EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMŞULUK SİSTEMLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE

Nihal ARABACIOĞLU

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.04.01
Sunuş Tarihi : 07.06.2012

Bornova-İZMİR

2012

Nihal ARABACIOĞLU tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan **"Bazı Genelleştirilmiş Komşuluk Sistemleri ve Genelleştirilmiş Süreklilikler Üzerine"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 07.06.2012 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR**	**............................**
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Gülhan ASLIM**	**...........................**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Aslı GÜLDÜRDEK**	**............................**

ÖZET

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMŞULUK SİSTEMLERİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE

ARABACIOĞLU, Nihal

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR
Haziran 2012, 46 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşur.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise tezin daha kolay anlaşılması için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde zayıf komşuluk sistemleri ve güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemleri verilmiştir. Bu komşuluk sistemlerinin karakterizasyonları ve bunların birbirleriyle ilişkileri incelenmiştir. Karşıt örnekler verilerek konuya açıklık getirilmiştir.

Dördüncü bölümde zayıf süreklilik, genelleştirilmiş θ - süreklilik ve bu sürekliliklerin mixed yapıları çalışılmıştır. Ayrıca bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve çeşitli teoremler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde komşuluk sistemleri yardımıyla hemen hemen süreklilik tanıtılmış ve bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Ayrıca bu sürekliliğin daha önceki bölümlerde tanımlanan çeşitli sürekliliklerle ilişkisi incelenmiştir. Bu ilişkiler diyagram ile gösterilmiş ve karşıt örneklerle diyagram desteklenmiştir.

Anahtar sözcükler: genelleştirilmiş topoloji, genelleştirilmiş süreklilik, genelleştirilmiş komşuluk, zayıf komşuluk, güçlü genelleştirilmiş komşuluk, zayıf $(\mu_1\ ,\mu_2)$ – süreklilik, genelleştirilmiş $\theta(g,g')$ – süreklilik, zayıf $(\mu, g_1 g_2)$ – süreklilik, $\theta(\mu, g_1 g_2)$ – süreklilik, hemen hemen (g,g') – süreklilik, zayıf (ψ,ψ') – süreklilik, hemen hemen (ψ,ψ') – süreklilik ve (g,g') - regüler .

ABSTRACT

ON SOME GENERALIZED NEIGHBORHOOD SYSTEMS AND GENERALIZED CONTINUITY

ARABACIOĞLU, Nihal

MSc. in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Oya BEDRE ÖZBAKIR
June 2012, 46 pages

This thesis essentially consist of five chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, in the second chapter, in order to make the understanding easy, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, weak neighborhood systems and strong generalized neighborhood systems are given. Characterizations of these neighborhood systems and the relations among these are investigated. This subject is clarified by giving counter examples.

In the fourth chapter, weak continuity, generalized θ - continuity and mixed constructions of these continuities are studied. Also, the relations among these are investigated and several theorems are obtained.

In the fifth chapter, almost continuity with the aid of neighborhood systems is introduced and some characterizations are obtained. Also, the relations between this continuity and several continuties defined in the previous chapters are examined. These relations are presented with a diagram and this diagram is supported by counter examples.

Keywords: generalized topology, generalized continuity, generalized neighborhood, weak neighborhood, strong generalized neighborhood, weak $(\mu_1 \ , \mu_2)$ – continuity, generalized $\theta(g,g^{'})$ – continuity, weak $(\mu, g_1 g_2)$ – continuity, $\theta(\mu, g_1 g_2)$ – continuity, almost $(g,g^{'})$ – continuity, weak $(\psi, \psi^{'})$ – continuity, almost $(\psi, \psi^{'})$ – continuity and $(g,g^{'})$ - regular.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumu veren ve çalışmalarım süresince bana yol gösteren, destek veren ve hiçbir zaman anlayışını, sevgisini, yardımlarını esirgemeyen çok sevdiğim ve değer verdiğim saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca burs aldığım TÜBİTAK' a desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Öğrenim hayatım boyunca benden sevgisini, desteğini ve her konuda yardımlarını esirgemeyen en değerli varlığım aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\Rightarrow$	Gerek koşul.
$\Leftarrow$	Yeter koşul.
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul.
(X,g)	Genelleştirilmiş topolojik uzay.
(X,ψ)	Genelleştirilmiş komşuluk uzayı.

Kısaltmalar

$c(A)$	A kümesinin genelleştirilmiş topolojiye göre kapanışı.
$i(A)$	A kümesinin genelleştirilmiş topolojiye göre içi.
$\Psi(X)$	Genelleştirilmiş komşuluk sistemlerinin koleksiyonu.
g_ψ	Komşuluk sistemi yardımıyla oluşturulan genelleştirilmiş topoloji.
ψ_g	Genelleştirilmiş topoloji yardımıyla oluşturulan komşuluk sistemi.
$\iota_\psi(A)$	A kümesinin genelleştirilmiş komşuluk sistemine göre içi.
$\gamma_\psi(A)$	A kümesinin genelleştirilmiş komşuluk sistemine göre kapanışı.

1.GİRİŞ

Genel topoloji alanındaki pek çok çalışma topolojik uzaylar üzerinde tanımlanan özel açık küme sınıflarını incelemeye yöneliktir. Bu özel açıklar i ve c operatörleri yardımı ile oluşturulur. Yarı açık kümeler, ön açık kümeler bu küme sınıflarına örnek olarak verilebilir.

Günümüze kadar çalışılan açıkların genellemesi ile ilgili özellikler, ilk defa, Csaszar tarafından 1997 yılında “ Genelleştirilmiş Açık Kümeler ” adlı makalede incelenmiştir. Ardından yine Csaszar tarafından 2002 yılında genelleştirilmiş topoloji, genelleştirilmiş komşuluk sistemi ve genelleştirilmiş süreklilik tanımları verilmiş ve bunların karakterizasyonları elde edilmiştir. Daha sonraki yıllarda konu ile ilgili olarak Min zayıf komşuluk sistemlerini (2008), güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemlerini (2008), zayıf sürekliliği (2008), genelleştirilmiş θ - sürekliliği (2009), hemen hemen sürekliliği (2009), mixed zayıf sürekliliği (2011) ve mixed θ - sürekliliği (2011) çalışmıştır.

Bu tezde zayıf komşuluk sistemi ve güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi ele alınmıştır. Daha sonra da ağırlıklı olarak süreklilik türlerinden zayıf süreklilik, genelleştirilmiş θ – süreklilik, hemen hemen süreklilik ve mixed yapılar üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir. Genelleştirilmiş topolojik uzaylarda zayıf ve hemen hemen sürekli fonksiyonların bileşkeleri araştırılmıştır. Mixed yapılarda zayıf süreklilik ve θ - süreklilik ele alınarak özellikleri incelenmiştir. Ayrıca hemen hemen sürekliliğin komşuluk sistemleri yardımıyla tanımı verilerek, karakterizasyonlar araştırılmıştır. Tez boyunca incelediğimiz süreklilik türleri arasındaki bağıntılar incelenerek terslerine ait örneklerle konuya açıklık getirilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. (Csaszar, 2002) $g \subseteq P$(X) aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise g ye X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji denir ve kısaca GT ile gösterilir.

i) $\emptyset \in g$.
ii) Her $i \in I \neq \emptyset$ için $G_i \in g$ ise $\bigcup_{i \in I} G_i \in g$ dir.

Tanım 2.2. (Csaszar, 2002) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. g nin elemanları g - açık ve g nin elemanlarının tümleyenleri de g - kapalı olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. (Csaszar, 2002) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. gO(X) = {U ⊆ X : U ∈ g} ve gO(x) = {U ∈ g : x ∈ U} kümeleri sırasıyla X kümesi üzerindeki genelleştirilmiş açıkların kümesini ve x noktasını içeren genelleştirilmiş açıkların kümesini gösterir.

Tanım 2.4. (Csaszar, 2002) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun.

$$i(A) = \bigcup\{\, G : \; G \subseteq A \,, G \; g - açık \,\}$$

ve

$$c(A) = \bigcap\{\, K : \; A \; \subseteq K \,, K \; g - kapalı \,\}$$

kümeleri sırasıyla A kümesinin genelleştirilmiş topolojiye göre içi ve kapanışını gösterir.

Teorem 2.5. (Csaszar, 2002) (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) c(A) = X – i(X – A)
(2) i(A) = X – c(X – A)

Teorem 2.6. (Min, 2008a) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(1) x ∈ i(A) ⇔ V ⊆ A olacak şekilde bir V ∈ gO(x) vardır.
(2) x ∈ c(A) ⇔ Her V ∈ gO(x) için V∩A ≠ ∅ dir.

Tanım 2.7. (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun.

(1) (Csaszar, 2005) A, g - yarı açık kümedir : ⇔ A ⊆ c(i(A))
(2) (Csaszar, 2005) A, g - ön açık kümedir : ⇔ A ⊆ i(c(A))
(3) (Min, 2008a) A, g - regüler açık kümedir : ⇔ A = i(c(A))
(4) (Csaszar, 2005) A, g - β - açık kümedir : ⇔ A ⊆ c(i(c(A)))

g - yarı açık (g - ön açık, g – regüler açık, g - β - açık) kümelerin tümleyenlerine g - yarı kapalı (g - ön kapalı, g - regüler kapalı, g - β - kapalı) küme denir.

Tanım 2.7. den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & & g\text{ - yarı açık} \arrow[dr] & \\
g\text{ - regüler açık} \arrow[r] & g\text{ - açık} \arrow[ur] \arrow[dr] & & g\text{ - }\beta\text{ - açık} \\
 & & g\text{ - ön açık} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Teorem 2.8. (Min, 2008a) (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun.

(1) A, g - yarı kapalı kümedir ⇔ i(c(A)) ⊆ A
(2) A, g - ön kapalı kümedir ⇔ c(i(A)) ⊆ A
(3) A, g - regüler kapalı kümedir ⇔ A = c(i(A))
(4) A, g - β - kapalı kümedir ⇔ i(c(i(A))) ⊆ A

Tanım 2.9. (Csaszar, 2008) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve P(X) de X kümesinin kuvvet kümesi olsun. $\theta(g) \subseteq P$(X) kümesi, $\theta(g)$ = { A : x ∈ A için c_g(M) ⊆ A olacak şekilde bir M ∈ gO(x) vardır } şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\theta(g) \subseteq g$ dir ve $\theta(g)$ bir genelleştirilmiş topolojidir. $\theta(g)$ nin elemanları θ - açık ve $\theta(g)$ nin elemanlarının tümleyenleri θ - kapalı olarak isimlendirilir. g ve g' iki GT olmak üzere $\theta(g)$ ve $\theta(g')$ kümeleri sırasıyla θ ve θ' ile gösterilir.

Tanım 2.10. (Csaszar, 2002) (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. $\theta(g)$ genelleştirilmiş topolojisine göre aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$c_\theta(A) = \bigcap\{ F \subseteq X : A \subseteq F, F\ \theta - kapalı \}$

$i_\theta(A) = \bigcup\{ V \subseteq X : V \subseteq A, V\ \theta - açık \}$

$\iota_\theta(\mathrm{A}) = \{ x \in X : x\ i\ içeren\ bazı\ U\ g - açık\ kümesi\ için\ c_g(U) \subseteq A\ dır\}$

$\gamma_\theta(\mathrm{A}) = \{ x \in X : x\ i\ içeren\ her\ U\ g - açık\ kümesi\ için\ c_g(U) \cap A \neq \emptyset \}$

Teorem 2.11. (Csaszar, 2008) (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. O zaman, A kümesinin θ - kapalı olması için gerek ve yeter koşul A = γ_θ(A) olmasıdır.

Lemma 2.12. (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) (Csaszar, 2008) x ∈ c_g(A) ⇔ x ∈ M ve M ∈ g için M∩A ≠ ∅ dir.
(2) (Csaszar, 2008) γ_θ(A) ⊆ c_θ(A).
(3) (Min, 2009b) i_θ(A) ⊆ ι_θ(A) ⊆ i_g(A) ⊆ A ⊆ c_g(A) ⊆ γ_θ(A) ⊆ c_θ(A).

Teorem 2.13. (Min, 2009b) (X,g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) i_θ(A) = X - c_θ(X – A) ve c_θ(A) = X - i_θ(X – A).
(2) ι_θ(A) = X - γ_θ(X – A) ve γ_θ(A) = X - ι_θ(X – A).
(3) A kümesi θ - kapalı ise A = c_g(A) = γ_θ(A) = c_θ(A).
(4) A kümesi θ - açık ise A = i_g(A) = ι_θ(A) = i_θ(A).

Tanım 2.14. g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun.

(1) (Csaszar, 2009) A, (g_1, g_2) – yarı açık kümedir : ⇔ A ⊆ $c_{g_2}(i_{g_1}$(A))
(2) (Csaszar, 2009) A, (g_1,g_2) – ön açık kümedir : ⇔ A ⊆ $i_{g_1}(c_{g_2}$(A))
(3) (Csaszar, 2009) A, (g_1,g_2) - β′ - açık kümedir : ⇔ A ⊆ $c_{g_2}(i_{g_1}(c_{g_2}$(A)))
(4) (Csaszar and Makai Jr, 2009) A, (g_1,g_2) – regüler açık ((g_1,g_2) – regüler kapalı) kümedir : ⇔ A = $i_{g_1}(c_{g_2}$(A)) (A = $c_{g_1}(i_{g_2}$(A)))

(g_1,g_2) – yarı açık ((g_1,g_2) – ön açık, (g_1,g_2) - β′ - açık) kümelerin tümleyenlerine (g_1,g_2) - yarı kapalı ((g_1,g_2) – ön kapalı, (g_1,g_2) - β′ - kapalı) küme denir.

Tanım 2.15. (Min, 2011a) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun.

