)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Bu eşitsizlik herhangi bir bulanık değişkeninin 0 olmasıyla sağlanır. Diğer bir yandan kabul edelim ki $E[|\xi|^p] > 0$ ve $E[|\eta|^p] > 0$ olsun. $f(x, y) = (\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y})^p$ fonksiyonunun $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ alanında konkav bir fonksiyon olduğunu açıkça görebiliriz. O halde alacağımız herhangi (x_0, y_0) , $x \geq 0, y \geq 0$ noktası ve alacağımız herhangi iki a ve b reel sayıları ve $\forall (x, y) \in D$ için

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $x_0 = E[|\xi|^p], y_0 = E[|\eta|^p], x = |\xi|^p, y = |\eta|^p$ alırsak,

$$f(|\xi|^p, |\eta|^p) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^p - E[|\eta|^p]).$$

İki tarafın beklenen değerini alırsak,

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^p)] - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]) \leq a(E[|\xi|^p] - E[|\xi|^p]) + b(E[|\eta|^p] - E[|\eta|^p]) = 0.$$

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^p)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p])$$

olur. Bu da 10.5’u gerektirir. $\square$

Teorem 10.6. Liu (2007) ξ bir bulanık değişken ve f fonksiyonu $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $E[\xi]$ ve $E[f(\xi)]$ sonlu ise,

$$f(E[\xi]) \leq E[f(\xi)] \quad (10.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $f(x) = |x|^p, p \geq 1$ seçersek, $|E[\xi]|^p \leq E[|\xi|^p]$ olur.

Kanıt. f konveks bir fonksiyon olduğu için her y için öyle bir k sayısı vardır ki $f(x) - f(y) \geq k(x - y)$ sağlanır. Eğer x yerine ξ ve y yerine $E[\xi]$ alırsak,

$$f(\xi) - f(E[\xi]) \geq k(\xi - E[\xi])$$

eşitsizliğini elde ederiz. İki tarafında beklenen değerini alırsak,

$$E[f(\xi)] - f(E[\xi]) \geq k(E[\xi] - E[\xi]) = 0$$

$$E[f(\xi)] \geq f(E[\xi])$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da teoremi kanıtlar. □

10.2 KABA DEĞİŞKENLERDE EŞİTSİZLİK

Teorem 10.7. Liu (2003) ξ bir kaba değişken ve f negatif olmayan Borel ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f çift ve $[0, \infty)$ aralığında artan bir fonksiyon ise, $\forall t > 0$ için

$$Tr\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[f(\xi)]}{f(t)} \quad (10.7)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. İlk olarak $Tr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\}$ 'nin $[0, \infty)$ aralığında monoton azalan olduğu aşikar-

dır. Beklenen değer tanımı ve f 'nin negatif olmayışını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
E[f(\xi)] &= \int_0^\infty Tr\{f(\xi) \geq r\}dr \\
&= \int_0^\infty Tr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\}dr \\
&\geq \int_0^{f(t)} Tr\{|\xi| \geq f^{-1}(r)\}dr \\
&\geq \int_0^{f(t)} dr Tr\{|\xi| \geq f^{-1}(f(t))\} \\
&= f(t)Tr\{|\xi| \geq t\}
\end{aligned}$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 10.8. *Liu (2003) ξ bir kaba değişken olsun. Verilen her $t > 0$ ve $p > 0$ için*

$$Tr\{|\xi| \geq t\} \leq \frac{E[|\xi|^p]}{t^p} \quad (10.8)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Eğer önceki teoremde ki f fonksiyonunu $f(x) = |x|^p$ seçersek, bu durum sağlanmış olur. □

Teorem 10.9. *Liu (2003) ξ varyansı $V[\xi]$ olan bir kaba değişken olsun. O halde her $t > 0$ için,*

$$Tr\{|\xi - E[\xi]| \geq t\} \leq \frac{V[\xi]}{t^2} \quad (10.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Teorem (10.7)'de $f(x) = x^2$ ve $\xi = \xi - E[\xi]$ aldığımız durumda bu eşitsizlik sağlanır. □

