T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TESSARİNE SAYILARI VE MATRİS FORMLARI

Merve USLU
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Faik BABADAĞ

KIRIKKALE 2021

Matematik Anabilim Dalı'nda Merve USLU tarafından hazırlanan "Tessarine Sayıları Ve Matris Formları" adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Anabilim Dalı Başkanı
Prof. Dr. Ali OLGUN

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylarım.

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Faik BABADAĞ

Jüri Üyeleri

Başkan: Doç. Dr. Murat OLGUN

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Faik BABADAĞ

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Semih YILMAZ

22 / 12 / 2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)
Merve USLU
(Tarih)

ÖZET

TESSARİNE SAYILARI VE MATRİS FORMLARI

Kırıkkale Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Faik BABADAĞ
Aralık 2021, sayfa 61

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. İlk üç bölümde giriş, çalışmanın amacı ve sonraki bölümlerde gerekli olacak temel kavramlar hakkında bilgilere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde Fibonacci-Lucas Tessarine dizilerin özellikleri ve bu dizilerin bazı özdeşlikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, Tessarine Q-matrislerinin özellikleri verilmiştir.

Altıncı bölümde, Fibonacci Tessarine vektörü verilmiştir.

Yedinci bölümde sonuç için ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tessarineler, Fibonacci ve Lucas sayıları, Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine sayıları, Tessarine Q-matrisi, Fibonacci ve Lucas Tessarine Q-Matrisleri, Fibonacci Tessarine vektörü.

ABSTRACT

TESSARİNE NUMBERS AND MATRİX FORMS

Kırıkkale University
Institute of Sciences
Department of Mathematics, Master Thesis
Advisor: Assist. Prof. Dr. Faik BABADAĞ

December 2021, pages 61

This thesis consists of seven sections. In the first three sections, information about the introduction, the aim of the study and fundamental concept which will be necessary in the next sections are given.

In the fourth section, properties of Fibonacci-Lucas Tessarine sequences and some identities are given.

In the fifth section, the properties of Q-matrices are given to the Tessarine.

In the sixth section, Fibonacci Tessarine vector are given.

In the seventh section is reserved for conclusion.

Key Words: Tessarines, Fibonacci and Lucas numbers, Fibonacci Tessarine and Lucas Tessarine numbers, Tessarine Q-matrix, Fibonacci and Lucas Tessarine Q-matrices, Fibonacci Tessarine vector.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Faik BABADAĞ ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$	Tessarine sayılar cümlesi
$\mathcal{T}$	Tessarine sayısı
$\mathcal{T}_s$	Tessarine sayısının sanal kısmı
$\mathcal{T}_v$	Tessarine sayısının vektör kısmı
$\mathcal{T}^i$	Tessarine sayısının $i-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}^j$	Tessarine sayısının $j-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}^k$	Tessarine sayısının $k-$ birimine göre eşleniği
$\lVert\mathcal{T}_i\rVert$	Tessarine sayısının $i-$ birimine göre modülü
$\lVert\mathcal{T}_j\rVert$	Tessarine sayısının $j-$ birimine göre modülü
$\lVert\mathcal{T}_k\rVert$	Tessarine sayısının $k-$ birimine göre modülü
$\mathcal{T}_n$	n –inci Fibonacci Tessarine sayısı
$\mathcal{T}'_n$	n –inci Lucas Tessarine sayısı
$\mathcal{T}_{-n}$	n –inci negatif Fibonacci Tessarine sayısı
$\mathcal{T}'_{-n}$	n –inci negatif Lucas Tessarine sayısı
$\mathcal{T}_n^i$	n –inci Fibonacci Tessarine sayısının $i-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}_n^j$	n –inci Fibonacci Tessarine sayısının $j-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}_n^k$	n –inci Fibonacci Tessarine sayısının $k-$ birimine göre eşleniği
Q^{n}	n –inci Fibonacci Q-matrisi
$\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n}}$	n –inci Lucas Q-matrisi
$\mathrm{Q}^{-\mathrm{n}}$	n –inci Fibonacci Q-matrisinin tersi
$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}$	n –inci Fibonacci Tessarine Q-matrisi
$\mathcal{T}\mathrm{Q}'_{\mathrm{n}}$	n –inci Lucas Tessarine Q-matrisi
$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^i$	n –inci Fibonacci Tessarine Q-matrisinin $i-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^j$	n –inci Fibonacci Tessarine Q-matrisinin $j-$ birimine göre eşleniği
$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^k$	n –inci Fibonacci Tessarine Q-matrisinin $k-$ birimine göre eşleniği
$\vec{\mathcal{T}}_n$	n –inci Fibonacci Tessarine vektörü

1. GİRİŞ

Fibonacci dizisi, 0 ve 1 ile başlayan ve her sayının kendisinden önce gelen iki sayının toplanması ile elde edilen bir sayı dizisidir. Başka bir ifadeyle başlangıç koşulları $f_0 = 0, f_1 = 1$ ve dizinin n –inci terimi f_n olacak şekilde $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ rekürans bağıntısıyla tanımlanan tamsayı dizisine *Fibonacci sayı dizisi* denir.

Fibonacci dizisi ilk kullanıldığı alan bir tavşan problemidir. Burada problem şöyledir: Bir çift yetişkin tavşan, her ay yeni bir çift tavşan doğurmaktadır. Bu yavrular, bir ayın sonunda erişkin hale gelmekte ve sonraki her ay yeni bir çift tavşan doğurmaktadır. Herhangi bir ay sonunda yavruların ve yetişkin tavşanların sayısı kaçtır? Bu süreçte tavşanların hiç ölmedikleri ve her doğan tavşan çiftinin bir dişi ve bir erkek olduğu varsayılmaktadır. İlk ay yeni doğmuş bir tavşan çifti olsun. İkinci ayda, bu tavşan çifti doğurmadıklarından yine bir çift tavşan mevcuttur.

Üçüncü ayda bu tavşanlar yavrulayacaklarından iki çift tavşan olacaktır. Ancak yeni doğan çift dördüncü ay doğuramayacaktır, fakat ana babaları bir çift daha yavrulayacaktır. Toplamda üç çift tavşan olacaktır. Benzer şekilde devam edilirse; 1,1, 2,3,5,8,13, 21,34,55,89, 144, ... dizisi elde edilir [1-3].

James Cockle, W. Hamilton'un Kuaterniyon teorisinden esinlenerek yaptığı çalışmaların sonucunda, Tessarine sayısı olarak yeni bir hiperkompleks sayı sistemini elde etmiş ve bu sayı sistemini

$$\mathcal{T} = t_1 + t_2\, i + t_3\, j + t_4\, k$$

biçiminde göstermiştir. Burada $t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4$ reel sayıları $\mathcal{T}$ Tessarine sayısının bileşenleridir. James Cockle bu çalışmalarını Tessarine, Oktrin, … , Hiperkompleks sayıları olarak ele almıştır, [4-6].

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tezin hazırlanmasında [4], [5] ve [6] nolu kaynaklarda Tessarine sayıları ve bunlarla ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Diğer kaynaklarda ise

Fibonacci sayıları, Lucas sayıları ile ilgili özdeşlikler, Fibonacci Q-matrisi, Lucas Q-matrisi ile ilgili çeşitli kavramlar ve tanımlar verilmiştir.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı Tessarine, Fibonacci ve Lucas sayılarından faydalanarak, Fibonacci ve Lucas Tessarine sayıları ile ilgili tanımlar, özdeşlikler verilerek bunların ispatları yapılmıştır. Daha sonra, Fibonacci-Lucas Tessarine Q-matrisleri tanımlanarak bazı özdeşlikler ispatlanmıştır. Ayrıca Fibonacci Tessarine vektörünün özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Çalışmanın bu bölümünde bazı tanımlar ve eşitlikler verilecektir.

Tanım 2.1. $n \geq 0$ ve başlangıç koşulları $f_0 = 0, f_1 = 1$ olmak üzere,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \tag{1}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan f_n sayısına n *–inci Fibonacci sayısı* denir, [1].

Tanım 2.2. $n > 0$ için,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n \tag{2}$$

ifadesine *negatif indisli Fibonacci sayısı* denir, [7,11].

Tanım 2.3. Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

şeklindedir. Burada karakteristik denklemin çözümleri,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. Buradan

$$\alpha + \beta = 1, \qquad \alpha\beta = -1, \qquad \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

eşitlikleri kolayca görülür. Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısının çözümü

$$f_n = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n \tag{3}$$

olmak üzere, c_1 , c_2 katsayılarını bulmak için başlangıç şartları kullanılarak,

$$f_0 = c_1 + c_2$$

$$f_1 = c_1\alpha + c_2\beta = 1$$

elde edilir. Bu iki denklemi $c_2 = -c_1$ yazarak çözersek,

$$c_1\alpha + c_2\beta = 1 \Rightarrow c_1\alpha - c_1\beta = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

dir. $c_2 = -c_1$ olduğu için $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ dir. Böylece c_1 , c_2 (3) de yerine yazılırsa,

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{4}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ilk olarak 18. Yüzyılda Jacques Philippe Marie Binet tarafından gösterildiği $Binet\ Form$*ülü* olarak adlandırılır, [1].

Tanım 2.4. $n \geq 0$ olmak üzere başlangıç koşulları $l_0 = 0, l_1 = 1$ olmak üzere

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n \tag{5}$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanan l_n sayısına n *–inci Lucas sayısı* denir, [1].

Tanım 2.5. Lucas dizisi için,

$$l_n = \alpha^{\mathrm{n}} + \beta^{\mathrm{n}} \tag{6}$$

eşitliği elde edilir, [1].

Tanım 2.6. $n > 0$ için,

$$l_{-n} = (-1)^n l_n \tag{7}$$

ifadesine *negatif indisli Lucas sayısı* denir, [11].

Tanım 2.7. Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin diğer bir skaler değerli fonksiyonu permanent fonksiyonudur. Permanent, *artı determinant* olarak da bilinir, [7-11].

Tanım 2.8. Bir $A \in M_n(F)$ matrisinin permanenti $p(A)$ veya $per(A)$ ile gösterilir ve

$$per(A) = \sum_{\sigma \in Sn} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S_n simetrik grubu ve σ permütasyonu gösterir, [12].

Örnek 2.1.

$A = (a_{ij})_{2x2}$ matrisinin permanenti

$$per(A) = \sum_{\sigma \in Sn} \prod_{i=1}^{2} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in Sn} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}$$

$$= a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}.$$

Örnek 2.2.

$A = (a_{ij})_{3x3}$ matrisinin permanenti

$$per(A) = \sum_{\sigma \in Sn} \prod_{i=1}^{3} a_{i\sigma(i)} = per \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) + (-1)^{1+2} a_{12}(a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31})$$

$$+(-1)^{1+3} a_{13}(a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}).$$

Tanım 2.9. Bir $\vec{t}$ Tessarine vektörü, $\mathcal{T}$ Tessarine sayısının vektörel kısmı olarak tanımlanır ve

$$\vec{t} = t_2 i + t_3 j + t_4 k = (\, t_2, t_3\, , t_4)$$

biçimindedir.

Tanım 2.10. $\vec{t} = (t_2, t_3\ , t_4)$ ve $\vec{t}\,' = (t_2', t_3', t_4')$ iki Tessarine vektör olsun. Bu vektörlerin iç çarpımı,

$$< \vec{t}, \vec{t}\,' > = t_2 t_2' + t_3 t_3' + t_4 t_4'$$

şeklindedir.

Tanım 2.11. Bu çarpımda $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_s,\ \mathcal{T}_v)$ ve $\mathcal{T}' = (\mathcal{T}_s',\ \mathcal{T}_v')$ olarak seçelim.
Bu durumda
$\mathcal{T}\mathcal{T}' = \mathcal{T}_s\mathcal{T}_s' + g(\mathcal{T}_v,\ \mathcal{T}_v') + \mathcal{T}_s\mathcal{T}_v' + \mathcal{T}_s'\mathcal{T}_v + \mathcal{T}_v \times \mathcal{T}_v'$ şeklindedir. Burada

$$\mathcal{T}_s = t_1, \mathcal{T}_s' = t_1',$$

$$\mathcal{T}_v = t_2 i + t_3 j + t_4 k,\ \mathcal{T}_v' = t_2' i + t_3' j + t_4' k,$$

$$g(\mathcal{T}_v,\ \mathcal{T}_v') = -\ t_2 t_2' + t_3 t_3' - t_4 t_4'$$

şeklindedir. Buradan vektörel çarpım işlemi Tanım 2.7 ve 2.8'den Permanentler (*artı determinant*) yardımı ile tanımlanırsa,

$$\vec{t} \times \vec{t}\,' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ t_2 & t_3 & t_4 \\ t_2' & t_3' & t_4' \end{vmatrix}$$

$$= (t_3 t_4' + t_4 t_3')\, i - (t_2 t_4' + t_4 t_2')\, j + (t_2 t_3' + t_3 t_2')\, k.$$

3. TESSARİNE SAYILARI

3.1. Tessarine Sayıları

Bir kompleks sayı $t_1 + t_2 i,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ biçimindedir. Kompleks sayılar cümlesi $\mathbb{C}$ ile gösterilirse,

$\mathbb{C} = \{t_1 + t_2 i |\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$,

Tessarine sayıları ise sıralı dört sayının $+1, i, j, k$ gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanır. Dört birimden, birinci birim olan 1 reel sayı, diğer üç birim ise imajiner birimlerdir ve aşağıdaki şu özelliklere sahiptir.

$$i^2 = -j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = ji = k,\ kj = jk = i,\ ik = ki = -j \cdot \tag{8}$$

Böylece bir Tessarine sayısı, $\mathcal{T} = t_1 + t_2 i + t_3 j + t_4 k$ biçiminde ifade edilir. Burada t_1, t_2, t_3, t_4 reel sayılarına $\mathcal{T}$ Tessarine sayısının bileşenleri denir. $\mathcal{T}$ Tessarine sayıların kümesi , $\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$ ile gösterilir ve

$\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} = \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} = t_1 + t_2 i + t_3 j + t_4 k\ ;\ t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}\}$ biçiminde ifade edilir.