(1) A, $(g_1, g_2)'$ - yarı açık kümedir : ⇔ A ⊆ $c_{g_1}(i_{g_2}$(A))
(2) A, $(g_1, g_2)'$ - ön açık kümedir : ⇔ A ⊆ $i_{g_2}(c_{g_1}$(A))
(3) A, $(g_1, g_2)'$ - β′ - açık kümedir : ⇔ A ⊆ $c_{g_1}(i_{g_2}(c_{g_1}$(A)))

$(g_1, g_2)'$ - yarı açık ($(g_1, g_2)'$ - ön açık, $(g_1, g_2)'$ - β′ - açık) kümelerin tümleyenlerine $(g_1, g_2)'$ - yarı kapalı ($(g_1, g_2)'$ - ön kapalı, $(g_1, g_2)'$ - β′ - kapalı) küme denir.

Tanım 2.16. (Csaszar and Makai Jr, 2009) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. $\theta(g_1,g_2)$ = {A ⊆ X : x ∈ A, x ∈ M ⊆ c_{g_2}(M) ⊆ A olacak şekilde bir M ∈ g_1 vardır} şeklinde tanımlıdır. $\theta(g_1,g_2)$ nin elemanları $\theta(g_1,g_2)$ – açık ve $\theta(g_1,g_2)$ nin elemanlarının tümleyenleri $\theta(g_1,g_2)$ - kapalı olarak isimlendirilir.

Tanım 2.17. (Csaszar and Makai Jr, 2009) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. g_1 ve g_2 genelleştirilmiş topolojilerine göre aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$c_{\theta(g_1,g_2)}(A) = \cap\{ F \subseteq X : A \subseteq F, F\ \theta(g_1,g_2) - \ kapalı \}$$

$$i_{\theta(g_1,g_2)}(A) = \cup\{ V \subseteq X : V \subseteq A, V\ \theta(g_1,g_2) - \ açık \}$$

$$\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(A) = \{ x \in X : x \in M \in g_1 \ için \ c_{g_2}(M) \cap A \neq \emptyset \ dir \}$$

Teorem 2.18. (Csaszar and Makai Jr, 2009) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) A ⊆ $\gamma_{\theta(g_1,g_2)}$(A) ⊆ $c_{\theta(g_1,g_2)}$(A).

(2) A $\theta(g_1,g_2)$ - kapalı ⇔ A = $\gamma_{\theta(g_1,g_2)}$(A).

Lemma 2.19. (Min, 2011a) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) x ∈ $i_{\theta(g_1,g_2)}$(A) ⇔ x∈M ⊆ c_{g_2}(M) ⊆ A olacak şekilde bir M∈ g_1 vardır.

(2) A, X de g_2 - açık ⇒ $\gamma_{\theta(g_1,g_2)}$(A) = c_{g_1}(A).

Tanım 2.20. (Min, 2011a) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler ve A ⊆ X olsun. x ∈ X ve x ∉ F olacak şekilde bir F g_1 - kapalı kümesi için x ∈ U, F ⊆ V ve U∩V = ∅ olacak şekilde bir U ∈ g_1 ve V ∈ g_2 varsa X kümesine (g_1, g_2) – regülerdir denir.

Teorem 2.21. (Min, 2011a) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. X in (g_1, g_2) – regüler olması için gerek ve yeter koşul x ∈ X ve x ∈ U ∈ g_1 için x ∈ V ⊆ c_{g_2}(V) ⊆ U olacak şekilde bir V ∈ g_1 kümesinin var olmasıdır.

Teorem 2.22. (Min, 2011a) g_1 ve g_2, X kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. X kümesi (g_1, g_2) – regüler ise her g_1 - açık küme $\theta(g_1,g_2)$ – açıktır.

Tanım 2.23. (Min, 2008c) I : P(X) → P(X) bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan I fonksiyonuna bir iç operatörü denir.

(C_1') Her A ∈ P(X) için I(A) ⊆ A olur.

(C_2') Her A,B ∈ P(X) için I(A∩B) = I(A)∩I(B) olur.

(C_3') I(X) = X.

Tanım 2.24. I : P(X) → P(X) fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

(C_1) Her A ∈ P(X) için I(A) ⊆ A sağlanır.

(C_2) Her A,B ∈ P(X) için A ⊆ B ise I(A) ⊆ I(B) sağlanır.

(C_3) Her A ∈ P(X) için I(I(A)) = I(A) sağlanır.

(C_4) I(X) = X.

(a)(Min, 2005) I fonksiyonu; **(C_1)**, **(C_2)** ve **(C_3)** aksiyomlarını sağlıyor ise I ya güçlü genelleştirilmiş iç operatörü denir.

(b)(Min, 2005) I fonksiyonu; **(C_1)** ve **(C_2)** aksiyomlarını sağlıyorsa I ya genelleştirilmiş iç operatörü denir.

(c)(Mashhour et al., 1983) I fonksiyonu; **(C_1)**, **(C_2)**, **(C_3)** ve **(C_4)** aksiyomlarını sağlıyorsa I ya quasi – iç operatörü denir.

(d)(Kent and Min, 2002) I fonksiyonu; **(C_1)**, **(C_2)** ve **(C_4)** aksiyomlarını sağlıyorsa I ya iç operatörü denir.

Tanım 2.25. (Min, 2008b) I : P(X) → P(X) fonksiyonu aşağıdaki aksiyomu sağlasın:

(C_p) Her A,B ∈ P(X) için I(A)∩I(B) ⊆ I(A∩B) olur.

(a) I fonksiyonu; **(C_1)**, **(C_2)**, **(C_3)** ve **(C_p)** aksiyomlarını sağlıyorsa I ya güçlü* genelleştirilmiş iç operatörü denir.

(b) I fonksiyonu; **(C_1)**, **(C_2)** ve **(C_p)** aksiyomlarını sağlıyorsa I ya genelleştirilmiş* iç operatörü denir.

Tanım 2.26. (Csaszar, 2002) ψ : X → P(P(X)) ve V ∈ ψ(x) için x ∈ V olsun. Bu durumda V ∈ ψ(x) kümesine X in genelleştirilmiş komşuluğu ve ψ ye de X üzerinde genelleştirilmiş komşuluk sistemi denir. X kümesi üzerindeki tüm genelleştirilmiş komşuluk sistemlerinin koleksiyonu Ψ(X) ile gösterilir.

Lemma 2.27. (Csaszar, 2002) ψ, X kümesi üzerinde bir GNS ve G ⊆ X olsun. G ∈ g_ψ olması için gerek ve yeter koşul x ∈ G için V ⊆ G olacak şekilde bir V ∈ ψ(x) kümesinin olmasıdır.

Tanım 2.28. (Csaszar, 2002) ψ, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş komşuluk sistemi ve A ⊆ X olsun.

$$\iota_\psi(A) = \{ x \in A : V \subseteq A \text{ olacak şekilde bir } V \in \psi(x) \text{ vardır} \}$$

ve

$$\gamma_\psi(A) = \{ x \in X : V \in \psi(x) \text{ için } V \cap A \neq \emptyset \text{ dır} \}$$

kümeleri sırasıyla A kümesinin genelleştirilmiş komşuluk sistemine göre içini ve kapanışını gösterir.

Ayrıca $\psi \in \Psi(X)$ için i_ψ ve c_ψ gösterilimleri ile $i_\psi = i_{g_\psi}$ ve $c_\psi = c_{g_\psi}$ eşitlikleri ifade edilmektedir.

Lemma 2.29. (Csaszar, 2002) $\psi \in \Psi(X)$ ve $A \subseteq X$ olsun. Bu halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\gamma_\psi(A) = X - \iota_\psi(X - A)$ dır.

(2) $i_\psi(A) \subseteq \iota_\psi(A)$ ve $\gamma_\psi(A) \subseteq c_\psi(A)$ dır.

Lemma 2.30. (Csaszar, 2002) g, X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. O zaman $g = g_\psi$ eşitliği sağlanacak şekilde öyle bir $\psi \in \Psi(X)$ vardır. Bu durumda ψ aşağıdaki koşulu sağlar:

$$x \in X,\ V \in \psi(x) \text{ için } V \in g \text{ dir.} \qquad \textbf{(2.30.1)}$$

2.30.1. koşulunun sağlanması durumunda $\psi = \psi_g$ ve $\psi \in \Psi_g(X)$ gösterimleri kullanılacaktır.

Lemma 2.31. (Csaszar, 2002) X kümesi üzerindeki $g = g_\psi$ GT si için $\psi \in \Psi_g(X)$ ise o zaman $\iota_\psi = i_\psi$ ve $\gamma_\psi = c_\psi$ olur.

Lemma 2.32. (Csaszar, 2002) X kümesi üzerinde g bir GT ve $\psi = \psi_g$ ise o zaman $g = g_\psi$ olur.

Tanım 2.33. (Min, 2005) $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. $U \subseteq X$ ve $U \in g$ için $f(U) \in g'$ oluyorsa f fonksiyonuna (g,g') – açıktır denir.

Tanım 2.34. (Csaszar, 2002) $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, g ve g' sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Her $G \in g'$ için $f^{-1}(G) \in g$ oluyorsa f fonksiyonuna (g,g') – süreklidir denir.

Teorem 2.35. (Min, 2005) $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. f fonksiyonunun (g,g') – sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $A \subseteq Y$ için $f^{-1}(i(A)) \subseteq i(f^{-1}(A))$ olmasıdır.

Teorem 2.36. (Min, 2008a) $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f, (g,g') – süreklidir.
(2) Her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(i(B)) \subseteq i(f^{-1}(B))$ olur.
(3) Her $B \subseteq Y$ için $c(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(c(B))$ olur.
(4) Her $A \subseteq X$ için $f(c(A)) \subseteq c(f(A))$ olur.
(5) Y deki her g' - kapalı F kümesi için $f^{-1}(F)$ kümesi X de g - kapalıdır.
(6) $x \in X$ ve $f(x) \in V \in g'$ için $x \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in g$ kümesi vardır.

Tanım 2.37. (Csaszar, 2002) $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, ψ ve ψ' sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde genelleştirilmiş komşuluk sistemleri olsun. $x \in X$ ve $V \in \psi'(f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ varsa f fonksiyonuna (ψ,ψ') – süreklidir denir.

Teorem 2.38. (Csaszar, 2002) $\psi \in \Psi(X)$, $\varphi \in \Psi(Y)$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f (ψ,φ) – sürekli ise (g_ψ, g_φ) – süreklidir.

3. ZAYIF VE GÜÇLÜ GENELLEŞTİRİLMİŞ KOMŞULUK UZAYLARI

3.1. Zayıf Komşuluk Sistemleri

Tanım 3.1.1. (Min, 2008c) $\psi : X \to P(P(X))$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan ψ fonksiyonuna X kümesi üzerinde zayıf komşuluk sistemi denir.

i) $x \in X$ ve $V \in \psi(x)$ için $x \in V$ dir.

ii) $U,V \in \psi(x)$ için $U \cap V \in \psi(x)$ dir.

iii) $x \in X$ için $\psi(x) \neq \emptyset$ dır.

(X,ψ) ikilisine X kümesi üzerinde bir zayıf komşuluk uzayı ve $V \in \psi(x)$ kümesine de $x \in X$ noktasının bir zayıf komşuluğu denir. Tez boyunca zayıf komşuluk uzayını ZKU olarak göstereceğiz.

Her zayıf komşuluk sistemi bir genelleştirilmiş komşuluk sistemidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığına ait bir örnektir.

Örnek 3.1.2. $X = \{a,b,c,d\}$ ve $\psi : X \to P(P(X))$ fonksiyonu $\psi(a)=\{\{a,b\},\{a,d\}\}$, $\psi(b) = \{\{b,c\},\{b,d\}\}$, $\psi(c) = \{\{c\}\}$ ve $\psi(d) = \{\{a,d\},\{b,d\}\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman ψ genelleştirilmiş komşuluk sistemidir. Fakat, $\{a,b\} \in \psi(a)$ ve $\{a,d\} \in \psi(a)$ için $\{a,b\}\cap\{a,d\}=\{a\} \notin \psi(a)$ olduğundan zayıf komşuluk sistemi değildir.

Tanım 3.1.3. (Min, 2008c) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir ZKU ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\iota_\psi(A) = \{ x \in A : V \subseteq A \text{ olacak şekilde bir } V \in \psi(x) \text{ vardır} \}$$

ve

$$\gamma_\psi(A) = \{ x \in X : V \in \psi(x) \text{ için } V \cap A \neq \emptyset \text{ dır} \}$$

kümeleri sırasıyla A kümesinin zayıf komşuluk sistemine göre içini ve kapanışını gösterir.

Teorem 3.1.4. (Min, 2008c) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir ZKU olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her A $\in P$(X) için $\iota_\psi(A) \subseteq A$ dır.

(2) Her A,B $\in P$(X) için $\iota_\psi(A\cap B) = \iota_\psi(A)\cap \iota_\psi(B)$ dır.

(3) $\iota_\psi(X)=X$.

İspat. (1) Tanım 3.1.3. ten açıktır.

(2) $x \in \iota_\psi(A)\cap \iota_\psi(B)$ olsun. O zaman $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ olacak şekilde $U,V \in \psi(x)$ vardır. Tanım 3.1.1. den $U\cap V \in \psi(x)$ tir. O halde $x \in \iota_\psi(A\cap B)$ sağlanır. Tersi açıktır.

(3) Açıktır.

Aşağıdaki örnek ψ zayıf komşuluk sisteminin genelde, idempotent özelliğini sağlamadığını gösterir.

Örnek 3.1.5. (Min, 2008c) X = {a,b,c,d} ve $\psi : X \rightarrow P(P(X))$ zayıf komşuluk sistemi $\psi(a) = \{\{a,c\}\}$, $\psi(b) = \{\{b,c\}\}$ ve $\psi(c) = \psi(d) = \{X\}$ şeklinde tanımlansın. A = {a,b,c} kümesi için $\iota_\psi(A) = \{a,b\}$ dir. Fakat $\iota_\psi(\iota_\psi(A)) = \emptyset$ olur. O halde $\iota_\psi(\iota_\psi(A)) \neq \iota_\psi(A)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. (Min, 2008c) (X,ψ) X kümesi üzerinde bir ZKU olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $\emptyset = \gamma_\psi(\emptyset)$.

(2) Her A $\in P$(X) için $A \subseteq \gamma_\psi(A)$ olur.

(3) Her A,B $\in P$(X) için $\gamma_\psi(A\cup B) = \gamma_\psi(A)\cup \gamma_\psi(B)$ olur.