Teorem 10.10. Liu (2003) p ve q $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan iki tane pozitif reel sayı olsun. ξ ve η ise beklenen değerleri sonlu kaba değişkenler olsun. O halde,

$$E[|\xi\eta|] \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]} \sqrt[q]{E[|\eta|^q]} \quad (10.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Bu eşitsizlik herhangi bir kaba değişkenin 0 olmasıyla sağlanır. Diğer bir yandan kabul edelim ki $E[|\xi|^p] > 0$ ve $E[|\eta|^q] > 0$ olsun. $f(x, y) = \sqrt[p]{x} \sqrt[q]{y}$ fonksiyonunun $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ alanında konkav bir fonksiyon olduğunu açıkça görebiliriz. O halde alacağımız herhangi (x_0, y_0) , $x \geq 0, y \geq 0$ noktası ve alacağımız herhangi iki a ve b reel sayıları ve, $\forall (x, y) \in D$ için

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $x_0 = E[|\xi|^p], y_0 = E[|\eta|^q], x = |\xi|^p, y = |\eta|^q$ alırsak,

$$f(|\xi|^p, |\eta|^q) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^q - E[|\eta|^q]).$$

İki tarafın beklenen değerini alırsak,

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^q)] - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q]) \leq a(E[|\xi|^p] - E[|\xi|^p]) + b(E[|\eta|^q] - E[|\eta|^q]) = 0.$$

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^q)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^q])$$

olur. Bu da (10.10)'u gerektirir. □

Teorem 10.11. Liu (2003) $p \geq 1$ olan bir reel sayı, ξ ve η beklenen değerleri sonlu kaba değişkenler olsun. O halde,

$$\sqrt[p]{E[|\xi + \eta|^p]} \leq \sqrt[p]{E[|\xi|^p]} + \sqrt[p]{E[|\eta|^p]} \quad (10.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Bu eşitsizlik herhangi bir kaba değişkenin 0 olmasıyla sağlanır. Diğer bir yandan kabul edelim ki $E[|\xi|^p] > 0$ ve $E[|\eta|^p] > 0$ olsun. $f(x,y) = (\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y})^p$ fonksiyonunun $D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ alanında konkav bir fonksiyon olduğunu açıkça görebiliriz. O halde alacağımız herhangi (x_0, y_0) , $x \geq 0, y \geq 0$ noktası ve alacağımız herhangi iki a ve b reel sayıları ve $\forall (x,y) \in D$ için

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $x_0 = E[|\xi|^p], y_0 = E[|\eta|^p], x = |\xi|^p, y = |\eta|^p$ alırsak,

$$f(|\xi|^p, |\eta|^p) - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]) \leq a(|\xi|^p - E[|\xi|^p]) + b(|\eta|^p - E[|\eta|^p]).$$

İki tarafın beklenen değerini alırsak,

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^p)] - f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p]) \leq a(E[|\xi|^p] - E[|\xi|^p]) + b(E[|\eta|^p] - E[|\eta|^p]) = 0.$$

$$E[f(|\xi|^p, |\eta|^p)] \leq f(E[|\xi|^p], E[|\eta|^p])$$

olur. Bu da (10.11)'u gerektirir. □

11. YAKINSAKLIK KAVRAMI

Bu bölümde bulanık ve kaba değişkenlerin bazı yakınsaklık kavramlarını ve aralarındaki ilişkileri incelenmiştir.

11.1 BULANIK DEĞİŞKENLERDE YAKINSAKLIK

Tanım 11.1. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bulanık bir değişken dizisi olsun. Bu dizinin ξ bulanık değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak (Convergent a.s.) olması için gerek ve yeter şart kredibilitesi $Cr\{A\} = 1$ olan bir A olayı için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\xi_i(\theta) - \xi(\theta)| = 0, \quad \forall \theta \in A \quad (11.1)$$

olmasıdır.

Tanım 11.2. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bulanık bir değişken dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Cr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (11.2)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\{\xi_i\}$ dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsaktır (Converges in Credibility).

Tanım 11.3. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bulanık bir değişken dizisi ve bu dizinin beklenen değeri sonlu olsun.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[|\xi_i - \xi|] = 0 \quad (11.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\xi_i\}$ dizisi ξ bulanık değişkenine ortalama yakınsaktır (Convergence in Mean).

Tanım 11.4. Liu (2003) $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ kredibilite dağılımları, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ bulanık değişkenlerine karşılık gelen kredibilite dağılımları olsun. Eğer herhangi Φ 'nin süreklilik

noktasında $\Phi_i \rightarrow \Phi$ ise $\{\xi_i\}$ dizisi ξ bulanık değişkenine dağılım yakınsaktır (Converges in Distribution).

Teorem 11.1. Liu (2007) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$, kredibilite uzayı üzerinde tanımlı bulanık değişkenler olsun. Eğer $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine ortalama yakınsaksa, $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsaktır.