3.1.1. Tessarine Sayılarında Toplama İşlemi

$\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ iki Tessarine sayıları ve $\oplus$ toplama işlemi olmak üzere

$\oplus : \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} \times \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} \to \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$

$$(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \to \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}' = (t_1 + t_1') + (t_2 + t_2')i + (t_3 + t_3')j + (t_4 + t_4')k$$

biçiminde ifade edilir. Böylece $(\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}, \oplus)$ ikili bir abel grubudur. Burada etkisiz eleman, sıfır Tessarine sayısıdır.

3.1.2. Tessarine Sayılarında Skaler ile Çarpma İşlemi

Tessarine sayılarında skaler ile çarpma işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$\odot: \mathbb{R} \times \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} \to \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$

$$(\mu, \mathcal{T}) \to \mu \odot \mathcal{T} = \mu\, t_1 + \mu\, t_2 i + \mu\, t_3 j + \mu\, t_4 k$$

şeklinde tanımlanan bir dış işlem için μ, $\eta \in \mathbb{R}$ ve $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$ 'dir.

a) $\mu \odot (\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}') = (\mu \odot \mathcal{T}) \oplus (\mu \odot \mathcal{T}')$

b) $(\mu + \eta) \odot \mathcal{T} = (\mu \odot \mathcal{T}) \oplus (\eta \odot \mathcal{T})$

c) $(\mu \,.\, \eta) \odot \mathcal{T} = \mu \odot (\eta \odot \mathcal{T})$

d) $1 \odot \mathcal{T} = \mathcal{T} \odot 1 = \mathcal{T}$

özellikleri sağlanır. O halde $\{\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}, \mathbb{R}, \oplus, +, \odot, .\}$ cümlesi bir reel vektör uzayıdır. Bu uzayı $\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$ ile göstereceğiz ve $\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$'deki $\oplus$ işlemide $+$ ile gösterilecektir, [4-6].

3.1.3. Tessarine Sayılarında Çarpma İşlemi

Tessarine sayılarında çarpma işlemi,

$\otimes: \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} \times \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}} \to \mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$

$$(\mathcal{T}, \mathcal{T}') \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}' = (t_1 + t_2 i + t_3 j + t_4 k) \otimes (t_1' + t_2' i + t_3' j + t_4' k)$$

$$= (t_1 t_1' - t_2 t_2' + t_3 t_3' - t_4 t_4') + (t_1 t_2' + t_2 t_1' + t_3 t_4' + t_4 t_3')i$$

$$+(t_1 t_3' + t_3 t_1' - t_2 t_4' - t_4 t_2')j + (t_1 t_4' + t_4 t_1' + t_3 t_2' + t_2 t_3')k.$$

şeklindedir. Böylece Tessarine sayılarının çarpımının aşağıdaki özelliklere sahip olduğu kolayca görülebilir.

a) İki Tessarine sayısının çarpımı bir Tessarine sayısıdır.

b) Tessarine sayı çarpımı birleşimlidir.

c) Tessarine sayı çarpımı dağılımlıdır.

d) Tessarine sayı çarpımı değişmelidir.

Buna göre $\{\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}},\ \mathbb{R},\ \oplus,\ +,\ .,\ \odot,\ \otimes\}$ sistemi değişmeli bir cebirdir. Bu cebire Tessarine sayılar cebiri denir ve $\mathbb{C}_2^{\mathcal{T}}$ ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı $\{+1,\ i,\ j,\ k\}$ ve boyutu 4'tür.

3.1.4. Tessarine Sayılarının Eşlenik Kavramı

$\mathcal{T} = t_1 + t_2\, i + t_3\, j + t_4\, k$ Tessarine sayısının *eşlenik kavramları* sırası ile $\mathcal{T}^i, \mathcal{T}^j, \mathcal{T}^k$ olmak üzere,

$$\mathcal{T}^i = t_1 - t_2\, i + t_3\, j - t_4\, k = (t_1 - t_2 i) + j(t_3 - t_4 i),$$

$$\mathcal{T}^j = t_1 + t_2\, i - t_3\, j - t_4\, k = (t_1 + t_2 i) - j(t_3 + t_4 i),$$

$$\mathcal{T}^k = t_1 - t_2\, i - t_3\, j + t_4\, k = (t_1 - t_2 i) - j(t_3 - t_4 i)$$

şeklindedir.

3.1.5. Tessarine Sayılarının Eşlenikleri ile Çarpımı

$\mathcal{T} = t_1 + t_2\, i + t_3\, j + t_4\, k$ Tessarine sayısının i, j, k birimlerine göre *eşlenik çarpımları* sırası ile

i – birimine göre,

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^i = t_1t_1 + t_2t_2 + t_3t_3 + t_4t_4 + (t_1t_2 - t_2t_1 + t_3t_4 - t_4t_3)i$$

$$+(t_2t_4 + t_4t_2 + t_1t_3 + t_3t_1)j + (t_1t_4 - t_4t_1 + t_2t_3 - t_3t_2)k$$

$$= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + 2j(t_1t_3 + t_2t_4).$$

j – birimine göre,

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^j = t_1t_1 - t_2t_2 - t_3t_3 + t_4t_4 + (t_1t_2 + t_2t_1 - t_3t_4 - t_4t_3)i$$

$$+(t_2t_4 - t_4t_2 + t_1t_3 - t_3t_1)j + (t_1t_4 - t_4t_1 + t_2t_3 - t_3t_2)k$$

$$= t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + t_4^2 + 2i(t_1t_2 - t_3t_4).$$

k – birimine göre,

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}^k = t_1t_1 + t_2t_2 - t_3t_3 - t_4t_4 + (t_1t_2 - t_2t_1 + t_3t_4 - t_4t_3)i$$

$$+(t_2t_4 - t_4t_2 + t_1t_3 - t_3t_1)j + (t_1t_4 + t_4t_1 - t_2t_3 - t_3t_2)k$$

$$= t_1^2 + t_2^2 - t_3^2 - t_4^2 + 2k(t_1t_4 - t_2t_3).$$

3.1.6. Tessarine Sayılarının Modülü

$\mathcal{T} = t_1 + t_2\, i + t_3\, j + t_4\, k$ Tessarine sayısının i, j, k birimlerine göre tanımlanan *normları* sırası ile $\|\mathcal{T}_i\|$, $\|\mathcal{T}_j\|$, $\|\mathcal{T}_k\|$ olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\|\mathcal{T}_i\| = \sqrt{\mathcal{T} \times \mathcal{T}^i},$$

$$\|\mathcal{T}_j\| = \sqrt{\mathcal{T} \times \mathcal{T}^j},$$

$$\|\mathcal{T}_k\| = \sqrt{\mathcal{T} \times \mathcal{T}^k}.$$

4. FİBONACCİ TESSARİNE VE LUCAS TESSARİNE DİZİLERİ

4.1. Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine Dizisi

$n \geq 0$ için n –inci Fibonacci Tessarine $\mathcal{T}_\mathrm{n}$ ve n –inci Lucas Tessarine $\mathcal{T}'_\mathrm{n}$

$$\mathcal{T}_\mathrm{n} = f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k \tag{9}$$

$$\mathcal{T}'_\mathrm{n} = l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k \tag{10}$$

şeklinde tanımlanır.

$n, m \geq 0$, $\mathcal{T}_\mathrm{n}$ ve $\mathcal{T}_\mathrm{m}$ Fibonacci Tessarine dizileri olsun. Bu durumda Fibonacci Tessarine dizileri için toplama ve çarpma işlemi,

$$\mathcal{T}_\mathrm{n} + \mathcal{T}_\mathrm{m} = (f_n + f_m) + (f_{n+1} + f_{m+1})i + (f_{n+2} + f_{m+2})j + (f_{n+3} + f_{m+3})k \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\mathrm{n}\mathcal{T}_\mathrm{m} = {} & f_n f_m - f_{n+1}f_{m+1} + f_{n+2}f_{m+2} - f_{n+3}f_{m+3} \\ & +(f_n f_{m+1} + f_{n+1}f_m + f_{n+2}f_{m+3} + f_{n+3}f_{m+2})i \\ & +(f_n f_{m+2} - f_{n+1}f_{m+3} + f_{n+2}f_m - f_{n+3}f_{m+1})j \\ & +(f_n f_{m+3} + f_{n+1}f_{m+2} + f_{n+2}f_{m+1} + f_{n+3}f_m)k \end{aligned} \tag{12}$$

şeklinde ifade edilir.

Fibonacci Tessarine dizisinin eşlenikleri i, j, k birimlerine göre,

$$\mathcal{T}_n^i = f_n - f_{n+1}i + f_{n+2}j - f_{n+3}k,$$

$$\mathcal{T}_n^j = f_n + f_{n+1}i - f_{n+2}j - f_{n+3}k, \tag{13}$$

$$\mathcal{T}_n^k = f_n - f_{n+1}i - f_{n+2}j + f_{n+3}k$$

şeklindedir.

4.2. Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine Dizileri İçin Özdeşlikler

Bu bölümde Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine dizileri için bazı özdeşlikler verilecektir. Bu özdeşliklerin ispatlarını elde edebilmek için, aşağıdaki Fibonacci eşitlikleri kullanılacaktır. [8-10];

$$f_{n+1} + f_{n-1} = l_n \tag{14}$$

$$f_{n+4} + f_n = 3f_{n+2} \tag{15}$$

$$f_{n+2} - f_{n-2} = l_n \tag{16}$$

$$f_n + f_{n+6} = 2l_{n+3} \tag{17}$$

$$f_{n+4} - f_n = l_{n+2} \tag{18}$$

$$l_{n-1} + l_{n+1} = 5f_n \tag{19}$$

$$f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1} \tag{20}$$

$$f_n f_m + f_{n+1} f_{m+1} = f_{n+m+1} \tag{21}$$

$$f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n} \tag{22}$$

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \tag{23}$$

$$f_n l_m = f_{n+m} + (-1)^m f_{n-m} \tag{24}$$

$$l_m l_n = l_{n+m} + (-1)^m l_{n-m} \tag{25}$$

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 = f_{n+2} f_{n-1} \tag{26}$$

$$f_n + 2f_{n-1} = l_n \tag{27}$$

$$f_m f_{n+1} - f_{m+1} f_n = (-1)^{\mathrm{n}} f_{m-n} \tag{28}$$

$$f_n l_n = f_{2n} \tag{29}$$

$$l_{n+4} + l_n = 3l_{n+2} \tag{30}$$

$$5f_n f_m = l_{n+m} - (-1)^m l_{n-m} \tag{31}$$

$$l_n - l_{n+4} = 5f_{n+2} \tag{32}$$

4.2.1. Özdeşlikler 1

Her $n \geq 2$ olmak üzere,

a) $\mathcal{T}_{n+2} + \mathcal{T}_{n-2} = 3\mathcal{T}_n$

b) $\mathcal{T}_{n+2} - \mathcal{T}_{n-2} = \mathcal{T}_n'$

özdeşlikleri elde edilir.

4.2.2. Özdeşlikler 2

Her $n \in \mathbb{N}$ için

a) $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1} i + \mathcal{T}_{n+2} j - \mathcal{T}_{n+3} k = (3 + 2j) l_{n+3}$

b) $\mathcal{T}_n + \mathcal{T}_{n+1} i - \mathcal{T}_{n+2} j - \mathcal{T}_{n+3} k = (1 - 2i) l_{n+3}$

c) $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1} i - \mathcal{T}_{n+2} j + \mathcal{T}_{n+3} k = -5 f_{n+3}$

özdeşlikleri sağlanır.

4.2.3. Özdeşlikler 3

Her $n \in \mathbb{N}$ için, Fibonacci Tessarine dizisinin sırası ile i, j, k birimlerine göre eşlenikleri $\mathcal{T}_n^i, \mathcal{T}_n^j$ ve $\mathcal{T}_n^k$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler,

a) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^i = (3 + 2j)f_{2n+3}$

b) $\mathcal{T}_n\,\mathcal{T}_n^j = (1 - 2i)f_{2n+3}$

c) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^k = -l_{2n+3} + 2k(-1)^{n+1}$

şeklinde verilebilir.

4.2.4. Özdeşlikler 4

Her $n \geq 1$ olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler,

a) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^i + \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{T}_{n-1}^i = (3 + 2j)l_{2n+2}$

b) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^j + \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{T}_{n-1}^j = (1 - 2i)l_{2n+2}$

c) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^k + \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{T}_{n-1}^k = -5f_{2n+2}$

şeklinde elde edilir.

4.2.5. Özdeşlik 5

Her $n, m \geq 1$ için,

$\mathcal{T}_n\mathcal{T}_m + \mathcal{T}_{n+1}\mathcal{T}_{m+1} = (3 + 6i + 2j + 4k)f_{n+m+4}$

olarak bulunur.