(4) $\gamma_\psi(A) = X - \iota_\psi(X-A)$ ve $\iota_\psi(A) = X - \gamma_\psi(X-A)$ olur.

İspat. (1) Açıktır.

(2) Tanım 3.1.3. ten açıktır.

(3) $x \in \gamma_\psi(A \cup B)$ olsun. O zaman $V \in \psi(x)$ için $V \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ olur. O halde, $V \cap (A \cup B) = (V \cap A) \cup (V \cap B) \neq \emptyset$ durumu aşağıdaki gibi üç farklı durumda incelenir:

- $V \cap A \neq \emptyset$ ve $V \cap B = \emptyset$ olsun. O halde $x \in \gamma_\psi(A)$ ve $x \notin \gamma_\psi(B)$ olur. Sonuç olarak $x \in \gamma_\psi(A) \cup \gamma_\psi(B)$ elde edilir.
- $V \cap A = \emptyset$ ve $V \cap B \neq \emptyset$ olsun. O halde $x \notin \gamma_\psi(A)$ ve $x \in \gamma_\psi(B)$ olur. Sonuç olarak $x \in \gamma_\psi(A) \cup \gamma_\psi(B)$ elde edilir.
- $V \cap A \neq \emptyset$ ve $V \cap B \neq \emptyset$ olsun. O halde $x \in \gamma_\psi(A)$ ve $x \in \gamma_\psi(B)$ olur. Sonuç olarak $x \in \gamma_\psi(A) \cup \gamma_\psi(B)$ elde edilir.

Tersi açıktır.

(4)
$$\begin{aligned} X - \iota_\psi(X-A) &= X - \{ x \in X : V \subseteq X - A, \exists\, V \in \psi(x) \} \\ &= X - \{ x \in X : V \cap A = \emptyset, \exists\, V \in \psi(x) \} \\ &= \{ x \in X : V \cap A \neq \emptyset, \forall\, V \in \psi(x) \} \\ &= \gamma_\psi(A) \end{aligned}$$

$\gamma_\psi(A) = X - \iota_\psi(X-A)$ eşitliğinde A yerine $X - A$ yazılırsa $\iota_\psi(A) = X - \gamma_\psi(X-A)$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.7. (Min, 2008c) (1) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir ZKU ve her $A \subseteq X$ için $I : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu $I(A) = \iota_\psi(A)$ şeklinde tanımlı olsun. O zaman I bir iç operatörüdür.

(2) $I : P(X) \to P(X)$ bir iç operatörü ve $\emptyset_I : X \to P((P(X))$ $\emptyset_I(x) = \{ I(A) : A \subseteq X \text{ için } x \in I(A) \}$ şeklinde tanımlı olsun. O zaman I tarafından oluşturulan $\emptyset_I$ bir zayıf komşuluk sistemidir.

İspat. (1) $\iota_\psi(A)$ tanımından ve Teorem 3.1.4. ten I operatörünün bir iç operatörü olduğu elde edilir.

(2) I operatörünün iç operatörü olmasından ve $\emptyset_I$ nın tanımından açıktır.

(X,ψ), X kümesi üzerinde bir ZKU ve her A $\subseteq$ X için I : P(X)$\rightarrow$ P(X) I(A) = ι_ψ(A) şeklinde tanımlı olsun. O zaman I = ι_ψ tarafından oluşturulan $\emptyset_{\iota_\psi}$ zayıf komşuluk sistemi ile ψ arasında bir ilişki yoktur.

Aşağıdaki örnek $\emptyset_{\iota_\psi}$ zayıf komşuluk sistemi ile ψ komşuluk sistemi arasında bir ilişkinin olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.8. (Min, 2008c) X = {a,b,c} ve ψ : X $\rightarrow$ $P(P$(X)) zayıf komşuluk sistemi ψ(a) = {{a},{a,c}}, ψ(b) = {{b},{b,c}} ve ψ(c) = {X} şeklinde tanımlı olsun. O zaman ι_ψ tarafından oluşturulan $\emptyset_{\iota_\psi}$ zayıf komşuluk sistemi $\emptyset_{\iota_\psi}$(a) = {{a},{a,b},X}, $\emptyset_{\iota_\psi}$(b) = {{b},{a,b},X} ve $\emptyset_{\iota_\psi}$(c) = {X} şeklinde olur.

Tanım 3.1.9. (Min, 2008c) f : X $\rightarrow$ Y bir fonksiyon, (X,ψ) ve (Y,$\emptyset$) sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde zayıf komşuluk uzayları olsun. x $\in$ X ve V$\in$ $\emptyset$(f(x)) için f(U) $\subseteq$ V olacak şekilde bir U $\in$ ψ(x) varsa f fonksiyonuna, x$\in$X noktasında $\omega(\psi,\emptyset)$ – süreklidir denir.

Teorem 3.1.10. (Min, 2008c) f : X $\rightarrow$ Y bir fonksiyon, (X,ψ) ve (Y,$\emptyset$) sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde zayıf komşuluk uzayları olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\omega(\psi,\emptyset)$ – süreklidir.
(2) Her A $\subseteq$ X için f(γ_ψ(A)) $\subseteq$ $\gamma_\emptyset f$(A) sağlanır.
(3) Her B $\subseteq$ Y için $\gamma_\psi\, f^{-1}$(B) $\subseteq$ f^{-1}($\gamma_\emptyset$(B)) sağlanır.
(4) Her B $\subseteq$ Y için f^{-1}($\iota_\emptyset$(B)) $\subseteq$ $\iota_\psi\, f^{-1}$(B) sağlanır.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): x $\in$ γ_ψ(A) olsun. f(x) $\notin$ $\gamma_\emptyset$ f(A) ise o zaman V$\cap f$(A) = $\emptyset$ olacak şekilde bir V $\in$ $\emptyset$(f(x)) vardır. Hipotezden, f(U) $\subseteq$ V olacak şekilde bir U $\in$ ψ(x) vardır. Böylece f(U)$\cap$ f(A) = $\emptyset$ olur. Sonuç olarak U$\cap$A = $\emptyset$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

(2) $\Rightarrow$ (3): B $\subseteq$ Y için A = f^{-1}(B) olsun. O zaman (2) şıkkından ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (4): Teorem 3.1.6. dan açıktır.

(4) ⇒ (1): $x \in X$ için $V \in \emptyset(\ f(x)\ )$ olsun. Bu durumda $f(x) \in \iota_{\emptyset}(V)$ olur. Hipotezden, $x \in f^{-1}(\ \iota_{\emptyset}(V)\ ) \subseteq \iota_{\psi} f^{-1}(V)$ elde edilir. İç tanımından $U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ vardır. Sonuç olarak, f fonksiyonunun $\omega(\psi,\emptyset)$ – sürekliliği elde edilir.

3.2. Güçlü Genelleştirilmiş Komşuluk Sistemleri

Tanım 3.2.1. (Min, 2008b) $\psi : X \rightarrow P(P(X))$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan ψ fonksiyonuna X kümesi üzerinde güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi denir.

i) $V \in \psi(x)$ için $x \in V$ dir.
ii) $U,V \in \psi(x)$ için $U \cap V \in \psi(x)$ dir.

$(\ X,\psi\ )$ ikilisine X kümesi üzerinde güçlü genelleştirilmiş komşuluk uzayı ve $V \in \psi(x)$ kümesine de $x \in X$ noktasının güçlü genelleştirilmiş komşuluğu denir. Tez boyunca güçlü genelleştirilmiş komşuluk uzayını GGKU olarak göstereceğiz.

Her güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi bir genelleştirilmiş komşuluk sistemidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.2.2. (Min, 2008b) $X = \{a,b,c\}$ ve $\psi : X \rightarrow P(P(X))$ fonksiyonu $\psi(a) = \{\{a,b\},\{a,c\}\}$, $\psi(b) = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ ve $\psi(c) = \emptyset$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda ψ genelleştirilmiş komşuluk sistemidir. Fakat $\{a,b\} \in \psi(a)$ ve $\{a,c\} \in \psi(a)$ için $\{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\} \notin \psi(a)$ olduğundan güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi değildir.

Her zayıf komşuluk sistemi güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığına ait bir örnektir.

Örnek 3.2.3. $X = \{a,b,c\}$ ve $\psi : X \rightarrow P(P(X))$ fonksiyonu $\psi(a) = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a\}\}$, $\psi(b) = \{\{a,b\},\{b,c\},\{b\}\}$ ve $\psi(c) = \emptyset$ şeklinde tanımlansın. O halde, ψ güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemidir. Fakat $\psi(c) = \emptyset$ olduğundan zayıf komşuluk sistemi değildir.

Tanım 3.2.4. (Min, 2008b) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir GGKU ve $A \subseteq X$ olsun.

$$\iota_\psi(A) = \{ x \in A : V \subseteq A \text{ olacak şekilde bir } V \in \psi(x) \text{ vardır} \}$$

ve

$$\gamma_\psi(A) = \{ x \in X : V \in \psi(x) \text{ için } V \cap A \neq \emptyset \text{ dır} \}$$

kümeleri sırasıyla A kümesinin güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemine göre içini ve kapanışını gösterir.

Teorem 3.2.5. (Min, 2008b) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir GGKU olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her $A \in P(X)$ için $\iota_\psi(A) \subseteq A$ dır.
(2) Her $A,B \in P(X)$ için $\iota_\psi(A \cap B) = \iota_\psi(A) \cap \iota_\psi(B)$ dir.

İspat. (1) Açıktır.

(2) $x \in \iota_\psi(A) \cap \iota_\psi(B)$ olsun. O zaman $U \subseteq A$, $V \subseteq B$ olacak şekilde $U,V \in \psi(x)$ vardır. Tanım 3.2.1 den $U \cap V \in \psi(x)$ olur. Bu durumda, $x \in \iota_\psi(A \cap B)$ olduğu elde edilir. Tersi açıktır.

Aşağıdaki örnek ψ güçlü genelleştirilmiş komşuluk sisteminin genelde, idempotent özelliğini sağlamadığını gösterir.

Örnek 3.2.6. (Min, 2008b) $X = \{a,b,c,d\}$ ve $\psi : X \rightarrow P(P(X))$ güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi $\psi(a) = \{\{a,c\}\}$, $\psi(b) = \{\{b,c\}\}$ ve $\psi(c) = \psi(d) = \emptyset$ şeklinde tanımlansın. $A = \{a,b,c\}$ için $\iota_\psi(A) = \{a,b\}$ dir. Fakat, $\iota_\psi(\iota_\psi(A)) = \emptyset$ dir. O halde $\iota_\psi(A) \neq \iota_\psi(\iota_\psi(A))$ elde edilir.

Teorem 3.2.7. (Min, 2008b) (X,ψ), X kümesi üzerinde bir GGKU olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her A ∈ P(X) için A ⊆ γ_ψ(A) olur.

(2) Her A,B ∈ P(X) için γ_ψ(A∪B) = γ_ψ(A)∪ γ_ψ(B) olur.

(3) γ_ψ(A) = X - ι_ψ(X-A) ve ι_ψ(A) = X - γ_ψ(X-A) olur.

İspat. (1) Tanım 3.2.4 ten açıktır.

(2) x ∈ γ_ψ(A∪B) olsun. O zaman V ∈ ψ(x) için V∩(A∪B) ≠ ∅ olur. O halde V∩(A∪B) = (V∩A)∪(V∩B) ≠ ∅ durumu aşağıdaki gibi üç farklı durumda incelenir:

- V∩A ≠ ∅ ve V∩B = ∅ olsun. O halde x ∈ γ_ψ(A) ve x ∉ γ_ψ(B) olur. Sonuç olarak x ∈ γ_ψ(A)∪ γ_ψ(B) elde edilir.
- V∩A = ∅ ve V∩B ≠ ∅ olsun. O halde x ∉ γ_ψ(A) ve x ∈ γ_ψ(B) olur. Sonuç olarak x ∈ γ_ψ(A)∪ γ_ψ(B) elde edilir.
- V∩A ≠ ∅ ve V∩B ≠ ∅ olsun. O halde x ∈ γ_ψ(A) ve x ∈ γ_ψ(B) olur. Sonuç olarak x ∈ γ_ψ(A)∪ γ_ψ(B) elde edilir.

Tersi açıktır.

(3) X - ι_ψ(X-A) = X – { x ∈ X : V ⊆ X – A, ∃ V ∈ ψ(x) }

= X – { x ∈ X : V∩A = ∅, ∃ V ∈ ψ(x) }

= { x ∈ X : V∩A ≠ ∅, ∀ V ∈ ψ(x) }

= γ_ψ(A)

γ_ψ(A) = X - ι_ψ(X-A) eşitliğinde A yerine X – A yazılırsa ι_ψ(A) = X - γ_ψ(X-A) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.8. (Min, 2008b) (1) (X,ψ) X kümesi üzerinde bir GGKU ve her A ⊆ X için I : P(X) → P(X) fonksiyonu I(A) = ι_ψ(A) şeklinde tanımlı olsun. O halde I bir genelleştirilmiş* iç operatörüdür.

(2) I : P(X) → P(X) bir genelleştirilmiş* iç operatörü ve $\emptyset_I$: X → $P(P$(X)) $\emptyset_I$(x) = { I(A) : A ⊆ X için x ∈ I(A) } şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\emptyset_I$, I tarafından oluşturulan güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemidir.

İspat. (1) ι_ψ(A) nın tanımından ve Teorem 3.2.5 ile I operatörünün genelleştirilmiş* iç operatörü olduğu elde edilir.

(2) I operatörünün genelleştirilmiş* iç operatörü olmasından ve $\emptyset_I$ nın tanımından açıktır.

(X,ψ) X kümesi üzerinde bir GGKU ve her A ⊆ X için I : P(X) → P(X) I(A) = ι(A) şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda I = ι tarafından oluşturulan $\emptyset_\iota$ güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi ile ψ arasında bir ilişki yoktur. Aşağıdaki örnek bunu göstermektedir.