Kanıt. Teorem(10.2) sayesinde verilen her $\varepsilon \geq 0$ için $i \rightarrow \infty$ durumunda,

$$Cr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[|\xi_i - \xi|]}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

olduğu için $\{\xi_i\}$ dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsaktır. □

Örnek 11.1. Kredibilite yakınsaklık, ortalama yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek olarak, $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı, $j = 1, 2, 3, \dots$ için $Cr\{\theta_1\} = 1/2$ ve $Cr\{\theta_j\} = 1/j$ olsun.

$$\xi_i(\theta_j) = \begin{cases} i, & j = i \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ için bulanık değişkeni tanımlayalım ve $\xi = 0$ olsun. Yeteri kadar küçük $\varepsilon \geq 0$ için,

$$Cr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = \frac{1}{i} \rightarrow 0$$

olur. O halde $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsaktır. Fakat,

$$E[|\xi_i - \xi|] = 1 \nrightarrow 0.$$

Yani $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine ortalama yakınsamaz.

Örnek 11.2. Hemen hemen her yerde yakınsaklık, kredibilite yakınsaklığı gerektirmez.

Örnek olarak, $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı ve kredibilite ölçüleri $j =$

$1, 2, 3, \dots$ için $Cr\{\theta_j\} = \frac{j}{2j+1}$ olsun. $i = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\xi_i(\theta_j) = \begin{cases} i, & j = i \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

bulanık değişkeni tanımlayalım ve $\xi = 0$ olsun. O halde $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine hemen hemen her yerde yakınsaktır. Yeteri kadar küçük $\varepsilon \geq 0$ için,

$$Cr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = \frac{i}{2i+1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

olur. O halde $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsak değildir.

Teorem 11.2. Liu (2007) $\xi_1, \xi_2, \dots$ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı bulanık değişkenleri olsun. Eğer $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsak ise $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine hemen hemen her yerde yakınsaktır.

Kanıt. $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak olmasın. O halde öyle bir $\theta^* \in \Theta$ vardır ki $\xi_i(\theta^*) \not\rightarrow \xi(\theta^*), i \rightarrow \infty$ olur. Diğer bir deyişle öyle bir küçük $\varepsilon \geq 0$ ve öyle bir $\{\xi_{i_k}(\theta^*)\}$ alt dizisi vardır ki her k için $|\xi_{i_k}(\theta^*) - \xi(\theta^*)| \geq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Kredibilite ölçüsü artan bir küme fonksiyonu olduğu için, $\forall k$ için

$$Cr\{|\xi_{i_k} - \xi| \geq \varepsilon\} \geq Cr\{\theta^*\} > 0$$

olur. Bu sebeple $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsak değildir.

Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 11.3. Liu (2007) $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ bulanık değişkenler olsun. $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine kredibilite yakınsıyorsa, $\{\xi_i\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine dağılım yakınsaktır.

Kanıt. x, Φ dağılımı için herhangi bir süreklilik noktası olsun. Herhangi bir $y > x$ eşitsiz-

liğini sağlayan y değeri için,

$$\{\xi_i \leq x\} = \{\xi_i \leq x, \xi \leq y\} \cup \{\xi_i \leq x, \xi > y\} \subset \{\xi \leq y\} \cup \{|\xi_i - \xi| \geq y - x\}$$

olur. Kredibilite Alt Toplamsallık Teoremini (3.3) kullanırsak,

$$\Phi_i(x) \leq \Phi(y) + Cr\{|\xi_i - \xi| \geq y - x\}$$

elde deriz. Dizimiz kredibilite yakınsak olduğu için $Cr\{|\xi_i - \xi| \geq y - x\} \rightarrow 0$ olur. Böylece her $y > x$ için $\limsup_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \leq \Phi(y)$ olur. $y \rightarrow x$ durumunda,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \leq \Phi(x) \quad (11.4)$$

olur. Diğer taraftan herhangi bir $z < x$ eşitsizliğini sağlayan z değeri için,

$$\{\xi \leq z\} = \{\xi_i \leq x, \xi \leq z\} \cup \{\xi_i > x, \xi \leq z\} \subset \{\xi_i \leq x\} \cup \{|\xi_i - \xi| \geq x - z\}$$