4.2.6. Özdeşlikler 6

Her $n \geq 1$ olmak üzere,

a) $\mathcal{T}_n^2 + \mathcal{T}_{n+1}^2 = (-3 + 6i - 2j + 4k)f_{2n+4}$

b) $\mathcal{T}_{n+1}^2 - \mathcal{T}_{n-1}^2 = (-3 + 6i - 2j + 4k) f_{2n+3}$

özdeşlikleri yazılabilir.

4.2.7. Özdeşlik 7

Her $n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine dizileri için *Cassini's* özdeşlikleri,

a) $\mathcal{T}_{n+1}\mathcal{T}_{n-1} - \mathcal{T}_n{}^2 = (-1)^n(2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$

b) $\mathcal{T}'_{n+1}\,\mathcal{T}'_{n-1} - (\mathcal{T}'_n)^2 = 5(-1)^n(2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$

biçimindedir.

4.2.8. Özdeşlik 8

Her $n, m \geq 0$ için *D'ocagnes* özdeşliği,

$\mathcal{T}_m\mathcal{T}_{n+1} - \mathcal{T}_{m+1}\mathcal{T}_n = (-1)^m(-4 + 2i - 6j + k) f_{n-m}$

şeklinde verilebilir.

4.2.9. Özdeşlikler 9

Her $n \geq 0$ için, $\mathcal{T}_{-n}$, $\mathcal{T}'_{-n}$ sırasıyla *negatif Fibonacci Tessarine* ve *negatif Lucas Tessarine* dizileri olsun,

a) $\mathcal{T}_{-n} = (-1)^{n+1}\mathcal{T}_n + (-1)^n l_n(i + j + 2k)$

b) $\mathcal{T}'_{-n} = (-1)^n\mathcal{T}'_n + (-1)^{n+1}5 f_n(i - j + 2k)$

özdeşlikleri elde edilir.

4.2.10. Özdeşlikler 10

Her $n \geq 1$ olmak üzere Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine dizileri için *Binet Formülleri,*

$\bar{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\bar{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ olmak üzere

a) $$\mathcal{T}_n = \frac{\bar{\alpha}\alpha^{\mathrm{n}} - \bar{\beta}\beta^{\mathrm{n}}}{\alpha - \beta}$$

b) $\mathcal{T}_n' = \bar{\alpha}\alpha^{\mathrm{n}} + \bar{\beta}\beta^{\mathrm{n}}$

şeklindedir.

4.3. Özdeşliklerin İspatları

Bu bölümde elde edilen özdeşliklerin ispatları Fibonacci ve Lucas eşitlikleri kullanılarak yapılacaktır.

4.3.1. Özdeşlikler 1 in İspatı

a) $\mathcal{T}_{n+2} + \mathcal{T}_{n-2}$

$= (f_{n+2} + f_{n+3}i + f_{n+4}j + f_{n+5}k) + (f_{n-2} + f_{n-1}i + f_nj + f_{n+1}k)$

$= (f_{n+2} + f_{n-2}) + (f_{n+3} + f_{n-1})i + (f_{n+4} + f_n)j + (f_{n+5} + f_{n+1})k$

biçimindedir. Burada (15) eşitliğinde n yerine $n-2, n-1, n+1$ yazılırsa,

$= 3f_n + 3f_{n+1}i + 3f_{n+2}j + 3f_{n+3}k$

$= 3\mathcal{T}_n$

olur ve ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}_{n+2} - \mathcal{T}_{n-2}$

$= (f_{n+2} + f_{n+3}i + f_{n+4}j + f_{n+5}k) - (f_{n-2} + f_{n-1}i + f_nj + f_{n+1}k)$

$= (f_{n+2} - f_{n-2}) + (f_{n+3} - f_{n-1})i + (f_{n+4} - f_n)j + (f_{n+5} - f_{n+1})$

olarak elde edilir. Burada (16) eşitliğinde n yerine $n+1, n+2, n+3$ yazılırsa,

$$= l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k$$

$$= \mathcal{T}'_n$$

olduğunu ispatlamış oluruz.

4.3.2. Özdeşlikler 2 nin İspatı

a) $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1}i + \mathcal{T}_{n+2}j - \mathcal{T}_{n+3}k$

$$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k) - (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)i$$

$$+(f_{n+2} + f_{n+3}i + f_{n+4}j + f_{n+5}k)j - (f_{n+3} + f_{n+4}i + f_{n+5}j + f_{n+6}k)k$$

$$= f_n + f_{n+2} + f_{n+4} + f_{n+6} + (f_{n+1} - f_{n+1} + f_{n+5} - f_{n+5})i$$

$$+2(f_{n+2} + f_{n+4})j + (f_{n+3} - f_{n+3} + f_{n+3} - f_{n+3})k$$

$$= f_n + f_{n+2} + f_{n+4} + f_{n+6} + 2(f_{n+2} + f_{n+4})j$$

$$= (f_n + f_{n+6}) + (f_{n+4} + f_{n+2}) + 2(f_{n+4} + f_{n+2})j$$

şeklinde elde edilir. Burada (14) eşitliğinde n yerine $n+3$ yazılır ve (17) eşitliği de kullanılırsa,

$$= 2l_{n+3} + l_{n+3} + 2(l_{n+3})j$$

$$= 3l_{n+3} + 2jl_{n+3}$$

$$= (3 + 2j)l_{n+3}$$

böylece ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}_n + \mathcal{T}_{n+1}i - \mathcal{T}_{n+2}j - \mathcal{T}_{n+3}k$

$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k) + (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)i$

$\quad -(f_{n+2} + f_{n+3}i + f_{n+4}j + f_{n+5}k)j - (f_{n+3} + f_{n+4}i + f_{n+5}j + f_{n+6}k)k$

$= f_n - f_{n+2} - f_{n+4} + f_{n+6} + (f_{n+1} + f_{n+1} - f_{n+5} - f_{n+5})i$

$\quad +(f_{n+2} + f_{n+4} - f_{n+2} - f_{n+4})j + (-f_{n+3} + f_{n+3} - f_{n+3} + f_{n+3})k$

$= f_n - f_{n+2} - f_{n+4} + f_{n+6} + 2(f_{n+1} - f_{n+5})i$

$= f_n + f_{n+6} - (f_{n+4} + f_{n+2}) - 2(f_{n+5} - f_{n+1})i$

olarak bulunur. Burada (14), ve (16) eşitliklerinde n yerine $n+3$ yazılır ve (17) eşitliği de kullanılırsa,

$= 2l_{n+3} - l_{n+3} - 2(l_{n+3})i$

$= l_{n+3} - 2il_{n+3}$

$= (1-2i)l_{n+3}$

şeklinde istenen elde edilir.

c) $\mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1}i - \mathcal{T}_{n+2}j + \mathcal{T}_{n+3}k$

$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k) - (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)i$

$\quad -(f_{n+2} + f_{n+3}i + f_{n+4}j + f_{n+5}k)j + (f_{n+3} + f_{n+4}i + f_{n+5}j + f_{n+6}k)k$

$$= f_n + f_{n+2} - f_{n+4} - f_{n+6} + (f_{n+1} - f_{n+1} - f_{n+5} + f_{n+5})i$$

$$+(f_{n+2} + f_{n+4} - f_{n+2} - f_{n+4})j + (f_{n+3} - f_{n+3} - f_{n+3} + f_{n+3})k$$

$$= f_n + f_{n+2} - f_{n+4} - f_{n+6}$$

$$= -(f_{n+4} - f_n) - (f_{n+6} - f_{n+2})$$

şeklinde bulunur. Burada (18) eşitliğinde n yerine $n+2$ yazılırsa,

$$= -l_{n+2} - l_{n+4}$$

$$= -(l_{n+2} + l_{n+4})$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak (19) eşitliğinde n yerine $n+3$ yazılırsa,

$$= -5f_{n+3}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4.3.3. Özdeşlikler 3 ün İspatı

Özdeşlikler 3 ün ispatında (12) ve (13) eşitliklerinden yararlanılacaktır.

a) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^i = (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n - f_{n+1}i + f_{n+2}j - f_{n+3}k)$

$$= f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + (-f_nf_{n+1} + f_{n+1}f_n - f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+2})i$$

$$+2(f_nf_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3})j + (-f_nf_{n+3} + f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+3}f_n)k$$

$$= (f_n^2 + f_{n+1}^2) + (f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) + 2(f_nf_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3})j$$

olduğu görülür. Burada (20) eşitliğinde n yerine $n+2$, (21) eşitliğinde n yerine n, m yerine $n+2$ yazılırsa,

$$= (f_{2n+1} + f_{2n+5}) + 2(f_{2n+3})j$$

$= (f_{2n+5} + f_{2n+1}) + 2jf_{2n+3}$

sonucu elde edilir. Son olarak (15) eşitliğinde n yerine $2n+1$ yazılırsa,

$= 3f_{2n+3} + 2jf_{2n+3}$

$= (3+2j)f_{2n+3}$

olduğundan istenen sonuç elde edilir.

b) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^j = (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n + f_{n+1}i - f_{n+2}j - f_{n+3}k)$

$= f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+2}f_{n+3})i$

$+ (-f_nf_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3} + f_nf_{n+2} - f_{n+3}f_{n+1})j$

$+(-f_nf_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+3}f_n)k$

$= f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+2}f_{n+3})i$

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+2}f_{n+3})i$

şeklindedir. Burada (1) eşitliği kullanırsa,

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+2}(f_{n+2} + f_{n+1})i$

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+2}^2 - f_{n+2}f_{n+1})i$

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(f_nf_{n+1} - (f_{n+1} + f_n)f_{n+1} - f_{n+2}^2)\, i$

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(f_nf_{n+1} - f_{n+1}^2 - f_nf_{n+1} - f_{n+2}^2)\, i$

$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2 + 2(-f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2)i$

$$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + (f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2) - 2(f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)i$$

elde edilir. Aynı şekilde (20) eşitliğinde n yerine $n+1$ ve (22) eşitliğinde ise n yerine $n+1$ ve n yerine $n+2$ yazılırsa,

$$= -f_{2n+2} + f_{2n+4} - 2if_{2n+3}$$

şeklindedir. Burada işleme devam edilir (1) eşitliği bir daha kullanırsa,

$$= -f_{2n+2} + (f_{2n+3} + f_{2n+2}) - 2if_{2n+3}$$

$$= f_{2n+3} - 2if_{2n+3}$$

$$= (1 - 2i)f_{2n+3}$$

elde edilerek sonuca ulaşılır.

c) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^k = (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n - f_{n+1}i - f_{n+2}j + f_{n+3}k)$

$$= f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + (-f_nf_{n+1} + f_{n+1}f_n + f_{n+2}f_{n+3} - f_{n+3}f_{n+2})i$$

$$+(-f_nf_{n+2} - f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+2}f_n + f_{n+3}f_{n+1})j + 2(f_nf_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2})k$$

$$= (f_n^2 + f_{n+1}^2) - (f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) + 2(f_nf_{n+3} - f_{n+1}f_{n+2})k$$

şeklindedir. Burada (20) eşitliğinde n yerine $n+2$ yazılır ve (1) eşitliği de kullanılırsa,

$$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2(f_n(f_{n+2} + f_{n+1}) - f_{n+1}(f_{n+1} + f_n))k$$

$$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2(f_nf_{n+2} + f_nf_{n+1} - f_{n+1}^2 - f_nf_{n+1})k$$

$$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2(f_nf_{n+2} - f_{n+1}^2)k$$

$= -(f_{2n+5} - f_{2n+1}) + 2k(f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2)$

biçimindedir. Son olarak (16) eşitliğinde n yerine $2n+3$, (23) eşitliğin de ise n yerine $n+1$ yazılırsa,

$= -l_{2n+3} + 2k(-1)^{n+1}$

şeklinde istenen sonuca ulaşılır.