Örnek 3.2.9. (Min, 2008b) X = {a,b,c} ve ψ : X → $P(P$(X)) güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi ψ(a) = {{a},{a,c}}, ψ(b) = {{b},{b,c}} ve ψ(c) = ∅ şeklinde tanımlansın. I = ι tarafından oluşturulan $\emptyset_\iota$: X → $P(P$(X)) güçlü genelleştirilmiş komşuluk sistemi $\emptyset_\iota$(a) = {{a},{a,b}}, $\emptyset_\iota$(b) = {{b},{a,b}} ve $\emptyset_\iota$(c) = ∅ şeklinde olur.

Tanım 3.2.10. (Min, 2008b) f : X → Y bir fonksiyon, (X,ψ) ve (Y,∅) sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde güçlü genelleştirilmiş komşuluk uzayları olsun. x ∈ X ve V ∈ ∅(f(x)) için f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) varsa f fonksiyonu (ψ,∅) – süreklidir denir.

Teorem 3.2.11. (Min, 2008b) f : X → Y bir fonksiyon, (X,ψ) ve (Y,∅) güçlü genelleştirilmiş komşuluk uzayları olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(1) f, (ψ,∅) – süreklidir.
(2) Her A ⊆ X için f(γ_ψ(A)) ⊆ $\gamma_\emptyset f$(A) sağlanır.
(3) Her B ⊆ Y için $\gamma_\psi\ f^{-1}$(B) ⊆ f^{-1}($\gamma_\emptyset$(B)) sağlanır.
(4) Her B ⊆ Y için f^{-1}($\iota_\emptyset$(B)) ⊆ $\iota_\psi\ f^{-1}$(B) sağlanır.

İspat. (1) ⇒ (2) : x ∈ γ_ψ(A) olsun. f(x) ∉ $\gamma_\emptyset$ f(A) ise o zaman V∩f(A) = ∅ olacak şekilde bir V ∈ ∅(f(x)) vardır. Hipotezden f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) kümesi vardır. Böylece f(U)∩ f(A) = ∅ olur. Sonuç olarak U∩A = ∅ bulunur. Bu ise çelişkidir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): Açıktır.

(4) ⇒ (1): $x \in X$ için $V \in \emptyset(\, f(x)\,)$ olsun. Bu durumda $f(x) \in \iota_{\emptyset}(V)$ olur. Hipotez yardımıyla, $x \in f^{-1}(\, \iota_{\emptyset}(V)\,) \subseteq \iota_{\psi} f^{-1}(V)$ elde edilir. İç tanımından $U \subseteq f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ vardır. Sonuç olarak f fonksiyonu $(\psi,\emptyset)$ – süreklidir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLARDA ZAYIF SÜREKLİLİK, GENELLEŞTİRİLMİŞ θ - SÜREKLİLİK, MİXED ZAYIF SÜREKLİLİK VE MİXED θ - SÜREKLİLİK

4.1. Zayıf Süreklilik

Tanım 4.1.1. (Min, 2008a) f : X → Y bir fonksiyon, (X, μ_1) ve (Y, μ_2) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ μ_2 için x ∈ U ve f(U) ⊆ c(V) olacak şekilde bir U ∈ μ_1 varsa f fonksiyonuna zayıf (μ_1 , μ_2) – süreklidir denir.

Her (μ_1 , μ_2) – sürekli fonksiyon zayıf (μ_1 , μ_2) – süreklidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.2. (Min, 2008a) X = {a,b,c,d} ve μ_1, μ_2 X kümesi üzerinde μ_1 = {∅,{a},{a,b},{b,c},{a,b,c}} ve μ_2 = {∅,{a,c},{b,c},{a,b,c}} şeklinde tanımlı genelleştirilmiş topolojiler olsun. f : (X, μ_1) → (X, μ_2) fonksiyonu f(a) = b, f(b) = f(d) = d ve f(c) = c şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu zayıf (μ_1, μ_2) – süreklidir. Fakat {a,b} ∈ μ_2 için f^{-1}({b,c}) = {a,c} ∉ μ_1 olduğundan f fonksiyonu (μ_1, μ_2) – sürekli değildir.

Teorem 4.1.3. (Min, 2008a) f : X → Y bir fonksiyon, (X, μ_1) ve (Y, μ_2) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ_1, μ_2) – süreklidir.
(2) Her V ∈ μ_2 için f^{-1}(V) ⊆ i (f^{-1}(c (V))) olur.
(3) Her A μ_2 - kapalı kümesi için c (f^{-1}(i(A))) ⊆ f^{-1}(A) olur.
(4) Her B ⊆ Y için c (f^{-1}(i(c(B)))) ⊆ f^{-1}(c(B)) olur.
(5) Her B ⊆ Y için f^{-1}(i(B)) ⊆ i (f^{-1}(c(i(B)))) olur.
(6) Her V∈ μ_2 için c(f^{-1}(V)) ⊆ f^{-1}(c(V)) olur.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ μ_2 ve x ∈ f^{-1}(V) olsun. Hipotezden, x ∈ U ve f(U) ⊆ c(V) olacak şekilde bir U ∈ μ_1 kümesi vardır. Buradan x ∈ U ⊆ f^{-1}(c(V)) ve x ∈ i (f^{-1}(c(V))) olur.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): B ⊆ Y için c(B) μ_2 - kapalı olduğundan (3) şıkkından açıktır.

(4) ⇒ (5): Açıktır.

(5) ⇒ (6): V ∈ μ_2 olsun. x ∉ $f^{-1}(c(\mathrm{V}))$ olduğunu kabul edelim. O zaman f(x) ∉ c(V) olur. Bu durumda, U∩V = ∅ olacak şekilde bir f(x) ∈ U ∈ μ_2 kümesi vardır. Buradan c(U)∩V = ∅ ve (5) şıkkından x ∈ f^{-1}(U) ⊆ $i(f^{-1}(c(\mathrm{U})))$ elde edilir. İç tanımından x ∈ G ⊆ $f^{-1}(c(\mathrm{U}))$ olacak şekilde öyle bir G ∈ μ_1 kümesi vardır. c(U)∩V = ∅ ve f(G) ⊆ c(U) olduğundan G∩ f^{-1}(V) = ∅ olur. Böylece x ∉ $c(f^{-1}(\mathrm{V}))$ elde edilir.

(6) ⇒ (1): x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ μ_2 olsun. V = i(V) ⊆ $i(c(\mathrm{V}))$ olduğundan (6) yardımıyla x ∈ f^{-1}(V) ⊆ $f^{-1}(i(c(\mathrm{V})))$ = X- $f^{-1}(c(\mathrm{Y} - c(\mathrm{V})))$ ⊆ X – $c(f^{-1}(\mathrm{Y} - c(\mathrm{V})))$ = $i(f^{-1}(c(\mathrm{V})))$ elde edilir. Böylece x ∈ U ve U ⊆ $f^{-1}(c(\mathrm{V}))$ olacak şekilde bir U ∈ μ_1 kümesi vardır. O halde f fonksiyonu zayıf (μ_1, μ_2) – süreklidir.

Teorem 4.1.4. (Min, 2008a) (X, g) genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. O zaman X kümesi hem g – yarı açık hem de g – β – açık bir kümedir.

İspat. i(X) ⊆ $c(i(\mathrm{X}))$ = F ≠ X olduğunu kabul edelim. X – F ≠ ∅ ve X – F g – açık bir kümedir. i(X), X kümesinde en geniş g – açık küme olduğundan X – F kümesini içerir. Böylece çelişki elde edilir. O halde X = $c(i(\mathrm{X}))$ olur ve X kümesinin g – yarı açık bir küme olduğu elde edilir. Benzer şekilde c(X) = X olduğundan X kümesinin g – β – açık bir küme olduğu ispatlanır.

Teorem 4.1.5. (Min, 2008a) f : X → Y bir fonksiyon, (X,μ_1) ve (Y,μ_2) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ_1, μ_2) – süreklidir.
(2) Her K ⊆ Y g – regüler kapalı kümesi için $c(f^{-1}(i(\mathrm{K})))$ ⊆ f^{-1}(K) dır.
(3) Her G ⊆ Y g – β – açık kümesi için $c(f^{-1}(i(c(\mathrm{G}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\mathrm{G}))$ dır.
(4) Her G ⊆ Y g – yarı açık kümesi için $c(f^{-1}(i(c(\mathrm{G}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\mathrm{G}))$ dır.

İspat. (1) ⇒ (2): K ⊆ Y kümesi g – regüler kapalı olsun. i(K) ∈ μ_2 olmasından ve Teorem 4.1.3 (6) ile $c(f^{-1}(i(\mathrm{K})))$ ⊆ $f^{-1}(c(i(\mathrm{K})))$ olur. K kümesinin g – regüler kapalılığından $c(f^{-1}(i(\mathrm{K})))$ ⊆ f^{-1}(K) elde edilir.

(2) ⇒ (3): G kümesi g – β – açık olsun. O zaman c(G) ⊆ $c(i(c$(G))) ⊆ c(G) olduğundan, c(G) g – regüler kapalı olur. (2) ile $c(f^{-1}(i(c(\text{G}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\text{G}))$ elde edilir.

(3) ⇒ (4): Her g – yarı açık küme g – β – açık küme olduğundan açıktır.

(4) ⇒ (1): V ∈ μ_2 olsun. (4) ile $c(f^{-1}(\text{V}))$ ⊆ $c(f^{-1}(i(c(\text{V}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\text{V}))$ olur. Böylece Teorem 4.1.3 (6) ile f fonksiyonu zayıf (μ_1, μ_2) – sürekli olur.

Teorem 4.1.6. (Min, 2008a) f : X → Y bir fonksiyon, (X, μ_1) ve (Y, μ_2) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ_1, μ_2) – süreklidir.
(2) Her G ⊆ Y g – ön açık kümesi için $c(f^{-1}(i(c(\text{G}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\text{G}))$ olur.
(3) Her G ⊆ Y g – ön açık kümesi için $c(f^{-1}(\text{G}))$ ⊆ $f^{-1}(c(\text{G}))$ olur.
(4) Her G ⊆ Y g – ön açık kümesi için $f^{-1}(\text{G})$ ⊆ $i(f^{-1}(c(\text{G})))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): G kümesi g – ön açık olsun. O zaman c(G) = $c(i(c$(G))) ve c(G) g – regüler kapalı olur. Teorem 4.1.5. (2) ile $c(f^{-1}(i(c(\text{G}))))$ ⊆ $f^{-1}(c(\text{G}))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): G kümesi g – ön açık olsun. g – ön açık küme tanımından ve (3) den $f^{-1}(\text{G})$ ⊆ $f^{-1}(i(c(\text{G})))$ = X - $f^{-1}(c($ Y – c(G))) ⊆ X – $c(f^{-1}($Y – c(G))) = $i(f^{-1}(c(\text{G})))$ elde edilir.

(4) ⇒ (1): Her g – açık küme g – ön açık küme olduğundan, (4) ve Teorem 4.1.5. (2) yardımıyla f fonksiyonu, zayıf (μ_1, μ_2) – sürekli olur.

Tanım 4.1.7. (Min, 2008a) f : X ⟶ Y bir fonksiyon, ψ ve φ sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde genelleştirilmiş komşuluk sistemleri olsun. x ∈ X ve V ∈ φ(f(x)) için f(U) ⊆ γ(V) olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) varsa, f fonksiyonuna x ∈ X noktasında zayıf (ψ,φ) – süreklidir denir. f fonksiyonu X kümesinin her noktasında zayıf (ψ,φ) – sürekli ise f fonksiyonuna zayıf (ψ,φ) – süreklidir denir.

Her (ψ,φ) – sürekli fonksiyon zayıf (ψ,φ) – süreklidir, fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.8. (Min, 2008a) X = {a,b,c,d}, ψ ve φ genelleştirilmiş komşuluk sistemleri ψ(a) = {{a},{a,b},{a,b,c}}, ψ(b) = {{b,c},{a,b},{a,b,c}}, ψ(c) = {{b,c},{a,b,c}}, ψ(d) = ∅ ve φ(a) = {{a,c},{a,b,c}}, φ(b) = {{a,b,c}}, φ(c) = {{a,c},{a,b,c}}, φ(d) = ∅ şeklinde tanımlansın. f : X → X fonksiyonu da f(a) = a, f(b) = f(d) = d ve f(c) = c olsun. f fonksiyonu, zayıf (ψ,φ) –süreklidir, fakat c ∈ X noktasında (ψ,φ) – sürekli değildir. O halde f fonksiyonu, (ψ,φ) –sürekli değildir.

Teorem 4.1.9. (Min, 2008a) ψ ∈ Ψ(X) ve φ ∈ Ψ(Y) ve f : X → Y bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (ψ,φ) – süreklidir.
(2) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(\iota(B)) \subseteq \iota(f^{-1}(\gamma(B)))$ olur.
(3) Her B ⊆ Y için $\gamma(f^{-1}(\iota(B))) \subseteq f^{-1}(\gamma(B))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): x ∈ f^{-1}(ι(B)) olsun. O halde, V ⊆ B olacak şekilde bir V ∈ φ(f(x)) vardır. Hipotezden, $f(U) \subseteq \gamma(V) \subseteq \gamma(B)$ olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) kümesi vardır. $x \in f^{-1}(\gamma(V)) \subseteq f^{-1}(\gamma(B))$ olduğundan $x \in \iota(f^{-1}(\gamma(B)))$ elde edilir.

(2) ⇒ (1): x ∈ X ve V ∈ φ(f(x)) olsun. Bu durumda $f(x) \in \iota(V)$ ve hipotez ile $x \in f^{-1}(\iota(V)) \subseteq \iota(f^{-1}(\gamma(V)))$ olur. Böylece $U \subseteq f^{-1}(\gamma(V))$ olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) kümesi vardır. O halde f fonksiyonu zayıf (ψ,φ) – süreklidir.

(2) ⇔ (3): Açıktır.