ve

$$\Phi(z) \leq \Phi_i(x) + Cr\{|\xi_i - \xi| \geq x - z\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $Cr\{|\xi_i - \xi| \geq y - x\} \rightarrow 0$ olduğu için, her $z < x$ için $\Phi(z) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x)$ olur. $y \rightarrow x$ durumunda,

$$\Phi(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \quad (11.5)$$

olur. Böylece $\Phi_i(x) \rightarrow \Phi(x)$ olur. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Örnek 11.3. Dağılım sürekliliği, kredibilite sürekliliğini gerektirmez. Örnek olarak, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, kredibilite uzayı üzerinde tanımlı ve kredibilite ölçüsü $Cr\{\alpha_1\} = Cr\{\alpha_2\} = 1/2$ olsun. Bulanık değişkenini,

$$\xi\{\theta\} = \begin{cases} -1, & \theta = \alpha_1 \\ 1, & \theta = \alpha_2 \end{cases}$$

şeklinde ve $j = 1, 2, 3, \dots$ için $\xi_j = -\xi$ olacak şekilde tanımlayalım. Böylece ξ_j ve ξ eş da-

ğılmış olurlar. Yani $\{\xi_j\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine dağılım yakınsaktır. Ancak herhangi küçük bir $\varepsilon > 0$ için, $Cr\{|\xi_j - \xi| > \varepsilon\} = Cr\{\Theta\} = 1$ olur. Bu da gösterir ki dizi kredibilite yakınsak değildir.

Örnek 11.4. Dağılım yakınsaklığı, hemen hemen her yerde yakınsaklığı gerektirmez. $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kredibilite uzayında tanımlı ve kredibilitileri $Cr\{\alpha_1\} = Cr\{\alpha_2\} = 1/2$ olsun. Bulanık değişkenini

$$\xi\{\theta\} = \begin{cases} -1, & \theta = \alpha_1 \\ 1, & \theta = \alpha_2 \end{cases}$$

şeklinde ve $j = 1, 2, 3, \dots$ için $\xi_j = -\xi$ olacak şekilde tanımlayalım. Böylece ξ_j ve ξ eş dağılmış olurlar. Yani $\{\xi_j\}$ bulanık dizisi ξ bulanık değişkenine dağılım yakınsaktır. Fakat, $\{\xi\}$ bulanık dizisi, ξ bulanık değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak değildir.

Örnek 11.5. Hemen hemen her yerde yakınsaklık, dağılım yakınsaklığı gerektirmez. $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots\}$ kredibilite uzayı üzerinde tanımlı ve kredibiliteleri $j = 1, 2, 3, \dots$ için $Cr\{\theta_j\} = \frac{j}{2j+1}$ olsun. Bulanık değişkenini

$$\xi_i\{\theta_j\} = \begin{cases} i, & j = i \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde ve $\xi = 0$ olacak şekilde tanımlayalım. Dizimiz hemen hemen her yerde yakınsaktır. Fakan ξ_i 'nin kredibilite dağılımı, $i = 1, 2, \dots$ için

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ (i+1)/(2i+1), & 0 \leq x < i \\ 1, & x \geq i \end{cases}$$

şeklinde olur. ξ bulanık değişkeninin kredibilite dağılımı ise,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

olur. Yani , $x > 0$ iken $\Phi_i(x) \rightarrow \Phi(x)$. Bu yüzden bulanık dizimiz dağılım yakınsak değildir.

Önerme 11.4. You (2009) $\xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ bulanık değişkenler olsun. ξ_n dizisinin hemen hemen her yerde yakınsak olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$Cr\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta \mid |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| \geq \varepsilon\}\right\} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. ($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned} \Lambda_\varepsilon &:= \left\{ \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta \mid |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| \geq \varepsilon\} \right\}^c \\ &= \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta \mid |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| < \varepsilon\} \right\} \end{aligned}$$

seçersek her $\varepsilon > 0$ için $Cr\{\Lambda_\varepsilon\} = 1$ olacaktır.

$$\Lambda = \bigcap_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon \tag{11.6}$$

için de $Cr\{\Lambda\} = 1$ olur.

$\forall \theta \in \Lambda, \forall \varepsilon > 0$ için $|\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| < \varepsilon$ olur. Bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| = 0$ gerektirir.