4.3.4. Özdeşlikler 4 ün İspatı

a) $\mathcal{T}_n\mathcal{T}_n^i + \mathcal{T}_{n-1}\mathcal{T}_{n-1}^i$

$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n - f_{n+1}i + f_{n+2}j - f_{n+3}k)$

$+(f_{n-1} + f_n i + f_{n+1}j + f_{n+2}k)(f_{n-1} - f_n i + f_{n+1}j - f_{n+2}k)$

$= (f_n^2 + f_{n+1}^2) + (f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) + 2(f_n f_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3})j$

$+(f_{n-1}^2 + f_n^2) + (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2) + 2(f_{n-1}f_{n+1} + f_n f_{n+2})j$

olarak elde edilir. Burada (20) eşitliğinde n yerine $n+2, n-1, n+1$ yazılır ve (21) eşitliği kullanılırsa,

$= (f_{2n+1} + f_{2n+5} + 2f_{2n+3}\, j) + (f_{2n-1} + f_{2n+3} + 2f_{2n+1}\, j)$

$= (f_{2n+5} + f_{2n+1}) + 2f_{2n+3}\, j + (f_{2n+3} + f_{2n-1}) + 2f_{2n+1}\, j$

elde edilir. Son olarak (16) eşitliğinde n yerine $2n-1, 2n+1$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra (14) eşitliğinde n yerine $2n+2$ yazılırsa,

$= (3f_{2n+3} + 2jf_{2n+3}) + (3f_{2n+1} + 2jf_{2n+1})$

$= 3(f_{2n+3} + f_{2n+1}) + 2j(f_{2n+3} + f_{2n+1})$

$= 3l_{2n+2} + 2jl_{2n+2}$

$$= (3 + 2j)l_{2n+2}$$

istenen sonuç elde edilir.

b) $\mathcal{T}_n \mathcal{T}_n^j + \mathcal{T}_{n-1} \mathcal{T}_{n-1}^j$

$$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n + f_{n+1}i - f_{n+2}j - f_{n+3}k)$$

$$+(f_{n-1} + f_n i + f_{n+1}j + f_{n+2}k)(f_{n-1} + f_n i - f_{n+1}j - f_{n+2}k)$$

$$= -(f_{n+2}^2 - f_n^2) + (f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2) - 2(f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2)i$$

$$-(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) + (f_{n+2}^2 - f_n^2) - 2(f_n^2 + f_{n+1}^2)i$$

$$= (f_{n+3}^2 - f_{n+1}^2) - (f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) - 2((f_n^2 + f_{n+1}^2) + (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2))i$$

şeklinde elde edilir. Burada (20) eşitliğinde n yerine $n + 1$ ve (22) eşitliğinde n yerine $n + 2$ yazılırsa,

$$= f_{2n+4} - f_{2n} - 2(f_{2n+1} + f_{2n+3})i$$

$$= (f_{2n+4} - f_{2n}) - 2i(f_{2n+3} + f_{2n+1})$$

biçimindedir. Son olarak (18) eşitliğinde n yerine $2n$ ve (14) eşitliğinde, n yerine $2n + 2$ yazılırsa,

$$= l_{2n+2} - 2i(l_{2n+2})$$

$$= (1 - 2i)l_{2n+2}$$

olur ve ispat tamamlanır.

c) $\mathcal{T}_n \mathcal{T}_n^k + \mathcal{T}_{n-1} \mathcal{T}_{n-1}^k$

$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_n - f_{n+1}i - f_{n+2}j + f_{n+3}k)$

$+(f_{n-1} + f_n i + f_{n+1}j + f_{n+2}k)(f_{n-1} - f_n i - f_{n+1}j + f_{n+2}k)$

$= (f_n^2 + f_{n+1}^2) - (f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) + 2(f_{n+3}f_n - f_{n+1}f_{n+2})k$

$+(f_{n-1}^2 + f_n^2) - (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2) + 2(f_{n+2}f_{n-1} - f_n f_{n+1})k$

Burada (20) eşitliğinde n yerine $n+2, n-1, n+1$ yazılır ve (1) eşitliği kullanılırsa,

$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2((f_{n+2} + f_{n+1})f_n - f_{n+1}(f_{n+1} + f_n))k$

$+f_{2n-1} - f_{2n+3} + 2((f_{n+1} + f_n)f_{n-1} - f_n(f_n + f_{n-1}))k$

$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2(f_{n+2}f_n + f_{n+1}f_n - f_{n+1}f_{n+1} - f_n f_{n+1})k$

$+f_{2n-1} - f_{2n+3} + 2(f_{n+1}f_{n-1} + f_n f_{n-1} - f_n f_n - f_n f_{n-1})k$

$= f_{2n+1} - f_{2n+5} + 2(f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2)k + f_{2n-1} - f_{2n+3} + 2(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2)k$

$= -(f_{2n+5} - f_{2n+1}) + 2k(f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2) - (f_{2n+3} - f_{2n-1})$

$+2k(f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2)$

Burada işleme devam edilerek (18) eşitliğinde n yerine $2n+1, 2\,n-1$ ve (23) eşitliğinde n yerine $n+1$ yazılırsa,

$= -l_{2n+3} + 2k(-1)^{n+1} - l_{2n+1} + 2k(-1)^n$

$= -(l_{2n+1} + l_{2n+3}) + 2k((-1)^{n+1} + (-1)^n)$

olarak bulunur. Son olarak (19) eşitliğinde n yerine $2n+2$ yazılırsa,

$= -5f_{2n+2}$

olduğunu ispatlamış oluruz.

4.3.5. Özdeşlik 5 in İspatı

$\mathcal{T}_n\mathcal{T}_m + \mathcal{T}_{n+1}\mathcal{T}_{m+1}$

$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_m + f_{m+1}i + f_{m+2}j + f_{m+3}k)$

$+(f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)(f_{m+1} + f_{m+2}i + f_{m+3}j + f_{m+4}k)$

$= f_nf_m - f_{n+1}f_{m+1} + f_{n+2}f_{m+2} - f_{n+3}f_{m+3} + f_{n+1}f_{m+1} - f_{n+2}f_{m+2}$

$+f_{n+3}\ f_{m+3} - f_{n+4}f_{m+4} + (f_nf_{m+1} + f_{n+1}f_m + f_{n+2}f_{m+3} + f_{n+3}f_{m+2}$

$+f_{n+1}f_{m+2} + f_{n+2}f_{m+1} + f_{n+3}f_{m+4} + f_{n+4}f_{m+3})i + (f_{n+2}f_m + f_nf_{m+2}$

$-f_{n+1}f_{m+3} - f_{n+3}f_{m+1} + f_{n+1}f_{m+3} - f_{n+2}f_{m+4} + f_{n+3}f_{m+1} - f_{n+4}f_{m+2})j$

$+(f_nf_{m+3} + f_{n+3}f_m + f_{n+1}f_{m+2} + f_{n+2}f_{m+1} + f_{n+1}f_{m+4} + f_{n+4}f_{m+1}$

$+f_{n+2}f_{m+3} + f_{n+3}f_{m+2})k$

şeklinde elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$= (f_nf_m - f_{n+4}f_{m+4}) + ((f_nf_{m+1} + f_{n+1}f_{m+2}) + (f_{n+1}f_m + f_{n+2}f_{m+1})$

$+(f_{n+2}f_{m+3} + f_{n+3}f_{m+4}) + (f_{n+3}f_{m+2} + f_{n+4}f_{m+3}))i + (f_{n+2}f_m$

$+f_{m+2}f_n - f_{m+4}f_{n+2} - f_{n+4}f_{m+2})j + ((f_nf_{m+3} + f_{n+1}f_{m+4}) + (f_{n+3}f_m$

$+f_{n+4}f_{m+1}) + (f_{n+1}f_{m+2} + f_{n+2}f_{m+3}) + (f_{n+2}f_{m+1} + f_{n+3}f_{m+2}))k$

Burada (31) eşitliği ve (21) eşitliği kullanılırsa,

$$= \frac{1}{5}(l_{n+m} - (-1)^m l_{n-m} - l_{n+m+8} + (-1)^{m+4} l_{n-m}) + 2(f_{n+m+2}$$

$$+f_{n+m+6})i + \frac{1}{5}(l_{n+m+2} - (-1)^m l_{n-m+2} + l_{n+m+2} - (-1)^n l_{m-n+2}$$

$$-l_{n+m+6} + (-1)^{n+2} l_{m-n+2} - l_{n+m+6} + (-1)^{m+2} l_{n-m+2})j$$

$$+4(f_{n+m+4})k$$

$$= \frac{1}{5}(l_{n+m} - l_{n+m+8}) + 2(f_{n+m+2} + f_{n+m+6})i + \frac{2}{5}(l_{n+m+2} - l_{n+m+6})j$$

$$+4(f_{n+m+4})k$$

Son olarak (16) eşitliğinde n yerine $n + m + 2$, (32) eşitliğinde n yerine $n + m + 2$ yazılırsa,

$$= 3f_{n+m+4} + 6f_{n+m+4}i + 2f_{n+m+4}j + 4f_{n+m+4}k$$

$$= (3 + 6i + 2j + 4k)f_{n+m+4}$$

böylece ispat tamamlanır.

4.3.6. Özdeşlikler 6 nın İspatı

a) $\mathcal{T}_n^2 + \mathcal{T}_{n+1}^2$

$$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)^2 + (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)^2$$

$$= f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + 2(f_{n+1}f_n + f_{n+2}f_{n+3})i$$

$$+2(f_{n+2}f_n - f_{n+3}f_{n+1})j + 2(f_{n+3}f_n + f_{n+2}f_{n+1})k$$

$$+f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 + 2(f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+3}f_{n+4})i$$

$$+2(f_{n+3}f_{n+1} - f_{n+4}f_{n+2})j + 2(f_{n+4}f_{n+1} + f_{n+3}f_{n+2})k$$

$$= -(f_{n+1}^2 - f_n^2) - (f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2) - (f_{n+3}^2 - f_{n+2}^2) - (f_{n+4}^2 - f_{n+3}^2)$$

$$+2((f_{n+1}f_n + f_{n+2}f_{n+1}) + (f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+4}))i$$

$$+2(f_{n+2}f_n - f_{n+4}f_{n+2} + f_{n+3}f_{n+1} - f_{n+3}f_{n+1})j$$

$$+2((f_{n+3}f_n + f_{n+4}f_{n+1}) + (f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+3}f_{n+2}))k$$

Burada (26) eşitliğinde n yerine $n+1, n+2, n+3$ yazılır ve (21) eşitliği kullanılırsa,

$$= -f_{n+2}f_{n-1} - f_{n+3}f_n - f_{n+4}f_{n+1} - f_{n+5}f_{n+2} + 2(f_{2n+2} + f_{2n+6})i$$

$$-2(f_{n+2}(f_{n+4-}f_n))j + 2(f_{2n+4} + f_{2n+4})k$$

olduğu görülür ve (18) eşitliği kullanılırsa,

$$= -f_{n+2}f_{n-1} - f_{n+3}f_n - f_{n+4}f_{n+1} - f_{n+5}f_{n+2}$$

$$+2(f_{2n+2} + f_{2n+6})i - 2(f_{n+2}l_{n+2})j + 2(f_{2n+4} + f_{2n+4})k$$

$$= -(f_{n+2}f_{n-1} + f_{n+3}f_n) - (f_{n+4}f_{n+1} + f_{n+5}f_{n+2})$$

$$+2(f_{2n+6} + f_{2n+2})i - 2(f_{n+2}l_{n+2})j + 4f_{2n+4}k$$

olarak bulunur. Burada işleme devam edilerek (21) eşitliği kullanılır, (15) eşitliğinde n yerine $2n+2$ ve (29) eşitliğinde n yerine $n+2$ yazılırsa,

$$= -f_{2n+2} - f_{2n+6} + 2(3f_{2n+4})i - 2f_{2n+4}j + 4f_{2n+4}k$$

$$= -(f_{2n+6} + f_{2n+2}) + 6f_{2n+4}i - 2f_{2n+4}j + 4f_{2n+4}$$

olarak elde edilir. Son olarak (15) eşitliğinde n yerine $2n+2$ yazılırsa,

$$= -3f_{2n+4} + 6f_{2n+4}i - 2f_{2n+4}j + 4f_{2n+4}k$$

$$= (-3 + 6i - 2j + 4k)f_{2n+4}$$

şeklinde istenen elde edilir.

b) $\mathcal{T}_{n+1}^2 - \mathcal{T}_{n-1}^2 = (\mathcal{T}_{n+1} - \mathcal{T}_{n-1})(\mathcal{T}_{n+1} + \mathcal{T}_{n-1})$

$$= ((f_{n+1} - f_{n-1}) + (f_{n+2} - f_n)i + (f_{n+3} - f_{n+1})j + (f_{n+4} - f_{n+2})k)$$

$$((f_{n+1} + f_{n-1}) + (f_{n+2} + f_n)i + (f_{n+3} + f_{n+1})j + (f_{n+4} + f_{n+2})k)$$

Burada (1) eşitliği kullanılır ve (14) eşitliğinde $n+1, n+2, n+3$ yazılırsa,

$$= ((f_n + f_{n-1}) - f_{n-1} + ((f_{n+1} + f_n) - f_n)i + ((f_{n+2} + f_{n+1}) - f_{n+1})j$$

$$+((f_{n+3} + f_{n+2}) - f_{n+2}))k\ (l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k)$$

$$= (f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k)$$

$$= f_n l_n - f_{n+1}l_{n+1} + f_{n+2}l_{n+2} - f_{n+3}l_{n+3} + (f_n l_{n+1} + f_{n+1}l_n + f_{n+2}l_{n+3}$$

$$+f_{n+3}l_{n+2})i + (f_n l_{n+2} + f_{n+2}l_n - f_{n+1}l_{n+3} - f_{n+3}l_{n+1})j$$

$+(f_n l_{n+3} + f_{n+3} l_n + f_{n+2} l_{n+1} + f_{n+1} l_{n+2})k$

Burada işleme devam edilerek (29) eşitliğinde n yerine $n+1, n+2, n+3$ yazılır ve (24) eşitliği kullanılırsa,

$= f_{2n} - f_{2n+2} + f_{2n+4} - f_{2n+6} + (f_{2n+1} + (-1)^{n+1} f_{-1} + f_{2n+1} + (-1)^n f_1$

$+f_{2n+5} + (-1)^{n+3} f_{-1} + f_{2n+5} + (-1)^{n+2} f_1)i + (f_{2n+2} + (-1)^{n+2} f_{-2}$

$+f_{2n+2} + (-1)^n f_2 - f_{2n+4} - (-1)^{n+3} f_{-2} - f_{2n+4} - (-1)^{n+1} f_2)j$

$+(f_{2n+3} + (-1)^{n+3} f_{-3} + f_{2n+3} + (-1)^n f_3 + f_{2n+3} + (-1)^{n+1} f_1$

$+f_{2n+3} + (-1)^{n+2} f_{-1})k$

Aynı şekilde (1) eşitliği ve (2) eşitliği kullanılırsa,

$= f_{2n} - (f_{2n+1} + f_{2n}) + f_{2n+4} - (f_{2n+5} + f_{2n+4}) + (f_{2n+1} - (-1)^n f_1$