Teorem 4.1.10. (Min, 2008a) ψ ∈ Ψ(X), φ ∈ Ψ(Y) ve f : X → Y bir fonksiyon olsun. f, zayıf (ψ,φ) – sürekli ise zayıf (g_ψ, g_φ) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve $f(x) \in G \in g_\varphi(f(x))$ olsun. g_ψ nin tanımından V ⊆ G olacak şekilde bir V ∈ φ(f(x)) kümesi vardır. $f(x) \in G \subseteq \gamma(G)$ olduğundan $f(x) \in \gamma(G)$ ve $x \in f^{-1}(\gamma(G))$ olur. Hipotezden, x ∈ U ve $f(U) \subseteq \gamma(V)$ olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) kümesi vardır. Buradan $f(U) \subseteq \gamma(V) \subseteq \gamma(G)$ ve $U \subseteq f^{-1}(\gamma(G))$ olur. $H = f^{-1}(\gamma(G))$ alalım. g_ψ nin tanımından $H \in g_\psi$ olur. Buradan $f(H) \subseteq \gamma(G) \subseteq c(G)$ elde edilir. Sonuç olarak f fonksiyonu, zayıf (g_ψ, g_φ) – süreklidir.

Teorem 4.1.10 un tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.11. (Min, 2008a) X = {a,b,c} olsun. ψ ve φ genelleştirilmiş komşuluk sistemleri ψ(a) = {X}, ψ(b) = {X}, ψ(c) = {X} ve φ(a) = {{a},{a,b}}, φ(b) = {{b,c}}, φ(c) = {X} şeklinde tanımlansın. ψ ve φ yardımıyla sırasıyla g_{ψ} ve g_{φ} genelleştirilmiş topolojileri g_{ψ} = {∅,X} ve g_{φ} = {∅,{a},X} şeklinde olur. f : X → X fonksiyonu birim fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu, zayıf (g_{ψ}, g_{φ}) – süreklidir, fakat a ∈ X noktasında zayıf (ψ,φ) – sürekli değildir. Bu durumda f fonksiyonu, zayıf (ψ,φ) – sürekli değildir.

Tanım 2.34, Tanım 2.37, Tanım 4.1.1 ve Tanım 4.1.7 den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} (\psi,\varphi)\text{ – sürekli} & \Rightarrow & (g_{\psi}, g_{\varphi})\text{ – sürekli} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{zayıf }(\psi,\varphi)\text{ –sürekli} & \Rightarrow & \text{zayıf }(g_{\psi}, g_{\varphi})\text{ - sürekli} \end{array}$$

Teorem 4.1.12. g_1, X kümesi üzerinde, g_2, Y kümesi üzerinde ve g_3, Z kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f : X → Y fonksiyonu (g_1, g_2) – sürekli ve g : Y → Z fonksiyonu zayıf (g_2, g_3) – sürekli ise gof : X → Z fonksiyonu da zayıf (g_1, g_3) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve $g(f$(x)) ∈ G ∈ g_3 olsun. g fonksiyonunun zayıf (g_2, g_3) – sürekliliğinden g(V) ⊆ c(G) olacak şekilde bir f(x) ∈ V ∈ g_2 kümesi vardır. f fonksiyonunun (g_1, g_2) – sürekliliğinden f^{-1}(V) ∈ g_1 olur. U = f^{-1}(V) ∈ g_1 alalım. Bu durumda, (gof)(U) = $g(f$(U)) = $g(f(f^{-1}$(V))) ⊆ g(V) ⊆ c(G) olur. Sonuç olarak $go\ f$ fonksiyonu zayıf (g_1, g_3) – süreklidir.

Teorem 4.1.13. g_1, X kümesi üzerinde, g_2, Y kümesi üzerinde ve g_3, Z kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f : X → Y fonksiyonu (g_1, g_2)

– açık ve gof : X → Z fonksiyonu zayıf (g_1, g_3) – sürekli ise g : Y → Z fonksiyonu da zayıf (g_2, g_3) – süreklidir.

İspat. y ∈ Y ve g(y) ∈ G ∈ g_3 olsun. y = f(x) olacak şekilde bir x ∈ X noktası vardır. O halde gof fonksiyonunun zayıf (g_1, g_3) – sürekliliğinden (gof)(U) ⊆ c(G) olacak şekilde bir x ∈ U ∈ g_1 kümesi vardır. f fonksiyonunun (g_1, g_2) – açık olmasından f(U) ∈ g_2 olur. Bu durumda, f(U) ∈ g_2 için (gof)(U) = $g(f$(U)) ⊆ c(G) olur. Sonuç olarak g fonksiyonu zayıf (g_2, g_3) – süreklidir.

Teorem 4.1.14. f : X → Y ve g : Y → Z iki fonksiyon, $\psi_1 \in \Psi(X)$, $\psi_2 \in \Psi(Y)$ ve $\psi_3 \in \Psi(Z)$ olsun. f fonksiyonu (ψ_1, ψ_2) – sürekli ve g fonksiyonu zayıf (ψ_2, ψ_3) – sürekli ise gof : X → Z fonksiyonu da zayıf (ψ_1, ψ_3) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve G ∈ $\psi_3(g(f(x)))$ olsun. g fonksiyonunun zayıf (ψ_2, ψ_3) – sürekliliğinden g(V) ⊆ γ(G) olacak şekilde bir V ∈ $\psi_2(f(x))$ kümesi vardır. f fonksiyonunun (ψ_1, ψ_2) – sürekliliğinden f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ ψ_1(x) kümesi vardır. Bu durumda, (gof)(U) ⊆ g(V) ⊆ γ(G) olur. Sonuç olarak gof fonksiyonu zayıf (ψ_1, ψ_3) – süreklidir.

4.2. Genelleştirilmiş θ– süreklilik

Tanım 4.2.1. (Min, 2009b) f : X ⟶ Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g' için x ∈ U ve $f(c_g(U)) \subseteq c_{g'}(V)$ olacak şekilde bir U ∈ g varsa f fonksiyonuna $\theta(g,g')$ – süreklidir denir.

Teorem 4.2.2. (Min, 2009b) f : X ⟶ Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(g,g')$ – süreklidir.
(2) Her V ∈ g' için $f^{-1}(V) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(V)))$ olur.
(3) Y − F ∈ g' olacak şekilde her F ⊆ Y kümesi için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g'}(F))) \subseteq f^{-1}(F)$ olur.
(4) Her B ⊆ Y için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g'}(c_{g'}(B)))) \subseteq f^{-1}(c_{g'}(B))$ olur.

(5) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(i_{g'}(\mathrm{B})) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(i_{g'}(\mathrm{B}))))$ olur.
(6) Her V ∈ g' için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V}))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ g' ve x ∈ $f^{-1}(\mathrm{V})$ olsun. Hipotezden, x ∈ U ve $f(c_g(\mathrm{U})) \subseteq c_{g'}(\mathrm{V})$ olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. x ∈ U ⊆ $c_g(U) \subseteq f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V}))$ olduğundan x ∈ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V})))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): B ⊆ Y için Y − $c_{g'}(\mathrm{B}) \in g'$ olduğundan açıktır.

(4) ⇒ (5): Açıktır.

(5) ⇒ (6): V ∈ g' ve x ∉ $f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V}))$ olsun. Buradan U∩V = ∅ olacak şekilde bir f(x) ∈ U ∈ g' kümesi vardır. O halde $c_{g'}(\mathrm{U})$∩V = ∅ elde edilir. $i_{g'}(\mathrm{U})$ = U olduğundan ve (5) ile x ∈ $f^{-1}(\mathrm{U}) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{U})))$ olur. Bu durumda x ∈ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{U})))$ olduğundan x ∈ G ⊆ $c_g(\mathrm{G}) \subseteq f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{U}))$ olacak şekilde bir G ∈ g kümesi vardır. $c_{g'}(\mathrm{U})$∩V = ∅ ve $f(c_g(\mathrm{G})) \subseteq c_{g'}(\mathrm{U})$ ile $c_g(\mathrm{G}) \cap f^{-1}(\mathrm{V}) = \emptyset$ elde edilir. O halde, x ∉ $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V}))$ bulunur.

(6) ⇒ (1): x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g' olsun. (6) şıkkından ve Lemma 2.12 ile $i_g(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq c_g(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq \gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V}))$ elde edilir. U = $i_g(f^{-1}(\mathrm{V}))$ alalım. O zaman, U ∈ g ve $f(c_g(\mathrm{U})) \subseteq c_{g'}(\mathrm{V})$ olur.

Lemma 4.2.3. (Min, 2009b) (X, g) bir genelleştirilmiş topolojik uzay ve A ⊆ X olsun. A ∈ g ise $c_g(\mathrm{A}) = \gamma_\theta(\mathrm{A})$ sağlanır.

İspat. x ∈ $\gamma_\theta(\mathrm{A})$ olsun. Bu durumda, x ∈ U ∈ g için $c_g(\mathrm{U})$∩A ≠ ∅ olur. z ∈ $c_g(\mathrm{U})$∩A alalım. z ∈ A ∈ g ve z ∈ $c_g(\mathrm{U})$ olduğundan U∩A ≠ ∅ bulunur. Lemma 2.12 den x ∈ $c_g(\mathrm{A})$ olur. Böylece $\gamma_\theta(\mathrm{A}) \subseteq c_g(\mathrm{A})$ elde edilir.

Teorem 4.2.4. (Min, 2009b) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, θ(g,g') – süreklidir.
(2) Her V ∈ g' için $f^{-1}(\mathrm{V}) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V})))$ olur.

(3) Her V ∈ g' için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V}))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ g' olsun. f fonksiyonunun $\theta(g,g')$ – sürekliliğinden ve Teorem 4.2.2 den $f^{-1}(\mathrm{V}) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g'}(\mathrm{V})))$ elde edilir. Lemma 4.2.3 ten V ∈ g' için $c_{g'}(\mathrm{V}) = \gamma_{\theta'}(\mathrm{V})$ olur. O halde $f^{-1}(\mathrm{V}) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V})))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (1): Teorem 4.2.2 ve Lemma 4.2.3 ten açıktır.

Lemma 4.2.5. (Min, 2009b) f : X → Y , (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde (g,g') – sürekli ve (g,g') – açık bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) Her V ∈ g' için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V}))$ dır.
(2) Her U ∈ g için $f(\gamma_\theta(\mathrm{U})) \subseteq \gamma_{\theta'}(f(\mathrm{U}))$ dır.

İspat. (1) ⇒ (2): U ∈ g olsun. f, (g,g') – açık olduğundan $f(\mathrm{U}) \in g'$ olur. Hipotezden, $\gamma_\theta(f^{-1}(f(\mathrm{U}))) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta'}(f(\mathrm{U})))$ elde edilir. Böylece $f(\gamma_\theta(\mathrm{U})) \subseteq \gamma_{\theta'}(f(\mathrm{U}))$ olur.

(2) ⇒ (1): V ∈ g' olsun. f, (g,g') – sürekli olduğundan $f^{-1}(\mathrm{V}) \in g$ olur. Hipotezden, $f(\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V}))) \subseteq \gamma_{\theta'}(f(f^{-1}(\mathrm{V})))$ bulunur. Böylece $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V}))$ elde edilir.

Sonuç 4.2.6. (Min, 2009b) f : X → Y , (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar üzerinde (g,g') – sürekli ve (g,g') – açık bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(g,g')$ – süreklidir.
(2) Her V ∈ g' için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta'}(\mathrm{V}))$ sağlanır.
(3) Her U ∈ g için $f(\gamma_\theta(\mathrm{U})) \subseteq \gamma_{\theta'}(f(\mathrm{U}))$ sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.4 ve Lemma 4.2.5 ten açıktır.

Her $\theta(g,g^{'})$ – sürekli fonksiyon zayıf ($g,g^{'}$) – süreklidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.7. X = {a,b,c,d} olsun. X kümesi üzerindeki g ve $g^{'}$ genelleştirilmiş topolojileri g={∅,{a},{a,d},{a,c},{a,d,c}} ve $g^{'}$ = { ∅ , {a} , {c} , {a,c}} şeklinde tanımlansın. f : X → X fonksiyonu da f(a) = b, f(b) = d, f(c) = c ve f(d) = a olsun. Bu durumda f fonksiyonu, zayıf ($g,g^{'}$) – süreklidir, fakat d ∈ X noktasında $\theta(g,g^{'})$ – sürekli değildir. O halde f fonksiyonu, $\theta(g,g^{'})$ – sürekli değildir.

Tanım 4.2.8. (Min, 2009b) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,$g^{'}$) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ $\theta^{'}$ için x ∈ U ve f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ g varsa f fonksiyonuna, zayıf $\theta(g,g^{'})$ – süreklidir denir.

Teorem 4.2.9. (Min, 2009b) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,$g^{'}$) genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. f fonksiyonu, zayıf ($g,g^{'}$) – sürekli ise zayıf $\theta(g,g^{'})$ – süreklidir.

İspat. x ∈ X için f(x) ∈ V olacak şekilde V ∈ $\theta^{'}$ olsun. O halde f(x) ∈ B ⊆ $c_{g'}$(B) ⊆ V olacak şekilde bir B ∈ $g^{'}$ kümesi vardır. Hipotezden, x ∈ U ve f(U) ⊆ $c_{g'}$(B) olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. Buradan f(U) ⊆ V olur. O halde f fonksiyonu zayıf $\theta(g,g^{'})$ – süreklidir.

Teorem 4.2.9. un tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.2.10. (Min, 2009b) X = {a,b,c} olsun. X kümesi üzerindeki g ve $g^{'}$ genelleştirilmiş topolojileri g = {∅,{a,b},X} ve $g^{'}$ = {∅,{a},{b},{a,b},X} şeklinde tanımlansın. $g^{'}$ tarafından oluşturulan $\theta^{'}$ = { ∅,X } şeklinde olur. f : X → X fonksiyonunu birim fonksiyon olarak alalım. Bu durumda f fonksiyonu zayıf $\theta(g,g^{'})$ – süreklidir, fakat a ∈ X noktasında zayıf ($g,g^{'}$) – sürekli değildir. O halde f fonksiyonu zayıf ($g,g^{'}$) – sürekli değildir.

Tanım 4.1.1, Tanım 4.2.1 ve Tanım 4.2.8 den aşağıdaki diyagram elde edilir.

$\theta(g,g')$ – sürekli ⇒ zayıf (g,g') – sürekli ⇒ zayıf $\theta(g,g')$ – sürekli

4.3. Mixed Zayıf Süreklilik

Tanım 4.3.1. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g_1 için x ∈ U ve f(U) ⊆ c_{g_2}(V) olacak şekilde bir U ∈ μ varsa f fonksiyonuna x noktasında mixed zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir denir. f fonksiyonu X kümesinin her noktasında mixed zayıf (μ, $g_1 g_2$) – sürekli ise f fonksiyonuna mixed zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir (kısaca, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir) denir.