($\Rightarrow$) ξ_n hemen hemen her yerde yakınsak bir dizi olsun. Öyle bir Λ olayı vardır ki $Cr\{\Lambda\} = 1$ ve $\forall \theta \in \Lambda$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| = 0$$

sağlanır. $\forall \varepsilon > 0$, öyle bir m vardır ki her $n \geq m$ ve $\theta \in \Lambda$ için $|\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| < \varepsilon$ olur. O halde, $\forall n \geq m$ için,

$$\{\theta \in \Theta \mid |\xi_n(\theta) - \xi(\theta)| \geq \varepsilon\} \subset \Lambda^c$$

Bu durum $\forall n \geq m$ için sağlandığı için birleşimleri içinde sağlanır. O halde,

$$\bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta | \xi_n(\theta) - \xi(\theta) \geq \varepsilon\} \subset \Lambda^c$$

Bu da,

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta | \xi_n(\theta) - \xi(\theta) \geq \varepsilon\} \subset \Lambda^c$$

gerektirir. Her iki tarafında kredibilite ölçüsünü alırsak,

$$Cr\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta | \xi_n(\theta) - \xi(\theta) \geq \varepsilon\}\right\} < Cr\{\Lambda^c\} = 0$$

olur ve kredibilite ölçüsünün monotonluk özelliği sayesinde,

$$Cr\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{\theta \in \Theta | \xi_n(\theta) - \xi(\theta) \geq \varepsilon\}\right\} = 0$$

olduğunu görürüz. Bu da önermeyi kanıtlar. □

11.2 KABA DEĞİŞKENLERDE λ -İSTATİSTİKSEL GÜVEN YAKINSAKLIK

Tanım 11.5. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. Bu dizinin ξ kaba değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak (Convergent a.s.) olması için gerekli ve yeter şart güven ölçüsü $Tr\{B\} = 1$ olan bir B olayı için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\xi_i(\theta) - \xi(\theta)| = 0, \quad \forall \theta \in B \quad (11.7)$$

olmasıdır.

Tanım 11.6. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Tr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (11.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa, $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsaktır (Converges in Trust).

Tanım 11.7. Liu (2003) $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi ve bu dizinin beklenen değeri sonlu olsun.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[|\xi_i - \xi|] = 0 \quad (11.9)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine ortalama yakınsaktır (Convergence in Mean).

Tanım 11.8. Liu (2003) $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ güven dağılımları, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ güven değişkenlerine karşılık gelen güven dağılımları olsun. Eğer herhangi Φ 'nin süreklilik noktasında $\Phi_i \rightarrow \Phi$ ise $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine dağılım yakınsaktır (Converges in Distribution).

Tanım 11.9. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\xi_n\}$ dizisi istatistiksel güven yakınsaktır.

$\{\lambda_n\}$ pozitif sayılardan oluşan azalmayan bir dizi olsun ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

koşullarını sağlasın. Şimdi $B_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ için,

$$T_n(Tr) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=m}^n Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\}$$

eşitliğini tanımlayalım.

Tanım 11.10. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{m \in B_n : \sum_{k=m}^n Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine λ toplanabilir denir.

Tanım 11.11. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\{\xi_n\}$ dizisi λ - istatistiksel güven yakınsaktır.

Sonuç 11.5. Eğer $\lambda_n = n$ olacak şekilde seçersek tanım(11.11), tanım(11.9)'a indirgenir.

Teorem 11.6. $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak olması için gerekli ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tr \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} \{|\xi_i - \xi| > \varepsilon\} \right\} = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Kanıt. Her $i \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$X = \left\{ \lambda \in \Lambda \mid \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i(\lambda) \neq \xi(\lambda) \right\},$$

$$X_i(\varepsilon) = \{\lambda \in \Lambda \mid |\xi_i(\lambda) - \xi(\lambda)| \geq \varepsilon\}$$

tanımlarını yapalım. O halde,

$$X = \bigcup_{\varepsilon > 0} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon) \right)$$

olduğunu görürüz. Aynı zamanda ξ_i dizisinin ξ kaba değişkenine hemen hemen her yerde yakınsaması için gerekli ve yeter şart $Tr\{X\} = 0$ olmasıdır. O halde yukarıdaki durumla birleştirirsek, ξ_i dizisinin ξ kaba değişkenine hemen hemen her yerde için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$Tr \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon) \right\} = 0$$

olmasıdır. Aynı zamanda,

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon) \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon)$$

olduğu için ve güven ölçüsünün sürekliliğini kullanırsak;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tr \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon) \right\} = Tr \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i(\varepsilon) \right\} = 0$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 11.7. $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine hemen hemen her yerde yakınsaksa, $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsaktır.