$+f_{2n+1} + (-1)^n f_1 + f_{2n+5} - (-1)^n f_1 + f_{2n+5} + (-1)^n f_1)i + (f_{2n+2}$

$-(-1)^n f_2 + f_{2n+2} + (-1)^n f_2 - f_{2n+4} + (-1)^{n+1} f_2 - f_{2n+4}$

$-(-1)^{n+1} f_2)j + (f_{2n+3} - (-1)^n f_3 + f_{2n+3} + (-1)^n f_3 + f_{2n+3} - (-1)^n f_1$

$+f_{2n+3} + (-1)^n f_1)k$

$= -(f_{2n+1} + f_{2n+5}) + 2(f_{2n+1} + f_{2n+5})i + 2(f_{2n+2} - f_{2n+4})j + 4f_{2n+3}k$

Son olarak (15) eşitliğinde n yerine $2n+1$ yazılır ve bir daha (1) eşitliği kullanılırsa,

$= -3f_{2n+3} + 2(3f_{2n+3})i - 2(f_{2n+2} - (f_{2n+3} + f_{2n+2}))j + 4f_{2n+3}k$

$= -3f_{2n+3} + 6f_{2n+3}i - 2f_{2n+3}j + 4f_{2n+3}k$

$= (-3 + 6i - 2j + 4k)f_{2n+3}$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4.3.7. Özdeşlikler 7 nin İspatı

a) $\mathcal{T}_{n+1}\mathcal{T}_{n-1} = (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)(f_{n-1} + f_n i + f_{n+1}j + f_{n+2}k)$

$= f_{n-1}f_{n+1} - f_n f_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3} - f_{n+2}f_{n+4} + (f_n f_{n+1} + f_{n-1}f_{n+2}$

$+f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+1}f_{n+4})i + (f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}f_{n-1} - f_{n+4}f_n)j$

$\mathcal{T}_n^2 = (f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)(f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)$

$= f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + 2(f_n f_{n+1} + f_{n+2}f_{n+3})i$

$+2(f_n f_{n+2} - f_{n+1}f_{n+3})j + 2(f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+3}f_n)k$

$\mathcal{T}_{n+1}\mathcal{T}_{n-1} - \mathcal{T}_n^2 = (f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2) - (f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2) + (f_{n+3}f_{n+1} - f_{n+2}^2)$

$-(f_{n+4}f_{n+2} - f_{n+3}^2) + \big((f_{n-1}f_{n+2} - f_n f_{n+1}) + (f_{n+1}f_{n+4} - f_{n+2}f_{n+3})\big)i$

$+(-(f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2) + (f_{n+3}f_{n+1} - f_{n+2}^2) + (f_{n-1}f_{n+3} - f_n f_{n+2})$

$+(f_{n+3}f_{n+1} - f_{n+4}f_n))j + (f_{n-1}f_{n+4} - f_n f_{n+3})k$

Burada (23) eşitliğinde n yerine $n+1, n+2, n+3$ ve (28) eşitliği kullanılırsa,

$$= (-1)^n - (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} - (-1)^{n+3} + ((-1)^{n+1} f_{-2} + (-1)^{n+3} f_{-2})i$$

$$+((-1)^n + (-1)^n + (-1)^{n+2} f_{-3} + (-1)^n f_3)j + (-1)^{n+3} f_{-4} k$$

şeklindedir. Aynı şekilde (2) eşitliği kullanılır ve $f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3$ değerleri yerine yazılırsa,

$$= 4(-1)^n + 2(-1)^n f_2 i + (2(-1)^n + (-1)^n f_3 + (-1)^n f_3)j + (-1)^n f_4 k$$

$$= 4(-1)^n + 2(-1)^n i + (2(-1)^n + 2(-1)^n + 2(-1)^n)j + 3(-1)^n k$$

$$= (-1)^n (4 + 2i + 6j + 3k)$$

$$= (-1)^n (2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir. Burada $\mathcal{T}_1 = 1 + i + 2j + 3k$ Fibonacci Tessarine sayısıdır.

Örnek 4.1. $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ Fibonacci Tessarine sayıları olsun.

$$\mathcal{T}_0 = i + j + 2k,$$

$$\mathcal{T}_1 = 1 + i + 2j + 3k,$$

$$\mathcal{T}_2 = 1 + 2i + 3j + 5k,$$

$$\mathcal{T}_3 = 2 + 3i + 5j + 8k,$$

(8) ve (12) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\mathcal{T}_2\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_1^2 = (\mathrm{i} + \mathrm{j} + 2\mathrm{k})(1 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 5\mathrm{k}) - (1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 3\mathrm{k})^2$$

$$= -(4 + 2\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 3\mathrm{k})$$

$$= -(2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$$

$$\mathcal{T}_3\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_2^2 = (\mathrm{i} + \mathrm{j} + 2\mathrm{k})(1 + 2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 5\mathrm{k}) - (1 + \mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 3\mathrm{k})^2$$

$$= (4 + 2\mathrm{i} + 6\mathrm{j} + 3\mathrm{k})$$

$$= (2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$$

olarak elde edilir.

b) $\mathcal{T}'_{n+1}\,\mathcal{T}'_{n-1} = (l_{n+1} + l_{n+2}i + l_{n+3}j + l_{n+4}k)(l_{n-1} + l_n i + l_{n+1}j + l_{n+2}k)$

$$= l_{n+1}l_{n-1} - l_{n+2}l_n + l_{n+3}l_{n+1} - l_{n+4}l_{n+2} + (l_n l_{n+1} + l_{n-1}l_{n+2}$$

$$+ l_{n+2}l_{n+3} + l_{n+1}l_{n+4})i + (l_{n+1}^2 - l_{n+2}^2 + l_{n+3}l_{n-1} - l_{n+4}l_n)j$$

$$+ (l_{n+1}l_{n+2} + l_{n+4}l_{n-1} + l_{n+2}l_{n+1} + l_n l_{n+3})k$$

$$\mathcal{T}'_n\,\mathcal{T}'_n = (l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k)(l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k)$$

$$= l_n^2 - l_{n+1}^2 + l_{n+2}^2 - l_{n+3}^2 + 2(l_n l_{n+1} + l_{n+2}l_{n+3})i$$

$$+ 2(l_n l_{n+2} - l_{n+1}l_{n+3})j + 2(l_{n+1}l_{n+2} + l_{n+3}l_n)k$$

$$\mathcal{T}'_{n+1}\,\mathcal{T}'_{n-1} - \mathcal{T}'_n\,\mathcal{T}'_n = l_{n-1}l_{n+1} - l_n^2 - l_n l_{n+2} + l_{n+1}^2 + l_{n+1}l_{n+3} - l_{n+2}^2$$

$$- l_{n+2}l_{n+4} + l_{n+3}^2 + (l_{n-1}l_{n+2} - l_{n+2}l_{n+3} - l_n l_{n+1} + l_{n+1}l_{n+4})i$$

$$+ (l_{n+1}l_{n+3} - l_{n+2}^2 - l_n l_{n+2} + l_{n+1}^2 + l_{n-1}l_{n+3} + l_{n+1}l_{n+3}$$

$$- l_n l_{n+2} - l_n l_{n+4})j + (l_{n-1}l_{n+4} - l_n l_{n+3})k$$

Burada (25) eşitliği kullanılır ve $l_0 = 2,\ l_1 = 1,\ l_2 = 3,\ l_3 = 4,\ l_4 = 7,\ l_5 = 11$ değerleri yerine yazılırsa,

$$= 4(-1)^{n+1}l_0 + 4(-1)^{n+1}l_2 + (2(-1)^{n+1}l_3 + 2(-1)^{n+1}l_1)i$$

$$+(2(-1)^{n+1}l_0 + 4(-1)^{n+1}l_2 + 2(-1)^{n+1}l_4)j$$

$$+((-1)^{n+1}l_3 + (-1)^{n+1}l_5)k$$

$$= 20(-1)^{n+1} + 10(-1)^{n+1}i + 30(-1)^{n+1}j + 15(-1)^{n+1}k$$

$$= (-1)^{n+1}(20 + 10i + 30j + 15k)$$

$$= 5(-1)^{n+1}(4 + 2i + 6j + 3k)$$

$$= 5(-1)^{\mathrm{n}+1}(2\mathcal{T}_1 + 2 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{k})$$

elde edilerek sonuca ulaşılır.

4.3.8. Özdeşlik 8 in İspatı

$$\mathcal{T}_m\mathcal{T}_{n+1} - \mathcal{T}_{m+1}\mathcal{T}_n$$

$$= (f_m + f_{m+1}i + f_{m+2}j + f_{m+3}k)(f_{n+1} + f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)$$

$$-(f_{m+1} + f_{m+2}if_{m+3}j + f_{m+4}k)(f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)$$

$$= f_mf_{n+1} - f_{m+1}f_{n+2} + f_{m+2}f_{n+3} - f_{m+3}f_{n+4} - f_{m+1}f_n + f_{m+2}f_{n+1}$$

$$-f_{m+3}f_{n+2}+f_{m+4}f_{n+3}) + (f_mf_{n+2} + f_{m+1}f_{n+1} + f_{m+2}f_{n+4} + f_{m+3}f_{n+3}$$

$$-f_{m+1}f_{n+1} - f_{m+2}f_n - f_{m+3}f_{n+3} - f_{m+4}f_{n+2})i + (f_mf_{n+3} - f_{m+1}f_{n+4}$$

$$+f_{m+2}f_{n+1} - f_{m+3}f_{n+2} - f_{m+3}f_n - f_{m+1}f_{n+2} + f_{m+2}f_{n+3} + f_{m+4}f_{n+1})j$$

$$+(f_m f_{n+4} + f_{m+1} f_{n+3} + f_{m+2} f_{n+2} + f_{m+3} f_{n+1} - f_{m+1} f_{n+3} - f_{m+2} f_{n+2}$$

$$-f_{m+3} f_{n+1} - f_{m+4} f_n)k$$

olarak bulunur ve gerekli düzenlenmeler yapılırsa,

$$= (f_m f_{n+1} - f_{m+1} f_n - f_{m+1} f_{n+2} + f_{m+2} f_{n+1} + f_{m+2} f_{n+3} - f_{m+3} f_{n+2}$$

$$-f_{m+3} f_{n+4} + f_{m+4} f_{n+3}) + (f_m f_{n+2} + f_{m+2} f_{n+4} - f_{m+2} f_n - f_{m+4} f_{n+2})i$$

$$+(f_m f_{n+3} - f_{m+1} f_{n+2} - f_{m+1} f_{n+4} + f_{m+2} f_{n+3} + f_{m+2} f_{n+1} - f_{m+3} f_n$$

$$-f_{m+3} f_{n+2} + f_{m+4} f_{n+1})j + (f_m f_{n+4} - f_{m+4} f_n)k$$

Burada (31) eşitliği kullanılırsa,

$$= \frac{1}{5}(-4(-1)^m l_{n-m+1} - 4(-1)^m l_{n-m-1} + (2(-1)^m l_{n-m-2} - 2(-1)^m$$

$$l_{n-m+2})i + (-2(-1)^m l_{n-m+3} - 2(-1)^m l_{n-m+1} - 2(-1)^m l_{n-m-3}$$

$$-2(-1)^m l_{n-m-1})j + ((-1)^m l_{n-m-4} - (-1)^m l_{n-m+4})k)$$

$$= \frac{1}{5}\big(-4(-1)^m (l_{n-m-1} + l_{n-m+1}) + (2(-1)^m (l_{n-m-2} - l_{n-m+2})\big)i$$

$$+(-2(-1)^m (l_{n-m+1} + l_{n-m+3}) - 2(-1)^m (l_{n-m-1} + l_{n-m-3}))j$$

$$+((-1)^m (l_{n-m-4} - l_{n-m+4}))k)$$

Son olarak (19), (32) ve (15) eşitlikleri kullanılırsa,

$$= \frac{1}{5}(-20(-1)^m f_{n-m} + 10(-1)^m f_{n-m} i - 10(-1)^m (f_{n-m+2} + f_{n-m-2}) j$$

$$+5(-1)^m f_{n-m} k)$$

$$= \frac{1}{5}(-20(-1)^m f_{n-m} + 10(-1)^m f_{n-m} i - 30(-1)^m f_{n-m} j$$

$$+5(-1)^m f_{n-m} k)$$

$$= (-1)^m (-4 + 2i - 6j + k) f_{n-m}$$

şeklinde istenen sonuca ulaşılır.