Teorem 4.3.2. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.
(2) Her V ∈ g_1 kümesi için f^{-1}(V) ⊆ $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}(\text{V})))$ olur.
(3) Her A g_1 - kapalı kümesi için $c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(\text{A}))) \subseteq f^{-1}(\text{V})$ olur.
(4) Her B ⊆ Y için $c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}(\text{B})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\text{B}))$ olur.
(5) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(i_{g_1}(\text{B})) \subseteq i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}(i_{g_1}(\text{B}))))$ olur.
(6) Her V ∈ g_2 kümesi için $c_\mu(f^{-1}(\text{V})) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\text{V}))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ g_1 ve x ∈ f^{-1}(V) olsun. Hipotezden, f(U) ⊆ c_{g_2}(V) ve x ∈ U olacak şekilde U ∈ μ kümesi vardır. Buradan x ∈ U ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}(\text{V}))$ ve x ∈ $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}(\text{V})))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): B ⊆Y için c_{g_1}(B) g_1 - kapalı olduğundan açıktır.

(4) ⇒ (5): Açıktır.

(5) ⇒ (6): V ∈ g_2 olsun. x ∉ $f^{-1}(c_{g_1}(\text{V}))$ olduğunu kabul edelim. Buradan f(x) ∉ c_{g_1}(V) olur ve f(x) ∈ U, U∩V = ∅ olacak şekilde bir U ∈ g_1 kümesi vardır. Böylece c_{g_2}(U)∩V = ∅ olur. (5) den x ∈ f^{-1}(U) ⊆ $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}(\text{U})))$ olur ve x ∈ G ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}(\text{U}))$ olacak şekilde bir G ∈ μ kümesi vardır. c_{g_2}(U)∩V = ∅ ve f(G) ⊆ c_{g_2}(V) olduğundan G∩ f^{-1}(V) = ∅ elde edilir. O halde x ∉ $c_\mu(f^{-1}(\text{V}))$ olur.

(6) ⇒ (1): x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g_1 olsun. V = i_{g_1}(V) ⊆ $i_{g_1}(c_{g_2}$(V)) ve Y − c_{g_2}(V) ∈ g_2 olduğundan (6) dan x ∈ f^{-1}(V) ⊆ $f^{-1}(i_{g_1}(c_{g_2}$(V))) = X − $f^{-1}(c_{g_1}$(Y − c_{g_2}(V))) ⊆ X − $c_\mu(f^{-1}$(Y − c_{g_2}(V))) = $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}$(V))) olur. Buradan x ∈ $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}$(V))) olur. O halde x ∈ U ve U ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}$(V)) olacak şekilde bir U ∈ μ kümesi vardır. Böylece f fonksiyonu, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.

Teorem 4.3.3. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f fonksiyonu (μ,g_1) – sürekli ise zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.

İspat. U ∈ g_1 olsun. Hipotezden, f^{-1}(U) ∈ μ olur. U ⊆ $i_{g_1}(c_{g_2}$(U)) olduğundan f^{-1}(U) = $i_\mu(f^{-1}$(U)) ⊆ $i_\mu(f^{-1}(i_{g_1}(c_{g_2}$(U)))) ⊆ $i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}$(U))) elde edilir. Teorem 4.3.2 (2) yardımıyla f fonksiyonu zayıf (μ, $g_1 g_2$) – sürekli olur.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.3.3 ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.3.4. (Min, 2011a) X = {1,2,3} ve Y = {a,b,c,d} olsun. X kümesi üzerindeki μ genelleştirilmiş topolojisi μ = {∅,{1,2}} ve Y kümesi üzerindeki g_1, g_2 genelleştirilmiş topolojileri g_1 = {∅,{a,b},{b,c},{a,b,c}}, g_2 = {∅,{d}} şeklinde tanımlansın. f : X → Y fonksiyonu da f(1) = a, f(2) = b ve f(3) = d olsun. O halde f fonksiyonu zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir, fakat G = {b,c} ∈ g_1 için (μ,g_1) – sürekli değildir. Bu durumda f fonksiyonu (μ,g_1) – sürekli değildir.

Teorem 4.3.5. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.

(2) Her K ⊆ Y (g_1,g_2) – regüler kapalı kümesi için

$c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}$(K))) ⊆ f^{-1}(K) sağlanır.

(3) Her V ⊆ Y $(g_1, g_2)'$ - β' - açık kümesi için

$c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}$(V)))) ⊆ $f^{-1}(c_{g_1}$(V)) sağlanır.

(4) Her U ⊆ Y $(g_1, g_2)'$ - yarı açık kümesi için

$c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}(\mathrm{U})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ sağlanır.

İspat. (1) ⇒ (2): K ⊆ Y kümesi (g_1,g_2) – regüler kapalı olsun. $i_{g_2}(\mathrm{K}) \in g_2$ olduğunda ve Teorem 4.3.2 (6) yardımıyla $c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(\mathrm{K}))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(i_{g_2}(\mathrm{K}))) = f^{-1}(\mathrm{K})$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): V kümesi $(g_1, g_2)'$ - β' - açık olsun. $c_{g_1}(\mathrm{V})$ kümesi (g_1,g_2) – regüler kapalı olduğundan (2) ile $c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}(\mathrm{V})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{V}))$ elde edilir.

(3) ⇒ (4): Her $(g_1, g_2)'$ - yarı açık küme $(g_1, g_2)'$ - β' - açık olduğundan açıktır.

(4) ⇒ (1): V ∈ g_2 olsun. Bu durumda V kümesi $(g_1, g_2)'$ - yarı açık küme olur ve (4) ile $c_\mu(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq c_\mu(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}(\mathrm{V})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{V}))$ elde edilir. O halde Teorem 4.3.2 (6) dan f fonksiyonu zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.

Teorem 4.3.6. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.
(2) Her A ⊆ X için $f(\ c_\mu(\mathrm{A})\ ) \subseteq \gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\ f(\mathrm{A})\ )$ olur.
(3) Her B ⊆ Y için $c_\mu(\ f^{-1}(\mathrm{B})\ ) \subseteq f^{-1}(\ \gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{B})\ )$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): A ⊆ X, x ∈ $c_\mu(\mathrm{A})$ ve $f(\mathrm{x}) \in \mathrm{V} \in g_1$ olsun. Hipotezden, x ∈ U_x ve $f(U_x) \subseteq c_{g_2}(\mathrm{V})$ olacak şekilde bir $U_x \in \mu$ kümesi vardır. x ∈ $c_\mu(\mathrm{A})$ ve x ∈ U_x ∈ μ olduğundan A∩ $U_x \neq \emptyset$ olur. Buradan $f(U_x) \cap f(\mathrm{A}) \neq \emptyset \subseteq c_{g_2}(\mathrm{V}) \cap f(\mathrm{A})$ ile $f(\mathrm{x}) \in \gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\ f(\mathrm{A})\ )$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (1): V ∈ g_2 olsun. Lemma 2.19 dan $\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{V}) = c_{g_1}(\mathrm{V})$ olur. Buradan $c_\mu(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{V})) = f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{V}))$ bulunur. Teorem 4.3.2 (6) dan f fonksiyonu zayıf (μ, $g_1 g_2$) – sürekli olur.

Teorem 4.3.7. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Y kümesi (g_1, g_2) – regüler ise o halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, zayıf (μ, $g_1 g_2$) – süreklidir.
(2) Her B ⊆ Y $\theta(g_1, g_2)$ – kapalı kümesi için $f^{-1}(\mathrm{B})$ μ - kapalıdır.

(3) Her V ⊆ Y $\theta(g_1, g_2)$ – açık kümesi için f^{-1}(V) μ – açıktır.

İspat. (1) ⇒ (2): B ⊆ Y $\theta(g_1, g_2)$ – kapalı olsun. Teorem 2.18 ve Teorem 4.3.6 dan $c_\mu(f^{-1}(\mathrm{B})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{B})) = f^{-1}(\mathrm{B})$ elde edilir. O halde f^{-1}(B) μ – kapalıdır.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (1): V ∈ g_1 olsun. Y kümesi (g_1, g_2) – regüler olduğundan Teorem 2.22 den V $\theta(g_1, g_2)$ – açıktır. Hipotezden, $f^{-1}(\mathrm{V}) = i_\mu(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq i_\mu(f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V})))$ olur. Teorem 4.3.2 (2) yardımıyla f fonksiyonu zayıf (μ, g_1g_2) – sürekli olur.

Teorem 4.3.8. (Min, 2011a) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Y kümesi (g_1, g_2) – regüler ise o halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, (μ, g_1) – süreklidir.
(2) f fonksiyonu, zayıf (μ, g_1g_2) – süreklidir.

İspat. (1) ⇒ (2): Açıktır.

(2) ⇒ (1): x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g_1 olsun. Teorem 2.22 den V kümesi $\theta(g_1,g_2)$ – açıktır. O halde Teorem 4.3.7 den f^{-1}(V) ∈ μ olur. Sonuç olarak f fonksiyonu (μ, g_1) – süreklidir.

4.4. Mixed θ – Süreklilik

Tanım 4.4.1. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g_1 için x ∈ U ve $f(c_\mu(\mathrm{U})) \subseteq c_{g_2}(\mathrm{V})$ olacak şekilde bir U ∈ μ varsa f fonksiyonuna x noktasında mixed $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir denir. f fonksiyonu X kümesinin her noktasında mixed $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli ise f fonksiyonuna mixed $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir (kısaca, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli) denir.

Teorem 4.4.2. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir.
(2) Her V ∈ g_1 için f^{-1}(V) ⊆ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V})))$ olur.
(3) Her F g_1 – kapalı kümesi için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g_2}(\mathrm{F}))) \subseteq f^{-1}(\mathrm{F})$ olur.
(4) Her B ⊆ Y için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g_2}(c_{g_1}(\mathrm{B})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{B}))$ olur.
(5) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(i_{g_1}(\mathrm{B})) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g_2}(i_{g_1}(\mathrm{B}))))$ olur.
(6) Her U ∈ g_2 için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U})) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ g_1 ve x ∈ f^{-1}(V) olsun. O halde x ∈ U ve f(x) ∈ $f(c_\mu(\mathrm{U})) \subseteq c_{g_2}(\mathrm{V})$ olacak şekilde bir U ∈ μ kümesi vardır. x ∈ U ⊆ c_μ(U) ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V}))$ olduğundan ve ι_θ nın tanımından x ∈ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V})))$ olur.

(2) ⇒ (1): V ∈ g_1 ve x ∈ f^{-1}(V) olsun. O halde (2) ile x ∈ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V})))$ olur. Buradan x ∈ U ⊆ c_μ(U) ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V}))$ olacak şekilde bir U ∈ μ kümesi vardır. O halde f fonksiyonu $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir.

(2) ⇔ (3): Açıktır.

(3) ⇔ (4): B ⊆ Y için c_{g_1}(B) g_1 - kapalı olduğundan açıktır.

(4) ⇒ (5): Açıktır.

(5) ⇒ (6): U ∈ g_2 olsun. x ∉ $f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ olduğunu kabul edelim. Buradan f(x) ∉ c_{g_1}(U) olur. f(x) ∈ W ve U∩W = ∅ olacak şekilde bir W ∈ g_1 kümesi vardır. Buradan c_{g_2}(W)∩U = ∅ olur. (5) ile x ∈ f^{-1}(W)⊆ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{W})))$ ve x ∈ G ⊆ c_μ(G) ⊆ $f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{W}))$ olacak şekilde bir G ∈ μ kümesi bulunur. O halde $f(c_\mu(\mathrm{G}))\cap f^{-1}(\mathrm{U}) = \emptyset$ ve x ∉ $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U}))$ elde edilir.

(6) ⇒ (1): B ⊆ Y için $i_{g_2}(c_{g_1}(\mathrm{B})) \in g_2$ olduğundan açıktır.

Sonuç 4.4.3. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Eğer g_1 = g_2 ise o halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_1)$ – süreklidir.
(2) Her V ∈ g_1 için f^{-1}(V) ⊆ $\iota_\theta(f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{V})))$ olur.
(3) Her A g_1 - kapalı kümesi için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g_1}(\mathrm{A}))) \subseteq f^{-1}(\mathrm{A})$ olur.
(4) Her B ⊆ Y için $\gamma_\theta(f^{-1}(i_{g_1}(c_{g_1}(\mathrm{B})))) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{B}))$ olur.
(5) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(i_{g_1}(\mathrm{B})) \subseteq \iota_\theta(f^{-1}(c_{g_1}(i_{g_1}(\mathrm{B}))))$ olur.
(6) Her U ∈ g_1 için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U})) \subseteq f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ olur.

İspat. Açıktır.

Her $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli fonksiyon zayıf (μ,g_1g_2) – süreklidir, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığına aittir.

Örnek 4.4.4. (Min, 2011b) X = {1,2,3} ve Y = {a,b,c,d} olsun. X kümesi üzerinde μ genelleştirilmiş topolojisi μ = {∅,{1,2}} ve Y kümesi üzerindeki g_1, g_2 genelleştirilmiş topolojileri g_1 = {∅,{a,b},{b,c},{a,b,c}}, g_2 = {∅,{d}} şeklinde tanımlansın. f : X → Y fonksiyonu da f(1) = a, f(2) = b ve f(3) = d olsun. O zaman f fonksiyonu, zayıf (μ,g_1g_2) – süreklidir. x = 1 noktasında f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli değildir. O halde f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli değildir.

Teorem 4.4.5. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f fonksiyonu, (μ,g_2) – sürekli ve zayıf (μ,g_1g_2) – sürekli ise f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir.

İspat. U ∈ g_2 için f fonksiyonu, (μ,g_2) – sürekli olduğundan f^{-1}(U) ∈ μ olur. Lemma 4.2.3 ve Lemma 2.19 yardımıyla $c_\mu(f^{-1}(\mathrm{U})) = \gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U}))$ ve $\gamma_{\theta(g_{1,}g_2)}(\mathrm{U}) = c_{g_1}(\mathrm{U})$ elde edilir. Teorem 4.3.6 dan $c_\mu(f^{-1}(\mathrm{U})) = \gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_{1,}g_2)}(\mathrm{U})) = f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ olur. Böylece Teorem 4.4.2 (6) dan f fonksiyonu $\theta(\mu,g_1g_2)$ – sürekli olur.