Kanıt. Hemen hemen her yerde yakınsaklık ve Teorem(11.6)'ı kullanırsak $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tr \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} \{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} \right\} = 0$$

olur. Her $n \geq 1$ için,

$$\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} \{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\}$$

olduğu için teoremi sağlar. □

Teorem 11.8. $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine ortalama yakınsaksa, $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsaktır.

Kanıt. Teorem (10.8)'i kullanırsak verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $i \rightarrow \infty$ durumunda

$$Tr\{|\xi_i - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[|\xi_i - \xi|]}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

olur. Bu sebeple $\{\xi_i\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsaktır. □

Teorem 11.9. $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. Bir $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsıyorsa, $\{\xi_i\}$ kaba dizisi ξ bulanık değişkenine dağılım yakınsaktır.

Kanıt. x, Φ dağılımı için herhangi bir süreklilik noktası olsun. Herhangi bir $y > x$ eşitsizliğini sağlayan y değeri için,

$$\{\xi_i \leq x\} = \{\xi_i \leq x, \xi \leq y\} \cup \{\xi_i \leq x, \xi > y\} \subset \{\xi \leq y\} \cup \{|\xi_i - \xi| \geq y - x\}$$

olur. Kredibilite Alt Toplamsallık Teoremini (3.3) kullanırsak,

$$\Phi_i(x) \leq \Phi(y) + Tr\{|\xi_i - \xi| \geq y - x\}$$

elde deriz. Dizi güven yakınsak olduğu için $Tr\{|\xi_i - \xi| \geq y - x\} \rightarrow 0$ olur. Böylece her $y > x$ için $\sup_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \leq \Phi(y)$ olur. $y \rightarrow x$ durumunda,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \leq \Phi(x) \quad (11.10)$$

olur. Diğer taraftan herhangi bir $z < x$ eşitsizliğini sağlayan z değeri için,

$$\{\xi \leq z\} = \{\xi_i \leq x, \xi \leq z\} \cup \{\xi_i > x, \xi \leq z\} \subset \{\xi_i \leq x\} \cup \{|\xi_i - \xi| \geq x - z\}$$

ve

$$\Phi(z) \leq \Phi_i(x) + Tr\{|\xi_i - \xi| \geq x - z\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $Tr\{|\xi_i - \xi| \geq x - z\} \rightarrow 0$ olduğu için, her $z < x$ için $\Phi(z) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x)$ olur. $z \rightarrow x$ durumunda,

$$\Phi(x) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \Phi_i(x) \quad (11.11)$$

olur. Böylece $\Phi_i(x) \rightarrow \Phi(x)$ olur. Bu da teoremi kanıtlar. $\square$

Teorem 11.10. $\{\xi_i\}$ bir kaba değişken dizisi olsun. $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsak ise $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine istatistiksel güven yakınsaktır.

Kanıt. $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine güven yakınsak olduğu için güven yakınsaklık

tanımını (11.6) kullanırsak $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tr\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0$$

olduğunu görürüz. O halde, herhangi $\delta > 0$ için $\exists U \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall k > U$ için

$$Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \leq \delta$$

sağlanır.

Bu sebeple, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$|\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \leq U$$

olur. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| = 0$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Örnek 11.6. *Teoremin tersinin doğru olduğunu söyleyemeyiz yani istatistiksel güven yakınsaklık, güven yakınsaklığı gerektirmeyebilir.*

Örnek olarak , $\Lambda = \{A_1, A_2\}$, $\mathcal{P}$ kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\Delta = \Lambda$ ve $\pi\{A_1\} = 8 = \pi\{A_2\}$ tanımlarını yapalım. Bu tanımlardan $(\Lambda, \Delta, \mathcal{A}, \pi)$ uzayımızın kaba uzay olduğu aşikardır. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\xi_k\{A\} = \begin{cases} -1, & k = n^2 \quad \wedge \quad A = A_1 \\ 1, & k = n^2 \quad \wedge \quad A = A_2 \\ 0, & k \neq n^2 \quad \wedge \quad A = A_1 \\ 1, & k \neq n^2 \quad \wedge \quad A = A_2 \end{cases}$$

tanımını yapalım. O halde $\xi = 0$, $0 < \varepsilon < 1$ ve $\frac{1}{2} < \delta < 1$ için,

$$Tr\{|\xi_k - 0| \geq \varepsilon\} = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ \frac{1}{2}, & k \neq n^2 \end{cases}$$

olur. Bu yüzden,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tr\{|\xi_k - 0| \geq \varepsilon\} \neq 0$$

olur. Fakat,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - 0| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| = 0$$

olduğunu görürüz. Yani dizimiz istatistiksel güven yakınsaktır fakat güven yakınsak değildir.