4.3.9. Özdeşlikler 9 un İspatı

a) $\mathcal{T}_{-n} = f_{-n} + f_{-n+1} i + f_{-n+2} j + f_{-n+3} k$ *negatif Fibonacci Tessarine* dizisi olsun.

$$\mathcal{T}_{-n} = f_{-n} + f_{-(n-1)} i + f_{-(n-2)} j + f_{-(n-3)} k$$

Burada (2) eşitliği kullanılırsa,

$$= (-1)^{n+1} f_n + (-1)^n f_{n-1} i + (-1)^{n+1} f_{n-2} j + (-1)^n f_{n-3} k$$

$$= (-1)^{n+1}(f_n + f_{n+1} i + f_{n+2} j + f_{n+3} k) - (-1)^{n+1} f_{n+1} i - (-1)^{n+1} f_{n+2} j$$

$$-(-1)^{n+1} f_{n+3} k + (-1)^n f_{n-1} i + (-1)^{n+1} f_{n-2} j + (-1)^n f_{n-3} k$$

$$= (-1)^{n+1} \mathcal{T}_n + (-1)^n (f_{n+1} + f_{n-1}) i + (-1)^n (f_{n+2} - f_{n-2}) j + (-1)^n (f_{n+3}$$

$$+f_{n-3}) k$$

şeklinde bulunur. Son olarak (14) ve (16) eşitlikleri kullanılır ve (17) eşitliğinde n yerine $n-3$ yazılırsa,

$$= (-1)^{n+1}\mathcal{T}_n + (-1)^n l_n(i + j + 2k)$$

istenen sonuç elde edilir.

b) $\mathcal{T}'_{-n} = l_{-n} + l_{-n+1}i + l_{-n+2}j + l_{-n+3}k$ *negatif Lucas Tessarine* dizisi olsun.

$$\mathcal{T}_{-n} = l_{-n} + l_{-(n-1)}i + l_{-(n-2)}j + l_{-(n-3)}k$$

Burada (7) eşitliği kullanılırsa

$$= (-1)^n l_n + (-1)^{n-1} l_{n-1}i + (-1)^n l_{n-2}j + (-1)^{n-1} l_{n-3}k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}(l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k) - (-1)^{\mathrm{n}} l_{n+1}i - (-1)^{\mathrm{n}} l_{n+2}j$$

$$-(-1)^{\mathrm{n}} l_{n+3}k + (-1)^{n-1} l_{n-1}i + (-1)^n l_{n-2}j + (-1)^{n-1} l_{n-3}k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}'_n + (-1)^{\mathrm{n+1}}((l_{n+1} + l_{n-1})i + (l_{n+2} - l_{n-2})j + (l_{n+3} + l_{n-3})k)$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}'_n + (-1)^{\mathrm{n+1}}((l_{n+1} + l_{n-1})i - (l_{n-2} - l_{n+2})j + (l_{n+3} + l_{n-3})k)$$

olduğu görülür. Burada öncelikle (19) eşitliği kullanılır ve (32) eşitliğinde n yerine $n-2$ yazılarak işleme devam edilir ve sonrasında sırasıyla (27) eşitliğinde n yerine $n+3$ ve $\mathrm{n}-3$, (17) eşitliğinde n yerine $n-3$ ve $n-4$, (29) eşitliğinde n yerine $n-1$ yazılırsa,

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}'_n + (-1)^{\mathrm{n+1}} 5 f_n(i - j)$$

$$+(-1)^{\mathrm{n+1}}(f_{n+3} + 2f_{n+2} + f_{n-3} + 2f_{n-4})k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}'_n + (-1)^{\mathrm{n+1}} 5 f_n(i - j)$$

$$+(-1)^{\mathrm{n+1}}(f_{n-3} + f_{n+3} + 2(f_{n-4} + f_{n+2}))k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}_n' + (-1)^{\mathrm{n}+1}5f_n(i-j) + (-1)^{\mathrm{n}+1}(2l_n + 4l_{n-1})k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}_n' + (-1)^{\mathrm{n}+1}5f_n(i-j) + (-1)^{\mathrm{n}+1}(2(l_{n-1} + 2l_n))k$$

$$= (-1)^{\mathrm{n}}\mathcal{T}_n' + (-1)^{\mathrm{n}+1}5f_n(i-j+2k)$$

olur ve ispat tamamlanır.

4.3.10. Özdeşlikler 10 un İspatı

a) Burada (4) eşitliği kullanılırsa

$$= \frac{\alpha^{\mathrm{n}} - \beta^{\mathrm{n}}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{\mathrm{n}+1} - \beta^{\mathrm{n}+1}}{\alpha - \beta}i + \frac{\alpha^{\mathrm{n}+2} - \beta^{\mathrm{n}+2}}{\alpha - \beta}j + \frac{\alpha^{\mathrm{n}+3} - \beta^{\mathrm{n}+3}}{\alpha - \beta}k$$

$$= \frac{(\alpha^{\mathrm{n}}(1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k) - \beta^{\mathrm{n}}(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)}{\alpha - \beta}$$

$$= \frac{\alpha^{\mathrm{n}}\bar{\alpha} - \beta^{\mathrm{n}}\bar{\beta}}{\alpha - \beta} = \frac{\bar{\alpha}\alpha^{\mathrm{n}} - \bar{\beta}\beta^{\mathrm{n}}}{\alpha - \beta}$$

olduğunu ispatlamış oluruz.

b) Burada (6) eşitliği kullanılırsa

$$= \alpha^{\mathrm{n}} + \beta^{\mathrm{n}} + (\alpha^{\mathrm{n}+1} + \beta^{\mathrm{n}+1})i + (\alpha^{\mathrm{n}+2} + \beta^{\mathrm{n}+2})j + (\alpha^{\mathrm{n}+3} + \beta^{\mathrm{n}+3})k$$

$$= \alpha^{\mathrm{n}}(1 + \alpha i + \alpha^2 j + \alpha^3 k) + \beta^{\mathrm{n}}(1 + \beta i + \beta^2 j + \beta^3 k)$$

$$= \alpha^{\mathrm{n}}\bar{\alpha} + \beta^{\mathrm{n}}\bar{\beta} = \bar{\alpha}\alpha^{\mathrm{n}} + \bar{\beta}\beta^{\mathrm{n}}$$

böylece ispat tamamlanır.

5. FİBONACCİ TESSARİNE Q-MATRİSİ

Tanım 5.1. Fibonacci Q-matrisi ve Lucas $\mathrm{Q_L}$-matrisi, [13-15];

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathrm{Q_L} = \begin{bmatrix} l_2 & l_1 \\ l_1 & l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

şeklindedir. $n.inci$ Fibonacci Q-matrisi ve $n.inci$ Lucas $\mathrm{Q_L}$-matrisi,

$$\mathrm{Q^n} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathrm{Q_L^n} = \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n \\ l_n & l_{n-1} \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilir. Burada

a) $|\mathrm{Q^n}| = |\mathrm{Q}|^{\mathrm{n}}$

İspat.

Tanım 5.1.'den

$$|\mathrm{Q^n}| = \left|\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}\right| = f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^{\mathrm{n}} \text{ ve}$$

$$|\mathrm{Q}|^{\mathrm{n}} = \left|\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right|^{\mathrm{n}} = (-1)^{\mathrm{n}} \text{ dir.}$$

Böylece $|\mathrm{Q^n}| = |\mathrm{Q}|^{\mathrm{n}}$ dir.

b) $\mathrm{Q^nQ^{n+1}} = \mathrm{Q^{2n+1}}$

İspat.

$$\mathrm{Q^nQ^{n+1}} = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1}f_{n+2} + f_nf_{n+1} & f_{n+1}f_{n+1} + f_nf_n \\ f_nf_{n+2} + f_{n-1}f_{n+1} & f_nf_{n+1} + f_{n-1}f_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} l_{2n+1} + l_{2n+3} & l_{2n} + l_{2n+2} \\ l_{2n} + l_{2n+2} & l_{2n-1} + l_{2n+1} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5f_{2n+2} & 5f_{2n+1} \\ 5f_{2n+1} & 5f_{2n} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} f_{2n+2} & f_{2n+1} \\ f_{2n+1} & f_{2n} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

c) $\mathrm{Q^m Q^{n-1}} = \mathrm{Q^{n+m-1}}$

İspat.

$$\mathrm{Q^m Q^{n-1}} = \begin{bmatrix} f_{m+1} & f_m \\ f_m & f_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1} & f_{m+1}f_{n-1} + f_m f_{n-2} \\ f_m f_n + f_{m-1}f_{n-1} & f_m f_{n-1} + f_{m-1}f_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} l_{m+n+1} + l_{m+n-1} & l_{m+n} + l_{m+n-2} \\ l_{m+n} + l_{m+n-2} & l_{m+n-1} + l_{m+n-3} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5f_{m+n} & 5f_{m+n-1} \\ 5f_{m+n-1} & 5f_{m+n-2} \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} f_{m+n} & f_{m+n-1} \\ f_{m+n-1} & f_{m+n-2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Tanım 5.2. $n \geq 0$ için $n-$inci Fibonacci Q-matrisinin tersi, $\mathrm{Q^{-n}}$ şeklinde ifade edilir.

Burada $\mathrm{Q^{-n}} = \frac{1}{(-1)^{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{n+1} \end{bmatrix} = (\mathrm{Q^n})^{-1}$ dir.

5.1. Fibonacci Tessarine Q-Matris ve Lucas Tessarine Q-Matrisi

$\mathcal{T}\mathrm{Q_n}$, $\mathcal{T}\mathrm{Q'_n}$ sırasıyla $n-$inci Fibonacci Tessarine Q-matrisi ve $n-$inci Lucas Tessarine Q-matrisi olsun,

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q_n} = \mathrm{Q^n} + \mathrm{Q^{n+1}}i + \mathrm{Q^{n+2}}j + \mathrm{Q^{n+3}}k$ (33)

$$= \mathrm{Q^n}(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q^2}j + \mathrm{Q^3}k)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix} k \right)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k \right).$$

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}'_{\mathrm{n}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+1}} i + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+2}} j + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+3}} k$ (34)

$$= \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n}} (1 + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}} i + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^2 j + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^3 k)$$

$$= \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n \\ l_n & l_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 & l_1 \\ l_1 & l_0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} l_3 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} l_4 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{bmatrix} k \right)$$

$$= \begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n \\ l_n & l_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} k \right).$$

$\mathrm{n} = 1$ için,

$\mathcal{T}\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q} + \mathrm{Q}^2 i + \mathrm{Q}^3 j + \mathrm{Q}^4 k$

$$= \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} f_4 & f_3 \\ f_3 & f_2 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} f_5 & f_4 \\ f_4 & f_3 \end{bmatrix} k$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} k = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0 \end{bmatrix}$$

ve

$\mathcal{T}\mathrm{Q}'_1 = \mathrm{Q}_{\mathrm{L}} + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^2 i + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^3 j + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^4 k$

$$= \begin{bmatrix} l_2 & l_1 \\ l_1 & l_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 & l_2 \\ l_2 & l_1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} l_4 & l_3 \\ l_3 & l_2 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} l_5 & l_4 \\ l_4 & l_3 \end{bmatrix} k$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} k$$

$= \begin{bmatrix} \mathcal{T}'_2 & \mathcal{T}'_1 \\ \mathcal{T}'_1 & \mathcal{T}'_0 \end{bmatrix}$ dir.

$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}$, $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{m}}$ Fibonacci Tessarine Q-matrisleri olmak üzere,

$\mathcal{T}\mathrm{Q_n} + \mathcal{T}\mathrm{Q_m}$

$= (\mathrm{Q^n} + \mathrm{Q^m}) + (\mathrm{Q^{n+1}} + \mathrm{Q^{m+1}})i + (\mathrm{Q^{n+2}} + \mathrm{Q^{m+2}})j + (\mathrm{Q^{n+3}} + \mathrm{Q^{m+3}})k$

$= (\mathrm{Q^n} + \mathrm{Q^m})(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q^2}j + \mathrm{Q^3}k)$

$$= \left(\begin{bmatrix} f_{n+1} + f_{m+1} & f_n + f_m \\ f_n + f_m & f_{n-1} + f_{m-1} \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k\right),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\mathrm{Q_n}\mathcal{T}\mathrm{Q_m} = {} & (\mathrm{Q^nQ^m} - \mathrm{Q^{n+1}Q^{m+1}} + \mathrm{Q^{n+2}Q^{m+2}} - \mathrm{Q^{n+3}Q^{m+3}}) \\ & +(\mathrm{Q^nQ^{m+1}} + \mathrm{Q^{n+1}Q^m} + \mathrm{Q^{n+2}Q^{m+3}} + \mathrm{Q^{n+3}Q^{m+2}})i \\ & +(\mathrm{Q^nQ^{m+2}} + \mathrm{Q^{n+2}Q^m} - \mathrm{Q^{n+1}Q^{m+3}} - \mathrm{Q^{n+3}Q^{m+1}})j \\ & +(\mathrm{Q^nQ^{m+3}} + \mathrm{Q^{n+3}Q^m} + \mathrm{Q^{n+2}Q^{m+1}} + \mathrm{Q^{n+1}Q^{m+2}})k \end{aligned}$$

$= \mathrm{Q^{n+m}}(1 - \mathrm{Q^2} + \mathrm{Q^4} - \mathrm{Q^6} + 2(\mathrm{Q} + \mathrm{Q^5})i + 2(\mathrm{Q^2} - \mathrm{Q^4})j + 4\mathrm{Q^3}k)$

$$= \mathrm{Q^{n+m}}\left(\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\right) i \\ +2\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) j + 4\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k \end{matrix}\right)$$

$$= \mathrm{Q^{n+m}}\left(\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} i + 2\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} j + 4\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k\right)$$

$$= \mathrm{Q^{n+m}}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}(-3 + 6i - 2j + 4k)$$

$= \mathrm{Q^{n+m}Q^3}(-3 + 6i - 2j + 4k)$

$= \mathrm{Q^{n+m+3}}(-3 + 6i - 2j + 4k)$ dir.