Teorem 4.4.6. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(\mu,g_1g_2)$ – süreklidir.
(2) Her A ⊆ X için $f(\gamma_\theta(\mathrm{A})) \subseteq \gamma_{\theta(g_{1,}g_2)}(f(\mathrm{A}))$ dır.
(3) Her B ⊆ Y için $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{B})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_{1,}g_2)}(\mathrm{B}))$ dır.

İspat. (1) ⇒ (2): A ⊆ X için x ∈ γ_θ(A) ve f(x) ∈ V ∈ g_1 olsun. Hipotezden, $f(c_\mu(U_x)) \subseteq c_{g_2}(\mathrm{V})$ olacak şekilde x i içeren bir U_x ∈ μ kümesi vardır. x ∈ γ_θ(A) olduğundan U_x ∈ μ kümesi için $c_\mu(U_x)\cap\mathrm{A} \neq \emptyset$ olur. Böylece $c_{g_2}(\mathrm{V})\cap f(\mathrm{A}) \supseteq$

$f(c_\mu(U_x))\cap f(\mathrm{A}) \supseteq f(c_\mu(U_x)\cap \mathrm{A}) \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan $f(\mathrm{x}) \in \gamma_{\theta(g_1,g_2)}(f(\mathrm{A}))$ ve $f(\ \gamma_\theta(\mathrm{A})\ ) \subseteq \gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\ f(\mathrm{A})\ )$ olur.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (1): U $\in g_2$ olsun. Lemma 2.19 dan $\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{U}) = c_{g_1}(\mathrm{U})$ ve $\gamma_\theta(f^{-1}(\mathrm{U})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{U})) = f^{-1}(c_{g_1}(\mathrm{U}))$ olur. O halde Teorem 4.4.2 (6) dan f fonksiyonu $\theta(\mu, g_1 g_2)$ – sürekli olur.

Teorem 4.4.7. (Min, 2011b) f : X → Y bir fonksiyon, μ X kümesi üzerinde ve g_1, g_2 Y kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. Y (g_1,g_2) – regüler ise o halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, $\theta(\mu, g_1 g_2)$ – süreklidir.
(2) Her B ⊆ Y $\theta(\ g_1,g_2\ )$ – kapalı kümesi için f^{-1}(B) θ – kapalıdır.
(3) Her V ⊆ Y $\theta(\ g_1,g_2\ )$ – açık kümesi için f^{-1}(V) θ – açıktır.

İspat. (1) ⇒ (2): B ⊆ Y $\theta(\ g_1,g_2\ )$ – kapalı olsun. Teorem 2.18 ve Teorem 4.4.6 ile $\gamma_\theta(\ f^{-1}(\mathrm{B})) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\theta(g_1,g_2)}(\mathrm{B})) = f^{-1}(\mathrm{B})$ olur. O halde f^{-1}(B) θ – kapalıdır.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (1): V $\in g_1$ olsun. Y $(\ g_1,g_2\ )$ – regüler olduğundan V kümesi aynı zamanda $\theta(\ g_1,g_2\ )$ – açıktır. Hipotezden, $f^{-1}(\mathrm{V}) = \iota_\theta(f^{-1}(\mathrm{V})) \subseteq \iota_\theta\ f^{-1}(c_{g_2}(\mathrm{V}))$ olur. O halde Teorem 4.4.2 (2) ile f fonksiyonu $\theta(\mu, g_1 g_2)$ – sürekli olur.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HEMEN HEMEN SÜREKLİLİK

5.1. Hemen Hemen (g, g') – Süreklilik

Tanım 5.1.1. (Min, 2009a) (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. x ∈ X ve f(x) ∈ V ∈ g' için x ∈ U ve f(U) ⊆ i(c(V)) olacak şekilde bir U ∈ g varsa f fonksiyonuna x noktasında hemen hemen (g, g') – süreklidir denir. f fonksiyonu X kümesinin her noktasında hemen hemen (g, g') – sürekli ise f fonksiyonuna hemen hemen (g, g') – süreklidir denir.

Teorem 5.1.2. (Min, 2009a) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f, x noktasında hemen hemen (g, g') – süreklidir.
(2) Her f(x) ∈ V ∈ g' için x ∈ i(f^{-1}(i(c(V)))) dir.
(3) Her f(x) i içeren V g - regüler açık kümesi için x ∈ i(f^{-1}(V)) dir.
(4) Her f(x) i içeren V g - regüler açık kümesi için f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır.

İspat. (1) ⇒ (2): f(x) ∈ V ∈ g' olsun. Hipotez yardımıyla, x ∈ U ve f(U) ⊆ i(c(V)) olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. Buradan x ∈ U ⊆ f^{-1}(i(c(V))) olur. O halde x ∈ i(f^{-1}(i(c(V)))) elde edilir.

(2) ⇒ (3): V kümesi f(x) i içeren g - regüler açık olsun. V kümesinin g - regüler açık olmasından ve (2) ile x ∈ i(f^{-1}(V)) olur.

(3) ⇒ (4): V kümesi f(x) i içeren g - regüler açık olsun. (3) şıkkından x ∈ i(f^{-1}(V)) olur. Bu durumda, x ∈ U ve U ⊆ f^{-1}(V) olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. O halde U ∈ g kümesi için f(U) ⊆ V elde edilir.

(4) ⇒ (1): f(x) ∈ V ∈ g' olsun. O zaman f(x) ∈ V ⊆ i(c(V)) olur. i(c(V)) kümesinin g - regüler açık olmasından ve (4) ile x ∈ U ve f(U) ⊆ i(c(V)) olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. O halde f fonksiyonu, x noktasında hemen hemen (g, g') – süreklidir.

Tanım 2.34 , Tanım 4.1.1 ve Tanım 5.1.1 den aşağıdaki diyagram elde edilir.

(g, g') – sürekli ⇒ hemen hemen (g, g') – sürekli ⇒ zayıf (g, g') – sürekli

Aşağıdaki örnekler diyagramın tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.1.3. X = {a,b,c,d} olsun. X kümesi üzerindeki g ve g' genelleştirilmiş topolojileri g = $\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ve g' = $\{\emptyset,\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ şeklinde tanımlansın. f : X → X fonksiyonu da f(a) = b, f(b) = f(d) = d ve f(c) = c olsun. Bu durumda f fonksiyonu hemen hemen (g, g') – süreklidir fakat G = {b,c} ∈ g' için (g, g') – sürekli değildir.

Örnek 5.1.4. (Min, 2009a) X = {a,b,c,d} olsun. X kümesi üzerindeki g ve g' genelleştirilmiş topolojileri g = { ∅, {a,b,c}, {d}, X } ve g' = { ∅, {a,c}, {a,c,d}, {b,c,d}, {d}, X } şeklinde tanımlansın. f : X → X fonksiyonu da birim fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu zayıf (g, g') – süreklidir fakat a ∈ X noktasında hemen hemen (g, g') – sürekli değildir.

Teorem 5.1.5. (Min, 2009a) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f, hemen hemen (g, g') – süreklidir.
(2) Her V ∈ g' için $f^{-1}(V) \subseteq i(f^{-1}(i(c(V))))$ olur.
(3) Her F g' - kapalı kümesi için $c(f^{-1}(c(i(F)))) \subseteq f^{-1}(F)$ olur.
(4) Her B ⊆ Y için $c(f^{-1}(c(i(c(B))))) \subseteq f^{-1}(c(B))$ olur.
(5) Her B ⊆ Y için $f^{-1}(i(B)) \subseteq i(f^{-1}(i(c(i(B)))))$ olur.
(6) Her V ⊆ Y g - regüler açık kümesi için $f^{-1}(V) \in g$ olur.
(7) Her F ⊆ Y g – regüler kapalı kümesi için $f^{-1}(F)$ g - kapalıdır.

İspat. (1) ⇒ (2): V ∈ g' ve x ∈ $f^{-1}(V)$ olsun. Hipotezden, x ∈ U ve $f(U) \subseteq i(c(V))$ olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. Buradan x ∈ U ⊆ $f^{-1}(i(c(V)))$ olur. O halde x ∈ $i(f^{-1}(i(c(V))))$ elde edilir.

(2) ⇒ (3): Açıktır.

(3) ⇒ (4): B ⊆ Y için c(B) g' – kapalı olduğundan (3) şıkkından açıktır.

(4) ⇒ (5): Açıktır.

(5) ⇒ (6): V kümesi g – regüler açık olsun. (5) ile f^{-1}(V) ⊆ i(f^{-1}(i(c(V)))) = i(f^{-1}(V)) olur. Bu durumda f^{-1}(V) = i(f^{-1}(V)) elde edilir. O halde f^{-1}(V) ∈ g olur.

(6) ⇒ (7): Açıktır.

(7) ⇒ (1): f(x) ∈ V kümesi g - regüler açık olsun. (7) ile X – f^{-1}(V) = f^{-1}(Y – V) = c(f^{-1}(Y – V)) = X – i(f^{-1}(V)) olur. Bu durumda x ∈ i(f^{-1}(V)) olur. O halde x ∈ U ve U ⊆ f^{-1}(V) olacak şekilde bir U ∈ g kümesi vardır. Teorem 5.1.2 ile f fonksiyonu hemen hemen (g, g') – süreklidir.

Teorem 5.1.6. (Min, 2009a) f : X → Y bir fonksiyon, (X,g) ve (Y,g') genelleştirilmiş topolojik uzaylar olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, hemen hemen (g, g') – süreklidir.
(2) Her G ⊆ Y g - β - açık kümesi için c(f^{-1}(G)) ⊆ f^{-1}(c(G)) olur.
(3) Her G ⊆ Y g - yarı açık kümesi için c(f^{-1}(G)) ⊆ f^{-1}(c(G)) olur.
(4) Her V ⊆ Y g - ön açık kümesi için f^{-1}(V) ⊆ i(f^{-1}(i(c(V)))) olur.

İspat. (1) ⇒ (2): G kümesi g – β – açık olsun. O zaman c(G) g – regüler kapalı olur. Teorem 5.1.5 (7) ile c(f^{-1}(c(G))) = f^{-1}(c(G)) elde edilir. O halde c(f^{-1}(G)) ⊆ c(f^{-1}(c(G))) = f^{-1}(c(G)) bulunur.

(2) ⇒ (3): Her g - yarı açık küme g - β - açık olduğundan açıktır.

(3) ⇒ (1): F kümesi g – regüler kapalı olsun. O zaman F kümesi g – yarı açık olur. Bu durumda, c(f^{-1}(F)) ⊆ f^{-1}(c(F)) = f^{-1}(F) elde edilir. O halde Teorem 5.1.5 (7) ile f fonksiyonu hemen hemen (g, g') – süreklidir.

(1) ⇒ (4): V kümesi g - ön açık olsun. O zaman V ⊆ i(c(V)) ve i(c(V)) g - regüler açıktır. Teorem 5.1.5 (6) ile f^{-1}(i(c(V))) = i(f^{-1}(i(c(V)))) olur. Bu durumda f^{-1}(V) ⊆ f^{-1}(i(c(V))) = i(f^{-1}(i(c(V)))) elde edilir.

(4) ⇒ (1): V kümesi g - regüler açık olsun. O zaman V kümesi g - ön açıktır. Bu durumda f^{-1}(V) ⊆ i(f^{-1}(i(c(V)))) = i(f^{-1}(V)) olur. O halde Teorem 5.1.5 (7) den f fonksiyonu hemen hemen (g, g') – süreklidir.

Teorem 5.1.7. g_1, X kümesi üzerinde, g_2, Y kümesi üzerinde ve g_3, Z kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f : X → Y fonksiyonu (g_1, g_2) – sürekli ve g : Y → Z fonksiyonu hemen hemen (g_2, g_3) – sürekli ise gof : X → Z fonksiyonu da hemen hemen (g_1, g_3) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve $g(f$(x)) ∈ G ∈ g_3 olsun. g fonksiyonunun hemen hemen (g_2, g_3) – sürekliliğinden g(V) ⊆ $i(c$(G)) olacak şekilde bir f(x) ∈ V ∈ g_2 kümesi vardır. f fonksiyonunun (g_1, g_2) – sürekliliğinden f^{-1}(V) ∈ g_1 olur. U = f^{-1}(V) ∈ g_1 alalım. Bu durumda, (gof)(U) = $g(f$(U)) = $g(f(f^{-1}$(V))) ⊆ g(V) ⊆ $i(c$(G)) olur. Sonuç olarak $go\ f$ fonksiyonu hemen hemen (g_1, g_3) – süreklidir.

Teorem 5.1.8. g_1, X kümesi üzerinde, g_2, Y kümesi üzerinde ve g_3, Z kümesi üzerinde genelleştirilmiş topolojiler olsun. f : X → Y fonksiyonu (g_1, g_2) – açık ve gof : X → Z fonksiyonu hemen hemen (g_1, g_3) – sürekli ise g : Y → Z fonksiyonu da hemen hemen (g_2, g_3) – süreklidir.

İspat. y ∈ Y ve g(y) ∈ G ∈ g_3 olsun. y = f(x) olacak şekilde bir x ∈ X noktası vardır. O halde gof fonksiyonunun hemen hemen (g_1, g_3) – sürekliliğinden (gof)(U) ⊆ $i(c$(G)) olacak şekilde bir x ∈ U ∈ g_1 kümesi vardır. f fonksiyonunun (g_1, g_2) – açık olmasından f(U) ∈ g_2 olur. Bu durumda, f(U) ∈ g_2 için (gof)(U) = $g(f$(U)) ⊆ $i(c$(G)) olur. Sonuç olarak g fonksiyonu hemen hemen (g_2, g_3) – süreklidir.

5.2. Hemen Hemen (ψ, ψ') – Süreklilik

Bu başlık altında hemen hemen sürekliliğinin komşuluk sistemleri yardımıyla tanımını vererek bazı karakterizasyonları elde ettik. Daha önce tanımlanan sürekliliklerle ilişkilerini inceledik ve karşıt örneklerle konuya açıklık getirdik.