Teorem 11.11. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\{\xi_n\}$ dizimin ξ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsaksa, $h(\{\xi_n\})$ dizisi $h(\xi)$ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsaktır.

Kanıt. h sürekli bir fonksiyon olduğundan $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$ için $|\xi_k - \xi| < M$ ise

$$|h(\xi_k) - h(\xi)| < \varepsilon$$

olur. O halde, $|\xi_k - \xi| \geq M$ ise $|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon$ olur.

Bu sebeple

$$\{|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|\xi_k - \xi| \geq M\}$$

olduğu görülür. İki tarafında güven ölçüsünü alırsak,

$$Tr\{|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon\} \leq Tr\{|\xi_k - \xi| \geq M\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da

$$\{k \in B_n : Tr\{|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \subseteq \{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq M\} \geq \delta\}$$

durumunu verir. İki tarafında mutlak değerini alır ve $\frac{1}{\lambda_n}$ 'e bölersek,

$$\frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : Tr\{|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \leq \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq M\} \geq \delta\}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsak

olduğu olduğu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq M\} \geq \delta\} \right| = 0$$

olduğunu söyleriz. Sıkıştırma teoremini kullanırsak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{k \in B_n : Tr\{|h(\xi_k) - h(\xi)| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \right| = 0$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

$\lambda_n = n$ seçersek yukarıdaki teorem istatistiksel güven yakınsaklığı indirgenir.

Sonuç 11.13. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\{\xi_n\}$ dizimin ξ kaba değişkenine istatistiksel güven yakınsaksa, $h(\{\xi_n\})$ dizisi $h(\xi)$ kaba değişkenine istatistiksel güven yakınsaktır.

Teorem 11.14. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine toplanabilir ise $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsaktır.

Kanıt. $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine toplanabilir olduğu için, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\delta > 0 \forall t \in B_n$,

$$\sum_{k=t}^n Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq Tr\{|\xi_t - \xi| \geq \varepsilon\}$$

olur. O halde,

$$\{t \in B_n : \sum_{k=t}^n Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \supseteq \{t \in B_n : Tr\{|\xi_t - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}$$

olduğunu söyleriz. İki tarafında mutlak değerini alırsak,

$$|\{t \in B_n : \sum_{k=t}^n Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \geq |\{t \in B_n : Tr\{|\xi_t - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 11.15. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} > 0$ koşulu altında, $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine istatistiksel güven yakınsaksa, $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsaktır.

Kanıt. $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$ için,

$$\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\} \supseteq \{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}$$

olur. İki tarafın mutlak değerini alır ve $\frac{1}{n}$ 'e bölersek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| &\geq \frac{1}{n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \\ &= \frac{\lambda_n}{n} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \end{aligned}$$

olur. $\{\xi_n\}$ dizisi istatistiksel güven yakınsak olduğu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| = 0$$

olur. Bu da teoremi kanıtlar. □

Teorem 11.16. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ kaba değişkenler olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \lambda_n}{n} = 0$ koşulu altında, $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine λ -istatistiksel güven yakınsaksa, $\{\xi_n\}$ dizisi ξ kaba değişkenine istatistiksel güven yakınsaktır.

Kanıt. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \lambda_n}{n} = 0$ olduğu için her $\varepsilon > 0$ ve her $M > 0$, için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq N$ için $\frac{n - \lambda_n}{n} < \frac{M}{2}$ olur. O halde her $\varepsilon > 0, \delta > 0$ ve $n \geq M$ için,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} |\{k \leq n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \\ &= \frac{1}{n} |\{k \leq n - \lambda_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| + \frac{1}{n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \\ &\leq \frac{n - \lambda_n}{n} + \frac{1}{n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{2} + \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in B_n : Tr\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta\}|$$

eşitsizliğini elde ederiz. İki tarafında limitini alırsak, $n \rightarrow \infty$ durumunda $\{\xi_n\}$ dizisi λ -istatistiksel güven yakınsak olduğu için, $\{\xi_n\}$ dizisi istatistiksel güven yakınsak olur.