5.1.1. Fibonacci Tessarine Q-Matrisinin Eşlenik Kavramı

$\mathcal{T}\mathrm{Q_n}$ Fibonacci Tessarine Q-matrisinin i, j, k birimlerine göre eşlenikleri sırası ile $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{i}$, $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{j}$, $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{k}$ olmak üzere,

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{i} = \mathrm{Q^n} - \mathrm{Q^{n+1}}i + \mathrm{Q^{n+2}}j - \mathrm{Q^{n+3}}k$

$$= \mathrm{Q^n}(1 - \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2 j - \mathrm{Q}^3 k)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} j - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k \right)$$

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{j} = \mathrm{Q^n} + \mathrm{Q^{n+1}}i - \mathrm{Q^{n+2}}j - \mathrm{Q^{n+3}}k$

$$= \mathrm{Q^n}(1 + \mathrm{Q}i - \mathrm{Q}^2 j - \mathrm{Q}^3 k)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} j - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k \right)$$

c) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{k} = \mathrm{Q^n} - \mathrm{Q^{n+1}}i - \mathrm{Q^{n+2}}j + \mathrm{Q^{n+3}}k$

$$= \mathrm{Q^n}(1 - \mathrm{Q}i - \mathrm{Q}^2 j + \mathrm{Q}^3 k)$$

$$= \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} k \right) \text{ dir.}$$

$\mathcal{T}\mathrm{Q_n}$ Fibonacci Tessarine Q-matrisinin i, j, k birimlerine göre eşlenikleri ile çarpımları,

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q_n}\mathcal{T}\mathrm{Q}_\mathrm{n}^{i}$

$$= (\mathrm{Q^n} + \mathrm{Q^{n+1}}i + \mathrm{Q^{n+2}}j + \mathrm{Q^{n+3}}k)(\mathrm{Q^n} - \mathrm{Q^{n+1}}i + \mathrm{Q^{n+2}}j - \mathrm{Q^{n+3}}k)$$

$$= \mathrm{Q^nQ^n} + \mathrm{Q^{n+1}Q^{n+1}} + \mathrm{Q^{n+2}Q^{n+2}} + \mathrm{Q^{n+3}Q^{n+3}} + 2(\mathrm{Q^nQ^{n+2}} + \mathrm{Q^{n+1}Q^{n+3}})j$$

$$= Q^{2n}(1 + Q^2 + Q^4 + Q^6) + 2Q^{2n}(Q^2 + Q^4)j$$

$$= Q^{2n}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}\right) + 2Q^{2n}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}\right)j$$

$$= Q^{2n}\begin{bmatrix}21 & 12\\12 & 9\end{bmatrix} + 2Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}j = 3Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} + 2Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}j$$

$$= (3 + 2j)Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = (3 + 2j)Q^{2n}Q_L^3$$

b) $\mathcal{T}Q_n\mathcal{T}Q_n^j$

$$= (Q^n + Q^{n+1}i + Q^{n+2}j + Q^{n+3}k)(Q^n + Q^{n+1}i - Q^{n+2}j - Q^{n+3}k)$$

$$= Q^nQ^n - Q^{n+1}Q^{n+1} - Q^{n+2}Q^{n+2} + Q^{n+3}Q^{n+3} + 2(Q^nQ^{n+1} - Q^{n+2}Q^{n+3})i$$

$$= Q^{2n}(1 - Q^2 - Q^4 + Q^6) + 2Q^{2n}(Q - Q^5)i$$

$$= Q^{2n}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}\right) + 2Q^{2n}\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{bmatrix}\right)i$$

$$= Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} - 2Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}i = Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} - 2Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}i$$

$$= (1 - 2i)Q^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} = (1 - 2i)Q^{2n}Q_L^3$$

c) $\mathcal{T}Q_n\mathcal{T}Q_n^k$

$$= (Q^n + Q^{n+1}i + Q^{n+2}j + Q^{n+3}k)(Q^n - Q^{n+1}i - Q^{n+2}j + Q^{n+3}k)$$

$$= Q^nQ^n + Q^{n+1}Q^{n+1} - Q^{n+2}Q^{n+2} - Q^{n+3}Q^{n+3} + 2(Q^nQ^{n+3} - Q^{n+1}Q^{n+2})k$$

$$= Q^{2n}(1 + Q^2 - Q^4 - Q^6)$$

$$= Q^{2n}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$= -5Q^{2n}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -5Q^{2n}Q^{3}$$

$$= -5Q^{2n+3}$$

şeklindedir.

5.2. Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine Q-Matrisleri İçin Özdeşlikler

Bu bölümde Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine Q-matrisleri için özdeşlikler verilmiştir. Sonrasında elde edilen özdeşliklerin ispatları yapılmıştır.

5.2.1. Özdeşlikler 1

Her $n \geq 2$ olmak üzere,

a) $\mathcal{T}Q_{n+2} + \mathcal{T}Q_{n-2} = 3\mathcal{T}Q_n$

b) $\mathcal{T}Q_{n+2} - \mathcal{T}Q_{n-2} = \mathcal{T}Q'_n$

özdeşlikleri elde edilir.

5.2.2. Özdeşlikler 2

Her $n \in \mathbb{N}$ için,

a) $\mathcal{T}Q_n - \mathcal{T}Q_{n+1}i + \mathcal{T}Q_{n+2}\,j - \mathcal{T}Q_{n+3}k = (3 + 2j)Q^nQ_L^3$

b) $\mathcal{T}Q_n + \mathcal{T}Q_{n+1}i - \mathcal{T}Q_{n+2}\,j - \mathcal{T}Q_{n+3}k = (1 - 2i)Q^nQ_L^3$

c) $\mathcal{T}Q_n - \mathcal{T}Q_{n+1}i - \mathcal{T}Q_{n+2}\,j + \mathcal{T}Q_{n+3}\mathrm{k} = -5Q^{n+3}$
özdeşlikleri sağlanır.

5.2.3. Özdeşlikler 3

Her $n \in \mathbb{N}$ için, Fibonacci Tessarine Q-matrisinin i, j, k birimlerine göre eşlenikleri sırası ile $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{i}, \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{j}$ ve $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{k}$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler,

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{i} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}^{i} = 5(3+2j)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}+2}$

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{j} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}^{j} = 5(1-2i)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}+2}$

c) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{k} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}^{k} = -5\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{2}$

şeklinde verilebilir.

5.2.4. Özdeşlikler 4

Her $n, m \geq 1$ için,

$$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{m}} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{m+1}} = (-3 + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 4\mathrm{k})\mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{4}$$

olarak bulunur.

5.2.5. Özdeşlikler 5

Her $n \geq 1$ olmak üzere,

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{2} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}^{2} = (-3+6i-2j+4k)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{4}$

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}^{2} - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-1}}^{2} = (-3+6i-2j+4k)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{3}$

özdeşlikleri yazılabilir.

5.3.6. Özdeşlikler 6

$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{-\mathrm{n}}$, $\mathcal{T}\mathrm{Q}'_{-\mathrm{n}}$ sırasıyla negatif Fibonacci Tessarine ve negatif Lucas Tessarine dizileri olsun ve her $n \geq 0$ için,

a) $$\mathcal{T}\mathrm{Q}_{-\mathrm{n}} = \frac{1}{(-1)^{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{-n} \\ f_{-n} & f_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0 \\ \mathcal{T}_0 & \mathcal{T}_0 + (1-i-k) \end{bmatrix}$$

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}'_{-\mathrm{n}}=\frac{1}{(-1)^{\mathrm{n}}}\begin{bmatrix} l_{n-1} & l_{-n} \\ l_{-n} & l_{n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathcal{T}_1' & \mathcal{T}_0'-2 \\ \mathcal{T}_0'-2 & \mathcal{T}_1'+(-i-3j-4k) \end{bmatrix}$

biçimindedir.

5.3. Özdeşliklerin İspatları

Bu bölümde özdeşliklerin ispatları Tessarine Q-matris özellikleri kullanılarak yapılmıştır.

5.3.1. Özdeşlikler 1 in İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}+2}+\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-2}$

$$=(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}i+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+4}j+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+5}k)+(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}i+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}j+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}k)$$

$$=(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-2})+(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1})i+(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+4}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}})j+(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+5}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1})k$$

$$=(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-2})(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

$$=\left(\begin{bmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{n-2} \\ f_{n-2} & f_{n-3} \end{bmatrix}\right)(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

$$=\left(\begin{bmatrix} f_{n+3}+f_{n-1} & f_{n+2}+f_{n-2} \\ f_{n+2}+f_{n-2} & f_{n+1}+f_{n-3} \end{bmatrix}\right)(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

biçimindedir. Burada (15) eşitliği kullanılırsa,

$$=\left(\begin{bmatrix} 3f_{n+1} & 3f_n \\ 3f_n & 3f_{n-1} \end{bmatrix}\right)(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

$$=\left(3\begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}\right)(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

$$=3\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}(1+\mathrm{Q}i+\mathrm{Q}^2j+\mathrm{Q}^3k)$$

$$= 3(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}k)$$

$$= 3\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+2}} - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n-2}}$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}k) - (\mathrm{Q}^{\mathrm{n-2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n-1}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}k)$$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n-2}}) + (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n-1}})i + (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n}})j + (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}})k$$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n-2}})(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2j + \mathrm{Q}^3k)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} f_{n+3} & f_{n+2} \\ f_{n+2} & f_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{n-2} \\ f_{n-2} & f_{n-3} \end{bmatrix}\right)(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2j + \mathrm{Q}^3k)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} f_{n+3} - f_{n-1} & f_{n+2} - f_{n-2} \\ f_{n+2} - f_{n-2} & f_{n+1} - f_{n-3} \end{bmatrix}\right)(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2j + \mathrm{Q}^3k)$$

olarak elde edilir. Burada (16) eşitliği kullanılırsa

$$= \left(\begin{bmatrix} l_{n+1} & l_n \\ l_n & l_{n-1} \end{bmatrix}\right)(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2j + \mathrm{Q}^3k)$$

$$= \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n}}(1 + \mathrm{Q}i + \mathrm{Q}^2j + \mathrm{Q}^3k)$$

$$= \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+1}}i + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+2}}j + \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{n+3}}k$$

$$= \mathcal{T}\mathrm{Q}'_{\mathrm{n}}$$

olduğunu ispatlamış oluruz.

5.3.2. Özdeşlikler 2 nin İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}} - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}i + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+2}}j - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+3}}k$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}k) - (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}k)i$$

$$+(\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}k)j - (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}}k)k$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}} + 2j(\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}})$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(1 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}^4 + \mathrm{Q}^6 + 2j(\mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}^4)\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + 2j\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= 3\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2j\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (3 + 2j)\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (3 + 2j)\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^3$$

böylece ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}i - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+2}}j - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+3}}k$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}k) + (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}k)i$$

$$-(\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}k)j - (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}}k)k$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}} + 2i(\mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}})$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(1 - \mathrm{Q}^2 - \mathrm{Q}^4 + \mathrm{Q}^6 + 2i(\mathrm{Q}^1 - \mathrm{Q}^5)\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix} + 2i\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} - 2i\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$= (1 - 2i)\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}$$

$$= (1 - 2i)\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{3}$$

şeklinde istenen elde edilir.

c) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}} - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}i - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+2}}j + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+3}}k$

$$= (\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}k) - (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}k)i$$

$$-(\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}k)j + (\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}i + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+5}}j + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}}k)k$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+6}}$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}(1 + \mathrm{Q}^{2} - \mathrm{Q}^{4} - \mathrm{Q}^{6})$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$= -5\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= -5\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

5.3.3. Özdeşlikler 3 ün İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{i}+\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}^{i}$

$$=\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}+2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}+2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}+2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}$$

$$+2(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}+2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3})j$$

$$=\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}(\mathrm{Q}^{-2}+2+2\mathrm{Q}^{2}+2\mathrm{Q}^{4}+\mathrm{Q}^{6}+2(1+2\mathrm{Q}^{2}+\mathrm{Q}^{4})j)$$

$$=\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 6\\ 6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}\right.$$

$$\left.+2\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\right)j\right)$$

$$=\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix}30 & 15\\ 15 & 15\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}10 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix}j\right)$$

$$=\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(15\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+10\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}j\right)$$

$$=(15+10j)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(15+10j)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{2}$$

$$=5(3+2j)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}+2}$$

olduğundan istenen sonuç elde edilir.

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{j}+\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}^{j}$

$$=\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}-2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}$$

$$+2(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}+\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}-\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}-\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3})i$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}(\mathrm{Q}^{-2} - 2\mathrm{Q}^2 + \mathrm{Q}^6 + 2(\mathrm{Q}^{-1} + \mathrm{Q} - \mathrm{Q}^3 - \mathrm{Q}^5)i)$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\right) i\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} i\right)$$

$$= 5\left(\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} i\right)$$

$$= 5(1 - 2i)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}^2$$

$$= 5(1 - 2i)\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}+2}$$

elde edilerek sonuca ulaşılır.

c) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^{k} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}-1}^{k}$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}-1} + 2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} - 2\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+2} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}+3}$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}(\mathrm{Q}^{-2} + 2 - 2\mathrm{Q}^4 - \mathrm{Q}^6)$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\begin{bmatrix} -20 & -15 \\ -15 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= -5\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -5\mathrm{Q}^{2\mathrm{n}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^2$$

şeklinde istenen sonuca ulaşılır.