Tanım 5.2.1. f : X → Y bir fonksiyon, ψ ∈ Ψ(X) ve ψ' ∈ Ψ(Y) olsun. x ∈ X ve V ∈ $\psi'(f$(x)) için f(U) ⊆ ι(γ(V)) olacak şekilde bir U ∈ ψ(x) varsa f fonksiyonuna hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir denir.

Teorem 5.2.2. f : X → Y bir fonksiyon, $\psi \in \Psi(X)$ ve $\psi' \in \Psi(Y)$ olsun. f fonksiyonu (ψ, ψ') – sürekli ise hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir.

İspat. $x \in X$ ve $V \in \psi'(f(x))$ olsun. Hipotezden, $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ kümesi vardır. Buradan, $f(U) \subseteq V \subseteq \iota(\gamma(V))$ bulunur. $U \in \psi(x)$ kümesi için $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V))$ olduğundan f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli olur.

Teorem 5.2.2. nin tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığına aittir.

Örnek 5.2.3. X = {a,b,c} olsun. ψ ve ψ' genelleştirilmiş komşuluk sistemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\psi(a) = \{\{a\},\{a,b\}\}$, $\psi(b) = \{\{a,b\}\}$, $\psi(c) = \{\{a,c\}\}$

$\psi'(a) = \{\{a,b\},X\}$, $\psi'(b) = \{\{b\},X\}$, $\psi'(c) = \{X\}$

f : X → X fonksiyonu birim fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu, hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir, fakat $b \in X$ için $\{b\} \in \psi'(b)$ alınırsa $f(U) \subseteq \{b\}$ olacak şekilde bir $U \in \psi(b)$ yoktur. O halde f fonksiyonu (ψ, ψ') – sürekli değildir.

Teorem 5.2.4. f : X → Y bir fonksiyon, $\psi \in \Psi(X)$ ve $\psi' \in \Psi(Y)$ olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

(1) f fonksiyonu, hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir.
(2) Her $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(\iota(B)) \subseteq \iota(f^{-1}(\iota(\gamma(B))))$ olur.
(3) Her $B \subseteq Y$ için $\gamma(f^{-1}(\gamma(\iota(B)))) \subseteq f^{-1}(\gamma(B))$ olur.

İspat. (1) ⇒ (2) : $x \in f^{-1}(\iota(B))$ olsun. O halde $V \subseteq B$ olacak şekilde bir $V \in \psi'(f(x))$ kümesi vardır. Hipotezden, $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V))$ koşulunu sağlayan bir $U \in \psi(x)$ kümesi vardır. $V \subseteq B$ olduğundan $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V)) \subseteq \iota(\gamma(B))$ olur. Buradan, $U \in \psi(x)$ kümesi için $U \subseteq f^{-1}(\iota(\gamma(B)))$ bulunur. O halde $x \in \iota(f^{-1}(\iota(\gamma(B))))$ elde edilir.

(2) ⇒ (1) : $x \in X$ ve $V \in \psi'(f(x))$ olsun. $f(x) \in \iota(V)$ olduğundan ve (2) ile $x \in f^{-1}(\iota(V)) \subseteq \iota(f^{-1}(\iota(\gamma(V))))$ bulunur. Bu durumda $U \subseteq f^{-1}(\iota(\gamma(V)))$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ kümesi vardır. Buradan, $U \in \psi(x)$ için $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V))$ olur. O halde f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir.

(2) ⇔ (3) : Açıktır.

Teorem 5.2.5. $f : X \to Y$ bir fonksiyon, $\psi \in \Psi(X)$ ve $\psi' \in \Psi(Y)$ olsun. f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli ise zayıf (ψ, ψ') – süreklidir.

İspat. $x \in X$ ve $V \in \psi'(f(x))$ olsun. Hipotez ile, $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V))$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ kümesi vardır. Buradan, $U \in \psi(x)$ için $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V)) \subseteq \gamma(V)$ bulunur. O halde f fonksiyonu zayıf (ψ, ψ') – süreklidir.

Teorem 5.2.5 in tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığına aittir.

Örnek 5.2.6. $X = \{a,b,c\}$ olsun. ψ ve ψ' genelleştirilmiş komşuluk sistemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\psi(a) = \{\{a\}\}$, $\psi(b) = \{\{a,b\}\}$, $\psi(c) = \{\{a,c\}\}$

$\psi'(a) = \{\{a,b\},X\}$, $\psi'(b) = \{\{b\},X\}$, $\psi'(c) = \{\{a,c\},X\}$

$f : X \to X$ fonksiyonu birim fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu zayıf (ψ, ψ') – süreklidir fakat $c \in X$ için $\{a,c\} \in \psi'(c)$ alınırsa $\gamma(\{a,c\}) = \{a,c\}$ ve $\iota(\{a,c\}) = \{c\}$ olur. Bu durumda $f(U) \subseteq \{c\}$ olacak şekilde bir $U \in \psi(c)$ yoktur. O halde f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli değildir.

Tanım 2.37, Tanım 4.1.7 ve Tanım 5.2.1 den aşağıdaki diyagram elde edilir.

(ψ, ψ') – sürekli

$\Downarrow$

hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli

$\Downarrow$

zayıf (ψ, ψ') – sürekli

Teorem 5.2.7. f : X → Y bir fonksiyon, $\psi \in \Psi(X)$ ve Y üzerindeki $g' = g_{\psi'}$ GT si için $\psi' \in \Psi_{g'}(Y)$ olsun. f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli ise hemen hemen ($g_\psi, g_{\psi'}$) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve G ∈ $g_{\psi'}(f(x))$ olsun. Buradan, V ⊆ G olacak şekilde bir V ∈ $\psi'(f(x))$ kümesi vardır. G ∈ $g_{\psi'}(f(x))$ olduğundan $f(x) \in G \subseteq \iota(\gamma(V))$ ve $x \in f^{-1}(\iota(\gamma(G)))$ olur. Hipotezden, $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V))$ sağlayan bir U ∈ $\psi(x)$ kümesi vardır. V ⊆ G ile $f(U) \subseteq \iota(\gamma(V)) \subseteq \iota(\gamma(G))$ olur. Buradan U ∈ $\psi(x)$ kümesi için $U \subseteq f^{-1}(\iota(\gamma(G)))$ olur. $H = f^{-1}(\iota(\gamma(G)))$ alınırsa g_ψ nin tanımından H ∈ g_ψ olur. Buradan ve Lemma 2.31 ile $f(H) = f(f^{-1}(\iota(\gamma(G)))) \subseteq \iota(\gamma(G)) \subseteq i(c(G))$ bulunur. O halde f fonksiyonu hemen hemen ($g_\psi, g_{\psi'}$) – süreklidir.

Aşağıdaki örnek her hemen hemen ($g_\psi, g_{\psi'}$) – sürekli fonksiyonun her zaman hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli olmadığını gösterir.

Örnek 5.2.8. X = {a,b,c} olsun. ψ ve ψ' genelleştirilmiş komşuluk sistemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\psi(a) = \{X\}$, $\psi(b) = \{X\}$, $\psi(c) = \{X\}$

$\psi'(a) = \{\{a\}\}$, $\psi'(b) = \{\{b,c\}\}$, $\psi'(c) = \{X\}$

O zaman sırasıyla ψ ve ψ' yardımıyla oluşturulan g_ψ ve $g_{\psi'}$ genelleştirilmiş topolojileri sırasıyla $g_\psi = \{\emptyset, X\}$ ve $g_{\psi'} = \{\emptyset,\{a\},X\}$ olur. f : X → X fonksiyonu birim fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonu hemen hemen ($g_\psi, g_{\psi'}$) – süreklidir fakat a ∈ X için {a} ∈ $\psi'(a)$ alınırsa $\gamma(\{a\}) = \{a,c\}$ ve $\iota(\{a,c\}) = \{a\}$ olur. Bu durumda $f(U) \subseteq \{a\}$ olacak şekilde bir U ∈ $\psi(a)$ yoktur. O halde f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – sürekli değildir.

Teorem 5.2.9. f : X → Y bir fonksiyon ve $\psi \in \Psi(X)$ olsun. f fonksiyonu hemen hemen ($g_\psi, g_{\psi'}$) – sürekli ve Y üzerindeki bazı g' GT si için $\psi' = \psi_{g'}$ ise hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve V ∈ $\psi'(f(x))$ olsun. $\psi' = \psi_{g'}$ olduğundan Lemma 2.32 ile $g' = g_{\psi'}$ sağlanır. Bu durumda V ∈ $\psi_{g'}(f(x))$ ve V ∈ $g' = g_{\psi'}$ olur. Hipotezden, x ∈ U ve f(U) ⊆ $i(c$(V)) olacak şekilde bir U ∈ g_ψ kümesi vardır. U ∈ g_ψ olduğundan bir H ∈ ψ(x) kümesi için H ⊆ U sağlanır. Lemma 2.31 ile f(H) ⊆ f(U) ⊆ $i(c$(V)) ⊆ ι(γ(V)) elde edilir. O halde f fonksiyonu hemen hemen (ψ, ψ') – süreklidir.

Teorem 5.2.10. f : X → Y ve g : Y → Z iki fonksiyon, ψ_1 ∈ Ψ(X), ψ_2 ∈ Ψ(Y) ve ψ_3 ∈ Ψ(Z) olsun. f fonksiyonu (ψ_1, ψ_2) – sürekli ve g fonksiyonu hemen hemen (ψ_2, ψ_3) – sürekli ise gof : X → Z fonksiyonu da hemen hemen (ψ_1, ψ_3) – süreklidir.

İspat. x ∈ X ve G ∈ $\psi_3(g(f$(x))) olsun. g fonksiyonunun hemen hemen (ψ_2, ψ_3) – sürekliliğinden g(V) ⊆ ι(γ(G)) olacak şekilde bir V ∈ $\psi_2(f$(x)) kümesi vardır. f fonksiyonunun (ψ_1, ψ_2) – sürekliliğinden f(U) ⊆ V olacak şekilde bir U ∈ ψ_1(x) kümesi vardır. Bu durumda, (gof)(U) ⊆ g(V) ⊆ ι(γ(G)) olur. Sonuç olarak gof fonksiyonu hemen hemen (ψ_1, ψ_3) – süreklidir.

6. SONUÇ

Genelleştirilmiş açık kümeler kavramı ilk olarak Csaszar tarafından 1997 yılında ortaya atılmıştır. Daha sonra da birçok çalışmada çeşitli komşuluk sistemleri ve süreklilikler incelenmiştir.

Biz de bu tezdeki çalışmalarımızı, Csaszar ın 2002 yılında yayınlanan “ Genelleştirilmiş Topoloji, Genelleştirilmiş Süreklilik ” isimli makalesini baz alarak yaptık. Çeşitli genelleştirilmiş komşuluk sistemlerini, süreklilikleri ve bazı süreklilik türlerinin mixed yapılarını inceleyerek bunlar arasındaki ilişkileri araştırdık. Ayrıca genelleştirilmiş topolojik uzaylarda hemen hemen sürekliliğin komşuluk sistemleri yardımıyla tanımını vererek daha önce tanımlanan süreklilikler ile ilişkilerini elde ettik ve karşıt örneklerle konuya açıklık getirdik.

KAYNAKLAR DİZİNİ

A. Csaszar, 1997, Generalized open sets, Acta Math, Hungar., 75, 65 – 87.

A. Csaszar, 2002, Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar., 96 (4), 351 – 357.

A. Csaszar, 2005, Generalized open sets in generalized topologies, Acta Math. Hungar., 106, 53 – 66.

A. Csaszar, 2008, δ – and ϴ – modifications of generalized topologies, Acta Math. Hungar., 120, 275 – 279.

A. Csaszar, 2009, Mixed constructions for generalized topologies, Acta Math. Hungar., 122, 153 – 159.

A. Csaszar and E. Makai. Jr., 2009, Further remarks on δ – and ϴ – modifications, Acta Math. Hungar., 123, 223 – 228.

A. S. Mashhour, A. A. Allam, F. S. Mahmoud, and F. H. Khedr, 1983, On supratopological spaces, Indian J.pure appl. Math., 14, no. 4, 502 – 510.

D. C. Kent and W. K. Min, 2002, Neighborhood spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 32, no. 7, 387 – 399.

W. K. Min, 2005, Some results on generalized topological spaces and generalized systems, Acta Math. Hungar., 108, no. 1 – 2, 171 – 181.

W. K. Min, 2008a, Weak continuity on generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 124 (1 -2), 73 – 81.

W. K. Min, 2008b, On strong generalized neighborhood systems and sg – open sets, Commun Korean Math., 23, no. 1, 125 – 131.

W. K. Min, 2008c, On weak neighborhood systems and spaces, Acta Math. Hungar., 121 (3), 283 – 292.

W. K. Min, 2009a, Almost continuity on generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 125, no. 1 – 2, 121 – 125.

W. K. Min, 2009b, A note on $\Theta(g, g')$ – continuity in generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 125, no. 4, 387 – 393.

W. K. Min, 2011a, Mixed weak continuity on generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 132 (4), 339 – 347.

W. K. Min, 2011b, Mixed ϴ – continuity on generalized topological spaces, Mathematical and computer modelling, 54, 2597 – 2601.

ÖZGEÇMİŞ

16.10.1988 yılında İzmir' de doğdu. İlk ve orta öğrenimlerini 1994 – 1996 yılları arasında Mehmetçik İlköğretim Okulu' nda, 1996 – 1999 yılları arasında Piri Mehmet Paşa İlköğretim Okulu' nda ve 1999 – 2002 yılları arasında Hasan Özvarnalı İlköğretim Okulu' nda okudu. Lise öğrenimine 2002 yılında Y. D. A. Silivri Lisesi' nde devam eden Nihal ARABACIOĞLU, buradan 2006 yılında mezun oldu. Yine 2006 yılında Öğrenci Seçme Sınavı' nda Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandı ve 2010 yılında bölüm ikinciliği ve teorik opsiyonu birinciliğiyle mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nın Topoloji Bilim Dalı' nda yüksek lisansa başladı. Halen öğrenimini burada sürdürmeye devam etmektedir.