□



KAYNAKLAR

- Ash, R. (1972). *Real Analysis and Probability*. New York: Academic Press.
- de Campos Ibáñez, L. M., Muñoz, A. G. (1989). A subjective approach for ranking fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 29(2), 145–153.
- De Cooman, G. (1997). Possibility theory i: the measure-and integral-theoretic ground-work. *International journal of general systems*, 25(4), 291–323.
- Dubois, D., Prade, H. (1987). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and systems*, 24(3), 279–300.
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5(4), 301-314.
- Gillies, D. (2012). *Philosophical theories of probability*. Routledge.
- Heilpern, S. (1992). The expected value of a fuzzy number. *Fuzzy sets and Systems*, 47(1), 81–86.
- Kauffman, G. , Gupta, M. (1987). Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications: Arnold kaufmann and madan m. gupta, van nostrand reinhold, new york, 1985.
- Klir, G. , Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic*, volume 4. Prentice hall New Jersey.
- Kolmogorov, A. N., Bharucha-Reid, A. T. (2018). *Foundations of the theory of probability: Second English Edition*. Courier Dover Publications.
- Laha, R. G., Rohatgi, V. K. (1979). *Probability Theory*. New York: Wiley.

- Li, X., Liu, B. (2006). A sufficient and necessary condition for credibility measures. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(05), 527–535.
- Li, X., Liu, B. (2007). *Moment estimation theorems for various types of uncertain variable*. Technical report, Technical Report.
- Li, X., Liu, B. (2008). On distance between fuzzy variables. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 19(3), 197–204.
- Liu, B. (2002). Theory and practice of uncertain programming. wurzburg, berlin: Physica.
- Liu, B. (2003). Inequalities and convergence concepts of fuzzy and rough variables. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2(2), 87–100.
- Liu, B. (2004). *Uncertainty Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, 1st edition.
- Liu, B. (2006). A survey of credibility theory. *Fuzzy optimization and decision making*, 5(4), 387–408.
- Liu, B. (2007). *Uncertainty Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2nd edition.
- Liu, B., Liu, Y.-K. (2002a). Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. *IEEE transactions on Fuzzy Systems*, 10(4), 445–450.
- Liu, Y., Gao, J. (2007). The independence of fuzzy variables in credibility theory and its applications. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems*, 15(2), 1–20.
- Liu, Y., Liu, B. (2002b). Fuzzy random programming problems with multiple criteria. *Asian Information-Science-Life*, 1(3), 249–256.

- Liu, Y.-K., Liu, B. (2003). Expected value operator of random fuzzy variable and random fuzzy expected value models. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 11(02), 195–215.
- Mises, R. v. (1931). Über einige abschätzungen von erwartungswerten.
- Mursaleen, M. (2000). λ - statistical convergence. *Mathematica slovacica*, 50(1), 111–115.
- Nahmias, S. (1978). Fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 1(2), 97–110.
- Puri, M. L., Ralescu, D. A. (1991). Convergence theorem for fuzzy martingales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 160(1), 107–122.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J. (1997). On measuring distances between intuitionistic fuzzy sets. *Notes on IFS*, 3(4).
- Wang, Z., Klir, G. J. (1982). *Fuzzy Measure Theory*. New York: Plenum Press.
- Yager, R. R. (1981). A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. *Information sciences*, 24(2), 143–161.
- Yager, R. R. (1992). On the specificity of a possibility distribution. *Fuzzy sets and systems*, 50(3), 279–292.
- Yager, R. R. (2002). On the evaluation of uncertain courses of action. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(1), 13–41.
- Yang, L., Liu, B. (2005). On inequalities and critical values of fuzzy random variables. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 13(02), 163–175.
- You, C. (2009). On the convergence of uncertain sequences. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(3-4), 482–487.
- Zadeh (1965). Fuzzy sets. *information and control* 2 , vol. 8 (1965), pp. 338–353.
- Zadeh, L. A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1(1), 3–28.

Zhao, R., Liu, B. (2003). Renewal process with fuzzy interarrival times and rewards. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 11(05), 573–586.

Zimmermann, H.-J. (2001). Fuzzy set theory and its applications. 4th. In *Kluwer Academic Publishers Norwell, Boston, MA, USA*.



KAYNAKLAR



EK 1

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad-Soyad : Burak AVŞAR

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi/Matematik Bölümü(İng)	2018
Lise	Düvenciler Lisesi	2012

Mesleki Deneyim

Yıl	Yer	Görev
2019-	Uşak Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

AVŞAR, Burak; SAVAŞ, Ekrem. Statistical Convergence of Rough Variable. Konuralp Journal of Mathematics (KJM), 9.2: 268-273.