5.3.4. Özdeşlikler 4 ün İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{m}} + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{m+1}}$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}(1 - \mathrm{Q}^8 + 2(\mathrm{Q}+\mathrm{Q}^3 + \mathrm{Q}^5 + \mathrm{Q}^7)i + 2(\mathrm{Q}^2 - \mathrm{Q}^6)j + 4(\mathrm{Q}^3 + \mathrm{Q}^5)k)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}34 & 21\\ 21 & 13\end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 5\\ 5 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}21 & 13\\ 13 & 8\end{bmatrix}\right)i\right.$$

$$\left. +2\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}13 & 8\\ 8 & 5\end{bmatrix}\right)j + 4\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 5\\ 5 & 3\end{bmatrix}\right)k\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\left(\begin{bmatrix}-33 & -21\\ -21 & -13\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}33 & 21\\ 21 & 13\end{bmatrix}i - 2\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}j + 4\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}k\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\left(-3\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}i - 2\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}j + 4\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}k\right)$$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\begin{bmatrix}11 & 7\\ 7 & 4\end{bmatrix}(-3 + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 4\mathrm{k})$$

$$= (-3 + 6\mathrm{i} - 2\mathrm{j} + 4\mathrm{k})\mathrm{Q}^{\mathrm{n+m}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^4$$

istenen sonuç elde edilir.

5.3.5. Özdeşlikler 5 in İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n}}^2 + \mathcal{T}\mathrm{Q}_{\mathrm{n+1}}^2$

$$= \mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}} + 2(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}})i$$

$$+2(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} - \mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}})j + 2(\mathrm{Q}^{\mathrm{n}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}} + \mathrm{Q}^{\mathrm{n+1}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+4}}$$

$$+\mathrm{Q}^{\mathrm{n+2}}\mathrm{Q}^{\mathrm{n+3}})k$$

$= \mathrm{Q}^{2n}(1 - \mathrm{Q}^8 + 2(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}^3 + \mathrm{Q}^5 + \mathrm{Q}^7)i + 2(\mathrm{Q}^2 - \mathrm{Q}^6)j + 4(\mathrm{Q}^3 + \mathrm{Q}^5)k)$

$= \mathrm{Q}^{2n}\left(\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}34 & 21\\21 & 13\end{bmatrix}\right) + 2\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}21 & 13\\13 & 8\end{bmatrix}\right) i\right.$

$\left. +2\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}\right) j + 4\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{bmatrix}\right) k\right)$

$= \mathrm{Q}^{2n}\left(-\begin{bmatrix}33 & 21\\21 & 12\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}33 & 21\\21 & 12\end{bmatrix} i - 2\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} j + 4\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} k\right)$

$= \mathrm{Q}^{2n}\left(-3\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} i - 2\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} j + 4\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix} k\right)$

$= \mathrm{Q}^{2n}\begin{bmatrix}11 & 7\\7 & 4\end{bmatrix}(-3 + 6i - 2j + 4k)$

$= (-3 + 6i - 2j + 4k)\mathrm{Q}^{2n}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^4$

olur ve ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{n+1}^2 - \mathcal{T}\mathrm{Q}_{n-1}^2$

$= -\mathrm{Q}^{n-1}\mathrm{Q}^{n-1} + \mathrm{Q}^n\mathrm{Q}^n + \mathrm{Q}^{n+3}\mathrm{Q}^{n+3} - \mathrm{Q}^{n+4}\mathrm{Q}^{n+4} + 2(-\mathrm{Q}^{n-1}\mathrm{Q}^n + \mathrm{Q}^{n+3}\mathrm{Q}^{n+4})i$

$+2(-\mathrm{Q}^{n-1}\mathrm{Q}^{n+1} + \mathrm{Q}^n\mathrm{Q}^{n+2} + \mathrm{Q}^{n+1}\mathrm{Q}^{n+3} - \mathrm{Q}^{n+2}\mathrm{Q}^{n+4})j$

$+2(-\mathrm{Q}^{n-1}\mathrm{Q}^{n+2} - \mathrm{Q}^n\mathrm{Q}^{n+1} + \mathrm{Q}^{n+1}\mathrm{Q}^{n+4} + \mathrm{Q}^{n+2}\mathrm{Q}^{n+3})k$

$= \mathrm{Q}^{2n}(-\mathrm{Q}^{-2} + 1 + \mathrm{Q}^6 - \mathrm{Q}^8) + 2\mathrm{Q}^{2n}(-\mathrm{Q}^{-1} + \mathrm{Q}^7)i + 2\mathrm{Q}^{2n}(-1 + \mathrm{Q}^2$

$+\mathrm{Q}^4 - \mathrm{Q}^6)j + 4\mathrm{Q}^{2n}(-\mathrm{Q} + \mathrm{Q}^5)k)$

$= \mathrm{Q}^{2n}\left(\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}34 & 21\\21 & 13\end{bmatrix} + 2\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\right.\right.\right.$

$$+\begin{bmatrix}21 & 13\\13 & 8\end{bmatrix}\Big)i+2\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}13 & 8\\8 & 5\end{bmatrix}\right)j$$

$$+4\left(\begin{bmatrix}-1 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{bmatrix}\right)k\Big)$$

$$=\mathrm{Q}^{2n}\left(-\begin{bmatrix}21 & 12\\12 & 9\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}21 & 12\\12 & 9\end{bmatrix}i-2\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}j+4\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}k\right)$$

$$=\mathrm{Q}^{2n}\left(-3\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}i-2\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}j+4\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}k\right)$$

$$=\mathrm{Q}^{2n}\begin{bmatrix}7 & 4\\4 & 3\end{bmatrix}(-3+6i-2j+4k)$$

$$=(-3+6i-2j+4k)\mathrm{Q}^{2n}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{3}$$

olduğunu ispatlamış oluruz.

5.3.6. Özdeşlikler 6 nın İspatı

a) $\mathcal{T}\mathrm{Q}_{-n}=\mathrm{Q}^{-n}+\mathrm{Q}^{-n+1}+\mathrm{Q}^{-n+2}+\mathrm{Q}^{-n+3}$

$$=\mathrm{Q}^{-n}(1\ \ +\mathrm{Q}^{1}i+\mathrm{Q}^{2}j+\mathrm{Q}^{3}k)$$

$$=\frac{1}{(-1)^{n}}\begin{bmatrix}f_{n-1} & f_{-n}\\f_{-n} & f_{n+1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}i+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}j+\begin{bmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}k\right)$$

$$=\frac{1}{(-1)^{n}}\begin{bmatrix}f_{n-1} & f_{-n}\\f_{-n} & f_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0\\\mathcal{T}_0 & \mathcal{T}_{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(-1)^{n}}\begin{bmatrix}f_{n-1} & f_{-n}\\f_{-n} & f_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{T}_1 & \mathcal{T}_0\\\mathcal{T}_0 & \mathcal{T}_0+(1-i-k)\end{bmatrix}$$

böylece ispat tamamlanır.

b) $\mathcal{T}\mathrm{Q}'_{-n}=\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{-n}+\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{-n+1}+\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{-n+2}+\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}^{-n+3}$

$$= \mathrm{Q_L^{-n}}(1 \quad + \mathrm{Q_L} i + \mathrm{Q_L^2} j + \mathrm{Q_L^3} k)$$

$$= \frac{1}{(-1)^{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} l_{n-1} & l_{-n} \\ l_{-n} & l_{n+1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} i + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} j + \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} k \right)$$

$$= \frac{1}{(-1)^{\mathrm{n}}} \begin{bmatrix} l_{n-1} & l_{-n} \\ l_{-n} & l_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1' & \mathcal{T}_0' - 2 \\ \mathcal{T}_0' - 2 & \mathcal{T}_1' + (-i - 3j - 4k) \end{bmatrix}$$

şeklinde istenen elde edilir.

6. FİBONACCİ TESSARİNE VEKTÖRÜ

$\vec{\mathcal{T}_n} = f_{n+1}i + f_{n+2}\,j + f_{n+3}k$ n *–inci Fibonacci Tessarine vektörü* olsun.

Burada, $n = 0,1,2$ için Fibonacci Tessarine vektörü,

$\vec{\mathcal{T}_0} = 1i + 1j + 2k,\ \vec{\mathcal{T}_1} = 1i + 2j + 3k,\ \vec{\mathcal{T}_2} = 2i + 3j + 5k$

şeklindedir.

Teorem 6.1.

$\vec{\mathcal{T}_n},\ \vec{\mathcal{T}}_{n+1}$ Fibonacci Tessarine vektörleri olsun. Fibonacci Tessarine vektörlerinin iç çarpım ve vektörel çarpım için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) $$< \vec{\mathcal{T}_n}, \mathcal{T}_{n+1} > = \frac{4}{5}l_{2n+5} + \frac{(-1)^n}{5}$$

b) $$\vec{\mathcal{T}_n} \times \vec{\mathcal{T}}_{n+1} = \frac{2}{5}(l_{2n+6}i - l_{2n+5}j + l_{2n+4}k) - \frac{1}{5}(-1)^n(i + 3j - k)$$

İspat.

a) $\vec{\mathcal{T}_n}, \vec{\mathcal{T}}_{n+1}$ Fibonacci Tessarine vektörleri olmak üzere,

$$< \vec{\mathcal{T}_n}, \vec{\mathcal{T}}_{n+1} > = f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+4}$$

$$= f_{n+2}f_{n+1} + f_{n+3}f_{n+2} + f_{n+4}f_{n+3}$$

Burada (31) eşitliği kullanılırsa,

$$= \frac{1}{5}(l_{2n+3} - (-1)^{n+1}l_1 + l_{2n+5} - (-1)^{n+2}l_1 + l_{2n+7} - (-1)^{n+3}l_1)$$

$$= \frac{1}{5}(l_{2n+3} + (-1)^n + l_{2n+5} - (-1)^n + l_{2n+7} + (-1)^n)$$

Benzer olarak (30) eşitliği kullanılırsa,

$$= \frac{1}{5}(l_{2n+5} + 3l_{2n+5} + (-1)^n)$$

$$= \frac{4}{5}l_{2n+5} + \frac{(-1)^n}{5}$$

b) $\vec{\mathcal{T}}_n \times \vec{\mathcal{T}}_{n+1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_{n+1} & f_{n+2} & f_{n+3} \\ f_{n+2} & f_{n+3} & f_{n+4} \end{vmatrix}$ olsun. Tanım 2.7, 2.8, 2.9 ve 2.11'den yararlanılarak gerekli düzenlenmeler yapılırsa,

$$= i(f_{n+2}f_{n+4} + f_{n+3}^2) - j(f_{n+1}f_{n+4} + f_{n+2}f_{n+3}) + k(f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+2}^2)$$

Burada (31) eşitliği kullanılırsa,

$$= \frac{i}{5}(l_{2n+6} - (-1)^{n+2}l_2 + l_{2n+6} - (-1)^{n+3}l_0) - \frac{j}{5}(l_{2n+5} - (-1)^{n+1}l_3$$

$$+ l_{2n+5} - (-1)^{n+2}l_1) + \frac{k}{5}(l_{2n+4} - (-1)^{n+1}l_2 + l_{2n+4} - (-1)^{n+2}l_0)$$

$$= \frac{i}{5}(l_{2n+6} - 3(-1)^{n+2} + l_{2n+6} - 2(-1)^{n+3}) - \frac{j}{5}(l_{2n+5} - 4(-1)^{n+1}$$

$$+ l_{2n+5} - (-1)^{n+2}) + \frac{k}{5}(l_{2n+4} - 3(-1)^{n+1} + l_{2n+4} - 2(-1)^{n+2})$$

$$= \frac{2}{5}(l_{2n+6}i - l_{2n+5}j + l_{2n+4}k) - \frac{1}{5}(-1)^n(i + 3j - k) \text{ dir.}$$

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Fibonacci Tessarine ve Lucas Tessarine dizileri incelenmiştir ve daha sonra Fibonacci ve Lucas dizileri için verilmiş olan özdeşliklerin ispatları kapsamlı bir şekilde irdelenmiş. Sonuç olarak bu tezin ileri de bir kaynak olarak kullanılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Intersience Publication, 2001.

[2] Horadam, A. F., A Generalized Fibonacci Sequence, Amer. Math. Monthly, 68, 1961.

[3] Horadam, A. F., Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, Amer. Math. Monthly, 70(3), 289-291, 1963.

[4] James C., On Certain Functions Resembling Quaternions and on a New Imaginary in Algebra, Philosophical magazine series3, London-Dublin-Edinburgh, 1848.

[5] James C., On a New Imaginary in Algebra, Philosophical magazine series3, London-Dublin-Edinburgh, 34, 37-47, 1849.

[6] James C., On the True Amplitude of a Tessarine, Philosophical magazine series3, London-Dublin-Edinburgh, 38, 290-2, 1850.

[7] Vajda S., Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden Section: Theory and Applications, Halsted Press, 1989.

[8] Dunlap R. A., The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, World Scientific Press, 1997.

[9] Hoggatt V. E., Fibonacci and Lucas Numbers published by The Fibonacci Association, 1969.

[10] Bicknell M., Hoggatt V. E., A primer for the Fibonacci numbers, Fibonacci quarterly, 1973.

[11] Knuth D., Negafibonacci Numbers and Hyperbolic Plane, Annual Meeting of the Math, Association of Amer., 2013.

[12] Glynn D. G., Permanenet of a square matrix, European Journal of Combinatorics, 31(7), 1891-1897, 2010.

[13] Iyer M. R., Identities Involving Generalized Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, 7(1), 66-72, 1969.

[14] Brenner J. L., June Meeting of the Pacific Northwest Section, 1. Lucas Matrix, Amer. Math. Monthly, 58, 220-221, 1951.

[15] Honsberger R., The Matrix Q. Mathematical Gems III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 106-107, 1985.